

BLOCH – MAXWELL MODELİNDE ÇATALLANMA VE ÇEKİCİLER

E. E. Akkaya^[3], A. Hacınlıyan^{[2][3]}, İ. Kuşbeyzi^{[1][2]}, O.Ö. Aybar^{[1][2]}

^[1]Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü

^[2]Yeditepe Üniversitesi, Bilişim Sistemleri ve Teknolojileri Bölümü

^[3]Yeditepe Üniversitesi, Fizik Bölümü

erguneray.akkaya@std.yeditepe.edu.tr

ahacinliyan@yeditepe.edu.tr ikusbeyzi@yeditepe.edu.tr oyaybar@yeditepe.edu.tr

ABSTRACT

Regions of the full parameter space for which chaotic behavior in laser models based on the Maxwell Bloch equations occur are studied. The range in the parameter space where a maximal positive Lyapunov exponent occurs corresponds to that for Type B lasers. Hopf bifurcation is confirmed for the He-Ne case.

ÖZET

Bu çalışmada Bloch-Maxwell denklemleri ile modellenebilen lazerlerin kaotik davranış gösterecek olası parametre değeri bölgeleri incelenmiştir. Bu parametrelerin en büyük pozitif Lyapunov üstelleri gösterdiği değerlerin B tipi lazerlere karşılık geldiği anlaşılmıştır. Hopf çatallanması He-Ne lazerleri için gözlenmiştir.

1. GİRİŞ

Bir manyetik momentin manyetik alandaki davranışını tanımlayan Bloch modeli doğrusal olduğu için kaotik davranışa yol açamaz. Ancak alternatif akım manyetik alanının çok kuvvetli olduğu durumlarda faz uzayını yoğun olarak dolduran yörüngelere rastlamak mümkündür. Pozitif Lyapunov üsselleri ile tanımlanabilen kaotik davranış için doğrusal olmayan terimlerin eklenmesi gerekir.

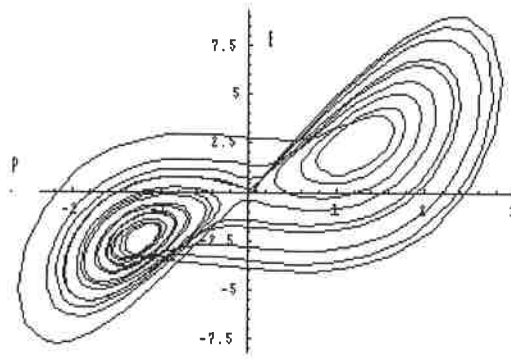
2. BLOCH – MAXWELL LASER MODELİ

Doğrusal olmayan terimleri eklemenin bir yolu ise Bloch sistemine Maxwell denklemlerini bağlamaktır. Bu sistem He-Ne lazer ve bir takım lazerlerin çalışma sistemini modeller. Bloch-Maxwell denklemleri [1] ve [4] de verildiği gibi temel oyuk kipini oluşturan elektrik alan E , bu alanın oluşturduğu atomik kutuplaşma P ve nüfus terslenmesi Δ yı birbirine bağlar.

Denklemlerde yer alan k , $\gamma_{||}$, $\gamma_{\perp}$ parametreleri sönüm hızı parametreleridir, g ise etkileşme sabiti, Δ_0 ise lazerdeki pompalama mekanizmasının uyguladığı nüfus terslenmesi değeridir.

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -kE + gP \\ \dot{P} &= -\gamma_{\perp}P + gE\Delta \\ \dot{\Delta} &= -\gamma_{||}(\Delta - \Delta_0) - 4gPE\end{aligned}$$

Bu sistem eğer parametrelerden $k = \sigma$, $\gamma_{\perp} = g^2/k = 1$, $g^2\Delta_0/k = r$ ve $\gamma_{||} = b$ ve denklemin değişkenleri $x=E$, $y=gP/k$, $z=\Delta - \Delta_0$ şeklinde değiştirilirse Lorenz sistemine dönüştürülebilir. Denklem sistemini, pozitif en büyük Lyapunov üsteli görülen $k=11.75$, $g=6.06$, $\gamma_{\perp}=2.66$, $\gamma_{||}=2.75$, $\Delta_0=28$ parametre değerleri için incelersek, bu çalışma noktası için garip çekici aşağıdaki şekildeki gibi olur.

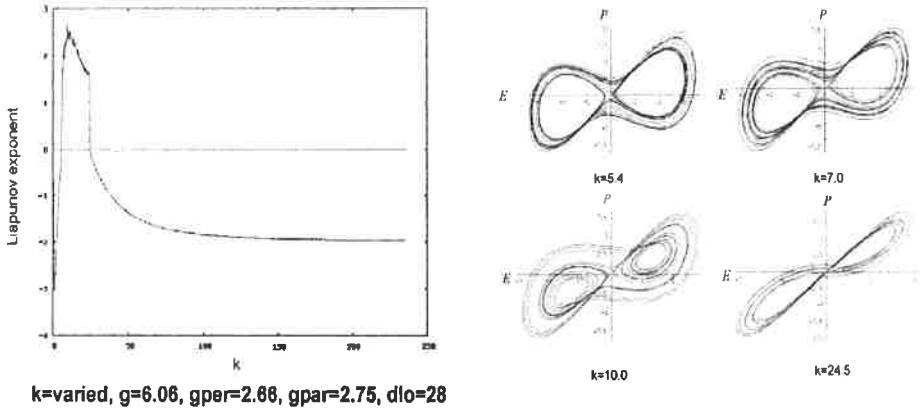


Şekil 1

Bloch-Maxwell denklemleri Lorenz sisteminden daha fazla parametreye sahip olduğu için daha detaylı çalışmayı gerektirmektedir. Lazer sistemlerinde deneysel olarak gözlenmiş bulunan ve kararlılığı olumsuz etkileyen kaotik davranış için bu modele dayalı olarak yapılacak parametre çalışması uygulamalarda kontrolü sağlayabilir. Parametrelerin kaotik davranışının kanıtı olan pozitif en büyük Lyapunov üssel değerleri Wolf algoritması ile hesaplanabilir^{[7] [8]}. Özellikle, $k < 6$ durumunda Lyapunov üsselleri negatif veya sıfır değer vermektedir. Fakat k parametresi 6.75 e ulaştığında pozitif Lyapunov üssellerinin gözlenmesi ile kaotik davranış kanıtlanabilir. Şekil 1'deki gibi kaotik davranışın bulunması için parametre değerleri $6.75 \leq k \leq 11.50$, $\gamma_{\perp} = 2.66$, $\gamma_{||} = 2.75$, $\Delta_0 = 28$ ve $g=6.06$ olmalıdır.

Parametre bölgelerini tarama sürecini kısaltmak için en büyük Lyapunov üsselinin işareti değiştirilerek bunun en küçük değeri CERN MINUIT paketi kullanılarak bulunmuştur. Sistemin baskın kaotik davranışı At ve tut (Throw and catch) mekanizmasıdır. At ve tut mekanizmasında doğrusallaşmış yaklaşıtırdaki iki eşlenik bir reel iki karmaşık özdeğerli denge noktası ile bunların arasında kalan kararsız üçüncü bir denge noktasını (+, -,)

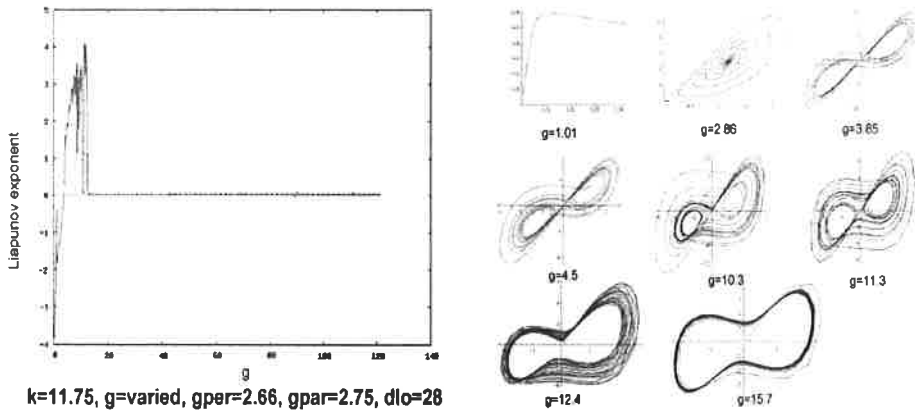
ile gerçekleşir. Kaotik davranış aynı özdeğer yapısına sahip Şekil 1’de verilmiş olan LORENZ sistemine tahmin edilebileceği gibi benzerdir.



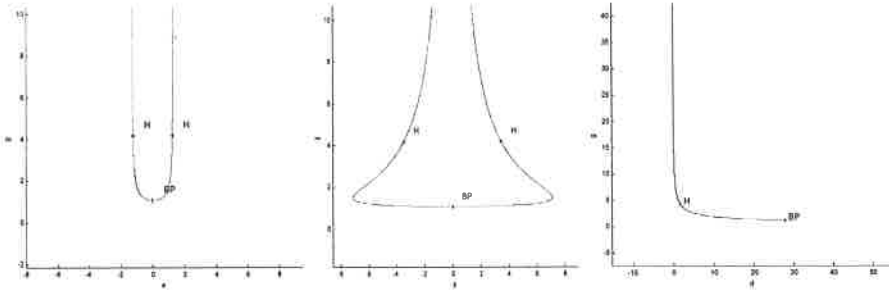
Şekil 2

Şekil 2’de k parametresi değişken alınarak $g=6.06$, $\gamma_{\perp}=2.66$, $\gamma_{\parallel}=2.75$, $\Delta_0=28$ Lyapunov üssellerinin değerleri şekildeki gibidir. k parametresinin değişken olduğu durumlara ait polarizasyon ve elektrik alan grafikleri Lyapunov üsselinin pozitif olduğu yerlerde çekicinin görünümü Şekil 2’deki gibidir.

Diğer parametrelerin analizlerine bakıldığında değişken g parametresi 3 ve 3’den küçük değerlerinde pozitif Lyapunov üsseli vermemektedir. Şekil 3’de görüldüğü gibi negatif Lyapunov üssellerinin var olduğu durumlarda sistemde kararlı limit çevrimleri ailesi görüntüsü verirken g parametresinin 3’den fazla değer aldığı durumlarda sönmeden değişik garip çekiciler gözlemlenir.^[3]

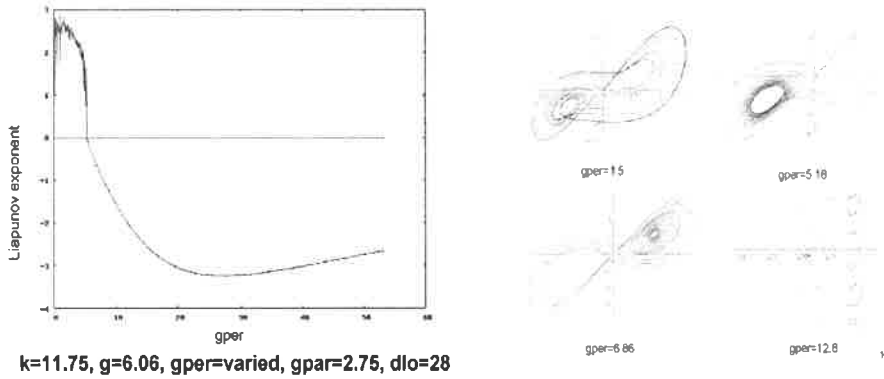


Şekil 3



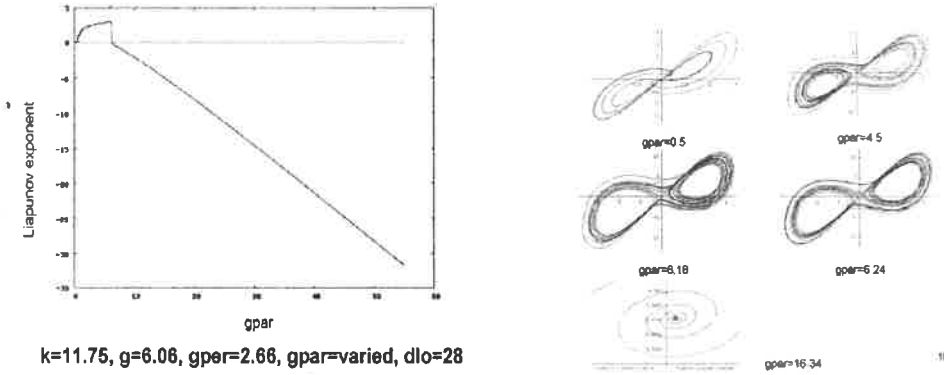
Şekil 4

Hopf çatallanmasında denge noktasından küçük genlik limit çevrimi çatallanır. İlk Lyapunov katsayısı çatallanmanın kritik üstü veya kritik altı olduğunu belirlediğinden önem taşımaktadır. Hopf çatallanması kestiriminin geçerliliği orijinal lazer denklemleri ile Şekil 4'deki g parametresinin değişken alındığında elde edilmiş verinin çatallanma şemalarını karşılaştırarak incelenebilir. Hopf çatallanma noktalarından periyodik çözümlerin tüm dallanmalar için açılımlarının elde edilmesi farklı rejimlerin farklı sayısal durumları için ele alınmıştır. Bu şekillerde çekicinin e , d , p değerleri için Hopf ve dallanma noktaları görüldüğü yerlerde bir limit çevriminden bir eyer noktasına geçiş gözlemlenmiştir. ^{[2] [3]}



Şekil 5

$\gamma_{\perp}$ parametresinin değiştirilmesi $\gamma_{\parallel}$ gibi davranış gösterir. Başlangıç adımlarında her iki parametre de pozitif en büyük Lyapunov üsseline sahiptir ve iki parametre için de yaklaşık olarak aynı olan belli bir değerden sonra Şekil 5 ve Şekil 6'da görüldüğü gibi negatif Lyapunov üsselleri elde edilmektedir. Çekicilerin grafikleri pozitif ve negatif Lyapunov üsselleri ile tutarlıdır. Şekil 5 ve Şekil 6'da görüldüğü gibi Hopf noktasının ortaya çıktığı negatif Lyapunov üsseli rejiminde bir limit çevrimler ailesi bulunmaktadır.



Şekil 6

3. SONUÇLAR

Sonuç olarak, genellikle Helium-Neon Lazer için model olarak kullanılan Maxwell-Bloch sistemi çalışılmıştır. Bu sistem parametrelerinin bir fonksiyonu cinsinden zengin bir yapıya sahiptir. Bu sistemin değişik türlerde kararsızlığa sahip olduğu gösterilmiştir. Lyapunov spektrumu bir negatif reel değer ile özdeğerlerin kompleks eşlenik bir çiftinden oluşan lineerleştirilmiş sistemin özdeğerleri ile uyum içerisindedir. Bu parametreler Lorenz benzeri kaosu gözlemlendiği uzak kızılötesi lazerlere karşılık gelmektedir. Bu çalışma noktasından kaosa mümkün geçişi temsil eden çatallanma şeması MATCONT^[6] paketi ile çalışılmış ve bir çok durumda Hopf çatallanması görülmüştür. Her eleman için parametrelerin çeşitlilik göstermesinin değişiklikleri grafik olarak incelenirken bir pozitif en büyük Lyapunov üsseli ile ispat edilen kaotik davranışın görüldüğü bir çalışma noktasına önem verilerek bunun civarı araştırılmıştır. Bununla beraber bu davranış parametrelerin değişimine karşı duyarlıdır ve süratle kararlı duruma geçer. Her bir parametre değiştirildiğinde kaotik davranışa geçiş gözlemlenmektedir. Bu işlem noktasında birçok Hopf çatallanması örneği belirlenmiştir. İşlem noktası He-Ne lazerde çalışılmış olan kaotik davranış için parametre aralığının limitleri dahilindedir.

KAYNAKLAR

1. F. T. Arecchi. Chaos and Generalized Multistability in Quantum Optics. In A.F. Round, editor, Physica Scripta, 85-92, 1985.
2. Thomas Erneux, Braza P. Singular Hopf Bifurcation to unstable periodic solutions in NMR Laser. Physics Letters A, Vol. 40,5, 1989.
3. Thomas Erneux,Kozyre® G, editor. Nearly Vertical Hopf Bifurcation for a Passively Q-Switched Microchip Laser. Vol. 101, 2000.
4. H.Haken. Light, Volume 2, 1985.

5. P. Grassberger, editor. Non-linear time sequence Analysis. Int. J. Bifurcation and Chaos, pages 521, 1991.
6. A. Dhooge, W. Govaerts, Yu.A. Kuznetsov, W. Mestrom, A.M. Riet and B. Sautois,. MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in matlab. Ghent and Utrecht Universities Preprint, 2006.
7. A.Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano. Routes to chaotic emission in a cw He- Ne Laser. Physics Letters A, Vol. 28,2, 1983.
8. A.Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica D, pages 285-317, 1985.