

152305

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

152305

**ELASTİK ÇUBUK VE ÇERÇEVE SİSTEMLERİN
BURKULMA YÜKLERİNİN VARYASYONEL TÜREV
İLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Arif GÜRSOY

(501021093)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Nisan 2004

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Mayıs 2004

Tez Danışmanı : Y.Doç.Dr. Nihal ERATLI

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. A.Yalçın AKÖZ (İ.T.Ü.)

Y.Doç.Dr. Zafer KÜTÜĞ (Y.T.Ü.)

[Handwritten signatures of the jury members]

HAZİRAN 2004

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, elastik çubuk sistemlerin ve çerçeve sistemlerin burkulma analizleri, varyasyonel türev ile incelenmiştir. Çözüm için sonlu farklar metodundan yararlanılmıştır.

Bu çalışma esnasında, bilimsel altyapımın oluşmasında değerli katkılarını esirgemeyen ve engin tecrübelerinden yararlanma fırsatı veren kıymetli hocam Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ'e, bu çalışma sırasında beni her zaman motive eden, bilimsel araştırma ve çalışma yöntemlerini öğreten, bana her zaman kıymetli vakitlerini ayıran değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nihal ERATLI'ya, Yüksek Lisans çalışmam boyunca güler yüzünü eksik etmeyen her konuda yardımcı olamaya çalışan bölüm sekreterimiz İnş. Müh. Gülçin GÜLEY'e, Araştırma görevlisi Murat YILMAZ'a ve öğrencilik hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nisan 2004

İnş. Müh. Arif GÜRSOY

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
2. VARYASYONEL TÜREV KULLANILARAK FORMÜLASYONUN ELDE EDİLMESİ	3
2.1. Varyasyonel Türev	3
2.2. Formülasyon	5
3. EKSENEL BASINÇ YÜKÜNE MARUZ ELASTİK ÇUBUKLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN ELDE EDİLEN FORMÜLASYON İLE BULUNMASI	10
3.1. İki Ucu Mafsallı Elastik Çubuk Elemanın Burkulma Yüklerinin Hesaplanması	10
3.2. İki Ucu Ankastre Elastik Çubuk Elemanın Burkulma Yüklerinin Hesaplanması	14
3.3. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Mafsallı Çubuk Elemanın Burkulma Yüklerinin Hesaplanması	17
3.4. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Çubuk Elemanın Burkulma Yüklerinin Hesaplanması	21
4. UYGULAMALAR	25
4.1. Eksenel Basınç Yüküne Maruz Değişken Kesitli Elemanların Burkulma Yüklerinin Analizleri	25
4.1.1. Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Süreksiz Değişken Kesitli Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	25
4.1.2. Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Süreksiz Değişken Kesitli Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	28
4.1.3. Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Sürekli Değişken Kesitli Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	30
4.1.4. Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Sürekli Değişken Kesitli Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	33
4.2. Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Elemanların Burkulma Yüklerinin Analizleri	35
4.2.1. Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	35
4.2.2. Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	38

4.2.3. Sürekli Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	40
4.2.4. Sürekli Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri	43
4.3. Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Süreksiz Değişken Kesitli Çubuk Eleman	46
4.4. Eksenel Basınç Yüküne Maruz Sürekli Kiriş Sistemler	48
5. YARIM VE TAM ÇERÇEVE SİSTEMLER	51
5.1. Yarım Çerçeve Sistemler	51
5.1.1. İki Ucu Mafsallı Yarım Çerçeve Sistemlerin Burkulma Analizleri	51
5.1.2. Bir Ucu Mafsallı Bir Ucu Ankastre Yarım Çerçeve Sistemlerin Burkulma Analizleri	54
5.2. Tam Çerçeve Sistemler	57
5.2.1. Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve Sistem	57
5.2.2. Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçeve Sistem	60
6. SONUÇLAR	63
KAYNAKLAR	65
EKLER	66
ÖZGEÇMİŞ	70

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1 : İki ucu mafsallı çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	12
Tablo 3.2 : İki ucu ankastre çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	16
Tablo 3.3 : Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	19
Tablo 3.4 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	23
Tablo 4.1 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	27
Tablo 4.2 : İki ucu mafsallı süreksiz değişken kesitli çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	30
Tablo 4.3 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli çubuğun burkulma problemine ait çözümler.....	32
Tablo 4.4 : İki ucu mafsallı serbest sürekli değişken kesitli çubuğun burkulma problemine ait çözümler.....	35
Tablo 4.5 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	37
Tablo 4.6 : İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	39
Tablo 4.7 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk sistemin burkulma problemine ait çözümleri.....	42
Tablo 4.8 : İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri.....	45
Tablo 4.9 : Süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk elemanın çözümleri.....	47
Tablo 4.10 : İki ucu mafsallı sürekli giriş sistemin burkulma problemine ait çözümleri.....	50
Tablo 5.1 : İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri.....	53
Tablo 5.2 : Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri.....	56
Tablo 5.3 : Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistemin burkulma yükleri.....	59
Tablo 5.4 : Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistemin burkulma yükleri.....	62

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Çubuk sisteme ait düğüm noktaları ve elemanları.....	7
Şekil 2.2 : Sonlu fark yöntemi uygulanan çubuk sistem.....	8
Şekil 3.1 : İki ucu mafsallı elastik çubuk.....	10
Şekil 3.2 : İki ucu mafsallı çubuk elemanın çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı.....	13
Şekil 3.3 : İki ucu mafsallı elemanın çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması.....	13
Şekil 3.4 : İki ucu ankastre elastik çubuk eleman.....	14
Şekil 3.5 : İki ucu ankastre çubuk elemanın çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı.....	16
Şekil 3.6 : İki ucu ankastre elemanın çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması.....	17
Şekil 3.7 : Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı elastik çubuk eleman.....	17
Şekil 3.8 : Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuk elemanın çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı.....	20
Şekil 3.9 : Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı elemanın çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması.....	20
Şekil 3.10 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest elastik çubuk eleman.....	21
Şekil 3.11 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk elemanın çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı.....	23
Şekil 3.12 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest elemanın çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması.....	24
Şekil 4.1 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli eleman	26
Şekil 4.2 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	28
Şekil 4.3 : İki ucu mafsallı süreksiz değişken kesitli eleman.....	29
Şekil 4.4 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli çubuk eleman.....	31
Şekil 4.5 : İki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli çubuk eleman.....	33
Şekil 4.6 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk eleman.....	35
Şekil 4.7 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	37
Şekil 4.8 : İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk eleman.....	38
Şekil 4.9 : İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	40
Şekil 4.10 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk eleman.....	40

Şekil 4.11 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	43
Şekil 4.12 : İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk eleman.....	43
Şekil 4.13 : İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	45
Şekil 4.14 : Süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk sistem.....	46
Şekil 4.15 : Eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı sürekli giriş.....	48
Şekil 4.16 : İki ucu mafsallı sürekli giriş sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	50
Şekil 5.1 : İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistem.....	51
Şekil 5.2 : İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	53
Şekil 5.3 : Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistem.....	54
Şekil 5.4 : Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı.....	56
Şekil 5.5 : Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistem.....	57
Şekil 5.6 : Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistemin gerçek değerine yaklaşımı.....	59
Şekil 5.7 : Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistem.....	60
Şekil 5.8 : Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistemin gerçek değerine yaklaşımı.....	62

SEMBOL LİSTESİ

E	: Elastisite modülü
f(x)	: Fonksiyon
H	: Yatay tepki kuvveti
I	: Elemanın atalet momenti
I(y)	: Fonksiyonel
L	: Çubuk boyu
M	: Moment
m	: Eğim
N	: Normal kuvvet
P	: Eksenel basınç yükü
P_{cr}	: Kritik burkulma yükü
P_{Euler}	: Euler burkulma yükü
q	: Eksene dik yayılı yük
q₀	: Çubuk elemanın birim boyunun ağırlığı
v	: Çökme
z	: Uzaklık değişimi
δ	: Konsol elemanın yatay yer değiştirmesi
δI	: I(y) fonksiyonelinin birinci değişimi(varyasyonu)
Δ	: Düğüm noktaları arası uzaklık

ELASTİK ÇUBUK VE ÇERÇEVE SİSTEMLERİN BURKULMA YÜKLERİNİN VARYASYONEL TÜREV İLE İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, öncelikle elastik çubukların burkulma problemleri varyasyonel türev ve sonlu fark yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra yarım çerçeve ve tam çerçeve sistemlerin burkulma hesapları varyasyonel türev ve sonlu fark metodu kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu kısaca açıklanmış ve literatürde yapılan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, varyasyonel türevin tanımı yapılmış ve çubuk sistemlerin eleman matrisi elde edilmiştir. Varyasyonel türevin, sonlu fark yönteminden ayıran farklılıklar vurgulanmış ve sonlu eleman yöntemi ile ortak noktaları gösterilmiştir. Daha önce elde edilen fonksiyonele varyasyonel türev uygulanarak eksenel basınç yüküne maruz çubukların bölge ve sınır şartlarına ulaşılmıştır.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen eleman matrisi kullanılarak farklı mesnet tipleri için eleman sayıları artırılarak yaklaşık burkulma yükleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar problemin kesin çözümü olan Euler halleri ve literatürde yapılan diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, uygulamalar başlığı altında sürekli ve süreksiz değişken yük problemleri, sürekli ve süreksiz değişken kesit problemleri ve sürekli giriş problemleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde, yarım çerçeve ve tam çerçeve sistemlerin burkulma yükleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler literatürde daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde, bu çalışma hakkında kısa bir sonuç değerlendirmesi yapılmıştır. Ekler bölümünde ise bu çalışma yapılırken kullanılan Fortran yazılım programı ve programın işleyişi hakkında bilgi verilmiştir.

BUCKLING ANALYSIS OF ELASTIC BAR AND FRAME SYSTEMS USING WITH VARIATIONAL DERIVATION

SUMMARY

In this thesis, first of all the buckling problems of elastic bar have been solved by using variational derivation and finite difference methods. After that the buckling problems of half frame and complete frame have been solved using variational derivation and finite difference methods. This thesis consists of six parts.

In the first part, the subject of the study has been explained. Some information has been given about past studies in buckling analysis in literature briefly.

In the second part, the fundamental idea of the variational derivation and finite difference methods have been explained and the element matrix has been obtained which belongs to elastic bar system. The difference between variational derivation and finite difference method have been explained and the common points between variational derivation and finite element methods have stressed. Variational derivation has been applied into obtaining functional and then the region and the boundary conditions are found.

In the third part, the approximate buckling forces including various support types with increasing element numbers have been calculated using the element matrices which are obtained in the second part. The results have been compared with the exact solution obtained from Euler type and the other studies done in literature.

In the fourth part, problems of continuous and transient variable force, problems of continuous and transient variable cross-section and problems of continuous beam have been examined under the example title. The results of the problems have been compared with past investigations about these problems in literature.

In the fifth part, the buckling force of the half frame and complete frame have been calculated. The results of the problems have been compared with past studies about these problems in literature.

In the sixth and the last part, consequence evaluation of this study has been done briefly. In the appendix, a computer program is developed by using a software named Fortran. This computer program has been explained.

1. GİRİŞ

Yapı sistemlerinde, taşıyıcı elemanların boyutlandırılmasında üç temel esas göz önünde tutulur. Birincisi, taşıyıcı elemanların gerilmelerinin belirli bir sınır değeri aşmamasıdır. İkincisi, taşıyıcı elemanların şekil değiştirmelerinin belirli bir sınır değeri aşmamasıdır. Taşıyıcı elemanlarda bunlardan başka bir tehlike nedeni daha vardır ki, bu da sistemin denge konumunun kararsız olma durumudur. Denge konumunun kararlı olmaması halinde, dış yüklerin etkisi ile sistem denge konumundan saptırılırsa tekrar ilk konuma geri dönemez. Bu tür problemlere stabilite problemi adı verilmektedir.

Stabilite konusunun önemi nedeniyle, bu konu ile ilgili yapılan çalışmalara da ağırlık verilmiş ve literatüre bakıldığında stabilite konusu ile ilgili çok sayıda yayının mevcut olduğu görülmektedir. Bu çalışmaların bir kısmında problemin kesin çözümü üzerinde durulmasına karşılık, genelde kesin çözüm yerine sonlu eleman, sonlu fark, Ritz vb. yaklaşık çözümler üzerinde yoğunlaşıldığı gözlenmiştir.

Tuominen P. ve Jaako T., [8], çalışmalarında sonlu elemanlar yöntemi ile sonlu farklar yöntemi arasında ilişki kurmaya çalışmıştır. Çözümde denge denklemlerinden yararlanılmış ve elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çerçeve sistemlerle ilgili sayısal bir örneğe de yer verilmiştir.

Qiusheng L., Hong C. ve Guiqing L., [6], çalışmalarında Bessel fonksiyonları ve geometrik serilerden yararlanarak, sabit ve değişken kesitli çubuk sistemlerin, sabit ve değişken eksenel yük etkisinde burkulma analizlerini yapmışlardır.

Xie Y.M., Steven G. P., [3], çalışmalarında geliştirdikleri formülasyonla değişik mesnet koşulları altında çubuk ve çerçeve sistemlerinin çözümünü yapmışlar ve kullandıkları formülasyonun üç boyutlu çerçeve sistemlerine de uygulanabilirliğini göstermişlerdir.

Karabalis D.L., Beskos D.E., [2], çalışmalarında değişken kesitli çubuk sistemlerinin statik, dinamik ve stabilite analizlerini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yapmışlardır. Ayrıca , çalışmalarında sürekli kiriş ve çerçeve sistemlerinin çözümüne de yer vermişlerdir.

Gün T., [7], çalışmasında fonksiyonel analiz yöntemini ve Gâteaux türevini kullanarak, elastik doğru eksenli çubukların burkulmasına ait yeni bir fonksiyonel elde etmiştir. Ritz ve lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlu sonlu eleman yöntemlerini kullanarak çubuk, sürekli kiriş ve çerçeve sistemlerinin çözümünü yapmıştır.

Bu çalışmada ise, elastik çubukların burkulma analizleri varyasyonel türev kullanılarak Gelfond I. M., Fomin S. V., [10] tarafından yapılmıştır. Gün'nün [7] çalışmasında elde edilen fonksiyonel kullanılarak, varyasyonel türev ile çubuk elemanın eleman matrisi elde edilmiştir. Bu eleman matrisi incelendiğinde, varyasyonel türevin, sonlu fark yöntemine son derece benzediği, fakat sonlu fark yönteminin uygulanmasında sıkıntıya neden olan bölge dışı noktaları devre dışı bırakması nedeni ile de daha avantajlı olduğu görülmüştür. Düğüm noktaları arasındaki değişimin lineer olması durumu da göz önünde bulundurulursa, eleman matrisinin [Gün]'ün çalışmasında yer alan lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman matrisi ile de üst üste düştüğü görülmüştür. Elde edilen eleman matrisi, sınır koşulları göz önünde bulundurularak kodlama ile, Fortran dilinde yazılan program yardımıyla sistem matrisine aktarılmıştır. Amaç burkulma yükünün hesabı olduğuna göre, sistem matrisi özdeğer problemine indirgenmiş ve yine Fortran kütüphanesinde yer alan özdeğer programı (GVCRG) kullanılarak çubuk sistemlerin Euler burkulma yükleri hesaplanmıştır. Geliştirilen formülasyon sabit ve değişken kesitli , sabit ve değişken eksenel yüke maruz çubuk sistemlere, sürekli kirişlere, yarım ve tam çerçeve sistemlere uygulanmış ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. VARYASYONEL TÜREV KULLANILARAK FORMÜLASYONUN ELDE EDİLMESİ

2.1. Varyasyonel Türev

Enerji yöntemleri, ilke olarak belirli bir fonksiyoneli stasyoner yapan çözümlerin aranması esasına dayanır. Fonksiyonellerin stasyoner özelliklerinin incelendiği matematik dalına varyasyonel yöntemler adı verilir. Varyasyonel yöntem, karmaşık problemlerin diferansiyel denklemlerinin ve sınır koşullarının elde edilmesinde güvenilir bir yoldur. Bir fiziksel olaya ait fonksiyonel belli ise bu fonksiyonelden problemin diferansiyel denklemi ve sınır koşulları kolaylıkla hesaplanabilir. Bir fiziksel olayın diferansiyel denklemi ve sınır koşulları belli ise bunlara karşı gelen eşdeğer fonksiyonel de hesaplanabilir, fakat diferansiyel denklemden fonksiyonele geçiş her zaman kolay olmayabilir. Bir fonksiyonelin varyasyonu ise, bir fonksiyonun ekstramum problemi esasına dayanır. Fonksiyonel genel olarak sınır koşulları ile birlikte,

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Denklem (2.1)'de integral içindeki x serbest değişkeni, y ise x 'e bağlı bir fonksiyon olup sonuç bir sayıdır. Görüldüğü gibi fonksiyonel, kaynağında fonksiyonlar, amacında ise reel sayılar olan bir operatördür. (2.1)'de tanımlanan fonksiyonele küçük bir değişim $(y + h)$ verilerek,

$$I[y + h] = \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx \quad (2.2)$$

$h(a) = h(b) = 0$ olmak üzere fonksiyonelin varyasyonu hesaplanmak istenirse,

$$\Delta I = I[y + h] - I[y] = \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2.3)$$

elde edilir. (2.3) ifadesinde eşitliğin sağ tarafı Taylor serisine açılırsa,

$$\Delta I = \left[\int_a^b F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h' \right] dx + \dots \quad (2.4)$$

ifadesi yazılabilir. (2.4) ifadesindeki ΔI artımını, yani δI varyasyonunu tanımlar ve buna göre

$$\delta I = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx \quad (2.5)$$

dir. $y(x)$ 'in $I(y)$ fonksiyoneli ekstreum yapması için gerekli koşul birinci varyasyonun (δI) sıfır olmasıdır [10]. Bu koşul kullanılarak

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (2.6)$$

Euler denklemi elde edilir. Varyasyonel türev kavramı kullanılarak da I fonksiyonelinin sayısal olarak varyasyonunu hesaplamak mümkündür. (2.1) ifadesi yeniden ele alınırsa, bu ifadede $[a, b]$ aralığının $n+1$ eşit parçaya bölündüğü kabul edilsin.

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b, \quad (x_{i+1} - x_i = \Delta) \quad (2.7)$$

(2.1)'deki fonksiyonelin herhangi bir eğri boyunca aldığı değerler değil de, (2.7)'de tanımlı $n+1$ noktadaki $y(x)$ 'lerin meydana getirdiği poligon eğriler boyunca aldığı değerler düşünülecek olursa

$$(x_0, A), (x_1, y(x_1)), \dots, (x_n, y(x_n)), (x_{n+1}, B) \quad (2.8)$$

kullanılarak $I(y)$ fonksiyoneli

$$I(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F \left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta} \right) \Delta \quad (2.9)$$

şeklinde toplam ifadesi ile verilebilir. Burada, $y_i = y(x_i)$ ve $x_{i+1} - x_i = \Delta$ 'dir. Dolayısı ile (2.9) ifadesinden de görüldüğü gibi n değişkenli bir fonksiyon elde

edilmektedir. $(y_0 = A, y_{n+1} = B)$. Bu yaklaşımla, problem $I(y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonelinin ekstramumunun bulunmasına indirgenmiş olur. (2.9) ifadesinin y_k 'lara göre kısmi türevleri hesaplanacak olursa,

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = F_y \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} \right) \Delta + F_{y'} \left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta} \right) - F_{y'} \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} \right) \quad (2.10)$$

$i = k$ ve $i = k - 1$ olmak üzere iki terim gelir. $\Delta \rightarrow 0$ iken (2.10) ifadesinin sağ tarafı limit durumunda

$$\frac{\delta I}{\delta y} \equiv F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \quad (2.11)$$

yazılır ve elde edilen bu ifadeye varyasyonel türev denir. (2.11)'in sağ tarafı (2.5) denkleminde sifıra eşittir. Dolayısı ile $\partial I / \partial y$ ifadesi her noktada sifıra eşittir.

Aslında, (2.7) ve (2.8) ifadelerinin kullanılması sonlu fark yöntemini tanımlar. (2.11) ile tanımlanan varyasyonel türev ifadesinin farkı, sonlu fark yönteminde karşılaşılan en önemli sıkıntıyı ortadan kaldırması ve ona bir anlam vermesidir. Varyasyonel yöntemin uygulanması ile bölge dışında kalan komşu düğüm noktalarının kullanılmasına gerek duyulmaz.

2.2. Formülasyon

Çubuklarda burkulma yüklerinin hesabında Ritz, sonlu eleman, sonlu fark gibi değişik yaklaşık yöntemleri kullanmak mümkündür. Bu çalışmada, [7] çalışmasında elde edilen fonksiyonelden yararlanılarak varyasyonel türev yöntemi ile çubukların burkulma yüklerinin hesabı için bir formülasyon geliştirilmiştir. Bu fonksiyonde yer alan bilinmeyenler sırası ile moment ve yer değiştirmedir (M, v). Amaç burkulma yükünün bulunmasıdır. Bunun için önce fonksiyonel [7]'den

$$I = \int \left\{ M' v' - \frac{M^2}{2EI} - \frac{1}{2} N v'^2 \right\} dz \quad (2.12)$$

şeklinde alınıp birinci varyasyon işlemi uygulanırsa

$$\delta I = \int \left(-v' \delta M' - M' \delta v' + \frac{M}{EI} \delta M + N v' \delta v' \right) dz \quad (2.13)$$

(2.13) denkleminde integral işlemleri yapılırsa,

$$\delta I = -v' \delta M + \int v'' \delta M dz - M' \delta v + \int M'' \delta v dz + \int \frac{M}{EI} \delta M dz + N v' \delta v - \int N v'' \delta v dz \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) denklemini düzenlenirse de

$$\delta I = \int \left(v'' + \frac{M}{EI} \right) \delta M dz + \int (M'' - N v'') \delta v dz - v' \delta M + (N v' - M') \delta v \quad (2.15)$$

bulunur. Fonksiyonelin birinci varyasyonu $\delta I = 0$ olduğundan, bölge denklemleri,

$$-\left(v'' + \frac{M}{EI} \right) = 0 \quad (2.16.a)$$

$$-M'' + (N v')' = 0 \quad (2.16.b)$$

ve sınır koşulları

$$v' = 0 \quad \text{veya} \quad \delta M = 0 \quad (2.17.a)$$

$$N v' - M' = 0 \quad \text{veya} \quad \delta v = 0 \quad (2.17.b)$$

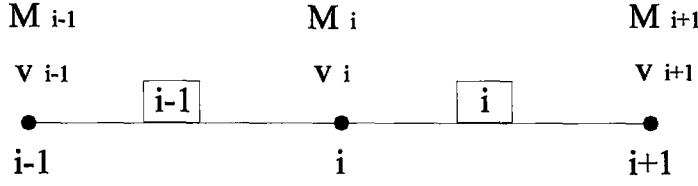
şeklinde ifade edilebilir. (2.16) ifadesinde birinci ve ikinci türev ifadeleri yerine

$$v' = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta} \quad (2.18a)$$

$$v'' = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \quad (2.18b)$$

$$M'' = \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{\Delta^2} \quad (2.18c)$$

sonlu fark yönteminde kullanılan (2.18) ifadeleri yerleştirilirse Şekil 2.1'deki i düğüm noktası için yazılırsa



Şekil 2.1 Çubuk sisteme ait düğüm noktaları ve elemanlar

$$-\left[\left(\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2}\right) + \frac{M_i}{EI}\right] = 0 \quad (2.19a)$$

$$-\left(\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{\Delta^2}\right) + N_i \left(\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2}\right) + N'_i \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta}\right) = 0 \quad (2.19b)$$

elde edilir. Eksenel kuvvet sabit ise (2.19) denklemindeki son terim düşer. Benzer yaklaşım [8]'de uygulanmıştır. Buradaki en önemli sıkıntı, bölüm 2.1'de de bahsedildiği gibi tanımlanması gereken, bölge dışındaki düğüm noktalarındaki büyüklüklerin nasıl tanımlanması gerektiğidir. Bu nedenle de bölge dışı noktalara gereksinim duymayan varyasyonel türev kullanılarak çözüm için gerekli formülasyon geliştirilmiştir. Eleman matrisi için (2.12) ifadesindeki fonksiyonelde (2.18a) yerleştirilip, i elemanın, her bir düğüm noktasında bilinmeyen olarak tanımlanan moment ve yer değiştirmelere göre türevleri alınıp (2.11) 'e göre sıfıra eşitlenirse, $\lambda^2 = \Delta^2/EI$ olmak üzere, eleman matrisinin

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -N_i & N_i \\ -1 & 1 & N_i & -N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_{i+1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

şeklinde sadece bölge içi terimlerini içerecek şekilde elde edildiği görülmektedir. (2.19.a) ve (2.19.b), (2.16) diferansiyel denkleminin bir i düğüm noktasında aldığı ifadelerdir. Diğer taraftan (2.20) ifadesi, fonksiyonelin i elemanında, uç düğüm noktalarındaki büyüklüklere göre minimum yapılmasıdır. Ancak, (2.20)'nin (2.19.a) ve (2.19.b)'ye eş değer olduğu gösterilebilir. Bunu göstermek için (2.20) ifadesi, komşu iki elemanın ($i-1$ ve i) ortak i düğüm noktasındaki büyüklüklere uygulanırsa,

$$M_i \Rightarrow \begin{cases} (-v_{i-1} + v_i) \\ + \\ (-\lambda^2 M_i + v_i - v_{i+1}) \end{cases} = 0 \Rightarrow -\lambda^2 M_i - v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = 0 \quad (2.21.a)$$

$$v_i \Rightarrow \begin{cases} -M_{i-1} + M_i + N_i(-v_{i-1} + v_i) \\ + \\ M_i - M_{i+1} + N_i(v_i - v_{i+1}) \end{cases} = 0$$

$$\Rightarrow -M_{i-1} + 2M_i - M_{i+1} + N_i(-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}) = 0 \quad (2.21.b)$$

elde edilir. (2.21.b)'nin Δ^2 'ye bölünmesi değerini değiştirmez. Bu durumda, (2.21.a) ve (2.21.b)'nin klasik sonlu fark denklemlerini verdiği görülmektedir. Sonuç olarak, bölge içi noktalarda varyasyonel türev ile sonlu fark yöntemi eşdeğer olmaktadır. Ancak, farklılık bölgenin sınırlarında ortaya çıkmaktadır.



Şekil 2.2 Sonlu fark yöntemi uygulanan çubuk sistem

Şekil 2.2'ye sonlu fark yöntemini uyguladığımızı düşünelim. Bu yöntemle göre denklemlerin düğüm noktalarında yazıldığı ve bir düğüm noktasına uygulanan sonlu fark denklemlerinde, komşu düğüm noktalarındaki değerlerin kullanıldığı bilinmektedir. *A* ve *B* uç noktalarında ise sadece bir gerçek komşu düğüm noktası vardır. Gerçek olmayan komşu düğüm noktasına bazı kabullerle değer atamak gerekir. Uç nokta mafsalla bağlanmış ise, sorun yaşanmaz, fakat ankastre bağ ile bağlanmış veya serbest ise, bu tür uçların gerçek olmayan düğüm noktalarındaki büyüklüklerin belirlenmesinde ciddi sorunlar çıkar. Varyasyonel türev yönteminin gerçek değeri, sonlu fark yöntemine anlam vermesidir. Çünkü, varyasyonel türev yönteminde bölge dışına çıkılmasına gerek yoktur. Bu da bölge dışı komşu düğüm noktalarındaki büyüklüklerin bazı kabullerle tanımlanmasına gerek duyulmaması demektir.

(2.20)'deki eleman matrisi iki düğüm noktası arasında momentin sabit olması kabulüne göre elde edilmiştir. Eğer iki düğüm noktası arasında momentin lineer değiştiği kabul edilerek eleman matrisi yeniden hesaplanırsa

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2/3 & -\lambda^2/6 & 1 & -1 \\ -\lambda^2/6 & -\lambda^2/3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -N_i & N_i \\ -1 & 1 & N_i & -N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_{i+1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

ifadesinin elde edildiği görülmektedir ki, bu da sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen eleman matrisi ile üst üste düşer [7].

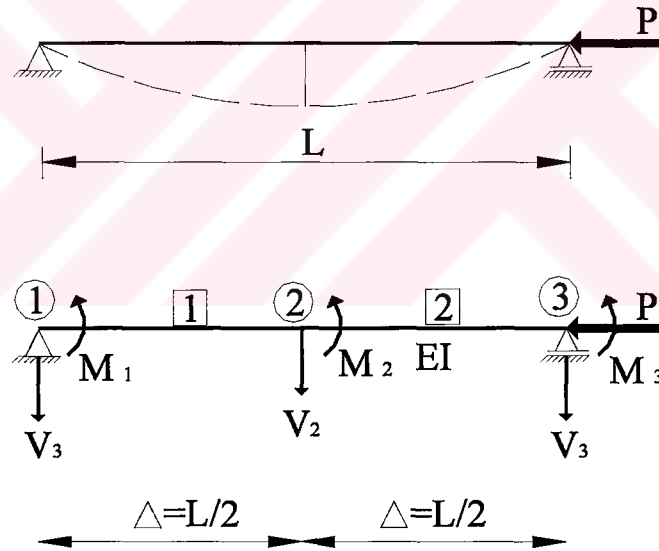
Sonuç olarak, varyasyonel türev yöntemi, sonlu fark yöntemine benzemekle birlikte, bölge dışı komşu düğüm noktalarındaki büyüklükleri tanımlamaya ihtiyaç duymadığı için kolayca uygulanabilir. Farklı bir sayısal yöntem olarak uygulanan sonlu eleman yöntemi ile de ortak noktada birleşebildiği gözlenmiştir.



3. EKSENEL BASINÇ YÜKÜNE MARUZ ELASTİK ÇUBUKLARIN BURKULMA YÜKLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümde, ikinci bölümde elde edilen (2.20) deki eleman matrisleri kullanılarak, değişik sınır koşulları göz önünde bulundurularak, kodlama yöntemi ile sistem matrisi oluşturulacaktır. Sistem matrisinde bilinmeyenler, moment (M) ve çökme (v) dir.

3.1 İki Ucu Mafsallı Elastik Çubuğun Burkulma Yüklerinin Hesaplanması



Şekil 3.1 İki ucu mafsallı elastik çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) kullanılarak her bir elemanın eleman matrisleri elde edilecektir. Kodlama sistemi kullanılarak sistem matrisine geçiş yapılacak ve bu matrisin çözümü ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 3.1 de aksenal basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı çubuk sistemin bilinmeyenleri gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (3.1.a)$$

$$M_1 = v_1'' = 0, \quad M_3 = v_3'' = 0 \quad (3.1.b)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.a) ve (3.1.b) sınır koşullarına ait satır ve sütunlar sistem matrisinden atılarak çözüm yapılmıştır. Bu satır ve sütunlar atıldıktan sonra sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade tanımlanarak, problem

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (3.4)$$

öz değer problemine dönüştürülür. (3.2) sistem matrisinin çözümü (3.4) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = \frac{8EI}{L^2} \quad (3.5)$$

olarak bulunmuştur. Euler hallerinden bilindiği üzere, bu mesnet şartlarına ait burkulma yükü [1]

$$P_{Euler} = 9.8696 \frac{EI}{L^2} \quad (3.6)$$

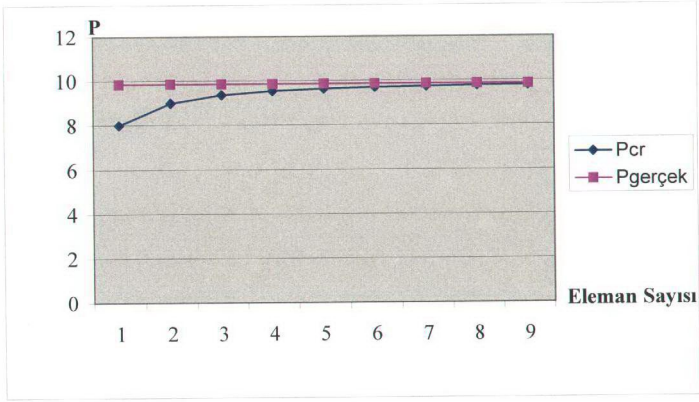
olarak hesaplanmıştır. 2 eleman için (3.5) da bulunan değerin (3.6) daki gerçek değerine yaklaşım oranı %81 mertebesindedir. Eleman sayıları arttırılarak çözüme devam edilmesi sonucunda elde edilen sonuçlar özet olarak tablo (3.1) de verilmiştir.

Tablo 3.1 İki ucu mafsallı çubuğun burkulma problemine ait çözümler

ELEMAN SAYISI	P _{cr}	P _{gerçek}	HATA ORANI(%)
2	8	9,8696	18,94
3	9		8,81
4	9,3725		5,036
5	9,5492		3,24
6	9,6462		2,26
7	9,705		1,67
8	9,7433		1,28
9	9,7698		1,011
10	9,7892		0,81

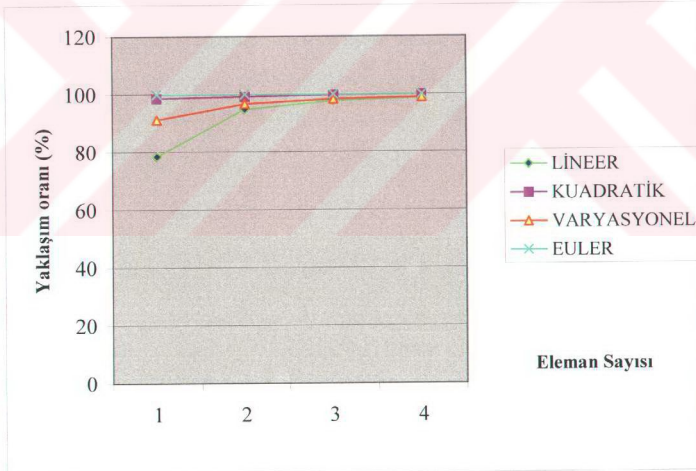
Tablo (3.1) deki sonuçların grafik olarak gösterimi de dokuz eleman için şekil 3.2’de yer almaktadır. Eleman sayıları arttırıldığında elde edilen sonuçların üst üste düştüğü gözlenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Gün’ün [7] çalışmasındaki lineer şekil fonksiyonlu sonlu elemana göre elde ettiği sonuçlarla uyumludur. Gün’ün [7] çalışmasında, kübik ve kuadratik şekil fonksiyonlu sonlu elemana göre yaklaşımın daha yavaş olduğu gözlenmiştir.



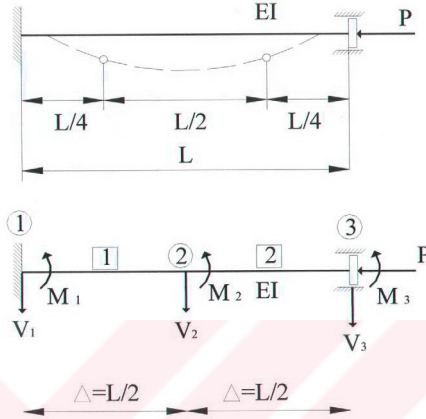
Şekil 3.2 İki ucu mafsallı çubuğun çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı

Bütün bu çözümlerin Euler çözümüne yaklaşımları şekil 3.3 de gösterilmiştir. Karşılaştırmalar 3, 5, 7 ve 9 düğüm noktalı elemanlar baz alınarak yapılmıştır.



Şekil 3.3 İki ucu mafsallı çubuğun çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması

3.2 İki Ucu Ankastre Elastik Çubuğun Burkulma Yüklerinin Hesaplanması



Şekil 3.4 İki ucu ankastre elastik çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir elemanın eleman matrisi elde edilecektir. Bu bilgiler kodlama ile sistem matrisine aktarılacak ve bu sistem matrisinin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 3.4 de eksenel basınç yüküne maruz iki ucu ankastre çubuk sistemin bilinmeyenleri gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (3.7)$$

dır. $\lambda^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir. (3.7) sınır koşullu kullanılarak sistem matrisi elde edilir. Bu sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanarak, çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (3.10)$$

öz değer problemine dönüştürülür. (3.8) global matrisinin çözümü (3.10) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = \frac{22EI}{L^2} \quad (3.11)$$

olarak bulunmuştur. Euler hallerinden bilinen, bu mesnet şartlarına ait burkulma yükü [1]

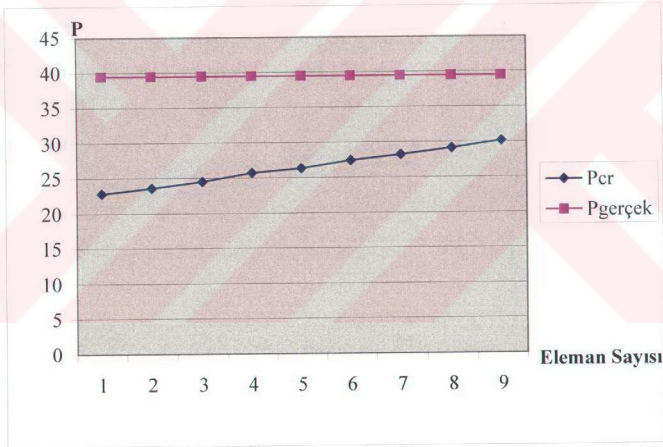
$$P_{Euler} = 39.478 \frac{EI}{L^2} \quad (3.12)$$

olarak hesaplanmıştır. 2 eleman için (3.11) de bulunan değerin Euler çözümüne yaklaşım oranı %57.83 mertebesinde dir. Eleman sayıları artırıldığında elde edilen sonuçların kesin sonuçla uyumlu olduğu tablo (3.2) de gösterilmiştir. Fakat iki ucu mafsallı çubuğa göre , 2 elemanlı çözümde hata mertebesinin fazla olmasının nedeni, sadece iki tane sınır koşulunun devreye sokulmuş olmasıdır. Ankastre uçlarda eğimin sıfır olma koşulu işleme girmemektedir.

Tablo 3.2 İki ucu ankastre çubuğun burkulma problemine ait çözümler

ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
2	22,851	39,478	42,17
3	23,622		40,16
4	24,511		37,9
5	25,712		34,87
6	26,324		33,32
7	27,448		30,47
8	28,236		28,5
9	29,138		26,19
10	30,143		23,6
29	39,362		0,29
30	39,478		0

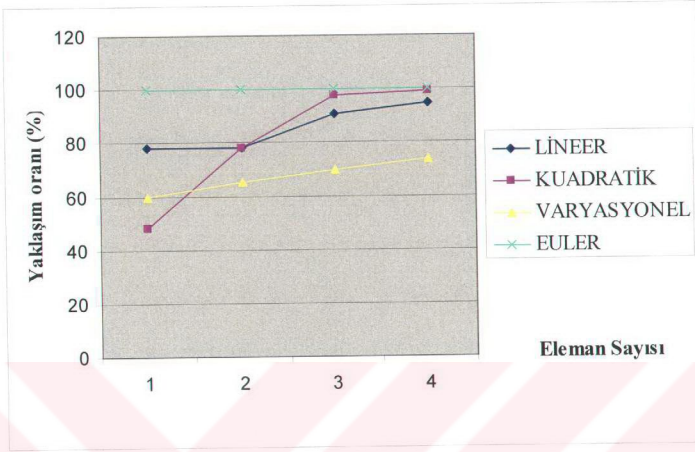
Tablo (3.2) deki sonuçlar kullanılarak, yapılan çözümün Euler değerine yaklaşımı sadece 9 eleman için grafik olarak şekil 3.5 de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 İki ucu ankastre çubuk elemanın çözümünün Euler değerine yaklaşımı

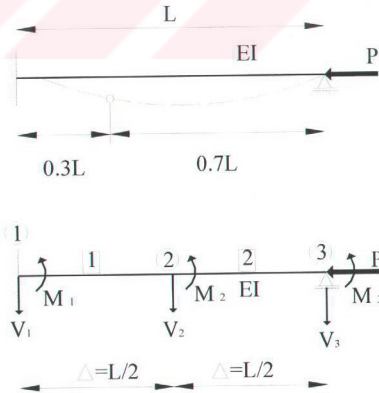
Elde edilen sonuçların, eleman sayılarının artmasına devam edildiğinde stabilize bozulmaksızın Euler çözümüyü birebir uyduğu görülmüştür. Bu elde edilen sonuçlar Gün'ün [7] çalışmasıyla da karşılaştırılmıştır. Gün'ün [7] çalışmasında kübik, kuadratik ve lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman ile yaptığı çözümler bu çalışmaya göre daha hızlı yaklaşım gösterdiği gözlenmiştir. Bütün bu çözümlerin,

Euler çözümüne yaklaşımları şekil 3.6 da gösterilmiştir. Karşılaştırmalar 3, 5, 7 ve 9 düğüm noktalı elemanlar göz önüne alınarak yapılmıştır.



Şekil 3.6 İki ucu ankastre çubuk çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması

3.3 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Mafsallı Elastik Çubuğun Burkulma Yüklerinin Hesaplanması



Şekil 3.7 Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı elastik çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) kullanılarak her bir elemanın eleman matrisi elde edilecektir. Kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacak ve sistem matrisinin öz değer probleminde indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 3.7 de eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuk sistemin bilinmeyenleri gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (3.13)$$

dır. $\lambda^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sisteme ait global matris

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. (3.13) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi oluşturulur. Sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanarak, çözüm için gerekli

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (3.16)$$

öz değer probleminde dönüştürülür. (3.14) sistem matrisinin çözümü (3.16) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = \frac{10EI}{L^2} \quad (3.17)$$

olarak bulunmuştur. Euler hallerinden bilinen, bu mesnet şartlarına ait burkulma yükü [1]

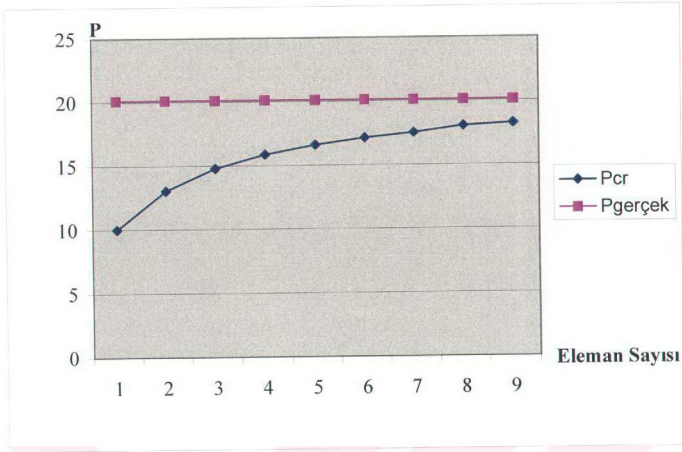
$$P_{Euler} = 20.142 \frac{EI}{L^2} \quad (3.18)$$

olarak hesaplanmıştır. 2 eleman için (3.17) de bulunan değerin Euler çözümüne yaklaşım oranı %49.65 mertebesinde. İki elemanda hata mertebesinin fazla olmasının nedeni, ankastre uçta, tanımlanması gereken iki sınır koşulundan sadece bir tanesinin devreye sokulmuş olmasıdır. Bu uçta eğimin sıfır olma koşulu kullanılmamıştır. Buna karşılık eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde sonuçların kesin sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmektedir ve elde edilen sonuçlar özet olarak tablo (3.3) de verilmiştir.

Tablo 3.3 Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuğun burkulma problemine ait çözümleri

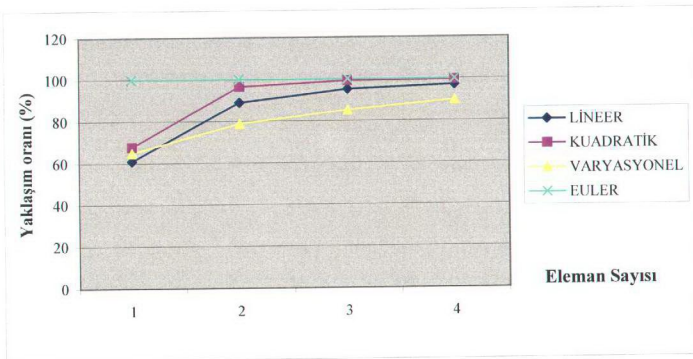
ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
2	10	20,142	50,35
3	13,06		35,16
4	14,784		26,6
5	15,862		21,2
6	16,596		17,6
7	17,118		15,01
8	17,512		13,05
9	18,062		10,3
10	18,262		9,33
24	20,053		0,44
25	20,142		0

Tablo (3.3) deki sonuçlar kullanılarak, Euler burkulma yüküne yaklaşım, sadece 9 eleman için şekil 3.8 de gösterilmiştir.



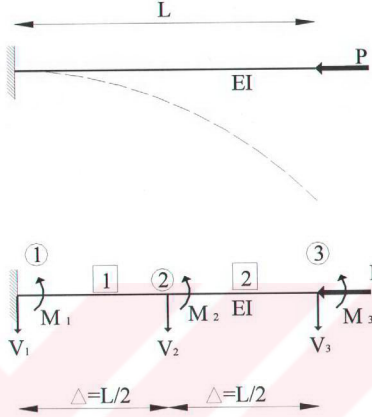
Şekil 3.8 Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuğun çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı

Elde edilen sonuçların stabilite bozulmaksızın Euler burkulma yüküyle birebir uyduğu görülmüştür. Burada elde edilen sonuçlar Gün'ün [7] çalışmasıyla da karşılaştırılmıştır. Gün'ün [7] çalışmasında kübik, kuadratik ve lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman ile yaptığı çözümlerin bu çalışmadan daha hızlı yaklaşım gösterdiği gözlenmiştir. Bütün bu çözümlerin, Euler çözümüne yaklaşımları şekil 3.9 de gösterilmiştir. Karşılaştırmalar 3, 5, 7 ve 9 düğüm noktalı elemanlar baz alınarak yapılmıştır.



Şekil 3.9 Bir ucu ankastre bir ucu mafsallı çubuğun çözümlerinin yaklaşım oranlarının karşılaştırılması

3.4 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Elastik Çubuğun Burkulma Yüklerinin Hesaplanması



Şekil 3.10 Bir ucu ankastre bir ucu serbest elastik çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecektir. Kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve sistem matrisinin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 3.10 da aksenal basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk sistemin bilinmeyenleri gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0 \quad , \quad M_3 = 0 \quad (3.19)$$

dır. $\lambda^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

(3.19) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi hesaplanır ve

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

haline indirgenerek çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (3.22)$$

ifadesi kullanılarak öz değer problemine indirgenir. (3.20) sistem matrisinin çözümü (3.22) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 1.528 \frac{EI}{L^2} \quad (3.23)$$

olarak bulunmuştur. Euler hallerinden bilindiği üzere, bu mesnet şartlarına ait burkulma yükü [1]

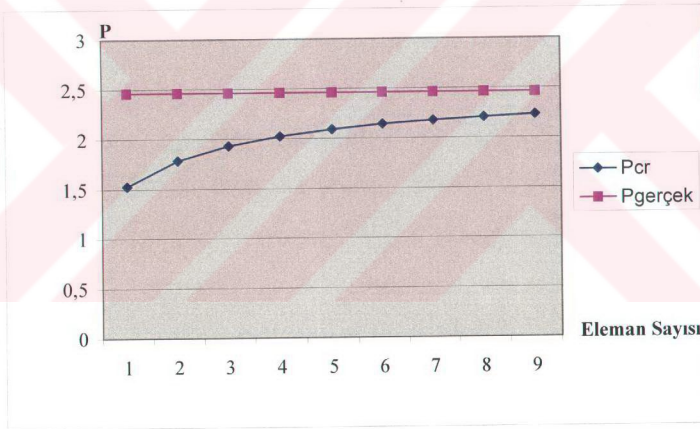
$$P_{Euler} = 2.467 \frac{EI}{L^2} \quad (3.24)$$

olarak hesaplanmıştı. 2 eleman için (3.23) de bulunan değerlerin Euler çözümüne yaklaşım oranı %61.94 mertebesinde. İki elemanda hata oranının fazla olması, iki uçta toplam dört sınır koşulu tanımlanması gerekirken, iki tanesinin tanımlanmış olmasıdır. Ankastre uçta eğimin, boş uçta kesme kuvvetinin sınır koşulu olarak tanımlanamaması hatayı büyötmektedir. Fakat eleman sayıları artırılarak devam edildiğinde sonuçların kesin sonuca yaklaşımının uyumlu olduğu tablo 3.4 ile verilmiştir.

Tablo 3.4 Bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuğun burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	P_{cr}	$P_{gerçek}$	HATA ORANI(%)
2	1,528	2,467	38,06
3	1,783		27,72
4	1,929		21,8
5	2,0254		17,9
6	2,0923		15,18
7	2,142		13,17
8	2,18		11,63
9	2,2091		10,45
11	2,234		9,44
22	2,448		0,77
23	2,467		0

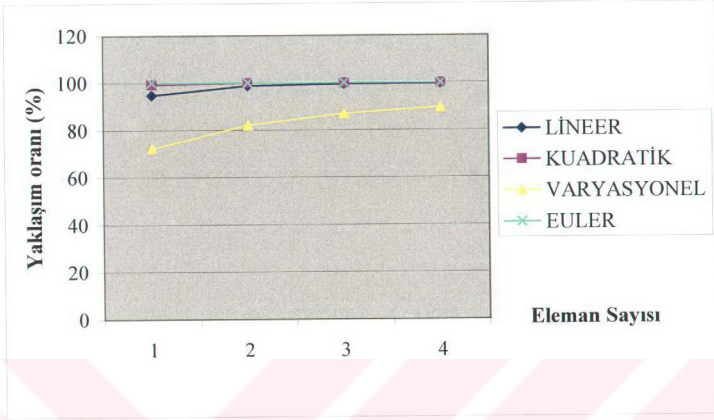
Tablo (3.4) deki sonuçlar kullanılarak, dokuz eleman için elde edilen sonuçların Euler burkulma yüküne yaklaşımı şekil 3.11 de gösterilmiştir



Şekil 3.11 Bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk çözümlerinin Euler değerine yaklaşımı

Elde edilen sonuçların düğüm noktası sayıları daha da artırılarak stabilize bozulmaksızın Euler çözümüyle birebir uyduğu görülmüştür. Bu elde edilen sonuçlar Gün'ün [7] çalışmasıyla da karşılaştırılmıştır. Gün'ün [7] çalışmasında kübik, kuadratik ve lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman ile yaptığı çözümler bu çalışmadan daha hızlı yaklaşım gösterdiği gözlenmiştir. Bütün bu çözümlerin, Euler

özümüne yaklaşımları şekil 3.12 de gösterilmiştir. Karşılaştırmalar 3, 5, 7 ve 9 düğüm noktalı elemanlar baz alınarak yapılmıştır.



şekil 3.12 Bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuğın çözümlerinin yaklaşım oranlarının kıyaslanması

4. UYGULAMALAR

Üçüncü bölümde, Euler halleri incelenmiş ve burkulma yüklerinin elde edilmesinde varyasyonel türevin iyi yaklaşım gösterdiği görülmüştür. Dolayısıyla bu bölümde, eksenel basınç yüküne maruz değişken kesitli sistemler, eksenel basınç kuvvetinin değişken olarak etkidiği sistemler ve eksenel basınç yüküne maruz sürekli giriş sistemler incelenecektir.

4.1 Eksenel Basınç Yüküne Maruz Değişken Kesitli Çubukların Burkulma Yüklerinin Analizleri

Eksenel basınç yüküne maruz değişken kesitli çubuklar için iki durum incelenecektir. İlk olarak, çubuk kesitinin süreksiz olarak değişmesi durumu, daha sonra da çubuk kesitinin sürekli (lineer) değişmesi durumu için çözüm yapılacaktır.

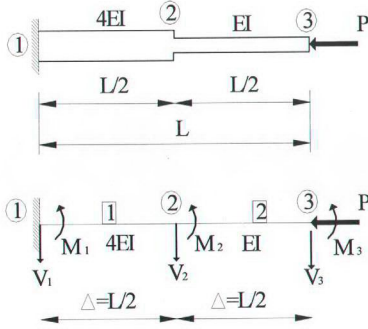
4.1.1 Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Süreksiz Değişken Kesitli Çubuğun Burkulma Yüklerinin Analizleri

İkinci bölümde elde edilen (2.20) ile kullanılarak her bir eleman için eleman matrisleri elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve sistem matrisinin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.1 de eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0 \quad , \quad M_3 = 0 \quad (5.1)$$

dir. $\lambda_1^2 = \Delta^2 / 4EI$ ve $\lambda_2^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sistem matrisi



Şekil 4.1 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. (4.1) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi yazılır ve

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilerek çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.4)$$

kullanılarak problem öz değer problemine dönüştürülür.

(4.2) sistem matrisinin çözümü (4.4) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 3.056 \frac{EI}{L^2} \quad (4.5)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemin gerçek çözümü [1] de

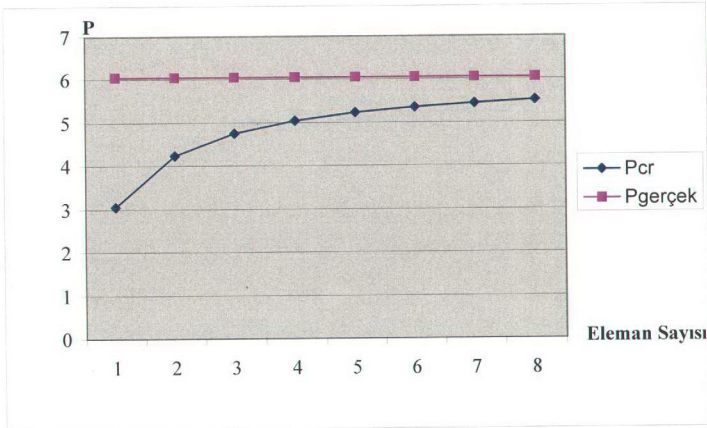
$$P_{Gerçek} = 6.052 \frac{EI}{L^2} \quad (4.6)$$

olarak hesaplanmıştır. (4.5) de hesaplanan değerin (4.6) da bulunan değere yaklaşımı %50.5 mertebesinde. Burada hata mertebesinin fazla olmasının nedeni, üçüncü bölümde ifade edildiği gibi eksik sınır koşulunun tanımlanmış olmasıdır Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde ve yaklaşımın iyileştiği görülmüş ve sonuçlar tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/EI)$	$P_{gerçek}(L^2/EI)$	HATA ORANI(%)
2	3,0556	6,052	49,5
4	4,237		29,99
6	4,757		21,39
8	5,047		16,6
10	5,231		13,56
12	5,358		11,47
14	5,447		9,99
16	5,525		8,71
40	5,983		1,14
42	6,052		0

Tablo (4.1) deki sonuçlar kullanılarak, yaptığımız çözümün gerçek değere yaklaşım şekil 4.2 de gösterilmiştir. Bu elde edilen sonuçlar Gün'ün [7] çalışmasıyla da karşılaştırılmıştır. Gün'ün [7] çalışmasında kübik, kuadratik ve lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman ile elde ettiği sonuçların bu çalışmaya göre daha hızlı yaklaşım gösterdiği gözlenmiştir.



Şekil 4.2 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuğun çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

4.1.2 Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Süreksiz Değişken Kesitli Çubuğun Burkulma Yüklerinin Analizleri

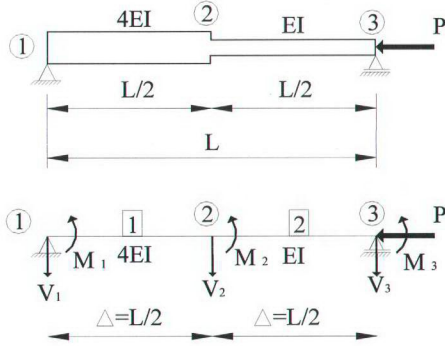
İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilerek kodlama ile kullanılarak sistem matrisine geçiş yapılacak ve sistem matrisi öz değer problemine indirgenerek hesaplanacaktır. Şekil 4.3 de eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı süreksiz değişken kesitli çubuk eleman gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (4.7.a)$$

$$M_1 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (4.7.b)$$

dır. $\lambda_1^2 = \Delta^2 / 4EI$ ve $\lambda_2^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sistem matrisi (4.8) denklemindeki hali alır.



Şekil 4.3 İki ucu mafsallı süreksiz değişken kesitli çubuk

$$\begin{bmatrix}
 \lambda_1^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & \lambda_2^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\
 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\
 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 M_3 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (4.8)$$

(4.7.a) ve (4.7.b) sınır koşulları kullanılarak elde edilen sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
 S_{11} & S_{12} \\
 S_{21} & S_{22}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M \\
 v
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilerek, çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.10)$$

öz değer problemine dönüştürülmüştür.

(4.8) sistem matrisinin çözümü (4.10) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 8 \frac{EI}{L^2} \quad (4.11)$$

olarak bulunur. Sonuçların karşılaştırılması kendi içinde stabilitesi göz önüne alınarak yapılmış 24 elemana kadar eleman sayıları artırılmıştır. Sonuçlar tablo 4.2 de verilmiştir. Burkulma yükleri arasındaki hata oranı azalınca 24 elemanda kesilmiştir.

Tablo 4.2 İki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli çubuğun burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/EI)$	HATA ORANI(%)	
2	8	27,47	
4	11,03		
6	12,186	4,66	9,49
8	12,781		
10	13,142	1,82	2,75
12	13,385		
14	13,559	0,91	1,28
16	13,683		
18	13,785	0,59	0,74
20	13,867		
22	13,917	0,35	0,36
24	13,975		

4.1.3 Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Sürekli Değişken Kesitli Çubuğun Burkulma Yüklerinin Analizleri

Bu bölümde eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli elastik çubuğun burkulma yükleri incelenecektir. Kesit değişiminin lineer olduğu kabul edilmiştir.

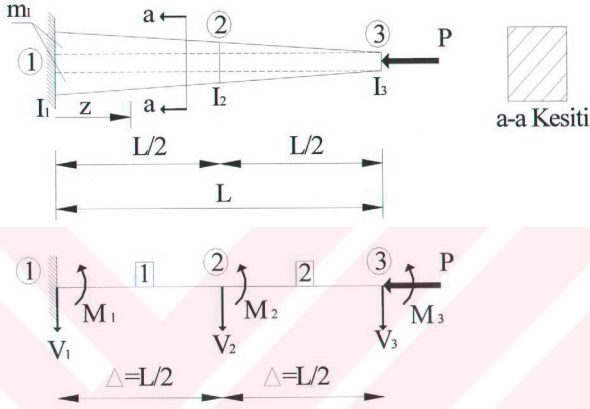
Çubuk elemanın düğüm noktalarındaki atalet momentlerini hesaplamak için lineer değişen bir fonksiyon yazılmıştır. I_1 sistemin ilk düğüm noktasının atalet momenti, I_3 sistemin son düğüm noktasının atalet momenti ve m_1 eğim olmak üzere, şekil 4.4 deki çubuk elemanın kesit değişimi (4.12) de ifade edilmiştir.

$$I_1(z) = I_3 + \frac{2m_1(L-z)}{L} \quad (4.12)$$

$$m_1 = \frac{I_1 - I_3}{2} \quad (4.13)$$

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak, her bir eleman için eleman matrisi elde edilecektir ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve sistem

matrisinin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.4 de eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli çubuk bilinmeyenleri gösterilmiştir. Bu çözüm yapılırken, sistemin ilk düğüm noktasına ait atalet momenti $I_1=20 \text{ cm}^4$, sistemin son düğüm noktasına ait atalet momenti $I_3=10 \text{ cm}^4$ olarak alınmıştır.



Şekil 4.4 Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli çubuk

Probleme ait sınır koşulları

$$z=0 \quad \text{için} \quad v=0, \quad v'=0 \quad (4.14.a)$$

$$z=L \quad \text{için} \quad v''=0 \quad (4.14.b)$$

dır. $\lambda_1^2 = \Delta^2 / EI_1$ ve $\lambda_2^2 = \Delta^2 / EI_2$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilir. (4.14.a) ve (4.14.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

olarak ifade edilerek ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (4.17)$$

sistem matrisi öz değer problemine dönüştürülmüştür. (4.15) sistem matrisinin çözümü (4.17) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 23.9672 \frac{E}{L^2} \quad (4.18)$$

olarak bulunmuştur. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edilmesi sonucunda elde edilen sonuçlar özet olarak tablo (4.3) de verilmiştir. Elde edilen sonuçların stabilitesi, kendi içinde elemanlara göre yapılmış ve hata miktarı azalıncaya kadar çözüme devam edilmiştir.

Tablo 4.3 Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken kesitli çubuğun burkulma problemine ait çözümler

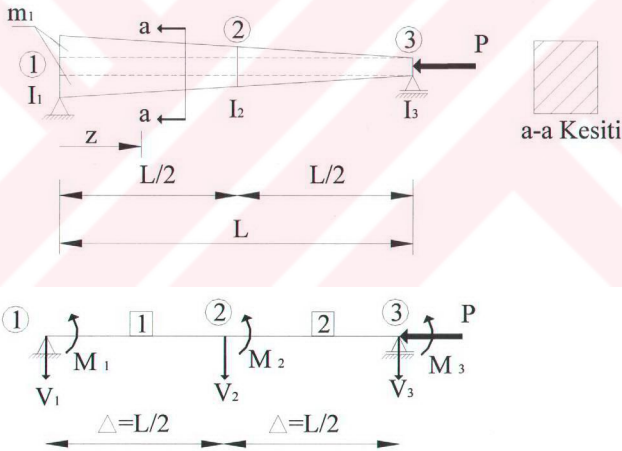
ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/E)$	HATA ORANI(%)	
2	23,9672	16,14	
3	28,5814		
4	31,2859		8,64
5	33,0483	5,33	
6	34,2839		3,6
7	35,1972	2,59	
8	35,8963		1,95
9	36,4558	1,53	
10	36,9118		1,24
11	37,2832	0,99	
12	37,5951		0,83
13	37,8786	0,75	
14	38,1366		0,68
15	38,3124	0,46	

4.1.4 Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Sürekli Değişken Kesitli Çubukun Burkulma Yükünün Analizi

Bu bölümde eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli elastik çubukun burkulma yükleri incelenecektir. Kesitin değişiminin lineer olduğu kabul edilmiştir. (4.12) ve (4.13) ifadeleri bu problem için de geçerlidir.

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilmiş ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır. Sistem matrisi öz değer problemine indirgenerek bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.5 de eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli çubuk elemanın bilinmeyenleri gösterilmiştir.

Bu çözüm yapılırken, sistemin ilk düğüm noktasına ait atalet momenti $I_1=20 \text{ cm}^4$, sistemin son düğüm noktasına ait atalet momenti $I_3=10 \text{ cm}^4$ olarak alınmıştır.



Şekil 4.5 İki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli çubuk

Probleme ait sınır koşulları

$$z=0 \quad \text{ için } \quad v=0 \quad , \quad M=0 \quad (4.19.a)$$

$$z=L \quad \text{ için } \quad v=0 \quad , \quad M=0 \quad (4.19.b)$$

dır. $\lambda_1^2 = \Delta^2 / EI_1$ ve $\lambda_2^2 = \Delta^2 / EI_2$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & P & -P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -P & 2P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilir. (4.19.a) ve (4.19.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

olarak ifade edilerek, çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (4.22)$$

sistem matrisi öz değer problemine dönüştürülmüştür.

(4.20) sistem matrisinin çözümü (4.22) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 100 \frac{E}{L^2} \quad (4.23)$$

olarak bulunmuştur. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edilmesi sonucunda elde edilen sonuçlar özet olarak tablo (4.4) de verilmiştir. Sonuçların stabilitesi, kendi içinde kontrol edilmiş ve hata miktarı azalınca kadar çözüme devam edilmiştir.

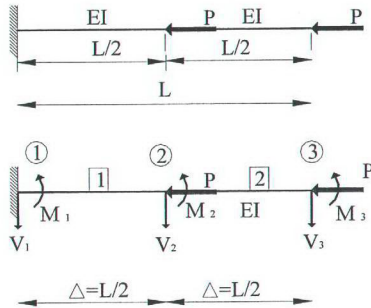
Tablo 4.4 İki ucu mafsallı sürekli değişken kesitli çubuğun burkulma problemine ait çözümler

ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/E)$	HATA ORANI(%)
2	100	14,69
3	117,2197	
4	125,8046	
5	130,589	3,66
6	133,5636	2,23
7	135,5699	
8	137	1,043
9	138,0819	0,59
10	138,9016	
11	139,556	0,47
12	140,1027	0,39
13	140,5455	
14	140,9314	0,27
15	141,2	0,19

4.2 Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Sabit Kesitli Çubukların Burkulma Yükünün Analizi

Değişken eksenel basınç yüküne maruz elemanların iki değişik hali incelenecektir. İlk olarak, eksenel basınç yükünün süreksiz olarak değişmesi durumu, daha sonrada eksenel basınç yükünün sürekli değişmesi durumu için hesaplar yapılacaktır.

4.2.1 Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Sabit Kesitli Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Çubuğun Burkulma Yüklerinin Analizi



Şekil 4.6 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecektir ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve sistem matrisinin öz değeri problemine indirgenmesiyle bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.6 da sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk eleman gösterilmiştir.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0 \quad , \quad M_3 = 0 \quad (4.24)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2P & -2P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2P & 3P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

şeklinde elde edilir. (4.24) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (4.27)$$

kullanılarak problem öz değeri problemine dönüştürülür. (4.25) sistem matrisinin çözümü (4.27) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 2.245 \frac{EI}{L^2} \quad (4.28)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemin gerçek çözümü [1] de

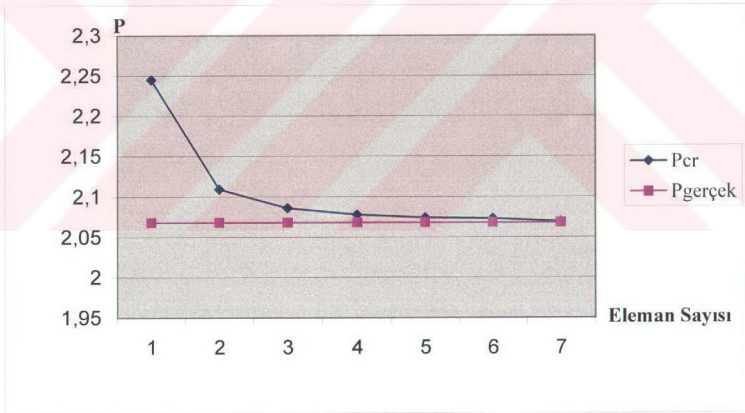
$$P_{Gerçek} = 2.068 \frac{EI}{L^2} \quad (4.29)$$

olarak hesaplanmıştır. (4.28) de hesaplanan değerin (4.29) da bulunan değere yaklaşımı %92.12 mertebesindedir. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edilirse yaklaşımın iyileştiği gözlenmiş ve elde edilen sonuçlar tablo 4.5 de verilmiştir.

Tablo 4.5 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuğun burkulma problemine ait çözümleri

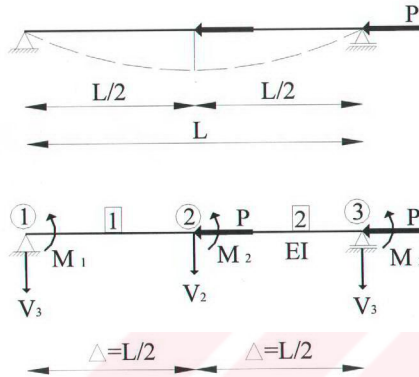
ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/EI)$	$P_{gerçek}(L^2/EI)$	HATA ORANI(%)
2	2,245	2,068	7,88
4	2,10965		1,97
6	2,0864		0,88
8	2,0777		0,47
10	2,0738		0,28
12	2,0731		0,25
14	2,0695		0,07

Tablo (4.5) deki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım şekil 4.7 de gösterilmiştir.



Şekil 4.7 Bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

4.2.2 Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz İki Ucu Mafsallı Elemanın Burkulma Yüklerinin Analizleri



Şekil 4.8 İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemleri kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin öz değer problemine dönüştürülmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 5.8 de süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı çubuk eleman gösterilmiştir

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (4.30.a)$$

$$M_1 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (4.30.b)$$

dir. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2P & -2P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2P & 3P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

şeklinde elde edilir. (4.30.a) ve (4.30.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.33)$$

kullanılarak problem öz değer problemine dönüştürülmüştür. (4.31) sistem matrisinin çözümü (4.33) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 6.103 \frac{EI}{L^2} \quad (4.34)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemin gerçek çözümü [1] de

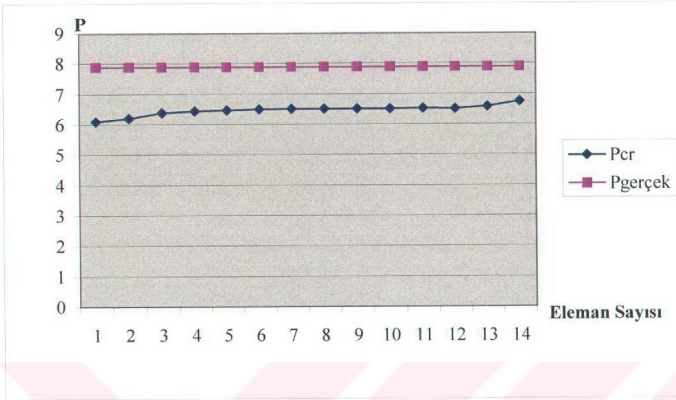
$$P_{Gerçek} = 7.896 \frac{EI}{L^2} \quad (4.35)$$

olarak hesaplanmıştır. (4.34) de hesaplanan değer (4.35) de bulunan değere yaklaşımı %77.29 mertebesinde. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde hatanın azaldığı görülmüştür ve bu sonuçlar tablo 4.6 da verilmiştir.

Tablo 4.6 İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuğun burkulma problemine ait çözümleri

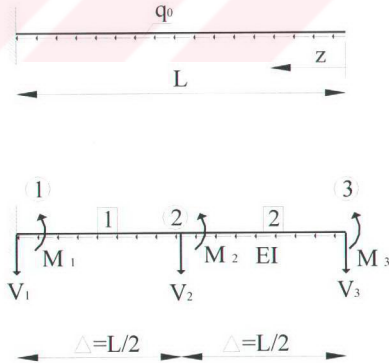
ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/EI)$	$P_{gerçek}(L^2/EI)$	HATA ORANI(%)
2	6,103	7,896	22.70
4	6,2066		21.40
6	6,3875		19,1
8	6,452		18,29
10	6,4824		17,9
12	6,4985		17,7
14	6,5128		17,52
16	6,5168		17,47
18	6,5178		17,45
20	6,5234		17,38
22	6,5272		17,33
24	6,5254		17,36
48	6,5946		16,48
60	6,76		14,39

Tablo (4.6) daki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım şekil 4.9 da gösterilmiştir.



Şekil 4.9 İki ucu mafsallı süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuğun çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

4.2.3 Sürekli Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Çubuğun Burkulma Yükünün Analizleri



Şekil 4.10 Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecektir ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin özdeğer probleminde indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.10 da sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk eleman gösterilmiştir. Burada $N = q_0 L$ dir. q_0 ise çubuğun birim uzunluğunun ağırlığıdır. $N_{1ort} = 0.75q_0 L$ ve $N_{2ort} = 0.25q_0 L$ dir.

Probleme ait sınır koşulları

$$z=L \quad \text{için} \quad v=0 \quad (4.36.a)$$

$$z=0 \quad \text{için} \quad M_3=0 \quad (4.36.b)$$

dir. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0.75N & -0.75N & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -0.75N & N & -0.25N \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -0.25N & 0.25N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

şeklinde elde edilir. (4.36.a) ve (4.36.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.39)$$

kullanılarak problem öz değer probleminde dönüştürülmüştür.

(4.37) sistem matrisinin çözümü (4.39) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$(q_0 L)_{cr} = 3.718 \frac{EI}{L^2} \quad (4.40)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemin gerçek çözümü [1] de

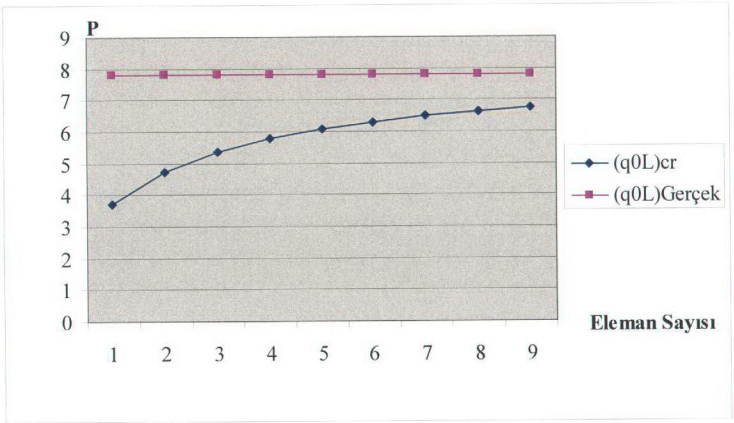
$$(q_0 L)_{Gerçek} = 7.837 \frac{EI}{L^2} \quad (4.41)$$

olarak hesaplanmıştır. (4.40) de hesaplanan değerin (4.41) de bulunan değere yaklaşımı %47,45 mertebesindedir. Hatanın eksik sınır koşulu tanımlanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde elde edilen sonuçların kesin sonuca yakınsadığı görülmüş ve tablo 4.7 de verilmiştir.

Tablo 4.7 Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın burkulma problemine ait çözümleri

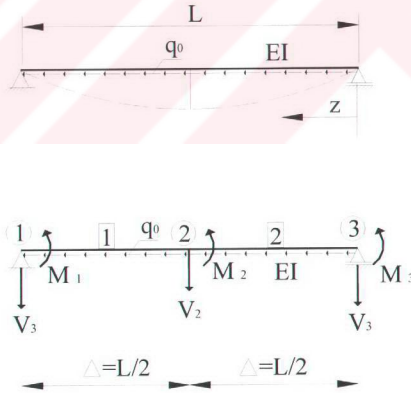
ELEMAN SAYISI	$(q_0 L)_{cr}$ (L^2/EI)	$(q_0 L)_{Gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
2	3,718	7,837	52,55
3	4,738		39,54
4	5,369		31,5
5	5,79		26,1
6	6,092		22,23
7	6,315		19,42
8	6,487		17,22
9	6,625		15,46
10	6,741		13,98
20	7,341		6,32
21	7,375		5,89

Tablo (4.7) deki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım şekil 4.11 de dokuz eleman için gösterilmiştir.



Şekil 4.11 Bir ucu ankastre bir ucu serbest sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk elemanın çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

4.2.4 Sürekli Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Sabit Kesitli İki Ucu Mafsallı Çubuğun Burkulma Yüklerinin Analizleri



Şekil 4.12 İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin

öz değeri problemine indirgemesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.12 de sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı çubuk eleman gösterilmiştir. Burada $N = q_0 \cdot L$ dir. q_0 ise çubuğun birim uzunluğunun ağırlığıdır. $N_{1ort} = 0.75q_0 \cdot L$ ve $N_{2ort} = 0.25q_0 \cdot L$ dir.

Probleme ait sınır koşulları

$$z=L \quad \text{için} \quad v = 0, M = 0 \quad (4.42.a)$$

$$z=0 \quad \text{için} \quad v = 0, M = 0 \quad (4.42.b)$$

dir. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0.75N & -0.75N & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -0.75N & N & -0.25N \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -0.25N & 0.25N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

şeklinde elde edilir. (4.42.a) ve (4.42.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.45)$$

kullanılarak problem, öz değeri problemine dönüştürülmüştür.

(4.43) sistem matrisinin çözümü (4.45) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$(q_0 L)_{cr} = 16 \frac{EI}{L^2} \quad (4.46)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemin gerçek çözümü [1] de

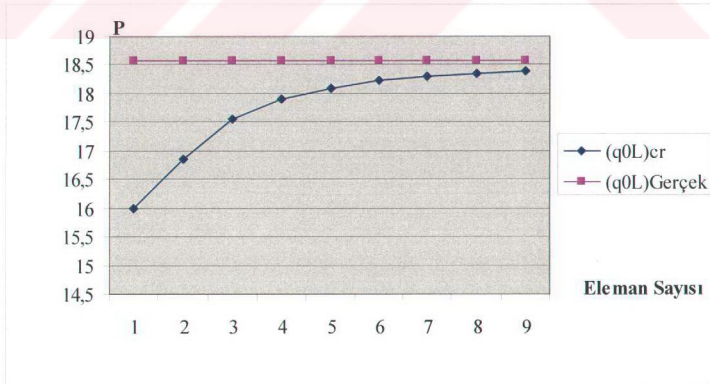
$$(q_0 L)_{Gerçek} = 18.57 \frac{EI}{L^2} \quad (4.47)$$

olarak hesaplanmıştır. (4.46) da hesaplanan değerin (4.47) de bulunan değere yaklaşımı %86.16 mertebesinde. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde yaklaşımın iyileştiği görülmüştür ve elde edilen sonuçlar tablo 4.8 de verilmiştir.

Tablo 4.8 İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuğun burkulma probleminde ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	$(q_0 L)_{cr}$ (L^2/EI)	$(q_0 L)_{Gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
2	16	18,57	13,84
3	16,865		9,18
4	17,551		5,49
5	17,903		3,59
6	18,102		2,59
7	18,224		1,86
8	18,304		1,432
9	18,358		1,14
10	18,398		0,93
21	18,542		0,15
22	18,57		0

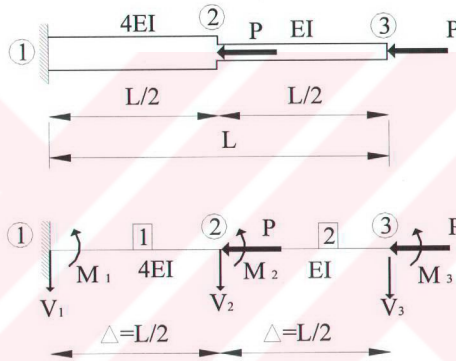
Tablo (4.8) deki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım dokuz eleman için grafik olarak şekil 4.13 de gösterilmiştir.



Şekil 4.13 İki ucu mafsallı sürekli değişken eksenel basınç yüküne maruz çubuk çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

4.3 Süreksiz Değişken Eksenel Basınç Yüküne Maruz Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Süreksiz Değişken Kesitli Çubuk

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır. Şekil 4.14 de süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk sistem gösterilmiştir.



Şekil 4.14 Süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk sistem

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0 \quad , \quad M_3 = 0 \quad (4.48)$$

dır. $\lambda_1^2 = \Delta^2 / 4EI$ ve $\lambda_2^2 = \Delta^2 / EI$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2P & -2P & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2P & 3P & -P \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

şeklinde elde edilir. (4.48) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (4.51)$$

kullanılarak problem, öz değer problemine dönüştürülmüştür. (4.49) global matrisinin çözümü (4.51) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

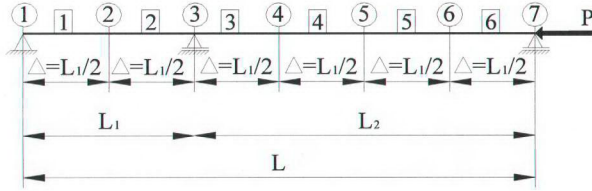
$$P_{cr} = 2.877 \frac{EI}{L^2} \quad (4.52)$$

olarak bulunmuştur. Bu çalışmada eleman sayıları arttırılarak elde edilen sonuçlar tablo 4.9 da verilmiştir. Hata analizi, elde edilen sonuçların karşılaştırılması şeklinde yapılmıştır.

Tablo 4.9 Süreksiz değişken eksenel basınç yüküne maruz bir ucu ankastre bir ucu serbest süreksiz değişken kesitli çubuk çözümleri

ELEMAN SAYISI	Pcr(L ² /EI)	HATA ORANI(%)	
2	2,877	27,55	
4	3,971		
6	4,4565	5,76	10,89
8	4,729		
10	4,903	2,41	3,55
12	5,024		
14	5,11	1,38	1,68
16	5,1815		
18	5,2327	1,12	0,98
20	5,292		
22	5,323	1,04	0,58
24	5,4		
26	5,416		0,29

4.4 Eksenel Basınç Yüküne Maruz Sürekli Kiriş Sistemler



Şekil 4.15 Eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı sürekli kiriş

Üçüncü bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır. Öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Şekil 4.15 de eksenel basınç yüküne maruz iki ucu mafsallı sürekli kiriş sistem gösterilmiştir. $L_2=2L_1$ olarak alınmıştır.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_7 = 0 \quad (4.53.a)$$

$$M_1 = 0, \quad M_7 = 0 \quad (4.53.b)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

şeklinde elde edilir. (4.53.a) ve (4.53.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (4.56)$$

kullanılarak problem, 6 eleman için öz değer problemine dönüştürülmüştür. (4.54) sistem matrisinin çözümü (4.56) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 3.362 \frac{EI}{L_1^2} \quad (4.57)$$

olarak bulunmuştur. Bu tipe ait burkulma yükü [4] de (4.58) deki gibi

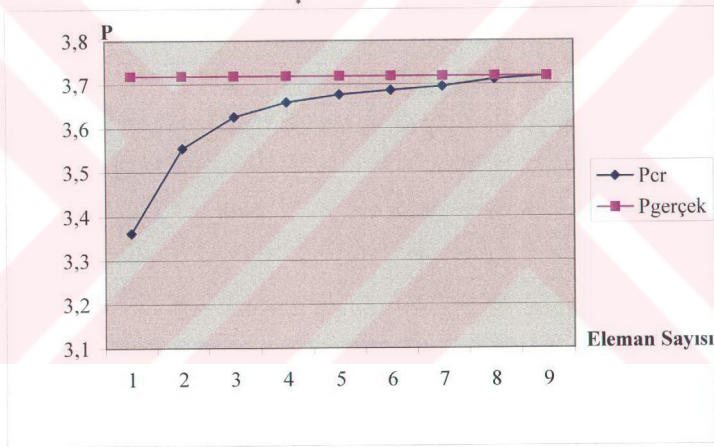
$$P_{Gerçek} = 3.72 \frac{EI}{L_1^2} \quad (4.58)$$

hesaplanmıştır. 6 eleman için (4.57) de bulunan değer (4.58) deki gerçek değerine yaklaşım oranı %90.38 mertebesindedir. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde gerçek değer birebir elde edildiği görülmüştür. Gün'ün [7] çalışmasında bu problem kuadratik şekil fonksiyonlu sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüş ve 6 eleman için yaklaşımın %98 mertebesinde olduğu görülmüştür. Buradan da anlaşılabacağı gibi Gün'ün [7] çalışması, bu çalışmaya göre daha hızlı yaklaşım göstermiştir. Bu çalışmada eleman sayıları artırılarak elde edilen sonuçlar tablo 4.10 de verilmiştir.

Tablo 4.10 İki ucu mafsallı sürekli kiriş sistemin burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L_1^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L_1^2/EI)	HATA ORANI(%)
6	3,362	3,72	9,62
9	3,555		4,44
12	3,626		2,53
15	3,659		1,64
18	3,677		1,16
21	3,687		0,89
24	3,695		0,67
27	3,712		0,21
30	3,72		0

Tablo (4.10) deki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım şekil 4.16 da gösterilmiştir.



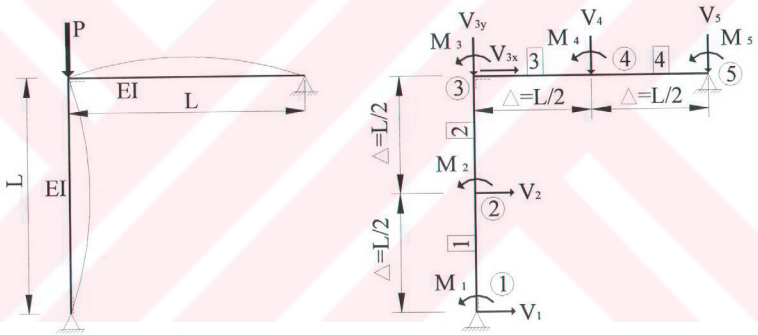
Şekil 4.16 İki ucu mafsallı sürekli kiriş sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

5. YARIM VE TAM ÇERÇEVE SİSTEMLER

5.1 YARIM ÇERÇEVE SİSTEMLER

Bu bölümde eksenel basınç yüküne maruz çerçeve sistemlerin burkulma yükleri incelenecektir. İlk önce iki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin çözümleri incelenecek daha sonra da bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sisteminin çözümleri incelenecektir.

5.1.1 İki Ucu Mafsallı Yarım Çerçeve Sistemlerin Burkulma Analizleri



Şekil 5.1 İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistem

Şekil 5.1 de iki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin elastik eğrisi ve bilinmeyenleri gösterilmiştir. Yarım çerçeve sistemin, kolon ve kiriş birleşim noktalarında kolonun yer değiştirmesi ve kirişin çökmesi sıfırdır. ikinci bölümde elde edilen (2.20) denklemleri kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilerek kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacak ve bu matrisin öz değer probleminde indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_5 = 0 \quad (5.1.a)$$

$$M_1 = 0, \quad M_5 = 0 \quad (5.1.b)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -P & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilir. (5.1.a) ve (5.1.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (5.4)$$

kullanılarak problem, öz değer problemine dönüştürülmüştür. (5.2) sistem matrisinin çözümü (5.4) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 9.6 \frac{EI}{L^2} \quad (5.5)$$

olarak bulunmuştur. Bu tipe ait burkulma yükü [1] de aşağıdaki gibi

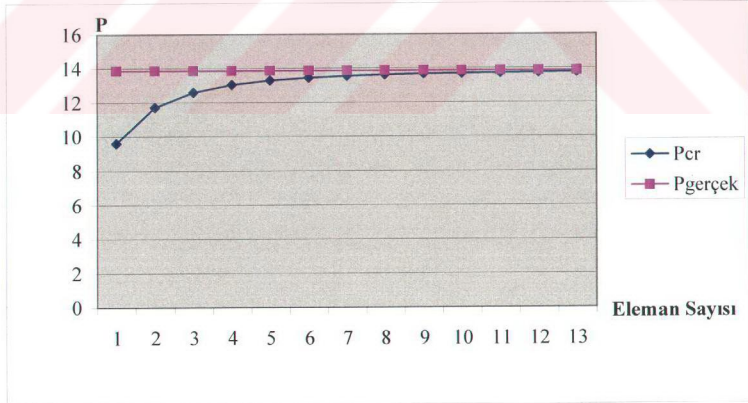
$$P_{Gerçek} = 13.876 \frac{EI}{L^2} \quad (5.6)$$

hesaplanmıştır. 4 eleman için (5.5) de bulunan değerin (5.6) daki gerçek değerine yaklaşım oranı %69.18 mertebesindedir. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde gerçek değere yaklaşıldığı görülmüştür. Bu çalışmada eleman sayıları artırılarak elde edilen sonuçlar tablo 5.1 de verilmiştir.

Tablo 5.1 İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri

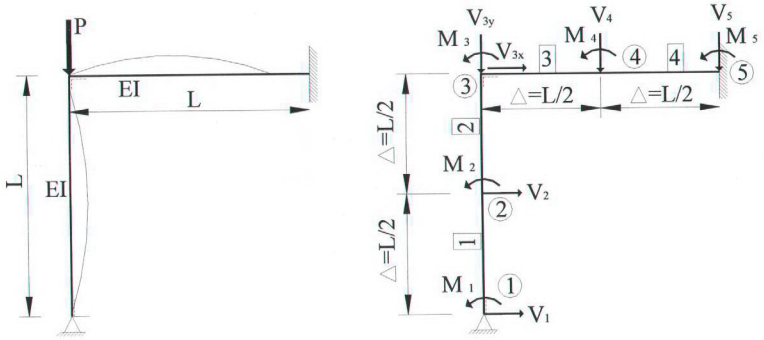
ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
4	9,599	13,876	30,82
6	11,721		15,53
8	12,61		9,12
10	13,051		5,94
12	13,299		4,15
14	13,451		3,06
16	13,552		2,33
18	13,621		1,84
20	13,671		1,47
22	13,708		1,21
24	13,736		1,008
26	13,758		0,85
28	13,773		0,74

Tablo (5.1) deki sonuçlar kullanılarak, gerçek değere yaklaşım grafik olarak şekil 5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 İki ucu mafsallı yarım çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

5.1.2 Bir Ucu Mafsallı Bir Ucu Ankastre Yarım Çerçeve Sistemlerin Burkulma Analizleri



Şekil 5.3 Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistem

Şekil 5.3 de bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistemin elastik eğrisi ve bilinmeyenleri gösterilmiştir. Yarım çerçeve sistemin, kolon ve kiriş birleşim noktalarında kolonun yer değiştirmesi ve kirişin çökmesi sıfırdır. İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_5 = 0 \quad (5.7.a)$$

$$M_1 = 0 \quad (5.7.b)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
 \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -P & P & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 M_3 \\
 M_4 \\
 M_5 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. (5.7.a) ve (5.7.b) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
 S_{11} & S_{12} \\
 S_{21} & S_{22}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M \\
 v
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (5.9)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0]
 \quad (5.10)$$

kullanılarak problem, öz değer problemine dönüştürülmüştür. (5.8) sistem matrisinin çözümü (5.10) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 9.714 \frac{EI}{L^2}
 \quad (5.11)$$

olarak bulunmuştur. Bu tipe ait burkulma yükü [9] da aşağıdaki gibi

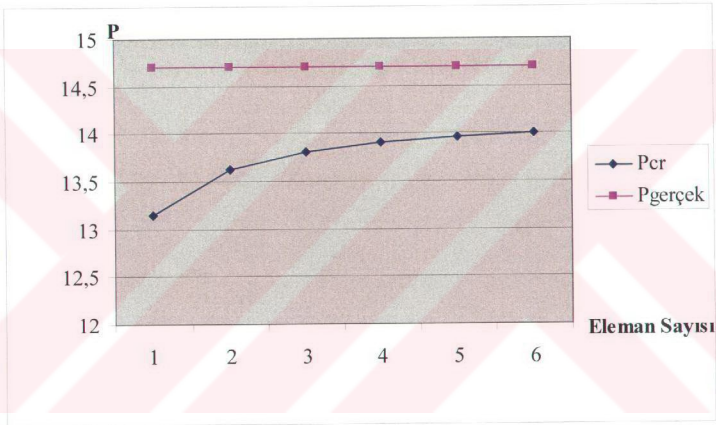
$$P_{Gerçek} = 14.7 \frac{EI}{L^2}
 \quad (5.12)$$

hesaplanmıştır. 4 eleman için (5.11) de bulunan değer (5.12) deki gerçek değerine yaklaşım oranı %66.08 mertebesindedir. Eleman sayıları artırılarak çözüme devam edildiğinde gerçek değere yaklaşıldığı görülmüştür. Bu çalışmada eleman sayıları artırılarak elde edilen sonuçlar tablo 5.2 de verilmiştir.

Tablo 5.2 Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
19	13,15	14,7	10,54
29	13,62		7,35
39	13,806		6,08
49	13,909		5,38
59	13,966		4,99
69	14,001		4,76

Tablo (5.2) deki sonuçlar kullanılarak, yaptığımız çözümün gerçek değere yaklaşım şekil 5.4 de gösterilmiştir.

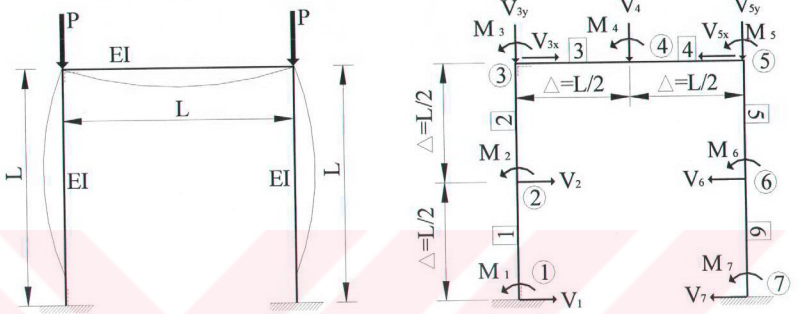


Şekil 5.4 Bir ucu mafsallı bir ucu ankastre yarım çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

5.2 TAM ÇERÇEVE SİSTEMLER

Bu bölümde iki ucu ankastre bağlı çerçeve sistemin burkulma analizi yapılmıştır. Çerçeve sistemler iki farklı hal göz önünde bulundurularak çözülmüştür.

5.2.1 Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve Sistem



Şekil 5.5 Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistem

Şekil 5.5 de iki ucu ankastre yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistemin elastik eğrisi ve bilinmeyenleri gösterilmiştir. Çerçeve sistemin, kolon ve kiriş birleşim noktalarında kolonun yer değiştirmesi ve kirişin çökmesi sıfırdır.

İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin öz değer probleminde indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_{3x} = 0, \quad v_{3y} = 0, \quad v_{5x} = 0, \quad v_{5y} = 0, \quad v_7 = 0 \quad (5.13)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & P & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde elde edilir. (5.13) sınır koşulu kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
S_{11} & S_{12} \\
S_{21} & S_{22}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M \\ v
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0
\end{bmatrix} \quad (5.15)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}] + [S_{22}]\}[v] = [0] \quad (5.16)$$

kullanılarak problem, öz değer problemine dönüştürülmüştür. (5.14) sistem matrisinin çözümü (5.16) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü, dokuz eleman için,

$$P_{cr} = 21.56 \frac{EI}{L^2} \quad (5.17)$$

olarak bulunmuştur. Bu tipe ait burkulma yükü [9] da aşağıdaki gibi

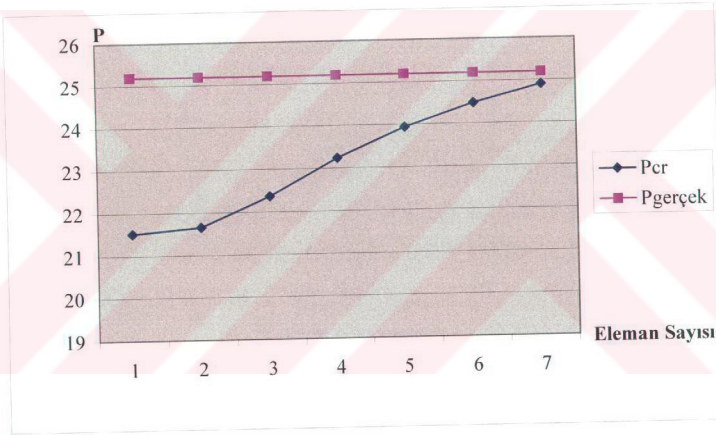
$$P_{Gerçek} = 25.2 \frac{EI}{L^2} \quad (5.18)$$

hesaplanmıştır. 9 eleman için (5.17) de bulunan değer (5.18) deki gerçek değerine yaklaşık oranı %85.38 mertebesinde dir. 12 eleman için de yapılan çözümlerde yaklaşık oranı %85.93 mertebesine yükselmektedir. Bu çalışmada eleman sayıları artırılarak elde edilen sonuçlar tablo 5.3 de verilmiştir.

Tablo 5.3 Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri

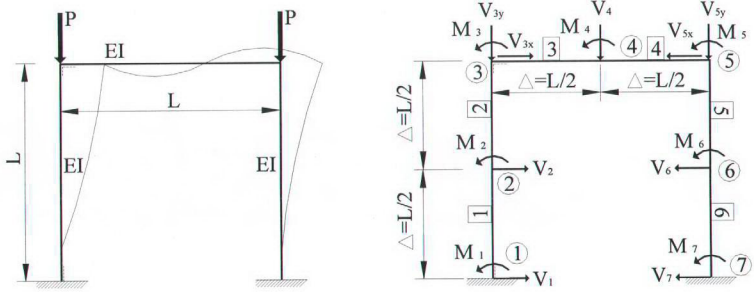
ELEMAN SAYISI	$P_{cr}(L^2/EI)$	$P_{gerçek}(L^2/EI)$	HATA ORANI(%)
9	21,516	25,2	14,62
12	21,654		14,07
15	22,368		11,24
18	23,244		7,76
21	23,947		4,97
24	24,487		2,83
27	24,907		1,16
30	25,2		0

Tablo (5.3) deki sonuçlar kullanılarak, yaptığımız çözümün gerçek değere yaklaşım şekil 5.6 da gösterilmiştir.



Şekil 5.6 Yanal deplasmanı önlenmiş çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

5.2.2 Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçeve



Şekil 5.7 Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistem

Şekil 5.7 de iki ucu ankastre yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistemin elastik eğrisi ve bilinmeyenleri gösterilmiştir. Çerçeve sistemin, kolon ve kiriş birleşim noktalarında kolonun uçları yatayda yer değiştirir ancak kirişin çökmesi sıfırdır. İkinci bölümde elde edilen (2.20) denklemi kullanılarak her bir eleman için eleman matrisi elde edilecek ve kodlama ile sistem matrisine geçiş yapılacaktır ve bu matrisin öz değer problemine indirgenmesi ile bu tipe ait burkulma yükleri hesaplanacaktır.

Probleme ait sınır koşulları

$$v_1 = 0, \quad v_{3y} = 0, \quad v_{5y} = 0, \quad v_7 = 0 \quad (5.19)$$

dır. $\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{EI}$ olmak üzere sistem matrisi

$$\begin{bmatrix}
\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & -P & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -P & 2P & -P & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & P & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_{3x} \\ v_4 \\ v_{5x} \\ v_6 \\ v_7
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix} \quad (5.20)$$

şeklinde elde edilir. (5.19) sınır koşulları kullanılarak sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

haline indirgenir ve çözüm için

$$\{-[S_{21}][S_{11}]^{-1}[S_{12}]+[S_{22}]\}[v]=[0] \quad (5.22)$$

kullanılarak problem, öz değer problemine dönüştürülmüştür. (5.20) sistem matrisinin çözümü (5.22) denklemi göz önüne alınarak yapılmış, burkulma yükü,

$$P_{cr} = 5.61 \frac{EI}{L^2} \quad (5.23)$$

olarak bulunmuştur. Bu tipe ait burkulma yükü [9] da (5.24) deki gibi

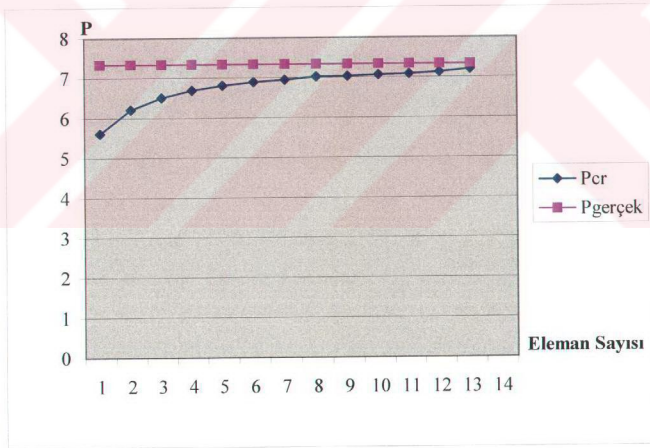
$$P_{Gerçek} = 7.34 \frac{EI}{L^2} \quad (5.24)$$

hesaplanmıştır. 12 eleman için (5.23) de bulunan değer (5.24) deki gerçek değerine yaklaşım oranı %76.43 mertebesindedir. Bu çalışmada eleman sayıları artırılarak elde edilen sonuçlar tablo 5.4 de verilmiştir.

Tablo 5.4 Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistemin burkulma problemine ait çözümleri

ELEMAN SAYISI	P_{cr} (L^2/EI)	$P_{gerçek}$ (L^2/EI)	HATA ORANI(%)
12	5,61	7,34	23,57
18	6,21		15,4
24	6,51		11,31
30	6,69		8,86
36	6,81		7,22
42	6,89		6,13
48	6,95		5,31
54	7,021		4,35
60	7,035		4,16
66	7,058		3,84
72	7,088		3,43
78	7,1297		2,87
84	7,204		1,85

Tablo (5.4) deki sonuçlar kullanılarak, yaptığımız çözümün gerçek değere yaklaşım şekil 5.8 de gösterilmiştir.



Şekil 5.8 Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve sistemin çözümlerinin gerçek değerine yaklaşımı

6. SONUÇLAR

1. Bu çalışmada, elastik çubukların burkulma analizleri varyasyonel türev kullanılarak yapılmıştır. Gün'ün [7] çalışmasında elde edilen fonksiyonel kullanılarak, varyasyonel türev ile çubuk elemanın eleman matrisi elde edilmiştir. Bu eleman matrisi incelendiğinde, varyasyonel türevin, sonlu fark yöntemine son derece benzediği, fakat sonlu fark yönteminin uygulanmasında sıkıntıya neden olan bölge dışı noktalara gereksinim duyulmaması nedeni ile uygulamada daha üstün olduğu görülmüştür.
2. Düğüm noktalarında tanımlı büyüklüklerin (M , v), düğüm noktaları arasındaki değişimin lineer olması durumu için elde edilen eleman matrisinin, Gün'ün [7] çalışmasında yer alan lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman matrisi ile aynı olduğu görülmüştür. Dolayısı ile, farklı bir yaklaşık yöntem olarak uygulanan sonlu eleman ile benzeştiği gözlenmiştir.
3. Elde edilen eleman matrisi, sınır koşulları göz önünde bulundurularak kodlama ile, Fortran dilinde yazılan program yardımıyla sistem matrisine aktarılmıştır. Burkulma yükünün hesabı için, sistem matrisi öz değer problemine indirgenmiş ve yine Fortran kütüphanesinde yer alan öz değer programı (GVCRG) kullanılarak çubuk sistemlerin Euler burkulma yükleri hesaplanmıştır. Elde edilen eleman matrisi sabit ve değişken kesitli, sabit ve değişken eksenel yüke maruz çubuk sistemlere, sürekli kirişlere, yarım ve tam çerçeve sistemlere uygulanmış ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.
4. Elde edilen sonuçların, kesin çözüme yaklaşımında sınır koşullarının etkili olduğu gözlenmiştir. Özellikle ankastre ve boş uç koşulları verilirken, iki koşul tanımlanması gerekirken, sadece birer koşul tanımlanabilmiştir (ankastre uçta, sadece çökmenin, boş uçta ise momentin sıfıra eşitliğinin kullanılması). Bunun sebebi de, fonksiyonelde sadece moment ve çökme büyüklüklerinin yer almasıdır.

Tanımlanamayan sınır koşullarını da (ankastre uçta eğim, boş uçta kesme kuvveti) dikkate alacak şekilde bir fonksiyonel kullanılırsa, bu olumsuz koşulların da ortadan kalkacağı düşünülmektedir.

5. İncelenen tüm problemlerde eleman sayıları artırıldığında kesin çözüme yaklaşımın uyumlu olduğu gözlenmiştir. Bazı problemlerde bu yaklaşım yukarda açıklanan nedenden dolayı yavaştır.

KAYNAKLAR

- [1] **İnan, M.**, 1967. Cisimlerin Mukavemeti, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul.
- [2] **Karabalis D. L., Beskos D. E.**, 1983. Static, Dynamic And Stability Analysis Of Structures Composed Of Tapered Beams, Computers & Structures, 16, 731-748
- [3] **Xie Y. M., Steven G. P.**, 1994. Improving Finite Element Predictions Of Buckling Loads Of Beams And Frames, Computers & Structures, 52, 381-385
- [4] **Timoshenko, S.**, çev: Şuhubi E., Deren H., 1963. Elastik Stabilite Teorisi, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası
- [5] **Aköz, A.Y., Ertepinar, A., Demiray, H., İnan, E., Aksoğan, O.**, 1987. Şekil Değiştirebilen Cisimler Mekaniği, Karadeniz Üniversitesi Basımevi, Trabzon
- [6] **Qiusheng L., Hong C., Guiqing L.**, 1994. Stability Analysis Of A Bar With Multi-Segments Of Varying Cross-Section, Computers & Structures, 53, 1085-1089
- [7] **Gün, T.**, 2002. Doğru Eksenli Çubukların Burkulma Analizi İçin Geliştirilen Yeni Bir Fonksiyonel ve Sonlu Elemanlı Çözüm, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi
- [8] **Tuominen P., Jaako T.**, 1992. Generation of Beam Elements The Finite Difference Method, Computers & Structures, 44, 223-227
- [9] **Chajes, A.**, 1974. Principles of Structural Stability Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey
- [10] **Fomin S.V., Gelfond I.M.**, 1963. Calculus of Variations, Prentice-Hall, Inc.

EKLER

Bu çalışmada düğüm noktaları sayıları artırılarak elde edilen çözümler bilgisayar ortamında yapılmıştır. Bunun için Fortran programında bir yazılım geliştirilmiştir. Bu programa ait akış diagramı ve yapılan çalışmalardan örnek olması amacıyla bir tane data dosyası ve çıkış dosyası bu bölümde verilmiştir.

Data Dosyası:

ELASTISITE MODULU CUBUK ATALET MOM YUK
1. 1. 1.
Z-DOG DUG. NOK SAYI CUBUK BOYU
3 1.
MESNET TIPI KOSULU
1
3
1 3

Son dosyası:

Z-DOG.DUG.NOK.SAYI. = 3
O-Z CUBUK BOYU = 1.
ELASTISITE MODULU = 1.
ÇUBUK ATALET MOM = 1.
ELEMEN BOYU = 0.5

DUGUM KOORDINATLAR DEGISKENLER			
NO.	Z	M	U
1	.00	1	0
2	.50	2	3
3	1.00	0	4

MAX BILINMEYEN SAYISI 4

ELEMAN MATRISI

.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00	-.8000E+01	.8000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00	.4000E+01	-.8000E+01	.4000E+01
.0000E+00	.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.2000E+01	-.2000E+01	.0000E+00
.1000E+01	-.2000E+01	.1000E+01	-.1000E+01	.2000E+01	-.1000E+01
.0000E+00	.1000E+01	-.2000E+01	.0000E+00	-.1000E+01	.1000E+01

SISTEM MATRISI

.1000E+01	.0000E+00	.8000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01	-.8000E+01	.4000E+01
.1000E+01	-.2000E+01	.2000E+01	-.1000E+01
.0000E+00	.1000E+01	-.1000E+01	.1000E+01

SS11 MATRISI

.1000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01

SS12 MATRISI

.8000E+01	.0000E+00
-.8000E+01	.4000E+01

SS21 MATRISI

.1000E+01	-.2000E+01
.0000E+00	.1000E+01

SS22 MATRISI

.2000E+01	-.1000E+01
-.1000E+01	.1000E+01

GLK MATRISI

-.240E+02	.800E+01
.800E+01	-.400E+01

GLM MATRISI

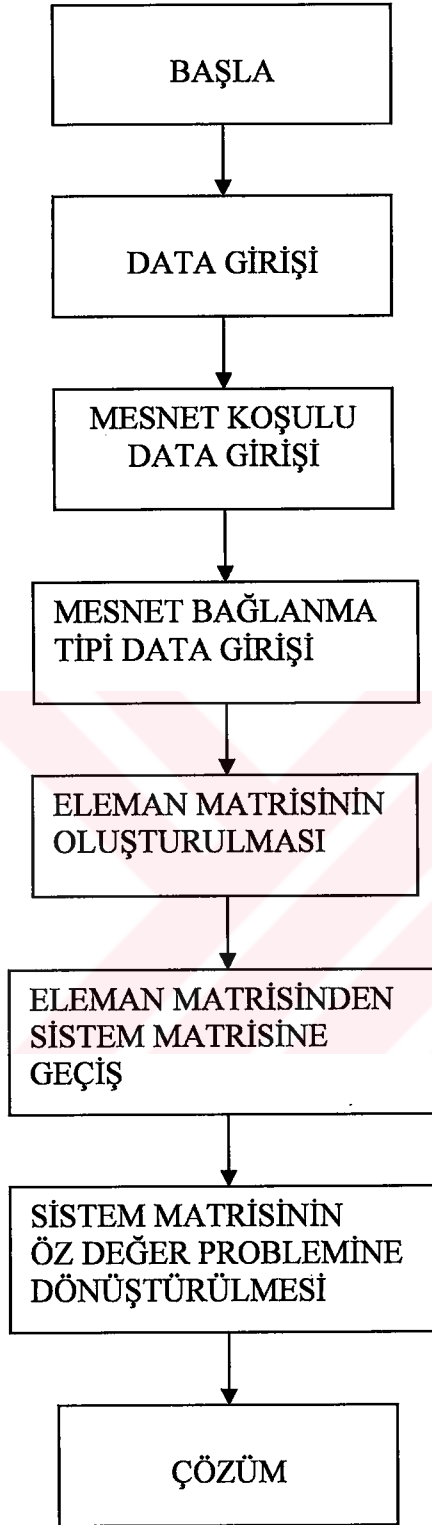
.200E+01 -.100E+01
-.100E+01 .100E+01

EIGENVALUE(1) = -.23431E+01

EIGENVALUE(2) = -.13657E+02



Akış Diagramı:



ÖZGEÇMİŞ

Arif GÜRSOY, 1978 yılında Mersin'in Silifke ilçesinde doğmuştur. İlköğrenimini Silifke Gazipaşa İlkokulunda tamamlamış ve 1989 yılında bu okuldan mezun olmuştur. Aynı yıl girdiği Anadolu lisesi sınavlarında başarılı olmuş ve Ankara Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesinde öğrenim görmeye hak kazanmıştır. Bu okuldan 1996 yılında mezun olmuştur. 1997 yılında Selçuk Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başlamıştır. 2001 yılında aynı okuldan İnşaat Mühendisi unvanı ile mezun olmuştur. 2002 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Yapı Anabilim Dalı Mekanik bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır.

