

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NÜMERİK KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNDE
HATA ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. E. Murat BOZKURT

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Haziran 2006**

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ

Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Fuat GÜRLEYEN

Yrd.Doç.Dr. Turgay ALTILAR

MAYIS 2006

ÖNSÖZ

Kutup yerleştirme yöntemi kontrol mühendisliğinde sıklıkla kullanılan bir yöntem olmakla beraber yüksek mertebeden sistemler için kutup yerleştirme işleminin bilgisayar ortamında nümerik olarak gerçekleştirilmesi oldukça zor bir problem olarak karşımıza çıkmakta ve işlem sonucunda ciddi nümerik hesaplama hatalarının yapılması kaçınılmaz olmaktadır. Bu nedenle kutup yerleştirme işlemin nümerik analizinin yapılması ve olası hatalar üzerinde etkili olabilecek parametrelerin tespit edilmesi ve kontrolör tasarımının bu parametreler dikkate alınarak gerçekleştirilmesi faydalı olacaktır. Bu nedenle bu tez çalışması boyunca kutup yerleştirme işleminin nümerik analizi detaylıca ele alınmış ve kontrolör tasarımına ışık tutabilecek sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Mehmet Turan Söylemeze teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2006

Erkam Murat Bozkurt

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNDE HATA ANALİZİ	4
2.1. Kontrol edilebilir standart formda kutup yerleştirme	4
2.2. Bilgisayar aritmetiği penceresinden yuvarlatma hatalarına genel bir bakış	6
2.3. Kontrol edilebilir standart formda yapılan kutup yerleştirme işleminde meydana gelen yuvarlatma hatalarının tanımlanması	7
2.4. Kutup yerleştirme işleminde hata tanımlanması ve kutup renklendirme	11
2.5. Kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hataların kapalı çevrim kutup bölgelerine etkisini belirleyen parametreler	13
2.6. Parametrelerin analizi için gerekli araçlar ve algoritmalar	20
3. NÜMERİK KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNİN PERFORMANSINI ETKİLEYEN PARAMETRELERİN İSTATİSTİKSEL ANALİZİ	34
3.1 Sistem mertebesinin analizi	34
3.2 Reel kutup oranının beklenen değerinin analizi	37
3.3 Kutuplar arasındaki mesafenin analizi	44
4. KUTUP YERLEŞTİRME HATALARI İÇİN BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ	53
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	62

TABLO LİSTESİ

	Sayfa Numarası
Tablo 2.1 IEEE standartlarına göre iki temel bilgisayar aritmetiği	7
Tablo 3.1 Şekil 3.2 için hesaplanan değerler	36
Tablo 3.2 Şekil 3.4 için hesaplanan değerler	39
Tablo 3.3 Şekil 3.8 için hesaplanan değerler	43
Tablo 3.4 Şekil 3.11 için hesaplanan değerler	46
Tablo 3.5 Şekil 3.12 için hesaplanan değerler	48
Tablo 3.6 Şekil 3.13 için hesaplanan değerler	49
Tablo 3.7 Şekil 3.14 için hesaplanan değerler	51

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa Numarası
Şekil 1.1	Kutup yerleştirme işleminin kontroledilebilir standart formda gerçekleştirilmesi	2
Şekil 1.2	Nümerik kutup yerleştirme işlemi için bir şablon	3
Şekil 2.1	Kutup renklendirme kavramı	12
Şekil 2.2	Matrisin reel öz değerlerinin sayısının beklenen değeri	18
Şekil 2.3	Matrisin reel öz değerlerinin sayısının tüm öz değerlerinin sayısına oranının beklenen değeri	19
Şekil 2.4	Dizi için önerilen hücre yapısı ve deney sonuçlarının hücrelere yerleştirilmesi	21
Şekil 2.5	Karmaşık sayı çifti ve hücre içine yerleşimi	22
Şekil 2.6	Yeni bir karmaşık sayı çiftine başlama durumu	22
Şekil 2.7	Bir hücrenin yerleştirilmeye başlanmış bir karmaşık sayı çiftinin ikinci elemanı olmasını ifade eden durum	22
Şekil 2.8	RKO'nun beklenen değeri önceden belirlenebilen karmaşık sayı dizileri türetmek için kullanılan algoritma	28
Şekil 2.9	3. mertebeden bir sistemin açık çevrim kutupları ve hedeflenen kapalı çevrim kutupları için olası bir dağılım	29
Şekil 2.10	Açık çevrim kutup kümesine sabit uzaklıkta kutup kümesi türetmek için kullanılan yöntemin gösterimi.	31
Şekil 2.11	Açık çevrim kutuplarına sabit uzaklıkta referans kutup seti türeten algoritma	32
Şekil 3.1	Sistem mertebesi ile hatalar arasındaki ilişkiyi veren algoritma	35
Şekil 3.2	Sistem mertebesi ile kutup yerleştirme hataları arasındaki ilişki	36
Şekil 3.3	Sistem mertebesi, KAM ve hedeflenen kutupların RKO su sabit kalacak şekilde orijinal sistem kutuplarının RKO' sunu değiştiren algoritma	38
Şekil 3.4	Sistemin orijinal kutupların RKO' nın değiştirilerek her bir RKO için kontrol edilebilir standart formda Kutup yerleştirme işlemi uygulanması ile elde edilen hataların değişimi.	39
Şekil 3.5	Sistem mertebesi ve RKO için üç boyutlu yüzey grafikleri	40
Şekil 3.6	Üç boyutlu yüzey grafiklerinin elde edilebilmesi için gerekli olan algoritma	41
Şekil 3.7	Sistem mertebesi, KAM ve sistemin orijinal kutupların RKO su sabit kalacak şekilde hedeflenen kutuplarının RKO' sunu değiştiren algoritma	42

Şekil 3.8	Diğer parametreler sabit tutularak hedeflenen kutupların RKO'nın değiştirilmesi ile hataların değişimi	43
Şekil 3.9	Sistem mertebesini, orijinal ve hedeflenen kutupların RKO'su sabit tutularak KAM'yi değiştiren algoritma	45
Şekil 3.10	KAM'nin değişimi ile hatanın değişimini gösteren grafik	46
Şekil 3.11	Diğer parametreler sabit tutulduğu durumda KAM'yi değişimi ile Ackermann yöntemi için elde edilen hatanın değişimi gösteren grafik	48
Şekil 3.12	Diğer parametreler sabit tutulduğu durumda KAM'nin değişimi ile Spektral yaklaşım yöntemi için elde edilen hatanın değişimini gösteren grafik.	49
Şekil 3.13	Diğer parametreler sabit tutulduğu durumda KAM'yi değişimi ile İzdüşüm yöntemi için elde edilen hatanın değişimi gösteren grafik	50
Şekil 3.14	Farklı yöntemler için KAM' ye bağlı olarak hataların değişimi	51
Şekil 4.1	Nümerik olarak hesaplanan durum geribeslemesinin Uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim sistem modeli	53
Şekil 4.2	Doğru hesaplanmış durum geribesleme matrisinin sisteme uygulanması	57
Şekil 4.3	Kanonik formda tanımlanmış sistemler için yuvarlatma hatalarını izole eden algoritma	58

NÜMERİK KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNDE HATA ANALİZİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında lineer zamanla değışmeyen tek giriş tek çıkışlı sistemler için kullanılan kutup yerleştirme yöntemlerinin nümerik analizi ele alınmıştır. Öncelikle literatürdeki yöntemler hakkında genel bir bilgi verilmiştir. Daha sonra kutup yerleştirme işleminin bilgisayar ortamında nümerik olarak gerçekleştirilmesi durumunda karşılaşılabilecek olan olası problemler ve nedenlerinden bahsedilerek nümerik kutup yerleştirme problemi tanımlanmıştır. Bir sonraki adım olarak nümerik kutup yerleştirme problemi için bir hata tanımlaması yapılmıştır. Bu hata tanımlamasından yola çıkarak; nümerik kutup yerleştirme işlemi sonucunda meydana gelebilecek olası nümerik hatalar üzerinde etkili olan parametreler tanımlanmıştır. Bu parametreler sırası ile sistem mertebesi, sistemin reel değeri kutuplarının sayısının sistem mertebesine oranı olarak tanımlayabileceğimiz reel kutup oranı ve açık çevrim sistemin kutupları ile hedeflenen referans kutup kümesi arasındaki uzaklıktır. Açık çevrim sistemin reel kutup oranı ile hedeflenen kapalı çevrim sistemin reel kutup oranı farklı değeri alabileceği için bu parametre iki boyutlu bir parametre olarak karşımıza çıkmaktadır. Tez çalışması boyunca tanımlanan bu parametrelerin analizi için istatistiksel bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu nedenle parametreler tanımlandıktan sonra istatistiksel analizi için kullanılabilecek bazı araçlar ve algoritmalar verilmiştir. Daha sonra bu araçlar kullanılarak bu parametrelerin nümerik kutup yerleştirme işlemi üzerindeki etkisi istatistiksel olarak analiz edilmiştir.

Sistem mertebesinin analizi için öncelikle diğeri parametreler sabitlenmiş ve sistem mertebesi 10'dan 20'ye kadar artırılarak her bir sistem mertebesi için yeterli sayıda nümerik kutup yerleştirme işlemi gerçekleştirilmiş ve işlemler sonucunda saptanan hataların beklenen değeri ve standart sapmaları hesaplanmıştır. Bu analizin

sonucunda elde edilen grafikten hataların sistem mertebesine bağılı olarak logaritmik ekseninde lineer olarak veya başka bir değışle üstel olarak arttığı ve nümerik kutup yerleştirme işlemi için en etkili parametre olduğu görölmüştür.

Benzer şekilde açık çevrim sistemin reel kutup oranının analizi için öncelikle hedeflene kapalı çevrim sistemin reel kutup oranı da dahil olacak şekilde diğere tüm parametreler sabitlenmiş ve reel kutup oranı $[0,1]$ aralığında 0.1 artış ile değıştirilerek her bir değıer için yeterli sayıda nümerik kutup yerleştirme işlemi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kutup yerleştirme işlemlerinin sonucunda saptanan hataların beklenen değıerleri ve standart sapmaları hesaplanmıştır. Bu analizin sonucunda elde edilen grafikten hataların reel kutup oranına bağılı olarak logaritmik ekseninde üstel olarak arttığı görölmektedir. Daha sonra aynı işlem hedeflenen kapalı çevrim kutupları içinde tekrarlanmıştır. Elde edilen sonuçlardan hataların kapalı çevrim kutuplarından bağımsız olduğu görölmüştür.

Son olarak kutuplar arasındaki mesafe diğere tüm parametreler sabit tutulmak kaydıyla $[10^{-8}, 10^{10}]$ aralığında logaritmik olarak artırılmış ve kutuplar arasındaki mesafenin aldığı her bir değıer için saptanan hataların beklenen değıerleri ve standart sapmaları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlardan kutuplar arasındaki mesafenin 100'den büyü olduğu değıerlerde hataların logaritmik ekseninde üstel olarak arttığı görölmüştür.

Son olarak özel bir durum olan kontrol edilebilir kanonik biçimde yapılan nümerik kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hatalar için bir çözüm önerisi sunulmuştur.

ERROR ANALYSIS ON THE NUMERICAL POLE ASSIGNMENT PROBLEM

SUMMARY

In this study, we analyzed the numerical pole placement problem and related issues for a linear time invariant single-input single-output systems. First of all, general information about pole placement method in the resent literature is given. Then, we introduced same problems about possible numerical pole placement problems and some general reasons of them. Then, we did an error definition of numerical pole placement procedure and we defined some effective parameters on the numerical pole assignment process using this definition. These parameters are the order of open loop system, the percentage of reel poles of the open loop system and distance between open loop system poles and desired closed loop poles. Because of the fact that the percentage of reel poles of the open loop system may be different from the percentage of reel poles of desired closed loop poles, the percentage of reel poles can be considered a two dimensional parameters. In this study, we used a statistical approximation to analyze these parameters. Thus we gave same tools and algorithms in order to analyze these parameters using a statistical way. Then we did same statistical analysis in order to obtain the effects of these parameters on the numerical pole placement problem.

Firstly, the effect of the system order is analyzed when the other parameters are fixed. The result shows that the errors increase linearly on the logarithmic axes when the system order increases linearly. Then, the effect of the percentage of reel poles of the open loop system is analyzed when the other parameters are fixed. The result shows that the errors increase exponentially on the logarithmic axes when the percentage of reel poles of the open loop system increases linearly. Then, the effect of the percentage of reel poles of the desired closed loop system is analyzed when the other parameters are fixed. The result shows that there is no an effect of the

percentage of real poles of the desired closed loop system on the pole assignment errors. Finally, the effect of the distance between open loop system poles and desired closed loop poles is analyzed when the other parameters are fixed. The result shows that the errors can be increased exponentially when the distance between open loop system poles and desired closed loop poles is greater than 100. During these analyses, it can be easily said that the most effective parameter is the system order.

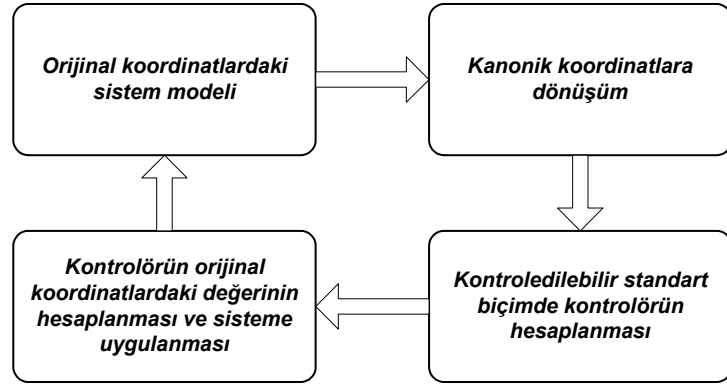
In the last section, we introduced an alternative method against the numerical pole placement error when the system is modeled in the controllable standard form which is an exceptional case. Then, we gave a proof for the method.

1. GİRİŞ

Durum geribeslemesi ile kutup yerleştirme problemi ve ilgili çalışmalar kontrol teorisinde uzun bir geçmişe ve önemli bir yere sahiptir. Kutup yerleştirme işleminin başarısı kararlılık ve sistem performansı üzerinde kritik rol oynar. Doğrusal ve zamanla değişmeyen, tek girişli tek çıkışlı sistemlerde kutup yerleştirme probleminin çözümü için pek çok yöntem geliştirilmiş olup bu yöntemlerin farklı performans ölçütlerine göre başarıları literatürde ayrıntısıyla incelenmiştir [1]. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda sıralanmıştır.

- Ackermann formülü
- İz düşün yaklaşımı (Mapping approach)
- Transfer fonksiyon matrisi yaklaşımı
- Spektral yaklaşım
- Kapalı çevrim öz vektörlerinin kullanımı

Yukarıda belirtilen yöntemlerin hepsinin ortak noktası, yalnızca tümüyle kontrol edilebilen sistemlere uygulanabilmesidir. Başka bir deyişle, belirtilen yöntemlerin kullanılabilmesi için; durum uzayı matematik modeli verilmiş olan herhangi bir sistemin kontrol edilebilirlik matrisinin rankının sistemin mertebesine eşit olma şartı aranır. Bu durumda lineer zamanla değişmeyen sistemler için kutup yerleştirme işleminin kontroledilebilir standart formda gerçekleştirilmesi son derece kolaydır. Fakat eğer verilen sistem kontroledilebilir standart biçimde değilse, bir dönüşüm matrisi kullanılarak kontroledilebilir standart biçime dönüşümü gerçekleştirilebilir. Böyle bir dönüşüm matrisinin varlığı için gerek ve yeter şart, yukarıda da tanımlamış olduğumuz, sistemin bütünü ile kontroledilebilir olmasıdır. Eğer bir dönüşüm uygulanarak kontrol edilebilir standart formda kutup yerleştirme işlemi gerçekleştirilirse elde edilecek olan durum geribesleme matrisinin orijinal koordinatlarındaki karşılığının bir ters dönüşüm yapılarak hesaplandıktan sonra sisteme uygulanması gerekmektedir. Bu işlemler “Şekil 1.1” de betimlenmiştir.



Şekil 1.1: Kutup yerleştirme işleminin kontrol edilebilir standart formda gerçekleştirilmesi

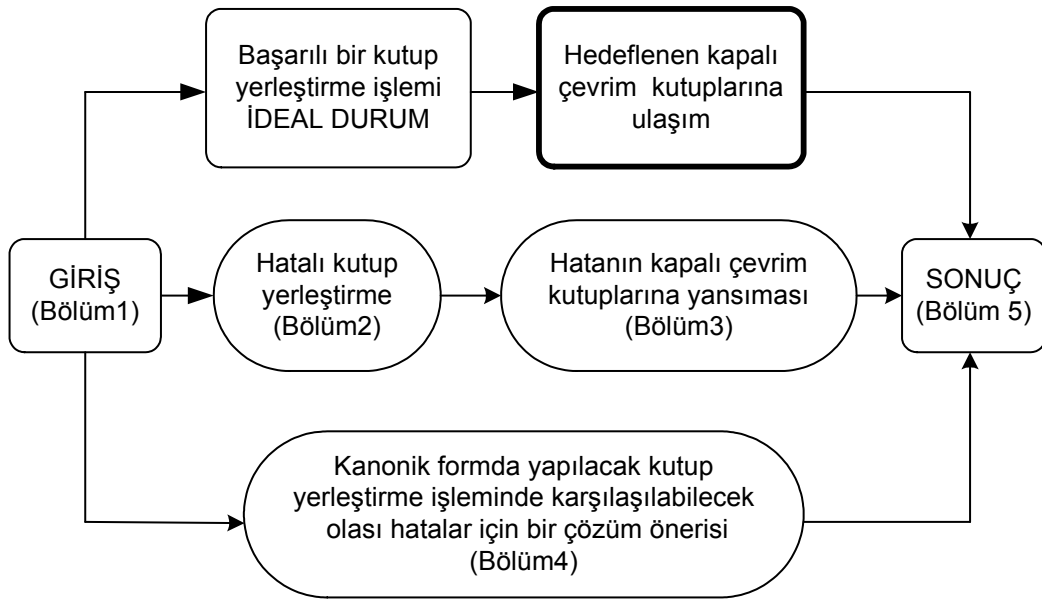
Fakat ne yazık ki kutup yerleştirme işlemi nümerik olarak gerçekleştirildiği takdirde yüksek mertebeden sistemler için önemli hesaplama hataları meydana gelebilmekte ve bu hatalar kapalı çevrim kutup bölgelerinde ciddi bozulma ve yer değiştirmelere neden olabilmektedir. Bu konu üzerine yapılmış olan daha önceki çalışmalardan da bilindiği gibi, nümerik olarak gerçekleştirilecek bir kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hesaplama hatalarını etkileyen bir takım faktörler mevcuttur. Önde gelen faktörlerden bazıları yöntem farklılıkları, sistem mertebesi (ki bu kullanılan matrislerin boyutlarını belirleyecektir), kontrol edilebilir standart forma yapılacak olan bir dönüşümde meydana gelebilecek olası hatalar (dönüşüm matrisinin ve tersinin hesaplanması ve bu matrislerin hesaplama öncesi doğru olarak koşullandırması) olarak sıralanabilir. Kontrol edilebilir standart formda gerçekleştirilen kutup yerleştirme işleminde olduğu gibi doğrudan sistemin orijinal koordinat düzleminde kutup yerleştirme işleminin gerçekleştirildiği spektral yaklaşım dışındaki diğer yöntemler için geçerli olan matris tersinin alınma zorunluluğu spektral yaklaşım için bir avantaj olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada ele alınan temel fikir, nümerik olarak yapılan bir kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hesaplama hatalarının büyüklüğünü belirleyen tüm faktörlerin bulunması ve bu faktörlerin hatalar üzerindeki etkilerinin tespit edilmesidir.

Bu tez çalışması boyunca, durum geri besleme matrisinin hesaplanmasında ortaya çıkabilecek olası hataların kapalı çevrim kutup bölgeleri üzerindeki etkilerinin analizi için istatistiksel bir yaklaşım benimsenmiştir. Çünkü her ne kadar nümerik hesaplama hataları olası olarak gerçekleşse de, algoritma içinde izole edilmesi oldukça

zordur ve yukarıda da belirtildiği gibi kullanılan yöntem, sistemin matematiksel modelini oluşturan matrislerin elemanları ve bu matrislerin koşullandırılması gibi bir takım nedenlere bağlı olarak değişiklik arz edebilmektedir. Bu nedenle sembolik cebir yöntemlerinin kullanılması gibi bazı alternatif yöntemler gündeme gelmiştir [1]. Bu durum nümerik olarak yapılan kutup yerleştirme işlemlerinde ortaya çıkacak hatanın önceden tespitini ve kapalı çevrim kutupları üzerindeki etkilerinin fonksiyonel olarak analiz edilmesini zorlaştıracaktır. Bu nedenle kutup yerleştirme işleminin nümerik analizi yapılırken meydana gelecek olası nümerik hataların kapalı-çevrim kutupları üzerindeki etkisinin istatistiksel olarak incelenmesi gerekmektedir.

Bu tez çalışmasında da kutup yerleştirme işleminin nümerik analizi iki ana başlıkla ele alınacaktır. Birinci kısımda, oluşacak nümerik hataların genel bir tanımlaması yapılacaktır. İkinci kısımda ise hatanın kapalı çevrim kutuplarına olan etkisini belirleyen parametreler ele alınacaktır. 2. ve 3. bölüm olarak verilen bu kısımları takip eden bölümde ise kontrol edilebilir kanonik formda durum geribesleme matrisinin hesaplanırken meydana gelebilecek hataların giderilmesi için bir çözüm önerisi sunulacaktır. Yapılan çalışmaların bir değerlendirmesinin yer aldığı sonuç bölümü tezin 5. bölümü olarak sunulmuştur. Bu bölümleri ve kutup yerleştirme işleminin nümerik analizini betimleyen bir şablon “Şekil1.2” ile verilmiştir.



Şekil 1.2: Nümerik kutup yerleştirme işlemi için bir şablon

2. KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNDE HATA ANALİZİ

2.1 Kontrol edilebilir Standart Formda Kutup Yerleştirme

Zamandan bağımsız tek giriş tek çıkışlı sistemlerde durum geri beslemesi kullanılarak gerçekleştirilen kutup yerleştirme problemi genel olarak şu şekilde tanımlanabilir. Durum uzayı formunda tanımlanmış bir sistem aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx \quad (2.2)$$

Burada “ x ” sistemin durum değişkenlerini “ y ” sistem çıkışını, “ u ” ise kontrol girişini tanımlamaktadır. Kutup yerleştirme işleminin kontrol edilebilir standart formda veya başka bir deyişle faz kanonik formda gerçekleştirilmesinin oldukça pratik ve güvenilir olduğu kontrol teorisinde oldukça iyi bilinen bir konudur. Eğer verilen sistem kontrol edilebilir standart formda tanımlanmamışsa aşağıdaki denklem 2.3’de gösterildiği gibi bir dönüşüm matrisi ile koordinat dönüşümü yapılarak kutup yerleştirme işlemi kontrol edilebilir standart formda gerçekleştirilebilir.

$$x = T\tilde{x} \quad (2.3)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad (2.4)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B \quad (2.5)$$

Burada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} (n \times n), \quad (2.6)$$

$$\tilde{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \ (n \times 1), \quad (2.7)$$

Bu sistemde, eğer u kontrol girişine aşağıdaki denklem 2.8’de tanımlanan geribesleme uygulanırsa,

$$u = -\tilde{K}\tilde{x} + r \quad (2.8)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\tilde{x} + \tilde{B}r \quad (2.9)$$

Burada

$$\tilde{K} = [k_0 \ k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{n-1}] \quad (2.10)$$

$$\tilde{A}_c = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_0 \ k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{n-1}] \quad (2.11)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + k_0) & -(a_1 + k_1) & -(a_2 + k_2) & \dots & -(a_{n-1} + k_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sonuç olarak sistemin karakteristik polinomu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k_{i+1})s^i + s^n \\ &= (a_0 + k_1) + (a_1 + k_2)s + (a_2 + k_3)s^2 + \dots + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + s^n \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hedeflenen kapalı-çevrim kutuplarının aşağıda verilen polinomun kökleri olduğunu kabul edelim.

$$p_d(s) = d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (2.14)$$

Bu iki polinomun katsayılarını eşitlersek durum geribesleme matrisinin elemanlarını tespit etmiş oluruz:

$$k_i = d_i - a_i, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2.15)$$

Dolayısıyla durum geribesleme matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tilde{K} = [d_0 - a_0 \quad d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad \cdots \quad d_{n-1} - a_{n-1}] \quad (2.16)$$

Durum geribesleme matrisinin orijinal koordinatlardaki değerini hesaplamak için ise dönüşüm matrisi kullanılarak bir geri dönüş yapmak gerekir.

$$K = \tilde{K} T^{-1} \quad (2.17)$$

Sonuç olarak elde edilen matris ideal şartlarda orijinal sisteme geribesleme olarak uygulandığı takdirde kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi yukarıda denklem 2.14 ile verilen yani hedeflenen karakteristik denklem olacaktır. Bu işlem bilgisayar ortamında nümerik olarak gerçekleştirilmek istendiği takdirde hatalar ortaya çıkmaktadır. Bu hatalardan biri tezin giriş kısmında da belirtildiği gibi sisteme uygulanan bir koordinat dönüşümünde meydana gelebilecek olası nümerik hesaplama hatalarıdır. Literatürde bu konu üzerine birçok çalışma mevcuttur [9]. Bu tez çalışmasında literatürdeki çalışmalara ek olarak kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası nümerik hesaplama hatalarının diğer nedenleri araştırılmıştır.

Kutup yerleştirme işlemi kontrol edilebilir standart formda gerçekleştirildiği takdirde yapılan nümerik hataların ana kaynağı yuvarlatma hataları olacaktır. Burada dikkat çekilecek nokta ise nümerik olarak gerçekleştirilen bir kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hataların büyüklüğünü belirleyen bir takım parametrelerin yanında, bu hataların kapalı çevrim kutup bölgelerinde meydana getireceği bozulmaların büyüklüğü üzerinde etkili olan bir takım ek parametrelerin de var olduğudur. Bu nedenle tezin bu kısmında oluşan bu hataların kapalı çevrim kutup bölgeleri üzerindeki etkisini belirleyen bir takım parametrelerin tanımlamaları yapılacak ve parametrelerin analizi için gerekli olan bazı ön saptamalarda bulunulacaktır.

Kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek nümerik hataların önemli bir kısmı yuvarlatma hatalarından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle yapılacak olası yuvarlatma hatalarının durum geri besleme matrisinin üzerindeki etkisini belirleyebilmek için öncelikle yuvarlatma hatalarının genel bir tanımlamasının yapılması ve genel terminolojiye kısaca değinilmesi faydalı olacaktır.

2.2 Bilgisayar aritmetiği penceresinden yuvarlatma hatalarına genel bir bakış

Kutup yerleştirme işleminde meydana gelen yuvarlatma hatalarını analiz etmeden önce bazı varsayımların yapılması gereklidir. Mevcut olan literatürde, yuvarlatma hataları için en sıklıkla kullanılan model standart model olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$fl(x \text{ işlem } y) = (x \text{ işlem } y)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq u, \quad \text{işlem} = +, -, *, /. \quad (2.18)$$

Bu model için $fl(.)$ terimi işlemin hesaplanan değerini, δ terimi yapılan yuvarlatma hatasını ve u terimi ise birim yuvarlatma hatasını temsil etmektedir. Buna ek olarak bilgisayar aritmetiği ile hesaplanabilecek en büyük mutlak değerli ve en küçük mutlak değerli sayılar için üst aşım ve alt aşım terimleri kullanılabilir. Üst aşım nümerik hesaplamalar için çok daha tehlikelidir ve yapılan hesaplama için ölümcül hatalara neden olabilir. IEEE standartlarına göre iki temel bilgisayar aritmetiği tanımlanmıştır. Bu standartlara göre 32 bitlik ve 64 bitlik işlemler için birim yuvarlatma hatası, üst aşım ve alt aşım değerleri “Tablo 2.1” de verilmiştir.

Tablo 2.1 IEEE standartlarına göre iki temel bilgisayar aritmetiği

Tip	Genişlik	Birim Yuvarlatma	Üst ve alt aşım
Tekil	32 bit	$2^{-24} \approx 5.96 \times 10^{-8}$	$10^{\pm 38}$
Çift	64 bit	$2^{-53} \approx 1.11 \times 10^{-16}$	$10^{\pm 308}$

Yuvarlatma hataları üzerine yapılan bütün analizlerde yuvarlatma hatasının işareti ihmal edilir. Yuvarlatma hatalarının nümerik hesaplamalar üzerindeki etkileri hakkında yapılan istatistiksel önermeler yuvarlatma hatalarının olasılık modelleri üzerinden yapılabilir. Konu ile ilgili daha fazla bilgi için [2] ve [3] olarak verilen referanslara bakınız.

2.3 Kontrol edilebilir standart formda yapılan kutup yerleştirme işleminde meydana gelen yuvarlatma hatalarının tanımlanması

Bir önceki bölümde de belirtildiği gibi bilgisayar ortamında yapılan nümerik hesaplamalarda birtakım yuvarlatma hatalarının meydana gelmesi kaçınılmazdır. Bölüm 2.1’de, kontrol edilebilir standart formda verilmiş olan bir sistemin durum geribesleme matrisinin i. elemanının ve ardından bütün matrisin ideal gösterimleri sırası ile denklem 2.15 ve 2.16’da verilmiştir. Bu bağlamda, durum geribesleme matrisinin i. elemanının ve ardından bütün matrisin nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilecek gerçek değerleri denklem 2.18 kullanılarak tanımlanabilir.

$$f_l(k_i) = (d_i - a_i)(1 + \delta) = k_i + \delta k_i, \quad (2.19)$$

$$f_l(\tilde{K}) = \tilde{K} + \delta \tilde{K} = [k_0 + \delta k_0 \quad k_1 + \delta k_1 \quad k_2 + \delta k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1} + \delta k_{n-1}] \quad (2.20)$$

Elde edilen durum geribesleme matrisinin nümerik olarak hesaplatılan değeri veya başka bir değişle gerçek değeri, daha önce bölüm 2.1 denklem 2.8’de gösterildiği gibi sisteme bir kontrol girişi (u) olarak uygulanırsa, sistemin durum denklemi ve durum matrisinin gerçek değerleri sırası ile aşağıdaki denklem 2.21 ve 2.22’deki şekli olacaktır.

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} - \tilde{B}.f_l(\tilde{K}))\tilde{x} \quad (2.21)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B}.f_l(\tilde{K}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -(a_0 + k_0 + \delta k_0) & -(a_1 + k_1 + \delta k_1) & \cdots & -(a_{n-1} + k_{n-1} + \delta k_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Sonuçta kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}.f_l(\tilde{K})) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k_i + \delta k_i) s^i + s^n \\ &= (a_0 + k_0 + \delta k_0) + (a_1 + k_1 + \delta k_1)s + \cdots + (a_{n-1} + k_{n-1} + \delta k_{n-1})s^{n-1} + s^n \end{aligned} \quad (2.23)$$

Denklem 2.23, Bölüm 2.1 de verilen denklem 2.14 (kapalı çevrim sistem için hedeflenen karakteristik denklem) türünden yazılacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}.f_l(\tilde{K})) &= \sum_{i=0}^{n-1} (d_i + \delta k_i) s^i + s^n \\ &= (d_0 + \delta k_0) + (d_1 + \delta k_1)s + \cdots + (d_{n-1} + \delta k_{n-1})s^{n-1} + s^n \end{aligned} \quad (2.24)$$

Denklem 2.24 ‘den de görülebileceği gibi yapılan yuvarlatma hataları kapalı çevrim sistemin karakteristik denkleminin katsayılarında bir takım bozulmalara neden olmaktadır. Bu durumu aşağıda verilen örnek 2.3.1 ile daha açık hale getirmek mümkündür.

Örnek 2.3.1: 15. mertebeden bir sistem modeli için, durum matrisinin elemanlarının değişim aralığı $\{-15,15\}$ olan rasgele türetilmiş bir sistemi ele alalım ve bu sistemin karakteristik denklemi ise aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\begin{aligned}
p(s) = & 2.67924 \times 10^{19} + 1.58406 \times 10^{18} s - 2.37465 \times 10^{17} s^2 - 8.57722 \times 10^{15} s^3 \\
& + 2.91443 \times 10^{15} s^4 - 6.21316 \times 10^{13} s^5 - 9.99602 \times 10^{12} s^6 - 2.53948 \times 10^{11} s^7 \\
& + 7.17846 \times 10^9 s^8 + 3.40312 \times 10^8 s^9 - 1.1787 \times 10^7 s^{10} - 81784 s^{11} - 22391.5 s^{12} \\
& + 231.848 s^{13} + 38.7751 s^{14} + s^{15}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Buna ek olarak, köklerinin değişim aralığı $\{-15,15\}$ olan aşağıdaki polinomu kapalı çevrim sistemin hedeflenen karakteristik denklemi olarak alalım.

$$\begin{aligned}
p_d(s) = & -3.22364 \times 10^{15} - 1.80411 \times 10^{15} s - 7.22234 \times 10^{13} s^2 + 5.49771 \times 10^{13} s^3 \\
& + 5.28896 \times 10^{11} s^4 - 7.73624 \times 10^{11} s^5 + 3.06958 \times 10^{10} s^6 + 3.99562 \times 10^9 s^7 \\
& - 4.39008 \times 10^8 s^8 + 1.39405 \times 10^7 s^9 + 1.36924 \times 10^6 s^{10} - 200580 s^{11} + 6897.9 s^{12} \\
& + 411.035 s^{13} - 40.1741 s^{14} + s^{15}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Bu durumda, açık-çevrim sistemin karakteristik denklemini (denklem 2.25), bir durum geribeslemesi kullanılarak hedeflenen karakteristik denklemine (yukarıdaki denklem 2.26) taşıyan her bir durum değişkeni geribeslemesinin katsayılarının değerleri ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
k_0 = & -2.67956 \times 10^{19}, & k_1 = & -1.58587 \times 10^{18}, & k_2 = & 2.37393 \times 10^{17} \\
k_3 = & 8.6322 \times 10^{15}, & k_4 = & -2.9139 \times 10^{15}, & k_5 = & 6.1358 \times 10^{13} \\
k_6 = & 1.00276 \times 10^{13}, & k_7 = & 2.57963 \times 10^{11}, & k_8 = & -7.61746 \times 10^9 \\
k_9 = & -3.26371 \times 10^8, & k_{10} = & 1.31562 \times 10^7, & k_{11} = & 616604 \\
k_{12} = & 29289.4, & k_{13} = & 179.187, & k_{14} = & -78.9492
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Burada,

$$\tilde{K} = [k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{14}] \tag{2.28}$$

Bir sonraki adım olarak, durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarının değişim aralıklarını belirlemeye çalışalım. Bir önceki bölümde, IEEE standartları referans alınarak, yapılan temel nümerik işlemlerde meydana gelecek birim yuvarlatma hatası “Tablo 1.1” ile ve bu hatalar için referans model ise denklem 2.18 ile verilmişti. Bu model referans alınarak, sisteme uygulanacak bir durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarının yaklaşık değerleri kestirilebilir. Denklem 2.18 ile verilen modele göre durum geribesleme matrisinin i. elemanının hesaplanan değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$fl(k_i) = k_i + \delta k_i, \quad |\delta| \leq u \approx 1.11 \times 10^{-16} \quad (2.29)$$

Burada u birim yuvarlatma hatasını, δ ise i. durum geribeslemesinin hesaplanmasında yapılabilecek olası yuvarlatma hatasını temsil etmektedir. Bu durumda, durum geribesleme matrisinin her bir elemanının hesaplanması durumunda yapılabilecek olası yuvarlatma hatalarının değişim aralıkları ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{array}{lll} |\delta k_0| \leq 2974.31 & |\delta k_1| \leq 176.031 & |\delta k_2| \leq 26.3506 \\ |\delta k_3| \leq 0.958174 & |\delta k_4| \leq 0.323443 & |\delta k_5| \leq 68.1074 \times 10^{-4} \\ |\delta k_6| \leq 11.1297 \times 10^{-4} & |\delta k_7| \leq 28.6317 \times 10^{-6} & |\delta k_8| \leq -8.45539 \times 10^{-7} \\ |\delta k_9| \leq -3.62272 \times 10^{-8} & |\delta k_{10}| \leq 1.46034 \times 10^{-9} & |\delta k_{11}| \leq 6.84431 \times 10^{-11} \\ |\delta k_{12}| \leq 3.25112 \times 10^{-12} & |\delta k_{13}| \leq 1.98897 \times 10^{-14} & |\delta k_{14}| \leq -8.76336 \times 10^{-15} \end{array} \quad (2.30)$$

Eğer denklem 2.30'da verilen yuvarlatma hatalarının her biri değişken bir parametre ile gösterilecek olursa, durum geribesleme matrisinin hesaplanan değerinin geribesleme üzerine uygulanması ile elde edilen sistemin kapalı çevrim karakteristik denklemi denklem 2.32'de verilen şekilde olacaktır. Bunun için öncelikle olası yuvarlatma hatalarını parametrik olarak tanımlayalım.

$$\delta k_i = q_i \quad (2.31)$$

Daha sonra, sistemin kapalı-çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}.fl(\tilde{K})) = & (2.67924 \times 10^{19} + k_0 + q_0) + \\ & (1.58406 \times 10^{18} + k_1 + q_1)s + (-2.37465 \times 10^{17} + k_2 + q_2)s^2 + \\ & (-8.57722 \times 10^{15} + k_3 + q_3)s^3 + (2.91443 \times 10^{15} + k_4 + q_4)s^4 + \\ & (-6.21316 \times 10^{13} + k_5 + q_5)s^5 + (-9.99602 \times 10^{12} + k_6 + q_6)s^6 + \\ & (-2.53948 \times 10^{11} + k_7 + q_7)s^7 + (7.17846 \times 10^9 + k_8 + q_8)s^8 + \\ & (3.40312 \times 10^8 + k_9 + q_9)s^9 + (-1.1787 \times 10^7 + k_{10} + q_{10})s^{10} + \\ & (-81784 + k_{11} + q_{11})s^{11} + (-22391.5 + k_{12} + q_{12})s^{12} + \\ & (231.848 + k_{13} + q_{13})s^{13} + (38.7751 + k_{14} + q_{14})s^{14} + s^{15} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Bu denklemde, “k” parametreleri, herhangi bir yuvarlatma hatasının olmadığı, durum geribesleme matrisinin elemanlarının ideal değerlerini temsil etmektedir ve bu değerler denklem 2.27 ile verilmiştir. Denklemde verilmiş olan “q” parametreleri ise meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarını temsil etmektedir ve doğal olarak bu

parametrelerin nominal değerleri sıfırdır. Bu örnek için denklem 2.25 ile verilen karakteristik denklemine sahip 15. mertebeden bir sistemde, “q” parametrelerin kutup yerleştirme işleminin sonucunda alabileceği olası değerlerin değişim aralıkları ise denklem 2.30 ile verilmiştir. Denklemde gösterildiği gibi “q” parametreleri ile tanımladığımız yuvarlatma hatalarının 15. mertebeden bir sistem için oldukça büyük değerler alabildiği ve bir kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası yuvarlatma hataları için sistem mertebesinin belirleyici bir unsur olduğu açıkça görülmektedir. Yukarıda verilen örnekte de görüldüğü gibi; kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası yuvarlatma hataları, işlem sonucunda elde edilecek olan kapalı-çevrim sistem için tanımlanmış parametrik belirsizlikler olarak düşünülebilir ve her bir parametrenin değişiminin sistemin kapalı çevrim kutup bölgelerinde farklı etkileri olacaktır.

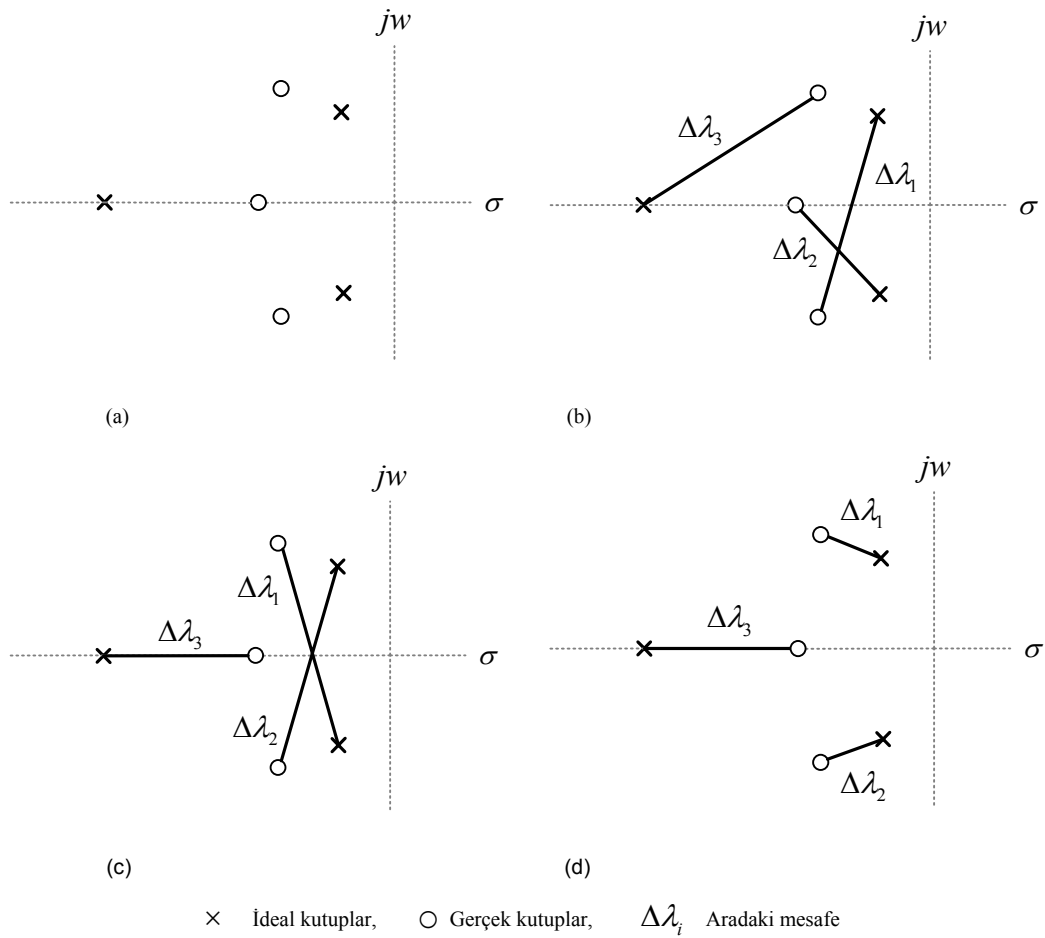
2.4 Kutup yerleştirme probleminde hata tanımlanması ve kutup renklendirme

Bir önceki bölümün sonunda verilen örnek 2.3.1 ile gösterildiği gibi, eğer durum geribesleme matrisinin hesaplanan değeri sisteme geribesleme olarak uygulanırsa, olası yuvarlatma hatalarının bir sonucu olarak kapalı-çevrim sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki formda olacaktır.

$$p(s, q, k) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + q_i + k_i) s^i + s^n \quad (2.33)$$

Burada “q” parametreleri daha öncede belirtildiği gibi durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarını, “k” parametreleri ise durum geribesleme matrisinin elemanlarını temsil etmektedir. Sistemin karakteristik köklerini belirleyen “k” ve “q” parametrelerinin nominal değerleri için elde edilecek olan değerler ise sistemin hedeflenen kapalı-çevrim kutuplarıdır ve denklem 2.33 den görülebileceği gibi parametrelerin değişimi ile kapalı çevrim kutuplarının farklı değerler alması kaçınılmazdır. Bu durumda, meydana gelen yuvarlatma hatalarının kapalı çevrim kutuplarını hedeflenen kutup bölgelerinden ne kadar uzaklaştırdığını veya başka bir değişle kutup yerleştirme işleminin performansını ne kadar etkilediğini analiz etmek için bir performans kriteri tespit edilmelidir. Bu kriteri belirleme aşamasında ise bazı tanımlamaların yapılması faydalı olacaktır. Bu noktadan hareketle, sistemin hedeflenen kapalı çevrim kutupları, kutup yerleştirme problemi için ideal kutuplar olarak adlandırılabilir.

Bilgisayar ortamında nümerik olarak hesaplatılan durum geribesleme matrisinin sisteme uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim kutuplarına ise işlem sonucu yerleştirilmiş gerçek kutuplar diyelim. Bu tanımlamalardan yola çıkarak diyebiliriz ki, ideal kutuplar ile bu kutuplara karşılık gelen gerçek kutupların arasındaki mesafe kutup yerleştirme işleminin performansını belirleyecektir. Başka bir deyişle, verilen bir sistemin ideal kutuplarıyla gerçek kutupları arasındaki olası en büyük uzaklık kutup yerleştirme işleminin hatası olarak tanımlanabilir ve nümerik hesaplamalarda meydana gelen hataların kutup bölgelerine yansımaları temsil etmektedir. Fakat aradaki mesafe ölçülmeden önce sistemin hangi ideal kutbuna hangi gerçek kutbun karşılık geldiği bilinmelidir. Başka bir deyişle, ideal kutuplarla gerçek kutuplar arasında karşılıklı bir eşleşmenin yapılması gereklidir. Literatürde bu işlem kutup renklendirme olarak adlandırılır [4]. “Şekil 2.1” ile üçüncü mertebeden bir sistemin için basit bir örnek verilmiştir.



Şekil 2.1: Üçüncü mertebeden bir sisteme kutup yerleştirme işlemi uygulanması durumunda elde edilecek gerçek kutuplar (yerleştirilen kutuplar) ile hedeflenen kutuplar için olası bir kutup dağılımı a şıkkı ile verilmiştir. Elde edilen gerçek kutuplarla hedeflenen kutuplar arasındaki eşleşmeler sırası ile b,c ve d şıkları ile verilmiştir.

“Şekil 2.1” (b,c,d) de yerleştirilen kutuplar (gerçek kutuplar) ile hedeflenen kutuplar (ideal kutuplar) arsında olası bazı eşleşmeler gösterilmiştir. Yapılan eşleşmeler içinde en makul olanının “Şekil 2.1.d” ile verilmiş olan eşleme olduğu açıktır. Bu noktadan hareketle, gerçek kutuplarla ideal kutuplar arasında yapılacak farklı eşlemelerde, “Şekil 2.1.d” de gösterildiği gibi gerçek kutuplar ile ideal kutupların arasındaki en büyük uzaklığın en küçük olduğu eşlemenin yapılabilecek en iyi eşleşme olduğu söylenebilir. Yapılan bu eşleme sonucunda kutuplar arasında ölçülen en büyük uzaklık, kutup yerleştirme işleminin hatasını temsil edecektir. “Şekil 2.1.d” için hata aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e = \Delta\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq 3} (\Delta\lambda_i) \quad (2.34)$$

Fakat 10. mertebeden bir sistem için bu problemin çözümü oldukça yavaş olacaktır. Çünkü 10! adet farklı permutasyon test edilmelidir. Bu yüzden bu problemin çözümü için daha iyi bir algoritmaya ihtiyaç duyulacaktır. Bu işlemi daha hızlı olarak gerçekleştirebilecek algoritmalarından biride bilgisayar bilimleri terminolojisinde lineer bottleneck assignment problem olarak adlandırılan algoritmadır. Konu ile ilgili daha fazla bilgi için [10] no’lu referansa bakılmalıdır.

2.5 Kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hataların kapalı çevrim kutup bölgelerine etkisini belirleyen parametreler

Daha önceki bölümlerde kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası nümerik hesaplama hatalarının olası nedenlerinden (kanonik koordinatlara yapılacak bir dönüşümden kaynaklanabilecek hatalar, yuvarlatma hataları ve karakteristik denkleminin doğru olarak hesaplanması vs) bahsedilmişti. Ayrıca Bölüm 2.3’de sistem mertebesinin artışı ile kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarının üstel veya üstele yakın olarak arttığı belirtilmişti ve kapalı-çevrim karakteristik denklemi üzerindeki etkilerinden ise Bölüm 2.3 ve 2.4’de detaylıca bahsedilmişti. Özellikle Bölüm 2.4’de, bu tür yuvarlatma hataları denklem 2.33 de gösterdiğimiz gibi; sistemin kapalı çevrim karakteristik denklemindeki belirsizlik içeren parametreler olarak ele alınmıştı ve yine Bölüm 2.4’de yuvarlatma hatasını temsil eden bu parametrelerin kapalı-çevrim kutup bölgeleri üzerindeki etkilerinin analiz edilebileceği kutup renklendirme yönteminden ve bu yöntemden yola çıkarak, kutup yerleştirme işlemi için hedeflenen kapalı-çevrim kutup bölgelerinden uzaklaşmanın referans alındığı bir hata tanımlaması yapılmıştı. Bu

bağlamda kutup yerleştirme işleminin nümerik analizi için birbirinden bağımsız olarak incelenebilecek üç farklı parametre gurubundan bahsetmek mümkündür. Bu parametreler aşağıda sıralanmıştır.

- I. Sistem Mertebesi: Klasik kontrol teorisinde oldukça iyi bilinen bir parametredir. Kısaca bir sistemin karakteristik denkleminin mertebesi olarak tanımlanabilir.
- II. Reel kutup oranı (RKO): verilen bir sistemin reel kutuplarının sayısının tüm kutuplarının sayısına oranı olarak tanımlanmıştır.
- III. Kutuplar arasındaki mesafe (KAM): açık çevrim kutupları ile hedeflenen kutuplar arasındaki maksimum uzaklık olarak tanımlanmıştır.

Şimdi bu parametreleri biraz daha ayrıntısı ile ele alalım.

Sistem Mertebesi: Bölüm 2.3’de verilen denklem 2.24 dan da görülebileceği gibi durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hataları sistemin kapalı çevrim karakteristik denkleminin katsayılarında birtakım bozulmalara neden olmaktadır ve bu tür bozulmaların sistemin kapalı-çevrim kutuplarını hedeflenen bölgelerden uzaklaştıracağı açıktır. Bu tür katsayı bozulmaları ile kutup bölgelerinde meydana gelecek bozulmalar arasındaki ilişkiyi lineer bir yaklaşımla aşağıdaki gibi göstermek mümkündür [6]. Burada sistemin kapalı çevrim karakteristik denkleminin

$$p_{cl}(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (2.35)$$

olduğunu kabul edersek, karakteristik denkleminin k. katsayısında meydana gelecek bozulmanın j. kutup üzerinde etkisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\Delta\lambda_j = -\frac{\lambda_j^{n-k}}{\prod_{\ell \neq j} (\lambda_j - \lambda_\ell)} \Delta a_k \quad (2.36)$$

Bu noktada akla gelecek soru, katsayılar üzerinde bu tür bozulmalara neden olan yuvarlatma hatalarının, verilen sistemin matematiksel modeli ile herhangi bir ilişkisi var mıdır veya başka bir deyişle bu tür katsayı bozulmalarının miktarını belirleyen parametreler nelerdir? Bu konuyu analiz etmeden önce bazı basit ön saptamalarda bulunmak faydalı olacaktır. Öncelikle denklem 2.1’de verilen açık çevrim sistemin karakteristik denkleminin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}\det(sI - A) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i + s^n \\ &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n\end{aligned}\tag{2.37}$$

Denklem 2.37’de verilmiş olan karakteristik denkleminin katsayıları ile kökleri arasında, aşağıda verilen denklem 2.38 ile verilen ilişkiden bahsetmek mümkündür. Bu noktadan hareketle, verilen sistemin karakteristik denkleminin köklerinin karmaşık düzlem üzerindeki dağılımının birim çemberin dışında yoğunlaşmış olduğunu kabul edelim. Bu durumda sistem mertebesinin artması ile katsayıların mutlak değerleri de artış gösterecektir. Fakat denklem 2.38’den de görülebileceği gibi; karakteristik denkleminin mertebesi ile katsayılar arasındaki lineer bir ilişkiden bahsetmek mümkün değildir.

$$\left. \begin{aligned} a_{n-1} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n \\ &\vdots \\ a_i &= \sum_{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leq n} \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \cdots \lambda_{\alpha_k} \\ &\vdots \\ a_0 &= \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \lambda_n \end{aligned} \right\} \tag{2.38}$$

Bunun yanında karakteristik denklemin katsayılarından a_0 ile denklem kökleri arasındaki üstel bir ilişkiden, a_{n-1} dışında diğer katsayılar içinse üstele yakın bir ilişkinin varlığından bahsedilebilir. Bunun bir sonucu olarak, sistem mertebesinin artırılması ile karakteristik denkleminin katsayılarının üstel veya üstele yakın olarak arttığı kolaylıkla söylenebilir. Bu nedenle, katsayılar cinsinden hesaplanacak olan durum geri besleme kontrolörünün içereceği yuvarlatma hatalarının ise sistem mertebesinin artışı ile yine üstel veya üstel yakın olarak artması beklenen bir sonuçtur. Bu nedenledir ki daha sonraki bölümlerde de göstereceğimiz gibi, özellikle 10. mertebe ve daha yüksek mertebeden sistemler için sistemin açık-çevrim karakteristik denkleminin katsayıları oldukça büyük değerler alabilmekte ve dolayısıyla durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında ciddi yuvarlatma hataları meydana gelebilmektedir.

Reel kutup oranı: Bu parametrenin ifade ettiği kavramın aşağıda yapılacak olan açıklamalar ve tanımlamalarla daha açık hale getirilebilmesi mümkündür. Kutup yerleştirme işlemi sonucunda ortaya çıkabilecek olası kutup yerleştirme hatalarının hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgelerinden uzaklaşmalara neden olabileceği daha önceki bölümlerde de belirtilmişti. Bu parametre üzerine yapılacak olan analizlerin çıkış noktası, yapılan nümerik hatalar sonucunda kapalı çevrim sistemin reel kutuplarında karmaşık değerli kutuplarına nazaran daha büyük oranlarda bozulma ve hedeflenen bölgelerden uzaklaşmaların meydana geldiği düşüncesidir. Bu nedenle reel kutup oranı üzerine yapılan analizlerin amacı verilen sistemin spektral dağılımının kutup yerleştirme işleminin başarısına etkisini gösterebilmektir.

Reel kutup oranı olarak adlandırılan bu parametre, kutup yerleştirme işlemi öncesinde verilen bir açık-çevrim sistem için, reel değerli kutuplarının sayısının sistemin tüm kutuplarının sayısına oranı olarak tanımlanabilir. Ayrıca, bir sistemin tüm kutuplarının sayısı reel kutupların sayısına ancak eşit veya fazla olabileceği için bu parametre 0 ile 1 arasında bir değer alacaktır ve bir oran belirttiği için yüzdelik dilim türünden de ifade edilmesi mümkündür. Fakat bu kavram tek başına bir anlam taşınamamaktadır. Çünkü verilen bir sistemin kutuplarının %50 oranında reel olması şeklinde bir ifade teorik olarak her zaman mümkün olmayabilir. Buna rnek olarak 10. mertebeden bir sistem ele alınırsa, bu mertebeden bir sistemin toplam açık çevrim kutup sayısının sistem mertebesine eşit olacağı bilinen bir gerçektir. Fakat aynı sistemin açık çevrim reel kutuplarının sayısının 5 dolayısıyla da reel kutup oranının 0.5 olması veya başka bir değişle kutuplarının %50 oranında reel olması olanaksızdır. Çünkü 10. mertebeden bir sistemin reel kutup sayısı için 5'e yakın varyasyonlar ancak 4 ile 6 olabilir ve bu durumda sistem kutupları %40 ile %60 oranlarında reel olacaktır. Fakat eğer aynı mertebeden ve rasgele türetilmiş olan çok sayıda sistem için bu oran hesaplanıp ortalama değerleri alınırsa, türetilen herhangi bir açık çevrim sistemin reel kutuplarının tüm kutuplarına oranının beklenen değer i istatistiksel olarak saptanmış olur ve yüzdelik dilim açısından da anlamlı bir terim elde edilmiş olur.

Yukarıda verilen örneğe dönecek olursak, 10. mertebeden bir sistem için reel kutup oranının %40 ile %60 değerlerini alabileceğinden bahsedilmişti. Bu değerlerdeki reel kutup oranlarına sahip birçok sistem türetilip, hesaplanan reel kutup oranlarının ortalama değer i alınacak olursa %40 ile %60 arasında değişen %50 civarında bir

değerin elde edilmesi beklenir. Elde edilen bu değer reel kutup oranının beklenen değerinin yüzdelik olarak gösterimidir. Reel kutup oranının beklenen değeri olarak tanımladığımız bu terim için aşağıdaki gibi bir matematiksel gösterim yapılabilir.

$$E\{reel\ kutup\ oranı\} = \frac{E\{reel\ kutup\ sayısı\}}{Tüm\ kutupların\ sayısı} \quad (2.39)$$

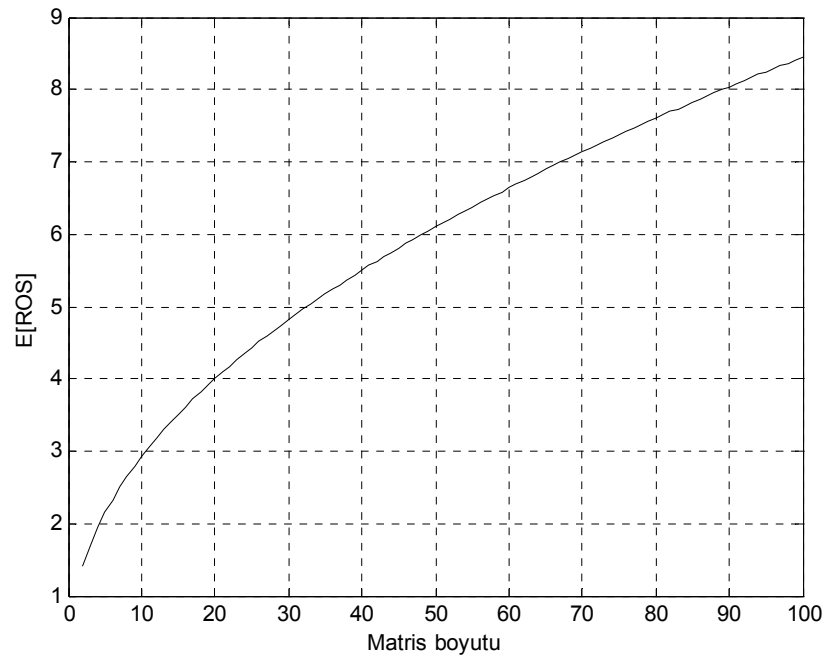
Bu noktadan hareketle, bu parametrenin kutup yerleştirme işlemi üzerindeki etkisini analiz edebilmek için ilk olarak durum uzayı formunda ve elemanları rasgele olarak atanmış çok sayıda sistemin türetildiğini ve bu sistemlerin reel kutuplarının oranının beklenen değerinin ise programcı tarafından önceden belirlenebildiğini düşünelim. Daha sonra, bu şekilde türetmiş olduğumuz her bir sisteme kutup yerleştirme işlemini uygulayarak sistemlerin açık çevrim kutuplarını yine rasgele seçilmiş olan kutup bölgelerine taşıdığımızı kabul edelim. Daha sonra her işlem sonucunda yapılabilecek olası hatayı bir önceki bölümde açıklamış olduğumuz kutup renklendirme yöntemini de kullanarak tespit ettiğimizi ve son olarak da tespit edilen bu hataların ortalama değerlerini hesapladığımızı düşünelim. Bu durumda, reel kutup oranının beklenen değeri ile kutup atama işleminde yapılan hataların beklenen değeri arasında istatistiksel bir ilişki kurmak mümkün olacaktır. Fakat bu noktada akla gelecek ilk soru, yukarıda belirtildiği gibi hedeflenen reel kutup oranlarına sahip rasgele sistemleri türetmek veya başka bir deyişle rasgele türetilen sistemlerin reel kutup oranının ve bunun bir sonucu olarak da sistemlerin bütünü için reel kutup oranının beklenen değerini önceden belirleyebilmek mümkün müdür?

Bu sorunun cevabı için öncelikle sorulması gereken soru şu olacaktır. Elemanları birim (uniform) dağılımlı olarak türetilmiş rasgele durum matrislerinin reel kutup oranının beklenen değeri nedir veya başka bir deyişle rasgele sistemlerin birim dağılımlı ve ek bir işlem yapılmaksızın üretildiği durumda bu parametrenin değeri ne olacaktır? Literatürde bazı farklı uygulama alanlarına sahip olan rasgele matris teorisinin araştırma konularından bir tanesi de rasgele türetilmiş kare matrislerin reel özdeğer sayısının beklenen değerleri ve bu özdeğerlerinin reel veya karmaşık sayı olma ölçütleri temel alınarak karmaşık düzlem üzerindeki olası dağılımlarının analizidir[7].

Farklı boyutlarda ve elemanları birim dağılımlı olarak türetilmiş bir kare matrisin reel özdeğerlerinin sayısının beklenen değeri için matrisin boyutuna (n) bağlı olan bir fonksiyonel ilişki aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

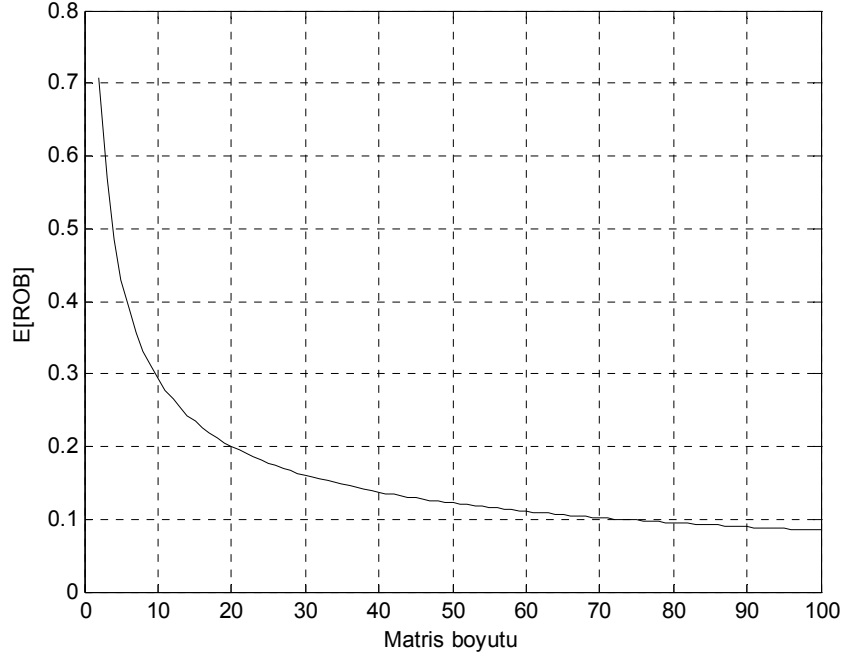
$$E_n = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n/2-1} \frac{(4k-1)!!}{(4k)!!} & n \text{ çift ise} \\ 1 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(4k-3)!!}{(4k-2)!!} & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.40)$$

Şimdi öncelikle verilen bu denklemlerin sonucunun boyutları 2 ile 100 arasında değişebilen matrisler için hesaplatıldığını düşünelim. Bu durumda elde edilen sonuçlar, istenen bir boyutta ve standart dağılımlı olarak türetilcek bir matrisin reel öz değerlerinin sayısının beklenen değerlerini ifade edecektir. Bu değerler aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 2.2 E[ROS]: Matrisin reel öz değerlerinin sayısının beklenen değeri

Daha sonra her matris boyutu için elde edilen bu değerleri matrisin boyutuna böldüğümüzü düşünelim. Bu durumda verilen bir boyutta ve standart dağılımla türetilcek olan bir rasgele kare matrisin reel öz değerlerinin sayısının tüm özdeğerlerinin sayısına oranının beklenen değeri elde edilmiş olunur. Bu sonuçlar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.3 E[ROB]: Matrisin reel öz değerlerinin sayısının tüm öz değerlerinin sayısına oranının beklenen değeri

“Şekil 2.3” yorumlanacak olursa, normal dağılımla türetilmiş kare matrislerin özdeğerleri için karmaşık veya reel olma ölçütü temel alındığı takdirde, matrisin öz değer sayısının sabit bir beklenen değere sahip olduğu görülmektedir. Bu yüzden elemanları standart dağılımlı olarak türetilen rasgele matrisler kullanılarak reel kutup oranı olarak tanımladığımız bu parametrenin kutup yerleştirme işlemi üzerindeki etkisinin analiz edilebilmesi olanaksızdır! Çünkü bu analizin tam olarak yapılabilmesi için, verilen bir sistemin reel kutup sayısının beklenen değerinin alabileceği tüm değerlerde meydana gelecek hataların ve bu hataların beklenen değerlerinin hesaplanabilmesi gereklidir. Ancak bu şekilde reel kutup sayısının beklenen değerinin değişimi ile kutup yerleştirme işleminin başarısı arasında bir ilişki kurulabilir. Bu nedenle özel bir yöntemin kullanılması kaçınılmaz olacaktır. Kullanılacak olan özel yöntem ve bu yöntemi kullanan algoritma Bölüm 2.6 da verilmiştir.

Kutuplar arasındaki mesafe: Kutup yerleştirme işlemi öncesinde verilen bir açık çevrim sistemin kutuplarına programcı tarafından belirlenebilen sabit bir uzaklıkta referans kutup kümesi türetildiğini düşünelim. Bu durumda referans kutup bölgeleri ile açık çevrim kutup bölgeleri arasında mesafe aynı olacak şekilde çok sayıda sistem

türetmek ve bunlara kutup yerleştirme işlemi uygulanarak olası hataların istatistiksel değerlerinin tutulması mümkün olacaktır. Bu durumda verilen kutuplar arasındaki mesafe ve kutup yerleştirme işleminin performansı arasında istatistiksel bir ilişki kurulabilir. Bunun için ise yine özel bir algoritmanın kullanılması gereklidir ve bu algoritma ilerleyen kısımlarda verilecektir.

2.6 Parametrelerin analizi için gerekli araçlar ve algoritmalar

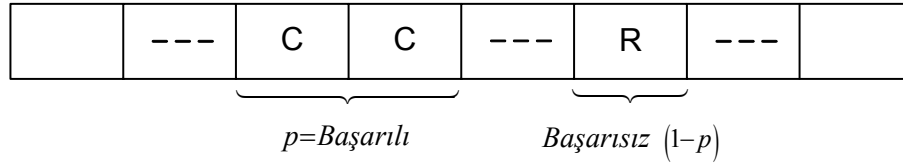
2.6.1 Reel kutup oranının kutup yerleştirme işleminin üzerindeki etkisini analiz edebilmek için gerekli araç ve algoritmalar

Bir önceki bölümde reel kutup oranı olarak adlandırdığımız parametrenin kutup yerleştirme işlemi üzerine etkisinin analiz edilebilmesi için istatistiksel bir yaklaşımı benimsediğimizi belirtmiştik. Bunun için öncelikle reel kutup oranının beklenen değeri dışındaki tanımlamış olduğumuz diğer tüm parametrelerin sabit tutulduğunu kabul edelim. Daha sonra, bu koşul sağlanacak şekilde bu parametrenin değişim aralığı olarak tanımlamış olduğumuz 0 ile 1 arasındaki olası bütün değerleri için çok sayıda rasgele sistem oluşturduğumuzu ve bu sistemlere kutup yerleştirme işlemini uygulayarak oluşacak hatayı ölçtüğümüzü düşünelim. Son olarak ise bu hataların ortalama değerini hesapladığımızı kabul edelim. Bu durumda reel kutup oranının beklenen değeri ve kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası bir hatanın beklenen değeri arasında bir istatistiksel ilişki kurulmuş olacaktır. Fakat bu noktada bir önceki bölümde de belirtildiği gibi, standart dağılımlı olarak türetilmiş sistemler için reel kutup oranının beklenen değerinin daha önceden belirlenebilmesi mümkün değildir ve özel bir yöntemin kullanılması kaçınılmaz olacaktır. Bu tez çalışması boyunca ilk olarak [8] no'lu referansta kullanılmış olan bir yöntem problemin çözümü için önerilecektir.

Bu yöntemi şu şekilde açıklamak mümkündür; öncelikle verilen sabit bir uzunlukta ve elemanlarının bir kısmı reel bir kısmı karmaşık sayı olacak şekilde bir karmaşık sayı dizisi türetmek istediğimizi düşünelim. Fakat bu dizi türetilmeden önce dizinin beklenen reel kutup oranını önceden belirleyebildiğimizi veya başka bir deyişle reel değerli elemanlarının sayısının beklenen değeri sabit olacak şekilde karmaşık sayı dizileri türetebildiğimizi kabul edelim. Eğer bu özelliğe sahip bir sayı dizisi üretilirse, rasgele türetilecek olan bir kare matrisin öz değerleri olarak bu dizinin elemanları rahatlıkla yerleştirilebilir ve bu şekilde reel kutup oranının beklenen

değeri daha önceden belirlenebilen rasgele sistemler türetmek mümkün olacaktır. Bu özelliğe sahip bir karmaşık sayı dizisini türetmek istediğimiz takdirde kullanılabilecek yöntemlerden biri de sayı dizisini hücelere bölmek ve her bir hücre için bir olasılık deneyi yapmaktır.

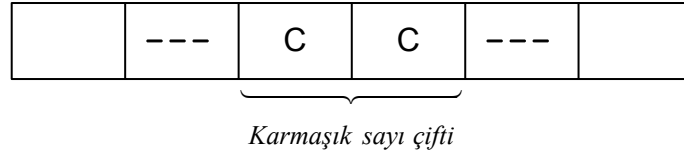
Bu tür bir deneyi gerçekleştirmek için izlenecek prosedür ise şöyle olacaktır. Eğer deney başarılı ise hücre karmaşık sayı ve bir sonraki hücre ise bu sayının eşleniği olsun ve bunun için öncelikle deneyin başarılı olma olasılığını yani hücrenin karmaşık sayı olma olasılığını “ p ” olarak tanımlayalım. Buna karşılık eğer başarısız ise hücre reel sayı olsun. Bu şekilde son hücreye kadar dizi elemanlarının atandığını düşünelim. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Dizi için önerilen hücre yapısı ve deney sonuçlarının hücelere yerleştirilmesi

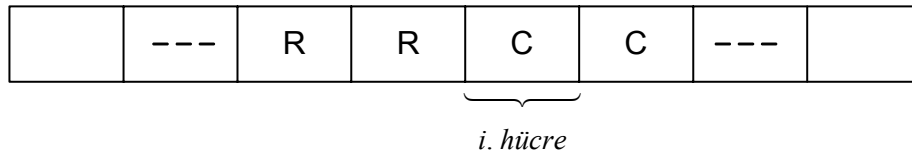
Burada dikkat edilecek bir nokta en son elemana gelindiğinde her hangi bir deneye ihtiyaç olmaksızın bu elemanın reel ya da karmaşık sayı olduğuna karar verileceğidir. Bu sayede reel değerli eleman sayısının beklenen değeri belli olan karmaşık eşlenik rasgele bir sayı dizisi üretmek mümkün olacaktır. Bu deneyin gerçekleştirilmesi için kullanılan algoritmanın çalışma mantığı ise kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir. Şöyle ki; öncelikle elimizde herhangi bir hücrenin karmaşık sayı olma ihtimalini veren bir olasılık fonksiyonu bulunsun ve bu fonksiyondan hücrenin karmaşık sayı olması için gerekli olan ihtimalin değerini hesaplayalım. Daha sonra sıfır ile bir arasında değişebilen bir reel sayıyı rast gele türetelim. Eğer rasgele türetilen sayının değeri hücrenin karmaşık sayı olma ihtimalinden küçük ise deneyin başarılı olduğunu kabul edelim yani bu hücre karmaşık sayı ve bir sonraki hücre ise bu sayının eşleniği olsun. Fakat eğer başarısız ise hücre reel sayı olsun. Bu noktada akla gelecek soru şu olacaktır, deneyin başarısını veya başka bir değişle hücrenin karmaşık sayı olma ihtimali belirleyen olasılık fonksiyonu nedir ve nasıl elde edilebilir? Bunu sorunun cevabı için öncelikle türetilecek olan bir karmaşık sayı dizisinde, türetilen karmaşık sayı ve onun eşleniğinin ardı ardına yerleştirildiği hücre

çiftini karmaşık sayı çifti olarak adlandıralım ve eğer deney başarılı ise hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlayacağını kabul edelim. “Şekil 2.5” ile bir karmaşık sayı çifti betimlenmiştir.



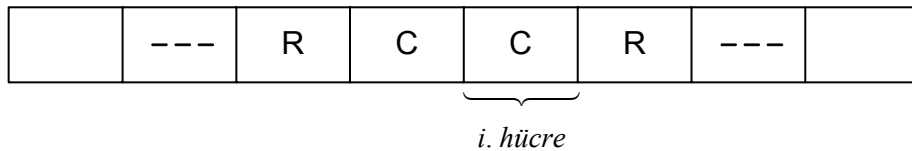
Şekil 2.5: Karmaşık sayı çifti ve hücre içine yerleşimi

Son olarak i . hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması olasılığını ise “ y_i ” ile gösterelim. Bu tanımlamalardan yola çıkarak kolaylıkla söyleyebiliriz ki bir hücrenin karmaşık sayı olması iki şekilde mümkün olabilir. Bunlardan birincisi hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması ikincisi ise daha önceden yerleştirilmeye başlanmış bir karmaşık sayı çiftinin ikinci elemanı olmasıdır. “Şekil 2.6” ile hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması betimlenmiştir.



Şekil 2.6: Yeni bir karmaşık sayı çiftine başlama durumu

Hücrenin daha önceden yerleştirilmeye başlanmış bir karmaşık sayı çiftinin ikinci elemanı olmasını ifade eden durum ise “Şekil 2.7” ile gösterilmiştir.



Şekil 2.7: Bir hücrenin yerleştirilmeye başlanmış bir karmaşık sayı çiftinin ikinci elemanı olmasını ifade eden durum

Şimdi oluşturulacak olan bir karmaşık sayı dizisinin herhangi bir hücresindeki elemanın yeni bir karmaşık sayı çiftine başlama olasılığını bulmaya çalışalım. Bunun için türetilecek bir karmaşık sayı dizisinde, sırası ile ilk 4 hücrenin karmaşık sayı çiftine başlama olasılığından başlayarak daha sonra bu olasılığı veren ifadeyi dizinin i . hücresinin bir karmaşık sayı çiftine başlama olasılığı için genelleştirelim,

- İlk hücrenin bir karmaşık sayı çiftine başlaması olasılığı

$$y_1 = p \quad (2.41)$$

C	C	...	
---	---	-----	--

- İlk hücrenin reel, ikinci hücrenin ise yeni bir karmaşık sayı çiftine başlama olasılığı.

$$y_2 = (1-p)p = p - p^2 \quad (2.42)$$

R	C	C	...	
---	---	---	-----	--

Üçüncü hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması için birbirinden bağımsız iki farklı durum söz konusudur ve üçüncü hücrenin karmaşık sayı çiftine başlaması olasılığı bu iki bağımsız olayın bileşkesinden elde edilir.

- $\alpha_1 = (1-p)(1-p)p$ İlk iki hücrenin reel üçüncü hücrenin ise yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması

R	R	C	C	...	
---	---	---	---	-----	--

- $\alpha_2 = p.p$ İlk hücrenin karmaşık sayı çiftine başlamış olması ve üçüncü hücrenin ise yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması

C	C	C	C	...	
---	---	---	---	-----	--

Sonuç olarak üçüncü hücrenin karmaşık sayı çiftine başlama olasılığı bu iki bağımsız durumun bileşkesi olacaktır. Bilindiği gibi bağımsız iki olayın bileşke olasılığı iki olasılığın toplanması ile elde edilir.

$$y_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = p - p^2 + p^3 \quad (2.43)$$

Benzer şekilde dördüncü hücrenin karmaşık sayı çiftine başlaması için birbirinden bağımsız üç durum söz konusudur. Bu durumlar aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|--|
| R | C | C | C | C | ... | |
|---|---|---|---|---|-----|--|

 $\alpha_1 = (1-p) \cdot p \cdot p$
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|--|
| R | R | R | C | C | ... | |
|---|---|---|---|---|-----|--|

 $\alpha_2 = (1-p)(1-p)(1-p)p$
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|--|
| C | C | R | C | C | ... | |
|---|---|---|---|---|-----|--|

 $\alpha_3 = p(1-p)p$

Bu kez dördüncü hücrenin karmaşık sayı çiftine başlama olasılığı

$$y_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = p - p^2 + p^3 - p^4 \quad (2.44)$$

Eğer bu formülü i. hücreye genişletmek istersek

$$\begin{aligned} y_1 &= p \\ y_2 &= p - p^2 \\ y_3 &= p - p^2 + p^3 \\ &\vdots \\ y_i &= -\sum_{k=1}^i (-p)^k \end{aligned} \quad (2.45)$$

Daha öncede belirtmiş olduğumuz gibi bir hücrenin karmaşık sayı olması iki şekilde mümkün olabilir. Bunlardan birincisi hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması ikincisi ise daha önceden yerleştirilmeye başlanmış bir karmaşık sayı çiftinin ikinci elemanı olmasıdır. Bu nedenle bir hücrenin karmaşık sayı olma olasılığı bu iki durumun bir bileşkesi olarak hesaplanabilir. Eğer dizinin i. hücresinin karmaşık sayı olma olasılığını “ x_i ” ile belirtirsek “n” elemanlı bir dizi için her bir hücrenin karmaşık sayı olma olasılıklarının toplamı dizinin karmaşık değerli elemanlarının sayısının beklenen değerini verecektir. Bu sayı dizinin uzunluğuna bölüldüğü takdirde dizinin karmaşık değerli elemanlarının oranının beklenen değeri hesaplanmış olunacaktır. Bu durum aşağıdaki denklem 2.46 ile gösterilmiştir.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_0 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_2 + y_3 \\ x_4 = y_3 + y_4 \\ \vdots \\ x_n = y_{n-1} + y_n \end{array} \right\} \Rightarrow \psi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{\{(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_{n-1} + y_n)\}}{n} \quad (2.46)$$

Burada y_0 ve y_n sıfır olacaktır. Çünkü y_0 birinci hücreden önce başka bir değişle olmayan bir hücre için karmaşık sayı çiftine başlama olasılığını temsil etmektedir ve birinci hücreye karmaşık sayı yerleştirilmesi için olası tek durum birinci hücrenin bir karmaşık sayı çiftine başlaması durumudur. Benzer bir durum y_n içinde geçerlidir ve son hücreye karmaşık sayı yerleştirilmesi için geçerli tek durum bir önceki hücrenin bir karmaşık sayı çiftine başlaması durumudur. Çünkü daha öncede de belirttiğimiz gibi son hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması olanaksızdır ve karmaşık sayı eşleniği ile diziye yerleştirilmelidir. Bu durumda bu dizinin karmaşık değerli elemanlarının sayısının beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\psi = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \quad (2.47)$$

Eğer denklem 2.45 ile verilen her bir hücrenin yeni bir karmaşık sayı çiftine başlaması ihtimalini temsil eden ifade denklem 2.47’de yerleştirilirse denklem 2.48 elde edilir.

$$\psi = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\sum_{k=1}^i (-p)^k \right) \quad (2.48)$$

Denklem 2.48’in açılımından dizinin karmaşık değerli elemanlarının oranının beklenen değerini belirten olasılık fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon denklem 2.49 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2}{n} \{(n-1)p - (n-2)p^2 + (n-3)p^3 - \dots \pm (n-(n-1))p^{n-1}\} \\ \Rightarrow &\boxed{\psi = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (n-i) p^i} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Bu denklemde “ ψ ” dizinin karmaşık değerli elemanlarının oranının beklenen değerini temsil etmektedir. Bu noktada dizinin reel değerli elemanlarının oranının beklenen

değeri ise “ ψ ” nin tümleyeni yani “ $1-\psi$ ” olacaktır. Verilen bir “ ψ ” değeri için bu denklem çözüldüğü takdirde elde edilen p değeri herhangi bir hücrenin karmaşık sayı olma olasılığını verecektir. Bu değer elde edildikten sonra basit bir prosedür uygulanarak hedeflenen karmaşık sayı dizisini türetmek mümkün olacaktır. Bu denklem kullanılarak, karmaşık değerli eleman oranı hedeflenen bir değerde sabitlenmiş bir karmaşık sayı dizisi türetmek için izlenmesi gereken adımlar ise aşağıdaki gibi olacaktır.

- Verilen bir ψ değeri için p değerini denklem 2.49 ile verilen olasılık fonksiyonunu çözerek hesapla.
- Değeri sıfırla bir arasında değişen rasgele bir reel sayı türet
- Türetilen reel sayı elde edilen “ p ” değerinden küçük ise hücreye bir karmaşık sayı, bir sonraki hücreye ise bu karmaşık sayının eşleniğini yerleştir. Eğer türetilen sayı elde edilen “ p ” değerinden büyükse hücreye bir reel sayı yerleştir.
- Aynı prosedürü son hücreye kadar uygula. Eğer son hücreden bir önceki hücrede yeni bir karmaşık sayı çiftine başlanmış ise doğal olarak son hücreye de bir önceki hücrenin eşleniği yerleştirilecektir. Aksi halde son hücreye de yine bir reel sayı yerleştir ve işlemi sonlandır.

Yukarıda verilen prosedür takip edilerek reel değerli elemanlarının sayının beklenen değeri programcı tarafından belirlenen karmaşık sayı dizileri türetililebilecektir. Bu özelliğe sahip karmaşık sayı dizileri türetildikten sonra, reel kutup oranının beklenen değeri sabit olacak şekilde rasgele sistemler türetmek mümkün olacaktır. Bu tür karmaşık sayı dizilerini üretmede kullanılan yöntemi bilgisayar algoritmasına dönüştürerek bir akış diyagramı şeklinde göstermek mümkündür. Bu akış diyagramı 29. sayfada “Şekil 2.9” olarak verilmiştir. Bu algoritma kullanılarak türetilecek olan karmaşık sayı dizilerinin elemanları, durum uzayı modelinde rasgele türetilecek sistemlerin kutupları olarak yerleştirilebilir. Bunun için ise özdeğer kümesini bu karmaşık sayı dizisinin elemanlarının oluşturduğu rasgele kare matrisler türetilmelidir.

2.6.2 Reel özdeğer sayısının beklenen değeri daha önceden belirlenebilecek bir şekilde rasgele kare matrisler türetme.

Bir önceki bölümde açıklanan yöntem kullanılarak reel değerli eleman sayısının beklenen değeri önceden belirlenebilen sabit bir değerde olacak şekilde karmaşık sayı dizileri türetilir. Bu noktadan hareketle, bu dizilerin elemanları kullanılarak reel öz değerlerinin sayısının beklenen değeri daha önceden belirlenebilen rasgele matrisler de üretmek mümkündür. Bunun için bir önceki sayfada verilmiş olan “Şekil 2.9” deki algoritma kullanılarak karmaşık sayı dizileri türettiğimizi düşünelim. Bu diziler kullanılarak dizisinin elemanları diyagonal elementlerini oluşturacak şekilde rasgele diyagonal matrisler türetmek mümkündür. Eğer türetilen bu diyagonal matrisleri koordinat dönüşümü yaparak rasgele seçilmiş koordinat düzlemlerine taşırsak, öz değerleri belirtilen özelliği taşıyan rasgele kare matrisler türetilir. Bu durumu aşağıda verilen denklemlerle göstermek mümkündür. Bunun için öncelikle türetilen dizinin aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim.

$$\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (2.50)$$

Daha sonra bu dizinin elemanlarından aşağıdaki denklem 2.50’de verildiği gibi bir diyagonal matris türettiğimizi düşünelim. Son olarak denklem 2.51’de gösterildiği gibi bu diyagonal matrisin koordinatlarını standart koordinatlardan rasgele seçilmiş olan koordinatlara taşıdığımız takdirde, öz değer kümesini verilen karmaşık sayı dizisinin elemanlarının oluşturduğu bir rasgele matris türetmiş oluruz.

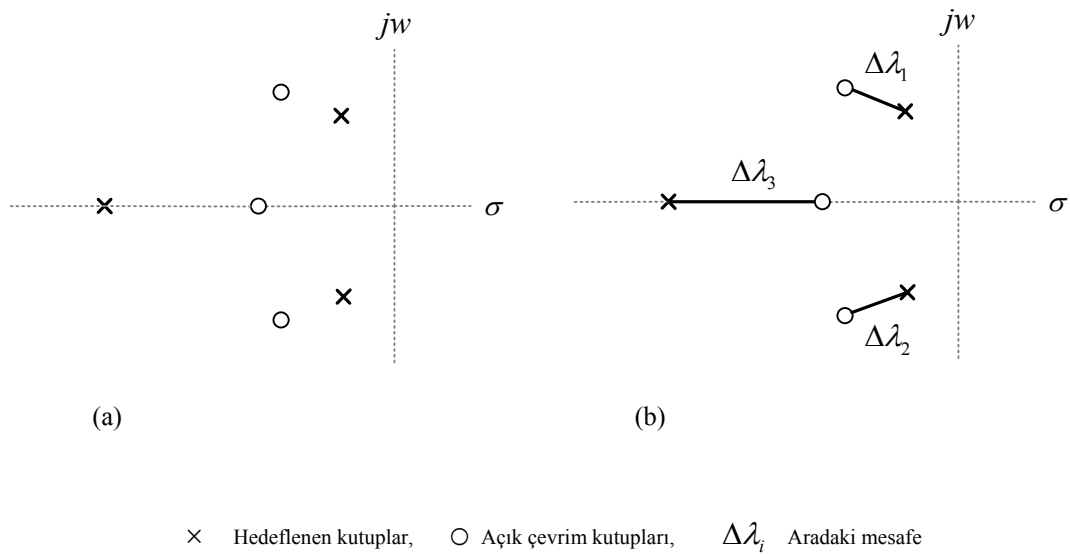
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = T^{-1} \Lambda T \quad (2.51)$$

Denklem 2.51 ile gösterilen A matrisinin elemanlarının reel değerli olabilmesi için koordinat dönüşümü için kullanılan T matrisinin sütunlarının özel olarak seçilmesi gerekir. Şöyle ki; öncelikle diyagonal matrisin her hangi bir karmaşık değerli elemanına karşılık karmaşık değerli elemanlar içeren bir sütun vektörü rasgele olarak türetilir. Seçilen matris elemanının karmaşık eşleniği için ise türetilen sütun vektörünün karmaşık eşleniği kullanılır. Diyagonal matrisin reel değerli elemanları için ise tüm elemanları reel değerli olacak şekilde rasgele sütun vektörleri türetilir.

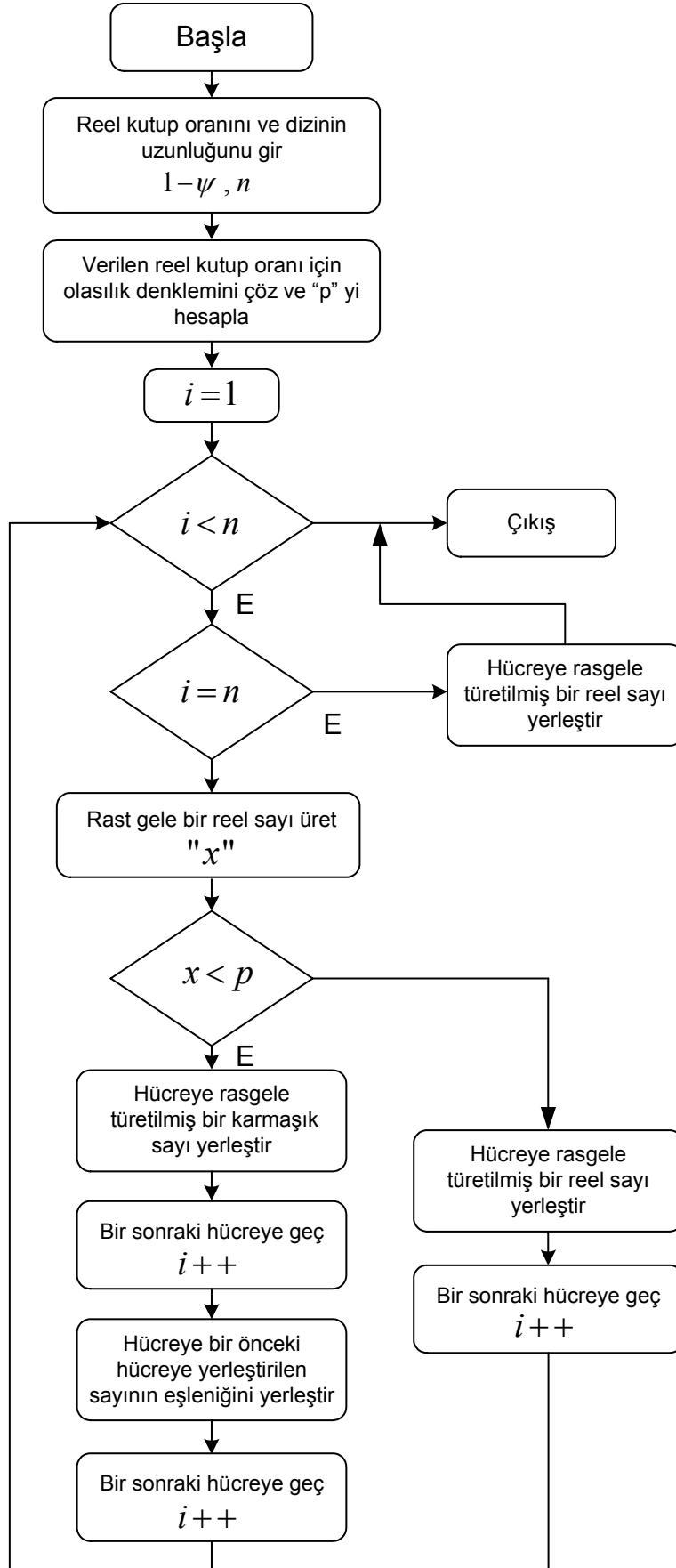
Durum matrisleri yukarıda verilen yöntem kullanılarak türetildikten sonra rasgele giriş ve çıkış matrisleri türetildiği takdirde durum uzayı modelinde ve reel kutup oranının beklenen değeri daha önceden belirlenebilen rasgele sistemler türetilmiş olacaktır. Sistem boyutu çok arttığında T matrisinin tersinin hesaplanmasında büyük nümerik hesaplama hataları yapılabilir. Bu hataların bir sonucu olarak türetilen A matrisinin beklenen RKO' su istenen değerden farklı bir değere sapabilir. Bu durum çok yüksek mertebeden sistemler için göz önüne alınmalıdır.

2.6.3 Açık çevrim kutuplarına sabit uzaklıkta referans kutup seti türetme

Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hataların kapalı çevrim kutup bölgelerine etkisini belirleyen parametrelerden biri de sistemin açık çevrim kutup bölgeleri ile hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgeleri arasındaki mesafedir. Burada mesafeden kasıt açık çevrim kutupları ile hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgeleri arasında yapılan birebir eşleşmeler sonucunda, kutuplar arasında ölçülen uzaklıkların mutlak değerlerinin alabileceği maksimum değerdir. Bölüm 2.4'de belirtildiği gibi tanımlanan bu uzaklığın ölçülebilmesi için kullanılacak yöntemlerden biri de kutup renklendirme yöntemidir. Tanımlamış olduğumuz bu mesafe kavramını daha görsel hale getirmek mümkündür. Bunun için öncelikle 3. mertebeden basit bir sistemin açık çevrim kutupları ve hedeflenen kapalı çevrim kutupları “Şekil 2.8.(a)” ile verilmiş olsun.



Şekil 2.8: (a) 3. mertebeden bir sistemin açık çevrim kutupları ve hedeflenen kapalı çevrim kutupları için olası bir dağılım verilmiş (b)'de ise bu dağılım için en uygun eşleşme gösterilmiştir.



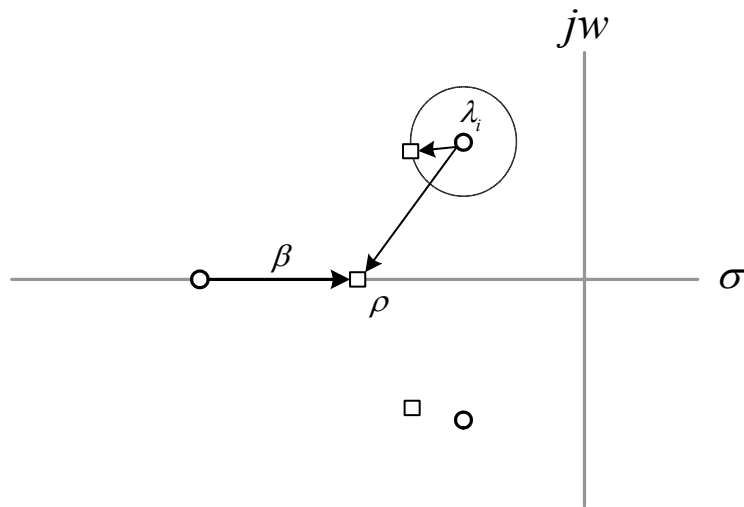
Şekil 2.9: RKO'nun beklenen değeri önceden belirlenebilen karmaşık sayı dizileri üretmek için kullanılan algoritma

Bu durumda sistemin açık çevrim kutupları ile hedeflenen kapalı çevrim kutupları arasında yapılacak olan olası eşleşmeler arasında en makul olanı ise “Şekil 2.8.(b)” ile verildiği gibi olacaktır. Bu noktada “Şekil 2.8.(b)” ile gösterilen kutuplar arasındaki uzaklıklar arasında en büyüğü ise $\Delta\lambda_1$ ile verilen uzaklıktır. Bu nedenle sistemin açık çevrim kutup bölgeleri ile hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgeleri arasındaki uzaklık $\Delta\lambda_1$ ile tanımlanabilir. İşte bu bölümde cevabını bulmak istediğimiz soru şudur; bu uzaklık tanımına uygun olacak şekilde bir sistemin açık çevrim kutup bölgelerine verilen sabit uzaklıkta bir kutup kümesi türetmek mümkün müdür?

Bu sorunun cevabının evet olduğunu düşünürsek bu kutup kümesinden bir polinom türetmek ise hiç zor olmayacaktır. Bu noktadan hareketle, kutup yerleştirme işleminde meydana gelen hatayı belirleyen diğer parametre olarak verdiğimiz reel kutup oranının beklenen değeri sabit kalacak şekilde, çok sayıda rasgele sistem türettiğimizi kabul edelim (Bu durumda ise RKO’nın hata üzerindeki etkisini izole etmiş oluruz). Ardından türetilen bu sistemlere yukarıda belirttiğimiz gibi sabit uzaklıkta referans kutup bölgeleri ve dolayısıyla da referans karakteristik polinomları türettiğimizi düşünelim. Sonuç olarak türetilen her bir sisteme kutup yerleştirme işlemi uygulanarak açık-çevrim karakteristik denklemlerini, türetmiş olduğumuz hedeflenen karakteristik denklemlerine taşırsak işlem sonucunda ortaya çıkan hatalar RKO’dan bağımsız olacaktır ve kutuplar arasındaki mesafe ile hatalar arasındaki ilişkiyi analiz etmek mümkün olacaktır. Başka bir deyişle, orijinal sistem kutupları ile hedeflenen kutuplar arasındaki mesafenin kutup yerleştirme hatalarına etkisini belirleyebilmek için öncelikle verilen sistemin açık çevrim kutuplarına sabit uzaklıkta bir kutup kümesi üretilmelidir. Daha sonra sistem kutupları kutup yerleştirme işlemi ile hedef kutup kümesine taşınmalı ve işlem sonucunda oluşan hatalar ölçülerek hatalar ile kutup bölgeleri arasındaki uzaklık arasında bir ilişki kurulmalıdır. Bu analizi gerçekleştirmek için kullanılan algoritmanın çalışma mantığı ise kısaca şöyle özetlenebilir. Öncelikle verilen bir RKO için bir karmaşık sayı dizisi türetilir. Bu diziyi 1.kutup kümesi olarak adlandıralım. Daha sonra bu kümeye verilen sabit bir uzaklıkta ikinci bir karmaşık sayı dizisi türetilir. Bu diziyi ise 2.kutup kümesi olarak adlandıralım. Bu iki küme türetildikten sonra ise öncelikle kutuplarını 1.kümenin elemanlarının oluşturduğu bir rasgele sistem türetilir. Daha sonra köklerini 2.kümenin elemanlarının oluşturduğu bir rasgele polinom türetilir. Bu

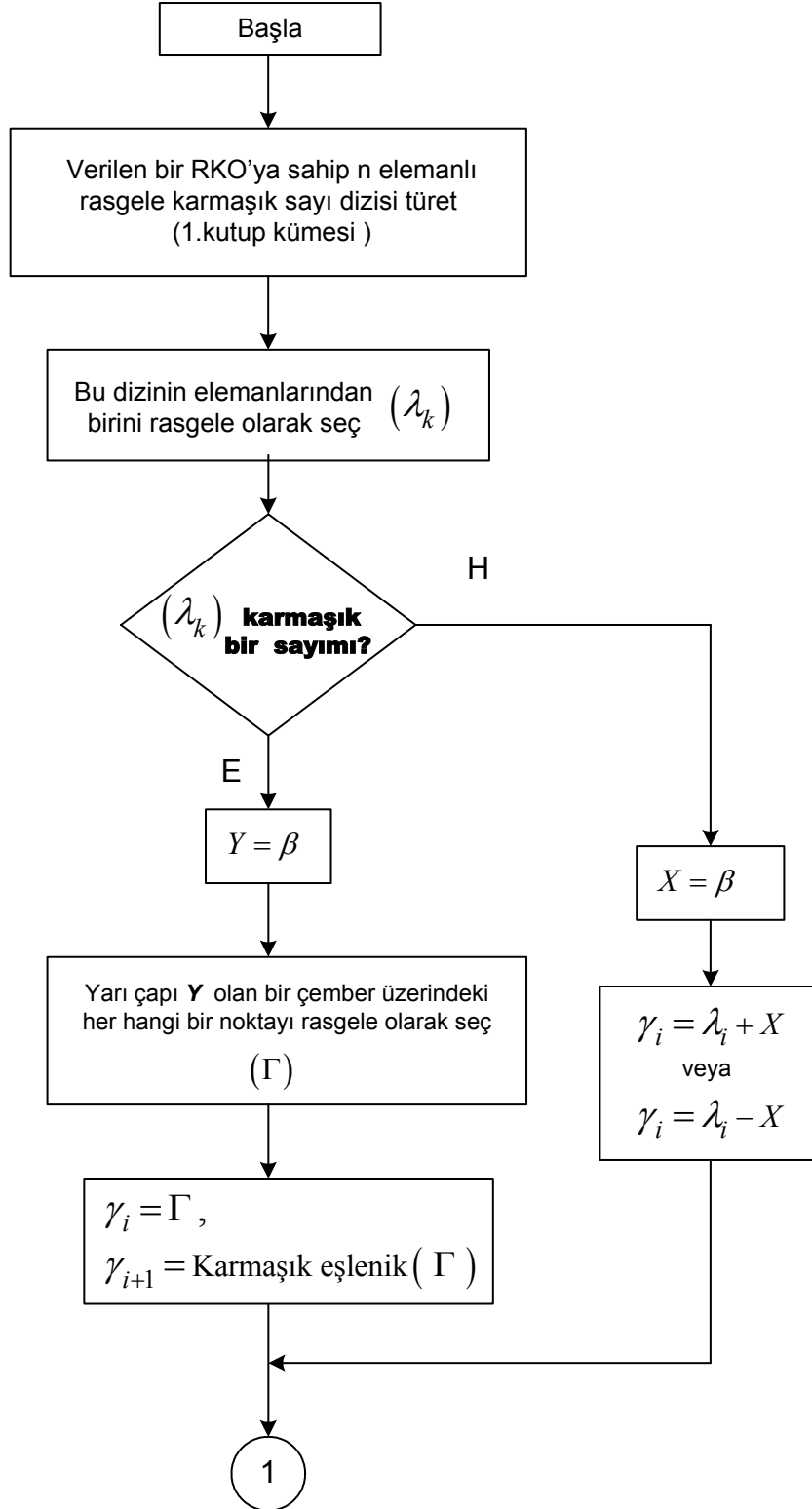
polinom türetilen rasgele sisteme uygulanacak bir kutup yerleştirme işleminde hedeflenen karakteristik denklemi olarak kullanılırsa, orijinal sistem kutupları ile kapalı çevrim kutupları arasındaki mesafe verilen sabit bir değerde olacaktır. Bu işlemi gerçekleştirecek olan algoritma ise aşağıdaki gibi olacaktır. Bunun için KAM'nin değerini β , 1.kutup kümesini σ ve 2.kutup kümesini ise α ile gösterelim.

- 1.kümeyi verilen bir RKO için bir türet $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.
- Bu set içinden bir kutup rasgele olarak seç $\alpha = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$.
- Eğer seçilen kutup reel ise reel eksen üzerindeki bir noktayı seçilen kutupla arasındaki mesafe β olacak şekilde belirle. Bu noktayı ρ olarak adlandıralım. Daha sonra bu noktaya karşılık gelen sayı değerini 2.kutup kümesinin ilk elemanı olarak diziye yerleştirilir. Eğer seçilen kutup karmaşık değerli ise yarıçapı β ve merkezi seçilen kutup noktası olan bir dairesel bölge üzerindeki her hangi bir noktayı belirle ve bu noktaya karşılık gelen sayı değerini 2.kutup kümesinin ilk elemanı olarak diziye yerleştirilir. Hemen ardından ise seçilen bu sayının eşleniği diziye yerleştirilir.
- 1.kutup kümesinin diğer her bir elemanı için verilen kutupla arasındaki mesafe $\min(|\lambda_i - \rho|, \beta)$ ' den küçük veya eşit olacak şekilde noktalar belirle ve 2. kutup kümesine ilave et. Bu durum kısaca aşağıdaki “Şekil 2.10” ile gösterilebilir.

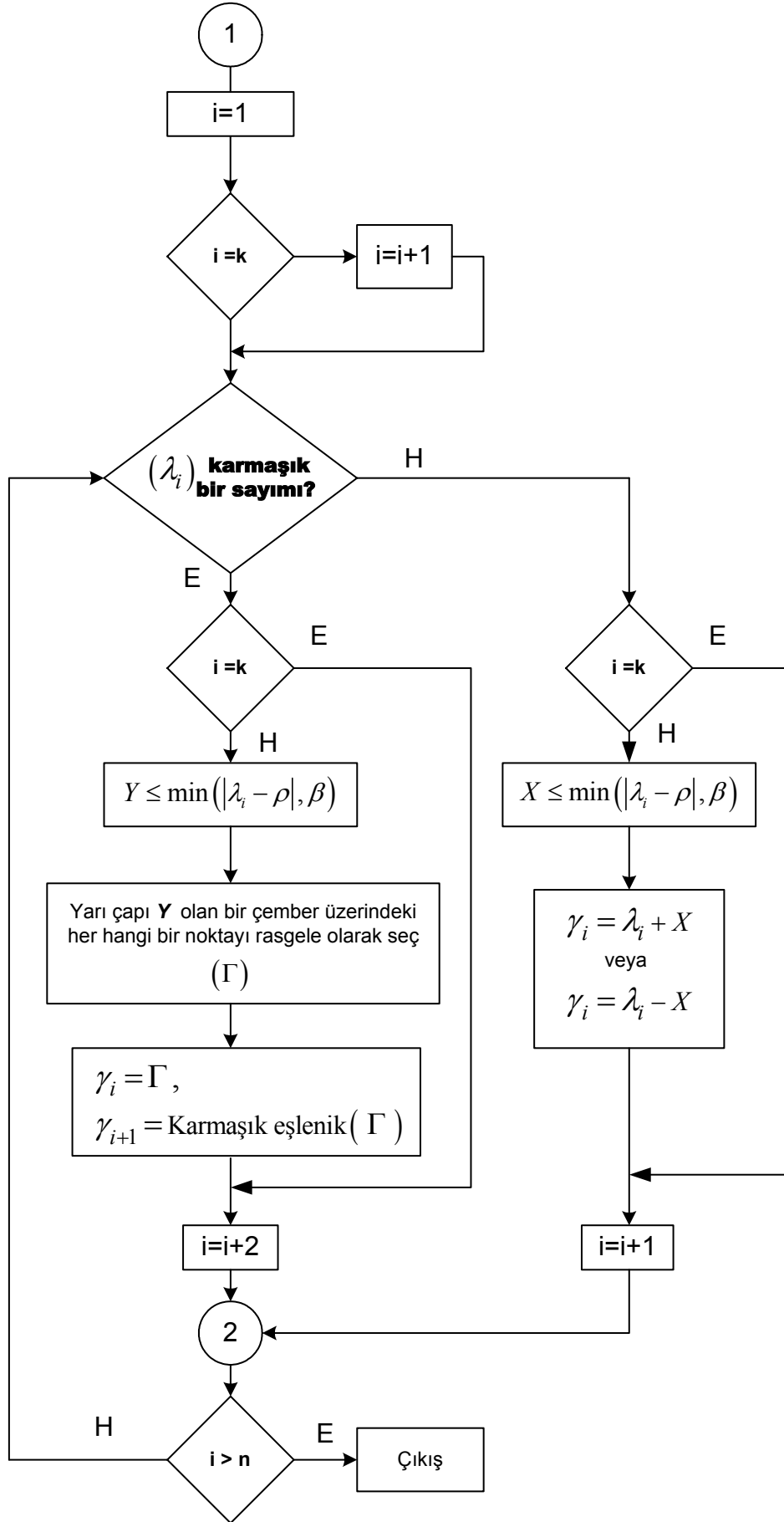


Şekil 2.10: Açık çevrim kutuplarına sabit uzaklıkta kutup kümesi türetmek

Bu algoritma için kullanılabilecek olan akış diyagramı ise aşağıdaki “Şekil 2.11” ile verilmiştir (Şeklin devamı bir sonraki sayfada verilmiştir)



Şekil 2.11: Sistem kutuplarına sabit uzaklıkta referans kutup seti türeten algoritma



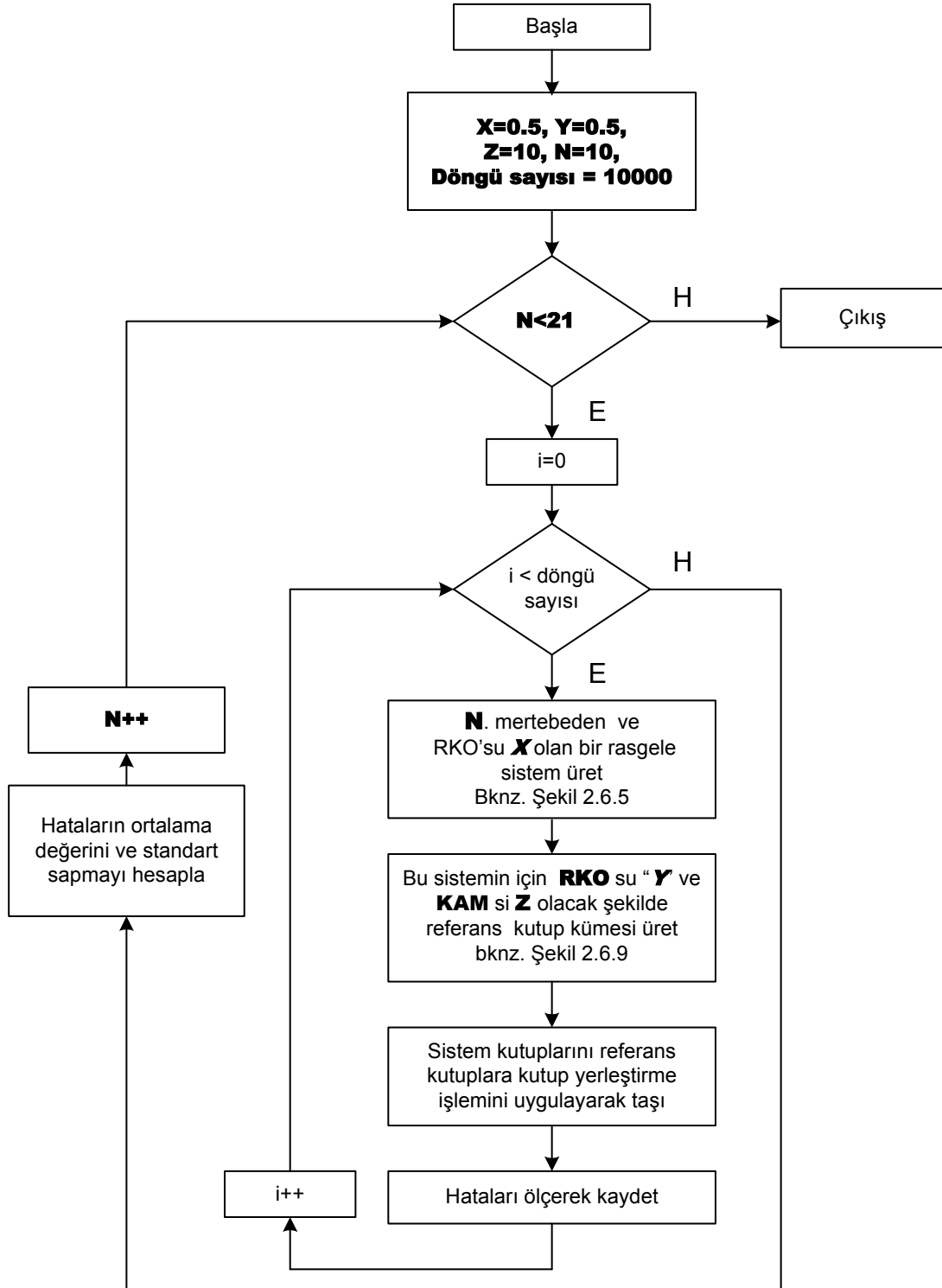
3. NÜMERİK KUTUP YERLEŞTİRME İŞLEMİNİN PERFORMANSINI ETKİLEYEN PARAMETRELERİN İSTATİSTİKSEL ANALİZİ

Kutup yerleştirme işlemi kontroledilebilir standart formda gerçekleştirildiği takdirde meydana gelen nümerik hesaplama hatalarından en öne çıkanları dönüşüm esnasında yapılan hatalar (dönüşüm matrisinin tersinin hesaplanması) ve durum geri-besleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hatalarıdır. Fakat özellikle durum geri-besleme matrisinin hesaplamasında meydana gelen hataların kapalı çevrim kutuplarında meydana getirecekleri bozulmaları etkileyen bir takım parametrelerin mevcut olduğu daha önceki bölümlerde belirtilmiş ve bu parametrelerin bir diğerinden bağımsız olarak kapalı çevrim kutupları üzerindeki etkilerinin analiz edilebilmeleri için bazı araçlar verilmişti. Bu kısımda ise bu parametrelerin kapalı çevrim kutup bölgeleri üzerine etkileri bir diğerinden bağımsız olarak istatistiksel bir yaklaşımla incelenecektir.

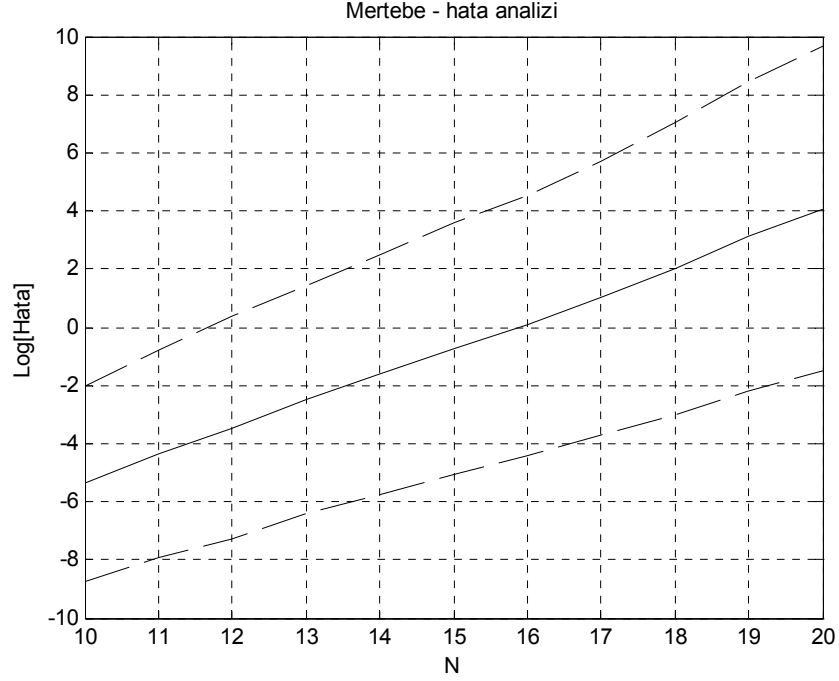
3.1 Sistem mertebesi:

Bu parametrenin analizi için öncelikle KAM ve açık çevrim kutuplarının RKO ve hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının RKO sabitlenmelidir. Daha sonra belirlenen bir aralıkta her bir sistem mertebesi için çok sayıda rasgele sistem türetilmeli ve türetilen her bir sisteme kutup yerleştirme işlemi uygulanmalıdır. Bu süreç türetilen sistemlerin mertebesi artırılarak devam ettirilmelidir. Bu durumda elde edilen hatalar sadece sistem mertebesine bağlı olarak değişecektir. Bu analiz için kullanılacak olan algoritma mantığı ise bir sonraki sayfada “Şekil 3.1” ile verilmiştir. Bu algoritma kullanılarak elde edilecek olan grafik ise “Şekil 3.2” ile verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi sistem mertebesi ile kutup yerleştirme hatalarının logaritması arasında lineer bir ilişki mevcuttur. Hesaplanan hataların standart sapmaları da yine sistem mertebesiyle birlikte artmaktadır. (bkz Tablo 3.1). “Tablo 3.1”den de görülebileceği gibi standart sapmalar sistem mertebesi 10’san 20’ye yükselirken standart sapmalar ise 3.36’dan 5.59’a yükselmektedir. Bu nedenle her bir sistem

mertebesi için hatalar geniş bir değişim aralığına sahiptir ve yüksek mertebeden sistemlerde nümerik kutup yerleştirme işlemi yapılmadan önce bazı ön koşullandırılmalara ihtiyaç duyulacağı görülmektedir.



Şekil 3.1: Sistem mertebesi ile hatalar arasındaki ilişkiyi verecek olan algoritma



Şekil 3.2: Sistem mertebesi ile kutup yerleştirme hataları arasındaki ilişki

Tablo 3.1: Şekil 3.2 için hesaplanan değerler

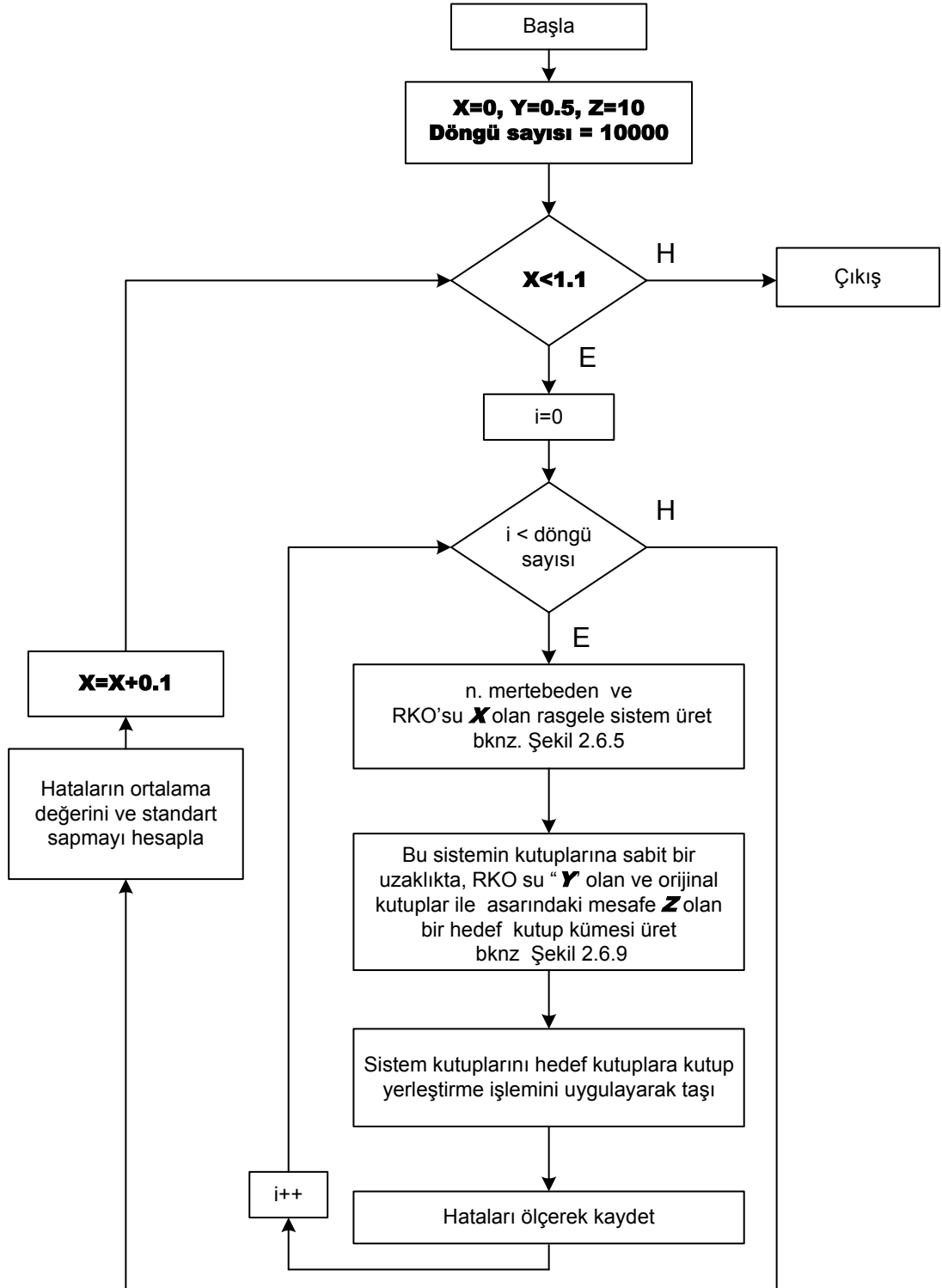
N	Log[Hata]	Standart Sapma
10	-5.3684	3.3603
11	-4.3674	3.5821
12	-3.4669	3.8397
13	-2.5101	3.9142
14	-1.6191	4.1194
15	-0.7513	4.3193
16	0.0779	4.4785
17	1.0124	4.7013
18	2.0211	5.0112
19	3.1128	5.3123
20	4.0935	5.5212

Şekilde yatay eksen değişkeni olarak verilen N sistem mertebesini temsil etmektedir. Grafik elde edilirken sistem mertebesi [10,20] aralığında arttırılmış, dönüşüm matrisleri ve giriş matrislerinin değişim aralığı ise [-1000,1000] olarak alınmıştır. Diğer parametrelerden KAM 10 değerinde, açık çevrim kutuplarının RKO ve hedeflenen kutupların RKO ise 0.5 de sabitlenmiştir. Bu analizde her bir sistem mertebesi için 10000 adet rasgele sistem ve verilen RKO'da ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır. Grafikte düz çizgi ile verilen değerler hataların beklenen değerini, kesikli çizgiler ise standart sapma alt ve üst değerleri belirtmektedir.

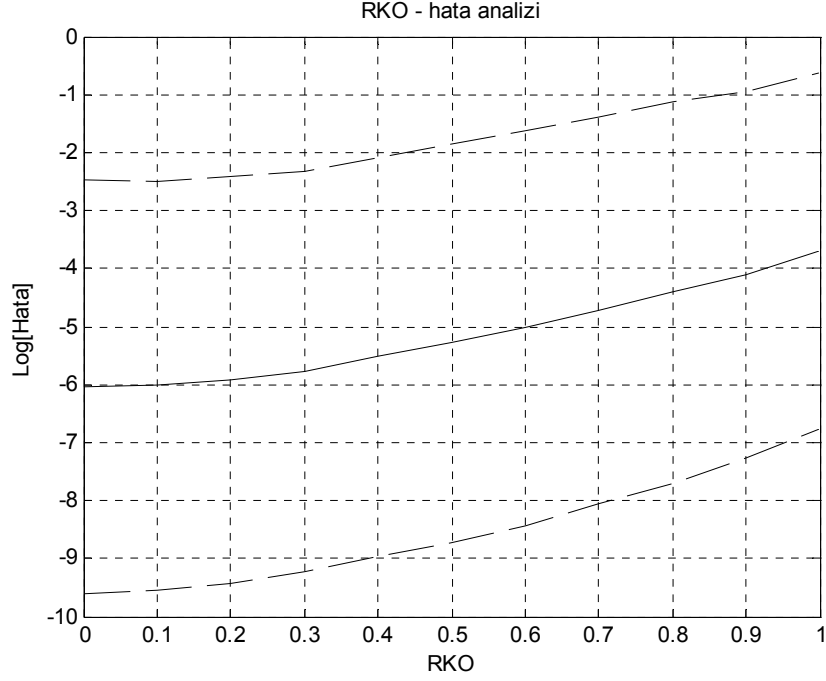
3.2 Reel kutup oranının beklenen değeri

Bu parametrenin analizi için iki farklı değişim noktasından bahsetmek mümkündür. Bunlardan birincisi açık çevrim sistemin RKO değeri ise hedeflenen kapalı çevrim sistem için RKO dır. Bu nedenle bu parametreyi şimdilik iki boyutlu bir değişken olarak düşünebiliriz. Şimdi öncelikle sistem mertebesi sabit ve verilen açık çevrim sistemin RKO'nun beklenen değeri "X" olan rasgele türetilmiş sistemlerin kutuplarını sabit uzaklıktaki referans kutuplarına taşıdığımızı düşünelim. Başka bir deyişle açık çevrim kutupları ile referans kutup bölgeleri arasındaki mesafe sabit kalacak şekilde referans kutupları türetip durum geri-beslemesi ile sistemleri bu kutuplara taşıdığımızı düşünelim. Bu durumda ikinci parametre olan KAM'nin etkisini izole etmiş oluruz. Fakat bu işlem yapılırken hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının RKO ise "Y" değerinde sabit kalsın! Daha sonra ise yapılan hataları ölçerek ortalama değerlerini aldığımızı ve standart sapmayı hesapladığımızı düşünelim. Bu durumda açık çevrim sistemin RKO'nun beklenen değeri "X" hedef karakteristik polinom için ise RKO'nun beklenen değeri "Y" iken meydana gelebilecek kutup yerleştirme hatalarının beklenen değerini bir standart sapma ile hesaplamış oluruz. Eğer "Y" değeri sabit tutulup, buna karşılık "X" değeri $[0,1]$ aralığında değiştirilerek aldığı her bir değer için bu işlemler tekrarlanırsa açık çevrim sistemin RKO'nun değişimi ile kutuplardaki bozulmaların veya başka bir deyişle kutup yerleştirme hataları arasındaki ilişki gözlemlenebilir.

Bu analiz için "Şekil 3.3" deki akış diyagramı ile verilen algoritma mantığı kullanılabilir. Bu algoritma kullanılarak farklı RKO değerlerine sahip sistemlere kontrol edilebilir standart forma dönüşüm yapılarak uygulanan kutup yerleştirme işlemlerinin sonucunda elde edilmiş bir grafik "Şekil 3.4" ile verilmiştir. Bu grafikten rahatlıkla görülebilmektedir ki açık çevrim sistemler için RKO'nun artımı ile nümerik hesaplama hatalarının neden olduğu kapalı çevrim kutuplarındaki bozulmalar üstel olarak artmaktadır. Bu grafikten çıkarılacak en önemli sonuç ise açık çevrim sistemin reel kutuplarının sayısı arttıkça kutup atama işleminde yapılan hata 100 kata kadar artabilir. Bu nedenle açık çevrim RKO kutup yerleştirme işleminin performansını doğrudan etkileyen bir parametredir.



Şekil 3.3: Sistem mertebesi, KAM ve hedeflenen kutupların RKO su sabit kalacak şekilde orijinal sistem kutuplarının RKO' sunu değiştiren algoritma



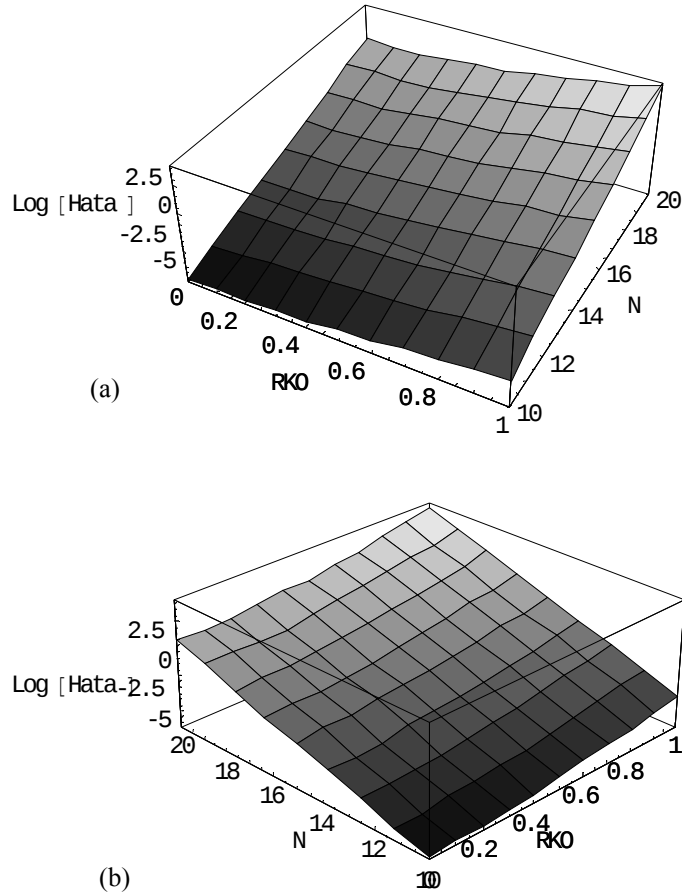
Şekil 3.4: Sistemin orijinal kutupların RKO'nın değiştirilerek her bir RKO için kontrol edilebilir standart formda kutup yerleştirme işlemi uygulanması ile elde edilen hataların değişimi.

Tablo 3.2: Şekil 3.4 için hesaplanan değerler

RKO	Log[Hata]	Standart Sapma
0	-6.02813	3.56612
0.1	-6.01749	3.51981
0.2	-5.92666	3.51612
0.3	-5.77572	3.44436
0.4	-5.52452	3.44198
0.5	-5.28922	3.44332
0.6	-5.02199	3.40291
0.7	-4.72216	3.32961
0.8	-4.41363	3.28083
0.8	-4.11183	3.16731
1.0	-3.69049	3.07309

Şekil elde edilirken sistem mertebesi 10, dönüşüm matrisleri ve giriş matrislerinin değişim aralığı ise $[-1000,1000]$ olarak alınmış ve diğer parametre olan KAM 10 değerinde sabitlenmiştir. Kapalı çevrim kutup bölgeleri için RKO sabit açık çevrim kutup bölgeleri için ise RKO $[0,1]$ aralığında ve 0.1 artış oranı ile değişmektedir. Bu analizde her bir RKO için 10000 adet rasgele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır. Grafikte düz çizgi ile verilen değerler hataların beklenen değerini, kesikli çizgiler ise standart sapma alt ve üst değerleri belirtmektedir. Eğer sistem mertebesi $[10,20]$ aralığında 10. mertebeden

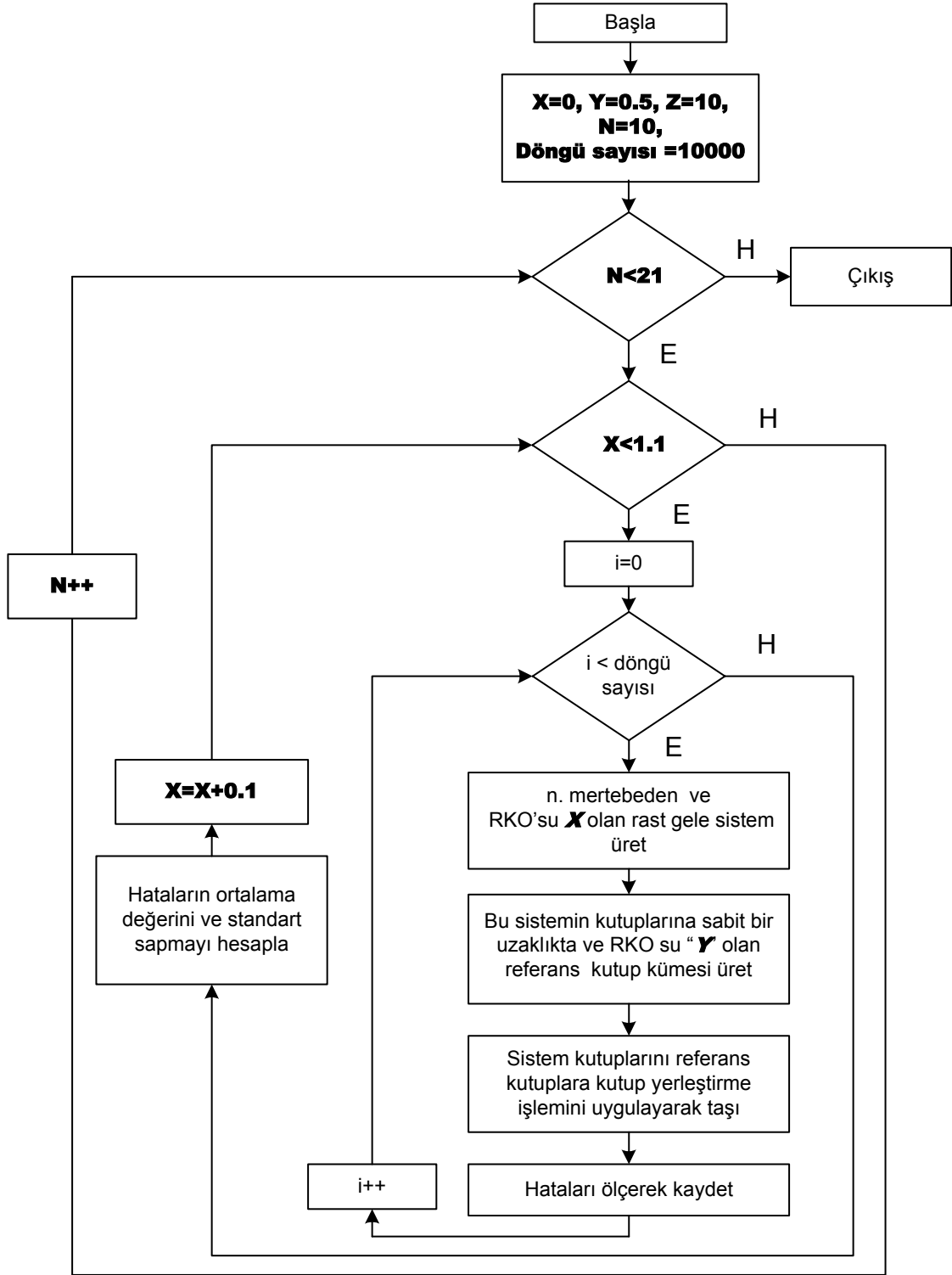
başlayarak artırılır ve her bir sistem mertebesi için açık çevrim RKO'nun $[0,1]$ aralığında aldığı her bir değer için hatalar hesaplanırsa 10. mertebe ile 20. mertebe aralığındaki tüm mertebeden sistemlerin alabileceği olası RKO değerleri için hatanın beklenen değerleri hesaplanmış olacaktır. Bu durumda elde edilecek olan grafikler “Şekil 3.5.(a)” ve “Şekil 3.5.(b)” ile verilen üç boyutlu yüzey grafikleri olacaktır. Bu grafiklerin elde edilmesi için ise bir sonraki sayfada “Şekil 3.6” ile verilen algoritma mantığının kullanılması gereklidir.



Şekil 3.5: Sistem mertebesi ve RKO için üç boyutlu yüzey grafikleri

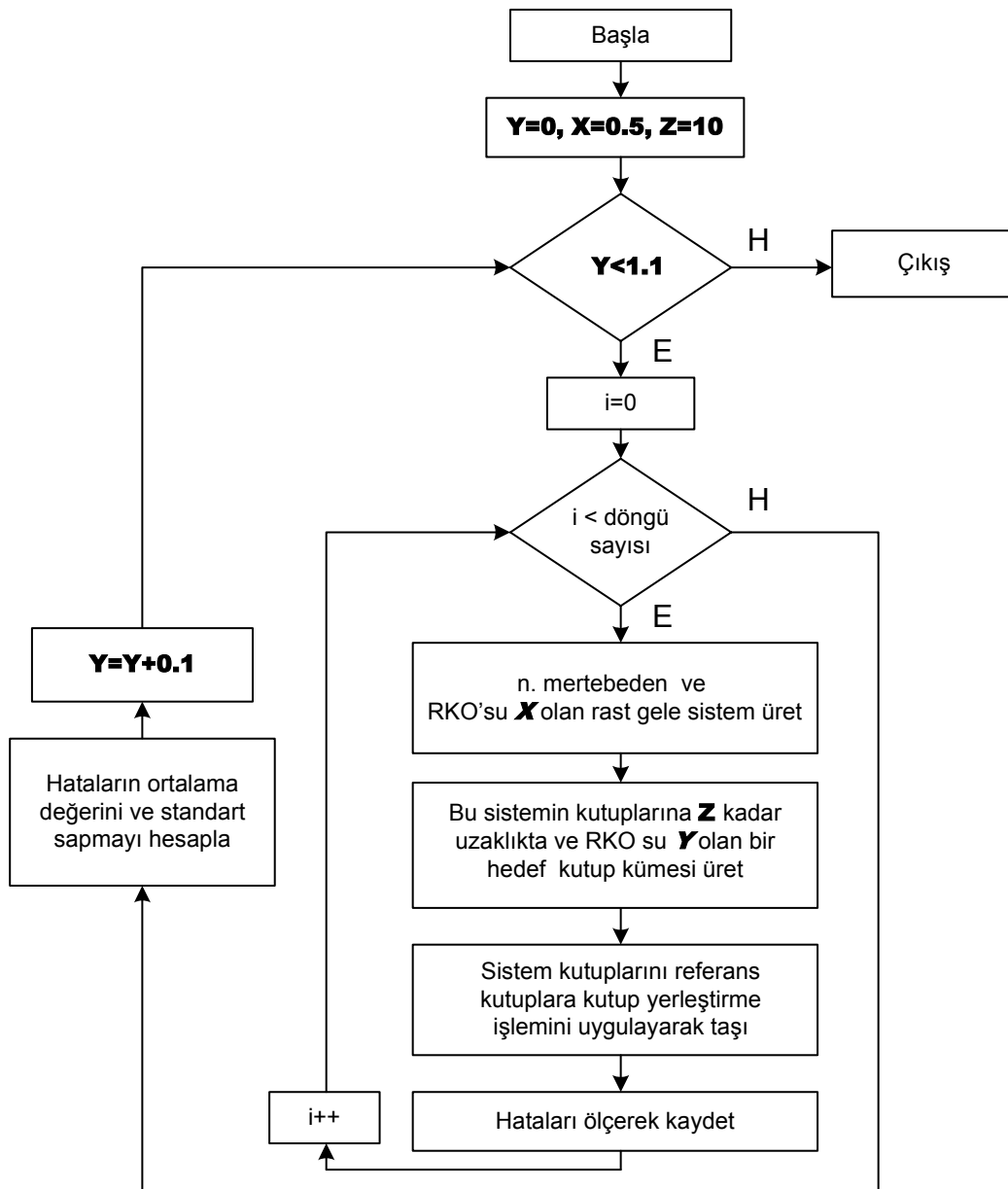
Şekiller elde edilirken türetilen dönüşüm matrisleri ve giriş matrislerinin değişim aralığı $[-1000,1000]$ olarak alınmış ve diğer parametre olan KAM ise 10 değerinde sabitlenmiştir. Sistem mertebesi $[10,20]$ aralığında değiştirilmiştir. Kapalı çevrim kutup bölgeleri için RKO sabit açık çevrim kutup bölgeleri için ise RKO $[0,1]$ aralığında ve 0.1 artış oranı ile değişmektedir. Bu analizde her bir sistem mertebesi

ve karşılık gelen RKO için 10000 adet rasgele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır.

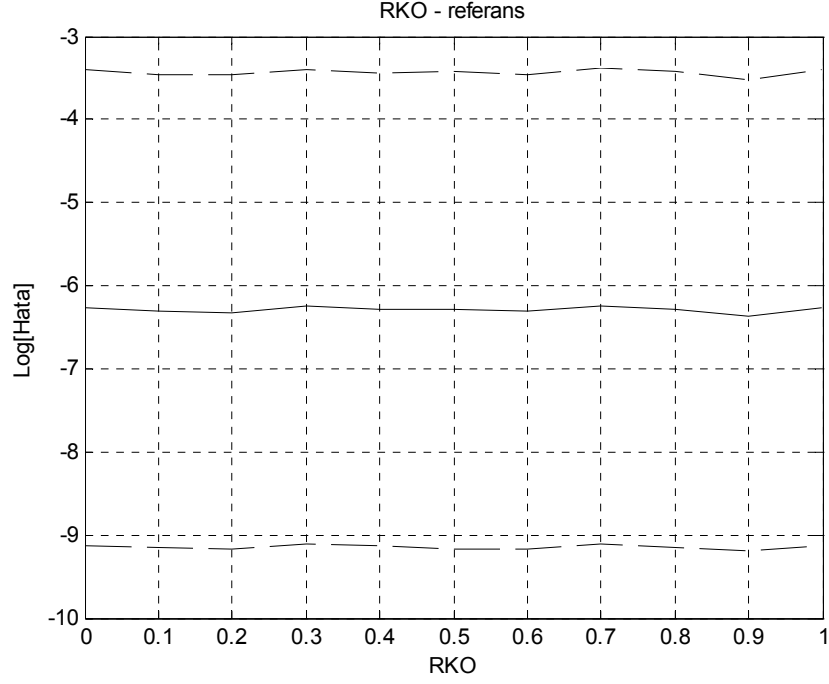


Şekil 3.6: Üç boyutlu yüzey grafiklerinin elde edilebilmesi için gerekli olan algoritma

Bu analizin tamamlanması veya başka bir deyişle RKO olarak verdiğimiz parametrenin kutup yerleştirme işleminde ortaya çıkacak hataları ne kadar etkilediğinin belirlenebilmesi için etkili olabilecek olası ikinci durum olan kapalı çevrim kutup bölgelerinin RKO'nın kutup yerleştirme işleminde meydana gelen hatalar üzerinde ne kadar etkili olduğu incelenmelidir. Bunun için ise yine aynı algoritma mantığı kullanılacak fakat her bir döngü içinde “X” değeri sabit tutulup “Y” değeri [0,1] aralığında ve yine 0.1 oranında artırılacaktır. Bu işlemi gerçekleştirecek algoritma için bir akış diyagramı ise “Şekil 3.7” ile verilmiştir.



Şekil 3.7: Diğer parametreler sabit kalacak şekilde hedeflenen kutuplarının RKO’ sunu değiştiren algoritma



Şekil 3.8: Diğer parametreler sabit tutularak hedeflenen kutupların RKO'nın değiştirilmesi ile hataların değişimi

Tablo 3.3 : Şekil 3.8 için hesaplanan değerler

RKO	Log[Hata]	Standart Sapma
0.0	-6.31	2.82
0.1	-6.32	2.84
0.2	-6.31	2.85
0.3	-6.25	2.86
0.4	-6.28	2.84
0.5	-6.29	2.88
0.6	-6.30	2.85
0.7	-6.23	2.86
0.8	-6.28	2.86
0.9	-6.36	2.83
1.0	-6.26	2.86

Şekil elde edilirken sistem mertebesi 10, durum matrisleri ve giriş matrislerinin değişim aralığı ise $[-1000,1000]$ olarak alınmış ve diğer parametre olan KAM 10 değerinde sabitlenmiştir. Açık çevrim kutup bölgeleri için RKO sabit kapalı çevrim kutup bölgeleri için ise RKO $[0,1]$ aralığında ve 0.1 artış oranı ile değişmektedir. Bu analizde her bir RKO için 10000 adet rasgele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır. Grafikte düz çizgi ile verilen değerler hataların beklenen değerini, kesikli çizgiler ise standart sapma ile alabileceği alt ve üst değerleri belirtmektedir.

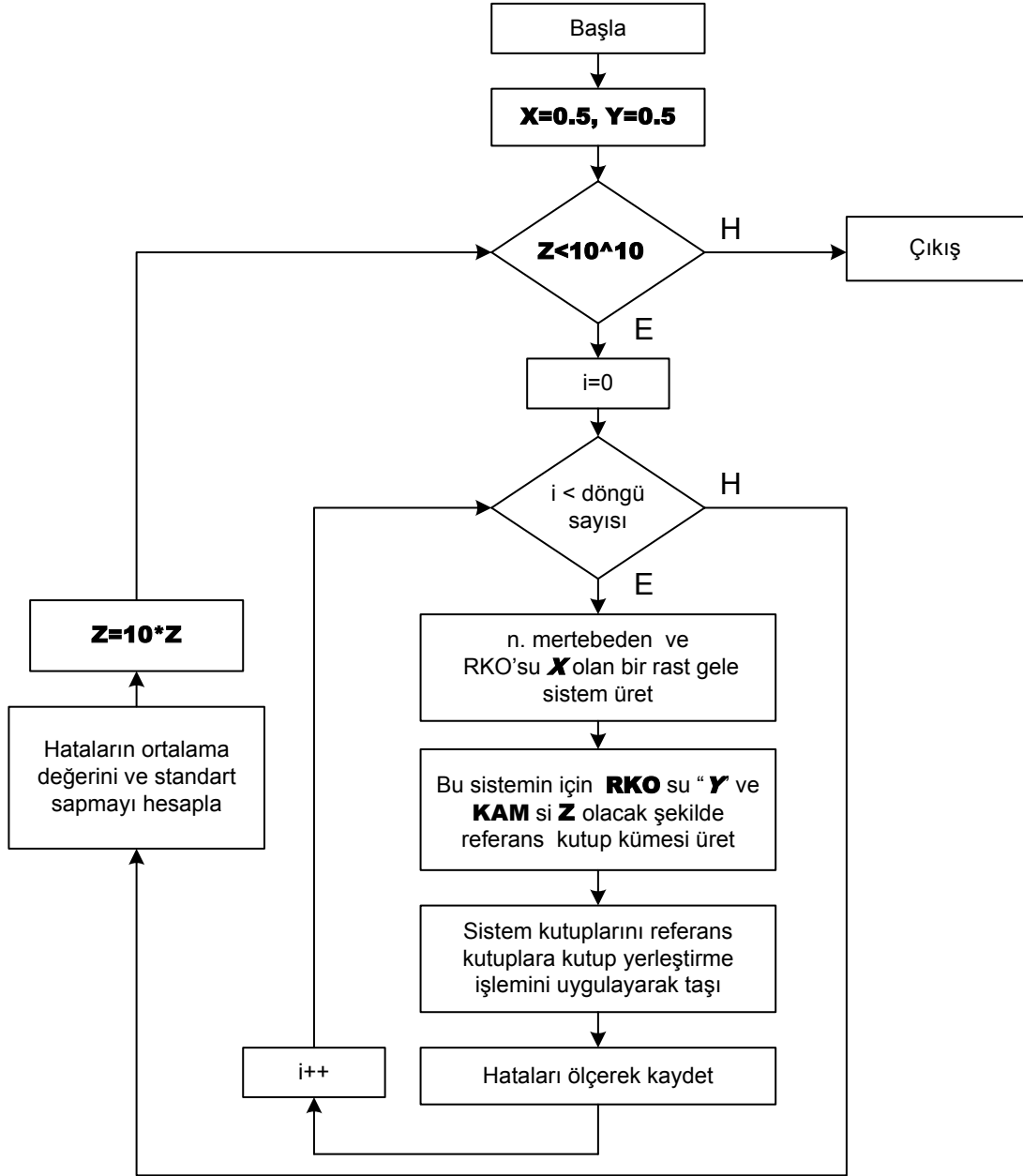
Bu grafik incelendiğinde sistemlerin kapalı çevrim kutup bölgeleri için reel kutup oranlarının değiştirilmesi ile kutup yerleştirme işleminde meydana gelen hatalar arasında bir ilişkinin bulunmadığı kolaylıkla görülmektedir. Çünkü kapalı çevrim kutup bölgeleri için RKO'nun artımı ile meydana gelen hatalarda bir değişiklik görülmemektedir. Sonuç olarak bu iki grafiğin beraber yorumlanması ile kolaylıkla söyleyebiliriz ki açık çevrim kutup bölgeleri için RKO kutup yerleştirme işleminin başarısında önemli bir parametre olarak karşımıza çıkmaktadır.

3.3 Kutuplar arasındaki mesafenin analizi (KAM)

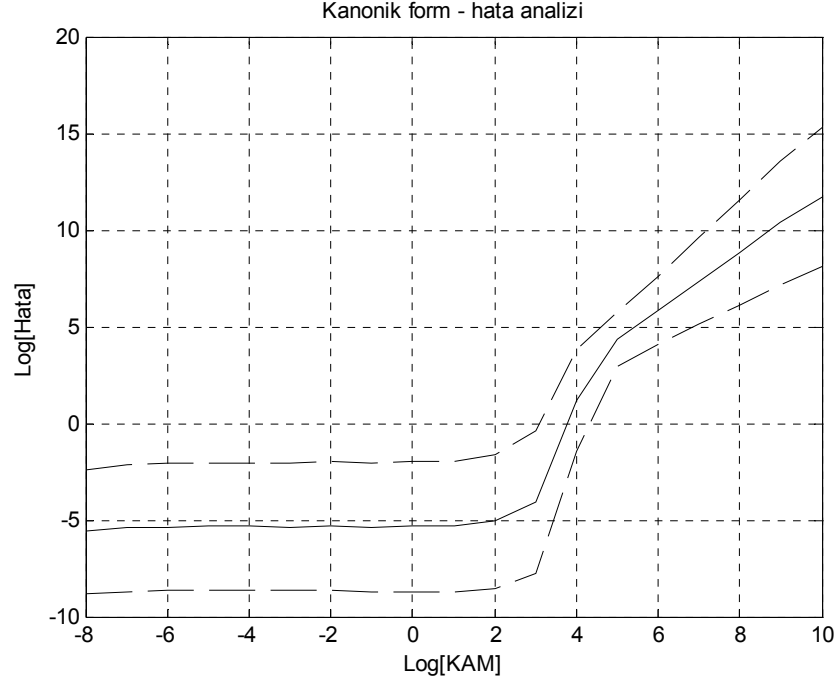
Bu parametrenin analizi için öncelikle açık çevrim sistemin RKO'nun kutup yerleştirme işlemindeki etkisinin izole edilmesi gerekmektedir. Bunun için açık çevrim RKO sabit bir değer alacak şekilde sistemlerin türetilmesi gerekmektedir. Daha sonra KAM sistematik bir şekilde artırılarak her bir KAM için belirli sayıda kutup yerleştirme işlemi gerçekleştirilerek hatalar ölçülmeli ve ortalama değer ve standart sapmaları hesaplanmalıdır. Bunun için öncelikle açık çevrim sistem kutupları ve hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgeleri için RKO'nun sabitlendiğini kabul edelim. KAM parametresinin aldığı değeri “Z” ile gösterelim ve Z'in değerinin ise logaritmik olarak arttırdığımızı düşünelim. Bu işlemi gerçekleştirecek algoritma mantığını veren akış diyagramı ise “Şekil 3.10” ile verilmiştir. Bu algoritma kullanılarak bulunan sonuçlar “Şekil 3.11”de görülmektedir.

Grafikten de görüldüğü gibi KAM'nin nümerik kutup yerleştirme işleminde hatalar için belirleyici bir faktör olduğu açıktır. KAM'nin atışı ile kutup yerleştirme hataları logaritmik eksenindeki $[-8,2]$ aralığında ciddi bir değişime uğramamaktadır. Fakat grafikte KAM 100'ün üstüne çıktığında bir kırılma meydana gelmekte ve $[2,5]$ aralığında KAM'nin artışı ile hatalar üstel olarak artmaktadır. Fakat $[5,10]$ aralığında ise hatalar logaritmik ekseninde lineer bir artış sürecine girmektedir. Ayrıca yine $[5,10]$ aralığı ve KAM'nin aldığı daha büyük değerler için KAM ile birlikte standart sapmalarda lineer olarak artmaktadır. Standart sapmalar ise $[-8,2]$ aralığında yaklaşık olarak aynı değerleri almakta, $[-2,5]$ aralığında geçici bir azalma sürecine girmekte fakat buna karşılık $[5,10]$ aralığında ise bir artış sürecine girmektedir. Bu grafikten çıkarılacak en önemli sonuç ise KAM'nin 100'e kadar değerler aldığı aralıkta değişiminin kutup yerleştirme işleminin performansı üzerinde bir etkisi olmayıp, $[100,10000]$ aralığında artırılması ile hatalar üstel olarak artmakta $[10000,10^{10}]$

aralığında ise lineer olarak artmaktadır. Bu nedenle hedeflenen kapalı çevrim kutupları ile açık çevrim kutupları arasındaki mesafenin 100'den büyük olması nümerik kutup yerleştirme işleminin performansını olumsuz etkilemektedir.



Şekil 3.10: Sistem mertebesini, orijinal ve hedeflenen kutupların RKO sabit tutularak KAM'yi değiştiren algoritma



Şekil 3.11: KAM'yi değişimi ile hatanın değişimi gösteren grafik

Tablo 3.4: Şekil 3.11 için hesaplanan değerler

KAM	Log[Hata]	Standart Sapma
-8	-5.58630	3.21730
-7	-5.41814	3.27961
-6	-5.35979	3.29788
-5	-5.34766	3.28931
-4	-5.33905	3.28974
-3	-5.37832	3.28074
-2	-5.34180	3.33410
-1	-5.36143	3.33227
0	-5.33921	3.40832
1	-5.33493	3.36579
2	-5.08728	3.50618
3	-4.10083	3.66776
4	1.19985	2.64269
5	4.33051	1.38649
6	5.81107	1.73644
7	7.36455	2.22829
8	8.83164	2.70360
9	10.36151	3.18942
10	11.73005	3.62038

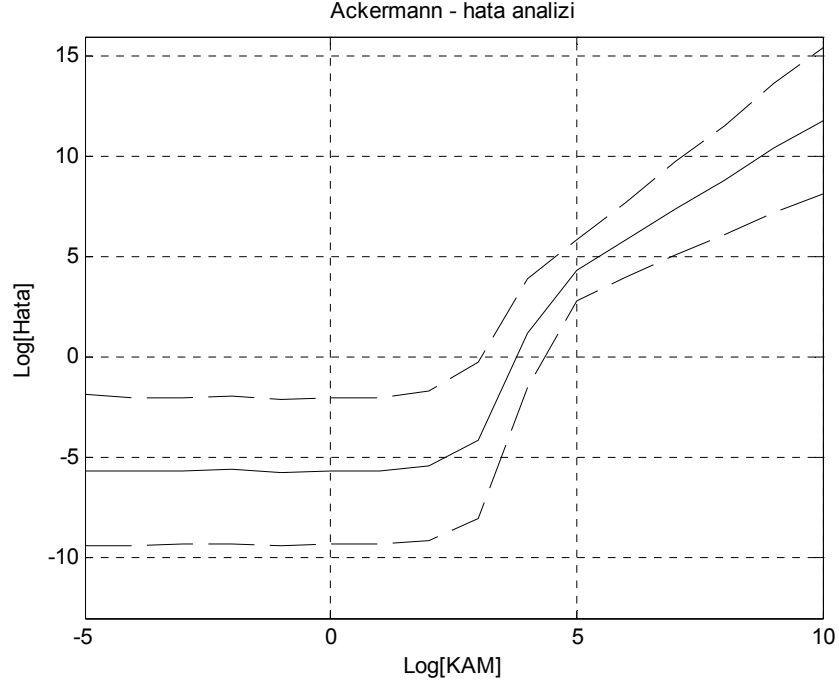
Şekil elde edilirken sistem mertebesi 10, durum matrisleri ve giriş matrislerinin elementlerinin değişim aralığı ise $[-1000,1000]$ olarak alınmıştır. Açık çevrim kutup bölgeleri için ve kapalı çevrim kutup bölgeleri için ise RKO 0.5 değerinde sabit

alınmış KAM ise logaritmik olarak değiştirilmektedir. Bu analizde her bir KAM için 10000 adet rast gele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır. Grafikte düz çizgi ile verilen değerler hataların beklenen değerini, kesikli çizgiler ise standart sapma ile alabileceği alt ve üst değerleri belirtmektedir.

Şekilden de görüldüğü gibi KAM'nin değeri 100'ün üstüne çıktığı takdirde hatalar üstel olarak artmaktadır. Bu nedenle KAM'nin nümerik kutup atama işlemi üzerinde etkili bir parametre olduğu ve işlem öncesinde KAM'nin dikkate alınması gerektiği açıkça görülmektedir. Standart sapmalar ise KAM'nin 100'den küçük değerleri için sabit olmakla beraber $[100, 100000]$ aralığında azalmakta $[100000, 10^{10}]$ aralığında ise logaritmik eksenle tekrar lineer olarak artmaktadır.

Aynı analiz farklı yöntemler için tekrarlanırsa sırası ile “Şekil 3.12”, “Şekil 3.13” ve “Şekil 3.14” ile verilen grafikler elde edilecektir. “Şekil 3.12” den görüldüğü gibi kutup yerleştirme işlemi için Ackermann yöntemi kullanıldığı takdirde kontrol edilebilir standart forma dönüşüm yapılarak elde edilen grafiğe (“Şekil 3.11” ile verilen grafik) çok benzeyen bir grafik elde edilir. Spektral yaklaşım kullanıldığı durumda ise KAM'nin 100'e kadar olan değerleri için hatanın beklenen değeri Ackermann yöntemine göre 0.5 kadar daha küçük diğer aralıklar için ise Ackermann ile aynı sonuçlar elde edilmiştir ve bu aralık için standart sapmalarda yaklaşık olarak aynı değerleri almaktadır. Bu nedenle Spektral yaklaşımın KAM parametresinin değişimine Ackermann göre daha az duyarlı olduğu ve daha iyi bir sonuç verdiği söylenebilir.

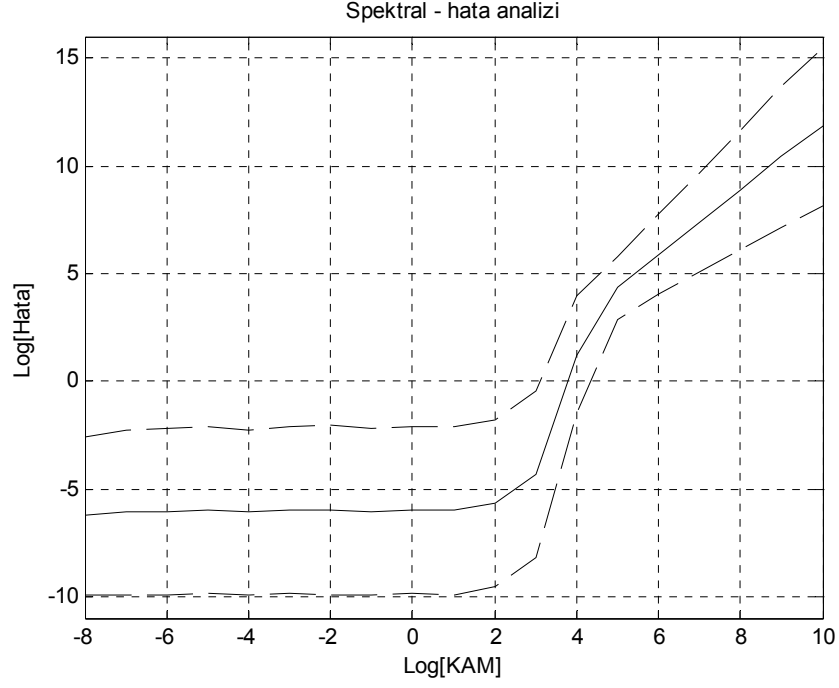
Buna karşılık izdüşüm (Mapping) yöntemi için KAM değeri değiştirildiği takdirde Ackermann yöntemi ve Spektral yaklaşıma göre oldukça farklı bir grafik elde edilecektir. Bu grafik “Şekil 3.14” ile verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi hatanın logaritması çok daha düşük bir değer olan (-10)'dan başlayıp lineer olarak artmaktadır. Standart sapmalar ise diğer yöntemlere göre daha düşük bir değer olan 2.6'dan başlayarak lineer olarak artmaktadır. Bu nedenle bu grafiğe bakılarak KAM'nin $[-8, -3]$ aralığındaki değerleri için izdüşüm yaklaşımının daha başarılı olduğu söylenebilir. Fakat $[-3, 4]$ aralığı için en başarılı yöntem Spektral yaklaşımdır.



Şekil 3.12: Diğer parametreler sabit tutulduğu durumda KAM'yi değişimi ile Ackermann yöntemi için elde edilen hatanın değişimi gösteren grafik

Tablo 3.5: Şekil 3.12 için hesaplanan değerler

KAM	Log[Hata]	Standart Sapma
-5	-5.63201	3.74240
-4	-5.70612	3.67895
-3	-5.65726	3.66296
-2	-5.61785	3.67704
-1	-5.73927	3.61559
0	-5.66180	3.64288
1	-5.67606	3.62509
2	-5.39935	3.72930
3	-4.11987	3.88359
4	1.21534	2.69707
5	4.36214	1.51527
6	5.89703	1.87315
7	7.42210	2.30890
8	8.83143	2.72763
9	10.42356	3.23612
10	11.81345	3.65596



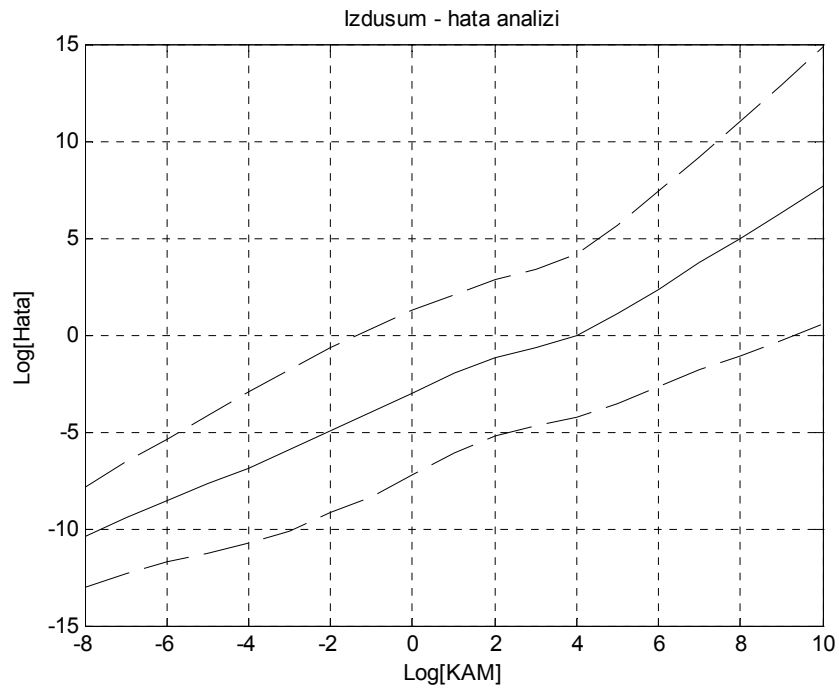
Şekil 3.13: Diğer parametreler sabit tutulduğu durumda KAM'yi değişimi ile Spektral yaklaşım yöntemi için elde edilen hatanın değişimi gösteren grafik.

Tablo 3.6: Şekil 3.13 için hesaplanan değerler

KAM	Log[Hata]	Standart Sapma
-8	-6.240601	3.6555
-7	-6.095774	3.8411
-6	-6.071631	3.8677
-5	-6.018639	3.8747
-4	-6.072852	3.8273
-3	-5.968855	3.8695
-2	-5.952034	3.9485
-1	-6.069335	3.8370
0	-5.987544	3.8694
1	-6.006213	3.8986
2	-5.653870	3.8773
3	-4.340623	3.8755
4	1.228320	2.7068
5	4.352928	1.4611
6	5.866443	1.8505
7	7.360188	2.2709
8	8.868092	2.7757
9	10.405521	3.2652
10	11.815987	3.6594

“Şekil 3.12” elde edilirken Ackermann yöntemi, “Şekil 3.13” elde edilirken Spektral yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Her iki analiz için sistem mertebesi 10, durum matrisleri ve giriş matrislerinin elementlerinin değişim aralığı ise $[-1000,1000]$ olarak alınmıştır. Açık çevrim kutup bölgeleri için ve kapalı çevrim kutup bölgeleri için ise RKO 0.5 değerinde sabit alınmış KAM ise logaritmik olarak değiştirilmektedir. Bu analizde her bir KAM için 10000 adet rast gele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır. Grafikte düz çizgi ile verilen değerler hataların beklenen değerini, kesikli çizgiler ise standart sapma ile alabileceği alt ve üst değerleri belirtmektedir.

Aynı analiz iz düşüm (Mapping) yöntemi için tekrarlandığı takdirde aşağıdaki “Şekil 3.14” ile verilen grafik elde edilir. Şekil edilirken sistem mertebesi 10, durum matrisleri ve giriş matrislerinin elementlerinin değişim aralığı ise $[-1000,1000]$ olarak alınmıştır. Açık çevrim kutup bölgeleri için ve kapalı çevrim kutup bölgeleri için ise RKO 0.5 değerinde sabit alınmış KAM ise logaritmik olarak değiştirilmektedir. Bu analizde her bir KAM için 10000 adet rast gele sistem ve sabit uzaklıkta referans kutup kümesi türetilerek kutup yerleştirme işlemi uygulanmıştır.

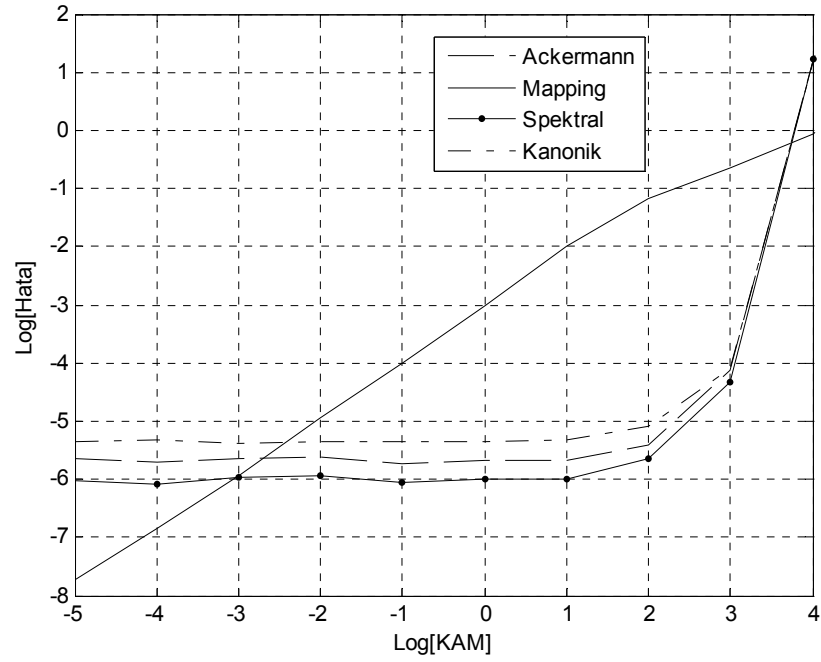


Şekil 3.14: KAM'yi değişimi ile İzdüşüm yöntemi için elde edilen hatanın değişimi gösteren grafik

Tablo 3.7: Şekil 3.14 için hesaplanan değerler

KAM	Log[Hata]	Standart sapma
-8	-10.42455	2.61527
-7	-9.43865	2.86321
-6	-8.52035	3.16553
-5	-7.71181	3.53297
-4	-6.84303	3.87074
-3	-5.94404	4.17126
-2	-4.94881	4.26139
-1	-4.00927	4.34168
0	-3.01157	4.25424
1	-2.00039	4.07541
2	-1.16118	4.02212
3	-0.64142	4.03723
4	-0.06894	4.22763
5	1.05471	4.57222
6	2.34515	5.05509
7	3.69001	5.48501
8	4.98278	6.05849
9	6.29357	6.59277
10	7.70787	7.11890

Tüm yöntemlerin uygulanmasından elde edilen değerleri tek bir grafik içindeki gösterimi ise Şekil 3.3.6 ile verilmiştir.

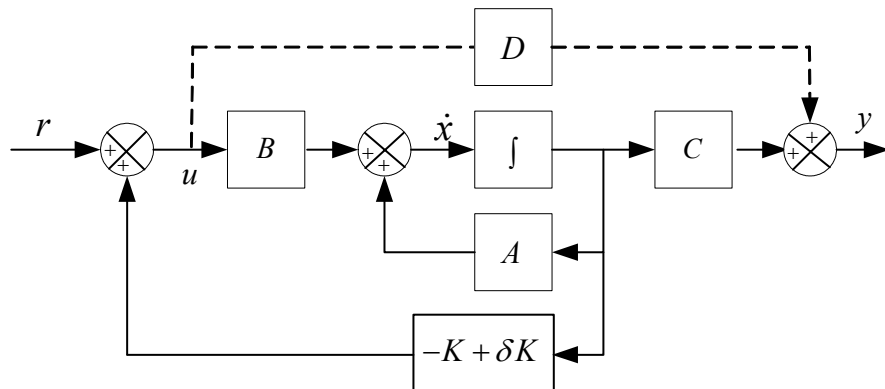


Şekil 3.15: Farklı yöntemler için KAM' ye bağlı olarak hataların değişimi

Sonuç olarak ise KAM parametresi yöntem farklılıklarına göre farklı kutup yerleştirme performansı göstermektedir. Özellikle izdüşüm yaklaşımı kullanılırken hedeflene kutupların orijinal sisteme olan uzaklığının çok büyük seçilmemesi kutup yerleştirme işleminin performansı için faydalı olacaktır. KAM'nin büyük seçilme zorunluluğunun olduğu kutup yerleştirme işlemleri için ise Spektral yaklaşım önerilebilir.

4. KUTUP YERLEŞTİRME HATALARI İÇİN BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Tezin daha önceki bölümlerinde de belirtildiği gibi durum geribesleme matrisi nümerik olarak hesaplandığı takdirde yuvarlatma hatalarından kaynaklanan birtakım hesaplama hatalarının meydana gelmesi kaçınılmaz olacaktır. Bu nedenle kutup yerleştirme işleminde durum geribesleme matrisinin nümerik olarak hesaplanmasında meydana gelebilecek olası hataların ortadan kaldırılması için alternatif bir yaklaşıma ihtiyaç duyulacağı açıktır. Bu nedenle tezin bu bölümünde bu tür hataların ortadan kaldırılmasında etkili olan alternatif bir yöntem ele alınacaktır. Bölüm 2.1’de kontroledilebilir standart form için kutup yerleştirme işlemi tanımlanmıőtı. Bölüm 2.3’de ise bu formda gerçekleştirilen kutup yerleştirme işleminde durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelebilecek olası yuvarlatma hataları için bir genel analiz yapılmıştı. Özellikle denklem 2.19 ve denklem 2.20 ile durum geribesleme matrisinin hesaplanan gerçek değerı verilmiş denklem 2.21 ve denklem 2.22 ile hatalı olarak hesaplanan durum geribesleme matrisinin kapalı çevrim sistem modeli ve durum matrisi üzerine etkisi gösterilmiőtı. Bu noktadan hareketle açık çevrim sistemin durum denklemlerinin kontrol edilebilir standart formda hatasız olarak modellendiği veya sisteme hatasız bir koordinat dönüşümü uygulandığını kabul edelim.



Şekil 4.1: Hesaplanan durum geribeslemesinin uygulanması ile elde edilen kapalı çevrim sistem modeli

Bu durumda geribesleme matrisinin hesaplanan değeri ile yapılan bir geri besleme ile oluşan kapalı çevrim sistem modeli “Şekil 4.1” ile gösterilebilir. Hatalı olarak hesaplanmış bir durum geribesleme matrisinden elde edilecek kontrol kuralı ise denklem 4.1 ile verildiği gibi olacaktır.

$$u = -(\tilde{K} + \delta\tilde{K})\tilde{x} + r \quad (4.1)$$

Bu kontrol kuralının geri besleme ile sisteme uygulanmasından elde edilecek kapalı çevrim sistem modeli ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{x} = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} - \tilde{B}\delta\tilde{K})\tilde{x} + \tilde{B}r \quad (4.2)$$

Burada kapalı çevrim durum matrisi ise hedeflenen durum matrisinden farklı olarak bir bozulma ile karşımıza çıkacaktır. Bu nedenle kapalı çevrim sistemin durum matrisini denklem 4.3 ile verilen model ile göstermek mümkündür.

$$\hat{A}_c = A_c + E \quad (4.3)$$

Burada

$$A_c = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} \quad (4.4)$$

$$E = -\tilde{B}\delta\tilde{K} \quad (4.5)$$

Denklem 4.4 durum matrisinin kutup yerleştirme işlemi sonrası ideal değerini denklem 4.5 ise durum geribesleme matrisinin hesaplanmasında meydana gelen yuvarlatma hatalarından dolayı kapalı çevrim sistemin durum matrisinde meydana gelen bozulmayı temsil etmektedir. Denklem 4.3 ve denklem 4.4 ile verilen ifadelerin aşağıdaki gibi daha açık olarak gösterilmesi mümkündür.

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ d_0 + \delta k_{0_1} & d_1 + \delta k_{1_1} & \cdots & d_{n-1} + \delta k_{n-1_1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 + k_0 & -a_1 + k_1 & \cdots & -a_n + k_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$-\tilde{B}\delta\tilde{K}=E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta k_{0_1} & \delta k_{1_1} & \cdots & \delta k_{n-1_1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Bu sistemin kapalı çevrim karakteristik denklemi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}.fl(\tilde{K})) &= \sum_{i=0}^{n-1} (d_i + \delta k_i) s^i + s^n \\ &= (d_0 + \delta k_0) + (d_1 + \delta k_1)s + \cdots + (d_{n-1} + \delta k_{n-1})s^{n-1} + s^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

Denklem 4.9 de görülen $fl(K)$ değeri ise bölüm 2.2’de verildiği gibi nümerik olarak durum geribeslemesinin hesaplanan değerini temsil etmektedir. Bu noktada düşünülmesi gereken konu şudur; durum geribesleme matrisinin daha doğru olarak hesaplanması ve dolayısıyla daha iyi bir kapalı çevrim durum matrisinin ve kapalı çevrim karakteristik denkleminin elde edilmesi mümkün müdür? Bu sorunun cevabı için gerçek kapalı çevrim karakteristik denklemini ideal karakteristik denklemine daha çok yakınlaştırmak için sisteme ikinci defa kutup yerleştirme işleminin uygulandığını ve başka bir deyişle sistemi ideal kapalı çevrim sisteme yaklaştırmak için ikinci bir durum geribesleme matrisinin hesaplandığını düşünelim. Bu noktada ikinci defa hesaplanan durum geribesleme matrisinin i. elemanın ideal değerini ve nümerik olarak hesaplanan gerçek değerlerini tespit etmeye çalışalım. Durum geribesleme matrisinin i. elemanını bölüm 2.1’de denklem 2.14 ile göstermiş olduğumuz gibi ideal karakteristik denkleminin i.katsayısı ile sistem karakteristik denkleminin i. katsayısının farkından elde ettiğimizi düşünelim. Bu durumda aşağıdaki denklem 4.10 ile verilen değer durum geribesleme matrisinin i. elemanının hatasız olarak hesaplanmış ideal değerini denklem 4.11 ile verilen değer ise nümerik olarak hesaplanan değerini temsil etmektedir.

$$k_{i_2} = d_i - (d_i + \delta k_{i_1}) = -\delta k_{i_1} \quad (4.10)$$

$$fl(k_{i_2}) = (-\delta k_{i_1})(1 + \delta) = -\delta k_{i_1} - \delta\delta k_{i_1} \quad (4.11)$$

Aynı prosedürü üçüncü defa uygularsak

$$k_{i_3} = -\delta k_{i_1} - (-\delta k_{i_1} - \delta\delta k_{i_1}) = \delta\delta k_{i_1} \quad (4.12)$$

$$f(k_{i_3}) = (\delta \delta k_{i_1})(1 + \delta) = \delta \delta k_{i_1} + \delta \delta \delta k_{i_1} \quad (4.13)$$

Burada $|\delta| \leq \mu \approx 1.1 \times 10^{-16}$

Bu durumda her bir adımda yapılan yuvarlatma hatası bir önceki adımdan daha küçük olacaktır. Şimdi bu noktadan hareketle yukarıda yaptığımız işlemi bir algoritma içinde sonsuz defa gerçekleştirdiğimizi ve ilk olarak hesapladığımız değerle ile birlikte her bir adımda elde ettiğimiz durum geribesleme matrisinin i. elemanının aldığı değerleri kaydettiğimizi düşünelim. Bu durumda eğer bu değerler toplanacak olursa aşağıdaki seri elde edilecektir.

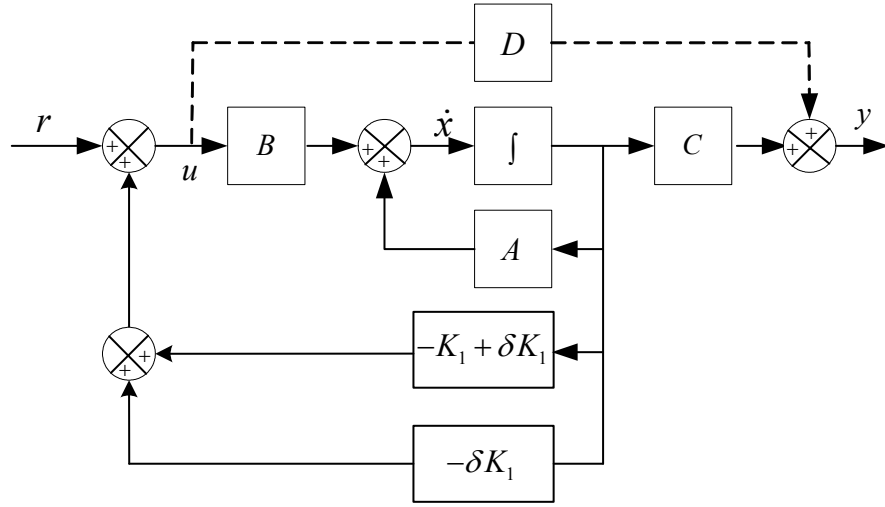
$$\begin{aligned} k_i &= \sum_{n=1}^{\infty} f(k_{i_n}) = f(k_{i_1}) + f(k_{i_2}) + \dots + f(k_{i_{\infty}}) \\ &= k_{i_1} + \delta k_{i_1} - \delta k_{i_1} - \delta \delta k_{i_1} + \delta \delta k_{i_1} + \delta \delta \delta k_{i_1} - \delta \delta \delta k_{i_1} + \dots \\ &= k_{i_1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Bu noktadan hareketle denklem 4.1.8 ile göstermiş olduğumuz hata matrisinin n. satır i. sütun elemanı ise aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} k_i &= k_{i_1} + \delta k_{i_1} + \sum_{n=2}^{\infty} f(k_{i_n}) \\ \Rightarrow \delta k_{i_1} &= E_{n,i} = - \sum_{n=2}^{\infty} f(k_{i_n}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Her bir adım için birim yuvarlatma hatası 1'den küçük olduğu takdirde seri yakınsak bir seri olacaktır ve belirli bir adımdan sonra durum geribesleme matrisinin i. elemanının hesaplanan değeri sıfır olacaktır. Durum geribesleme matrisinin bütünü içinde aynı yakınsama gerçekleşecektir. Bu nedenle durum geribesleme matrisi bir algoritma içinde yinelemeli olarak hesaplanarak toplandığı düşünelim. Bu takdirde elde edilen matrisin başlangıçta elde edilen orijinal durum geribesleme matrisi ile toplanması ile elde edilen matris ideal değere yaklaşılabilecektir ve bu döngüler, başlangıç olarak hesaplanan durum geribesleme matrisindeki yuvarlatma hatalarını yok edecektir. Bu durumu ise aşağıdaki şekille daha görsel hale getirilebilir. “Şekil 4.2” de verilen ek durum geri beslemesinin değerini ise aşağıdaki gibi göstermek mümkündür.

$$\delta \tilde{K}_2 = \sum_{i=2}^{\infty} f(\tilde{K}_i) = f(\tilde{K}_2) + f(\tilde{K}_3) + \dots \quad (4.16)$$



Şekil 4.2: Doğru hesaplanmış durum geribesleme matrisinin sisteme uygulanması

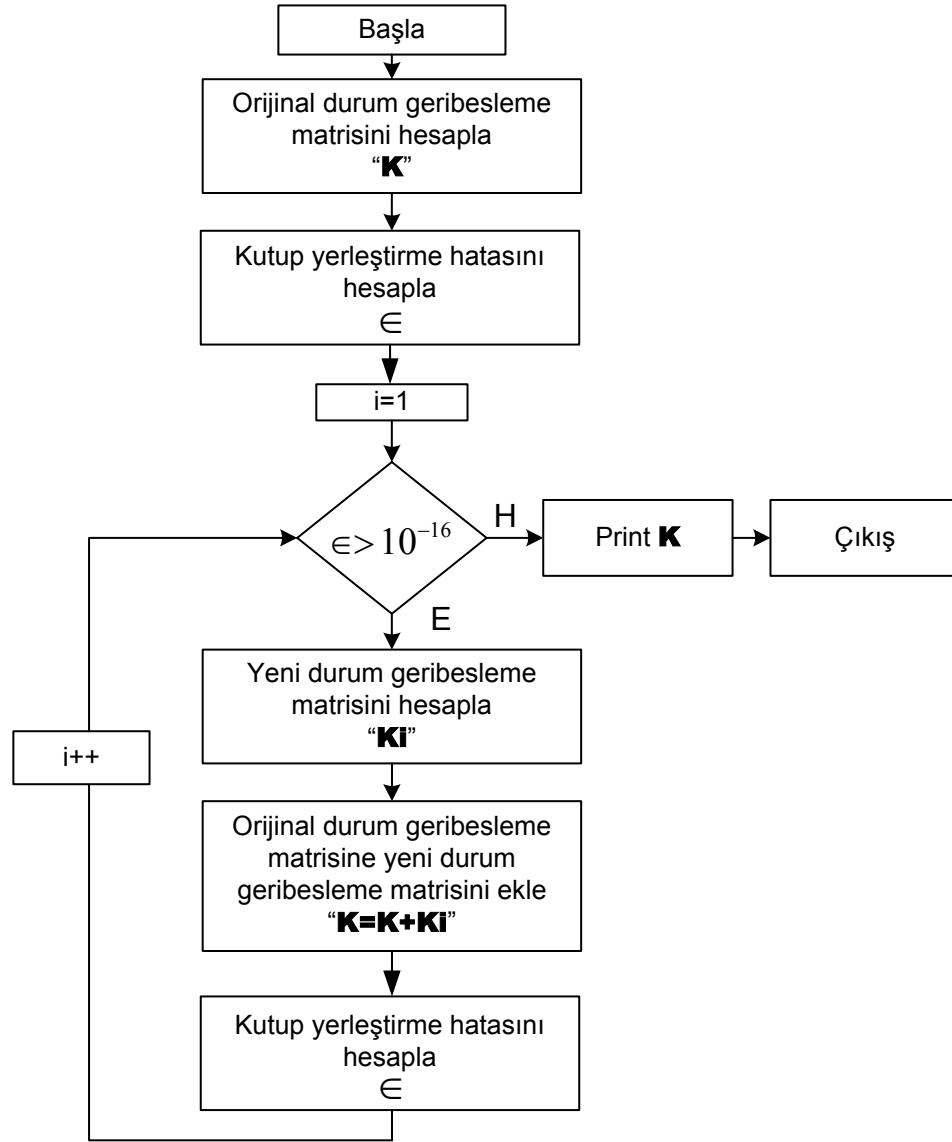
Bu nedenle eğer durum geribesleme matrisinin bu yöntem ile hesaplanan kesin değerini sisteme geribesleme olarak uygularsak sistemin durum matrisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 A_c &= \tilde{A} - \tilde{B} \left(fl(\tilde{K}) - \delta \tilde{K} \right) \\
 &= \tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K} + E + \tilde{B} \delta \tilde{K} \\
 &= \tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Burada $fl(\tilde{K}) = \tilde{K} + \delta \tilde{K}$ ve $E = -\tilde{B} \delta \tilde{K}$

Daha öncede belirtildiği gibi bu işlemi bir algoritma mantığı ile açıklamak mümkündür. Bunun için öncelikle yapılan bir kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası hataları ϵ parametresi ile gösterelim. Daha sonra sisteme ilk olarak bir kutup yerleştirme işlemi için bir durum geribesleme matrisi hesapladığımızı düşünelim. Daha sonra durum geribesleme matrisinin sisteme uygulanması ile oluşacak kapalı çevrim sistemin kutup yerleştirme hatasının ölçüldüğünü kabul edelim ve bu hataları ϵ ile gösterelim. Eğer ölçülen hata belirlenen bir tolerans sınırının üstünde ise sistem kutuplarını hedeflenen kapalı çevrim kutuplarına biraz daha yaklaştıracak olan yeni bir durum geribesleme matrisi hesaplanarak ilk hesaplanan orijinal durum geribesleme matrisi ile toplansın. Daha sonra son olarak elde edilen durum geribesleme matrisi sisteme uygulansın ve kapalı çevrim sistem için kutup yerleştirme hatası hesaplansın (ϵ). Hesaplanan hata eğer yine tolerans

sınırının üzerinde ise döngüye tekrar girilsin ve bu süreç hatalar tolerans sınırının altına inene kadar devam etsin. Bu işlemi gerçekleştirebilecek olan algoritma “Şekil 4.3” ile verilmiştir.



Şekil 4.3 :Kanonik formda tanımlanmış sistemler için yuvarlatma hatalarını izole eden algoritma

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bölüm 3’de yapılan analizler nümerik kutup yerleştirme işleminde meydana gelecek olan hataları belirleyen bir takım parametrelerin var olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu parametreler sırası ise sistem mertebesi, açık çevrim sistemin reel kutup oranının beklenen değeri ve açık çevrim kutup bölgeleri ile hedeflenen kapalı çevrim kutup bölgeleri arasındaki mesafedir. Bu parametrelerden ilk olarak sistem mertebesi incelenmiş ve sistem mertebesi ile kutup yerleştirme hatasının beklenen değeri arasında lineer bir ilişkinin olduğu gözlemlenmiştir. Sistem mertebesi [10,20] aralığında değiştiği takdirde $[10^{-5}, 10^4]$ aralığında değişmekte ve özellikle sistem mertebesi 16’nın üstüne çıktığı takdirde hedeflenen kapalı çevrim kutuplarından büyük yer değiştirmeler meydana gelmektedir. Sonuç olarak hataların değişim aralığı göz önüne alındığında sistem mertebesi kutup yerleştirme işlemi için tüm parametreler içinde en önemli etken olarak karşımıza çıkmaktadır.

Diğer bir parametre olarak tanımlanan reel kutup oranı iki ana başlık altında incelenebilir. Bunlardan ilki açık çevrim reel kutup oranının beklenen değeri diğeri ise hedeflenen kapalı çevrim reel kutuplarının beklenen değeridir. Yapılan analizler hedeflenen kutupların reel kutup oranının beklenen değerinin kutup yerleştirme işleminin nümerik performansı üzerinde bir etkisi olmadığını göstermiştir. Buna karşılık diğer parametreler sabit tutularak açık çevrim sistemin reel kutup oranının değiştirildiği takdirde kutup yerleştirme hataları üstel olarak artmaktadır. Bu nedenle açık çevrim reel kutup sayısı fazla olan sistemlere nümerik kutup yerleştirme işlemi uygulandığında daha büyük hataların ortaya çıkması beklenir.

Son parametre açık çevrim kutupları ile hedeflene kapalı çevrim kutupları arasındaki mesafedir. Yapılan analizler göstermiştir ki kutuplar arasındaki mesafenin atışı ile kutup yerleştirme hataları arasındaki ilişki kullanılan yöntemle göre değişiklik göstermektedir. Ackermann, Spektral yaklaşım ve kontrol edilebilir formda kutup yerleştirme yöntemleri ile yapılan analizler incelendiğinde, kutuplar arasındaki mesafenin $[10^{-8}, 10^2]$ aralığında aldığı değerler için hataların ciddi bir değişime uğramadığı görülmüştür. Fakat iz düşüm yöntemi (Mapping) kullanıldığı takdirde

hatalar diğer yöntemlere göre çok daha küçük değerlerden başlamasına karşılık, tüm aralık için lineer olarak arttığı için kutuplar arasındaki mesafe 10^{-2} 'den büyük olduğu takdirde diğer yöntemlerden daha büyük hatalar yapılmaktadır. Ackermann, Spektral yaklaşım ve kontrol edilebilir formda kutup yerleştirme yöntemleri için kutuplar arasındaki mesafe 100'ün üstüne çıktığı takdirde bir kırılma meydana gelmekte ve $[10^2, 10^5]$ aralığında kutuplar arasındaki mesafenin artışı ile hatalar üstel olarak artmaktadır. Sonuç olarak zorunlu kalınmadığı takdirde bir nümerik kutup yerleştirme işleminde açık çevrim kutupları ile kutuplar arasındaki mesafenin 100'den küçük seçilmesi kutup yerleştirme işleminin nümerik performansı için faydalı olacak ve kutup yerleştirme işlemi daha başarılı olacaktır.

Bölüm 2'de ise kutup yerleştirme işleminin nümerik analizi perspektifinden bakılarak kontrol edilebilir standart formda gerçekleştirilen kutup yerleştirme işleminde meydana gelebilecek olası kutup yerleştirme hataları tanımlanmıştır. Bölüm 4'de ise bu hataların izole edilmesi için bir çözüm önerisi sunulmuştur. Önerilen yöntem kullanılarak kontrol edilebilir standart formda tanımlanmış sistemler için hesaplanan durum geribesleme matrisinde meydana gelen hataların tamamen izole edilebildiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **M.T Söylemez**, 1999. Pole Assignment for uncertain systems, UMIST Control Systems Centre Research Studies.
ISBN 0 86380 246 X
- [2] **N.J. Higham**, 1996. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, p,40-67.
- [3] **B.N Datta**, 1995. Numerical Linear Algebra and Applications by Brooks/Cole Publishing Company p,46-62.
ISBN 0-534-17466-3
- [4] **M.T Söylemez, and N.Munro**, Robust pole assignment in uncertain systems *IEE Proc-Control Theory Appl.*, Vol. 144, No 3, May 1997
- [5] **P.E, Mantey**, “Eigenvalue Sensitivity and State Variable Selection”, IEEE Trans. On Auto. Contr, AC-13,3,1968
- [6] **G.F. Franklin, J.D Powel and M. Workman**, Digital Control of Dynamic Systems 1998, Addison Wesley Longman, Inc.
p.437-440 ISBN 0-201-820504-4
- [7] **Edelman, A., Kostlan E., Shup M.** 1993 How Many Eigenvalues of a Random Matrix are Real? AMS applied mathematics
- [8] **M.T Söylemez, Munro, N.**, 1998 Pole assignment and symbolic algebra: a new way of thinking, UKACC International Conference on CONTROL '98, 1-4 September 1998, Conference Publication No.455, IEE.
- [9] **Edelman, A., Murakkami, H.** 1994 Polynomial roots from companion matrix eigenvalues. AMS applied mathematics
- [10] **Burkard, R.E., Derigs, U.** : ‘Assignment and matching problems’ (Springer-Verlag, 1980)

ÖZGEÇMİŞ

Erkam Murat Bozkurt, 12 Aralık 1981 tarihinde Erzurum da doğdu. Haziran 1998 yılında Elazığ balakgazi lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl Ekim ayında Elazığ Fırat üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde Lisans Öğrenimine başladı. Ocak 2003 tarihinde Lisans öğrenimini tamamlayarak aynı yıl İ.T.U Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği anabilim dalı Kontrol ve Otomasyon mühendisliği programında Yüksek lisans öğrenimine başladı.