

142587

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOK GRUPLU DİFÜZYON/EK DİFÜZYON SONLU
ELEMENLAR HESAPLARININ PERTÜRBASYON
TEORİSİNDE KULLANILMASI**

142587

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Lis. Sibel KALUÇ
(304991049)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Mayıs 2003

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Bilge ÖZGENER

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Cemal YILDIZ

Doç.Dr. Özcan KALENDERLİ

**İ.T. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında yardımlarını ve zamanını esirgemeyen, üzerimde çok emeği bulunan, kişiliğini, engin bilgisini ve sabrını takdir ettiğim değerli danışman hocam Doç. Dr. Bilge Özgener'e çok teşekkür ederim. Ayrıca yardımları ve ilgisi için Prof. Dr. Atilla Özgener'e de teşekkürü bir borç bilirim.

Şair Behçet Kemal Çağlar İlköğretim Okulu Müdürü sayın Talat Günday'a da hoşgörüsü için teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman beni destekleyen aileme, özellikle anneme sonsuz teşekkürler.

Mayıs, 2003

Sibel KALUÇ

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEORİ	5
2.1. PERTÜRBASYON TEORİSİ	5
2.1.1. Ek Operatörler	6
2.1.1.a. Tek Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler	6
2.1.1.b. Çok Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler	8
2.1.2. Tek Gruplu Pertürbasyon Teorisi	10
2.1.3. Çok Gruplu Pertürbasyon Teorisi	14
2.1.4. İki Gruplu Pertürbasyon Teorisi	16
2.1.5. Ek Akının Fiziksel Yorumu	17
2.2. FİSYON KAYNAĞI İTERASYONU VE GRUP İÇİ NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMLERİ	19
2.3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN GRUP İÇİ NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASI	21
2.3.1. Kaynak Vektörü Hesabı	30
2.3.1.a. Saçılma Kaynağı Hesabı	30
2.3.1.b. Fisyon Kaynağı Hesabı	32
2.3.1.c. Serbest Kaynak Hesabı	33
2.4. SONLU ELEMANLAR SONUÇLARININ PERTÜRBASYON TEORİSİNDE KULLANILMASI	35
2.4.1. Pertürbasyon Teorisinde Difüzyon Sabiti Teriminin Simetrizasyonu	38
2.4.1.a. Lineer Elemanlar	39
2.4.1.b. Kuadratik Elemanlar	39
2.4.1.c. Kübik Elemanlar	40
2.4.1.d. Kuartik Elemanlar	41

2.4.2. Çıkarma, Saçılma ve Fisyon Tesir Kesitlerindeki Pertürbasyon	42
2.4.2.a. Lineer Elemanlar	42
2.4.2.b. Kuadratik Elemanlar	42
2.4.2.c. Kübik Elemanlar	43
2.4.2.d. Kuartik Elemanlar	44
3. UYGULAMALAR	45
3.1. TEK GRUPLU ÇIPLAK HOMOJEN SİSTEM	45
3.1.1. Difüzyon Teorisi ve Pertürbasyon Teorisi Reaktivite Öngörülerinin Karşılaştırılması	45
3.1.2. Pertürbasyonun Yerinin Değişmesinin Reaktivite Üzerindeki Etkisinin İncelenmesi	56
3.2. İKİ GRUPLU ÇIPLAK HOMOJEN SİSTEM	60
3.3. TRIGA MARK-II REAKTÖRÜ REAKTİVİTE HESAPLARI	72
3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	78
KAYNAKLAR	79
EKLER	80
EK A. PERTURB PROGRAMININ TANITIMI	80
Ek A.1. Perturb Programındaki Alt Programların Açıklaması	80
Ek A.2. Perturb Programının Giriş Verileri	81
EK B. TRIGA REAKTÖRÜ AKI VE EK AKI DAĞILIMLARI	83
EK C. PERTURB PROGRAMI	92
ÖZGEÇMİŞ	93

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Lagrange şekil fonksiyonları.....	25
Tablo 3.1. $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ ve $R_0 = R/20$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.....	50
Tablo 3.2. $\delta\Sigma_a = 0,007574$ ve $R_0 = R/20$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.....	52
Tablo 3.3. $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ ve $R_0 = R/10$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.....	54
Tablo 3.4. $\delta\Sigma_a = 0,007574$ ve $R_0 = R/10$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.....	54
Tablo 3.5. $10,22 \text{ cm}^2$ alanlı eş merkezli pertürbasyon sonuçları.....	57
Tablo 3.6. $44,88 \text{ cm}^2$ alanlı eş merkezli pertürbasyon sonuçları.....	58
Tablo 3.7. İki gruplu homojen sistemin tesir kesitleri.....	60
Tablo 3.8. İki gruplu çıplak homojen sistem sonuçları.....	69
Tablo.3.9. Homojenleştirilmiş eleman hızlı grup tesir kesitleri.....	73
Tablo.3.10. Homojenleştirilmiş eleman termal grup tesir kesitleri.....	73
Tablo.3.11. Triga hızlı grup homojenleştirilmiş halka tesir kesitleri.....	74
Tablo.3.12. Triga termal grup homojenleştirilmiş halka tesir kesitleri.....	74
Tablo.3.13. Herhangi bir halkadan bir yakıt elemanı çıkartılması halinde homojenleştirilmiş hızlı grup tesir kesitleri.....	75
Tablo.3.14. Herhangi bir halkadan bir yakıt elemanı çıkartılması halinde homojenleştirilmiş termal grup tesir kesitleri.....	75
Tablo.3.15. Halkadan yakıt çıkartılması halinde etkin çoğaltma katsayısı ve reaktivite değişim değerleri.....	76

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1	: Sistemin sonlu elemanlara ayrılması.....	22
Şekil 2.2	: i. eleman içindeki düğüm sayısı.....	23
Şekil 2.3	: Örnek bir sonlu eleman ızgarasında yerel ve genel numaralandırmanın gösterimi.....	28
Şekil 3.1	: $R_0 = R/20$, $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.....	50
Şekil 3.2	: $R_0 = R/20$, $\delta\Sigma_a = 0,007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.....	53
Şekil 3.3	: $R_0 = R/10$, $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.....	55
Şekil 3.4	: $R_0 = R/10$, $\delta\Sigma_a = 0,007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.....	56
Şekil 3.5	: $10,22 \text{ cm}^2$ alanlı eş merkezli bölgelerde reaktivite değişimlerinin ortalama yarıçapa göre dağılımları.....	58
Şekil 3.6	: $44,88 \text{ cm}^2$ alanlı eş merkezli bölgelerde reaktivite değişimlerinin ortalama yarıçapa göre dağılımları.....	59
Şekil 3.7	: Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin hızlı grup akı dağılımları.....	70
Şekil 3.8	: Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin termal grup akı dağılımları.....	70
Şekil 3.9	: Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin hızlı grup ek akı dağılımları.....	71
Şekil 3.10	: Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin termal grup ek akı dağılımları.....	71
Şekil 3.11	: İTÜ Triga Mark-II reaktörü kalp düzeni.....	72
Şekil B.1	: Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları.....	83
Şekil B.2	: Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları.....	83
Şekil B.3	: Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları.....	84
Şekil B.4	: Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları.....	84
Şekil B.5	: Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları.....	85
Şekil B.6	: Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları.....	85
Şekil B.7	: Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları.....	86
Şekil B.8	: Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları.....	86
Şekil B.9	: Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları.....	87

Şekil B.10 : Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları.....	87
Şekil B.11 : Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları.....	88
Şekil B.12 : Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları.....	88
Şekil B.13 : Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları.....	89
Şekil B.14 : Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları.....	89
Şekil B.15 : Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları.....	90
Şekil B.16 : Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları.....	90
Şekil B.17 : Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları.....	91
Şekil B.18 : Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları.....	91
Şekil B.19 : Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları.....	92
Şekil B.20 : Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları.....	92

SEMBOL LİSTESİ

ρ	: Reaktivite
$\Delta\rho$	: Reaktivitedeki değişim
k_{etk}	: Etkin çoğaltma katsayısı
ϕ_g	: g'inci grup nötron akısı
ϕ_g^+	: g'inci grup nötron ek akısı
D	: Difüzyon sabiti
Σ_a	: Yutma tesir kesiti
Σ_r	: Çıkartma tesir kesiti
Σ_f	: Fisyon tesir kesiti
$\Sigma_{s,g \leftarrow g'}$	: g' 'üncü gruptan g'inci gruba saçılma tesir kesiti
χ_g	: Fisyonda yayınlanan bir nötronun g'inci gruba ait olma olasılığı
ν_g	: g'inci grup nötronları tarafından yol açılan fisyonlarda yayınlanan ortalama nötron sayısı
B_g^2	: Geometrik akı bükümü
L	: Difüzyon uzunluğu

ÇOK GRUPLU DİFÜZYON/EK DİFÜZYON SONLU ELEMANLAR HESAPLARININ PERTÜRBASYON TEORİSİNDE KULLANILMASI

ÖZET

Yetkin olarak çalışan bir nükleer sistemde küçük bir değişiklik (pertürbasyon) yapılması halinde, sistem alt ya da üst yetkin hale gelecektir. Bu durumda oluşan reaktivite değişimi, pertürbe edilmiş sistem için fisyon kaynağı iterasyonu yoluyla yeni etkin çoğaltma katsayısının hesaplanmasıyla saptanabilir. Ancak fisyon kaynağı iterasyonunun külfetli bir işlem olması nedeni ile, reaktivite değişimini sadece yetkin sistemin akı ve ek akı dağılımlarını kullanarak hesaplayabilen pertürbasyon teorisi yaklaşımı, yapılan değişimin küçük olması halinde tercih edilmektedir. Bu çalışma, çok gruplu difüzyon denklemlerini tek boyutlu silindirselsel bir model çerçevesinde çözerek nükleer sistemlerin etkin çoğaltma katsayıları ile grup akı ve ek akı dağılımlarını sonlu elemanlar yaklaşımı ile çözme yeteneğine sahip bir bilgisayar programına dayandırılmıştır. Bir ile dördüncü derece arasında Lagrange tipi sonlu elemanlar kullanarak çözüm üreten bu programı, bir kez özgün, bir kez de pertürbe edilmiş nükleer sistem için çalıştırıp, elde edilen iki etkin çoğaltma katsayısını kullanarak reaktivite değişimini hesaplamak; yani çok gruplu difüzyon teorisinin reaktivite değişim öngörüsünü saptamak olanaklıdır.

Pertürbasyon teorisi yaklaşımının, bu reaktivite değişimini, yaklaşım oluşturduğu çok gruplu difüzyon teorisine göre hangi duyarlılıkla hesaplayabildiğini saptamak amacıyla; sözünü ettiğimiz sonlu elemanlar programına sadece özgün nükleer sistemin akı, ek akı ve etkin çoğaltma katsayısı ile girdilene pertürbasyonun çok gruplu difüzyon teorisi sabitlerinde yol açtığı değişimleri kullanarak pertürbasyon teorisinin öngördüğü reaktivite değişimini hesaplayabilen alt programlar eklenmiştir. Oluşturulan geliştirilmiş programa PERTURB adı verilmiş; bu program aracılığı ile herhangi bir pertürbasyon için, hem çok gruplu difüzyon teorisinin reaktivite değişim öngörüsü, hem de buna yaklaşım olan pertürbasyon teorisinin reaktivite değişim öngörüsü hesaplanabilmektedir.

İlk ele alınan problem çıplak, homojen, silindirselsel bir nükleer sistemin merkezine yapılan silindirselsel pertürbasyonun tek gruplu difüzyon teorisi ile hesabıdır. Bu problemde oluşan reaktivite değişimi analitik olarak hesaplanabildiği için, PERTURB programınca üretilen difüzyon teorisi ve pertürbasyon teorisi reaktivite değişim öngörülerinin analitik çözüme göre yüzde hatalarını hesaplamak olanağı bulunmuştur. Bu problem çıktıları incelenerek, sonlu elemanlar ızgarası inceltildikçe, çok gruplu difüzyon sayısal sonuçlarının analitik sonuçlara yakınsadığı; pertürbasyon teorisi sonuçlarının yüzde hatalarının beklendiği şekilde pertürbasyon hacmi ya da tesir kesitlerindeki değişim arttırıldıkça ve de pertürbasyonun yeri merkeze yaklaştırıldıkça artış gözlemlendiği saptanmıştır. Tek gruplu difüzyon teorisinde akı ve ek akı özdeş

olduğundan, akı ile ek akının farklı kavramlar olarak ortaya çıktığı en basit teori olan iki gruplu difüzyon teorisi, PERTURB programının doğrulanması için ele alınan ikinci problemin temel modeli olarak seçildi. İki gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde yine çıplak, homojen silindirselsel bir bölgede pertürbasyon uygulandığı varsayıldı. Bu problem için de analitik çözüm türetilerek PERTURB programının ürettiği sayısal iki gruplu difüzyon teorisi ve pertürbasyon teorisi sonuçlarının irdelenmesi yapıldı. Elde edilen sonuçların, tek gruplu teori çerçevesinde elde edilenlerle paralellik gösterdiği gözlemlendi. Ele alınan son problemde İTÜ Enerji Enstitüsü'ndeki TRIGA Mark-II reaktörünün, tek boyutlu silindirselsel bir modeli kullanıldı. A, B, C, D, E, F halkaları ve radyal grafit yansıtıcıdan oluşan yedi eşmerkezli homojen silindirselsel bölge ile modellenen reaktörün sırasıyla B, C, D ve E halkalarından bir yakıt çubuğunun çıkartılarak, yerinin su ile doldurulduğu varsayılp, bu oluşumun yol açtığı reaktivite değişimi PERTURB programı kullanılarak, hem iki gruplu difüzyon teorisi hem de pertürbasyon teorisi bağlamında elde edildi. Elde edilen sonuçlar irdelenerek çalışma tamamlandı.



UTILIZATION OF MULTI GROUP DIFFUSION AND ADJOINT DIFFUSION FINITE ELEMENT CALCULATIONS IN PERTURBATION THEORY

SUMMARY

When a small change (perturbation) is introduced to an operating critical nuclear system, the system would become either sub or supercritical. The consequent change in reactivity could be calculated by computing the effective multiplication factor of the perturb system by a new fission source iteration. Since a new fission source iteration is usually a lengthy endeavor, the use of the perturbation theory in, which uses only the flux and adjoint flux of the critical system, is preferred in determining the change in reactivity provided that the introduced change is small. This work is based on a computer program which can determine the effective multiplication factor; group flux and adjoint flux distributions of one dimensional cylindrical systems within the context of multigroup diffusion theory. Using the program, which was Lagrangian type finite elements up to degree four, we can calculate the effective multiplication factor of both the original and perturb nuclear systems and calculate the change in reactivity as predicted to the multigroup diffusion theory.

To assess how accurate as compared to multigroup diffusion theory to which it constitutes an approximation, the perturbation theory predicts the change in reactivity, we have added to the computer program mentioned above a number of subprograms that can calculate the reactivity change prediction of the perturbation theory using only the flux, adjoint flux, effective multiplication factor of the original system and the change in the multigroup theory constants due to the perturbation. The developed new program is called PERTURB and we can calculate the predicted change in reactivity both the multigroup diffusion theory and perturbation theory for any perturbation.

The first problem we considered the calculations about a cylindrical shaped perturbation to the center of a bare, homogeneous cylindrical reactor, treated with one group diffusion theory. Since the change in reactivity can be determined analytically for this problem, per cent errors associated with the reactivity change predictions by both multigroup diffusion theory and perturbation theory as calculated by PERTURB could be calculated. When the outputs for this problem are studied, it is found that the numerical results of the multigroup diffusion theory converges to the analytical results as the finite element mesh is refined, the per cent errors associated with the perturbation theory results increase as the perturbation volume, perturbation in multigroup constants increase or as the perturbation is moved towards the center. Since the flux and adjoint flux are identical in one group diffusion theory, two group theory, which is the simplest theory where flux and adjoint flux arise as different concepts, is taken as the model for the second problem we considered. We have assumed again that a cylindrical

perturbation is introduced to the central cylindrical region of a bare, homogeneous cylindrical reactor treated by the two group diffusion this time. We have assessed the results obtained by PERTURB using both multigroup diffusion and perturbation theories by comparison with that analytical solutions we have obtained. The conclusions we have reached are parallel to those which we have reached during the assessment of the one group theory problem. Last problem we have considered is one dimensional cylindrical model of the TRIGA Mark-II reactor at the Institute of Energy of Istanbul Technical University. The reactor is modelled as consisting of seven concentric homogeneous cylindrical rings which correspond to the A, B, C, D, E, F rings and the radial reflector of the TRIGA reactor. Then it is assumed that a fuel element removed from B, C, D, E, and F rings respectively and is replaced by water follower. The reactivity worth of this changes are calculated using PERTURB by both two group diffusion and perturbation theories. The results obtained are assessed and the present work is completed.

I. GİRİŞ

Nükleer reaktörlerin yetkinlik durumunun ifade edilmesi için kullanılan başlıca kavram etkin çoğaltma katsayısıdır. Etkin çoğaltma katsayısı, kuramsal olarak, salt nükleer sistemin yapısına ve malzeme özelliklerine bağlı olup, sistem içindeki nötron sayısından büyük ölçüde bağımsızdır. Nükleer sistemlerin etkin çoğaltma katsayısının öngörülmesi, nötron nüfusunun zaman içindeki evrimini betimleyen bir denklem sisteminin (örneğin çok gruplu transport veya difüzyon denklemleri) sayısal olarak çözümünü gerektirmektedir. Bu sayısal çözümde etkin çoğaltma katsayısı, özdeğer; nötron akı dağılımı da özvektör olarak yer almakta ve sayısal çözüm, sayısal analizde güç iterasyonu [1] olarak bilinen yöntemin bir çeşitlemesi olan fisyon kaynağı iterasyonu ile gerçekleştirilmektedir. Fisyon kaynağı iterasyonu [2], özellikle uzaysal ve yönsele ayrıklaştırmada yüksek duyarlılıklı bir model seçilmişse, bilgisayar kaynaklarının kullanımı açısından külfetli bir yöntemdir.

Çalışmakta olan bir nükleer sistemde çeşitli nedenlerle (bir deney yapma, yeni bir aygıt indirme gibi) küçük değişimler yapılması olağandır. Kuramsal olarak bu tür küçük değişimler yapmadan önce, küçük de olsa değiştirilmiş sistem için yeni bir fisyon kaynağı iterasyonu yaparak yeni etkin çoğaltma katsayısının hesaplanması ve böylece yeni yetkinlik durumunun belirlenmesi gerekir. Ancak fisyon kaynağı iterasyonu külfetli bir işlem olabildiğinden, değişimin küçük olması halinde, sistemin yeni yetkinlik durumunun fisyon kaynağı iterasyonu yapılmadan yaklaşık yöntemlerle belirlenmesi tercih edilmektedir. Küçük bir değişime (pertürbasyona) uğramış bir nükleer sistemin, yeni yetkinlik durumunun (yani yeni etkin çoğaltma katsayısının) yeni bir fisyon kaynağı iterasyonu yapmadan yaklaşık belirlenmesini sağlayan başlıca yöntem pertürbasyon teorisidir. Nükleer reaktör teorisinin ilk geliştiği yıllarda, kuantum fiziği konusundan o zaman yeni sayılan reaktör teorisi konusuna geçen fizikçiler daha önce kuantum mekaniği için geliştirilmiş olan pertürbasyon teorisinin reaktör teorisi sahasına da uygulanmasını sağlamışlardır.

Pertürbasyon teorisi [3], ancak nükleer sistemde yapılan değişimin küçük olması halinde değişimden sonraki yetkinlik durumunu yeterli duyarlılıkta

öngörebilmektedir. Değişimin küçük olmaması halinde (kontrol çubuğu indirilmesi gibi), pertürbasyon teorisi [4], yetkinlik durumunu gereken duyarlılıkla hesaplama yeteneğine sahip değildir. Bu durumda mutlaka yeni bir fisyon kaynağı iterasyonu gerekli olmaktadır.

Pertürbasyon teorisi, ister transport isterse difüzyon modeli kullanılsın, küçük değişim halinde yeni yetkinlik durumunu öngörebilmektedir. Pertürbasyon teorisi, tek gruplu olduğu gibi, çok gruplu modellerin esas alınması halinde de, kullanılabilen bir yaklaşımdır. Pertürbasyon teorisinin kullanılabilmesi için özgün (yani değişime uğramamış, pertürbe edilmemiş) sistemin etkin çoğaltma katsayısının, grup akı dağılımının ve grup ek akı dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Her ne kadar tek gruplu teoride akı ve ek akı dağılımları özdeş kavramlarsa da, birden fazla grup kullanılması halinde bu özdeşlik geçerliliğini yitirmekte; özgün sistemin grup ek akı dağılımlarının belirlenmesi pertürbasyon teorisinin kullanılabilmesi için gerek koşul haline gelmektedir. Ancak özgün sistemin akı ve ek akı dağılımı bir kez belirlendikten sonra her küçük değişim için pertürbasyon teorisi ile, fisyon kaynağı iterasyonu külfetinden bağımsız olarak, yeni yetkinlik durumu belirlenebilmektedir [5].

Bu çalışmada nükleer sistemi betimleyen model olarak çok gruplu difüzyon teorisi seçilmiş; sistem geometrisi tek boyutlu silindrisel geometri ile sınırlandırılmıştır. Bu kapsamda çok gruplu difüzyon denklemlerinin ve çok gruplu ek difüzyon denklemlerinin sayısal çözümü için Galerkin yöntemine dayanan bir sonlu elemanlar yaklaşımı [6] kullanılmıştır. Kullanılan bilgisayar programı, fisyon kaynağı ile etkin çoğaltma katsayısını belirlerken istenirse grup akılarını, istenirse ek grup akılarını ya da her ikisini birden hesaplama yeteneğine sahiptir [7]. Sonlu elemanlar hesabı sonucu elde edilen noktasal akı ve ek akı değerlerinin, sonlu elemanlar yönteminde varsayılan fonksiyonel bağımlılıklarını kullanarak pertürbasyon teorisinde yer alan integrallerin hesabını gerçekleştiren bir program geliştirilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemiyle, çok gruplu difüzyon veya ek difüzyon denklemlerini fisyon kaynağı iterasyonu ile çözme ve daha sonra elde edilen bu dağılımları kullanarak pertürbasyon teorisi hesabı yapma yeteneğine sahip program bu tez kapsamında geliştirilmiş ve FORTRAN diliyle yazılmış bu programa PERTURB adı verilmiştir.

Geliştirilen programın doğrulanması için ilk önce tek gruplu difüzyon teorisi modeli çerçevesinde çıplak, homojen bir sistem ele alınmış; bu sistemin küçük bir değişime

uğradığı varsayılmıştır. Sistemin basitliği nedeniyle, bu durumda hem özgün sistemin hem de değişime uğramış sistemin etkin çoğaltma katsayısının analitik olarak bulmak olanaklı olmuş; değişimin yol açtığı uyarım (reaktivite) değişimi de böylece analitik olarak hesaplanabilmiştir. Problemin tek gruplu teori çerçevesinde ele alınması nedeniyle ek akı, akıya özdeş olduğundan ayrıca ek akı hesabına bu problemde gerek olmamıştır. Sonlu elemanlar yöntemiyle, gerek özgün gerekse değişime uğramış sistem sayısal olarak çözülmüş; hesaplanan reaktivite değişiminin, ızgara incelidikçe, analitik değere yakınsadığı gözlenmiştir. Daha sonra PERTURB programı kullanılarak, bu problem için pertürbasyon teorisinin öngördüğü reaktivite değişimi hesaplanmıştır. Pertürbasyon teorisinin bir yaklaşım olması nedeniyle belli bir hata içerdiği saptanmış; ancak değişim küçük olunca önemsiz sayılabilecek bu hatanın değişimin büyütülmesi halinde pertürbasyon teorisi yaklaşımı geçersiz kalabilecek ölçüde önemli hale gelebildiği gözlenmiştir. Geliştirilen programın ek akı hesabını da içerecek şekilde sınanması için ele alınan ikinci problem; iki gruplu difüzyon teorisi modeli çerçevesinde ele alınan çıplak, homojen sistem olmuştur. Tıpkı ilk uygulamada olduğu gibi, bu problemde de sistemde küçük bir değişim yapıldığı varsayılmış ve yine özgün ve değişime uğramış sistem için ayrı ayrı iki gruplu difüzyon teorisi denklemleri analitik olarak çözülerek değişimin yol açtığı reaktivite değişimi analitik olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, ilk problemde olduğu gibi iki gruplu difüzyon teorisi ve pertürbasyon teorisi ile sayısal çözümler elde edilmiş; ilk problemde görülen sonuçları doğrulayan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Böylece, PERTURB programı çerçevesinde ek akı hesabı ile birlikte yapılan perturbasyon teorisi hesaplama yöntemi doğrulanmıştır.

Son uygulama olarak Enstitümüzde bulunan TRIGA Mark-II reaktörünün tek boyutlu bir modeli esas alınarak, iki gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde hesabı yapılmıştır. Sistemdeki A, B, C, D, E, F halkaları ile grafit yansıtıcı ayrı homojen bölgeler alınarak, yetkinlik hesaplanmıştır. Daha sonra sırası ile B, C, D, E ve F halkalarından bir yakıt çubuğu alındığı ve yerinin su ile doldurulduğu varsayılmış; ve her bir halka için bu değişimden sonraki yetkinlik durumu saptanmıştır. Hesaplanan bu iki etkin çoğaltma katsayısı kullanılarak yapılan değişimin yol açtığı reaktivite değişimi hesaplanmıştır. Daha sonra bu hesap pertürbasyon teorisi yaklaşımı çerçevesinde tekrarlanmış; difüzyon teorisiyle hesaplanan değerler, pertürbasyon

teorisi yaklaşımla hesaplanan değerlerle karşılaştırılarak, pertürbasyon teorisinin bu hesaplardaki duyarlılığı konusunda irdelene yapılmıştır.



II. TEORİ

II.1. PERTÜRBASYON TEORİSİ

Reaktör malzeme yapısında meydana gelen herhangi bir değişim, reaktörün etkin çoğaltma katsayısını değiştirir. Değişimden sonraki etkin çoğaltma katsayısı, k_{etk} , fisyon kaynağı iterasyonu ile bulunabilir. Ancak reaktörde meydana gelen değişim küçükse k_{etk} 'i yaklaşık olarak pertürbasyon teorisi ile hesaplamak daha kolaydır. Ancak pertürbasyon teorisinde genellikle k_{etk} yerine reaktivite (uyarım) kavramı kullanılır. Reaktivite, ρ , etkin çoğaltma katsayısı cinsinden

$$\rho = \frac{k_{etk} - 1}{k_{etk}} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Reaktörde küçük bir değişiklik (pertürbasyon) yapıldığı varsayılır ve değişimden sonraki büyüklükler üslü ifadelerle gösterilirse, reaktivitedeki değişim:

$$\Delta\rho = \rho' - \rho \quad (2.2)$$

$$\Delta\rho = \frac{k'_{etk} - 1}{k'_{etk}} - \frac{k_{etk} - 1}{k_{etk}} \quad (2.3)$$

$$\Delta\rho = \frac{1}{k_{etk}} - \frac{1}{k'_{etk}} \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir. Pertürbasyon teorisi denklemlerinin türetiminden önce tek ve çok grup difüzyon teorilerinde ek operatör tanımlamaları yapılması gerekmektedir [8]. Bu nedenle önce tek ve çok gruplu teorilerde ek operatörler tanımlanacak daha sonra pertürbasyon ifadeleri çıkarılacaktır.

II.1.1. Ek Operatörler

II.1.1.a. Tek Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler

V hacminde tanımlı, S dış yüzeyinde sıfır değeri alan ve kareleri hacim üzerinden integre edilebilir gerçel fonksiyonların oluşturduğu uzaya $H_0(V)$ uzayı denir. $f(\vec{r})$ ve $g(\vec{r})$ $H_0(V)$ uzayının birer elemanı ise bu iki fonksiyonun iç çarpımı:

$$(f, g) = \int_V f(\vec{r})g(\vec{r})dV \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. L bir operatör olmak üzere her f, g fonksiyon çifti için:

$$(f, Lg) = (L^+ f, g) \quad (2.6)$$

eşitliğini sağlayan L^+ operatörüne, L operatörünün ek operatörü denir. $L = L^+$ ise L kendine ek bir operatördür.

Tek gruplu teoride

$$M = -\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r})\vec{\nabla} + \Sigma_a(\vec{r}) \quad (2.7)$$

$$F = \nu\Sigma_f(\vec{r}) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanan operatörlerin ek operatörlerini bulmak için (2.6) ifadesinden yararlanılır. F operatörü için

$$(f, Fg) = \int_V f(\vec{r})\nu\Sigma_f(\vec{r})g(\vec{r})dV \quad (2.9)$$

$$(f, Fg) = \int_V \nu\Sigma_f(\vec{r})f(\vec{r})g(\vec{r})dV \quad (2.10)$$

$$(f, Fg) = (F^+ f, g) \quad (2.11)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğe göre $F^+ = \nu\Sigma_f(\vec{r}) = F$ olduğuna göre F operatörü kendine ektir.

M operatörü için yazılan

$$(f, Mg) = \int_V f(\vec{r}) [-\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} + \Sigma_a(\vec{r})] g(\vec{r}) dV \quad (2.12)$$

eşitliğinde ilk teriminde $a = f(\vec{r})$, $\vec{b} = D(\vec{r}) \vec{\nabla} g(\vec{r})$ olarak seçilip,

$$\vec{\nabla} \cdot a \vec{b} = a \vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a \quad (2.13)$$

özdeşliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} (f, Mg) &= \int_V \vec{\nabla} \cdot [f(\vec{r}) (-D(\vec{r}) \vec{\nabla} g(\vec{r}))] dV - \int_V \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot [-D(\vec{r}) \vec{\nabla} g(\vec{r})] dV \\ &\quad + \int_V \Sigma_a(\vec{r}) f(\vec{r}) g(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitliği yazılabilir. Buradaki ikinci terime de (2.13) özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} (f, Mg) &= \int_V \vec{\nabla} \cdot [f(\vec{r}) (-D(\vec{r}) \vec{\nabla} g(\vec{r}))] dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot g(\vec{r}) [-D(\vec{r}) \vec{\nabla} f(\vec{r})] dV \\ &\quad + \int_V g(\vec{r}) [-\vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}) \vec{\nabla} f(\vec{r}))] dV + \int_V \Sigma_a(\vec{r}) f(\vec{r}) g(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (2.15)$$

ifadesi elde edilir. Bunun yanı sıra

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) dV = \int_S \vec{e}_s \cdot \vec{A}(\vec{r}_s) dS \quad (2.16)$$

olarak verilen Gauss (Diverjans) Teoremi [5], (2.15) ifadesine uygulandığında:

$$\begin{aligned} (f, Mg) &= \int_S \vec{e}_s \cdot [f(\vec{r}) (-D(\vec{r}) \vec{\nabla} g(\vec{r})) - g(\vec{r}) (-D(\vec{r}) \vec{\nabla} f(\vec{r}))] dS \\ &\quad + \int_V [-\vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}) \vec{\nabla} f(\vec{r})) + \Sigma_a(\vec{r}) f(\vec{r})] g(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (2.17)$$

elde edilir. Yüzey integralinin, $f(\vec{r})$ ve $g(\vec{r})$ fonksiyonlarının sistemin dış yüzeyinde sıfır olmasından dolayı, sıfıra eşit olduğu görülür. Bu durumda:

$$(f, Mg) = (M^+ f, g) \quad (2.18)$$

ifadesinden $M^+ = M$ olduğu görülmektedir.

$$M^+ = -\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} + \Sigma_a(\vec{r}) = M \quad (2.19)$$

O halde M operatörü de kendine ek bir operatördür.

II.1.1.b. Çok Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler

Elemanları $H_0(V)$ uzayında yer alan fonksiyonlardan oluşan G boyutlu vektör uzayına $L^G[H_0(V)]$ uzayı denir. $\underline{f} \in L^G[H_0(V)]$ ve $f_g(\vec{r}) \in H_0(V)$ ($g = 1 \dots G$) olmak üzere

$$\underline{f}^T(\vec{r}) = [f_1(\vec{r}) \dots f_g(\vec{r}) \dots f_G(\vec{r})] \quad (2.20)$$

şeklinde. $L^G[H_0(V)]$ uzayında tanımlı iki vektörün iç çarpımı aşağıda verilmektedir [8].

$$(\underline{f}, \underline{h}) = \int_V \underline{f}^T \underline{h} dV \quad (2.21)$$

$$(\underline{f}, \underline{h}) = \sum_{g=1}^G \int_V f_g(\vec{r}) h_g(\vec{r}) dV \quad (2.22)$$

$$(\underline{f}, \underline{h}) = \sum_{g=1}^G (f_g, h_g) \quad (2.23)$$

Çok gruplu teoride $\underline{L}$, G boyutlu bir operatör olmak üzere

$$(\underline{L}^+ \underline{f}, \underline{h}) = (\underline{f}, \underline{L} \underline{h}) \quad (2.24)$$

eşitliğini her $\underline{f}$, $\underline{h}$ vektör çifti için sağlayan $\underline{L}$ operatörünün ek operatörü $\underline{L}^+$ olarak tanımlanır.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & \dots & l_{1g'} & \dots & l_{1G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_{g1} & \dots & l_{gg'} & \dots & l_{gG} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_{G1} & \dots & l_{Gg'} & \dots & l_{GG} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$\underline{\underline{L}}$ matrisyel operatörünün elemanlarının $l_{gg'}$, $g = 1, \dots, G$ ve $g' = 1, \dots, G$ için $H_0(V)$ uzayında iş gören kendine ek operatörler olduğunu varsayalım. Bu durumda:

$$(\underline{f}, \underline{\underline{L}}h) = \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_V f_g(r) [l_{gg'} h_{g'}(r)] dV \quad (2.26)$$

$$(\underline{f}, \underline{\underline{L}}h) = \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G (f_g, l_{gg'} h_{g'}) \quad (2.27)$$

$l_{gg'}$ kendine ek bir operatör olduğuna göre

$$(\underline{f}, \underline{\underline{L}}h) = \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G (l_{gg'} f_g, h_{g'}) \quad (2.28)$$

ifadesi yazılabilir. İndislerin adı değiştirildiğinde ise son eşitlik:

$$(\underline{f}, \underline{\underline{L}}h) = \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G (l_{g'g} f_{g'}, h_g) \quad (2.29)$$

olarak yazılabilir. Öte yandan;

$$(\underline{\underline{L}}^+ \underline{f}, h) = \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G (l_{gg'}^+ f_{g'}, h_g) \quad (2.30)$$

şeklindedir. O halde (2.24) eşitliğinin sağlanması için $l_{gg'}^+ = l_{g'g}$ olması gerekmektedir. Bu durumda $\underline{\underline{L}}^+ = \underline{\underline{L}}^T$ olduğu sonucu çıkar. Öyleyse çok gruplu difüzyon teorisinde

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & & & & \\ -\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} & -\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,2} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ -\Sigma_{s,g \leftarrow 1} & -\Sigma_{s,g \leftarrow 2} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} + \Sigma_{r,g} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -\Sigma_{s,G \leftarrow 1} & -\Sigma_{s,G \leftarrow 2} & \dots & -\Sigma_{s,G \leftarrow g} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot D_G \vec{\nabla} + \Sigma_{r,G} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_1 \nu_g \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_1 \nu_G \Sigma_{f,G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_g \nu_1 \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_g \nu_g \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_g \nu_G \Sigma_{f,G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_G \nu_1 \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_G \nu_g \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_G \nu_G \Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

olarak ifade edilen bu operatörlerin elemanlarının kendine ek olduğunu tek gruplu teori operatörlerini sunarken göstermiştik. Buna göre bu matrisyel operatörlerin ek operatörleri devriklerine eşittir. Böylece:

$$\underline{\underline{M}}^+ = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla}.D_1\vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} & \cdots & -\Sigma_{s,g\leftarrow 1} & \cdots & -\Sigma_{s,G\leftarrow 1} \\ & -\vec{\nabla}.D_2\vec{\nabla} + \Sigma_{r,2} & \cdots & -\Sigma_{s,g\leftarrow 2} & \cdots & -\Sigma_{s,G\leftarrow 2} \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & & -\vec{\nabla}.D_g\vec{\nabla} + \Sigma_{r,g} & \cdots & -\Sigma_{s,G\leftarrow g} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & -\vec{\nabla}.D_G\vec{\nabla} + \Sigma_{r,G} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\underline{\underline{F}}^+ = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_g \nu_1 \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_G \nu_1 \Sigma_{f,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 \nu_g \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_g \nu_g \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_G \nu_g \Sigma_{f,g} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 \nu_G \Sigma_{f,G} & \cdots & \chi_g \nu_G \Sigma_{f,G} & \cdots & \chi_G \nu_G \Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

yazılabilir.

II.1.2. Tek Gruplu Pertürbasyon Teorisi

(2.7) ve (2.8) ifadeleriyle tanımlanan M ve F operatörleri kullanılarak yetkinlik özdeğer denklemi:

$$M\phi = \frac{1}{k_{etk}} F\phi \quad (2.35)$$

olarak yazılır. Değişimden sonraki yetkinlik özdeğer denklemi ise:

$$M'\phi' = \frac{1}{k'_{etk}} F'\phi' \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Tesir kesitlerinin hepsinde küçük bir değişim olduğu varsayılırsa tesir kesitleri:

$$D'(\vec{r}) = D(\vec{r}) + \delta D(\vec{r}) \quad (2.37)$$

$$\Sigma'_a(\vec{r}) = \Sigma_a(\vec{r}) + \delta \Sigma_a(\vec{r}) \quad (2.38)$$

$$\nu \Sigma'_f(\vec{r}) = \nu \Sigma_f(\vec{r}) + \delta \nu \Sigma_f(\vec{r}) \quad (2.39)$$

olarak, değişim sonrası operatörler de:

$$M' = M + \delta M \quad (2.40)$$

$$M' = -\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} + \Sigma_a(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \delta D(\vec{r}) \vec{\nabla} + \delta \Sigma_a(\vec{r}) \quad (2.41)$$

$$F' = F + \delta F \quad (2.42)$$

$$F' = \nu \Sigma_f(\vec{r}) + \delta \nu \Sigma_f(\vec{r}) \quad (2.43)$$

olarak yazılabilir. Bu tanımlamalarla değişimden sonraki yetkinlik özdeğer problemi:

$$(M + \delta M)\phi' = \frac{1}{k'_{etk}} (F + \delta F)\phi' \quad (2.44)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.44) denklemi ϕ ile çarpılır ve sistem hacmi üzerinden integre edilirse,

$$(\phi, M\phi') + (\phi, \delta M\phi') = \frac{1}{k'_{etk}} [(\phi, F\phi') + (\phi, \delta F\phi')] \quad (2.45)$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki ilk terimler, tek grup operatörlerinin kendine ek olduğunu da göz önünde bulundurarak (2.6) ifadesine göre düzenlenirse,

$$(\phi, M\phi') = (M\phi, \phi') = \frac{1}{k'_{etk}} (F\phi, \phi') \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{k'_{etk}}(\phi, F\phi') = \frac{1}{k'_{etk}}(F\phi, \phi') \quad (2.47)$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler yerlerine yazılırsa:

$$\left(\frac{1}{k'_{etk}} - \frac{1}{k'_{etk}} \right) (F\phi, \phi') = \frac{1}{k'_{etk}} (\phi, \delta F\phi') - (\phi, \delta M\phi') \quad (2.48)$$

ifadesi elde edilir. (2.4) denklemi kullanılarak, (2.48) düzenlenirse:

$$\Delta\rho = \frac{(\phi, \delta F / k'_{etk} \phi') - (\phi, \delta M\phi')}{(\phi', F\phi)} \quad (2.49)$$

şeklinde ya da açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta\rho = \frac{\int_V [\delta v \Sigma_f(\vec{r}) / k'_{etk} - \delta \Sigma_a(\vec{r})] \phi(\vec{r}) \phi'(\vec{r}) dV + \int_V \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \delta D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi'(\vec{r}) dV}{\int_V v \Sigma_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \phi'(\vec{r}) dV} \quad (2.50)$$

Payın ikinci teriminde (2.13) denklemi kullanılarak:

$$\int_V \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \delta D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi'(\vec{r}) dV = - \int_V \delta D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \phi'(\vec{r}) dV \quad (2.51)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Delta\rho = \frac{\int_V [\delta v \Sigma_f(\vec{r}) / k'_{etk} - \delta \Sigma_a(\vec{r})] \phi(\vec{r}) \phi'(\vec{r}) dV - \int_V \delta D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \phi'(\vec{r}) dV}{\int_V v \Sigma_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \phi'(\vec{r}) dV} \quad (2.52)$$

k'_{etk} ve $\phi'(\vec{r})$ değerlerinin de bulunduğu bu ifade tam doğru olmasına karşılık işe yaramaz. Çünkü bu ifade ile reaktivite değişiminin hesaplanabilmesi için yeni etkin çoğaltma katsayısı, k'_{etk} ve yeni akı dağılımı, ϕ' 'nün hesaplanmış olması gerekir. Halbuki pertürbasyon teorisi kullanmanın tek yararı yeni bir fisyon kaynağı iterasyonu ile bu nicelikleri hesaplamadan reaktivitedeki değişimi bulabilmektir. Bu nedenle bazı yaklaşımlar yapılarak yeni etkin çoğaltma katsayısı ve yeni akıyı içermeyen yaklaşık ama işe yarar bir ifade bulunacaktır.

Reaktivite tanımından;

$$\rho = \frac{k_{etk} - 1}{k_{etk}} \quad (2.53)$$

yazılabilir. (2.53)'te her iki tarafın diferansiyeli alındığında:

$$d\rho = \frac{dk_{etk}}{k_{etk}^2} \quad (2.54)$$

olarak yazılabilir. Diferansiyel değişim durumunda tam doğru olan (2.54) ifadesi sonlu bir değişim için ancak yaklaşık olarak doğrudur. Yani:

$$\Delta\rho \cong \frac{\Delta k_{etk}}{k_{etk}^2} \quad (2.55)$$

Ayrıca (2.52) denklemindeki $1/k'_{etk}$ ifadesinde bazı düzenlemeler yapılarak seriye açılırsa [4]:

$$\frac{1}{k'_{etk}} = \frac{1}{k_{etk} + \Delta k_{etk}} = \frac{1}{k_{etk} - (-\Delta k_{etk})} = \frac{1}{k_{etk}} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{\Delta k_{etk}}{k_{etk}}\right)} \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{k'_{etk}} = \frac{1}{k_{etk}} \left[1 - \frac{\Delta k_{etk}}{k_{etk}} + \left(\frac{\Delta k_{etk}}{k_{etk}}\right)^2 - \dots \right] \quad (2.57)$$

elde edilir. Δ , küçük değişimleri gösterdiği için seri açılımındaki üçüncü ve daha sonraki terimler çok küçük olacağından ihmal edilir ve (2.55) eşitliğinden yararlanılırsa:

$$\frac{1}{k'_{etk}} \cong \frac{1}{k_{etk}} - \Delta\rho \quad (2.58)$$

ifadesi elde edilir. (2.49) ifadesinde, bulduğumuz yaklaşık değer yerine yazılırsa;

$$\Delta\rho \cong \frac{(1/k_{etk} - \Delta\rho)(\phi, \delta F \phi') - (\phi, \delta M \phi')}{(\phi', F \phi)} \quad (2.59)$$

elde edilir. $\Delta\rho \delta F \ll \delta F$ varsayımıyla:

$$\Delta\rho \cong \frac{1/k_{etk}(\phi, \delta F \phi') - (\phi, \delta M \phi')}{(\phi', F\phi)} \quad (2.60)$$

ifadesi elde edilir. Akıdaki değişimin $\phi' = \phi + \delta\phi$ şeklinde olduğu varsayılarak (2.60) denklemi:

$$\Delta\rho \cong \frac{1/k_{etk}(\phi, \delta F \phi) + 1/k_{etk}(\phi, \delta F \delta\phi) - (\phi, \delta M \phi) - (\phi, \delta M \delta\phi)}{(\phi, F\phi) + (\delta\phi, F\phi)} \quad (2.61)$$

olarak yazılabilir. $\delta \ll 1$ ve $\delta^2 \ll \delta$ varsayılıp δ^2 'li terimler ihmal edilerek, akıdaki değişimin de çok küçük olduğu göz önüne alınırsa:

$$\Delta\rho \cong \frac{(\phi, ((1/k_{etk})\delta F - \delta M)\phi)}{(\phi, F\phi)} \quad (2.62)$$

ifadesi bulunur. Tesir kesitlerinin tümünde bir değişim olması halinde tek gruplu pertürbasyon ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\Delta\rho \cong \frac{\int_V [(1/k_{etk})\nu\delta\Sigma_f(\vec{r}) - \delta\Sigma_a(\vec{r})]\phi^2(\vec{r})dV - \int_V \delta D |\vec{\nabla}\phi(\vec{r})|^2 dV}{\int_V \nu\Sigma_f(\vec{r})\phi^2(\vec{r})dV} \quad (2.63)$$

II.1.3. Çok Gruplu Pertürbasyon Teorisi

Çok gruplu teoride yetkinlik özdeğer denklemi:

$$\underline{\underline{M}}\underline{\phi} = \frac{1}{k_{etk}}\underline{\underline{F}}\underline{\phi} \quad (2.64)$$

olarak yazılır. Lineer analizin herhangi bir operatörünün özdeğerinin aynı zamanda ek operatörünün de özdeğeri olduğu sonucunu kullanarak ek yetkinlik özdeğer denklemi ise:

$$\underline{\underline{M}}^+\underline{\phi}^+ = \frac{1}{k_{etk}}\underline{\underline{F}}^+\underline{\phi}^+ \quad (2.65)$$

olarak tanımlanır. Burada $\underline{\phi}^+$, ek akıyı göstermektedir. Ek akının tanımı daha sonra yapılacaktır.

$$\underline{\underline{M}}' \underline{\phi}' = \frac{1}{k'_{etk}} \underline{\underline{F}}' \underline{\phi}' \quad (2.66)$$

Pertürbe edilmiş sistem için yazılmış olan (2.66) ifadesi, $\underline{\phi}^+$ ile çarpılıp sistem hacmi üzerinden integre edilirse:

$$(\underline{\phi}^+, \underline{\underline{M}}' \underline{\phi}') = \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\phi}^+, \underline{\underline{F}}' \underline{\phi}') \quad (2.67)$$

ifadesi elde edilir. (2.40) ve (2.42) tanımları (2.67) denkleminde kullanılarak:

$$(\underline{\phi}^+, \underline{\underline{M}} \underline{\phi}') + (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{M}} \underline{\phi}') = \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\phi}^+, \underline{\underline{F}} \underline{\phi}') + \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{F}} \underline{\phi}') \quad (2.68)$$

ifadesi elde edilir. (2.24) ifadesindeki özelliğe göre:

$$(\underline{\phi}^+, \underline{\underline{M}} \underline{\phi}') = (\underline{\underline{M}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}') = \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\underline{F}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}') \quad (2.69)$$

şeklinde yazılabilir. (2.69), (2.68)'de kullanılırsa:

$$\frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\underline{F}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}') + (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{M}} \underline{\phi}') = \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\underline{F}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}') + \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{F}} \underline{\phi}') \quad (2.70)$$

$$\left(\frac{1}{k'_{etk}} - \frac{1}{k'_{etk}} \right) (\underline{\underline{F}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}') = \frac{1}{k'_{etk}} (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{F}} \underline{\phi}') - (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{M}} \underline{\phi}') \quad (2.71)$$

elde edilir. (2.4) denkleminde:

$$\Delta \rho = \frac{(1/k'_{etk})(\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{F}} \underline{\phi}') - (\underline{\phi}^+, \delta \underline{\underline{M}} \underline{\phi}')}{(\underline{\underline{F}}^+ \underline{\phi}^+, \underline{\phi}')} \quad (2.72)$$

ifadesi elde edilir. Hiçbir yaklaşım yapılmadan bulunan bu ifadeyi de işe yarar hale getirmek için tek gruplu teoride yapıldığı gibi $1/k'_{etk}$ terimi seriye açılır, $\phi' = \phi + \delta \phi$ ifadesi kullanılır ve δ^2 'li terimler ihmal edilirse çok gruplu pertürbasyon ifadesi bulunur.

$$\Delta\rho = \frac{(1/k_{\text{etk}})(\underline{\phi}^+, \delta \underline{F} \phi) - (\underline{\phi}^+, \delta \underline{M} \phi)}{(\underline{\phi}^+, \underline{F} \phi)} \quad (2.73)$$

II.1.4. İki Gruplu Pertürbasyon Teorisi

İki gruplu teoride $\underline{M}$ ve $\underline{F}$ operatörleri:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla}.D_1\vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & 0 \\ -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} & -\vec{\nabla}.D_2\vec{\nabla} + \Sigma_{a,2} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \Sigma_{f,1} & \chi_1 \nu_2 \Sigma_{f,2} \\ \chi_2 \nu_1 \Sigma_{f,1} & \chi_2 \nu_2 \Sigma_{f,2} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

olarak tanımlıdır. İki grup tesir kesitlerinin tümünde bir değişim olduğu varsayılırsa $\delta \underline{M}$ ve $\delta \underline{F}$ operatörleri:

$$\delta \underline{M} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla}.\delta D_1\vec{\nabla} + \delta \Sigma_{r,1} & 0 \\ -\delta \Sigma_{s,2\leftarrow 1} & -\vec{\nabla}.\delta D_2\vec{\nabla} + \delta \Sigma_{a,2} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\delta \underline{F} = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \chi_1 \nu_2 \delta \Sigma_{f,2} \\ \chi_2 \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \chi_2 \nu_2 \delta \Sigma_{f,2} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

şeklinde ifade edilirler. Çok gruplu teori için türetilen (2.73) ifadesi, I_p tanımlamasıyla:

$$I_p = \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{\phi}^+, \delta \underline{F} \phi) - (\underline{\phi}^+, \delta \underline{M} \phi) \quad (2.78)$$

$$\Delta\rho \cong \frac{I_p}{(\underline{\phi}^+, \underline{F} \phi)} \quad (2.79)$$

şeklinde yazılır. I_p ifadesi,

$$I_p = \frac{1}{k_{\text{etk}}} \int_{V_p} [\phi_1^+ \quad \phi_2^+] \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \chi_1 \nu_2 \delta \Sigma_{f,2} \\ \chi_2 \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \chi_2 \nu_2 \delta \Sigma_{f,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} dV \\ - \int_{V_p} [\phi_1^+ \quad \phi_2^+] \begin{bmatrix} -\vec{\nabla}.\delta D_1\vec{\nabla} + \delta \Sigma_{r,1} & 0 \\ -\delta \Sigma_{s,2\leftarrow 1} & -\vec{\nabla}.\delta D_2\vec{\nabla} + \delta \Sigma_{a,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} dV \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
I_p = & \frac{1}{k_{etk}} \int_{V_p} \phi_1^+ \chi_1 v_1 \delta \Sigma_{f,1} \phi_1 dV + \frac{1}{k_{etk}} \int_{V_p} \phi_1^+ \chi_1 v_2 \delta \Sigma_{f,2} \phi_2 dV + \frac{1}{k_{etk}} \int_{V_p} \phi_2^+ \chi_2 v_1 \delta \Sigma_{f,1} \phi_1 dV \\
& + \frac{1}{k_{etk}} \int_{V_p} \phi_2^+ \chi_2 v_2 \delta \Sigma_{f,2} \phi_2 dV - \int_{V_p} \delta D_1 \bar{\nabla} \phi_1^+ \cdot \bar{\nabla} \phi_1 dV - \int_{V_p} \phi_1^+ \delta \Sigma_{r,1} \phi_1 dV + \int_{V_p} \phi_2^+ \delta \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \phi_1 dV \\
& - \int_{V_p} \delta D_2 \bar{\nabla} \phi_2^+ \cdot \bar{\nabla} \phi_2 dV - \int_{V_p} \phi_2^+ \delta \Sigma_{a,2} \phi_2 dV
\end{aligned} \tag{2.81}$$

şeklindedir. İki gruplu pertürbasyon ifadesi ise:

$$\Delta \rho \cong \frac{I_p}{\int_v \phi_1^+ \chi_1 v_1 \Sigma_{f,1} \phi_1 dV + \int_v \phi_1^+ \chi_1 v_2 \Sigma_{f,2} \phi_2 dV + \int_v \phi_2^+ \chi_2 v_1 \Sigma_{f,1} \phi_1 dV + \int_v \phi_2^+ \chi_2 v_2 \Sigma_{f,2} \phi_2 dV} \tag{2.82}$$

olarak elde edilir.

II.1.5. Ek Akının Fiziksel Yorumu

Ek akı kavramına iki gruplu difüzyon teorisini temel alarak açıklık getirmeye çalışalım [5]. Bu amaçla incelenen nükleer sistemin belirli bir $\vec{r}_0$ noktasına nötron yutucu bir malzeme eklendiği ve bunun sonucunda da sadece ikinci grup yutma tesir kesitinin değiştiği varsayalım. Yapılan pertürbasyonun yaklaşık noktasal bir pertürbasyon olduğu varsayıp, Dirac delta fonksiyonu kullanılırsa yutma tesir kesitindeki değişim :

$$\delta \Sigma_{a,2}(\vec{r}) = \delta \Sigma_{a,2}^Y V^Y \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{2.83}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada V^Y yutucunun eklendiği bölgenin hacmi, $\delta \Sigma_{a,2}^Y$ ise eklenen yutucunun termal grup yutma tesir kesitinde yol açtığı değişimdir. (2.83) ve (2.81) denklemleri, (2.82)'de kullanılırsa:

$$\Delta \rho \cong - \frac{\int - \delta \Sigma_{a,2}^Y V^Y \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \phi_2(\vec{r}) \phi_2^+(\vec{r}) dV}{(\underline{\underline{F}}^+ \underline{\underline{\phi}}^+, \underline{\underline{\phi}})} \tag{2.84}$$

yazılabilir. Paydadaki $(\underline{\underline{F}}^+ \underline{\underline{\phi}}^+, \underline{\underline{\phi}})$ büyüklüğü, yapılan pertürbasyondan bağımsız olduğu için C sabiti olarak isimlendirilir ve Dirac delta fonksiyonunun

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0) \quad (2.85)$$

interasyon özelliği kullanılarak (2.84) ifadesi tekrar yazılırsa:

$$\Delta\rho \cong -\frac{(\delta\Sigma_{a,2}^Y V^Y \phi_2(\vec{r}_0))\phi_2^+(\vec{r}_0)}{C} \quad (2.86)$$

elde edilir. Burada $R = \delta\Sigma_{a,2}^Y V^Y \phi_2(\vec{r}_0)$ eklenen yutucu malzemede birim zamanda yutulan nötron sayısını gösterir. C sabitinin 1 olarak alınması durumunda:

$$|\Delta\rho| \cong R\phi_2^+(\vec{r}_0) \quad (2.87)$$

$$\phi_2^+(\vec{r}_0) \cong \frac{|\Delta\rho|}{R} \quad (2.88)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye göre ek akı birim zamanda yutucuda yutulan nötron başına uyarımdaki değişime eşit bir büyüklüktür. Yani $\vec{r}_0$ noktasındaki ek akı, bu noktadaki değişimin reaktivite (uyarım) açısından önemini ifade etmektedir. Bu nedenle ek akıya önem fonksiyonu da denilmektedir. Burada yorumu kolaylaştırmak açısından konu iki gruplu difüzyon teorisi ve sadece termal yutma tesir kesitinde pertürbasyon varsayımlarıyla kısıtlanmıştır. Ancak daha genel bir perspektif içinde bakılınca da grup ek akısının, o noktadaki o gruba ait nötronların reaktiviteye etki açısından önemini ifade eden bir kavram olduğu ortaya çıkmaktadır [9]. Bu nedenle pek çok kaynak ek akı yerine nötron önem fonksiyonu tanımlamasını kullanmaktadır.

II.2. FİSYON KAYNAĞI İTERASYONU VE GRUP İÇİ NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMLERİ

Daha önceki bölümde anlatıldığı üzere pertürbasyon teorisinin uygulanması, sistem içindeki akı ve ek akı dağılımları ile etkin çoğaltma katsayısının, k_{eff} , bilinmesini gerektirmektedir. Sistemin etkin çoğaltma katsayısı ve grup akı dağılımları çok gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde,

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}) + f_g(\vec{r}) \quad (2.89)$$

yetkinlik özdeğer probleminin çözümü ile mümkündür. Reaktör fiziğinde fisyon kaynağı iterasyonu [10] adı ile anılan bu çözümde $g = 1, 2, \dots, G$ olmak üzere sırasıyla

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{(n+1)}(\vec{r}) + f_g^{(n+1)}(\vec{r}) \quad (2.90)$$

denklemleri çözülmemektedir. Burada grup fisyon kaynağı;

$$f_g^{(n+1)}(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{k_{eff}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{+(n)}(\vec{r}) \quad (2.91)$$

şeklinde tanımlıdır. n üst indisi iterasyon aşamasını belirtmektedir. Ek akı dağılımları ise yine fisyon kaynağı iterasyonu ile, $g = G, G-1, \dots, 1$ olmak üzere sırasıyla:

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g^{+(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g^{+(n+1)}(\vec{r}) = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{+(n+1)}(\vec{r}) + f_g^{+(n+1)}(\vec{r}) \quad (2.92)$$

denklemlerinin çözümünü gerektirmektedir. Grup ek fisyon kaynağı ise;

$$f_g^{+(n+1)}(\vec{r}) = \frac{\nu \Sigma_{f,g}(\vec{r})}{k_{eff}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \phi_{g'}^{+(n)}(\vec{r}) \quad (2.93)$$

şeklindedir. (2.90) ve (2.92) denklemlerinin sağ tarafları $(n+1)$ inci iterasyonunun çözüm aşamasında bilinir haldedir. Yani her iki denklem de ;

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) = q_g(\vec{r}) \quad (2.94)$$

$g = 1, 2, \dots, G$ için olarak yazılabilir. Burada $\phi_g(\vec{r})$ ve $q_g(\vec{r})$ ifadeleri sırasıyla (2.90) ve (2.92) denklemlerinde,

$$\phi_g(\vec{r}) = \begin{cases} \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) \\ \phi_g^{+(n+1)}(\vec{r}) \end{cases} \quad (2.95)$$

$$q_g(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{(n+1)}(\vec{r}) + f_g^{(n+1)}(\vec{r}) \\ \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{+(n+1)}(\vec{r}) + f_g^{+(n+1)}(\vec{r}) \end{cases} \quad (2.96)$$

olarak tanımlıdır. (2.94) ifadesindeki denklemler grup içi nötron difüzyon denklemleri olarak adlandırılırlar. Her bir fisyon kaynağı iterasyonu aşamasında eğer ek difüzyon hesabı yapılmıyorsa (2.90) denklemi birinci gruptan başlayarak sonuncu yani G 'inci gruba doğru sırasıyla çözülür. Ek difüzyon hesabı yapılması söz konusuysa (2.92) denklemi bu kez sonuncu yani G 'inci gruptan başlayarak ters sıra ile birinci gruba doğru çözülür. Gruplar arası yukarı saçılmanın olmaması bu kolay yöntemin kullanılabilmesini sağlamaktadır. Bu çalışmada grup içi denklemler sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmektedir.

II.3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN GRUP İÇİ NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde grup içi nötron difüzyon denkleminin ağırlaştırılmış kalıntılar ilkesine dayalı sonlu elemanlar yöntemi [11] ile çözümü sunulacaktır. Bu çalışmada eksensel boyutta sonsuz silindrisel geometri kullanılacağı için difüzyon denklemi:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_g(r) \frac{d\phi_g}{dr} \right) + \Sigma_{r,g}(r) \phi_g(r) = q_g(r) \quad (2.97)$$

şeklinde basitleşmektedir.

Sonsuz uzun silindrisel sistemimiz $0 < r < R$ aralığında tanımlı ise sınır koşulları;

$$\phi(R) = 0 \quad \text{Boşluk sınır koşulu} \quad (2.98)$$

$$\left. \frac{d\phi(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad \text{Yansıtıcı sınır koşulu} \quad (2.99)$$

şeklinde ifade edilirler. Ağırlaştırılmış kalıntılar ilkesine dayalı sonlu elemanlar yönteminde:

$$R_g = -\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) - q_g(\vec{r}) \quad (2.100)$$

şeklinde kalıntı fonksiyonu tanımlanır. Kalıntı fonksiyonu bir $w(r)$ ağırlık (test) fonksiyonu ile çarpılıp sistem hacmi içinde integre edildiğinde bu integralin sıfıra eşit olması gerekmektedir [12].

Difüzyon denkleminin ağırlık fonksiyonu kullanarak integrasyonu ile:

$$\int_0^R -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_g(r) \frac{d\phi_g(r)}{dr} \right) w(r) r dr + \int_0^R \Sigma_{r,g}(r) \phi_g(r) w(r) r dr - \int_0^R q_g(r) w(r) r dr = 0 \quad (2.101)$$

denklemini elde edilir. Burada ilk integralde

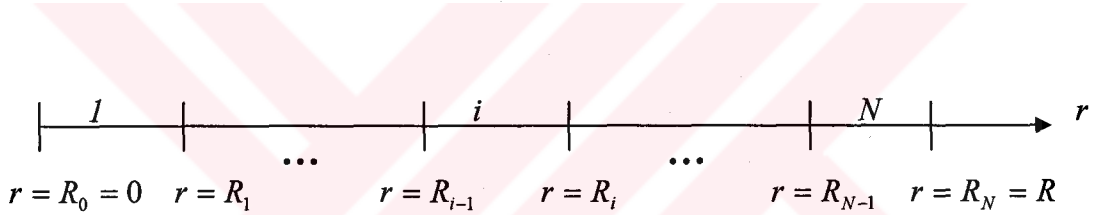
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_g(r)}{dr} \right) dr = dv \quad (2.102)$$

$$w(r) = u \quad (2.103)$$

olarak seçilip kısmi integrasyon uygulanırsa (2.94) denklemi:

$$\int_0^R D_g(\vec{r}) \frac{d\phi_g(r)}{dr} \frac{dw(r)}{dr} r dr + \int_0^R \Sigma_{r,g}(r) \phi_g(r) w(r) r dr = \int_0^R q_g w(r) r dr \quad (2.104)$$

şekline gelir. Burada çözüm aradığımız fonksiyon, $\phi_g(r)$, ve ağırlık fonksiyonu, $w(r)$, kendileri ve birinci türevleri sürekli olan H^1 uzayına ait fonksiyonlardır. Bu özelliğe sahip sonsuz sayıda fonksiyon olabileceğine göre probleme yaklaşık bir çözüm bulunmalıdır. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm olarak aradığımız fonksiyon ve ağırlık fonksiyonları, belirli mertebeden polinomlar olarak alınır. Ayrıca çözümün arandığı sistem belirli sayıda alt bölgelere yani elemanlara ayrılır. Silindrisel bir sistem için sonlu eleman ızgarası Şekil 2.1’de sunulmuştur.



Şekil 2.1 Sistemin sonlu elemanlara ayrılması.

Her bir elemanın birbiçim (homojen) olduğu varsayılır. Yani $R_{i-1} < r < R_i$ için,

$$D_g(r) = D_g^i \quad (2.105)$$

$$\Sigma(r) = \Sigma^i \quad (2.106)$$

varsayımları geçerlidir. (2.104) denklemi her eleman için yazılıp; kolokasyon yöntemi kullanılırsa:

$$\sum_{i=1}^N \int_{R_{i-1}}^{R_i} \left[D_g^i \frac{d\phi_g^i(r)}{dr} \frac{dw^i(r)}{dr} + \Sigma_{r,g}^i \phi_g^i(r) w^i(r) - q_g^i(r) w^i(r) \right] r dr = 0 \quad (2.107)$$

elde edilir.

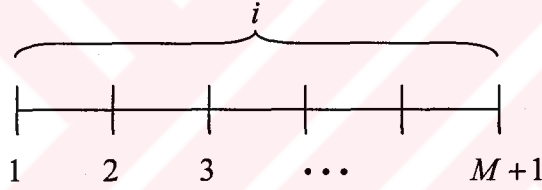
$$I_g^i = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \left[D_g^i \frac{d\phi_g^i(r)}{dr} \frac{dw(r)}{dr} + \sum_{r,g}^i \phi_g^i(r)w(r) - q_g(r)w(r) \right] r dr \quad (2.108)$$

olarak tanımlanırsa (2.100) ifadesi:

$$\sum_{i=1}^N I_g^i = 0 \quad (2.109)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.108) denkleminde $\phi_g^i(r)$, grup akı dağılımıdır. Her eleman belirli sayıda ızgara noktasına (düğüm) sahiptir. Bu çalışmada Lagrange tipi sonlu elemanlar kullanılmaktadır. Düğüm sayısı Lagrange tipi elemanlarda eleman derecesinin (M) bir fazlasına eşittir. i numaralı elemana ait ızgara noktaları Şekil 2.2’de sunulmuştur.



Şekil 2.2 i. elemanın içindeki düğüm sayısı

$M = 1$ ise lineer (doğrusal) eleman, $M = 2$ ise kuadratik (karesel) eleman, $M = 3$ ise kübik eleman, $M = 4$ ise kuartik (dördü) eleman olarak isimlendirilirler. Her eleman içinde akı dağılımları ve ağırlık fonksiyonları belirli mertebeden polinomlar olarak varsayılarak ;

$$\phi_{g,n} = \phi_g(r_n) \quad (2.110)$$

$$w_m = w(r_m) \quad (2.111)$$

kısaltmaları ile:

$$\phi_g(r) = \sum_{n=1}^{M+1} \psi_n(r) \phi_{g,n}^i \quad R_{i-1} < r < R_i \quad (2.112)$$

$$w(r) = \sum_{m=1}^{M+1} \psi_m(r) w_m^i \quad R_{i-1} < r < R_i \quad (2.113)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada $\psi(r)$ Lagrange baz fonksiyonlarının eleman içindeki parçaları (şekil fonksiyonları)dır. Bu fonksiyonlar kendine ait düğümde bir, diğer tüm düğümlerde ise sıfır değerini almaktadır [6].

$$\psi_n(r_m) = \delta_{nm} \quad , \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, M+1 \\ m = 1, 2, \dots, M+1 \end{matrix} \quad (2.114)$$

(2.112) ve (2.113) varsayımları (2.108) denkleminde yerleştirilirse

$$I_g^i = \sum_{m=1}^{M+1} w_m^i \left\{ \sum_{n=1}^{M+1} \phi_{g,n}^i \left[D_g^i \int_{R_{i-1}}^{R_i} \frac{d\psi_n(r)}{dr} \frac{d\psi_m(r)}{dr} r dr + \sum_{r,g}^i \int_{R_{i-1}}^{R_i} \psi_n(r) \psi_m(r) r dr \right] - \int_{R_{i-1}}^{R_i} q_g(r) \psi_m(r) r dr \right\} \quad (2.115)$$

ifadesi elde edilir.

$$a_{g,nm}^i = D_g^i \int_{R_{i-1}}^{R_i} \frac{d\psi_n(r)}{dr} \frac{d\psi_m(r)}{dr} r dr + \sum_{r,g}^i \int_{R_{i-1}}^{R_i} \psi_n(r) \psi_m(r) r dr \quad (2.116)$$

$$q_{g,m}^i = \int_{R_{i-1}}^{R_i} q_g(r) \psi_m(r) r dr \quad (2.117)$$

tanımlamaları yapılırsa eleman integrali;

$$I_g^i = \sum_{m=1}^{M+1} w_m^i \left[\sum_{n=1}^{M+1} a_{g,nm}^i \phi_{g,n}^i - q_{g,m}^i \right] \quad (2.118)$$

şeklinde ifade edilebilir. Tek boyutlu sonlu elemanlar yönteminde yukarıda tanımlanan $a_{g,nm}^i$ ve $q_{g,m}^i$ integralleri polinomların tek boyutlu integrallerini içerdiğinden basittirler ve genellikle analitik olarak hesaplanırlar. Bu integralleri hesaplamak için r evrensel koordinatından ξ yerel koordinatına geçilir.

$$r = R_{i-1} + \Delta_i \xi \quad (2.119)$$

dönüşümünde Δ_i eleman uzunluğu olup

$$\Delta_i = R_{i-1} - R_i \quad (2.120)$$

şeklinde tanımlıdır. Yerel koordinatlarda;

$$a_{g,nm}^i = \frac{D_g^i}{\Delta_i} \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \frac{d\Psi_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\Psi_m(\xi)}{d\xi} d\xi + \sum_{r,g}^i \Delta_i \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \psi_n(\xi) \psi_m(\xi) d\xi \quad (2.121)$$

$$q_{g,m}^i = \Delta_i \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) q_g(\xi) \psi_m(\xi) d\xi \quad (2.122)$$

şeklinde ifade edilirler. İntegrallerde yer alan $\psi_n(\xi)$ Lagrange şekil fonksiyonları değişik eleman dereceleri için Tablo 2.1' de verilmişlerdir.

Tablo 2.1 Lagrange Şekil Fonksiyonları

Eleman Türü (M)	Düğüm Numarası (n)	Düğüm Koordinatları	Lagrange Şekil Fonksiyonu $\psi_n(\xi)$
Lineer (M=1)	1	0	$1 - \xi$
	2	1	ξ
Kuadratik (M=2)	1	0	$(1 - 2\xi)(1 - \xi)$
	2	1/2	$4\xi(1 - \xi)$
	3	1	$\xi(2\xi - 1)$
Kübik (M=3)	1	0	$1/2(1 - 3\xi)(2 - 3\xi)(1 - \xi)$
	2	1/3	$9/2\xi(2 - 3\xi)(1 - \xi)$
	3	2/3	$9/2\xi(3\xi - 1)(1 - \xi)$
	4	1	$1/2\xi(3\xi - 1)(3\xi - 2)$
Kuartik (M=4)	1	0	$1/3(1 - 4\xi)(1 - 2\xi)(3 - 4\xi)(1 - \xi)$
	2	1/4	$16/3\xi(1 - 2\xi)(3 - 4\xi)(1 - \xi)$
	3	1/2	$-4\xi(1 - 4\xi)(3 - 4\xi)(1 - \xi)$
	4	3/4	$16/3\xi(1 - 4\xi)(1 - 2\xi)(1 - \xi)$
	5	1	$-1/3\xi(1 - 4\xi)(1 - 2\xi)(3 - 4\xi)$

(2.118) denklemi matris notasyonu ile:

$$I_g^i = \underline{w}_m^i (\underline{A}_g^i \underline{\phi}_g^i - \underline{q}_g^i) \quad (2.123)$$

şeklinde yazılabilir. $\underline{A}_g^i$ ile tanımlanan eleman katsayılar matrisi:

$$\underline{A}_g^i = \frac{D_g^i}{\Delta_i} R_{i-1} \underline{A}_1 + D_g^i \underline{A}_2 + \Sigma_{r,g}^i \Delta_i R_{i-1} \underline{A}_3 + \Sigma_{r,g}^i (\Delta_i)^2 \underline{A}_4 \quad (2.124)$$

olarak ifade edilebilir. $\underline{A}_i$, $i = 1, \dots, 4$ matrislerinin elemanları aşağıda tanımlanmıştır.

$$(\underline{A}_1)_{n,m} = \int_0^1 \frac{d\Psi_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\Psi_m(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (2.125)$$

$$(\underline{A}_2)_{n,m} = \int_0^1 \frac{d\Psi_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\Psi_m(\xi)}{d\xi} \xi d\xi \quad (2.126)$$

$$(\underline{A}_3)_{n,m} = \int_0^1 \Psi_n(\xi) \Psi_m(\xi) d\xi \quad (2.127)$$

$$(\underline{A}_4)_{n,m} = \int_0^1 \Psi_n(\xi) \Psi_m(\xi) \xi d\xi \quad (2.128)$$

Her eleman tipinde eleman içindeki düğüm sayıları farklı olduğundan $\underline{A}_i$ matrislerinin boyutları da farklılık göstermektedir. $\psi_i(\xi)$ şekil fonksiyonları birer polinom olduklarından $\underline{A}_i$ eleman matrislerinde yer alan integraller analitik olarak kolaylıkla gerçekleştirilebilirler. Değişik eleman tipleri için $\underline{A}_i$ matrisleri aşağıda verilmiştir.

Lineer elemanlar için;

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kuadratik elemanlar için;

$$\underline{\underline{A}}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_4 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Kübik elemanlar için;

$$\underline{\underline{A}}_1 = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 34 & -51 & 30 & -13 \\ -51 & 270 & -297 & 78 \\ 30 & -297 & 594 & -327 \\ -13 & 78 & -327 & 262 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \frac{1}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_4 = \frac{1}{3360} \begin{bmatrix} 19 & 9 & 9 & 19 \\ 9 & 405 & -81 & -81 \\ 9 & -81 & 891 & 189 \\ 19 & -81 & 189 & 237 \end{bmatrix}$$

Kuartik elemanlar için;

$$\underline{\underline{A}}_1 = \frac{1}{945} \begin{bmatrix} 4925 & -6848 & 3048 & -1472 & 347 \\ -6848 & 16640 & -14208 & 5888 & -1472 \\ 3048 & -14208 & 22320 & -14208 & 3048 \\ -1472 & 5888 & -14208 & 16640 & -6848 \\ 347 & -1472 & 3048 & -6848 & 4925 \end{bmatrix}$$

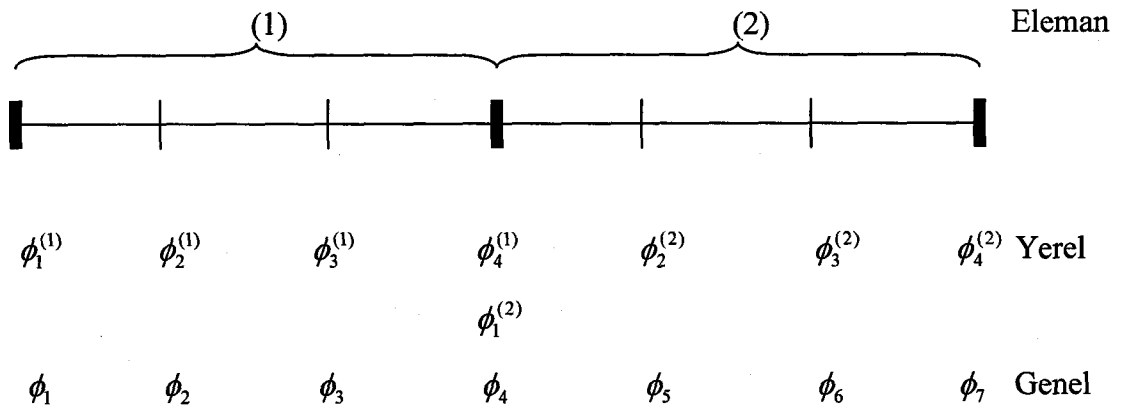
$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{1}{1890} \begin{bmatrix} 705 & -992 & 804 & -864 & 347 \\ -992 & 6400 & -9216 & 5888 & -2080 \\ 804 & -9216 & 22320 & -19200 & 5292 \\ -864 & 5888 & -19200 & 26880 & -12704 \\ 347 & -2080 & 5292 & -12704 & 9145 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{11340} \begin{bmatrix} 584 & 592 & -348 & 112 & -58 \\ 592 & 3584 & -768 & 512 & 112 \\ -348 & -768 & 3744 & -768 & -348 \\ 112 & 512 & -768 & 3584 & 592 \\ -58 & 112 & -348 & 592 & 584 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_4 = \frac{1}{11340} \begin{bmatrix} 29 & 32 & 0 & -32 & -29 \\ 32 & 768 & -192 & 256 & 144 \\ 0 & -192 & 1872 & -576 & -348 \\ -32 & 256 & -576 & 2816 & 560 \\ -29 & 144 & -348 & 560 & 555 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(2.109) ifadesine göre tüm elemanlar için eleman integrallerinin hesaplanarak toplanması gerekmektedir. Ancak toplama işleminin yapılabilmesi için eleman matris ve vektörlerinin boyutunun sistemdeki düğüm sayısına genişletilmesi gerekmektedir. Genişletme işlemi formal olarak Boole matrisleri aracılığıyla yapılır. Bu konuya açıklık getirmek amacıyla iki kübik elemandan oluşan bir sistem ele alalım. Bu sistemde elemanlara bağlı numaralandırma (yerel numaralandırma) ve tüm sistemin numaralandırılması (genel numaralandırma) Şekil 2.3'te gösterilmiştir. Yerel numaralandırmada üst indisler elemanları simgelandirirler.



Şekil 2.3 Örnek bir sonlu eleman ızgarasında yerel ve genel numaralandırmanın gösterimi

Sistem genel akı vektörü;

$$\underline{\phi}^T = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7]$$

şeklindedir. İkinci elemana ait yerel akı vektörü ise;

$$\underline{\phi}^{(2)T} = [\phi_1^{(2)} \quad \phi_2^{(2)} \quad \phi_3^{(2)} \quad \phi_4^{(2)}]$$

olarak yazılabilir.

Yerel olarak numaralandırılmış $\underline{\phi}^{(2)}$ vektöründen genel numaralandırmaya geçiş $\underline{J}^{(2)}$ ile gösterilen Boole matrisi aracılığı ile olur.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^2 \\ \phi_2^2 \\ \phi_3^2 \\ \phi_4^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\phi}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{J}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix}}_{\underline{\phi}}$$

O halde $\underline{\phi}_g^i = \underline{J}^i \underline{\phi}_g$ ve $\underline{w}^i = \underline{J}^i \underline{w}$ olarak yazılabilen bu ifadeler (2.123)'de yerine konulup, sistem için birleştirme yapılırsa:

$$\underline{I}_g = \underline{w}^T \left[\left(\sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{A}^i \underline{J}^i \right) \underline{\phi}_g - \sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{q}_g^i \right] = 0 \quad (2.129)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{A}^i \underline{J}^i \right) \underline{\phi}_g - \sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{q}_g^i = 0 \quad (2.130)$$

ifadeleri elde edilir. (2.130) eşitliğinde,

$$\underline{A}_g = \sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{A}^i \underline{J}^i \quad (2.131)$$

ve

$$\underline{q}_g = \sum_{i=1}^N \underline{J}^{iT} \underline{q}_g^i \quad (2.132)$$

tanımlamaları yapılırsa:

$$\underline{A}_g \underline{\phi}_g = \underline{q}_g \quad (2.133)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek düğümlerdeki grup akı dağılımları saptanır.

II.3.1. Kaynak Vektörü Hesabı

II.3.1.a. Saçılma Kaynağı Hesabı

(2.90) ifadesinde yer alan saçılma terimi:

$$S_g = - \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'} \phi_{g'} \quad (2.134)$$

şeklindedir. Saçılma teriminin hesabında iki ayrı yol izlenebilir. Birinci yol akının;

$$\phi_{g'} = \sum_{n=1}^{M+1} \Psi_n(r) \phi_{g',n} \quad (2.135)$$

olarak seçilmesidir. Akının sonlu elemanlar baz fonksiyonları ile ifade edilmesi literatürde uyumlu kaynak yaklaşımı olarak anılır. Bu seçim saçılma matrislerinin, katsayılar matrisinde olduğu gibi yarıbant genişlikli bir yapıda olması sonucunu doğurur. İkinci yol ise akının $\phi_g^i(r) = \phi_{g,m}^i$ şeklinde seçilmesi yani eleman kaynak vektörünün bir bileşeni hesaplanırken, integral içindeki konuma bağlı grup akısının o elemana karşılık gelen düğümdeki grup akısına eşit alınmasıdır. Bu yöntem ise literatürde yığılmış kaynak yaklaşımı [13] olarak anılır. Bu yaklaşımın kullanılmasının en büyük avantajı saçılma matrislerinin köşegen yapıda olmasıdır. Bu çalışmada yığılmış kaynak yaklaşımı kullanılmaktadır. Yığılmış kaynak yaklaşımı altında saçılma kaynağı;

$$S_{g,m}^i \cong \int_0^1 \Delta_i \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'} \phi_{g,m}^i \Psi_m(\xi) (R_{i-1} + \Delta_i \xi) d\xi \quad (2.136)$$

şeklinde ifade edilir.

$$S_{g,m}^i \cong \left(\Delta_i \sum_{g'=1}^{g-1} \sum_{s,g \leftarrow g'} \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \Psi_m(\xi) d\xi \right) \phi_{g,m}^i \quad (2.137)$$

Saçılma kaynağı matris bileşenleri, köşegen bir matris olarak;

$$S_{g,nm}^i \cong \delta_{nm} \left[\Delta_i \sum_{s,g \leftarrow g'} R_{i-1} \int_0^1 \Psi_m(\xi) d\xi + \Delta_i^2 \sum_{s,g \leftarrow g'} \int_0^1 \Psi_m(\xi) \xi d\xi \right] \quad (2.138)$$

şeklinde yazılabilir. Son ifadede;

$$(\underline{\underline{S}}_1)_{nm} = \delta_{nm} \int_0^1 \Psi_m(\xi) d\xi \quad (2.139)$$

$$(\underline{\underline{S}}_2)_{nm} = \delta_{nm} \int_0^1 \Psi_m(\xi) \xi d\xi \quad (2.140)$$

tanımlamalarıyla eleman saçılma kaynağı matrisi,

$$S_{g \leftarrow g'}^i \cong \Delta_i \sum_{s,g \leftarrow g'} R_{i-1} \underline{\underline{S}}_1 + \Delta_i^2 \sum_{s,g \leftarrow g'} \underline{\underline{S}}_2 \quad (2.141)$$

durumuna gelir. Değişik eleman dereceleri için $\underline{\underline{S}}_1$ ve $\underline{\underline{S}}_2$ matrisleri aşağıda verilmektedir.

Lineer elemanlar için;

$$\underline{\underline{S}}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kuadratik elemanlar için;

$$\underline{\underline{S}}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kübik elemanlar için;

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Kuartik elemanlar için;

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklindeirler.

II.3.1.b. Filyon Kaynağı Hesabı

Filyon kaynağı iterasyonu sırasında grup içi difüzyon denklemi sonlu elemanlar ayrıklaştırması sonucu

$$\underline{A}_g \phi_g^{(n+1)} = \underline{q}_g^{(n+1)} \quad (2.142)$$

şeklinde bir lineer denklem sistemine indirgenmiştir. Burada $\underline{A}_g$ matrisi (2.124) denklemi ile tanımlıdır. Sağ taraf vektörü ise;

$$\underline{q}_g^{(n+1)} = \underline{S}_g^{(n+1)} + \underline{f}_g^{(n+1)} \quad (2.143)$$

saçılma ve filyon terimlerinden oluşmaktadır. Saçılma kaynağı;

$$\underline{S}_g^{(n+1)} = \sum_{g'=1}^{g-1} \underline{S}_{g \leftarrow g'} \phi_{g'}^{(n+1)} \quad (2.144)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu alt bölümde sağ taraf vektörünün filyondan gelen katkıları hesaplanacaktır.

Fisyon kaynağı terimi;

$$f_g = \frac{\chi_g}{k_{etk}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}^{(n)}(\vec{r}) \quad (2.145)$$

şeklindedir. Yine yığılmış kaynak yaklaşımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f_{g,m}^i \cong \int_0^1 \Delta_i \frac{\chi_g}{k_{etk}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{f,g'} \phi_m^i(\xi) \psi_m(\xi) (R_{i-1} + \Delta_i \xi) d\xi \quad (2.146)$$

$$f_{g,m}^i \cong \left[\Delta_i \frac{\chi_g}{k_{etk}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{f,g'} \left(\int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \psi_m(\xi) d\xi \right) \right] \phi_m^i \quad (2.147)$$

ifadeleri elde edilir. Fisyon kaynak matrisi köşegen bir matris olarak

$$f_{g,nm}^i \cong \delta_{nm} \frac{\chi_g}{k_{etk}^{(n)}} \nu_{g'} \Sigma_{f,g'} \left(\Delta_i R_{i-1} \int_0^1 \psi_m(\xi) d\xi + \Delta_i^2 \int_0^1 \psi_m(\xi) \xi d\xi \right) \quad (2.148)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eleman fisyon matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$F_{g,g'}^i \cong \chi_g \nu_{g'} \Sigma_{f,g'} \left(\Delta_i R_{i-1} S_{\underline{2}} + \Delta_i^2 S_{\underline{2}} \right) \quad (2.149)$$

Fisyon kaynağı matrisindeki $S_{\underline{1}}$ ve $S_{\underline{2}}$ matrisleri saçılma kaynağında tanımlanan matrislerle aynıdır.

II.3.1.c. Serbest Kaynak Hesabı

$$q_g = s_g(r) \quad (2.150)$$

olarak gösterilen serbest kaynak terimi eleman içinde sabit kabul edilebilir yani $s_g(r) = s_g^i$ olarak alınabilirler. Bu durumda serbest kaynağın sağ taraf vektörüne katkısı

$$s_m^i \cong \int_0^1 \Delta_i s_g^i \psi_m(\xi) (R_{i-1} + \Delta_i \xi) d\xi \quad (2.151)$$

$$s_m^i \cong s_g^i [\Delta_i R_{i-1} \int_0^1 \psi_m(\xi) d\xi + \Delta_i^2 \int_0^1 \xi \psi_m(\xi) d\xi] \quad (2.152)$$

olarak hesaplanır. Daha önceki $\underline{\underline{S}}_1$ ve $\underline{\underline{S}}_2$ matris tanımları kullanılarak serbest kaynak matrisi,

$$\underline{\underline{S}}^i = s_g^i [\Delta_i R_{i-1} \underline{\underline{S}}_1 + \Delta_i^2 \underline{\underline{S}}_2] \quad (2.153)$$

şeklinde yazılır. Bu hesaplamalar sonucu lineer sistemin sağ taraf vektörü

$$q_g^{(n+1)} = \sum_{g'=1}^{g-1} S_{=g \leftarrow g'} \phi_{g'}^{(n+1)} + \frac{1}{k_{etk}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G F_{=g, g'} \phi_{g'}^{(n)} \quad (2.154)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Ek akı hesabında ise lineer sistem

$$\underline{\underline{A}}_g \phi_g^+ = q_g^+ \quad (2.155)$$

şeklindedir. $\underline{\underline{A}}_g$ katsayılar matrisi (2.131) denklemi ile tanımlıdır. q_g^+ sağ taraf vektörü ise,

$$\underline{\underline{q}}_g^{+(n+1)} = \sum_{g'=g+1}^G S_{=g \leftarrow g'} \phi_{g'}^{(n+1)} + \frac{1}{k_{etk}^{(n)}} \sum_{g'=1}^G F_{=g, g'} \phi_{g'}^{(n)} \quad (2.156)$$

şeklindedir.

II.4. SONLU ELEMENLAR SONUÇLARININ PERTÜRBASYON TEORİSİNDE KULLANILMASI

Bu bölümde nötron difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü sonucu elde edilen noktasal akı, ek akı ve k_{etk} değerleri pertürbasyon ifadesinde kullanılarak reaktivite değişimi hesaplanacaktır. Bu amaçla pertürbasyon teorisinden elde edilen reaktivite değişiminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak formüle edilmesi gerekmektedir.

$$\Delta\rho = \frac{-\int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \delta \underline{M}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV + \frac{1}{k_{etk}} \int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \delta \underline{F}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV}{\int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \underline{F}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV} \quad (2.157)$$

(2.157) ifadesindeki integraller:

$$I_1 = \int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \delta \underline{M}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV \quad (2.158)$$

$$I_2 = \int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \delta \underline{F}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV \quad (2.159)$$

$$I_3 = \int_V \underline{\phi}^+(\vec{r}) \underline{F}(\vec{r}) \underline{\phi}(\vec{r}) dV \quad (2.160)$$

olarak adlandırır. I_1 integralinin açık formda ifadesi

$$I_1 = \int_V \begin{bmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \\ \vdots \\ \phi_g^+ \\ \vdots \\ \phi_G^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D}_1 \vec{\nabla} + \mathcal{E}_{r,1} & & & & \\ -\mathcal{E}_{s,2 \leftarrow 1} & -\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D}_2 \vec{\nabla} + \mathcal{E}_{r,2} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ -\mathcal{E}_{s,g \leftarrow 1} & -\mathcal{E}_{s,g \leftarrow 2} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D}_g \vec{\nabla} + \mathcal{E}_{r,g} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -\mathcal{E}_{s,G \leftarrow 1} & -\mathcal{E}_{s,G \leftarrow 2} & \dots & -\mathcal{E}_{s,G \leftarrow g} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D}_G \vec{\nabla} + \mathcal{E}_{r,G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_g \\ \vdots \\ \phi_G \end{bmatrix} dV \quad (2.161)$$

şeklindedir. İntegral içindeki matris çarpımları yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 = & - \int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_1 \vec{\nabla} \phi_1 \phi_1^+ dV + \int_V \delta \Sigma_{r,1} \phi_1 \phi_1^+ - \int_V \delta \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \phi_1 \phi_2^+ - \int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_2 \vec{\nabla} \phi_2 \phi_2^+ dV + \int_V \delta \Sigma_{r,2} \phi_2 \phi_2^+ \\
& \cdots - \int_V \delta \Sigma_{s,g \leftarrow 1} \phi_1 \phi_g^+ - \int_V \delta \Sigma_{s,g \leftarrow 2} \phi_2 \phi_g^+ \cdots - \int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_g \vec{\nabla} \phi_g \phi_g^+ dV + \int_V \delta \Sigma_{r,g} \phi_g \phi_g^+ \cdots \\
& \cdots - \int_V \delta \Sigma_{s,G \leftarrow 1} \phi_1 \phi_G^+ - \int_V \delta \Sigma_{s,G \leftarrow 2} \phi_2 \phi_G^+ \cdots - \int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_G \vec{\nabla} \phi_G \phi_G^+ dV + \int_V \delta \Sigma_{r,G} \phi_G \phi_G^+ \quad (2.162)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenerek;

$$I_1 = - \sum_{g=1}^G \int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_g \vec{\nabla} \phi_g \phi_g^+ dV + \sum_{g=1}^G \int_V \delta \Sigma_{r,g} \phi_g \phi_g^+ - \sum_{h=2}^G \left(\sum_{g=1}^{h-1} \int_V \delta \Sigma_{s,h \leftarrow g} \phi_g \phi_h^+ \right) \quad (2.163)$$

elde edilir. I_1 ifadesi,

$$I_1 A = - \sum_{g=1}^G \underbrace{\int_V \vec{\nabla} \cdot \delta D_g \vec{\nabla} \phi_g \phi_g^+ dV}_{\delta D_{gg}} \quad , \quad I_1 A = - \sum_{g=1}^G \delta D_{gg} \quad (2.164)$$

$$I_1 B = \sum_{g=1}^G \underbrace{\int_V \delta \Sigma_{r,g} \phi_g \phi_g^+ dV}_{\delta R_{gg}} \quad , \quad I_1 B = \sum_{g=1}^G \delta R_{gg} \quad (2.165)$$

$$I_1 C = - \sum_{h=2}^G \underbrace{\left(\sum_{g=1}^{h-1} \int_V \delta \Sigma_{s,h \leftarrow g} \phi_g \phi_h^+ dV \right)}_{\delta S_{g,h}} \quad , \quad I_1 C = - \sum_{h=2}^G \left(\sum_{g=1}^{h-1} \delta S_{g,h} \right) \quad (2.166)$$

tanımları kullanılarak;

$$I_1 = - \sum_{g=1}^G \delta D_{gg} + \sum_{g=1}^G \delta R_{gg} - \sum_{h=2}^G \left(\sum_{g=1}^{h-1} \delta S_{g,h} \right) \quad (2.167)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (2.159) ifadesi açık formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} \phi_1^+(r) \\ \vdots \\ \phi_g^+(r) \\ \vdots \\ \phi_G^+(r) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \chi_1 \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_g \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} & \cdots & \chi_G \nu_1 \delta \Sigma_{f,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 \nu_g \delta \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_g \nu_g \delta \Sigma_{f,g} & \cdots & \chi_G \nu_g \delta \Sigma_{f,g} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 \nu_G \delta \Sigma_{f,G} & \cdots & \chi_g \nu_G \delta \Sigma_{f,G} & \cdots & \chi_G \nu_G \delta \Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(r) \\ \vdots \\ \phi_g(r) \\ \vdots \\ \phi_G(r) \end{bmatrix} \right\} dV \quad (2.168)
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler sonucunda:

$$I_2 = \sum_{h=1}^G (\chi_h \sum_{g=1}^G \int_V \nu_g \delta \Sigma_{f,g} \phi_g \phi_h^+ dV) \quad (2.169)$$

elde edilir.

$$\delta F_{gh} = \int_V \nu_g \delta \Sigma_{f,g} \phi_g \phi_h^+ dV \quad (2.170)$$

tanımıyla I_2 ifadesi:

$$I_2 = \sum_{h=1}^G \chi_h \sum_{g=1}^G \delta F_{gh} \quad (2.171)$$

şeklinde yazılır. (2.160) ifadesi ise (2.159) ifadesine benzer olarak,

$$I_3 = \sum_{h=1}^G (\chi_h \sum_{g=1}^G \int_V \nu_g \Sigma_{f,g} \phi_g \phi_h^+ dV) \quad (2.172)$$

şeklinde yazılabilir.

$$F_{gh} = \int_V \nu_g \Sigma_{f,g} \phi_g \phi_h^+ dV \quad (2.173)$$

tanımlaması yapıp tekrar yazılırsa

$$I_3 = \sum_{h=1}^G \chi_h \sum_{g=1}^G F_{gh} \quad (2.174)$$

elde edilir. Burada tanımlanan $\delta D_{gg}, \delta R_{gg}, \delta S_{gh}, \delta F_{gh}$ ve de F_{gh} integralleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hesaplanacak ve bu integrallerin lineer, kuadratik, kübik ve kuartik elemanlar için çözümleri verilecektir.

II.4.1. Pertürbasyon Teorisinde Difüzyon Sabiti Teriminin Simetrizasyonu

$$\delta D_{gg} = \int_V \phi^+(r) \vec{\nabla} \cdot \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r) dV \quad (2.175)$$

integralinde

$$\vec{\nabla} \cdot a \vec{b} = a \vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a \quad (2.176)$$

özdeşliği kullanılırsa:

$$\phi_g^+(r) \vec{\nabla} \cdot \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r) = \vec{\nabla} \cdot [\phi_g^+(r) \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r)] - \vec{\nabla} \phi_g^+(r) \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r) \quad (2.177)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda (2.175) ifadesi

$$\delta D_{gg} = \int_V \vec{\nabla} \cdot [\phi_g^+(r) \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r)] dV - \int_V \vec{\nabla} \phi_g^+(r) \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r) dV \quad (2.178)$$

olarak yazılır. Yukarıdaki ilk integralde Gauss teoremi uygulanırsa sınır koşulları nedeni ile sıfır olduğu görülür. Sonlu elemanlar yaklaşımında olduğu gibi sistem N adet elemana ayrılırsa (2.178) integrali

$$\delta D_{gg} = - \sum_{i=1}^N \delta D_{gg}^i \quad (2.179)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\delta D_{gg}^i = \int_{V_i} \vec{\nabla} \phi_g^+(r) \delta D_g(r) \vec{\nabla} \phi_g(r) dV \quad (2.180)$$

olarak tanımlıdır. Elemanlar homojen kabul edildiğine göre, elemanlar içinde $\delta D_g(r) = \delta D_{g,i}$ olarak alınabilir. Sonsuz silindrsel geometride:

$$\delta D_{gg}^i = 2\pi \delta D_{g,i} \int_{R_i}^{R_{i+M}} \frac{d\phi_g^+}{dr} \cdot \frac{d\phi_g}{dr} r dr \quad (2.181)$$

şeklinde basitleşmektedir. (2.181) denklemindeki integrallerin hesabı analitik olarak gerçekleştirilecektir. Bu amaçla Bölüm II.3'de sunulan sonlu elemanlarda da yapıldığı gibi $r \rightarrow \xi$ koordinat dönüşümü yapılır. Koordinat dönüşümünden

$r = \Delta_i \xi + R_i$ ve $dr = \Delta_i d\xi$ eşitlikleri elde edilir. Burada Δ_i eleman uzunluğunu göstermektedir. Yani $\Delta_i = R_{i+1} - R_i$ olarak ifade edilir.

II.4.1.a. Lineer Elemanlar

$$\delta D_{gg}^i = 2\pi \delta D_{g,i} \int_0^1 \frac{d\phi_g^+(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} \frac{d\phi_g(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} (\Delta_i \xi + R_i) \Delta_i d\xi \quad (2.182)$$

Elemanlar içindeki düğümler i ve $i+1$ olarak adlandırılıp; ek akı ve akı birer polinom olarak lineer kabul edilirse:

$$\phi_g^+(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{g,i+1}^+ \quad (2.183)$$

$$\phi_g(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{g,i} + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{g,i+1} \quad (2.184)$$

ifadeleri yazılabilir. (2.182) denkleminde bu yaklaşımlar kullanılırsa

$$\delta D_{gg}^i = 2\pi \delta D_{g,i} \int_0^1 \left(\frac{d\psi_i}{d\xi} \phi_{g,i}^+ + \frac{d\psi_{i+1}}{d\xi} \phi_{g,i+1}^+ \right) \frac{1}{\Delta_i} \left(\frac{d\psi_i}{d\xi} \phi_{g,i} + \frac{d\psi_{i+1}}{d\xi} \phi_{g,i+1} \right) \frac{1}{\Delta_i} (\Delta_i \xi + R_i) \Delta_i d\xi \quad (2.185)$$

ifadesi bulunur. İntegraller analitik olarak hesaplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa lineer elemanlar için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\delta D_{gg}^i = (2\pi \frac{\delta D_{g,i}}{\Delta_i}) \left(\frac{\Delta_i}{2} + R_i \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i} - \phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+1} - \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i}) \quad (2.186)$$

II.4.1.b. Kuadratik Elemanlar

Kuadratik elemanlarda eleman içindeki düğümler i , $i+1$, $i+2$ şeklinde isimlendirilir; akı ve ek akı ikinci derece bir polinom olarak kabul edilirse:

$$\phi_g^+(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{g,i+1}^+ + \psi_{i+2}(\xi) \phi_{g,i+2}^+ \quad (2.187)$$

$$\phi_g(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{g,i} + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{g,i+1} + \psi_{i+2}(\xi) \phi_{g,i+2} \quad (2.188)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımlar (2.181) de yerine yazılır ve integraller hesaplanırsa, kuadratik elemanlar için

$$\begin{aligned} \delta D_{gg}^i = 2\pi\delta D_{g,i} \Big[& \left(\frac{7}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{1}{2}\right)\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i} - \left(\frac{8}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{2}{3}\right)(\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i}) \\ & + \left(\frac{1}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{1}{6}\right)(\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i}) + \left(\frac{16}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{8}{3}\right)\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+1} \\ & - \left(\frac{8}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + 2\right)(\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+1}) + \left(\frac{7}{3}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{11}{6}\right)\phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+2} \Big] \quad (2.189) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

II.4.1c. Kübik Elemanlar

Kübik elemanlar içinde yer alan dört düğüm i , $i+1$, $i+2$, $i+3$ olarak adlandırılmakla birlikte akı ve ek akı eleman içinde:

$$\phi_g^+(\xi) = \psi_i(\xi)\phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1}(\xi)\phi_{g,i+1}^+ + \psi_{i+2}(\xi)\phi_{g,i+2}^+ + \psi_{i+3}(\xi)\phi_{g,i+3}^+ \quad (2.190)$$

$$\phi_g(\xi) = \psi_i(\xi)\phi_{g,i} + \psi_{i+1}(\xi)\phi_{g,i+1} + \psi_{i+2}(\xi)\phi_{g,i+2} + \psi_{i+3}(\xi)\phi_{g,i+3} \quad (2.191)$$

şeklinde kübik birer polinom olarak kabul edilerek integraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \delta D_{gg}^i = 2\pi\delta D_{g,i} \Big[& \left(\frac{37}{10}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{17}{40}\right)\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i} - \left(\frac{189}{40}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{51}{80}\right)(\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i}) \\ & + \left(\frac{27}{20}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{3}{8}\right)(\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i}) - \left(\frac{13}{40}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{13}{80}\right)(\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i}) \\ & + \left(\frac{54}{5}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{27}{8}\right)\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+1} - \left(\frac{297}{40}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{297}{80}\right)(\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+1}) \\ & + \left(\frac{27}{20}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{39}{40}\right)(\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+1}) + \left(\frac{54}{5}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{297}{40}\right)\phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+2} \\ & - \left(\frac{189}{40}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{327}{80}\right)(\phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+2}) + \left(\frac{37}{10}\frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{131}{40}\right)\phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+3} \Big] \quad (2.192) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

II.4.1.d. Kuartik Elemanlar

Kuartik (dördüncü derece) eleman içinde beş adet düğüm vardır. Bu düğümler $i, i+1, i+2, i+3, i+4$ olarak adlandırılır. Akı ve ek akının:

$$\phi_g^+(\xi) = \psi_i(\xi)\phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1}(\xi)\phi_{g,i+1}^+ + \psi_{i+2}(\xi)\phi_{g,i+2}^+ + \psi_{i+3}(\xi)\phi_{g,i+3}^+ + \psi_{i+4}(\xi)\phi_{g,i+4}^+ \quad (2.193)$$

$$\phi_g(\xi) = \psi_i(\xi)\phi_{g,i} + \psi_{i+1}(\xi)\phi_{g,i+1} + \psi_{i+2}(\xi)\phi_{g,i+2} + \psi_{i+3}(\xi)\phi_{g,i+3} + \psi_{i+4}(\xi)\phi_{g,i+4} \quad (2.194)$$

şeklinde dördüncü derece birer polinom oldukları varsayımıyla difüzyon terimindeki pertürbasyonun ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \delta D_{gg}^i = 2\pi\delta D_{g,i} [& \left(\frac{985}{189} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{47}{126} \right) \phi_{g,i}^+ \phi_{g,i} - \left(\frac{6848}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{496}{945} \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i}) \\ & + \left(\frac{1016}{315} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{134}{315} \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i}) - \left(\frac{1472}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{16}{35} \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i}) \\ & + \left(\frac{347}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{347}{1890} \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{g,i+4} + \phi_{g,i+4}^+ \phi_{g,i}) + \left(\frac{3328}{189} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{640}{189} \right) \phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+1} \\ & - \left(\frac{4736}{315} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{512}{105} \right) (\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+1}) \\ & + \left(\frac{5888}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{2944}{945} \right) (\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+1}) \\ & - \left(\frac{1472}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{208}{189} \right) (\phi_{g,i+1}^+ \phi_{g,i+4} + \phi_{g,i+4}^+ \phi_{g,i+1}) \\ & + \left(\frac{496}{21} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{248}{21} \right) \phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+2} - \left(\frac{4736}{315} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{640}{63} \right) (\phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+3} + \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+2}) \\ & + \left(\frac{1016}{315} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{14}{5} \right) (\phi_{g,i+2}^+ \phi_{g,i+4} + \phi_{g,i+4}^+ \phi_{g,i+2}) + \left(\frac{3328}{189} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{129}{9} \right) \phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+3} \\ & - \left(\frac{6848}{945} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{6352}{945} \right) (\phi_{g,i+3}^+ \phi_{g,i+4} + \phi_{g,i+4}^+ \phi_{g,i+3}) + \left(\frac{985}{189} \frac{R_i}{\Delta_i} + \frac{1829}{378} \right) \phi_{g,i+4}^+ \phi_{g,i+4}] \quad (2.195) \end{aligned}$$

II.4.2. Çıkarma, Saçılma ve Fisyon Tesir Kesitlerindeki Pertürbasyon

Çıkarma, saçılma ve fisyon tesir kesitlerindeki pertürbasyonun ifadeleri birbirine benzerdir. Bu nedenle bu tesir kesitleri için aynı sembol, $\delta_{gh}(\vec{r})$, kullanılabilir.

$$\delta_{gh}^i = 2\pi \int_{R_i}^{R_{i+M}} \phi_g^+(\vec{r}) \delta_{gh,i}(\vec{r}) \phi_h(\vec{r}) r dr \quad (2.196)$$

Buradaki hesaplamalarda da elemanlar homojen kabul edilmiş ve $r \rightarrow \xi$ koordinat dönüşümü yapılmıştır.

II.4.2.a. Lineer Elemanlar

$$\phi_g^+(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{g,i+1}^+ \quad (2.197)$$

$$\phi_h(\xi) = \psi_i(\xi) \phi_{h,i} + \psi_{i+1}(\xi) \phi_{h,i+1} \quad (2.198)$$

$$\delta_{gh}^i = 2\pi \delta_{gh,i} \int_0^1 (\psi_i \phi_{g,i}^+ + \psi_{i+1} \phi_{g,i+1}^+) (\psi_i \phi_{h,i} + \psi_{i+1} \phi_{h,i+1}) (\Delta_i \xi + R_i) \Delta_i d\xi \quad (2.199)$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$\begin{aligned} \delta_{gh}^i = 2\pi \delta_{gh,i} \Delta_i \left[\left(\frac{1}{12} \Delta_i + \frac{1}{3} R_i \right) \phi_{g,i}^+ \phi_{h,i} + \left(\frac{1}{12} \Delta_i + \frac{1}{6} R_i \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{h,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{h,i}) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{4} \Delta_i + \frac{1}{3} R_i \right) \phi_{g,i+1}^+ \phi_{h,i+1} \right] \end{aligned} \quad (2.200)$$

ifadesi bulunur.

II.4.2.b. Kuadratik Elemanlar

$$\begin{aligned} \delta_{gh}^i = 2\pi \delta_{gh,i} \Delta_i \left[\left(\frac{2}{15} R_i + \frac{1}{60} \Delta_i \right) \phi_{g,i}^+ \phi_{h,i} + \frac{1}{15} R_i (\phi_{g,i}^+ \phi_{h,i+1} + \phi_{g,i+1}^+ \phi_{h,i}) \right. \\ - \left(\frac{1}{30} R_i + \frac{1}{60} \Delta_i \right) (\phi_{g,i}^+ \phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{h,i}) + \left(\frac{8}{15} R_i + \frac{4}{15} \Delta_i \right) \phi_{g,i+1}^+ \phi_{h,i+1} \\ \left. + \left(\frac{1}{15} R_i + \frac{1}{15} \Delta_i \right) (\phi_{g,i+1}^+ \phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+ \phi_{h,i+1}) + \left(\frac{2}{15} R_i + \frac{7}{60} \Delta_i \right) \phi_{g,i+2}^+ \phi_{h,i+2} \right] \end{aligned} \quad (2.201)$$

II.4.2.c. Kübik Elemanlar

$$\begin{aligned}
 \delta_{gh}^i = 2\pi\delta_{gh,i}\Delta_i \Big[& \left(\frac{8}{105}R_i + \frac{19}{3360}\Delta_i\right)\phi_{g,i}^+\phi_{h,i} + \left(\frac{33}{560}R_i + \frac{3}{1120}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+1} + \phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i}) \\
 & + \left(-\frac{3}{140}R_i + \frac{3}{1120}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i}) \\
 & + \left(\frac{19}{1680}R_i + \frac{19}{3360}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i}) + \left(\frac{27}{70}R_i + \frac{27}{224}\Delta_i\right)\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+1} \\
 & - \left(\frac{27}{560}R_i + \frac{27}{1120}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+1}) \\
 & - \left(\frac{3}{140}R_i + \frac{27}{1120}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+1}) + \left(\frac{27}{70}R_i + \frac{297}{1120}\Delta_i\right)\phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+2} \\
 & + \left(\frac{33}{560}R_i + \frac{9}{160}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+2}) + \left(\frac{8}{105}R_i + \frac{79}{1120}\Delta_i\right)\phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+3} \Big]
 \end{aligned}$$

(2.202)

II.4.2.d. Kuartik Elemanlar

$$\begin{aligned}
\delta_{gh}^i = 2\pi\delta_{gh,i}\Delta_i \Big[& \left(\frac{146}{2835}R_i + \frac{29}{11340}\Delta_i\right)\phi_{g,i}^+\phi_{h,i} \\
& + \left(\frac{148}{2835}R_i + \frac{8}{2835}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+1} + \phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i}) \\
& - \frac{29}{945}R_i(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i}) \\
& + \left(\frac{4}{405}R_i - \frac{8}{2835}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i}) \\
& - \left(\frac{29}{5670}R_i + \frac{29}{11340}\Delta_i\right)(\phi_{g,i}^+\phi_{h,i+4} + \phi_{g,i+4}^+\phi_{h,i}) \\
& + \left(\frac{128}{405}R_i + \frac{64}{945}\Delta_i\right)\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+1} \\
& - \left(\frac{64}{945}R_i + \frac{16}{945}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+2} + \phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+1}) \\
& + \left(\frac{128}{2835}R_i + \frac{64}{2835}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+1}) \\
& + \left(\frac{4}{405}R_i + \frac{4}{315}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+1}^+\phi_{h,i+4} + \phi_{g,i+4}^+\phi_{h,i+1}) \\
& + \left(\frac{104}{315}R_i + \frac{52}{315}\Delta_i\right)\phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+2} \\
& - \left(\frac{64}{945}R_i + \frac{16}{315}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+3} + \phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+2}) \\
& - \left(\frac{29}{945}R_i + \frac{29}{945}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+2}^+\phi_{h,i+4} + \phi_{g,i+4}^+\phi_{h,i+2}) \\
& + \left(\frac{128}{405}R_i + \frac{704}{2835}\Delta_i\right)\phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+3} \\
& + \left(\frac{148}{2835}R_i + \frac{4}{81}\Delta_i\right)(\phi_{g,i+3}^+\phi_{h,i+4} + \phi_{g,i+4}^+\phi_{h,i+3}) \\
& + \left(\frac{146}{2835}R_i + \frac{37}{756}\Delta_i\right)\phi_{g,i+4}^+\phi_{h,i+4} \Big] \tag{2.203}
\end{aligned}$$

III UYGULAMALAR

Bölüm II’de sunulan formülasyon kullanılarak PERTURB adı verilen bir bilgisayar programı geliştirildi. PERTURB programının tanıtımı Ek A’da verilmiştir. Bu program FORTRAN dilinde yazıldı ve koşullar kişisel bilgisayarlarda WINDOWS işletim sistemi altında gerçekleştirildi. Bu bölümde PERTURB programının çalıştığını kanıtlamak ve değişik şartlar altında reaktivite değişimini incelemek için çeşitli problemler ele alındı. Verilen bu problemlerin önce analitik çözümleri yapıldı daha sonrada program sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırılarak yüzde hata hesaplandı. Bütün örneklerde silindirik geometri kullanıldı ve analitik çözümler MATHEMATICA adlı bir bilgisayar programından faydalanılarak yapıldı [14].

III.1. TEK GRUPLU ÇIPLAK HOMOJEN SİSTEM

III.1.1. Difüzyon Teorisi ve Pertürbasyon Teorisi Reaktivite Öngörülerinin Karşılaştırılması

Çıplak, homojen silindir şeklinde bir reaktörün tek grup sabitleri:

$D=0,9 \text{ cm}$, $\Sigma_a = 0,066 \text{ cm}^{-1}$, $\nu\Sigma_f = 0,07 \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_f = 0,028 \text{ cm}^{-1}$, $\nu = 2,5$ şeklindedir. Bu durumda k_∞ ve L^2 :

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} = 1,0606061 \quad (3.1)$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = 13,636364 \text{ cm}^2$$

olarak hesaplanırlar. $k_{etk} = 1$ olarak seçilirse:

$$k_{etk} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B_g^2} \quad (3.2)$$

$$B_g^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} = 4,44444 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

olur. Silindirik geometri kullanıldığına göre:

$$B_g^2 = \left(\frac{\nu_0}{R} \right)^2 \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Aki dağılımı ise $\phi(r) = AJ_0\left(\frac{\nu_0}{R}r\right)$ şeklindedir. Burada ν_0 , $J_0(x)$ fonksiyonunun sifıra eşit olduğu en küçük pozitif kökü olup değeri 2,404826 dır. (3.3) ifadesinden kritik yarıçap $R=36,072383$ cm olarak bulunur. $0 < r < R$ aralığında tanımlı sistemimizin merkezine $0 < r < R_0$ aralığına yutucu bir malzeme koyulduğunda,

$$\Delta\rho = \frac{-\delta\Sigma_a \int_0^{R_0} \phi^2(r) dV}{\nu\Sigma_f \int_0^R \phi^2(r) dV} \quad (3.4)$$

$$\Delta\rho = \frac{-\delta\Sigma_a \int_0^{R_0} A^2 J_0^2\left(\frac{\nu_0}{R}r\right) 2\pi r dr}{\nu\Sigma_f \int_0^R A^2 J_0^2\left(\frac{\nu_0}{R}r\right) 2\pi r dr} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılan pertürbasyon ifadesinde

$$x = \frac{\nu_0}{R}r$$

olarak tanımlanıp değişken dönüşümü yapılırsa

$$\Delta\rho = \frac{-\delta\Sigma_a}{\nu\Sigma_f} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\nu}{R}R_0} J_0^2(x) x dx}{\int_0^{\nu_0} J_0^2(x) x dx} = \frac{-\delta\Sigma_a}{\nu\Sigma_f} \frac{\frac{1}{2}x^2 [J_0^2(x) + J_1^2(x)]_0^{\frac{\nu}{R}R_0}}{\frac{1}{2}x^2 [J_0^2(x) + J_1^2(x)]_0^{\nu_0}} \quad (3.6)$$

elde edilir. $\Delta\rho = -1.10^{-4}$ olarak alınıp $\frac{R_0}{R} = \frac{1}{20}$ kabul edilerek, son ifade $\delta\Sigma_a$ için çözülürse:

$$\delta\Sigma_a = 0,000757372 \text{ cm}^{-1}$$

olarak bulunur. Yani yutma tesir kesitindeki bu miktarda bir pozitif pertürbasyon yaklaşık 10^{-4} 'lük negatif reaktivite verecektir.

Yukarda hesaplanan $\delta\Sigma_a$ 'nın difüzyon teorisi çerçevesinde yol açacağı gerçek negatif reaktivite miktarını hesaplamak amacıyla iki bölgeden oluşan silindirik şekilde bir reaktörü ele alalım. İlk bölge $0 < r < R_0$, ikinci bölge ise $R_0 < r < R$ arasında yer alacaktır. $0 < r < R_0 = R/20$ arasındaki ilk bölgede yutma tesir kesiti pertürbe edilmiş olup $\Sigma'_a = \Sigma_a + \delta\Sigma_a$ 'dır. Diğer tüm tesir kesitleri daha önce verilen değerlerini korumaktadırlar. Bu iki ayrı bölge için tek gruplu difüzyon denklemleri aşağıda verilmektedir:

$$-D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + \Sigma'_a \phi(r) = \frac{\nu\Sigma_f}{k'_{etk}} \phi(r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.7)$$

$$-D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + \Sigma_a \phi(r) = \frac{\nu\Sigma_f}{k'_{etk}} \phi(r) \quad R_0 < r < R \quad (3.8)$$

$$B'^2 = \frac{\nu\Sigma_f}{k'_{etk}} \frac{1}{D} - \frac{\Sigma'_a}{D} \quad (3.9)$$

tanımı ile (3.7) denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + B'^2 \phi(r) = 0 \quad 0 < r < R_0 \quad (3.10)$$

yazılabilir. Aynı şekilde diğer denklem de:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + B^2 \phi(r) = 0 \quad R_0 < r < R \quad (3.11)$$

olarak yazılır. (3.10) denkleminin çözümü

$$\phi(r) = A J_0(B'r) + C Y_0(B'r) \quad (3.12)$$

şeklindedir. Bu denklemde akının $r = 0$ da sonlu olması koşulu kullanılırsa, $|Y_0(0)| \rightarrow \infty$ olması nedeniyle, $C = 0$ olur.

$$\phi(r) = A J_0(B'r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.13)$$

(3.11) denkleminin çözümü ise:

$$\phi(r) = A' J_0(Br) + C' Y_0(Br) \quad R_0 < r < R \quad (3.14)$$

$\phi(R) = 0$ olması koşulundan,

$$\phi(r) = A' \left[J_0(Br) - \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_0(Br) \right] \quad (3.15)$$

olarak bulunur. Sırasıyla iki bölge arasında akıların ve akımların eşit olması koşulları (süreklilik koşulları) kullanılırsa (3.13) ve (3.14) denklemlerinden:

$$A J_0(B'R_0) = A' \left[J_0(BR_0) - \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_0(BR_0) \right] \quad (3.16)$$

$$-A B' J_1(B'R_0) = A' B \left[-J_1(BR_0) + \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_1(BR_0) \right] \quad (3.17)$$

B' ile B arasında $B'^2 = B^2 + \frac{\Sigma_a - \Sigma'_a}{D}$ bağıntısı vardır. (3.16) ve (3.17) denklemleri

matris notasyonu ile yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} J_0(B'R_0) & -J_0(BR_0) + \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_0(BR_0) \\ B' J_1(B'R_0) & -B \left[J_1(BR_0) - \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_1(BR_0) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bu determinantın sıfıra eşit olmasını sağlayan B değeri $0,0667248 \text{ cm}^{-2}$ olarak bulunmuştur. B^2 tanımından k'_{ek} 'nin değeri:

$$k'_{etk} = \frac{v\Sigma_f}{B^2 D + \Sigma_a} = 0,9999900$$

olur. Buna göre difüzyon teorisinden, $\delta\Sigma_a$ pertürbasyonunun yol açtığı gerçek reaktivite değişimi

$$\Delta\rho = \frac{1}{k_{etk}} - \frac{1}{k'_{etk}} = -0,996490 \times 10^{-4}$$

olarak bulunur. Geliştirdiğimiz program, değişik sayıda (n) lineer sonlu eleman kullanılarak bir kez orijinal (pertürbe edilmemiş) tek bölge, bir kez de pertürbe edilmiş (iki bölge) sistem için koşuldu. Programın n elemanla hesapladığı orijinal sistem etkin çoğaltma katsayısı $k_{etk}(n)$, pertürbe sistem etkin çoğaltma katsayısı ise $k'_{etk}(n)$ ile gösterildi. Bu değerler kullanılarak n elemanla, programın hesapladığı difüzyon teorisi reaktivite değeri $\Delta\rho_d(n)$:

$$\Delta\rho_d(n) = \frac{1}{k_{etk}(n)} - \frac{1}{k'_{etk}(n)} \quad (3.19)$$

olarak gösterildi. Programın n elemanla orijinal sistem için hesapladığı akı dağılımı kullanılarak (3.4) pertürbasyon teorisi ifadesinin bölüm II.4'de sunulan sonlu eleman formülasyonu ile yine program (PERTURB) tarafından n elemanlı pertürbasyon teorisi reaktivite değeri hesaplandı ve bu değer $\Delta\rho_p(n)$ olarak gösterildi. Hesaplanan yüzde hatalar ise bu bölümde analitik sonuçlarla elde edilen $\Delta\rho_{an} = -0.996491 \times 10^{-4}$ değeri doğru kabul edilerek hesaplanmıştır. Yüzde hataları:

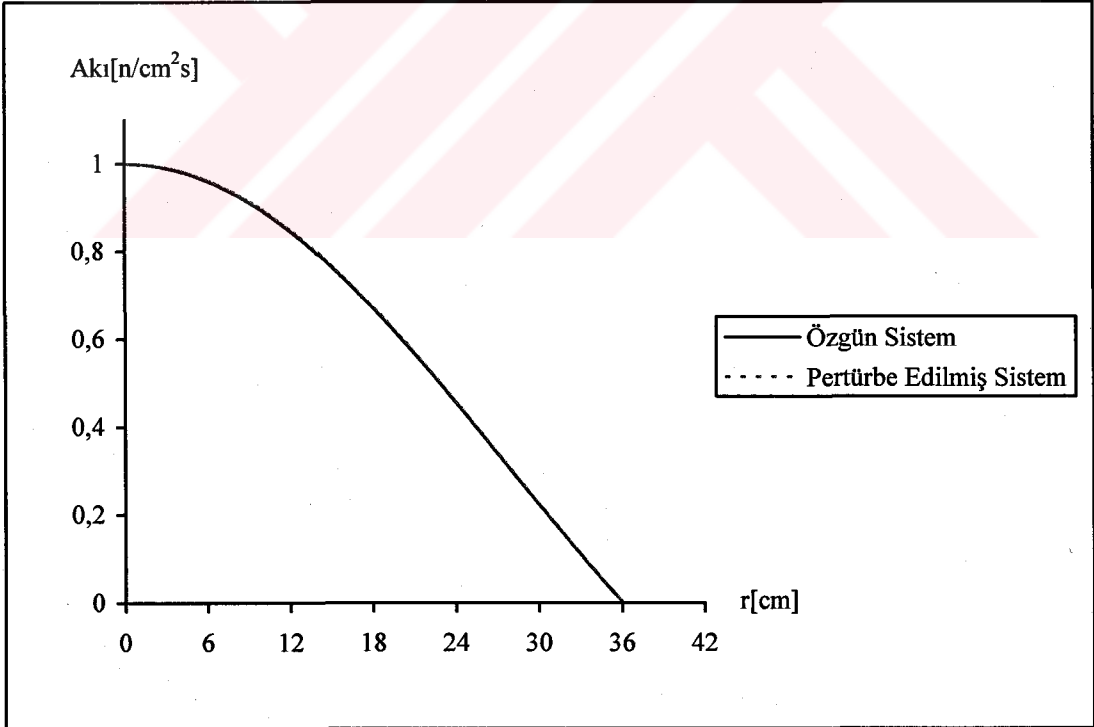
$$\% \text{ hata}_{(i)} = \left| \frac{\Delta\rho_{an} - \Delta\rho_i(n)}{\Delta\rho_{an}} \right| \times 100 \quad i = \text{difüzyon veya pertürbasyon}$$

formülüyle hesaplanmıştır.

Tablo 3.1 $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ ve $R_0=R/20$ olması durumunda elde edilen sonuçlar

El. Say. (n)	k'_{etk}	k_{etk}	$\Delta\rho_d(n)$ (10^{-4})	% Hata (d)	$\Delta\rho_p(n)$ (10^{-4})	% Hata (p)
40	1,000496	1,000596	-0,996905	0,0416347	-1,000545	0,406921
80	1,000046	1,000146	-0,996848	0,0358590	-1,000045	0,356744
160	0,999934	1,000034	-0,996845	0,0356447	-0,999928	0,344995
320	0,999906	1,000005	-0,996845	0,0356409	-0,999899	0,342076

Tablo 3.1'deki program sonuçlarından da görüldüğü gibi eleman sayısı artırıldıkça, yani ızgara incelidikçe sayısal olarak hesaplanan hem difüzyon hem de pertürbasyon teorisi hataları azalmaktadır. Beklendiği şekilde pertürbasyon teorisi hataları, difüzyon teorisi hatalarının yaklaşık on katıdır. Bu problem için 80 lineer elemanla elde edilen pertürbe edilmiş ve özgün sistemin akı dağılımları Şekil 3.1'de sunulmuştur.



Şekil 3.1 $R_0 = R/20$, $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.

Grafikten de anlaşıldığı üzere akı dağılımları arasında bir fark gözlenmemektedir. Çünkü hem pertürbasyon çok küçük hem de pertürbasyonun etki ettiği alan çok küçüktür.

Şimdi pertürbasyon miktarının biraz arttırılması durumunda hataların ne şekilde değiştiğini gözlemlemek için önce yaklaşık $\Delta\rho = 10^{-3}$ çıkması için $\delta\Sigma_a$ 'nın ne olması gerektiğini, pertürbasyon teorisi ifadesinden hesaplayalım. Bu hesaplamalar sonucu $\delta\Sigma_a$ ve Σ_a' değerleri $\delta\Sigma_a = 0,00757372 \text{ cm}^{-2}$, $\Sigma_a' = 0,0735737 \text{ cm}^{-2}$ olarak saptanmıştır. Diğer büyüklükler aynı olmak üzere Σ_a' 'deki değişimden dolayı difüzyon denkleminin çözümünde de bazı değişiklikler olmuştur.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + \left(\frac{\nu\Sigma_f}{k'_{etk}} \cdot \frac{1}{D} - \frac{\Sigma_a'}{D} \right) \phi(r) = 0 \quad 0 < r < R_0 \quad (3.20)$$

Burada

$$B'^2 = \frac{\Sigma_a'}{D} - \frac{\nu\Sigma_f}{k'_{etk}} \frac{1}{D} \quad (3.21)$$

olarak tanımlanırsa (3.20) denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) - B'^2 \phi(r) = 0 \quad (3.22)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin çözümü

$$\phi(r) = A I_0(B'r) + C K_0(B'r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.23)$$

şeklindedir. $R_0 < r < R$ bölgesi için ise çözüm değişmemiştir.

$$\phi(r) = A' J_0(Br) + C' Y_0(Br) \quad R_0 < r < R \quad (3.24)$$

Daha önce uygulanan sınır koşulları (3.23) ve (3.24) ifadelerine uygulanıp sabit sayısı ikiye düşürüldükten sonra $r = R_0$ 'da akı ve akım sürekliliğinden:

$$A I_0(B'R_0) = A' \left[J_0(BR_0) - \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_0(BR_0) \right] \quad (3.25)$$

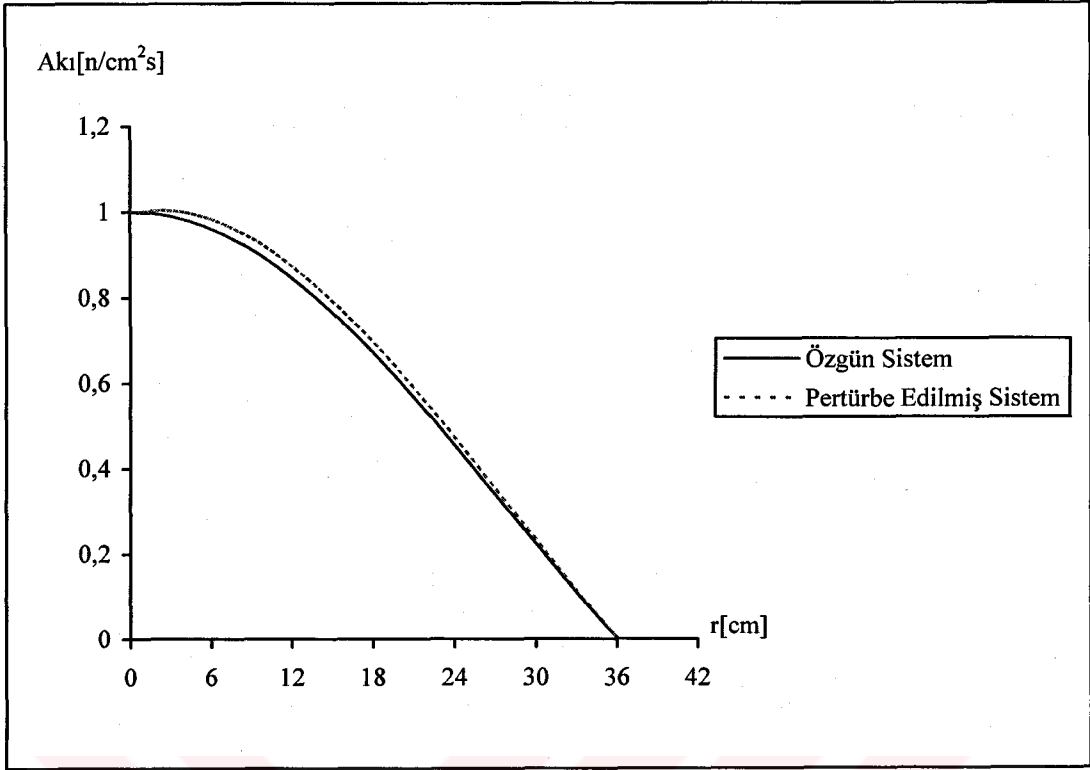
$$A B' I_1(B'R_0) = A' B[-J_1(BR_0) + \frac{J_0(BR)}{Y_0(BR)} Y_1(BR_0)] \quad (3.26)$$

denklemleri elde edilir. Son iki denklem bilinmeyenler A ve A' olarak homojen bir lineer sistem şeklinde yazılırsa katsayılar matrisinin determinanı sifıra eşitlenerek $B=0,0672309 \text{ cm}^{-2}$ sonucuna ulaşılır. $k'_{etk}=0,999030$, reaktivite değişiminin analitik değeri ise $\Delta\rho_{an.} = -0,971396 \times 10^{-3}$ olarak bulunur. Bu koşullar altında yine değişik sayıda elemanlar için program koşularak Tablo 3.2'deki değerler elde edilir.

Tablo 3.2 $\delta\Sigma_a = 0,007574$ ve $R_0=R/20$ olması durumunda elde edilen sonuçlar

El. Say. (n)	k'_{etk}	k_{etk}	$\Delta\rho_d(n)$ (10^{-3})	% Hata (d)	$\Delta\rho_p(n)$ (10^{-3})	% Hata (p)
40	0,999624	1,000596	-0,971982	0,0602905	-1,000545	3,000766
80	0,999175	1,000146	-0,971173	0,0229375	-1,000045	2,949293
160	0,999063	1,000034	-0,971175	0,0227710	-0,999928	2,937241
320	0,999035	1,000005	-0,971175	0,0227453	-0,999899	2,934246

Tablo 3.1. ve Tablo 3.2. deki pertürbasyon teorisinin hesapladığı hatalara bakıldığında, beklendiği gibi pertürbasyon miktarı yaklaşık on katına çıkartıldığında pertürbasyon teorisi hatalarının da yaklaşık on kata çıktığı görülmektedir. Bu da beklenen bir durumdur. Çünkü pertürbasyon teorisi ancak küçük değişimler için iyi sonuç verir. Bu problem için de 80 elemanla elde edilen pertürbe edilmiş ve özgün sistem akıları Şekil 3.2'de grafiksel olarak sunulmuştur.



Şekil 3.2 $R_0 = R/20$, $\delta\Sigma_a = 0,007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları.

Beklenildiği gibi pertürbe edilmiş alan küçük olduğundan, pertürbe edilmiş sistem ve özgün sistem akıları arasında belirgin bir farklılık bulunmamaktadır.

Şimdi pertürbasyonun etki ettiği alanın genişletilmesi durumunda pertürbasyon teorisi hatalarının nasıl değiştiğini göstermek amacıyla $R_0=R/10$, $\delta\Sigma_a = 0,000757372 \text{ cm}^{-2}$ olarak alınır ve daha önce yapıldığı gibi difüzyon denklemleri çözülürse $B = 0,0668953 \text{ cm}^{-2}$ olarak bulunur. Ayrıca etkin çoğaltma katsayısının ve reaktivitenin analitik değerleri de $k'_{etk} = 0,999608$, $\Delta\rho_{an.} = -0,392566 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanır. Bu şartlar altında program koşularak elde edilen sonuçlar Tablo 3.3'te sunulmuştur.

Tablo 3.3 $\delta\Sigma_a=0,0007574$ ve $R_0=R/10$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.

El. Say. (n)	k'_{etk}	k_{etk}	$\Delta\rho_d$ (10^{-3})	% Hata (d)	$\Delta\rho_p$ (10^{-3})	% Hata (p)
40	1,000202	1,000596	-0,393208	0,1635020	-0,395817	0,828263
80	0,999753	1,000146	-0,392460	0,0270777	-0,395684	0,794368
160	0,999641	1,000034	-0,392478	0,0224134	-0,395654	0,786537
320	0,999613	1,000005	-0,392482	0,0212602	-0,395646	0,784584

Pertürbasyonun etkilediği yarıçapın iki katına çıkarılması durumunda pertürbasyon teorisi hatalarının (Tablo 3.1 ve Tablo 3.3 son sütun karşılaştırması) iki katına ya da daha fazlasına çıktığı görülmektedir. Yutma tesir kesitinin daha geniş bir bölgede artırılmasının difüzyon teorisi hatalarının da artmasına yol açtığı görülmektedir. (Tablo 3.1, Tablo 3.3 beşinci sütun karşılaştırması)

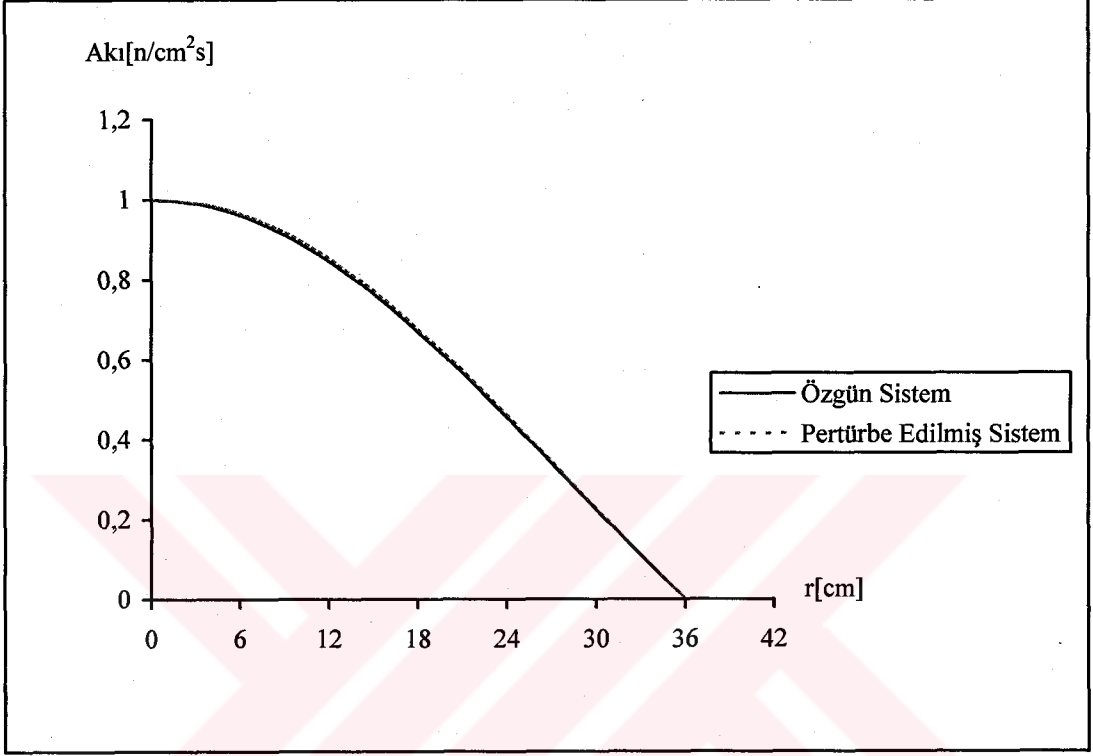
Son olarak hem $R_0 = R/10$ alıp $\delta\Sigma_a$ da bir önceki örneğe göre 10 kat artırılsın. Daha önce sunulan analitik hesaplama sonucu pertürbe edilmiş sistemin etkin çoğaltma katsayısı bu problem için $k'_{etk} = 0,996350$ olarak bulunmuştur. Reaktivite değişimi analitik sonucu ise $\Delta\rho_{an.} = -0,366361 \times 10^{-2}$ olarak hesaplanmıştır. Bu problem için de değişik eleman sayıları ile koşulan PERTURB programının sonuçları Tablo 3.4'de sunulmaktadır.

Tablo 3.4 $\delta\Sigma_a = 0,007574$ ve $R_0=R/10$ olması durumunda elde edilen sonuçlar.

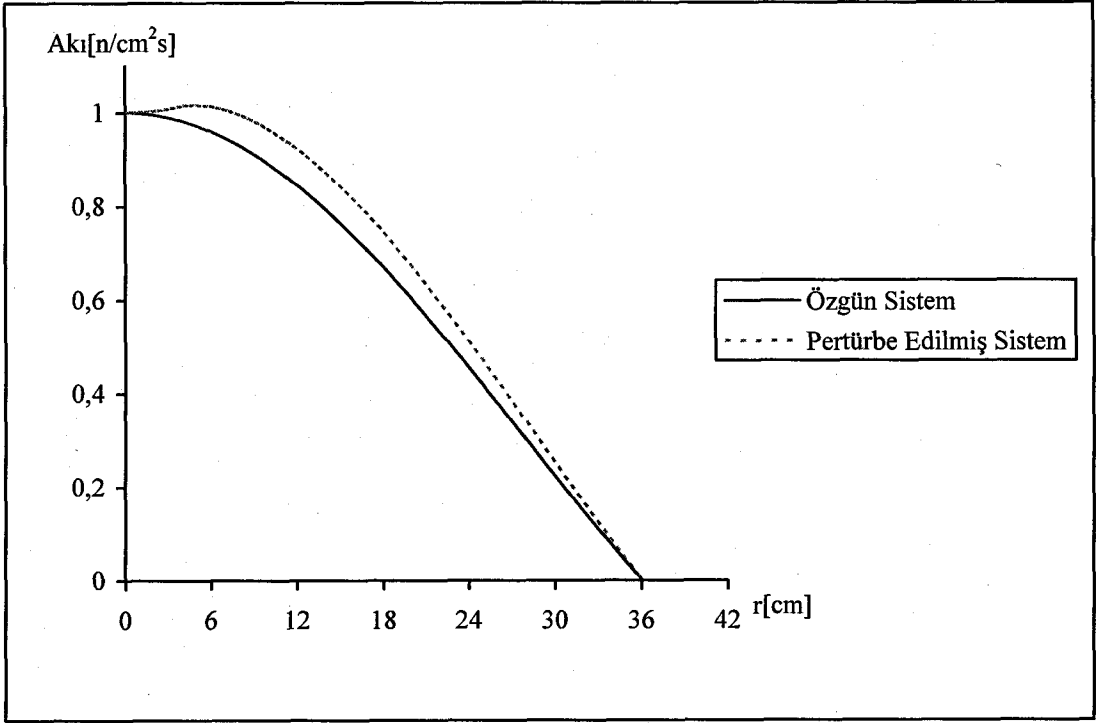
El. Say. (n)	k'_{etk}	k_{etk}	$\Delta\rho_d$ (10^{-2})	% Hata (d)	$\Delta\rho_p$ (10^{-2})	% Hata (p)
40	0,996944	1,000596	-0,366117	0,0665726	-0,395817	8,040215
80	0,996495	1,000146	-0,366305	0,0152872	-0,395684	8,003895
160	0,996383	1,000034	-0,366351	0,0027073	-0,395654	7,995504
320	0,996355	1,000005	-0,366363	0,0004291	-0,395646	7,993412

Tablo 3.4 incelendiğinde pertürbasyon teorisi hatalarının %8'lere çıktığı ve artık pertürbasyon teorisinin kullanılmayacak hale geldiği gözlenmektedir. Difüzyon teorisi sonuçlarında ise ızgara inceltildikçe hatanın sifıra gittiği Tablo 3.4'te görülmektedir.

Pertürbe edilmiş alanın büyük olması durumunda hem küçük ($\delta\Sigma_a = 0,0007574$) hem de daha büyük ($\delta\Sigma_a = 0,007574$) pertürbasyonlar altında özgün ve pertürbe edilmiş sistem akıları Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’de grafik olarak sunulmuşlardır.



Şekil 3.3 $R_0 = R/10$, $\delta\Sigma_a = 0,0007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları



Şekil 3.4 $R_0 = R/10$, $\delta\Sigma_a = 0,007574$ olan pertürbe edilmiş ve özgün sistem akı dağılımları

Grafiklerden de görüldüğü gibi akı dağılımları arasındaki belirgin farklılık ancak hem pertürbe edilmiş alanın hem de pertürbasyonun büyük olduğu durumda ortaya çıkmaktadır.

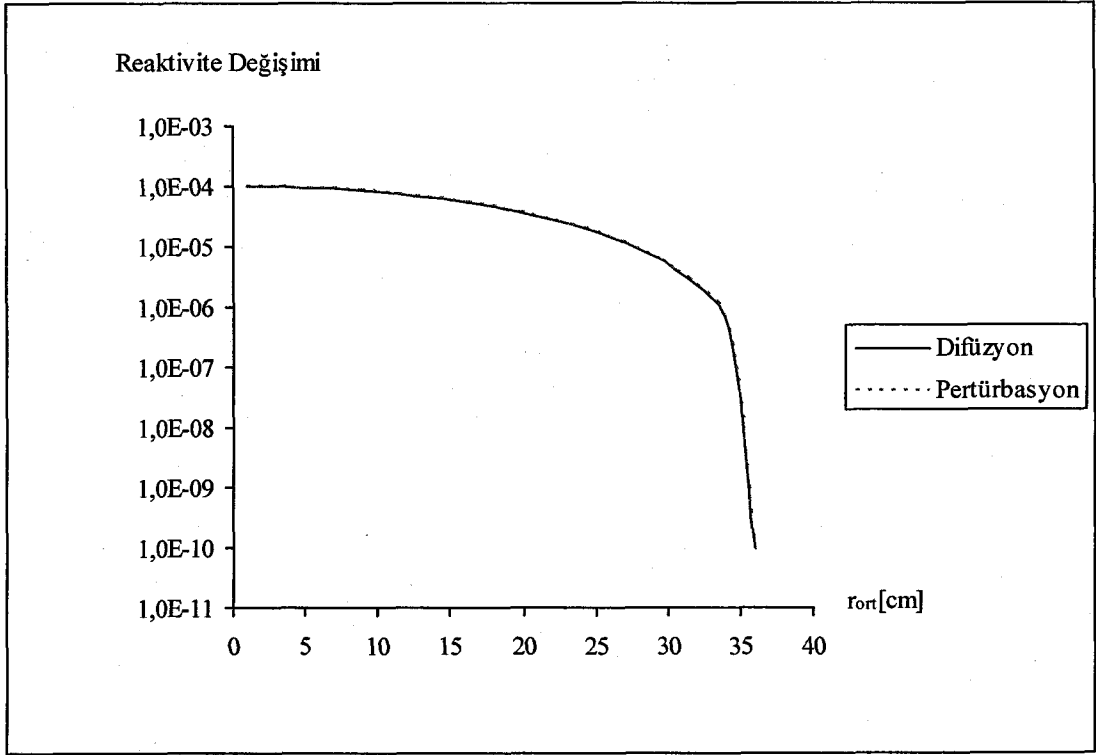
III.1.2. Pertürbasyonun Yerinin Değişmesinin Reaktivite Üzerindeki Etkisinin İncelenmesi

Nükleer sisteme verilen bir pertürbasyonun yerleştirildiği yere göre reaktiviteye etkisinin irdelenmesi için 10.22 cm^2 alanlı, eşmerkezli, Σ_a 'da $0.000757372 \text{ cm}^{-1}$ 'lik pertürbasyona yol açan bir malzeme eklendiği varsayılmış, bu pertürbasyonun yeri değiştirilerek hem difüzyon teorisi hem de pertürbasyon teorisi ile pertürbasyonun yol açtığı reaktivite değişiminin sayısal olarak hesaplanan değerleri Tablo 3.5.'te sunulmuştur.

Tablo 3.5 10,22 cm² alanlı eş merkezli pertürbasyon sonuçları.

İç Yarıçap (cm)	Dış Yarıçap (cm)	Kalınlık (cm)	$\Delta\rho_a$	$\Delta\rho_p$
0	1,803619	1,803619	-0,996845x10 ⁻⁴	-0,999889x10 ⁻⁴
5,101405	5,410858	0,309452	-0,942156x10 ⁻⁴	-0,943267x10 ⁻⁴
8,835893	9,018096	0,182203	-0,836838x10 ⁻⁴	-0,837237x10 ⁻⁴
12,495840	12,625334	0,129494	-0,695003x10 ⁻⁴	-0,695094x10 ⁻⁴
16,132060	16,232573	0,100512	-0,534131x10 ⁻⁴	-0,534141x10 ⁻⁴
19,757658	19,839811	0,0821528	-0,373005x10 ⁻⁴	-0,373033x10 ⁻⁴
23,377576	23,447049	0,0694729	-0,228944x10 ⁻⁴	-0,228996x10 ⁻⁴
26,994100	27,054288	0,0601876	-0,115336x10 ⁻⁴	-0,115385x10 ⁻⁴
30,608432	30,661526	0,0530936	-0,399432x10 ⁻⁵	-0,399666x10 ⁻⁵
34,221268	34,268764	0,0474966	-0,420503x10 ⁻⁶	-0,420772x10 ⁻⁶
36,027265	36,072383	0,0451187	-1,000007x10 ⁻¹⁰	-0,816402x10 ⁻¹⁰

Tablo 3.5.'teki sonuçlar kullanılarak reaktivite nin yarıçapa göre değişimi Şekil 3.5'te grafiksel olarak sunulmuştur. Şekilden görüldüğü gibi pertürbasyonun merkeze, yani akının büyük olduğu yere eklenmesi halinde reaktivite değişimi büyük olmaktadır. Bu beklenen sonucu hem difüzyon teorisi hem de pertürbasyon teorisi sayısal hesapları desteklemektedir.



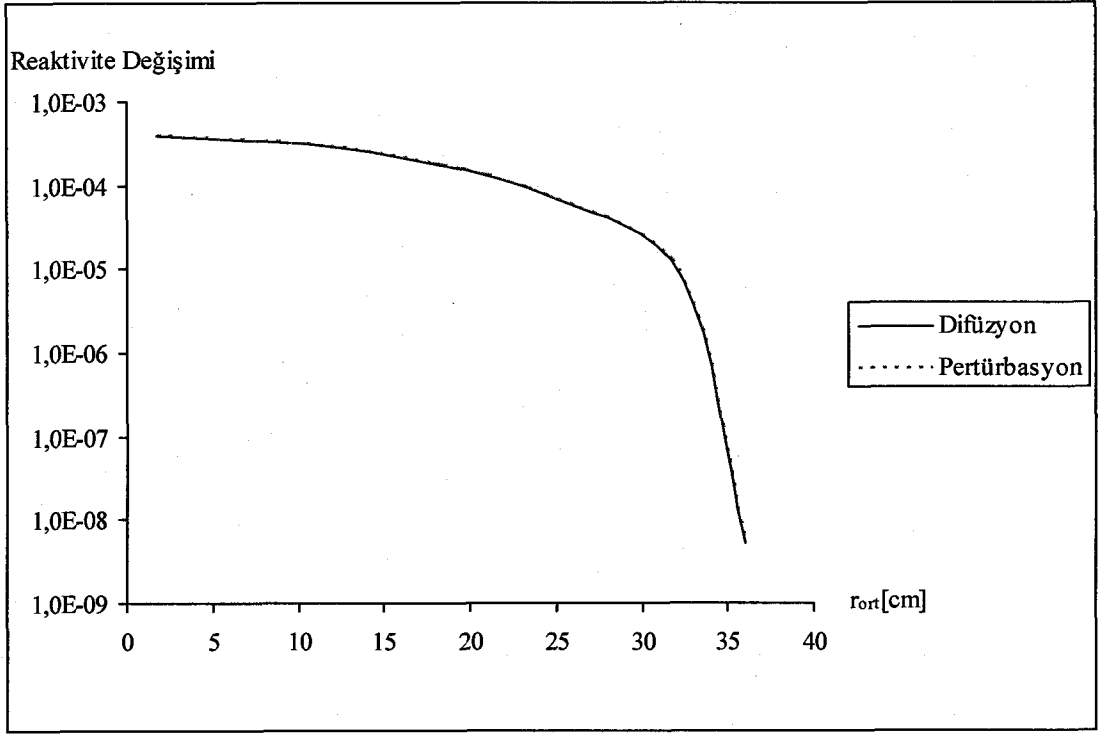
Şekil 3.5. 10,22 cm² alanlı, eş merkezli bölgelerde reaktivite değişimlerinin ortalama yarıçapa göre dağılımları.

Aynı işlem sadece eşmerkezli pertürbasyon alanı 40,88 cm²'ye çıkartılarak tekrarlanmış, bunun sonuçları da Tablo 3.6.'da sunulmuştur.

Tablo 3.6 44,88 cm² alanlı eşmerkezli pertürbasyon sonuçları.

İç Yarıçap	Dış Yarıçap (cm)	Kalınlık (cm)	$\Delta\rho_d$	$\Delta\rho_p$
0	3,607238	3,607238	-0,392484x10 ⁻³	-0,395643x10 ⁻³
10,202811	10,821715	0,618904	-0,311044x10 ⁻³	-0,311461x10 ⁻³
17,671787	18,036192	0,364405	-0,183336x10 ⁻³	-0,183432x10 ⁻³
24,991680	25,250668	0,258988	-0,682673x10 ⁻⁴	-0,683354x10 ⁻⁴
32,264121	32,465145	0,201025	-0,720761x10 ⁻⁵	-0,721486x10 ⁻⁵
35,891568	36,072383	0,180815	-0,530004x10 ⁻⁸	-0,525444x10 ⁻⁸

Benzer şekilde Tablo 3.6'daki sonuçlar da Şekil 3.6'da grafiksel olarak ortaya konulmuştur. Bu alt bölümde yer alan tüm program sonuçları 320 adet kuadratik eleman kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil 3.6 44,88 cm² alanlı, eşmerkezli bölgelerde reaktivite değişimlerinin ortalama yarıçapa göre dağılımları

III.2. İKİ GRUPLU ÇIPLAK HOMOJEN SİSTEM

Tablo 3.7 İki gruplu homojen sistemin tesir kesitleri

	1. Grup	2. Grup
$D(cm)$	1,2627	0,3543
$\Sigma_r(cm^{-1})$	0,02619	0,1210
$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	0,008476	0,18514
$\Sigma_f(cm^{-1})$	0,028	0,01
χ	1	0
$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}(cm^{-1}) = 0,01412$		

Tesir kesitleri Tablo (3.7)'de verilmiş olan iki gruplu yetkin bir sistem için etkin çoğaltma katsayısı:

$$k_{ek} = \frac{(\nu\Sigma_{f,2}/\Sigma_{a,2})(\Sigma_{s,2\leftarrow 1}/\Sigma_{r,1})}{(1+L_1^2B_g^2)(1+L_2^2B_g^2)} + \frac{(\nu\Sigma_{f,1}/\Sigma_{r,1})}{(1+L_1^2B_g^2)} \quad (3.27)$$

şeklindedir. Burada yetkinlik koşulu kullanılırsa B_g^2 'ye bağlı ikinci dereceden bir denklem ortaya çıkar. Bu denklemin çözümünden $B_g^2 = 0,00293549 \text{ cm}^{-2}$ olarak bulunur. Öte yandan $B_g^2 = (\nu_0/R)^2$ idi, buradan R çekilirse, kritik yarıçap $R=44,385695 \text{ cm}$ olarak bulunur.

İki gruplu yetkin bir sistemin akı dağılımları, $\chi_1 = 1$ ve $\chi_2 = 0$ olduğu da göz önüne alınarak

$$D_1B_g^2\phi_1(r) + \Sigma_{r,1}\phi_1(r) = \nu\Sigma_{f,1}\phi_1(r) + \nu\Sigma_{f,2}\phi_2(r) \quad (3.28)$$

$$D_2B_g^2\phi_2(r) + \Sigma_{a,2}\phi_2(r) - \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\phi_1(r) = 0 \quad (3.29)$$

denklemleri aracılığı ile hesaplanırlar. (3.29) denklemini düzenlenerek, termal grup akısının hızlı grup akısına oranı, S olarak gösterilirse

$$S = \phi_2(r)/\phi_1(r) = \Sigma_{s,2\leftarrow 1}/(D_2B_g^2 + \Sigma_{a,2}) = 0,115699 \quad (3.30)$$

termal ve hızlı grup akı dağılımları:

$$\phi_1(r) = J_0\left(\frac{v_0}{R}r\right) \quad (3.31)$$

$$\phi_2(r) = 0,115699J_0\left(\frac{v_0}{R}r\right) \quad (3.32)$$

şeklinde bulunurlar. Benzer şekilde ek akı dağılımları

$$D_1B_g^2\phi_1^+(r) + \Sigma_{r,1}\phi_1^+(r) - \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\phi_2^+(r) = v\Sigma_{f,1}\phi_1^+(r) \quad (3.33)$$

$$D_2B_g^2\phi_2^+(r) + \Sigma_{a,2}\phi_2^+(r) = v\Sigma_{f,2}\phi_2^+(r) = 0 \quad (3.34)$$

denklemleri aracılığıyla hesaplanırlar. (3.34) denklemi düzenlenerek termal grup ek akısının hızlı grup ek akısına oranı, S^+ , elde edilir.

$$S^+ = \phi_2^+(r) / \phi_1^+(r) = v\Sigma_{f,2} / (D_2B_g^2 + \Sigma_{a,2}) = 1,5170430990441643 \quad (3.35)$$

Ek akı dağılımları ise:

$$\phi_1^+(r) = J_0\left(\frac{v_0}{R}r\right) \quad (3.36)$$

$$\phi_2^+(r) = 1,5170430990441643J_0\left(\frac{v_0}{R}r\right) \quad (3.37)$$

denklemleri ile verilebilirler.

Bu aşamada $0 < r < R$ aralığında tanımlı olan iki gruplu bir sistemin $0 < r < R_0$ aralığındaki kısmında ikinci grup yutma tesir kesitinde pertürbasyon olduğu varsayılın. Yutma tesir kesitindeki bu değişimin reaktivitede meydana getireceği değişim:

$$\delta\rho = -\frac{\int_V \phi^+(r) \delta M \phi(r) dV}{\int_V \phi^+(r) F \phi(r) dV} \quad (3.38)$$

denklemleri ile yaklaşık olarak saptanabilir. Sadece yutma tesir kesitinde değişim olduğuna göre $\underline{\underline{\delta M}}$ operatörü

$$\underline{\underline{\delta M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \Sigma_{a,2} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

şeklindedir. (3.38) denkleminin payı

$$\int_{V_p} \underline{\phi}^+(r) \underline{\underline{\delta M}} \underline{\phi}(r) dV = \int_{V_p} \left\{ \begin{bmatrix} \phi_1^+(r) & \phi_2^+(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \Sigma_{a,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{bmatrix} \right\} dV \quad (3.40)$$

$$\int_{V_p} \underline{\phi}^+(r) \underline{\underline{\delta M}} \underline{\phi}(r) dV = \delta \Sigma_{a,2} \int_{V_p} \phi_2^+(r) \phi_1(r) dV \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (3.38) denkleminin paydası da :

$$\int_V \underline{\phi}^+(r) \underline{F} \underline{\phi}(r) dV = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} \phi_1^+(r) & \phi_2^+(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \Sigma_{f,1} & \nu \Sigma_{f,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{bmatrix} \right\} dV \quad (3.42)$$

$$\int_V \underline{\phi}^+(r) \underline{F} \underline{\phi}(r) dV = \int_V [\nu \Sigma_{f,1} \phi_1^+(r) \phi_2(r) + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2^+(r) \phi_1(r)] dV \quad (3.43)$$

olarak hesaplanırlar. Elde edilen bu ifadeler (3.38) denklemine, akı ve ek akı için bulunan ifadeler de göz önüne alınarak, yerleştirilirse reaktivite değişimi için

$$\delta \rho = - \frac{S^+ S \delta \Sigma_{a,2} \int_0^{R_0} J_0^2 \left(\frac{\nu_0}{R} r \right) r dr}{\nu \Sigma_{f,1} \int_0^R J_0^2 \left(\frac{\nu_0}{R} r \right) r dr + \nu \Sigma_{f,2} S \int_0^R J_0^2 \left(\frac{\nu_0}{R} r \right) r dr} \quad (3.44)$$

ifadesi elde edilir. $\delta \rho = -1.10^{-4}$ ve $R_0 = R/20$ olarak alınıp $\delta \Sigma_{a,2}$ için çözülmüşse $\delta \Sigma_{a,2} = 0,00184291$ olarak bulunur. Bu demektir ki termal grup yutma tesir kesitindeki bu kadarlık bir pertürbasyon $R_0 = R/20$ seçilmesi halinde pertürbasyon teorisine göre reaktivitede yaklaşık 10^{-4} 'lük bir azalmaya yol açacaktır.

Yukarıda hesaplanan 10^{-4} 'lük reaktivite yaklaşık bir değerdir. Verilen $\delta \Sigma_{a,2}$ pertürbasyonu ve $R_0 = R/20$ seçimi ile reaktivitede meydana gelecek gerçek değişim

difüzyon teorisi kullanılarak analitik olarak hesaplanacaktır. Böyle bir hesap ancak iki bölgeli (pertürbasyonun bulunduğu R_0 yarıçaplı merkezi bölge ile $R_0 < r < R$ arasında yer alan pertürbe edilmemiş bölge) bir difüzyon probleminin analitik çözümü ile mümkündür. Bu analitik çözüme önce $0 < r < R_0$ arasında yer alan merkezi bölge ile başlansın.

$0 < r < R_0$ aralığındaki bölge için iki grup denklemleri:

$$-\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} \phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{r,1} \phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{k'_{etk}} (\nu_1 \Sigma_{f,1} \phi_1(\vec{r}) + \nu_2 \Sigma_{f,2} \phi_2(\vec{r})) \quad (3.45)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} \phi_2(\vec{r}) + \Sigma'_{a,2} \phi_2(\vec{r}) = \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \phi_1(\vec{r}) \quad (3.46)$$

şeklindedir.

$$M_1^2 = \frac{D_1 k'_{etk}}{(\Sigma_{r,1} k'_{etk} - \nu_1 \Sigma_{f,1})} \quad (3.47)$$

$$M_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma'_{a,2}} \quad (3.48)$$

tanımlamalarıyla (3.45) ve (3.46) denklemleri

$$\nabla^2 \phi_1(\vec{r}) - \frac{1}{M_1^2} \phi_1(\vec{r}) + \frac{1}{k'} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2}}{D_1} \phi_2(\vec{r}) \quad (3.49)$$

$$\nabla^2 \phi_2(\vec{r}) - \frac{1}{M_2^2} \phi_2(\vec{r}) + \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2} \phi_1(\vec{r}) \quad (3.50)$$

haline gelir. (3.50) denkleminde $\phi_1(r)$ çekilip (3.49)'da yerine koyulup düzenlendiğinde

$$\nabla^4 \phi_2(\vec{r}) - \left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2} \right) \nabla^2 \phi_2(\vec{r}) - \left(\frac{1}{k} \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \nu_2 \Sigma_{f,2}}{D_1 D_2} - \frac{1}{M_1^2 M_2^2} \right) \phi_2(\vec{r}) = 0 \quad (3.51)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem

$$(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \lambda^2) \phi_2(\vec{r}) = 0 \quad (3.52)$$

şeklinde düzenlenirse

$$\mu^2 \lambda^2 = \frac{1}{k'_{etk}} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_1 D_2} - \frac{1}{M_1^2 M_2^2} \quad (3.53)$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2} \quad (3.54)$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.53) ve (3.54) ifadelerinden hareketle μ^2 ye bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$\mu^2(k'_{etk}) = - \frac{(M_1^2 + M_2^2) + \sqrt{\left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2}\right) + 4 \left(\frac{1}{k'} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_1 D_2} - \frac{1}{M_1^2 M_2^2}\right)}}{2M_1^2 M_2^2} \quad (3.55)$$

ifadesi bulunur. (3.54) ve (3.55) denklemlerinden yararlanarak da λ^2 için:

$$\lambda^2(k'_{etk}) = \frac{(M_1^2 + M_2^2) + \sqrt{\left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2}\right) + 4 \left(\frac{1}{k'} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_1 D_2} - \frac{1}{M_1^2 M_2^2}\right)}}{2M_1^2 M_2^2} \quad (3.56)$$

ifadesi elde edilir. μ^2 ve λ^2 'nin değerleri k'_{etk} 'in fonksiyonu olarak MATEMATICA kullanılarak hesaplanmıştır. (3.52) denkleminin çözümünün

$$\phi_2(r) = A X(r) + C Y(r) \quad (3.57)$$

olduğu varsayılarak (3.46) denklemi

$$(\nabla^2 + \mu^2)X(r) = 0 \quad (3.58)$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2)Y(r) = 0 \quad (3.59)$$

olarak yazılabilir. Sonsuz boyutlu silindirik geometride (3.58) denklemi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dX(r)}{dr} \right) + \mu^2 X(r) = 0 \quad (3.60)$$

olarak yazılır. $X(0)$ da sonlu olması koşulu kullanıldığında, bu denkleminin çözümü

$$X(r) = J_0(\mu r) \quad (3.61)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.59) ifadesi de silindrsel geometride

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY(r)}{dr} \right) - \lambda^2 Y(r) = 0 \quad (3.62)$$

şeklinde yazılır. Yine $r = 0$ da sonlu olması koşulu kullanılarak (3.62) denkleminin çözümü

$$Y(r) = I_0(\lambda r) \quad (3.63)$$

elde edilir. Bu sonuçlar (3.57) denkleminde kullanılırsa termal grup akı dağılımı:

$$\phi_2(r) = A J_0(\mu r) + C I_0(\lambda r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.64)$$

olarak saptanır. Benzer şekilde hızlı grup hızlı grup akı dağılımı için

$$\phi_1(r) = A' X(r) + C' Y(r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.65)$$

sonucu yazılabilir. (3.64) ve (3.65) denklemlerindeki sonuçlar (3.45) ifadesinde kullanılırsa:

$$\left[(D_1 \mu^2 + \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k'_{\text{etk}}} \nu_1 \Sigma_{f,1}) A' - \frac{1}{k'_{\text{etk}}} \nu_2 \Sigma_{f,2} A \right] X(r) - \left[(\lambda^2 D_1 - \Sigma_{r,1} + \frac{1}{k'_{\text{etk}}} \nu_1 \Sigma_{f,1}) C' + \frac{1}{k'_{\text{etk}}} \nu_2 \Sigma_{f,2} C \right] Y(r) = 0 \quad (3.66)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $X(r)$ ve $Y(r)$ 'nin katsayılarının sıfır olması gerekir. Böylece,

$$(D_1 \mu^2 + \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k} \nu_1 \Sigma_{f,1}) A' - \frac{1}{k} \nu_2 \Sigma_{f,2} A = 0 \quad (3.67)$$

$$(\lambda^2 D_1 - \Sigma_{r,1} + 1/k \nu_1 \Sigma_{f,1}) C' + 1/k \nu_2 \Sigma_{f,2} C = 0 \quad (3.68)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde

$$S_1 = \frac{A'}{A} = \frac{1/k \nu_2 \Sigma_{f,2}}{(D_1 \mu^2 + \Sigma_{r,1} - 1/k \nu_1 \Sigma_{f,1})} \quad (3.69)$$

$$S_2 = \frac{C'}{C} = -\frac{1/k \nu_2 \Sigma_{f,2}}{(D_1 \lambda^2 - \Sigma_{r,1} + 1/k \nu_1 \Sigma_{f,1})} \quad (3.70)$$

tanımları yapılırsa hızlı grup akı dağılımı

$$\phi_1(r) = A S_1 J_0(\mu r) + C S_2 I_0(\lambda r) \quad 0 < r < R_0 \quad (3.71)$$

olarak bulunur.

$R_0 < r < R$ aralığındaki ikinci bölge (pertürbe edilmemiş bölge) için iki gruplu difüzyon denklemleri:

$$-\bar{\nabla} \cdot D_1 \bar{\nabla} \phi_1(r) + \Sigma_{r,1} \phi_1(r) = \frac{1}{k'_{etik}} (\nu_1 \Sigma_{f,1} \phi_1(r) + \nu_2 \Sigma_{f,2} \phi_2(r)) \quad (3.72)$$

$$-\bar{\nabla} \cdot D_2 \bar{\nabla} \phi_2(r) + \Sigma_{a,2} \phi_2(r) = \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \phi_1(r) \quad (3.73)$$

olarak yazılır. Birinci bölge denklemlerine benzer olan bu denklemlerin çözümünde de aynı yol izlenecektir. M_1^2 büyüklüğü, bu bölgede de geçerli olmak üzere

$$\tilde{M}_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma_{a,2}} \quad (3.74)$$

tanımı yapılarak ikinci bölge denklemleri

$$\nabla^2 \phi_1(\vec{r}) - \frac{1}{M_1^2} \phi_1(\vec{r}) + \frac{1}{k'_{etik}} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2}}{D_1} \phi_2(\vec{r}) \quad (3.75)$$

$$\nabla^2 \phi_2(\vec{r}) - \frac{1}{\tilde{M}_2^2} \phi_2(\vec{r}) + \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2} \phi_1(\vec{r}) \quad (3.76)$$

olarak yazılır.

$$(\nabla^2 + \tilde{\mu}^2)(\nabla^2 - \tilde{\lambda}^2) \phi_2(\vec{r}) = 0 \quad (3.77)$$

şekline getirilen ikinci bölge birinci grup denkleminde:

$$\tilde{\mu}^2 \tilde{\lambda}^2 = \frac{1}{k'_{etik}} \frac{\nu_2 \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_1 D_2} - \frac{1}{M_1^2 \tilde{M}_2^2} \quad (3.78)$$

$$\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\mu}^2 = \frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{\tilde{M}_2^2} \quad (3.79)$$

olmak üzere;

$$\phi_2(r) = \tilde{A} \tilde{X}(r) + \tilde{C} \tilde{Y}(r) \quad R_0 < r < R \quad (3.80)$$

çözümü yazılabilir. Bu çözüm (3.77) ifadesinde yerine yazılırsa:

$$(\nabla^2 + \tilde{\mu}^2) \tilde{X}(\tilde{r}) = 0 \quad (3.81)$$

$$(\nabla^2 - \tilde{\lambda}^2) \tilde{Y}(\tilde{r}) = 0 \quad (3.82)$$

denklemleri elde edilir. Termal grup akısının sistemin sınırında, yani R noktasında sıfır olması koşulu kullanılarak

$$\tilde{X}(r) = J_0(\tilde{\mu}r) - \frac{J_0(\tilde{\mu}R)}{Y_0(\tilde{\mu}R)} Y_0(\tilde{\mu}r) \quad (3.83)$$

$$\tilde{Y}(r) = I_0(\tilde{\lambda}r) - \frac{I_0(\tilde{\lambda}R)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} K_0(\tilde{\lambda}r) \quad (3.84)$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler (3.80) denkleminde yerine yazılarak ikinci bölge, termal grup akısı elde edilir.

$$\phi_2(r) = \tilde{A} \left[J_0(\tilde{\mu}r) - \frac{J_0(\tilde{\mu}R)}{Y_0(\tilde{\mu}R)} Y_0(\tilde{\mu}r) \right] + \tilde{C} \left[I_0(\tilde{\lambda}r) - \frac{I_0(\tilde{\lambda}R)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} K_0(\tilde{\lambda}r) \right] \quad (3.85)$$

$$\phi_1(r) = \tilde{A}' \tilde{X}(r) + \tilde{C}' \tilde{Y}(r) \quad R_0 < r < R \quad (3.86)$$

şeklinde yazılabilen ikinci bölge, hızlı grup akısı

$$\tilde{S}_1 = \frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}} = \frac{1/k'_{ek} \nu_2 \Sigma_{f,2}}{(D_1 \tilde{\mu}^2 + \Sigma_{r,1} - 1/k'_{ek} \nu_1 \Sigma_{f,1})} \quad (3.87)$$

$$\tilde{S}_2 = \frac{\tilde{C}'}{\tilde{C}} = -\frac{1/k'_{ek} \nu_2 \Sigma_{f,2}}{(D_1 \tilde{\lambda}^2 - \Sigma_{r,1} + 1/k'_{ek} \nu_1 \Sigma_{f,1})} \quad (3.88)$$

tanımlamaları ile

$$\phi_1(r) = \tilde{A} \tilde{S}_1 \tilde{X}(r) + \tilde{C} \tilde{S}_2 \tilde{Y}(r), \quad R_0 < r < R \quad (3.89)$$

şeklinde yazılabilir. Pertürbe edilmiş ve edilmemiş bölgelerin sınırında yani $r = R_0$ da hızlı ve termal grup akı ve akım süreklilik koşulları kullanılırsa:

$$S_1 AX(R_0) + S_2 CY(R_0) - \tilde{S}_1 \tilde{A} \tilde{X}(R_0) - \tilde{S}_2 \tilde{C} \tilde{Y}(R_0) = 0 \quad (3.90)$$

$$AX(R_0) + CY(R_0) - \tilde{A} \tilde{X}(R_0) - \tilde{C} \tilde{Y}(R_0) = 0 \quad (3.91)$$

$$S_1 AX'(R_0) + S_2 CY'(R_0) - \tilde{S}_1 \tilde{A} \tilde{X}'(R_0) - \tilde{S}_2 \tilde{C} \tilde{Y}'(R_0) = 0 \quad (3.92)$$

$$AX'(R_0) + CY'(R_0) - \tilde{A} \tilde{X}'(R_0) - \tilde{C} \tilde{Y}'(R_0) = 0 \quad (3.93)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde (') üst indis türevi simgelenmektedir.

$$\begin{bmatrix} S_1 X(R_0) & S_2 Y(R_0) & -\tilde{S}_1 \tilde{X}(R_0) & -\tilde{S}_2 \tilde{Y}(R_0) \\ X(R_0) & Y(R_0) & -\tilde{X}(R_0) & -\tilde{Y}(R_0) \\ S_1 X'(R_0) & S_2 Y'(R_0) & -\tilde{S}_1 \tilde{X}'(R_0) & -\tilde{S}_2 \tilde{Y}'(R_0) \\ X'(R_0) & Y'(R_0) & -\tilde{X}'(R_0) & -\tilde{Y}'(R_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

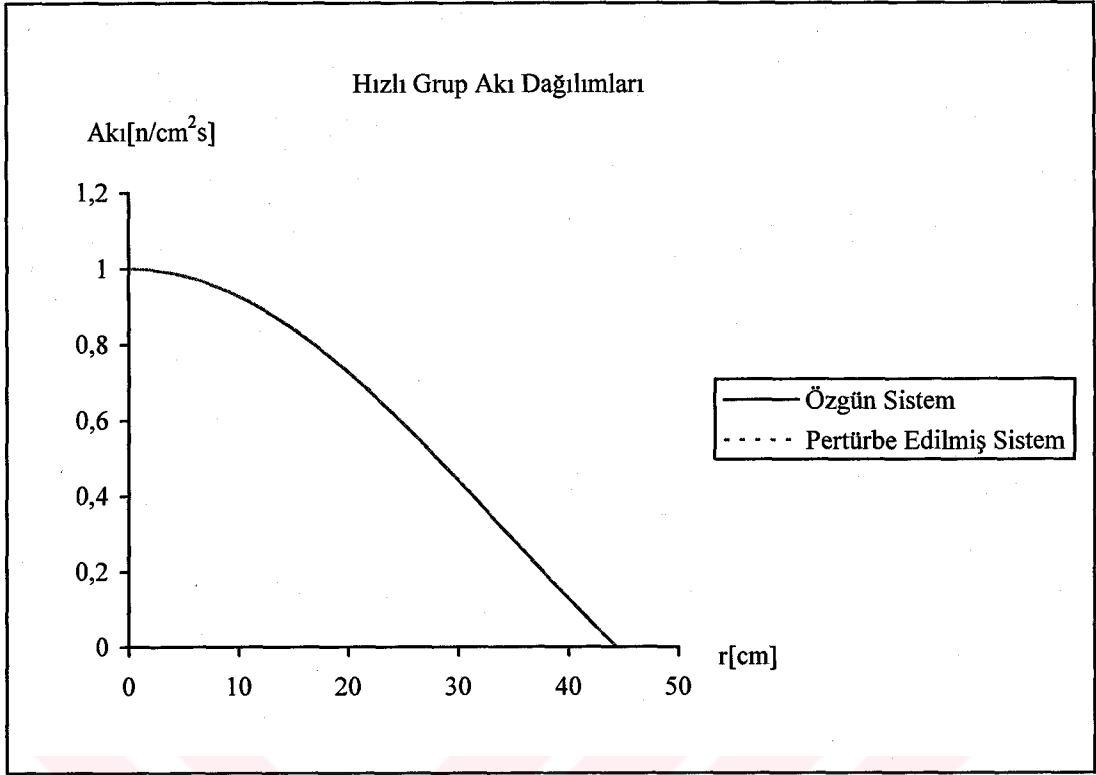
Matris notasyonu ile (3.94)'deki gibi gösterilen sistemin çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bilinmeyen olarak sadece k'_{etk} 'nü içeren bu determinantın çözümünden $k'_{etk} = 0,999901$ olarak bulunur. Bulunan k'_{etk} değeri sistemin pertürbasyon sonucu sahip olduğu etkin çoğaltma katsayısını gösterdiğine göre $k'^{(an)}_{etk}$ olarak isimlendirilebilir. Sistemin pertürbe edilmeden önceki analitik etkin çoğaltma katsayısı $k'^{(an)}_{etk} = 1$ olduğuna göre reaktivite değişiminin analitik değeri $\Delta\rho^{(an)} = -0,993104 \times 10^{-4}$ olarak bulunur.

Tablo 3.8'de PERTURB programı ile değişik sonlu eleman ızgaraları kullanılarak elde edilen difüzyon teorisi ve pertürbasyon teorisi sonuçları verilmektedir.

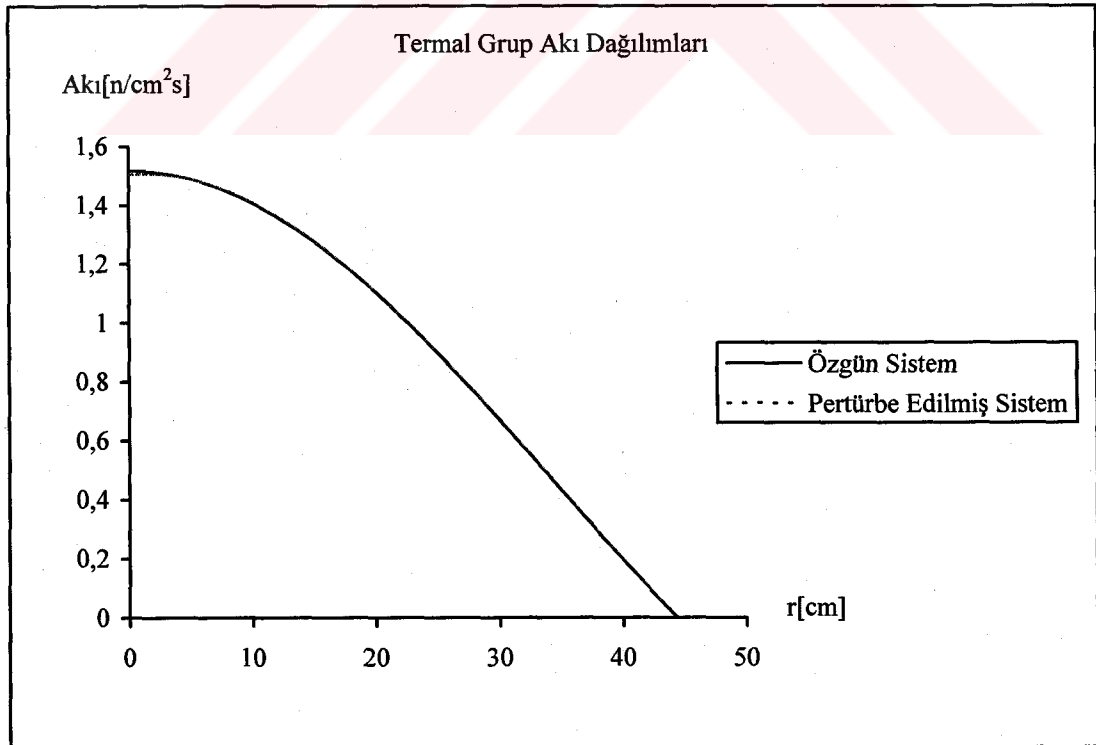
Tablo 3.8 İki gruplu çıplak homojen sistem sonuçları.

El. Say. (n)	k_{etk}	k'_{etk}	$\Delta\rho_d(n)$ (10^{-4})	% Hata (d)	$\Delta\rho_p(n)$ (10^{-4})	% Hata (p)
20	1,004111	1,004011	-0,993049	0,389553	-1,001635	0,859059
40	1,001026	1,000926	-0,993071	0,0122384	-1,000366	0,731260
80	1,000255	1,000156	-0,993072	0,00554149	-1,000073	0,701798
160	1,000063	0,999963	-0,993072	0,00379327	-1,000002	0,694640
320	1,000015	0,999915	-0,993072	0,00333270	-0,999985	0,692868

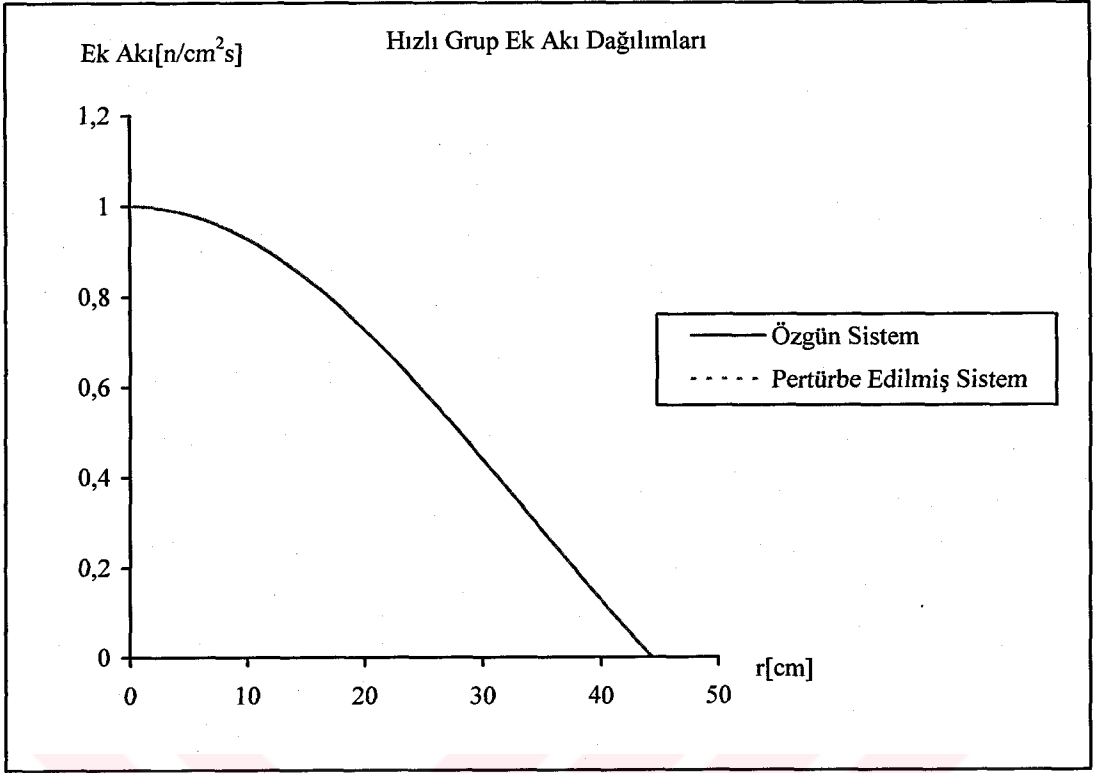
Tablonun beşinci sütununda difüzyon teorisi kullanılarak hesaplanan reaktivite değişiminin analitik sonuca göre yüzde hatası verilmiştir. Sonlu eleman ızgarası inceltildikçe hataların giderek küçüldüğü gözlenmektedir. Bu problemde pertürbasyon teorisince hesaplanan reaktivite değişiminin analitik değere göre yüzde hatası son sütunda verilmiştir. Yüzde hataların, yüzde birin altında kaldığı görülmektedir. Pertürbasyon yarıçapının sistem yarıçapının yirmide birine eşit olması nedeni ile değişim küçüktür ve pertürbasyon teorisi beklendiği şekilde nispeten küçük hatalara yol açmaktadır. Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’de bu problem için elde edilen hızlı ve termal grup akıları; Şekil 3.9 ve Şekil 3.10’da ise hızlı ve termal grup ek akıları grafiksel olarak sunulmuştur. Pertürbasyonun küçük olması nedeni ile grafiklerde pertürbe edilmiş sistem ile özgün sistem akı ve ek akı dağılımları arasında gözle görünür bir fark yoktur.



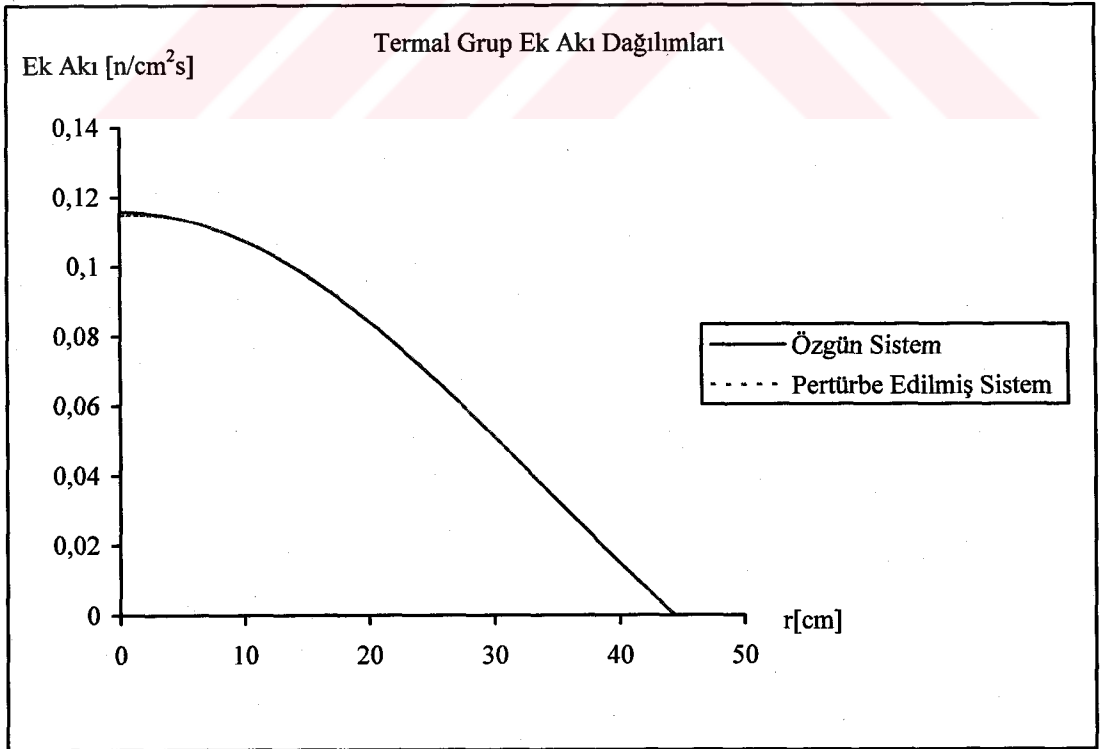
Şekil 3.7 Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin hızlı grup akı dağılımları



Şekil 3.8 Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin termal grup akı dağılımları

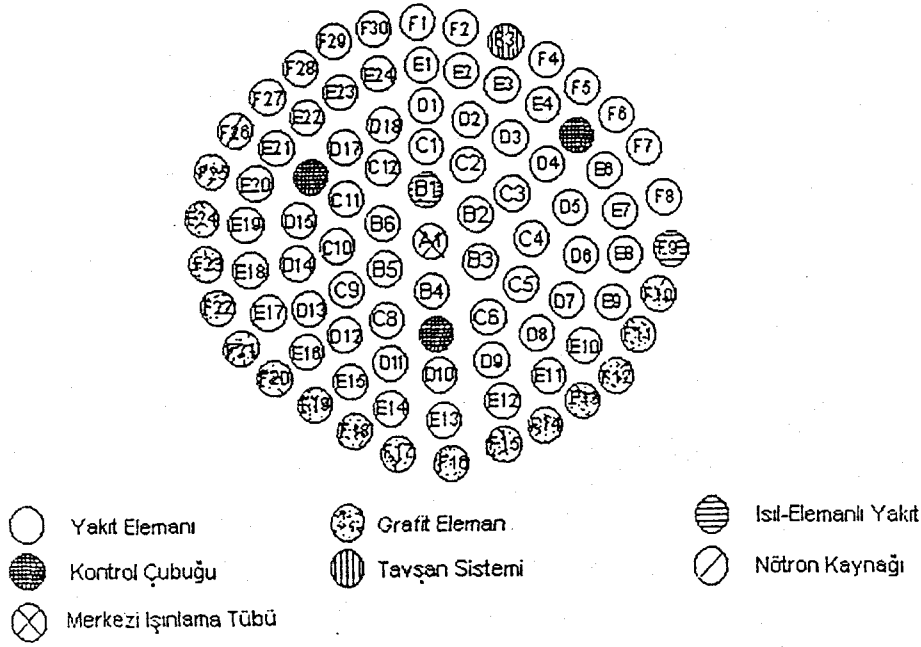


Şekil 3.9 Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin hızlı grup ek akı dağılımları



Şekil 3.10 Özgün ve pertürbe edilmiş sistemlerin termal grup ek akı dağılımları

III.3. TRIGA MARK-II REAKTÖRÜ REAKTİVİTE HESAPLARI



Şekil 3.11 İTÜ Triga Mark-II reaktörü kalp düzeni

İTÜ TRIGA reaktörünün yapısı Şekil 3.11’de verilmiştir [15]. Reaktör A, B, C, D, E, F halkaları ile radyal grafit yansıtıcıdan oluşmaktadır. A halkası reaktör merkezi olup, sadece merkezi ışınlama kanalından oluşmaktadır. B halkası 6 yakıt elemanından, C halkası ise 11 yakıt elemanı ile 1 su boşluğundan oluşmaktadır. D halkası 17 yakıt elemanı ve 1 su boşluğundan, E halkası yine 23 yakıt elemanı 1 su boşluğundan oluşmuştur. En dış halka olan F halkasında ise 12 yakıt elemanı, 2 su boşluğu ve 16 grafit eleman yer almaktadır. F halkasının dışı ise radyal grafit yansıtıcı ile çevrilidir. A, B, C, D, E ve F halkalarının dış yarıçapları sırası ile 2,1371; 5,9709; 9,8979; 13,8629; 17,7329 ve 21,8049 cm’dir. F halkasının dışında bulunan grafit yansıtıcı ise aynı zamanda reaktör yarıçapı olan 51,64 cm’ye kadar uzanmaktadır. Bütün yakıt elemanların 191,03 g uranyum içerdiği ve yakıt yanma oranının sıfır olduğu varsayılmıştır. WIMS-D/4 programı kullanılarak yakıt elemanı, merkezi ışınlama kanalı, su boşluğu, grafit eleman ve grafit yansıtıcı için ayrı ayrı spektrum hesabı yapılarak iki gruplu homojenleştirilmiş tesir kesitleri elde edilmiştir [16]. Bu elemanların hızlı ve termal grup homojenleştirilmiş tesir kesitleri Tablo 3.9 ve Tablo 3.10’da sunulmuştur. Bu veriler dışında $\nu_1 = 2,55$, $\nu_2 = 2,44$, $\chi_1 = 1$ ve $\chi_2 = 0$ olarak alınmıştır.

Tablo 3.9 Homojenleştirilmiş eleman hızlı grup tesir kesitleri

Eleman Tipi (i)	$D_1(cm)$	$\Sigma_{r,1}(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,1}(cm^{-1})$
Yakıt (1)	1,01686	0,048046	0,04267	0,00319902
Mer. Işın. Kanalı (2)	1,22848	0,054012	0,053725	0,0
Su Boşluğu (3)	1,19304	0,054825	0,054539	0,0
Grafit Eleman (4)	1,38842	0,019841	0,019744	0,0
Grafit Yansıtıcı (5)	1,30156	0,002848	0,002845	0,0

Tablo 3.10 Homojenleştirilmiş eleman termal grup tesir kesitleri

Eleman Tipi (i)	$D_2(cm)$	$\Sigma_{a,2}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,2}(cm^{-1})$
Yakıt (1)	0,244494	0,07921	0,119481
Mer. Işın. Kanalı (2)	0,246318	0,01588	0,0
Su Boşluğu (3)	0,198441	0,01599	0,0
Grafit Eleman (4)	0,652699	0,00538	0,0
Grafit Yansıtıcı (5)	0,886434	0,000194	0,0

Tek boyutlu silindrsel geometride hesap yapabilmek için homojenleştirilmiş eleman tesir kesitlerinden

$$\Sigma_{halka} = \frac{1}{N_{halka}} \sum_{i=1}^{N_{halka}} N_i \Sigma_i \quad (3.95)$$

şeklindeki basit hacimsel homojenleştirme yoluyla homojenleştirilmiş halka tesir kesitleri hesaplanmıştır. Burada N_{halka} herhangi bir halkadaki toplam eleman sayısını N_i ise o halkada bulunan i'inci tip eleman sayısını vermektedir. Difüzyon sabiti için halka homojenleştirilmesi:

$$D_{halka} = \frac{N_{halka}}{\sum_{i=1}^{N_{halka}} \frac{N_i}{D_i}} \quad (3.96)$$

bağıntısı aracılığıyla yapılmıştır. (3.95) ve (3.96) denklemleriyle hesaplanan homojenleştirilmiş hızlı ve termal grup sabitleri Tablo 3.11 ve Tablo 3.12'de verilmiştir.

Tablo 3.11 Triga hızlı grup homojenleştirilmiş halka tesir kesitleri

Halka	$D_1(cm)$	$\Sigma_{r,1}(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,1}(cm^{-1})$
A	1,21848	0,054012	0,053725	0
B	1,01686	0,048046	0,04267	0,003199
C	1,02953	0,048611	0,043659	0,0029324
D	1,02527	0,048423	0,043329	0,0030213
E	1,02316	0,048328	0,043165	0,0030657
F	1,19994	0,033455	0,0312341	0,0012796
Yansıtıcı	1,30156	0,002848	0,002845	0

Tablo 3.12 Triga termal grup homojenleştirilmiş halka tesir kesitleri

Halka	$D_2(cm)$	$\Sigma_{a,2}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,2}(cm^{-1})$
A	0,246318	0,01588	0
B	0,0244494	0,07921	0,119481
C	0,239855	0,07394	0,109524
D	0,241382	0,07570	0,112843
E	0,242152	0,07658	0,114503
F	0,358530	0,0356200	0,047792
Yansıtıcı	0,886434	0,000194	0

Tablo 3.11 ve 3.12 ile verilen iki gruplu tesir kesitleri kullanılarak A halkası 28, B halkası 56, C, D ve E halkaları 84, F halkası 56, grafit yansıtıcı ise 168 lineer sonlu elemana bölünerek toplam 560 elemanlık bir sonlu elemanlar ızgarası ile PERTURB programı koşulmuştur. Elde edilen etkin çoğaltma katsayısı değeri,

$k_{ek} = 1.2066661114$ olarak bulunmuştur. Bu koşuda hem akı hem de ek akı dağılımı elde edilmiştir.

Herhangi bir halkadan bir yakıt elemanının çıkartılarak yerinin su boşluğu ile doldurulmasının ne kadarlık bir reaktivite değişimi ortaya çıkardığını saptamak, bu reaktivite değişimi için iki gruplu difüzyon teorisi ile pertürbasyon teorisinin öngörülerinin neler olduğunu öğrenmek ve pertürbasyon teorisinin iki gruplu difüzyon teorisine göre ne kadar hata içerdiğini anlamak amacıyla sırası ile B, C, D, E, ve F halkalarından bir yakıt çıkartılıp yerinin su ile doldurulması halindeki halka tesir kesitleri yine (3.95) ve (3.96) denklemleri aracılığıyla hesaplanmış, bu değerler Tablo 3.13 ve Tablo 3.14’de sunulmuştur.

Tablo 3.13 Herhangi bir halkadan bir yakıt elemanı çıkartılması halinde homojenleştirilmiş hızlı grup tesir kesitleri

Halka	$D_1(cm)$	$\Sigma_{r,1}(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,1}(cm^{-1})$
B	1,04252	0,049176	0,044648	0,00266585
C	1,04252	0,049176	0,044648	0,00266585
D	1,03382	0,048799	0,043989	0,00284357
E	1,02953	0,048611	0,043659	0,00293244
F	1,20695	0,033681	0,031630	0,00117297

Tablo 3.14 Herhangi bir halkadan bir yakıt elemanı çıkartılması halinde homojenleştirilmiş termal grup tesir kesitleri

Halka	$D_2(cm)$	$\Sigma_{a,2}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,2}(cm^{-1})$
B	0,23539	0,068673	0,0995675
C	0,23539	0,068673	0,0995675
D	0,23835	0,072186	0,106205
E	0,23986	0,073942	0,109524
F	0,35451	0,033512	0,043810

Herhangi bir halkadan yakıt elemanı çıkartılarak yerinin su ile doldurulması durumu için PERTURB programı yine aynı sonlu eleman ızgarası ile koşularak yeni durum için etkin çoğaltma katsayısı değerleri (k'_{ek}) hesaplanmıştır. Özgün sistemin

çoğaltma katsayısı (k_{ek}) ve değiştirilmiş sistemin çoğaltma katsayısı (k'_{ek}) kullanılarak (3.19) denklemini aracılığıyla iki gruplu difüzyon teorisi reaktivite değişim öngörülleri ($\Delta\rho_d$) hesaplanmıştır. Yine PERTURB programı ile özgün sistemin etkin çoğaltma katsayısı, akısı, ek akısı ve grup sabitlerindeki değişim kullanılarak pertürbasyon teorisinin reaktivite değişimi öngörülleri de ($\Delta\rho_p$) hesaplanmıştır. Pertürbasyon teorisi öngörüsünün ($\Delta\rho_p$), difüzyon teorisi öngörüsüne göre ($\Delta\rho_d$) yüzde farkı da yine hesaplanan değerler arasındadır. Tüm bu değerler Tablo 3.15’de sunulmuştur.

Tablo 3.15 Halkadan yakıt çıkartılması halinde etkin çoğaltma katsayısı ve reaktivite değişimi değerleri

Halka	k'_{ek}	$\Delta\rho_d$ ($\times 10^{-3}$)	$\Delta\rho_p$ ($\times 10^{-3}$)	Yüzde Fark
B	1,201445	-3,601487	-3,053352	15,22
C	1,202942	-2,565328	-2,319333	9,59
D	1,203829	-1,953054	-1,760800	9,84
E	1,204281	-1,641351	-1,423826	13,25
F	1,203532	-2,158279	-1,959342	9,23

Tablo 3.15 incelendiğinde difüzyon teorisi ile pertürbasyon teorisi reaktivite öngörülerinin yüzde farklarının %9 ile %15 arasında değiştiği görülmektedir. B halkasından başlayarak E halkasına doğru gidildikçe yakıt çıkarmanın reaktiviteye tesirinin giderek düştüğü görülmektedir. Bu sonuç hem difüzyon teorisi hem de pertürbasyon teorisi için geçerlidir. Tablo 3.15’de F halkasındaki $\Delta\rho$ değerlerine bakılınca bu değerlerin D ve E halkalarındaki karşılıklarından daha büyük olduğu gözlemlenmiştir. Bu beklenen bir durum değildir. Bu durum bir olasılıkla F halkası hesabı için azimütal simetrisizliği göz önüne alan bir $r-\theta$ hesabı yapılarak tekrar incelemeye alınabilir. Normal halde en düşük $\Delta\rho$ değerlerinin F halkasında görülmesi beklenir. Özgün sisteme ait hızlı ve termal grup akı ve ek akı dağılımları ile belirli bir halkadan yakıt çıkartılması durumunda elde edilen hızlı ve termal grup akı ve ek akı dağılımları Ek A’da sunulmuştur. Özellikle termal gruplarda akı ve ek akının birbirinden oldukça farklı kavramlar olarak ortaya çıktıkları grafiklerden anlaşılmaktadır. Bu grafiklerin çoğunda özgün sistem dağılımı ile pertürbe edilmiş

sistem dağılımı birbirinden ayırt edilememektedir. Bunun nedeni difüzyon teorisi ve pertürbasyon teorisi dağılımlarının birbirlerine oldukça yakın olmasıdır.



IV SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, çok gruplu difüzyon teorisi denklemlerini temel alarak akı ve ek akı hesabı yapabilen, etkin çoğaltma katsayısını fisyon kaynağı iterasyonu yoluyla hesaplayabilen ve istendiği taktirde hesaplanan bu sonuçları kullanarak sisteme girdilenen bir pertürbasyonun yol açtığı reaktivite değişimini hesaplayabilen PERTURB adlı bir FORTRAN programı geliştirildi. Tek boyutlu silindirselsistemlerin çözümlenmesine yönelik PERTURB programı, ilk önce analitik çözümü bilinen problemler kullanılarak doğrulandı. Bu bağlamda pertürbasyon teorisinin difüzyon teorisine ne denli duyarlılığa sahip bir yaklaşımı olduğu irdelendi. Son uygulama olarak da İTÜ'nün TRIGA Mark-II reaktörünün tek boyutlu silindirselsel bir model çerçevesinde iki gruplu difüzyon teorisi hesapları yapıldı. Buradan çıkan sonuçlar da irdelenerek pertürbasyon teorisi sonuçlarının iki gruplu difüzyon teorisi sonuçlarına göre yüzde hataları incelendi.

Yapılan bu çalışmalar sonunda PERTURB programı çok gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde tek boyutlu silindirselsel nükleer sistemlerin yetkinlik, ek yetkinlik ve pertürbasyon teorisi hesaplarını yapabilen bir yazılım olarak doğrulandı. Gelecekte bu yönde yapılacak çalışmaların iki boyutlu sonlu elemanlar hesaplarının da pertürbasyon teorisi ile birleştirilmesi yönünde olması tavsiye edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Burden R.L., Faires J.D.**, 1985. Numerical Analysis , PWS Publishers.
- [2] **Stammler R.J.J., Abbate M.J.**, 1983. Methods of Steady State Reaktor Physics in Nuclear Design, Academic Pres.
- [3] **Marchuk G.I., Lebedev V.I.**, 1986. Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport, Harwood Academic Publishers.
- [4] **Lewis E.E., Miller W.F.**, 1984. Computational Methods in Neutron Transport, John Wiley & Sons.
- [5] **Duderstadt J.J., Hamilton L.J.**, 1976. Nuclear Reaktor Analysis, John Wiley & Sons.
- [6] **Becker E.B., Carey G.F., Oden J.T.**, 1983. Finite Elements: An Introduction , Prentice Hall.
- [7] **Gölce Ö., Özgüner B., Özgüner H.A.**, 2001. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Ek Akı Hesabı, *Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 13, 1, 299.
- [8] **Lamarsh, J.R.**, 1972. Introduction to Nuclear Reaktor Theory, Addison Wesley.
- [9] **Henry ,A.F.**, 1976. Nuclear-Reaktor Analysis, The MIT Pres.
- [10] **Özgüner B.**, 1988 Sonlu Elemanlar Yönteminin Üç Boyutlu Çok Gruplu Difüzyon Denklemlerine Uygulanması, *Doktora Tezi*, İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [11] **Ackroyd, R.T.**, 1997, Finite Element Methods for Particle Transport: Application to Reaktor and Radiation Physics, Research Studies Press.
- [12] **Gölce Ö.**, 1999. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Ek Akı Hesabı, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [13] **Özgüner B., Özgüner H.A.**, 1991. A Study of the Consistent and Lumped Source Approximations in Finite Element Diffusion Calculations, *Prog. Nucl. En.*, 25, (2-3), 209.
- [14] **Stephan Wolfram**, 1988. MATHEMATICA, A System For Doing Mathematics by Computer, The Advanced Book Program, Addison Wesley.
- [15] **Safety Analysis Report the TRIGA Mark-II Reaktor**, August 1978.
- [16] **Özgüner H.A., Özgüner B., Büke T.**, 1998. A Comparison of Integral Transport and Diffusion Teory Methods in Whole-Core Triga Calculations, *15th European Triga Conference*, 27-38.

EKLER

EK A. PERTURB PROGRAMININ TANITIMI

PERTURB programı çok gruplu, tek boyutlu nötron difüzyon ve ek nötron difüzyon denklemlerini sonlu elemanlar yöntemi ile çözen ve elde edilen akı, ek akı dağılımları ve etkin çoğaltma katsayısından yararlanarak pertürbasyon hesabını yine sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleyen FORTRAN dilinde yazılmış bir programdır. Program istenirse sadece difüzyon, sadece ek difüzyon hesaplarını ve istenirse de pertürbasyon hesabını yapabilecek kapasitededir. Programda en fazla dördüncü derece sonlu elemanlar kullanılabilir. Sistem geometrisi ise silindrisel geometri ile kısıtlandırılmıştır. Pertürbasyon uygulamaları da yine en fazla dördüncü derece elemanlarla sınırlıdır.

Nötron difüzyon ve ek difüzyon hesaplamalarında güç iterasyonu yöntemi kullanılmıştır. Bölüm II'de sunulan formülasyonda ortaya çıkan lineer cebirsel sistem Cholesky algoritması kullanılarak çözülmüştür. Katsayılar matrisinin depolanmasında yarı bant genişlikli simetrik depolama tekniği kullanılmıştır. Katsayılar matrisi hesaplanır hesaplanmaz Cholesky yöntemi ile ayrıştırılmış ve yine aynı isimle depolanarak bellekten tasarruf sağlanması yoluna gidilmiştir.

Ek A.1. Perturb Programındaki Alt Programların Açıklaması

- IZJEN** : Geometrik verileri okur ve sonlu elemanlar ızgarasını oluşturur.
- SKINP** : SKAY=1 olması durumunda serbest kaynak verilerini okuyan bir alt programdır.
- INPUT** : Sistemin nükleer verilerini okur.
- EK** : INPUT alt programı tarafından çağırılır. Ek difüzyon denkleminin çözülmesi söz konusu olduğunda grup tesir kesitlerini değiştirir.
- MATRİS** : Bölüm II.3'te formülasyonu sunulan sonlu elemanlar katsayılar matrisini eleman derecesine bağlı olarak oluşturur.
- CHOLS1** : Katsayılar matrisini Cholesky yöntemi ile $\underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T$ şeklinde ayrıştırır.
- FISSOR** : Bölüm II.3.1.b.'de sunulan fisyon kaynağını hesaplayarak lineer cebirsel sistemin sağ taraf vektörünün fisyonlardan gelen katkılarını oluşturur ve fisyon kaynağı iterasyonunu gerçekleştirir.
- SCASOR** : Bölüm II.3.1.a.'da sunulan saçılma kaynağından gelen katkılarını hesaplayarak lineer cebirsel sistemin sağ tarafını oluşturur.
- CHOLS2** : Lineer cebirsel sistemi iki aşamada çözerek akı ve/veya ek akı dağılımlarını hesaplar.
- OUTPUT** : Akı ve/veya ek akı dağılımlarını istenirse güce göre normalize eden ve çıkış dosyasına yazan bir alt programdır.

- PER** : Pertürbasyon hesabı yapan ve reaktivite değişimini hesaplayan bir alt programdır. DPER ve TPER alt programları bu alt program tarafından çağırılır.
- DPER** : Bölüm II.4.1’de sunulan δD_{gg} integralini eleman derecesine göre hesaplayan bir alt programdır.
- TPER** : Bölüm II.4.2’de sunulan δ_{gh} integralini eleman derecesine göre hesaplayan bir alt programdır.

Ek A.2. Perturb Programının Giriş Verileri

<u>Değişken</u>	<u>Açıklama</u>
NGT	: Toplam grup sayısı
MAT	: Toplam malzeme sayısı
NETSOR (0/1)	: Serbest kaynak yok/var
NFISOR (0/1)	: Fisil malzeme yok/var
NDEG	: Sonlu eleman derecesi
NELT	: Toplam sonlu eleman sayısı
NRBCT (0/1)	: Boşluk sınır koşulu/Yansıtıcı sınır koşulu
NEK (0/1/2)	:Difüzyon denklemini çözer/ek difüzyon denklemini çözer/difüzyon-ek difüzyon denklemlerini çözer ve pertürbasyon hesabı yapar.
NETSOR=0 ise okunacak:	
ITMAX	: Maksimum iterasyon sayısı
EPS	: Yakınsama kriteri
ENGEN1	: Etkin çoğaltma katsayısı öngörüsü
FINOR	: Normalizasyon parametresi
RM(I)	: I=1,MAT Her bir malzemenin yarıçapı
RMEL(I)	:I=1,MAT Her bir malzeme içindeki eleman sayısı
NFISOR=0 ise okunacak:	
SKAY(I,J)	: I=1,NGT, J=1,MAT Her bir malzeme için grup serbest kaynağı
D(I,J)	: I=1,NGT, J=1,MAT Her bir malzeme için grup difüzyon sabiti
CEKES(I,J)	: I=1,NGT, J=1,MAT Her bir malzeme için grup çıkarma tesir kesiti
SEKES(I,K,J)	: I=1,NGT, K=1,I-1, J=1,MAT Her bir malzeme için o gruba üst gruplardan saçılma tesir kesiti
FEKES(I,J)	:I=1,NGT, J=1,MAT Her bir malzeme için grup fisyon verim tesir kesiti
FEKES1(I,J)	:I=1,NGT, J=1,MAT Her bir malzeme için grup fisyon tesir kesiti
SFIS(I)	:I=1,NGT Grup fisyon spektrumu

NPOW (0/1) : Sistem nükleer gücüne göre normalizasyon yok / var

IGR (0/1) : Grapher veri dosyası istenmiyor/isteniyor

NPOW=1 ise okunacak:

P : Sistem nükleer gücü

NEK=2 ise okunacak:

NREC : Kayıt sayısı

IREC : O kayıttaki eleman sayısı (kayıt sayısı kadar okunacak)

JREC (0/1) : O kayıttaki o elemanda pertürbasyon yok/var (kayıt sayısı kadar okunacak)

Pertürbasyon varsa okunacak:

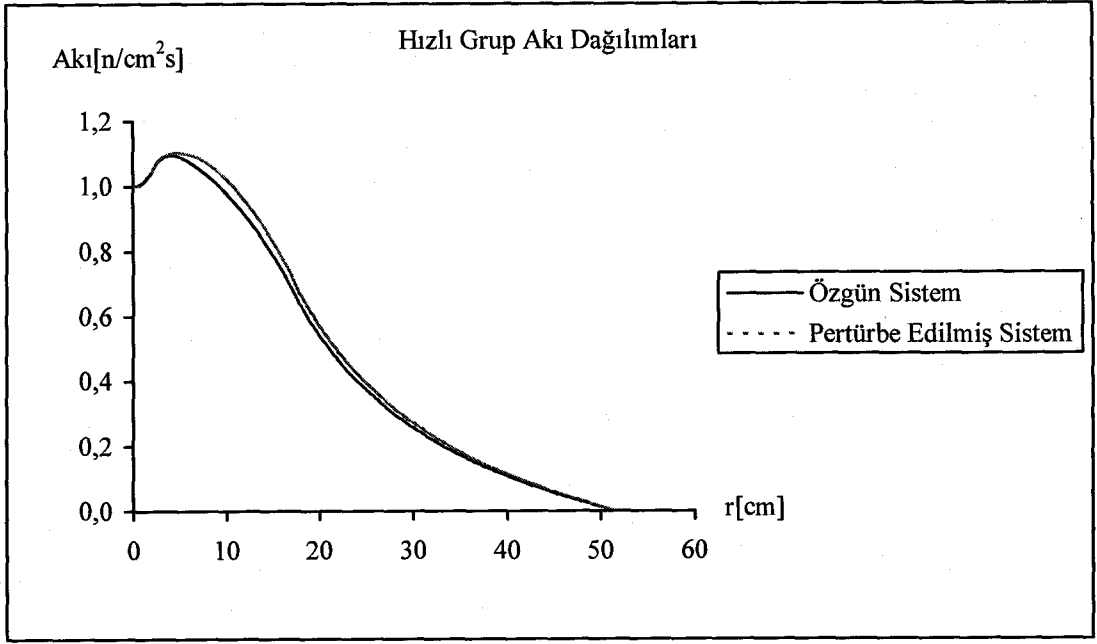
PDIF(I,J) : I=1,NGT, J= 1,NELT O elemana ait pertürbe edilmiş grup difüzyon sabiti (δD_g)

PCTK(I,J) : I=1,NGT, J=1,NELT O elemana ait pertürbe edilmiş grup çıkartma tesir kesiti ($\delta \Sigma_{r,g}$)

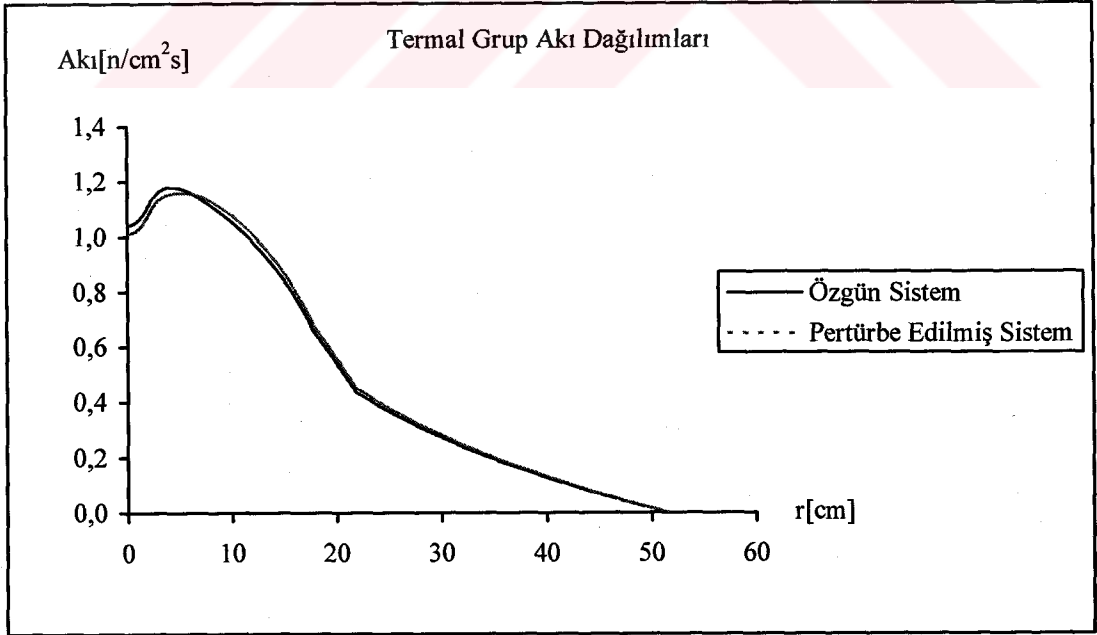
PSTK(I,K,J) : I=1,NGT, K=1,I-1 J= 1,NELT O elemana ait pertürbe edilmiş o gruba üst grumlardan saçılma tesir kesiti ($\delta \Sigma_{s,g \leftarrow g'}$)

PNFTK(I,J) : I=1,NGT, J= 1,NELT O elemana ait pertürbe edilmiş grup fisyon verim tesir kesiti ($\delta \nu \Sigma_{f,g}$)

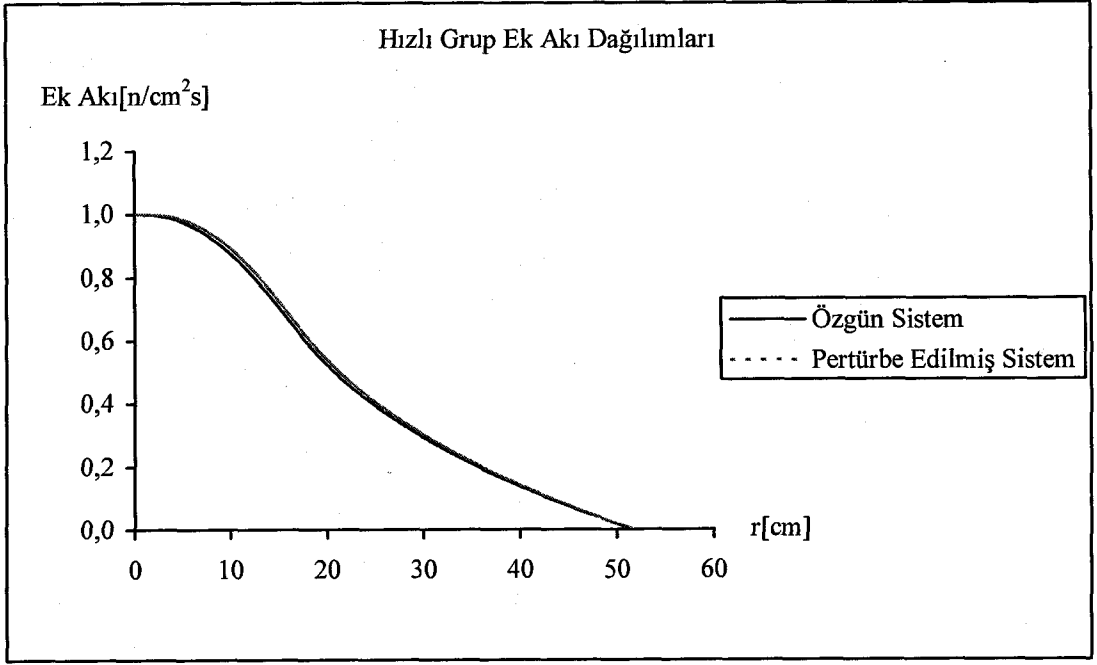
EK B. TRIGA REAKTÖRÜ AKI VE EK AKI DAĞILIMLARI



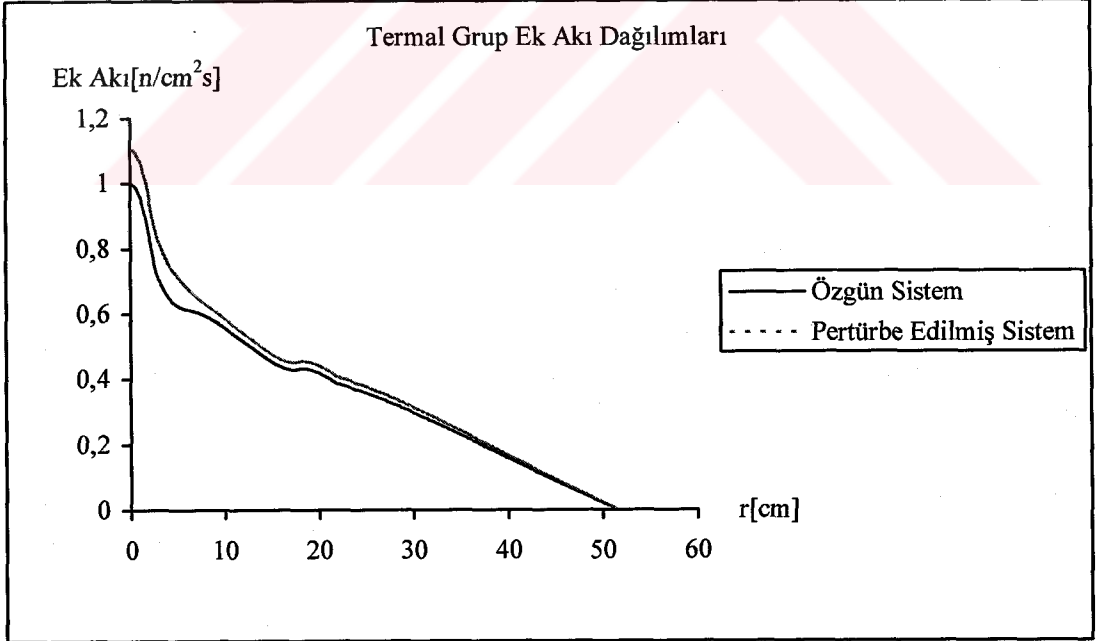
Şekil B.1 Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları



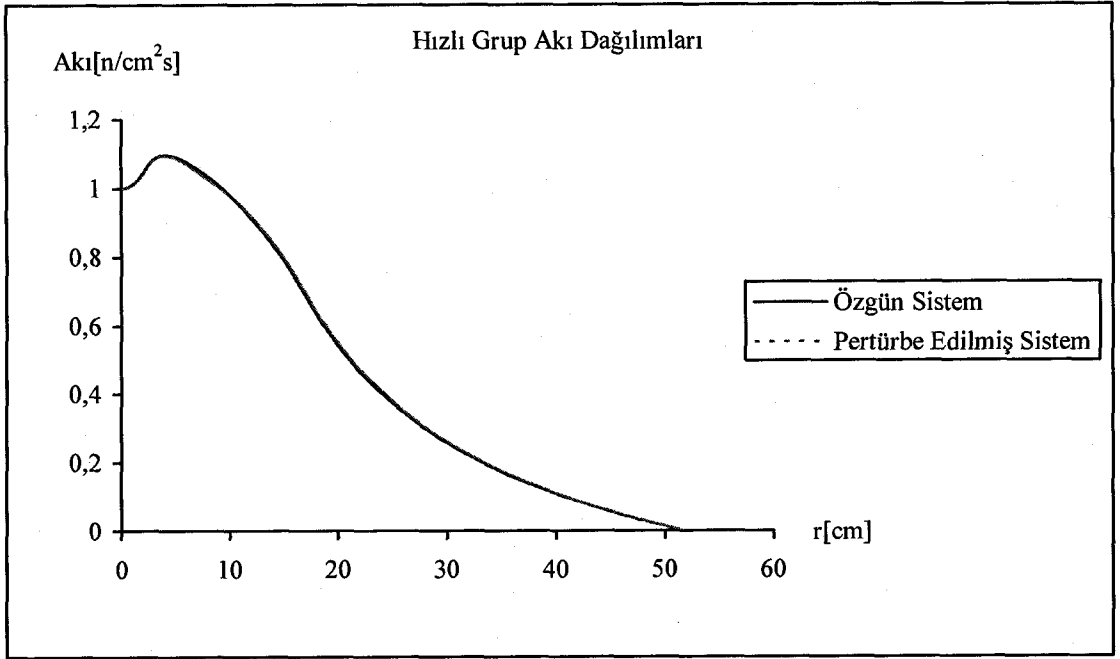
Şekil B.2 Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları



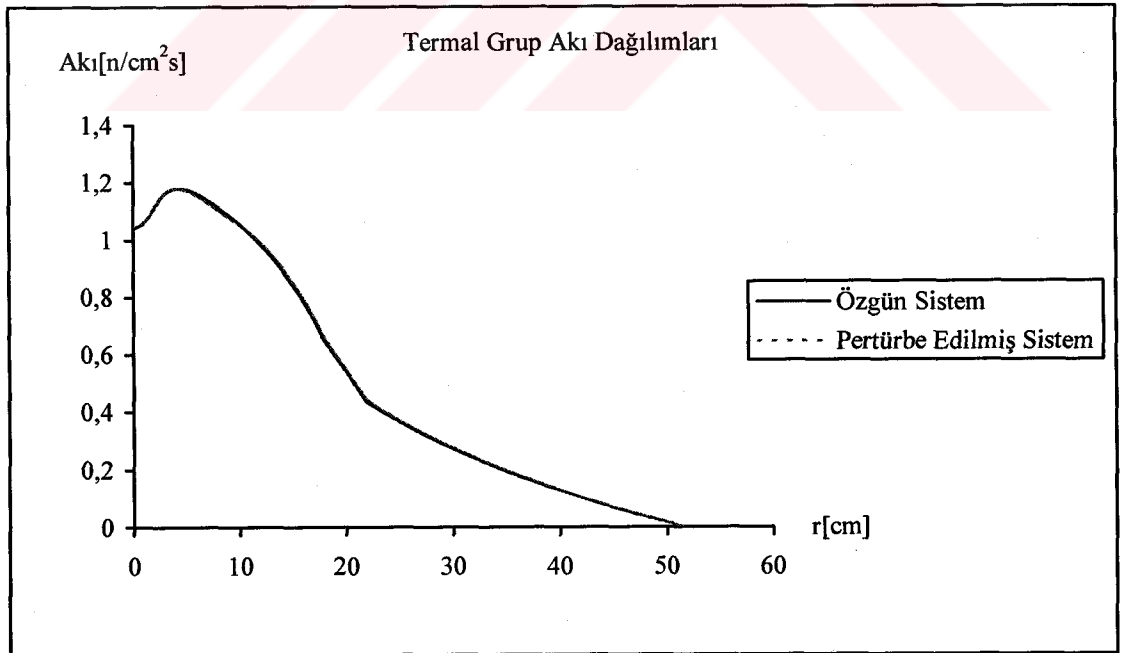
Şekil B.3 Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları



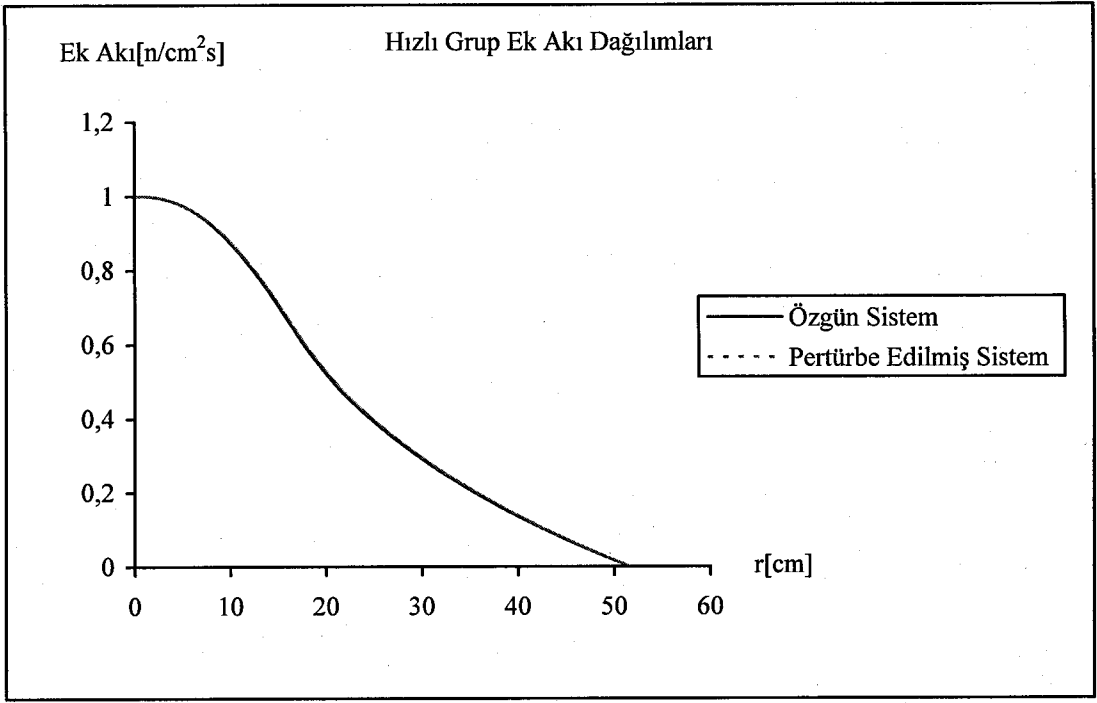
Şekil B.4 Özgün ve B halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları



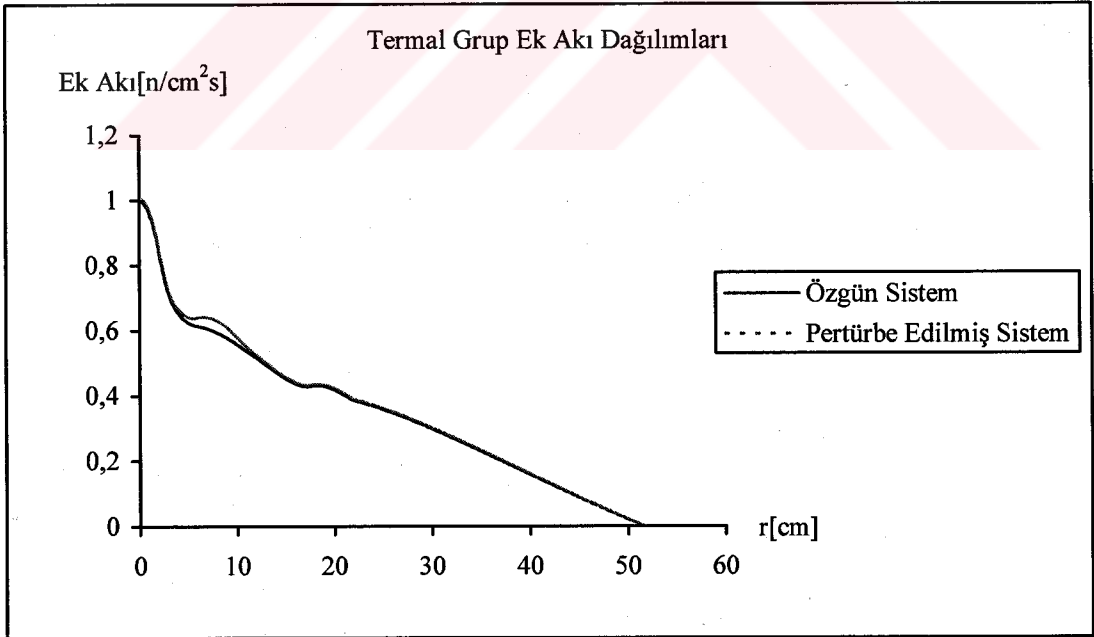
Şekil B.5 Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları



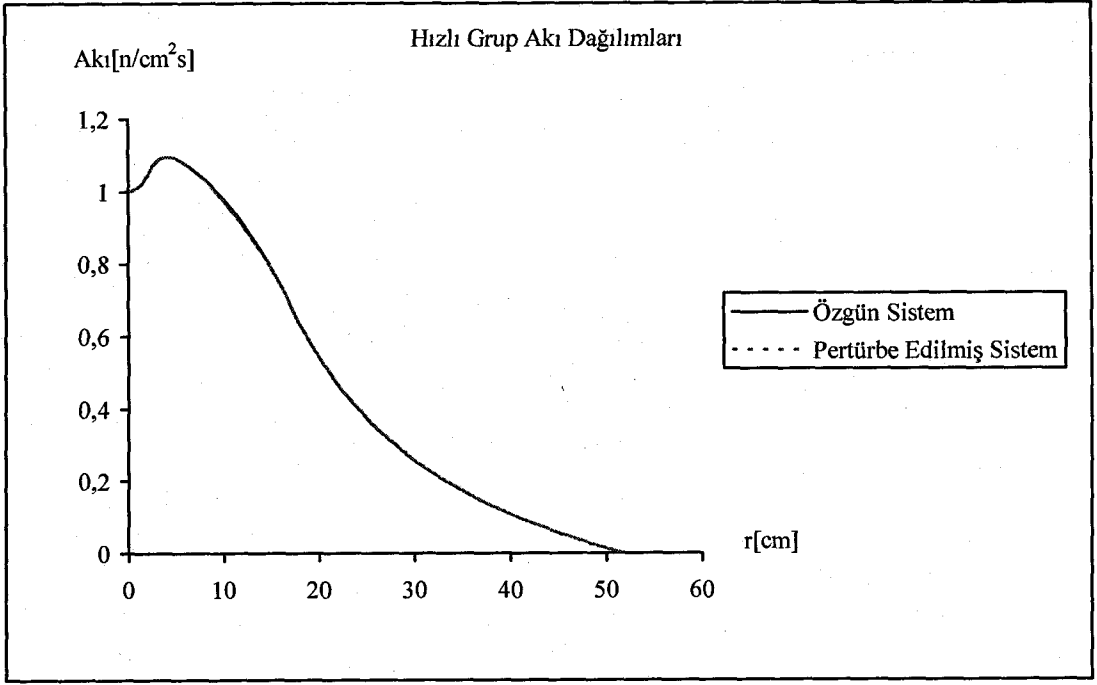
Şekil B.6 Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları



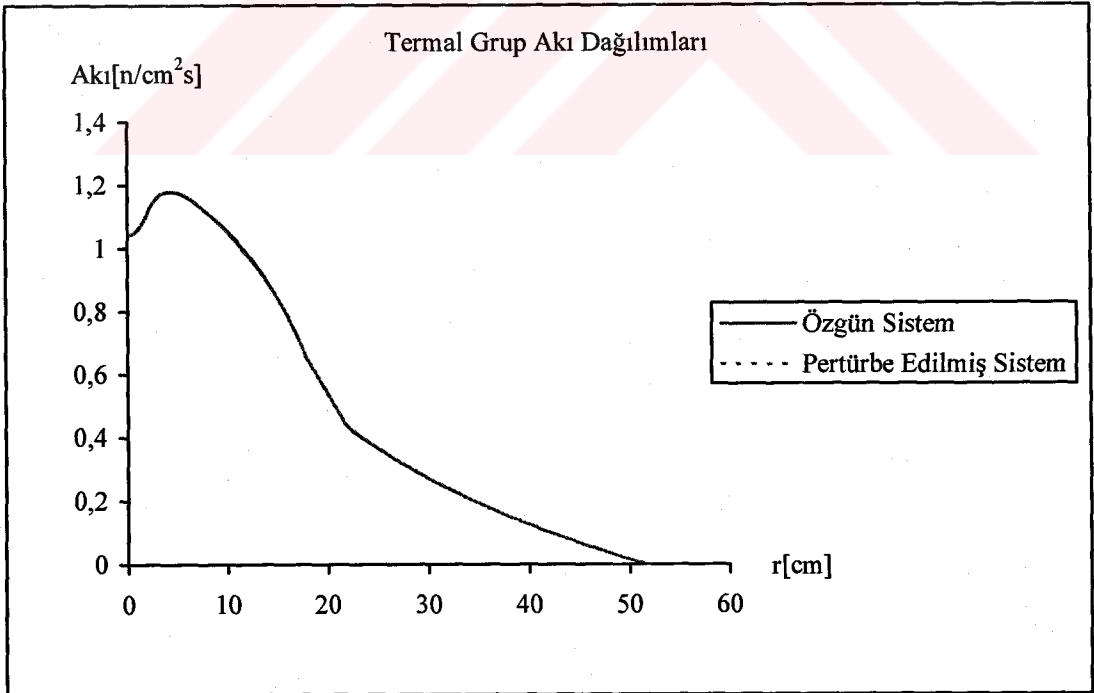
Şekil B. 7 Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları



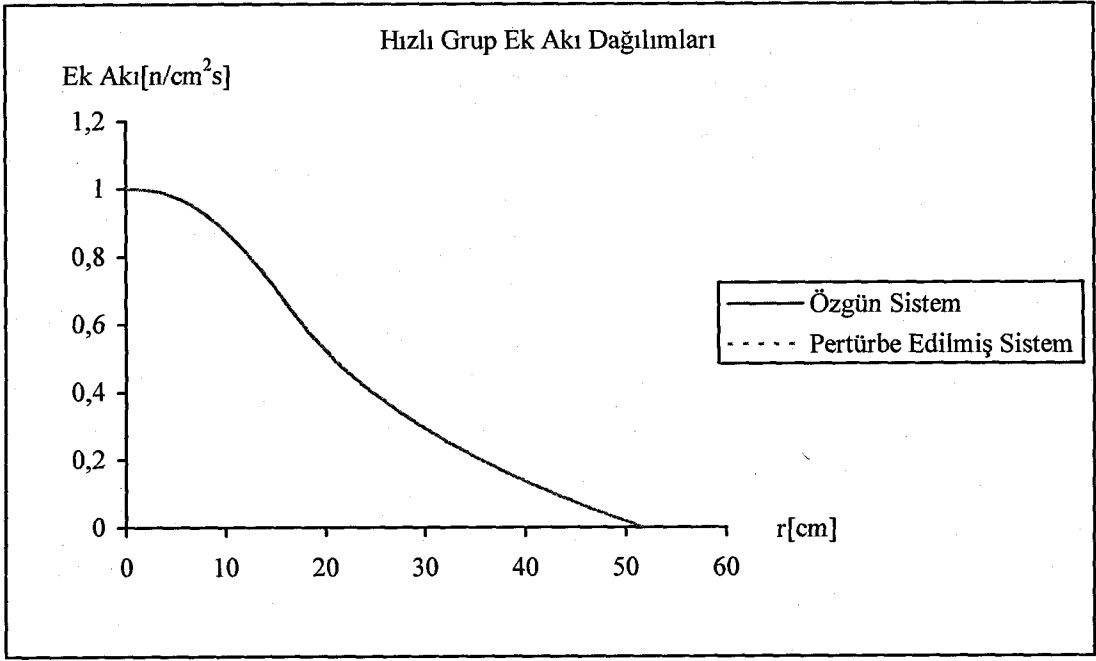
Şekil B. 8 Özgün ve C halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları



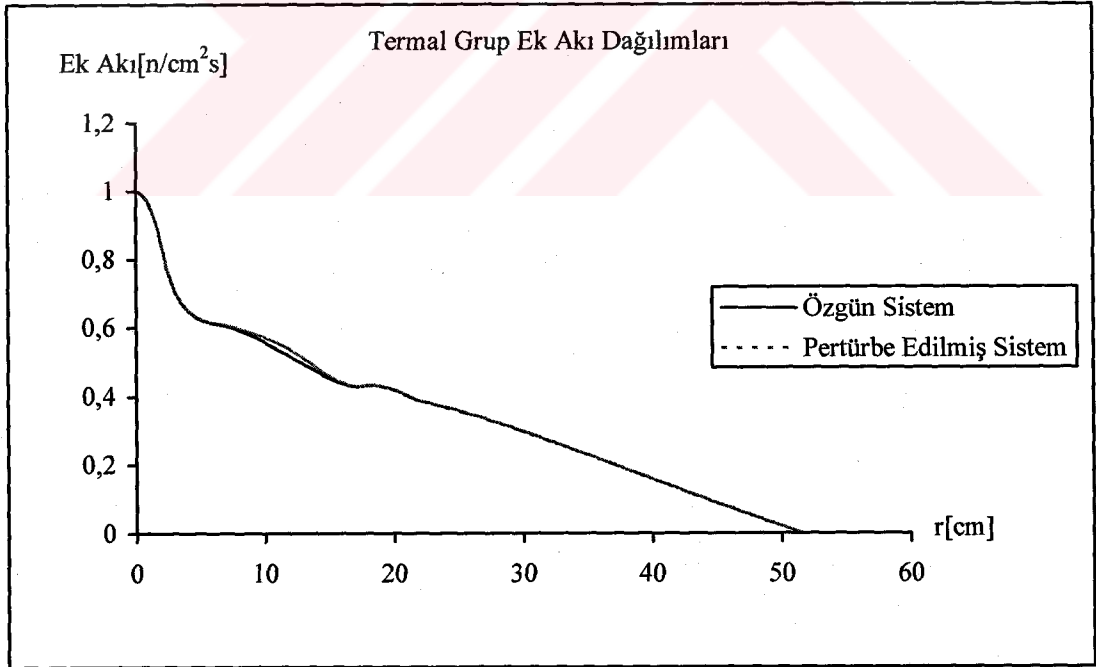
Şekil B.9 Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları



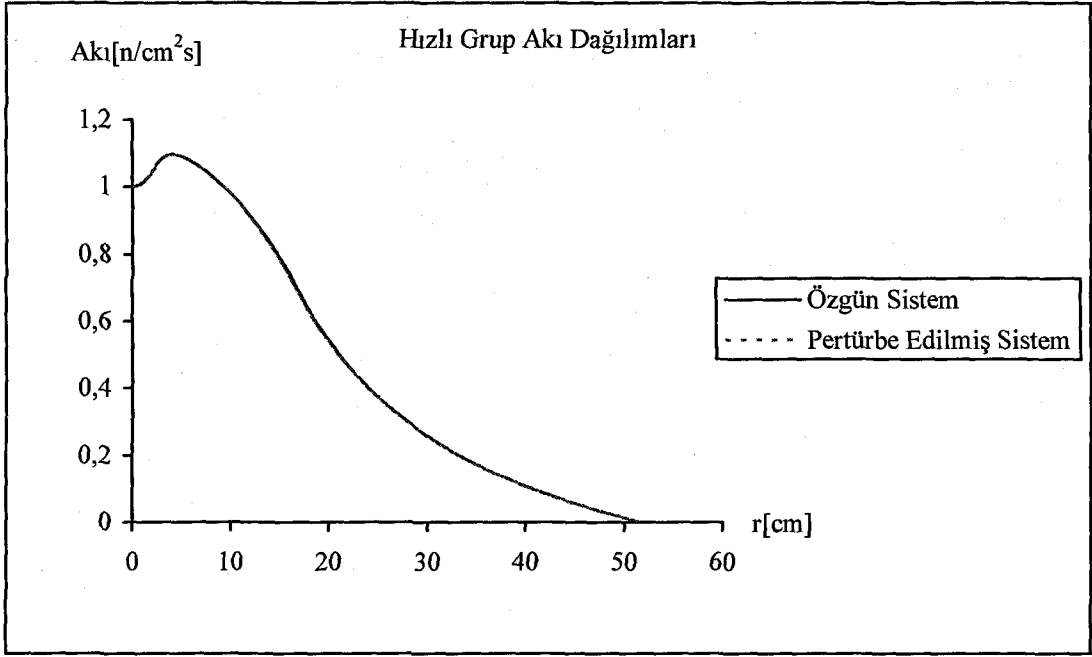
Şekil B.10 Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları



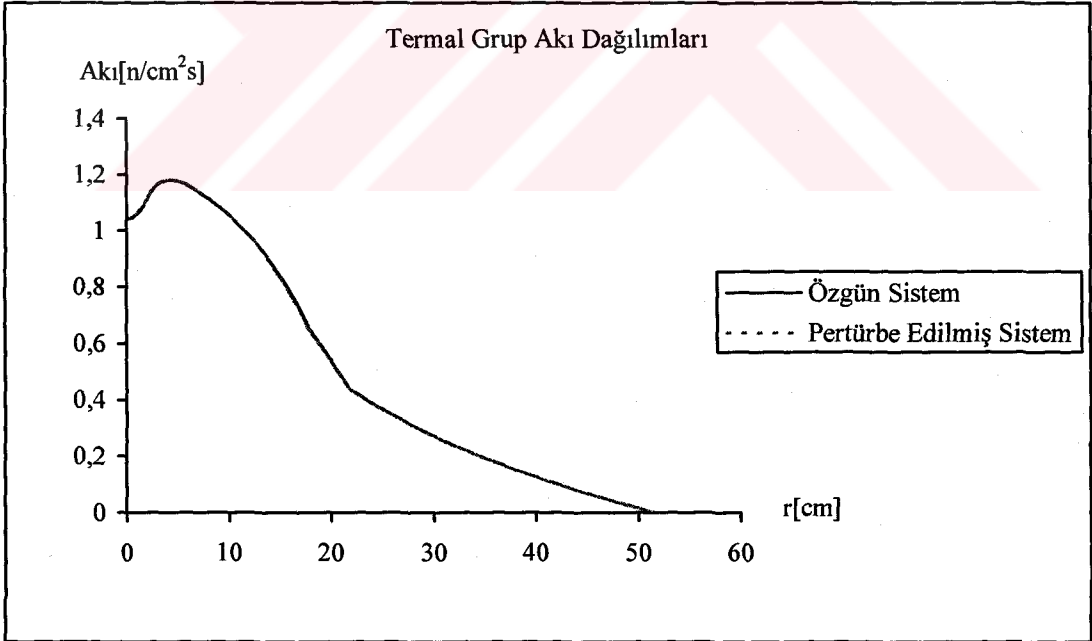
Şekil B.11 Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları



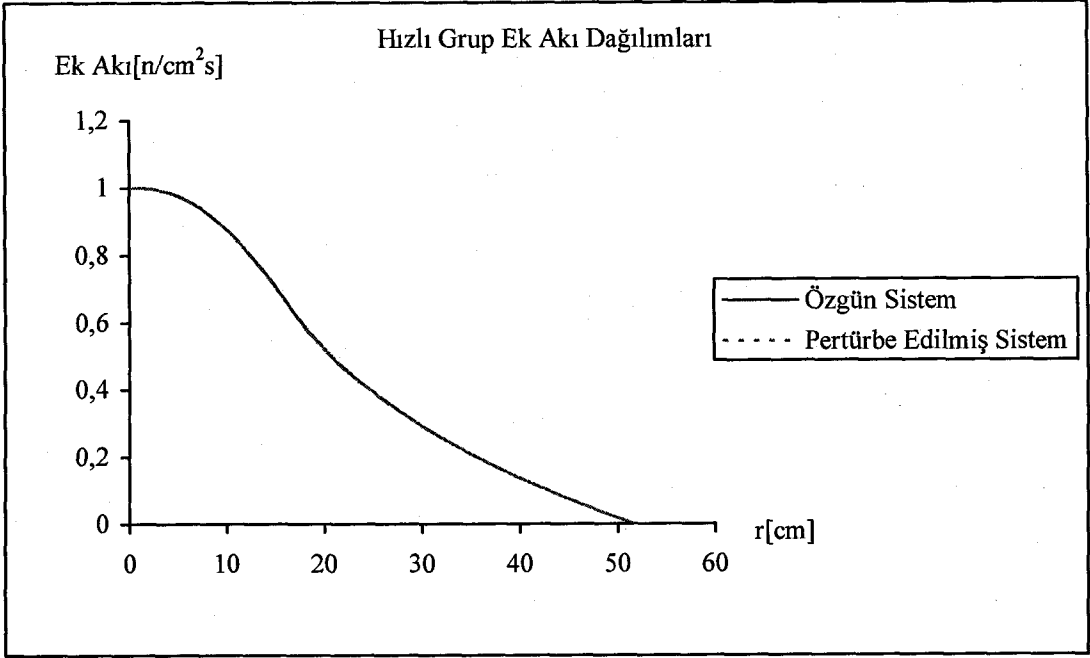
Şekil B.12 Özgün ve D halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları



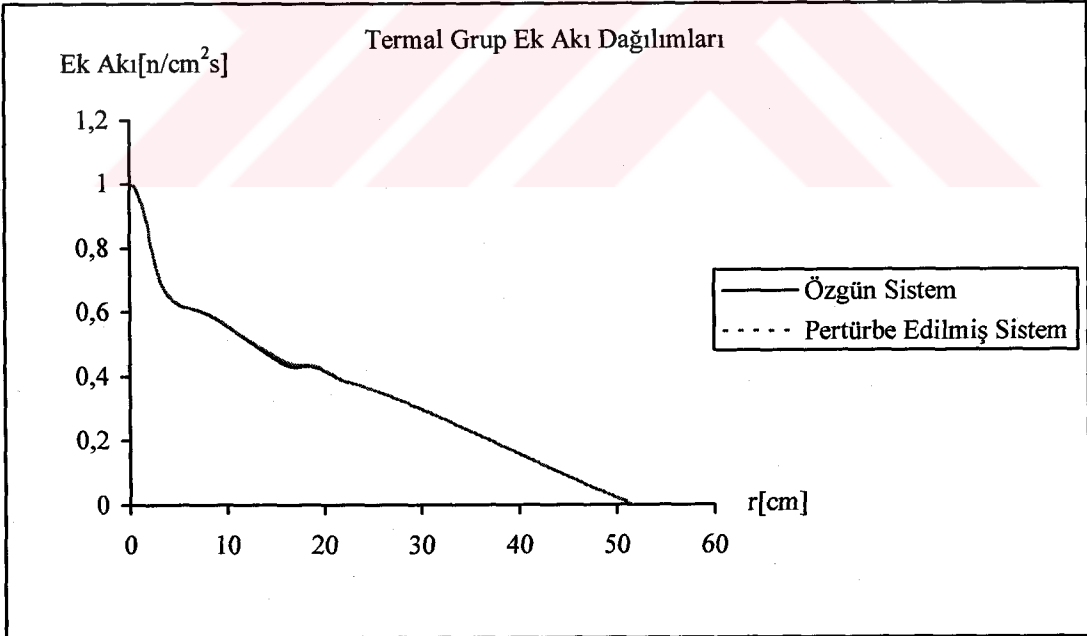
Şekil B.13 Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları



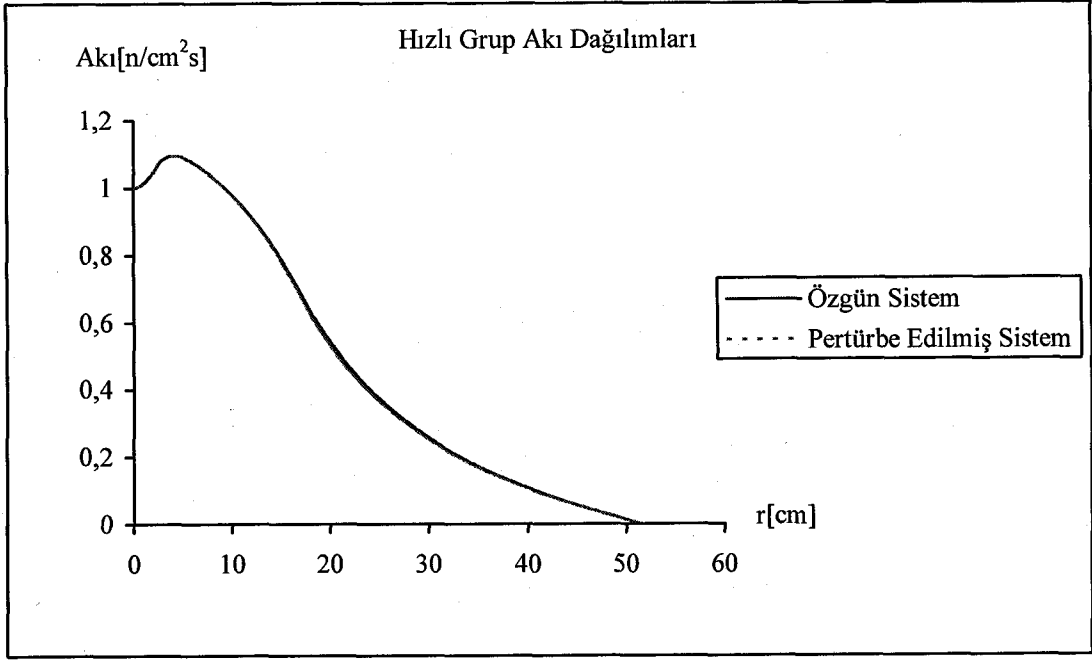
Şekil B.14 Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları



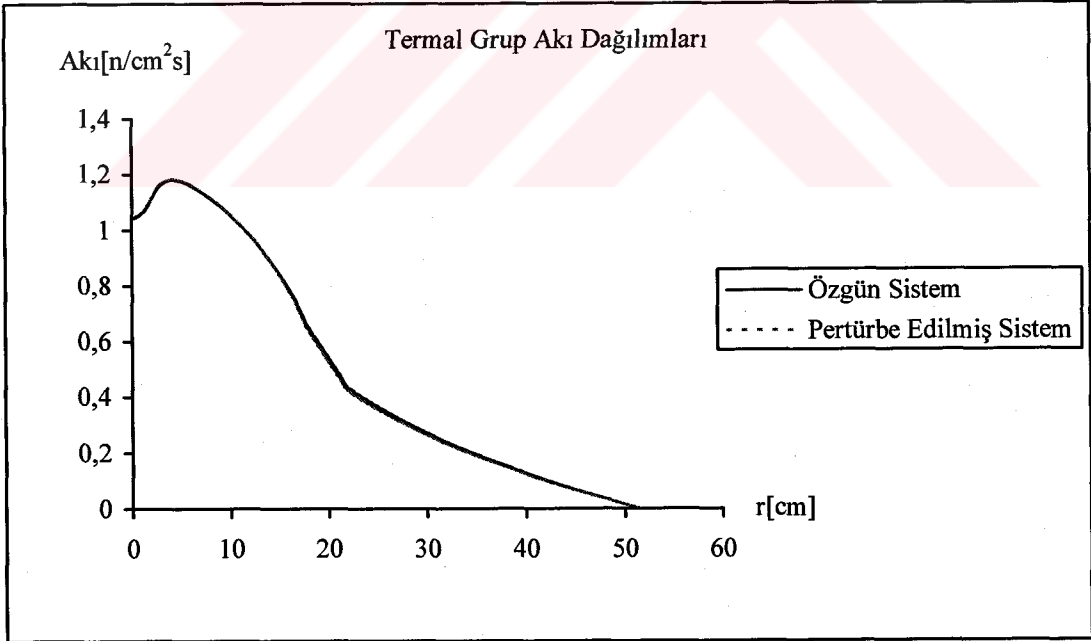
Şekil B.15 Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları



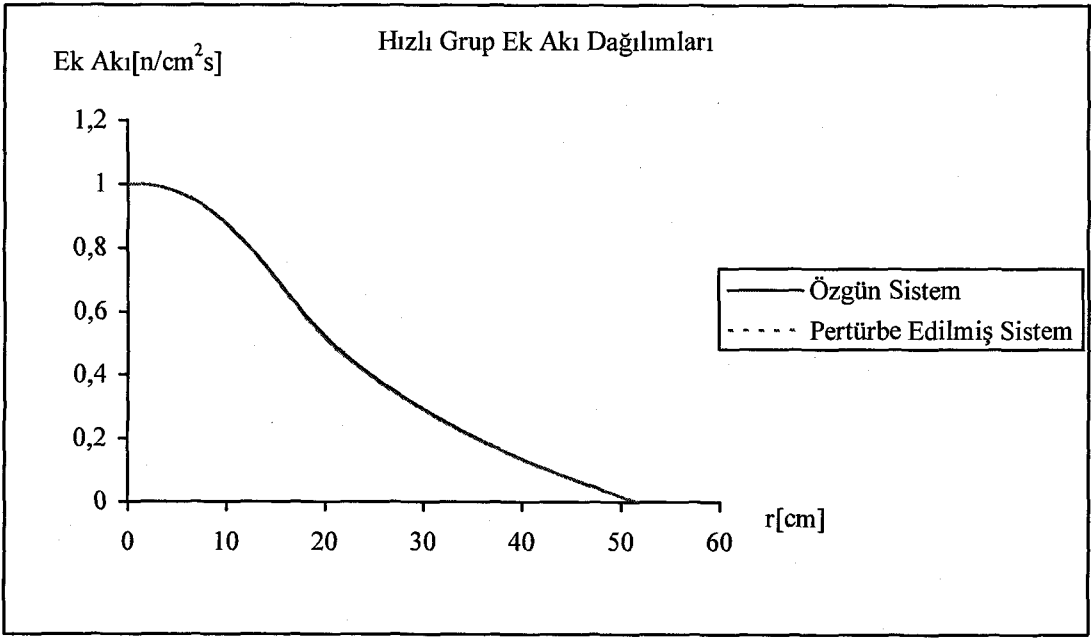
Şekil B.16 Özgün ve E halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları



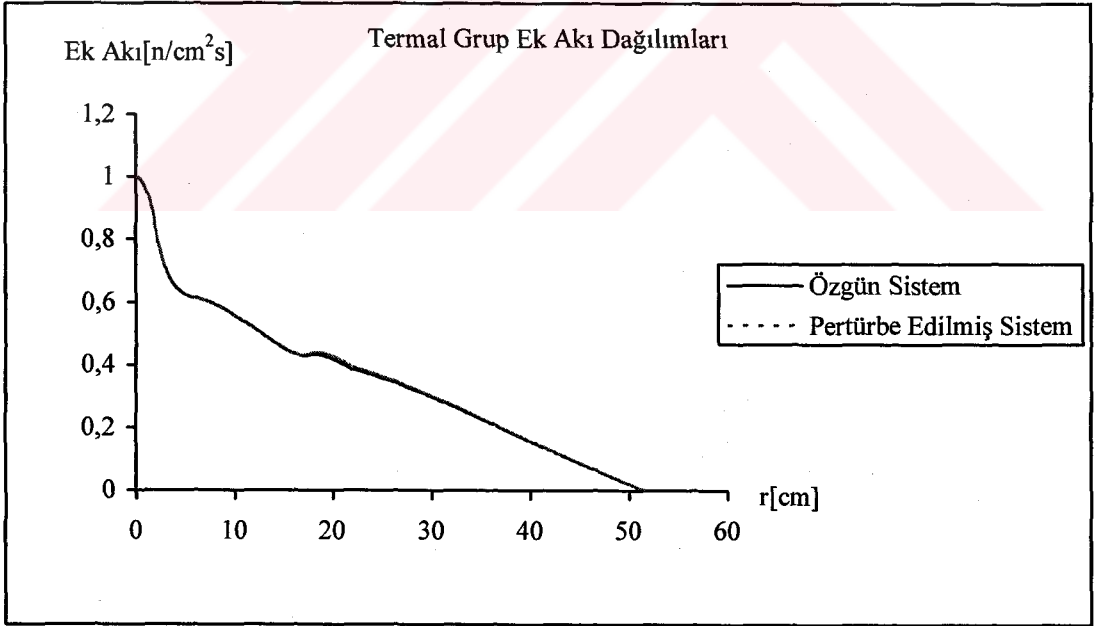
Şekil B.17 Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup akı dağılımları



Şekil B.18 Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup akı dağılımları



Şekil B.19 Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki hızlı grup ek akı dağılımları



Şekil B.20 Özgün ve F halkasından yakıt çıkarılmış sistemlerdeki termal grup ek akı dağılımları

EK C PERTURB PROGRAMI

İçerdiği bir adet disket tezin arka iç kapağına konuşturılmış cep içerisinde sunulmuştur.

ÖZGEÇMİŞ

Sibel Kaluç, 1976 yılında İstanbul’da doğdu. Orta ve lise öğrenimini Mecidiyeköy Lisesi’nde tamamladı. 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik bölümüne girdi. Buradan mezun olduğu 1999 yılında İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsünde yüksek lisans programına başladı. Üç yıldır sözleşmeli öğretmenlik yapmaktadır ve halen devam etmektedir.

