

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DOĞRU EKSENLİ
KİRİŞLERİN BURKULMA ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gökhan ÖZKAN**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

OCAK 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DOĞRU EKSENLİ
KİRİŞLERİN BURKULMA ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gökhan ÖZKAN
(501071043)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Aralık 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Ocak 2011**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Engin ORAKDÖĞEN (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ (YTÜ)**

OCAK 2011

Değerli Aileme,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca fikir ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, birlikte çalışmaktan büyük onur duyduğum hocam Yrd. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU'na, verdiği desteklerden dolayı Yrd. Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK'a, hayatım boyunca her türlü desteğini esirgemeyen annem Suna ÖZKAN'a, babam Şefik ÖZKAN'a, ağabeyim Cezmi ÖZKAN'a ve arkadaşım Gülçin TEKİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2011

Gökhan Özkan
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMALAR.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	2
1.2 Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar	2
2. BURKULMA.....	7
2.1 Elastik Çubukların Burkulması	8
2.2 Kesme Kuvvetinin Kritik Burkulma Yüküne Etkisi	12
3. ÇUBUK KAVRAMI	15
3.1 Tanım.....	15
3.1.1 Yapılan varsayımlar.....	16
3.2 Elastik Çubukların Genel Denklemleri.....	17
3.2.1 Denge denklemleri.....	17
3.2.2 Kinematik denklemler	19
3.2.3 Bünye denklemleri.....	21
3.3 Elastik Sabitlerin Hesabı.....	23
3.4 Genel Ortotropik Çubuklar İçin Elastik Sabitler ve Bünye Denklemlerin Çıkarılışı.....	27
3.5 Genel Çubuk ve Alan Denklemleri	30
4. FONKSİYONEL ANALİZ	35
4.1 Euler Kirişi İçin Fonksiyonel.....	35
4.1.1 Potansiyellik koşulu.....	35
4.1.2 Yönsel toplam (İç çarpım)	36
4.1.3 Gateaux türevi	36
4.1.4 Fonksiyonelin elde edilmesi.....	38
4.2 Timoshenko Kirişi İçin Fonksiyonel	39
4.2.1 Gateaux türevi	40
4.2.2 Fonksiyonelin elde edilmesi.....	42
5. YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMİ	45
5.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	46
5.1.1 Euler kirişi için sonlu elemanlar yöntemi	47
5.1.2 Timoshenko kirişi için sonlu elemanlar yöntemi	49
5.1.3 Burkulma analizi	52
6. SAYISAL ÖRNEK.....	55
6.1 Geçerlilik	55

6.2 Tek Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri	56
6.3 Üç Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri	58
6.4 Dört Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri.....	59
6.5 Altı Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri.....	60
6.6 Kritik Burkulma Yüküne L/h Oranının Etkisi	61
6.7 Kritik Burkulma Yüküne h/b Oranının Etkisi	62
6.8 Eleman Sayısının Kritik Burkulma Yüküne Etkisi	63
6.9 Malzeme Özelliklerinin Kritik Burkulma Yüküne Etkisi	63
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	65
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	71

KISALTMALAR

A	: Kesit Alanı
$\vec{b}$	: Binormal Birim Vektör
C_{ij}	: Elastik Sabitler Matrisi
C_b	: Kayma Rijitliği
D_n	: Eğilme Rijitliği
E_i	: Elemanın Elastisite Modülü
$\vec{f}$	: Dış Yükler
H	: Yatay Tepki Kuvveti
I	: Elemanın Atalet Momenti
$I(u)$	: Fonksiyonel
L	: Türev Operatörü
L_e	: Çubuk Eleman Boyu
M	: Moment
N	: Normal Kuvvet
$\vec{n}$	: Esas Birim Vektör
P	: Burkulma Yüğü
P_{kr}	: Kritik Burkulma Yüğü
q	: Yayılı yük
Q	: Operatör
$\bar{Q}_{ij}$	: Keyfi Bir Açı Alınarak Dönüştürülmüş Rijitlik Matrisi
$\vec{r}$	: Yer Vektörü
s	: Yay Parçası Uzunluğu
S_{ij}	: Esneklik Matrisi
$\bar{S}_{ij}$	: Keyfi Bir Açı Alınarak Dönüştürülmüş Esneklik Matrisi
T	: Kesme Kuvveti
$\vec{t}$	: Teğet Birim Vektör
$\vec{U}$	: Ötelenme Vektörü
v	: Yer Değiştirme
v_{ij}	: Poisson Oranı
$\vec{\omega}$	: Relatif Birim Dönme Vektörü
ε_i	: Şekil Değiştirme Elemanları
σ_i	: Gerilme Elemanları
Ω	: Dönme
$\vec{\Omega}$	: Dönme Vektörü
$\vec{\gamma}$	: Relatif Birim Kayma Vektörü
Ψ	: Sonlu Eleman Ana Bölgesi
Ψ^e	: Sonlu Eleman Alt Bölgesi
Ψ_i, Ψ_j	: Şekil Fonksiyonları
$[T]$	: Transformasyon Matrisi
$[R]$	: Reuter Matrisi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Gerilme ve şekil değiştirme notasyonları.	24
Çizelge 6.1 : İzotrop kirişin Euler hali için kritik burkulma yükleri.	55
Çizelge 6.2 : Malzeme özellikleri.	56
Çizelge 6.3 : Euler hali için 0^0 doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.	56
Çizelge 6.4 : Euler hali için 90^0 doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.	57
Çizelge 6.5 : Malzeme özellikleri.	57
Çizelge 6.6 : Timoshenko hali için 0^0 ve 90^0 doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.	58
Çizelge 6.7 : Malzeme özellikleri.	58
Çizelge 6.8 : Timoshenko hali için $0^0/90^0/0^0$ doğrultulu kirişlerin kritik burkulma yükleri.	58
Çizelge 6.9 : Euler hali için $(0^0/90^0)_s$ ve $(90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.	59
Çizelge 6.10 : Timoshenko hali için $(90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.	59
Çizelge 6.11 : Euler hali için $(0^0/90^0/90^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.	60
Çizelge 6.12 : Euler hali için $(90^0/90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.	61
Çizelge 6.13 : Kritik burkulma yüküne L/h oranının etkisi.	61
Çizelge 6.14 : Euler hali için kritik burkulma yüküne h/b oranının etkisi.	62
Çizelge 6.15 : Timoshenko hali için kritik burkulma yüküne h/b oranının etkisi.	62
Çizelge 6.16 : Eleman sayısının kritik burkulma yüküne etkisi.	63
Çizelge 6.17 : Malzeme özellikleri.	63
Çizelge 6.18 : Euler hali için $(0^0/90^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerde farklı malzeme özelliklerinin burkulma yüküne etkisi.	64

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Kararlı, kararsız ve farksız denge konumları.....	7
Şekil 2.2 : P kuvveti etkisindeki çubuk.	8
Şekil 2.3 : P kuvveti etkisindeki çubuğaun burkulması.	8
Şekil 2.4 : Farklı mesnet koşulları ve burkulma boyları.....	10
Şekil 3.1 : Çubuk eksenini için $\vec{t}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ eksenlerinin gösterimi.	15
Şekil 3.2 : Δs uzunluğundaki çubuk eleman.	18
Şekil 3.3 : Elemanın yer değiştirmiş hali.	20
Şekil 3.4 : Liflerin gösterimi.	28
Şekil 3.5 : Pozitif yön ve malzeme eksenini.	28
Şekil 3.6 : Koordinat eksenini.	31
Şekil 3.7 : Çubukta düzgün yayılı yük bulunması hali.	32
Şekil 3.8 : Tabakalı kompozit giriş.	34
Şekil 5.1 : Doğrusal şekil fonksiyonları.	47

ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DOĞRU EKSENLİ KİRİŞLERİN BURKULMA ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel analiz yöntemi ile Gateaux türevi kullanılarak çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişlerin burkulma analizi yapılmıştır. Bunun için yaklaşık çözüm yöntemi olarak sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Kullanılan yöntemin geçerliliğini test etmek amacıyla, literatürdeki çalışmalarda incelenen problemler yeniden çözülüp sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma toplam yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde öncelikle kompozit malzemeler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ardından, çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmuştur. Çalışmanın literatürdeki yerini göstermek amacıyla son yıllarda elastik ve kompozit malzemeler üzerinde yapılmış çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise burkulma probleminin temel kavramları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca kesme kuvvetinin kritik burkulma yüküne etkisi gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, çubuk kavramı hakkında genel bilgiler verilerek, bu çalışmada hesapları kolaylaştırmak amacıyla yapılan varsayımlar anlatılmıştır. Daha sonra, elastik çubukların genel denklemleri, denge denklemleri, kinematik denklemler ve bünye denklemleri çıkarılmıştır. Bünye bağıntılarının çıkarılması için farklı özellikteki malzemeler için elastik sabitler matrisi elde edilmiştir. Ardından, doğru eksenli bir çubuk için genel çubuk denklemleri ve alan denklemleri çıkarılmıştır.

Dördüncü bölümde, bir önceki bölümde elde edilen çubuk alan, denge ve bünye denklemleri kullanılarak Euler ve Timoshenko kirişleri için potansiyellik koşulu sağlandığı gösterilmiştir. Daha sonra fonksiyonel analiz yöntemi ile Gateaux türevi kullanılarak Euler ve Timoshenko kirişleri için fonksiyoneller elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ilk olarak yaklaşık çözüm yöntemleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir ve bu çalışmada kullanılan sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre üstünlükleri anlatılmıştır. Daha sonra doğrusal şekil fonksiyonları seçilerek bir önceki bölümde elde edilen fonksiyonellere, sonlu elemanlar yöntemi uygulanıp, Euler ve Timoshenko kirişleri için eleman matrisleri elde edilmiştir.

Altıncı bölümde çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişler için farklı tabaka sayıları ve tabaka açıları kullanılarak farklı malzeme özellikleri ve farklı sınır koşulları altında kritik burkulma yükleri hesaplanmış literatürde daha önceden çözülmüş problemlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca L/h değerinin ve kiriş eleman sayısının artmasının kritik burkulma yüküne etkisi gösterilmiştir.

Yedinci bölümde ise yapılan çalışma ile elde edilen sonuçlar anlatılmıştır.

BUCKLING ANALYSIS OF CROSS-PLY LAMINATED COMPOSITE STRAIGHT BEAMS

SUMMARY

In this study, with the use of Gateaux derivative and functional analysis method buckling of cross-ply laminated composite straight bars is analyzed. In this analysis, finite element formulation is implemented as rough solution methodology. In order to test the validity of the implemented methodology, problems reviewed in the literature are resolved and solutions are compared with the solutions in the literature.

This study is composed of seven chapters.

In the first chapter, principally general concept of the composite elements is described. The aim of the study and the description of contents is the following part of the study. In order to present the status of this study in literature, the information of the studies which are related to elastic and composite elements investigated in the recent years are mentioned in the first chapter.

In the second chapter of the study, information about basic concepts of the problem of buckling is reviewed. In addition, the effect of shear critical buckling load is presented.

In the third chapter, the assumptions put for making computations easier are mentioned with the general information of beam concept. Then; elastic beams general equations, equilibrium equations, kinematic equations and constitutive equations are mentioned in the study. To reach constitutive equations, elastic constant matrix is obtained for materials with different characteristics. General bar equations and field equation are obtained for a bar at the straight axis.

In the following chapter, bar field, equilibrium and constitutive equations obtained in the previous chapter are justified to have potential condition for Euler and Timoshenko beams. Gateaux derivative is used with the functional analysis method in order to get functions of Euler and Timoshenko beams.

In the fifth chapter, brief information about approximate solution methods and the advantages of the finite element method to other methods used in this study are explained. By selecting the shape functions of linear functional, finite element method is applied to the function resulted in the previous section, the element matrix are obtained for Euler and Timoshenko beams.

In the the sixth chapter, by using different layer number and angles for cross-ply laminated composite straight beams, and under different element features and boundary conditions critical buckling loads are calculated, then compared to the solutions of problems that have been solved in the literature. In addition, the effect of L/h value and the number of elements increase in critical buckling load is presented.

Finally, the seventh chapter describes the results of the study.

1. GİRİŞ

Kompozit malzemeler, aynı veya farklı gruptaki iki ya da daha fazla sayıda malzemenin istenilen özellikleri sağlaması amacıyla makro seviyede birleştirilmesiyle elde edilir. Kompozit malzemeler, içerdikleri malzemelerin zayıf yönlerini düzelterek üstün bir malzeme elde etmek amacıyla kullanılırlar.

Günümüzde kompozit malzemeler savunma sanayi, uzay, otomobil, elektronik ve benzeri alanlarda çok yönlü olarak kullanılırlar. Kompozit malzemelerin izotropik malzemelere göre birçok avantajları vardır. Bunlardan en önemlileri şu şekilde sıralanır.

- Yüksek mukavemetli olmaları
- Korozyona karşı dirençli olmaları
- Kolay şekil alabilmeleri
- Özgül ağırlıklarının düşük olmasından dolayı hafiftirler.
- Isı, ses, elektrik izolasyonu ve korozyon dayanımları fiber takviyeli kompozit malzemelerde yüksektir.

Kompozit malzemeler izotropik malzemelere göre birçok avantaja sahip olmalarının yanı sıra bazı dezavantajlara da sahiptirler. Bunlar ise aşağıda ki gibi özetlenebilir.

- Kompozit malzemeler farklı doğrultularda farklı mekanik özellikleri gösterirler.
- Kompozit malzemelerin bünyesinde bulunan hava zerrecikleri, malzemenin yorulma özelliklerini olumsuz yönde etkilemektedir.
- Kompozit malzeme üretimi pahalı bir üretimdir.
- Kompozit malzemeler fırınlanmadan kullanılmazlar.
- Çekme, basınç ve eğilme mukavemet değerleri, aynı kompozit malzemeler için farklılık gösterebilir.

Kompozit malzemeler yukarıda bahsedilen dezavantajlara rağmen, günümüzde yüksek mukavemet ve hafif malzeme gereksiniminin artmasından dolayı çok sık kullanılmaktadır ve önümüzdeki yıllarda da kullanım alanları giderek artacaktır.

1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişlerin burkulma analizi incelenmiştir.

Bu amaçla öncelikli olarak, burkulma ile ilgili temel kavramlar açıklanmıştır. Farklı mesnet koşullarına sahip çubukların kritik burkulma yükü bulunmuştur ve kesme kuvvetinin kritik burkulma yüküne etkisi gösterilmiştir. Daha sonra çubuk kavramı ile ilgili genel denklemler, denge denklemleri, kinematik denklemler, bünye bağıntıları ve alan denklemleri çıkarılmıştır. Bu temel bağıntılar yardımıyla Euler ve Timoshenko kirişleri için potansiyellik koşulu sağlatılıp, Gateaux türevi uygulanmıştır. Bu türev kullanılarak doğru eksenli kirişlerin burkulmasına ait Euler ve Timoshenko kirişleri için fonksiyoneller elde edilmiştir. Ardından sonlu elemanlar yöntemi ile Euler ve Timoshenko kirişleri için doğrusal şekil fonksiyonlarına bağlı eleman matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen sonlu eleman matrisleri yardımıyla, çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişler için farklı sınır koşullarının yanı sıra farklı malzeme özellikleri, farklı tabaka sayısı ve farklı tabaka doğrultusu altında burkulma analizi yapılmıştır.

Çözümde eleman sayısının artması ve sistem matrislerinin boyutlarının büyümesinden dolayı ortaya çıkan zorlukların aşılması için Fortran bilgisayar dili kullanılarak bir program yazılmıştır. Programdan elde edilen verilerin doğruluğu, literatürde yer alan çeşitli örnekler yardımıyla test edilmiştir.

Son bölümde Euler ve Timoshenko kirişler için burkulma analizi ile elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır ve geliştirilen sonlu eleman formülasyonunun mühendislik uygulamaları açısından yeterli yakınsaklıkta olduğu görülmüştür. Böylece, bu çalışmada kullanılan yöntemin geçerliliği incelenmiştir ve ileride yapılacak çalışmalar için bir kaynak oluşturacağı öngörülmüştür.

1.2 Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Kompozit malzemeler sağladıkları birçok avantaj nedeniyle günümüzde uzay, otomotiv, denizcilik ve inşaat gibi birçok sektörde yaygın olarak kullanılırlar. Bu yüzden son yıllarda kompozit malzemeler konusunda araştırma ve geliştirme çalışmaları çok yaygınlaşmıştır. Literatürde kompozit malzemelerle ilgili birçok

Çalışma mevcuttur. Bunlar genellikle plaklar, kabuklar, kemerler ve kirişler üzerinedir.

Literatürde kompozit malzemelerle ilgili birçok kitap mevcuttur.

R. M. Jones [1], J. N. Reddy [2] ve A. K. Kaw [3] tarafından yapılan kompozit mekaniği üzerine çalışmalarda kompozit malzemeler hakkında genel bilgi verilmiş, teori ve örnekler anlatılmıştır.

Kompozit plaklar üzerine yapılan bazı çalışmalar şunlardır.

Y. M. Desai, G. S. Ramtekkar ve A. H. Shah [4] tarafından yapılan çalışmalarda, çok katmanlı kalın kompozit plaklarda karışık sonlu elemanlar modeli kullanılarak serbest titreşim analizi yapılmıştır.

Y. X. Zhang ve C. H. Yang [5] çalışmalarında tabakalı kompozit plakların dinamik ve burkulma analizini sonlu elemanlar modeli kullanılarak incelenmiştir.

Kompozit kabuklar üzerine yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır.

M. Ganapathi, B. P. Patel ve D. S. Pawargi [6], apraz tabakalı kompozit kalın kabukların dinamik analizini yüksek mertebe teorisi kullanılarak incelenmiştir.

T. Parka, K. Kimb ve S. Han [7] tarafından yapılan çalışmalarda tabakalı kompozit plak ve kabuklarda statik ve dinamik analiz incelenmiştir.

Kompozit kemerler üzerine yapılmış bir çalışmada, A. A. Khdeir ve J. N. Reddy [8], apraz tabakalı kompozit kemerlerde serbest ve zorlanmış titreşim incelenmiştir.

Literatürde elastik kirişlerle ilgili çalışmalar da yapılmıştır. Bu çalışmalarda problemin kesin çözümü yerine sonlu elemanlar metodu, sonlu farklar metodu, Rayleigh-Ritz yöntemi ve Galerkin yöntemi gibi yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

T. Gün [9], doğru eksenli elastik çubukların burkulma problemini inceleyerek fonksiyonel analiz yöntemi ile Gateaux türevi kullanılarak yeni bir fonksiyonel bulunmuştur. Ayrıca çalışmasında sabit kesitli çubukların burkulma problemi Ritz ve karışık sonlu elemanlar metodu kullanılarak çözülmüştür.

A.Gürsoy [10], çalışmasında elastik çubukların ve ereve sistemlerin burkulma yüklerini varyasyonel türev ve sonlu farklar yöntemini kullanarak incelemiştir.

S. Özkan [11] elastik zemine oturan kirişlerde burkulma problemini incelemiştir. Bu çalışmada, Winkler zemin modeli ve hipotezi kullanılmıştır.

U. Yeni [12] tarafından elastik çubukların titreşim frekanslarının ve burkulma yüklerinin analizi sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir. Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elastik çubukların farklı sınır şartları altında titreşim karakteristikleri, statik ve dinamik burkulma yükleri incelenmiştir.

A. Y. Aköz ve F. Kadioğlu [13-15] tarafından Gateaux türevi yöntemi, elastik ve viskoelastik kirişler için uygulanmıştır.

Literatürde J. D. Oden ve J. N. Reddy [16] tarafından fonksiyonel analiz yöntemi ve Gateaux türevi yönteminin anlatıldığı kitap yayınlanmıştır.

M. İnan [17] tarafından elastik çubukların genel teorisi incelenmiştir.

Literatürde kompozit kirişlerde serbest titreşim davranışı ile ilgili birçok çalışma mevcuttur.

L. Jun, H. Hongxing ve S. Rongying [18] tarafından eksenel yüklü tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimleri ve burkulma davranışları dinamik rijitlik metodu kullanılarak incelenmiştir.

M. K. Rao, Y. M. Desai ve M. R. Chitnis [19] çalışmalarında, tabakalı kirişlerin serbest titreşimleri karışık teori kullanılarak incelenmiştir. Kompozit ve sandviç kirişlerde doğal frekansı bulmak için yüksek mertebeden karışık teori uygulanmıştır.

M. Aydoğdu [20] çalışmasında çapraz tabakalı kirişlerin farklı sınır koşulları ile titreşim analizini Ritz metodunu kullanarak incelemiştir.

G. S. Ramtekkar ve Y. M. Desai [21] tarafından tabakalı kompozit kirişlerde karışık sonlu elemanlar modeli kullanılarak doğal titreşim incelenmiştir. Altı düğümlü ve düzlem gerilmeli karışık sonlu elemanlar modeli Hamilton enerji prensibi kullanılarak geliştirilmiş ve kompozit kirişlerin doğal titreşimi incelenmiştir.

L. Jun, H. Hongxing ve S. Rongying [22] çalışmalarında eksenel yüklenen tabakalı kompozit kirişlerde serbest titreşimi, dinamik rijitlik analizi ile incelemişlerdir.

G. Shi ve K. Y. Lam [23] tarafından kompozit kirişlerde yüksek mertebe kiriş teorisi kullanılarak sonlu elemanlar titreşim analizi incelenmiştir. Hamilton'un prensibini

uygulayarak varyasyonel hareket denklemini, üçüncü dereceden kayma deformasyon teorisini kullanarak elde etmişlerdir.

L. Jun ve H. Hongxing [24] çalışmalarında tabakalı kompozit kirişlerin dinamik rijitlik analizini trigonometrik kesme deformasyon teorisi kullanılarak incelenmiştir.

L. Jun, H. Hongxing ve S. Rongying [25], tabakalı kompozit kirişlerin dinamik analizini sonlu elemanlar metodu kullanılarak incelenmiştir.

A. S. Bassiouni, R. M. Gad-Elrab ve T. H. Elmahdy [26] çalışmalarında tabakalı kompozit kirişlerin dinamik davranışlarını teorik ve deneysel araştırma ile incelenmiştir.

P. Subramanian [27] ise simetrik tabakalı kompozit kirişlerin eğilme analizini, sonlu elemanlar metodu kullanarak incelemiştir.

R. E. Fatmi ve H. Zenzri [28], çalışmalarında tabakalı kompozit kirişlere yapısal davranış ve Saint Venant çözümü uygulamışlardır.

P. Subramanian [29] yaptığı çalışmada tabakalı kompozit kirişlerde dinamik analizi yüksek mertebe teorisi ve sonlu elemanlar metodunu kullanarak incelemiştir.

T. Kant, S. R. Marurb ve G. S. Rae [30] tarafından tabakalı kirişlerin dinamik analizi için analitik çözüm yüksek mertebe teori kullanılarak incelenmiştir. Denge denklemleri Hamilton'un prensibi kullanılarak elde edilmiştir.

M. Kırac [31] ise doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizini incelemiştir. Doğru eksenli kompozit çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir.

Literatürde kompozit kirişlerin burkulma analizi ile ilgili çalışmalar da mevcuttur

R. Xu ve Y. F. Wu [32] tarafından kompozit kirişlerin burkulması ve serbest titreşimi iki boyutlu teori kullanılarak incelenmiştir.

M. Aydogdu [33] çapraz tabakalı kirişlerin farklı sınır koşulları altındaki burkulma analizi üzerine çalışmıştır. Ritz metodunu kullanarak kritik burkulma yüklerini elde etmiş ve sonuçları literatür ile karşılaştırmıştır.

A. A. Khdeir ve J. N. Reddy [34] tarafından yapılan çalışmalarda çapraz tabakalı kirişlerin burkulması keyfi sınır koşulları kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca farklı kayma deformasyon teorisi ile klasik teori arasında ki ilişki incelenmiştir.

M. A. Ramos Loja, J. I. Barbosa ve C. M. M. Soares [35] çalışmalarında yüksek mertebede ayırık model kullanılarak tabakalı kirişli yapıların burkulma davranışı incelenmiştir.

R. Xu ve Y. Wu [36] tarafından kompozit elemanlarda Timoshenko kiriş teorisini kullanarak statik, dinamik ve burkulma analizi yapılmıştır.

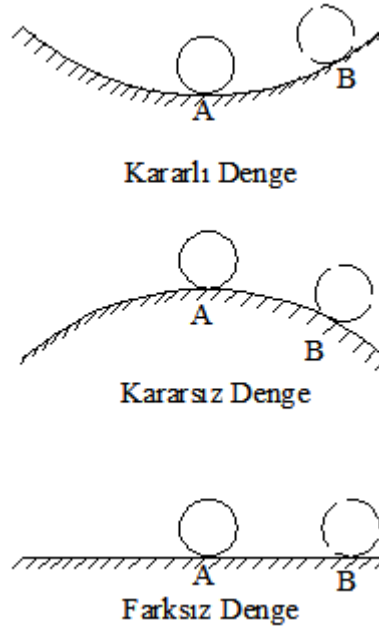
S. A. Emam ve A. H. Nayfeh [37] çalışmalarında serbest titreşim ve burkulma analizi, farklı sınır koşulları ve farklı doğrultularda kompozit kirişler için incelenmiştir.

E. Eryiğit [38] çalışmasında tabakalı kompozit çubuklarda yanal yük etkisi ile oluşan burkulma davranışlarını incelemiştir. Bu çalışmada, dairesel delikli tabakalı kompozit kirişlerde, burkulma davranışlarını incelemiştir.

Bu çalışmada doğru eksenli kompozit kirişlerin burkulma analizi Fortran programı kullanılarak incelenmiştir. Diğer çalışmalardan farklı olarak Gateaux türevi yöntemi, doğru eksenli kompozit kirişler için uygulanarak burkulma analizi ele alınmıştır.

2. BURKULMA

Bir sistemde, denge konumunun kararsız olması durumunda, herhangi bir bozucu etki ile sistem bu konumdan farklı bir konuma geçerse tekrar ilk konumuna geri dönemez. Bu tür problemlere stabilite problemleri adı verilir. Cisimler Şekil 2.1’de görüldüğü gibi üç değişik denge durumundadırlar. Bu denge durumları kararlı denge, kararsız denge ve farksız dengedir.

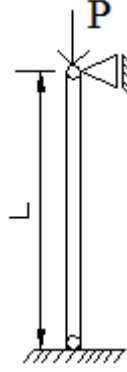


Şekil 2.1 : Kararlı, kararsız ve farksız denge konumları.

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi bilye sürtünmesiz kabul edilen yüzeyde dengededir. Bilye denge konumundan saptırılıp serbest bırakılırsa, yani A noktasından B noktasına getirilirse, kararlı denge halinde yeniden ilk konumuna geri dönerken, kararsız denge konumunda tekrar denge konumuna geri dönemez. Farksız denge konumunda ise B noktasına ilk hızsız bırakılan bilye bu yeni noktada dengede kalmaya devam eder.

2.1 Elastik Çubukların Burkulması

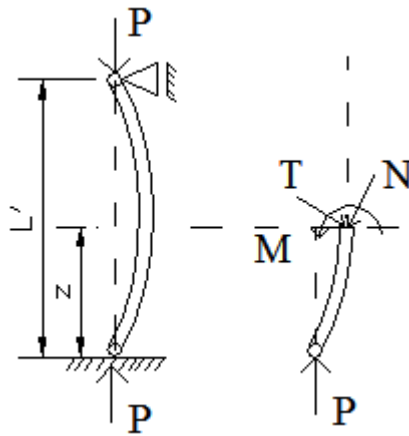
Çubuklarda da bilye örneğinde olduğu gibi benzer bir durum ortaya çıkmaktadır. Şekil 2.2’de görüldüğü gibi L boyuna sahip homojen ve izotrop bir çubuğa P burkulma yükü uygulansın.



Şekil 2.2 : P kuvveti etkisindeki çubuk.

Şekil 2.2’deki sistemin hangi denge konumunda olduğu P burkulma yükü ve P_{kr} kritik burkulma yükü ile karşılaştırmasıyla belirlenir. $P_{kr} > P$ için kararlı denge, $P > P_{kr}$ için kararsız denge ve $P = P_{kr}$ için de farksız denge konumu olur. Bu çözüm ilk defa L.Euler tarafından bulunmuştur.

Şekil 2.2’de uzunluğu L ve eğilme rijitliği EI olan homojen ve izotrop çubuk uçlarından etkiyen P kuvveti ile eksenel basınca maruz kalarak Şekil 2.3 konumuna gelmiş olsun.



Şekil 2.3 : P kuvveti etkisindeki çubuğun burkulması.

Şekil 2.3’deki homojen ve izotrop olan çubuğu bir noktada kesersek kesit tesirleri,

$$N = P \cos \theta \quad (2.1)$$

$$T = P \sin \theta \quad (2.2)$$

$$M = Pv \quad (2.3)$$

şeklinde olur. Burada,

$$\cos \theta \cong 1 \quad (2.4)$$

$$\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta = \frac{dv}{dz} = v' \quad (2.5)$$

olarak alınır. N, T ve M kesit tesirleri,

$$N = P \quad (2.6)$$

$$T = Pv' \quad (2.7)$$

$$M = Pv \quad (2.8)$$

elde edilir. Çökme ile eğilme moment arasında,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.9)$$

şeklindedir. Burada Denklem (2.8) yerine koyulursa,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{Pv}{EI} = 0 \quad (2.10)$$

çökme için diferansiyel denklem elde edilir. Burada denklemi kısaltmak amacıyla P/EI yerine λ^2 koyulursa,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. Bu denklem ikinci dereceden lineer, harmonik diferansiyel denklem olur ve bu denkleme Euler diferansiyel denklem adını alır. Bu denklemin genel çözümü,

$$v = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z) \quad (2.12)$$

şeklindedir. Burada A ve B integrasyon sabitleridir ve iki ucu mesnetlenmiş çubuk için sınır şartları,

$$z = 0 \rightarrow v = 0 \quad (2.13)$$

$$z = L \rightarrow v = 0 \quad (2.14)$$

şeklindedir. Denklem (2.13) uygulandığında $A=0$ elde edilir ve Denklem (2.12),

$$v = B \sin(\lambda z) \quad (2.15)$$

haline gelir. Denkelem (2.14) uygulandığında,

$$0 = B \sin(\lambda L) \quad (2.16)$$

haline gelir. Bu çözüm trivial olmadığında dolayı $B \neq 0$ dır ve denklem,

$$\sin(\lambda L) = 0 \rightarrow \lambda L = n\pi \quad (2.17)$$

elde edilir. Buradan Denklem (2.17) Denklem (2.15)'de yerine koyulursa,

$$v = B \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \quad (2.18)$$

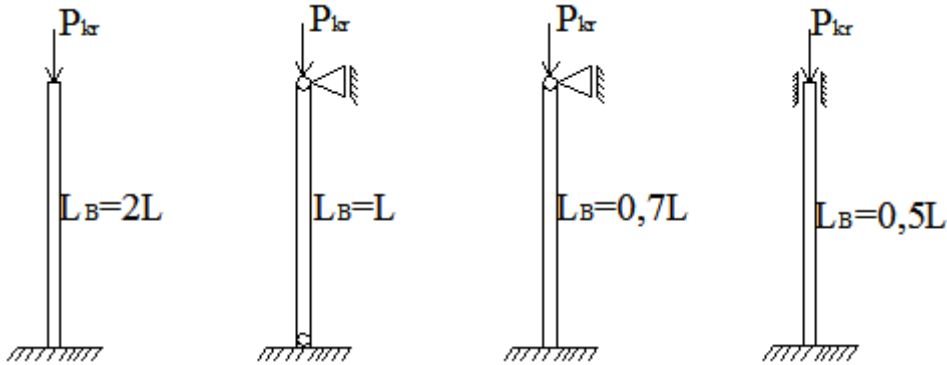
elde edilir. Burada B elastik eğrinin genliği, n ise $n=1, 2, 3, \dots$ gibi tamsayıları gösterir ve Denklem (2.17)'nin karesi alınır ve λ^2 'nin değeri yerine konulursa,

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada $n=0$ için $P=0$ olur ve bunun bir anlamı olmaz. Diğer n değerleri içinde P'nin en küçük olduğu değer $n=1$ olduğu hal içindir. Böylece burkulmanın başlamasına neden olan kritik burkulma yükü P_{kr} ,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.20)$$

şeklindedir. Bu değere Euler burkulma yükü adı da verilir. Benzer yöntem kullanılarak farklı sınır koşullarına sahip homojen ve izotrop olan çubukların kritik burkulma yükleri hesaplanabilir.



Şekil 2.4 : Farklı mesnet koşulları ve burkulma boyları.

Şekil 2.4'te farklı mesnet koşullarına sahip homojen ve izotrop olan çubuklarda L_B ile gösterilen değere çubuğun burkulma boyu denir.

Şekil 2.4'te bir ucu ankastre bir ucu serbest uç olan çubuğun sınır koşulları,

$$v(0) = 0 \quad (2.21)$$

$$\Omega(0) = 0 \quad (2.22)$$

$$M(L) = 0 \quad (2.23)$$

$$T(L) = 0 \quad (2.24)$$

şeklindedir ve burkulma boyu 2L olarak elde edilmiştir. Kritik burkulma yükü P_{kr} ,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (2.25)$$

elde edilir. Şekil 2.4'te iki ucu da mafsallı olan çubuğun sınır koşulları,

$$v(0) = 0 \quad (2.26)$$

$$M(0) = 0 \quad (2.27)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.28)$$

$$M(L) = 0 \quad (2.29)$$

şeklindedir ve burkulma boyu L olarak elde edilmiştir. Kritik burkulma yükü P_{kr} ,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(L)^2} \quad (2.30)$$

elde edilir. Şekil 2.4'te bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı olan çubuğun sınır koşulları,

$$v(0) = 0 \quad (2.31)$$

$$\Omega(0) = 0 \quad (2.32)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.33)$$

$$M(L) = 0 \quad (2.34)$$

şeklindedir ve burkulma boyu 0,7L olarak elde edilmiştir. Kritik burkulma yükü P_{kr} ,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \quad (2.35)$$

elde edilir. Şekil 2.4'te iki ucu da ankastre olan çubuğun sınır koşulları,

$$v(0) = 0 \quad (2.36)$$

$$\Omega(0) = 0 \quad (2.37)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.38)$$

$$\Omega(L) = 0 \quad (2.39)$$

şeklindedir ve burkulma boyu 0,5L olarak elde edilmiştir. Kritik burkulma yükü P_{kr} ,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5L)^2} \quad (2.40)$$

elde edilir.

2.2 Kesme Kuvvetinin Kritik Burkulma Yüküne Etkisi

Bundan önceki bölümde çubukta kesit tesirlerinden sadece eğilme momenti göz önüne alınmıştı. Bu bölümde ise $T = Pv'$ ile ifade edilen kesme kuvvetinin etkisinde hesaba katılacaktır. Elastik eğri fonksiyonu,

$$v = v_M + v_T \quad (2.41)$$

olarak yazılır. Burada v toplam elastik eğriyi, v_M eğilmeden meydana gelen elastik eğriyi v_T ise kesmeden meydana gelen elastik eğridir. Denklem (2.41)'in iki defa türevi alındığında,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 v_M}{dz^2} + \frac{d^2 v_T}{dz^2} \quad (2.42)$$

Gerekli ifadeler yerine yazıldığında Denklem (2.42),

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{k'}{GA} \frac{dT}{dz} = -\frac{Pv}{EI} + \frac{k'P}{GA} \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (2.43)$$

elde edilir. Burada k' kesit geometrisine bağlı bir katsayı, G malzemenin kayma modülünü, A ise kesit alanını ifade etmektedir. Denklem (2.43) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{EI(1 - \frac{k'P}{GA})} v = 0 \quad (2.44)$$

elde edilir. Literatürde Engesser formülü olarak da adlandırılan,

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI(1 - \frac{k'P}{GA})} \quad (2.45)$$

şeklinde yazılırsa Denklem (2.44) şu hale gelir.

$$v'' + \lambda^2 v = 0 \quad (2.46)$$

Bu diferansiyel denklem iki ucu mafsallı, homojen ve izotrop bir çubuk için çözülürse,

$$P_{kr} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L^2}}{1 + \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{k'}{GA}} \quad (2.47)$$

elde edilir. Burada kesme kuvvetinin hesaba katılması ile kritik burkulma yüküne azaltıcı bir etki yaptığı ve daha güvenli bir hesap olduğu görülmektedir. Burada, $EI = D_n$ eğilme rijitliği ve $GA = C_b$ ise kayma rijitliğidir.

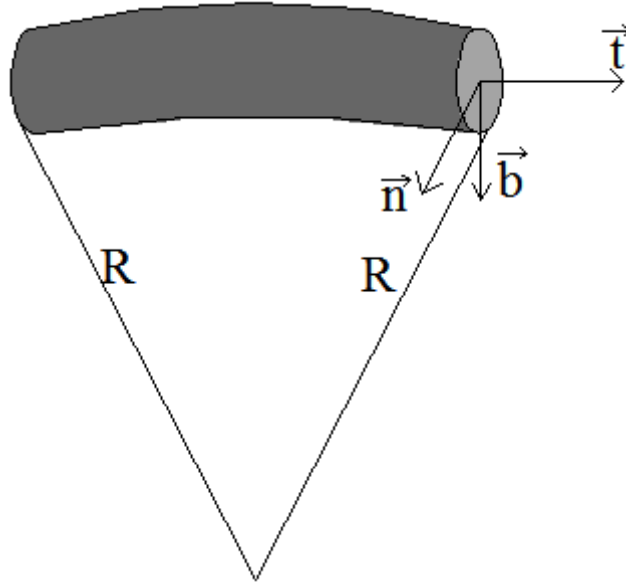
3. ÇUBUK KAVRAMI

3.1 Tanım

Çubuk adı verilen cisim, eksen ve dik kesit adı verilen iki elemandan oluşur. Dik kesit adı verilen sınırlı bir düzlem parçası, kendi ağırlık merkezinde çubuk eksenini olan bir uzay eğrisine dik kalacak şekilde hareket ederse çubuk oluşur [17].

Çubuk eksenini her hangi bir uzay eğrisi gibi düşünülürse, bu eğri yer vektörü ile şu şekilde tanımlanır.

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (3.1)$$



Şekil 3.1 : Çubuk eksenini için $\vec{t}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ eksenlerinin gösterimi.

Bu uzay eğrisi üzerinde başlangıç olarak kabul edilen A_0 noktası ile Şekil 3.1’de gösterilen A noktası arasındaki mesafeyi s olarak kabul edelim. Bu s skaler büyüklüğünü eğri boyunca,

$$s = \int_c |d\zeta| \quad (3.2)$$

ile tanımlayalım. Denklem (3.2)’de $d\zeta$ eğri boyunca olan diferansiyel yer değiştirme vektörünü gösterir.

İleride yapılacak hesapların temelini oluşturacak koordinat takımının belirlenmesi için, eksene bağlı üç birim vektör tarif edilir. Bu vektörlerin her biri Denklem (3.1) ile tanımlanan yer vektörüne diferansiyel geometrik ilişkilerle bağlıdır. Bu vektörler Şekil 3.1’de gösterildiği gibi, eksen eğrisine teğet olan teğet birim vektör ($\vec{t}$), teğet vektöre dik olup eğrilik merkezine yönelen normal birim vektör ($\vec{n}$) ve $\vec{t}$ ile $\vec{n}$ ’nin vektörel çarpımı ile tanımlanan binormal birim vektör ($\vec{b}$) olarak isimlendirilirler.

Teğet birim vektör olan $\vec{t}$ ve binormal birim vektör olan $\vec{b}$,

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{d\vec{r}}{ds} \\ |\vec{t}| &= 1 \\ \vec{b} &= \vec{t} \times \vec{n}\end{aligned}\tag{3.3}$$

ile tanımlanır.

3.1.1 Yapılan varsayımlar

Bu çalışmada doğru eksenli çubukların kendi ekseni doğrultusunda yayılı yük etkimesi halinde davranışı incelenmiştir. Doğru eksenli çubuklardan oluşan sistemlerde, çubuk boyunca normal kuvvetin değişmediği kabul edilmiştir. Çubuk adı verilen cismin şekil ve yer değiştirmelerinin çok küçük olduğu kabul edilmiş, bu nedenle çalışma kapsamında birinci mertebe kuramı içerisinde kalınmıştır. Birinci mertebe teorisinin esasları dahilinde gerilme hesaplarını kolaylaştırmak için, çubuğun enine olan iki boyutunun uzunluğu çubuk boyu ve eğrilikler yanında oldukça küçük olduğu kabul edilmiştir. Hesapları kolaylaştırmak adına yapılan bir diğer kabul ise, çubuğun elastik, homojen ve ortotropik bir malzemeden yapılmıştır. Ayrıca çubuğun uniform ve değişken bir enkesit alanına sahip olduğu kabul edilmiştir. Kuvvet ve şekil değiştirmeler arasında lineer bir ilişki mevcut olup, çubukta dönme atalet momenti ihmal edilmiştir.

3.2 Elastik Çubukların Genel Denklemleri

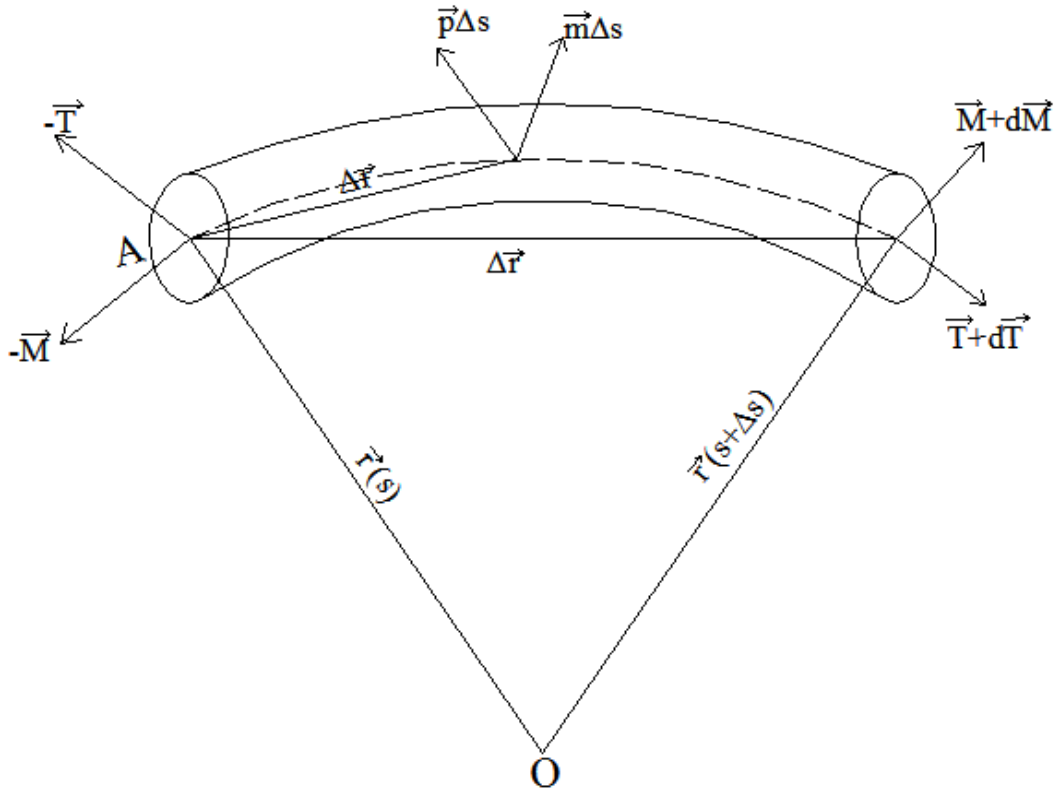
Bu kısımda, çubuğa etki eden kuvvetler tanımlanacaktır. Bir cisim en genel haliyle iç ve dış kuvvet adı verilen iki tür kuvvetin etkisi altındadır. Dış kuvvetler, söz konusu olan cisme diğer cisimlerin yaptığı etki olarak tarif edilip, kütle kuvvetleri ve yüzey kuvvetleri olarak ikiye ayrılırlar. Kütle kuvvetleri cisim içerisindeki bir alana ya da hacime etki eden kuvvetler olup, yer çekimi kuvvetleri ve ağırlık kuvvetleri bu kuvvetlere örnek olarak verilebilirler. Yüzey kuvvetleri ise inceleme konusu olan cismin yüzeyine diğer cisimler aracılığı ile doğrudan ya da dolaylı olarak etki eden kuvvetlerdir.

Bir cisme dış kuvvetler etki ettiğinde, cismin parçaları arasındaki etki ve tepkiyi karakterize eden iç kuvvetler ortaya çıkar. Kesit tesirleri adı da verilen bu iç kuvvetler, çubuk mukavemetindeki en önemli kavramlardan biridir. Kesit üzerinde dağılmış olan bu iç kuvvetlerin şiddetleri gerilmeleri verir. Gerilmelerin hesaplanmasında statik hesaplardan farklı olarak çubuğun şekil ve yer değiştirmesinin de hesaba katılması gerekmektedir.

Çubuk mukavemetinde yer değiştirmelerin hesabından şekil değiştirmelerin hesabına geçilirken kinematik denklemler kullanılır. Aynı şekilde kuvvetlerin etkisi altında çubukta oluşan gerilmelerin hesabında denge denklemleri kullanılmaktadır. Bunlara ek olarak, şekil değiştirmeyi gerilmeye bağlayan gerilme-şekil değiştirme bağıntılarına bünye denklemleri adı verilir ve bu denklemler cisimden cisme farklılık gösterir.

3.2.1 Denge denklemleri

Kesite etki eden iç kuvvetlerin vektörel toplamını veren $\vec{T}$ ve bu kuvvetlerin ağırlık merkezine taşınması durumunda katılması gereken kuvvet çiftini gösteren $\vec{M}$ esas kesit tesirleri olup, birbirlerine zıt yönlüdürler ve genel olarak kesitten kesite değişirler. Bu fonksiyonların çubuk eksen boyunda değişimi keyfi olmayıp dış kuvvetlere bağlıdır. $\vec{R}$ ve $\vec{M}$ vektörleri s değişkeninin $\vec{R}(s)$ ve $\vec{M}(s)$ gibi fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların değişimini elde etmek için Δs uzunluğunda bir çubuk elemanın üzerine etki eden kuvvetlerle dengede olduğu düşünülür.



Şekil 3.2 : Δs uzunluğundaki çubuk eleman.

Şekil 3.2’de görüldüğü gibi s ve $s + \Delta s$ ile tarif edilen [17] birbirlerine yakın iki dik kesit arasındaki s uzunluğunda çubuk elemanın üzerine etkiyen yayılı dış kuvvetleri $\vec{p}$ ve bunların çubuk eksenine indirgendikleri zaman bulunacak yayılı kuvvet çiftlerini de $\vec{M}$ ile gösterelim.

Böylece, çubuk elemanın dengenin birinci denklemi ile A noktasına göre yazılan moment eşitliği kullanılarak çubuk elemanın denge denklemi,

$$-\vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + \vec{p}\Delta s = 0 \quad (3.4)$$

$$-\vec{M} + \vec{M} + \Delta\vec{M} + \vec{m}\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde sadeleştirmeler yapıp Δs ile bölünerek $\Delta s \rightarrow 0$ ile limite geçilirse elastik çubuğun denge denklemleri,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu denklemlere kesit tesirlerinin diferansiyel denge denklemleri denir ve çubuk statığının iki esas denklemini oluşturur.

3.2.2 Kinematik denklemler

Çubuk şekil değiştirdikten sonra, çubuk eksenindeki herhangi bir noktanın yer değiştirerek yeni bir konuma gelmesi, çubukta yer değiştirme olarak tarif edilir.

Çubuk yer değiştirmesi için önemli olan iki vektör vardır. Bunlardan biri çubuk dik kesitinin ağırlık merkezine ait ötelenmesini gösteren $\vec{U}(s)$ vektörü, bir diğeri ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösteren vektör $\vec{\Omega}(s)$ 'dir. Elastik çubuk teorisi için önemli olan bu iki vektör aynı cisme ait dik kesitin hareketini tanımlamasından dolayı birbirlerine bağımlıdır. Bu iki vektör dışında, çubuk şekil değiştirmesi için önemli olan iki vektör daha vardır. Bunlar relatif birim kayma vektörü $\vec{\gamma}$ ve relatif birim dönme vektörü $\vec{\omega}$ 'dır. Bu iki vektörün relatif birim değer olarak tanımlanmalarının sebebi, birim uzunluktaki bir çubuk eleman için tarif edilmeleridir.

Bu vektör fonksiyonlarından relatif birim kayma vektörü olan $\vec{\gamma}$ ile $\vec{U}$ ötelenme vektörü arasındaki ilişki, $\vec{\Omega} = 0$ alınmak şartıyla,

$$\left(\frac{d\vec{U}}{ds} \right)_{\vec{\Omega}=0} = \vec{\gamma} \quad (3.8)$$

şeklindeir. Relatif birim dönme vektörü olan, $\vec{\omega}$ ise şu şekilde tarif edilir.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \quad (3.9)$$

Kinematik denklemler yer ve şekil için yukarıda kısaca tarif edilmiş $\vec{U}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{\omega}$ ve $\vec{\gamma}$ vektörleri arasındaki bağıntıları içermektedir.

$\vec{U}$ ve $\vec{\Omega}$ vektörleri kesitten kesite değişirler. Bu iki vektörün s skalerine bağlı vektör fonksiyonları ise $\vec{U}(s)$ ve $\vec{\Omega}(s)$ olarak verilir.

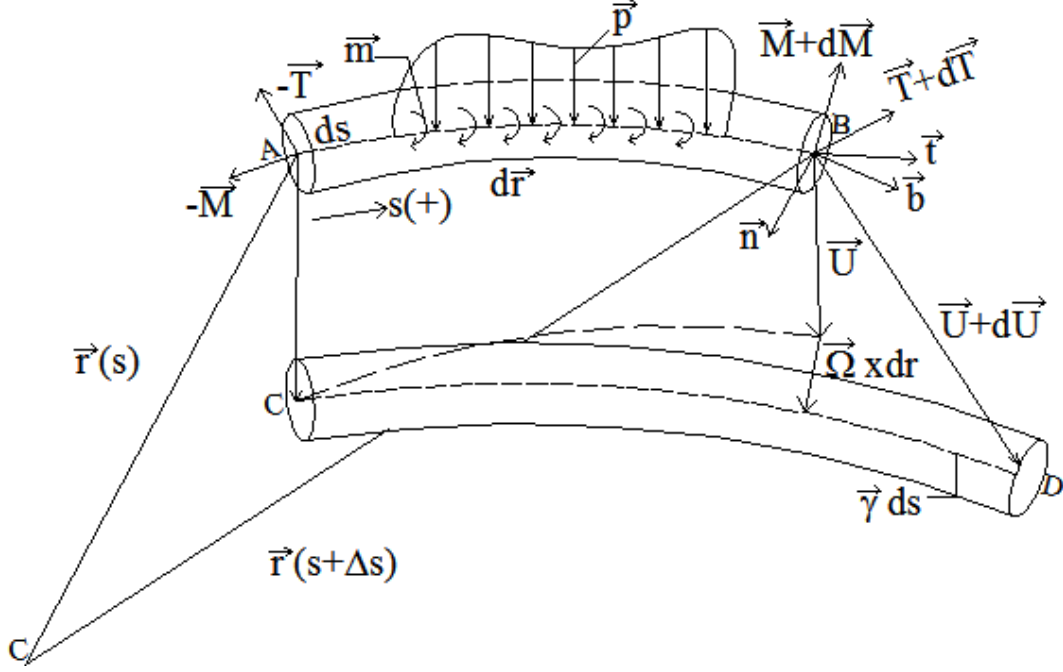
$$\vec{U} = \vec{U}(s) \quad (3.10)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(s) \quad (3.11)$$

Bu iki vektörün arasında uygunluk şartı adı verilen diferansiyel bağıntılar mevcuttur.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} = 0 \quad (3.13)$$



Şekil 3.3 : Elemanın yer değiştirmiş hali.

Bu diferansiyel denklemlerin elde edilmesini Şekil 3.3 üzerinde açıklayalım. Çubuk ekseninde birbirine çok yakın iki nokta A ve B 'yi ele alalım. Konumu $\vec{r}(s)$ olan A noktasının, $\vec{U}$ vektörü ile gösterilen yer değiştirmeyi yaptıktan sonra C noktasına geldiğini düşünelim. A noktasının yer değiştirdikten sonraki yeni konumu Şekil 3.3'ten anlaşılacağı üzere $\vec{r}(s) + \vec{U}$ vektörü ile gösterilir. B noktasındaki yer değiştirmenin A noktasındaki yer değiştirmeden farkını $\Delta\vec{U}$ ile gösterelim. $\Delta\vec{U}$ kadar yer değiştirme farkı iki ayrı sebepten oluşmuştur.

- $\overline{AB}$ çubuk elemanın şekil değiştirmesi ile B noktasının A noktasına göre relatif olarak $\vec{\gamma} \cdot \Delta s$ kadar farklı hareket etmesi
- A'dan geçen kesitin $\vec{\Omega}$ dönmesini yapması ile B noktasının da $\vec{\Omega} \times \Delta\vec{r}$ ötelenme hareketini yapmasıdır.

Dolayısı ile rölatif yer değiştirme,

$$\Delta \vec{U} = \vec{\gamma} \cdot \Delta s + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Bu denklemde her iki taraf Δs değerine bölünür ve limite geçilirse,

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (3.15)$$

elde edilir.

3.2.3 Bünye denklemleri

Gerilmeler ile şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıyı gösteren denklemlere bünye denklemleri adı verilir. Bünye bağıntılarında, bir taraftan $\vec{T}$ ve $\vec{M}$ kesit tesirleriyle, diğer taraftan $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ şekil değiştirmeyi tarif eden vektörler arasındaki ilişki ele alınmıştır. Bu bağıntılar her cisim için farklı olmakla birlikte, cisimlerin fiziksel özelliklerine bağlıdır.

Bu bağıntılar kurulurken, çubuk deformasyonu sonucu oluşan yer ve şekil değiştirmelerin oldukça küçük olduğu, çubuğun homojen, orthotrop ve elastik olduğu ve çubuk elemanın kesit ağırlık merkezi ile kayma merkezinin çakıştığı kabul edilir.

Elastik çubuk teorisinde, kesitlerde oluşan kuvvet vektörleri ile kayma birim vektörleri ve kuvvet çifti vektörleri ile dönme birim vektörleri arasındaki ilişkinin lineer olduğu kabul edilir ve Hooke kanunu esasları uygulanır.

Herhangi bir koordinat sisteminde, vektörlerin koordinatları birbirine doğrusal olarak bağlıdır ve kesit tesirleri $\vec{T}$ ve $\vec{M}$ vektörlerinin sırası ile vektör bileşenleri T_n, T_b, T_t ve M_n, M_b, M_t ile gösterilir.

$$\begin{aligned} T_n &= C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 \\ T_b &= C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 \\ T_t &= C_{31}\gamma_1 + C_{32}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} M_n &= D_{11}\omega_1 + D_{12}\omega_2 + D_{13}\omega_3 \\ M_b &= D_{21}\omega_1 + D_{22}\omega_2 + D_{23}\omega_3 \\ M_t &= D_{31}\omega_1 + D_{32}\omega_2 + D_{33}\omega_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Denklem (3.16) ve Denklem (3.17) ifadeleri,

$$\mathbf{T}_i = C_{ik} \gamma_k \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M}_i = D_{ik} \omega_k \quad (3.19)$$

ile gösterilir. Bu denklemlerde C_{ik} ve D_{ik} ile gösterilen katsayılar çubuğun kaymaya ve dönmeye karşı olan rijitlikleri adı verilir. Bu katsayılar çubuk cismin malzemesine ve kesitin geometrisine bağlı değerler olup, $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ değerlerinden bağımsızdırlar. Cismin malzemesi homojen ve izotrop iken, kesit ve kesitin konumu da sabit kalırsa, bu katsayılar s değişkeninden de bağımsız olurlar.

$\vec{T}$ ve $\vec{M}$ kesit tesirleri ile, $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ şekil değiştirmeleri tansör notasyonu kullanarak,

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma} \quad (3.20)$$

$$\vec{M} = \mathbf{D} \cdot \vec{\omega} \quad (3.21)$$

şeklinde gösteririz. Bu ifadelerde $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ sembolleri simetrik olup, her ikisi de tansörü temsil eder. Yani,

$$\begin{aligned} C_{ik} &= C_{ki} \\ D_{ik} &= D_{ki} \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde. C_{ik} ve D_{ik} sembolleri arasındaki simetriklik özelliğinden faydalanarak, rijitlik tansörlerinin belirlenmesinde 9 adet yerine 6 adet katsayının bilinmesi yeterli olmuştur. Rijitlik tansörünün 6 adet bilinmeyeninin matris olarak gösterimi,

$$\begin{bmatrix} T_n \\ T_b \\ T_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_b \\ \gamma_t \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} M_n \\ M_b \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_b \\ \omega_t \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

şeklinde. Rijitlik tansörlerinin koordinatlarının belirttiği determinant sıfırdan farklı olduğundan, bu tansörlerin tersleri vardır ve Denklem (3.24) ve (3.25) ile gösterilir.

$$\vec{\gamma} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{T} \quad (3.25)$$

$$\vec{\omega} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \vec{M} \quad (3.26)$$

Burada $\mathbf{C}^{-1}$ ve $\mathbf{D}^{-1}$ tansörleri sırasıyla $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ tansörlerinin terslerini gösterirler ve çubuğun esneklik tansörü adını alırlar.

3.3 Elastik Sabitlerin Hesabı

Homojen malzemeler dağılımları ve özellikleri söz konusu malzemenin her yerinde aynı olan malzemelerdir. Heterojen malzemeler ise özellikleri her noktasında değişiklik gösteren malzemelerdir. Bunlara ek olarak, her doğrultuda elastik özellikleri aynı olan malzemelere izotropik malzemeler denirken, hiçbir doğrultuda simetri özelliği olmayan malzemelere ise anizotropik malzeme, triklinik malzeme veya aelotropik malzeme adı verilir.

Bu çalışmada kompozit çubuklar için iki kabul yapılmıştır. Bunlar,

- Kompozit çubuklarda her tabaka içindeki liflerin aynı doğrultuda olduğu
- Kompozit çubuklardaki tabakalar lineer elastik bir malzeme gibi davranması

Birinci varsayım macromekanik davranış için önemli olurken, ikincisi ise Hooke kanunu için önemli olmaktadır.

Elastik Hooke cisminde gerilme bileşeni olan σ_i ile şekil değiştirme bileşeni olan ε_j arasındaki bağıntı,

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (3.27)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadede C_{ij} matrisine elastik sabitler matrisi veya elastik modül matrisi adı verilir.

Çizelge 3.1 : Gerilme ve şekil değiştirme notasyonları.

Gerilme		Şekil Değiştirme	
Tansör notasyon	Kısaltılmış notasyon	Tansör notasyonu	Kısaltılmış notasyon
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
σ_{23}	σ_4	$2\epsilon_{23}$	ϵ_4
σ_{13}	σ_5	$2\epsilon_{13}$	ϵ_5
σ_{12}	σ_6	$2\epsilon_{12}$	ϵ_6

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin altışar elemanı Çizelge 3.1’de verilmiştir. C_{ij} matrisinde genel olarak 36 adet bağımsız malzeme sabit mevcuttur. Anizotropik malzemelerde gerilme-şekil değiştirme bağıntıları 21 sabit ile belirlenir.

Malzeme sabitleri eksen takımı değişikçe değişir. Ayrıca, bir malzemede malzeme özellikleri bakımından bir simetri söz konusu ise, bu sabitlerin sayısı azalır.

Bir malzeme, bir düzleme göre malzeme simetrisine sahipse böyle malzemeye monoklinik malzeme adı verilir. Monoklinik malzemede 13 adet bağımsız sabit bulunmaktadır ve malzeme matrisi C_{ij} ,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

ile gösterilir.

Birbirine dik iki düzleme göre simetrisi olan malzemelere ortotropik malzeme adı verilir. Böyle malzemelerde, iki dik düzlemde simetri olduğundan dolayı bunlara dik üçüncü düzlemde simetri kendiliğinden sağlanır ve bağımsız malzemelerin sayısı dokuzaya düşer. Birbirine dik üç düzleme göre simetrisi bulunan malzemede gerilme şekil değiştirme ilişkisi,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

şeklindedir. S_{ij} esneklik matrisi cinsinden Hooke kanunu,

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (3.30)$$

şeklindedir. Esneklik matrisi $S_{ij} = [C_{ij}]^{-1}$ ' dir ve Denklem (3.30) ile

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

verilmiştir. Poisson oranı i doğrultusunda gerilme uyguladığı zaman j doğrultusundaki enine birim uzamalar için şu şekilde yazılır.

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (3.32)$$

S_{ij} esneklik matrisinin simetrisinden dolayı Poisson oranı ν_{ij} ve elastisite modülü E , arasındaki bağıntı şu şekildedir.

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (3.33)$$

Buna göre esneklik matrisi S_{ij} ' nin sıfırdan farklı değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & S_{33} &= \frac{1}{E_{33}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Bu bağıntılar Denklem (3.31)'de yerine konulup düzenlenirse,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

elde edilir. Malzeme rijitlik matrisinin tersi esneklik matrisi olduğundan dolayı ($S_{ij} = [C_{ij}]^{-1}$), ortotropik malzeme için,

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (3.36)$$

olmak üzere,

$$C_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} \quad (3.37)$$

$$C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \quad (3.38)$$

$$C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \quad (3.39)$$

$$C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \quad (3.40)$$

$$C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \quad (3.41)$$

$$C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \quad (3.42)$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad (3.43)$$

$$C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad (3.44)$$

$$C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (3.45)$$

bağıntıları yazılabilir. Denklem (3.35)'de verilen matristen yararlanılarak yukarıdaki denklemler yeniden düzenlenirse,

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \quad (3.46)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \quad (3.47)$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \quad (3.48)$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad (3.49)$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \quad (3.50)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad (3.51)$$

$$C_{44} = G_{23} \quad (3.52)$$

$$C_{55} = G_{31} \quad (3.53)$$

$$C_{66} = G_{12} \quad (3.54)$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (3.55)$$

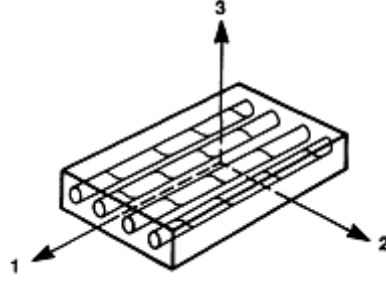
elde edilir.

3.4 Genel Ortotropik Çubuklar İçin Elastik Sabitler ve Bünye Denklemlerin Çıkarılışı

Ortotropik bir malzemede Şekil 3.4'de görülen eksen takımı için klasik çubuk teorisine göre,

$$\sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = 0 \quad (3.56)$$

olur.



Şekil 3.4 : Liflerin gösterimi.

Ortotropik bir malzemenin klasik çubuk teorisine göre gerilme-şekil değiştirme ilişkisi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

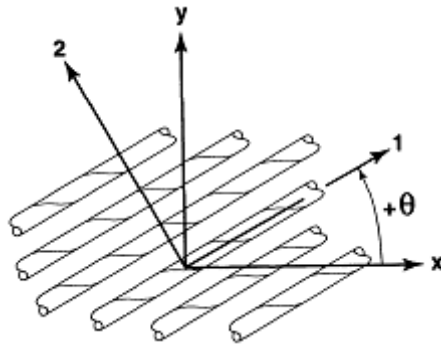
yazılır. Ortotropik bir malzemede klasik çubuk teorisine göre Q_{ij} indirgenmiş elastik sabitler matrisi,

$$Q_{11} = C_{11} + \frac{(C_{12}S_{21} + C_{13}S_{31})}{S_{11}} \quad (3.58)$$

$$Q_{22} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (3.59)$$

$$Q_{33} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad (3.60)$$

şeklinde yazılır. Keyfî bir oryantasyon açısı alınması halinde pozitif yön ve malzeme eksenini Şekil 3.5’te gösterilmiştir. Bu konu ile ilgili kapsamlı benzer çalışma referans [1]’de mevcuttur.



Şekil 3.5 : Pozitif yön ve malzeme eksenini.

Buna göre $[T]$ transformasyon matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Denklem (3.61)'ün tersi, yani transformasyon matrisinin tersi,

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

şeklinde. Şekil 3.5'de görüldüğü gibi x-y ekseninin 1-2 eksenine olan dönüşümü,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ T_{12} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

yazılır. Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

şeklinde yazılır. $[R]$ ile gösterilen Reuter matrisi,

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

şeklinde. Reuter matrisi kullanılarak denklem,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

elde edilir. Denklem (3.66)'a Denklem (3.64) yerleştirilince,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

elde edilir. Matris çarpımları yapıp denklem $\bar{Q}_{ij}$ ile gösterilirse,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

elde edilir. Keyfi bir açı alınarak dönüştürülmüş rijitlik matrisi $\bar{Q}_{ij}$ aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Denklem (3.68)'in tersi alındığında,

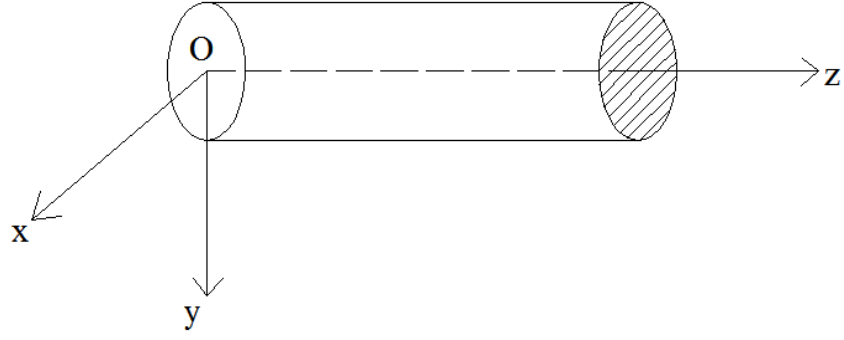
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

elde edilir. Keyfi bir açı alınarak dönüştürülmüş esneklik matrisi $\bar{S}_{ij}$ aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{S}_{66} &= (2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.5 Genel Çubuk ve Alan Denklemleri

Doğru eksenli bir çubuk için uzayda sabit belirli bir koordinat eksen takımı oluşturalım. Bu konu ile ilgili kapsamlı benzer çalışma referans [17]'de mevcuttur. Bu koordinat eksen takımında x ve y eksenleri Şekil 3.6'da görüldüğü gibi dik kesite paralel olarak alınıp, z eksenini ise çubuk eksenini olarak seçilsin.



Şekil 3.6 : Koordinat eksenleri.

Eğri eksenli çubuklar için geçerli olan denge ve kinematik denklemlerde $ds = dz$ olarak alındığında doğru eksenli çubuklar için geçerli denklemler elde edilir. Bölüm 3.2.1’de Denklem (3.6) ile verilen vektörel denge denklemi, x , y , z eksen takımında skaler olarak,

$$\frac{dT_x}{dz} + p_x = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{dT_y}{dz} + p_y = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{dT_z}{dz} + p_z = 0 \quad (3.74)$$

yazılır. Bölüm 3.2.1’de Denklem (3.7) ile verilen vektörel moment denklemleri, x , y , z eksen takımında skaler olarak,

$$\frac{dM_x}{dz} - T_y + m_x = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{dM_y}{dz} + T_x + m_y = 0 \quad (3.76)$$

$$\frac{dM_z}{dz} + m_z = 0 \quad (3.77)$$

yazılır. Bölüm 3.2.2’de Denklem (3.12) ile verilen uygunluk denklemi, x , y , z eksen takımında skaler olarak,

$$\frac{d\Omega_x}{dz} - \omega_x = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{d\Omega_y}{dz} - \omega_y = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{d\Omega_z}{dz} - \omega_z = 0 \quad (3.80)$$

yazılır. Bölüm 3.2.2’de Denklem (3.13) ile verilen denge denklemi, x, y, z eksen takımında skaler olarak,

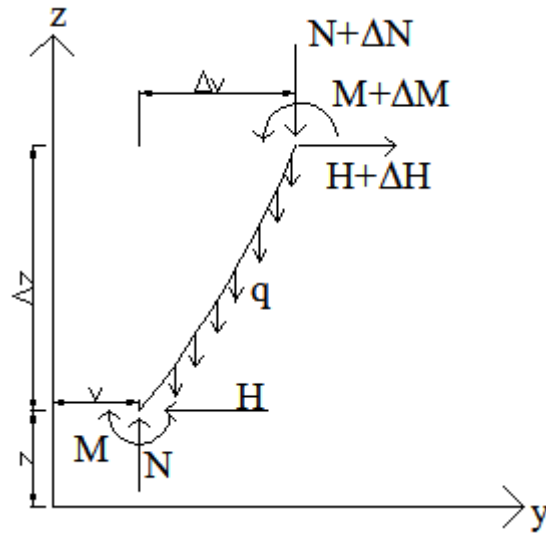
$$\frac{dU_x}{dz} - \Omega_y - \gamma_x = 0 \quad (3.81)$$

$$\frac{dU_y}{dz} + \Omega_x - \gamma_y = 0 \quad (3.82)$$

$$\frac{dU_z}{dz} - \gamma_z = 0 \quad (3.83)$$

yazılır.

Doğru eksenli bir çubuk için genel çubuk denklemleri elde edilmiştir. Bu çalışma da Denklem (3.75), Denklem (3.78) ve Denklem (3.82) kullanılmıştır.



Şekil 3.7 : Çubukta düzgün yayılı yük bulunması hali.

Euler hali için alan denklemlerin çıkarılması ile ilgili kapsamlı benzer çalışma referans [9,17] de mevcuttur. Şekil 3.7’deki gibi şekil değiştirmiş bir çubuk alırsak, çubuk eksen yönünde yayılı yük bulunması halinde çubuktaki yatay kuvvet dengesi ve moment dengesi,

$$\Delta N - q\Delta z = 0 \quad (3.84)$$

$$\Delta M = N\Delta v + H\Delta z - \frac{q}{2}\Delta z\Delta v \quad (3.85)$$

şeklinde yazılır. Böylece ikinci mertebe etkileri de dikkate alınmaktadır. Bu denklemlerde, H ile ifade edilen yatay tepki kuvveti sabit olarak kabul edilirken, çubuk boyunun değişimini gösteren $\Delta z \rightarrow 0$ olarak limite geçildiğinde,

$$\frac{dN}{dz} = q \quad (3.86)$$

$$\frac{dM}{dz} = N \frac{dv}{dz} + H - \frac{q}{2} \Delta v \quad (3.87)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde ikinci mertebeye ait Δv sıfıra çok yakın olduğundan ihmal edilir. Bu durumda Denklem (3.87) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{dM}{dz} = N \frac{dv}{dz} + H \quad (3.88)$$

Denklem (3.88)'in bir kez daha türevi alındığında;

$$\frac{d^2M}{dz^2} = N \frac{d^2v}{dz^2} \quad (3.89)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (3.78) ve Denklem (3.82)'de $U_y=v$ yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3.90)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu denklemlere karşı geometrik sınır koşulları,

$$v = \hat{v} \quad (3.91)$$

$$\Omega = \hat{\Omega} \quad (3.92)$$

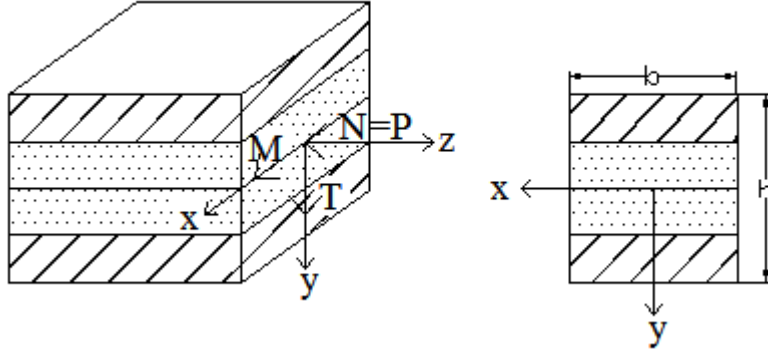
ile gösterilirken, dinamik sınır koşulları ise,

$$-H = -\hat{H} \quad (3.93)$$

$$-M = -\hat{M} \quad (3.94)$$

gösterilir. Bu sınır koşullarındaki v , Ω , H , M terimleri sırasıyla yer değiştirme, dönme, yatay tepki kuvveti ve moment vektörlerini ifade eder.

Şekil 3.8' de tabakalı kompozit kiriş gösterilmiştir.



Şekil 3.8 : Tabakalı kompozit kiriş.

Tabakalı kompozit kirişler için geçerli olan denklemlerdeki eğilme ve kayma rijitlikleri,

$$D_n = \sum_{k=1}^N Q_{11}^{(k)} I^{(k)} \quad (3.95)$$

$$C_b = \sum_{k=1}^N Q_{66}^{(k)} A^{(k)} \quad (3.96)$$

şeklindeir. Burada N tabaka sayısını, $I^{(k)}$ k'ıncı tabakanın atalet momentini ve $A^{(k)}$ ise deformasyona uğramış kesitin alanını ifade etmektedir.

4. FONKSİYONEL ANALİZ

Bu çalışmada, doğru eksenli bir çubuğun burkulması için ilk önce bir çubuğun kendi eksenine doğrultusundaki yayılı yük etkisi altında genel çubuk denklemleri ve alan denklemleri elde edilmiştir. Ardından, Euler kirişi ve Timoshenko kirişi için potansiyellik koşulu sağlatılmıştır. Daha sonra Gateaux türevi kullanarak iki ayrı durum için fonksiyoneller elde edilmiştir.

4.1 Euler Kirişi İçin Fonksiyonel

4.1.1 Potansiyellik koşulu

Denge denklemleri, bünye bağıntıları ve alan denklemleri operatör formda,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{u}$ yer değiştirmeleri, $\mathbf{f}$ dış yükleri ifade eder. Bu denklemde $\mathbf{Q}$ sürekli bir operatördür. Bir operatörün potansiyellik koşulunu sağlayabilmesi için, bu fonksiyonlardan üretilecek diğer tüm fonksiyonların toplamının yine bu fonksiyona eşit olması gerekir. Eğer $\mathbf{Q}$ sürekli operatörü,

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (4.2)$$

sağlıyorsa, bu durumda $\mathbf{Q}$ potansiyel operatördür. Eşitlikteki $\langle, \rangle$ ifadesi iç çarpımı göstermektedir ve $\mathbf{Q}$ operatörünün $\bar{\mathbf{u}}$ yönüne göre türevinin, $\mathbf{u}^*$ yönündeki türevinin toplamı, aynı operatörün $\mathbf{u}^*$ yönüne göre türevinin, $\bar{\mathbf{u}}$ yönündeki türevinin toplamına eşittir. Denklem (3.89) ve (3.90)'ün sınır koşullarını da içerecek şekilde matris formu,

$$\begin{bmatrix}
-N \frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{1}{D_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v \\
\Omega \\
M \\
T \\
v \\
\Omega \\
M \\
H
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
-\hat{H} \\
-\hat{M} \\
\hat{\Omega} \\
\hat{v}
\end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır.

4.1.2 Yönsel toplam (İç çarpım)

Bir fonksiyonun $f(x)$, bir değişkenle $\mathbf{u}^*$ ile çarpımının belirli bir aralıktaki integrali yönsel toplamı ifade eder ve matematiksel gösterimi,

$$\left[f(x), \mathbf{u}^* \right] = \int_a^b f(x) \mathbf{u}^* dx \quad (4.4)$$

şeklinde dir.

4.1.3 Gateaux türevi

Sabit fonksiyon bilinmeyen alan denklemlerine uygulanır.

$$dQ(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial Q(\mathbf{u} + \eta \bar{\mathbf{u}})}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu ifadede, η skaler bir sayıdır.

Buna göre $\mathbf{Q}$ operatörünün $\bar{\mathbf{u}}$ yönündeki türevinin $\mathbf{u}^*$ yönündeki türevi,

$$\begin{aligned}
\langle dQ(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[N \bar{v}''', v^*] + [\bar{M}''', v^*] + [\bar{v}''', M^*] + \left[\frac{\bar{M}}{D_n}, M^* \right] - [\bar{H}, v^*]_{\sigma} \\
& - [\bar{M}, \Omega^*]_{\sigma} + [\bar{\Omega}, M^*]_{\varepsilon} + [\bar{v}, H^*]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $\mathbf{Q}$ operatörünün $\mathbf{u}^*$ yönündeki türevinin $\bar{\mathbf{u}}$ yönündeki türevi,

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle = & -[N\bar{v}^{*''}, \bar{v}] + [\bar{M}^{*''}, \bar{v}] + [\bar{v}^{*''}, \bar{M}] + \left[\frac{\bar{M}^*}{D_n}, \bar{M} \right] - [\bar{H}^*, \bar{v}]_{\sigma} \\ & - [\bar{M}^*, \bar{\Omega}]_{\sigma} + [\bar{\Omega}^*, \bar{M}]_{\varepsilon} + [\bar{v}^*, \bar{H}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada Denklem (4.6)'ya bir kez kısmi türev uygulandığında,

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[N\bar{v}', v^*]_0 + [N\bar{v}', v^{*'}] + [\bar{M}', v^*]_0 - [\bar{M}', v^{*'}] + [\bar{v}', M^*]_0 \\ & - [\bar{v}', M^{*'}] + \left[\frac{\bar{M}}{D_n}, M^* \right] - [\bar{H}, v^*]_{\sigma} - [\bar{M}, \Omega^*]_{\sigma} + [\bar{\Omega}, M^*]_{\varepsilon} \\ & + [\bar{v}, H^*]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Denklem (4.8)'e bir kez daha kısmi türev uygulanıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[N\bar{v}', v^*]_0 + [N\bar{v}', v^{*'}]_0 - [N\bar{v}', v^{*''}] + [\bar{M}', v^*]_0 - [\bar{M}, v^{*'}]_0 \\ & + [\bar{M}, v^{*''}] + [\bar{v}', M^*]_0 - [\bar{v}, M^{*'}]_0 + [\bar{v}, M^{*''}] + \left[\frac{\bar{M}}{D_n}, M^* \right] \\ & - [\bar{H}, v^*]_{\sigma} - [\bar{M}, \Omega^*]_{\sigma} + [\bar{\Omega}, M^*]_{\varepsilon} + [\bar{v}, H^*]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Denklem (3.88) yerine koyulup düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[N\bar{v}', v^*]_0 + [N\bar{v}', v^{*'}]_0 - [N\bar{v}', v^{*''}] + [N\bar{v}', v^*]_0 + [\bar{H}, v^*]_0 \\ & - [\bar{M}, v^{*'}]_0 + [\bar{M}, v^{*''}] + [\bar{v}', M^*]_0 - [\bar{v}, Nv^{*'}]_0 - [\bar{v}, H^*]_0 \\ & + [\bar{v}, M^{*''}] + \left[\frac{\bar{M}}{D_n}, M^* \right] - [\bar{H}, v^*]_{\sigma} - [\bar{M}, \Omega^*]_{\sigma} + [\bar{\Omega}, M^*]_{\varepsilon} \\ & + [\bar{v}, H^*]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Buradaki σ alt indisi dinamik sınır koşulunu, ε alt indisi geometrik sınır koşulunu, 0 alt indisi ise dinamik ve geometrik sınır koşulunun toplamını ifade eder. Denklem (4.7) ve (4.10)'a bakıldığında birbirlerine eşit olduğu gösterilmiştir ve böylece $\mathbf{Q}$ operatörü, Denklem (4.2)'deki koşulu sağlamış olduğundan potansiyel bir operatördür.

4.1.4 Fonksiyonelin elde edilmesi

Potansiyellik koşulunu sağladığı Bölüm 4.1.3’de ispat edilen Euler kiriş hali için $\mathbf{Q}$ operatörünün fonksiyoneli, Denklem (4.5)’de matematiksel ifadesi verilen Gateaux türevi kullanılarak şu şekilde ifade edilir.

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(\mathbf{su}, \mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle ds \quad (4.11)$$

Burada s skaler bir büyüklüktür. Bu fonksiyonelin elde edilmesi için yapılan işlemler Oden ve Reddy [16] tarafından verilmiştir. Denklem (4.11)’in sınır koşullarını içerecek şekilde matris formu,

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} -N \frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{1}{D_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} sv \\ s\Omega \\ sM \\ sT \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} sv \\ s\Omega \\ sM \\ sH \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\hat{H} \\ -\hat{M} \\ \hat{\Omega} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v \\ \Omega \\ M \\ H \end{bmatrix} \end{array} \right\} ds \quad (4.12)$$

şeklindedir. Denklem (4.11) uygulandığında,

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \left(\begin{array}{l} -Nsv''v + sM''v + sv''M + \frac{1}{D_n}sMM - sHv + \hat{H}v - sM\Omega + \hat{M}\Omega \\ +s\Omega M - \hat{\Omega}M + svH - \hat{v}H \end{array} \right) ds \quad (4.13)$$

elde edilir. Denklem (4.13)’teki integral işlemi yapıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & -\frac{1}{2}[\mathbf{N}\mathbf{v}'', \mathbf{v}] + \frac{1}{2}[\mathbf{M}'', \mathbf{v}] + \frac{1}{2}[\mathbf{v}'', \mathbf{M}] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{v}]_\sigma \\
& + [\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}]_\sigma - \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + [\hat{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}]_\varepsilon - [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon + \frac{1}{2}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]_\varepsilon \\
& - [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{H}]_\varepsilon
\end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. Denklem (4.14)'e kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & -\frac{1}{2}[\mathbf{N}\mathbf{v}', \mathbf{v}]_0 + \frac{1}{2}[\mathbf{N}\mathbf{v}', \mathbf{v}'] + \frac{1}{2}[\mathbf{M}', \mathbf{v}]_0 - \frac{1}{2}[\mathbf{M}', \mathbf{v}'] + \frac{1}{2}[\mathbf{v}', \mathbf{M}]_0 \\
& - \frac{1}{2}[\mathbf{v}', \mathbf{M}'] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{v}]_\sigma + [\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}]_\sigma - \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + [\hat{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma \\
& + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}]_\varepsilon - [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon + \frac{1}{2}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]_\varepsilon - [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{H}]_\varepsilon
\end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Denklem (4.15)'te $\boldsymbol{\Omega}$ yerine $-\mathbf{v}'$ ve Denklem (3.88) yerine koyulup sadeleştirme işlemi yapılırsa Euler hali için doğru eksenli bir kompozit kirişe ait fonksiyonel şu hale gelir.

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & +\frac{1}{2}[\mathbf{N}\mathbf{v}', \mathbf{v}'] - [\mathbf{M}', \mathbf{v}'] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] + [\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}]_\sigma + [\mathbf{v}', \mathbf{M}]_\sigma - [\hat{\mathbf{M}}, \mathbf{v}']_\sigma \\
& + [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{M}]_\varepsilon - [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{H}]_\varepsilon + [\mathbf{H}, \mathbf{v}]_\varepsilon
\end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2 Timoshenko Kirişi İçin Fonksiyonel

Çubuklarda, çökme ve momentin yanı sıra kesme ve buna bağlı olarak dönme etkisi de dikkate alınacak olan Timoshenko kirişi için dört denklem kullanılmıştır. Bu denklemler,

$$-\mathbf{P}\mathbf{v}'' + \mathbf{T}' = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M}' - \mathbf{T} = 0 \quad (4.18)$$

$$-\boldsymbol{\Omega}' + \frac{\mathbf{M}}{D_n} = 0 \quad (4.19)$$

$$-\mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega} + \frac{\mathbf{T}}{C_b} = 0 \quad (4.20)$$

şeklinde. Denklem (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) sırasıyla Denklem (3.89), (3.75), (3.81) ve (3.85) kullanılarak çıkarılmıştır. Denklem (3.85)'te $U_y = \mathbf{v}$ yazılmıştır.

Timoshenko hali için çıkarılan denklemleri matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix}
-P\frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{d}{dz} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{d}{dz} & \frac{1}{D_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{d}{dz} & -1 & 0 & \frac{1}{C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v \\
\Omega \\
M \\
T \\
v \\
\Omega \\
M \\
H
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
-\hat{H} \\
-\hat{M} \\
\hat{\Omega} \\
\hat{v}
\end{bmatrix} \quad (4.21)$$

elde edilir.

4.2.1 Gateaux türevi

Denklem (4.5) Timoshenko kirişi için uygulanınca $\mathbf{Q}$ operatörünün $\bar{\mathbf{u}}$ yönündeki türevinin $\mathbf{u}^*$ yönündeki türevi,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle &= -[P\bar{v}', v^*] + [\bar{T}', v^*] + [\bar{M}', \Omega^*] - [\bar{T}, \Omega^*] - [\bar{\Omega}', M^*] \\
&+ \left[\frac{\bar{M}}{D_n}, M^* \right] - [\bar{v}', T^*] - [\bar{\Omega}, T^*] + \left[\frac{\bar{T}}{C_b}, T^* \right] - [\bar{H}, v^*]_{\sigma} \\
&- [\bar{M}, \Omega^*]_{\sigma} + [\bar{\Omega}, M^*]_{\varepsilon} + [\bar{v}, H^*]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. Aynı şekilde $\mathbf{Q}$ operatörünün $\mathbf{u}^*$ yönündeki türevinin $\bar{\mathbf{u}}$ yönündeki türevi,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle &= -[Pv^{*'}, \bar{v}] + [T^{*'}, \bar{v}] + [M^{*'}, \bar{\Omega}] - [T^*, \bar{\Omega}] - [\Omega^{*'}, \bar{M}] \\
&+ \left[\frac{M^*}{D_n}, \bar{M} \right] - [v^{*'}, \bar{T}] - [\Omega^*, \bar{T}] + \left[\frac{T^*}{C_b}, \bar{T} \right] - [H^*, \bar{v}]_{\sigma} \\
&- [M^*, \bar{\Omega}]_{\sigma} + [\Omega^*, \bar{M}]_{\varepsilon} + [v^*, \bar{H}]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Denklem (4.22)'de bazı terimlere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}', \mathbf{v}^*]_0 + [\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}', \mathbf{v}^{*'}] + [\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}^*]_0 - [\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}^{*'}] + [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^*]_0 \\
& - [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^{*'}] - [\bar{\mathbf{T}}, \Omega^*] - [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^*]_0 + [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^{*'}] + \left[\frac{\bar{\mathbf{M}}}{\mathbf{D}_n}, \mathbf{M} \right] \\
& - [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{T}^*]_0 + [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{T}^{*'}] - [\bar{\Omega}, \mathbf{T}^*] + \left[\frac{\bar{\mathbf{T}}}{\mathbf{C}_b}, \mathbf{T}^* \right] - [\bar{\mathbf{H}}, \mathbf{v}^*]_\sigma \\
& - [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^*]_\sigma + [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^*]_\varepsilon + [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{H}^*]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Denklem (4.24)'e H yerine Denklem (3.88) koyulursa,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = & -[\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}', \mathbf{v}^*]_0 + [\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}', \mathbf{v}^{*'}] + [\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}^*]_0 - [\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{v}^{*'}] + [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^*]_0 \\
& - [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^{*'}] - [\bar{\mathbf{T}}, \Omega^*] - [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^*]_0 + [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^{*'}] + \left[\frac{\bar{\mathbf{M}}}{\mathbf{D}_n}, \mathbf{M} \right] \\
& - [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{T}^*]_0 + [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{T}^{*'}] - [\bar{\Omega}, \mathbf{T}^*] + \left[\frac{\bar{\mathbf{T}}}{\mathbf{C}_b}, \mathbf{T}^* \right] - [\bar{\mathbf{M}}, \mathbf{v}^*]_\sigma \\
& + [\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}', \mathbf{v}^*]_\sigma - [\bar{\mathbf{M}}, \Omega^*]_\sigma + [\bar{\Omega}, \mathbf{M}^*]_\varepsilon + [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{M}^*]_\varepsilon - [\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{P}\mathbf{v}^{*'}]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Denklem (4.23)'deki ilk terime kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle = & -[\mathbf{P}\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}]_0 + [\mathbf{P}\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}'] + [\mathbf{T}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}] + [\mathbf{M}^{*'}, \bar{\Omega}] - [\mathbf{T}^*, \bar{\Omega}] \\
& - [\Omega^{*'}, \bar{\mathbf{M}}] + \left[\frac{\mathbf{M}^*}{\mathbf{D}_n}, \bar{\mathbf{M}} \right] - [\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{T}}] - [\Omega^*, \bar{\mathbf{T}}] + \left[\frac{\mathbf{T}^*}{\mathbf{C}_b}, \bar{\mathbf{T}} \right] \\
& - [\mathbf{H}^*, \bar{\mathbf{v}}]_\sigma - [\mathbf{M}^*, \bar{\Omega}]_\sigma + [\Omega^*, \bar{\mathbf{M}}]_\varepsilon + [\mathbf{v}^*, \bar{\mathbf{H}}]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Denklem (4.26)'da da H yerine Denklem (3.88) koyulursa,

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle = & -[\mathbf{P}\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}]_0 + [\mathbf{P}\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}'] + [\mathbf{T}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}] + [\mathbf{M}^{*'}, \bar{\Omega}] - [\mathbf{T}^*, \bar{\Omega}] \\
& - [\Omega^{*'}, \bar{\mathbf{M}}] + \left[\frac{\mathbf{M}^*}{\mathbf{D}_n}, \bar{\mathbf{M}} \right] - [\mathbf{v}^{*'}, \bar{\mathbf{T}}] - [\Omega^*, \bar{\mathbf{T}}] + \left[\frac{\mathbf{T}^*}{\mathbf{C}_b}, \bar{\mathbf{T}} \right] \\
& - [\mathbf{M}^*, \bar{\mathbf{v}}]_\sigma + [\mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}^{*'}, \bar{\mathbf{v}}]_\sigma - [\mathbf{M}^*, \bar{\Omega}]_\sigma + [\Omega^*, \bar{\mathbf{M}}]_\varepsilon + [\mathbf{v}^*, \bar{\mathbf{M}}]_\varepsilon \\
& - [\mathbf{v}^*, \mathbf{P}\bar{\mathbf{v}}']_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Böylece Denklem (4.25) ile Denklem (4.27)'nin eşit olduğu görülmektedir ve $\mathbf{Q}$ operatörü, Denklem (4.2)'deki koşulu sağlamış olduğundan potansiyel bir operatördür.

4.2.2 Fonksiyonelin elde edilmesi

Timoshenko hali için gerekli denklemleri kullanılarak Denklem (4.11) matris formunda yerine yazılırsa,

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} -P \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dz} & \frac{1}{D_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{dz} & -1 & 0 & \frac{1}{C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} sv \\ s\Omega \\ sM \\ sT \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} sv \\ s\Omega \\ sM \\ sH \end{array} \right] \end{array} - \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -\hat{H} \\ -\hat{M} \\ \hat{\Omega} \\ \hat{v} \end{array} \right] \end{array} \left[\begin{array}{c} v \\ \Omega \\ M \\ T \\ v \\ \Omega \\ M \\ H \end{array} \right] ds \quad (4.28)$$

elde edilir. Denklem (4.11) uygulandığında,

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \left(\begin{array}{l} -Psv''v + sT'v + sM'\Omega - s\Omega'M + \frac{1}{D_n}sMM - sv'T - s\Omega T + \frac{1}{C_b}sTT \\ -sTv + \hat{T}v - sM\Omega + \hat{M}\Omega + s\Omega M - \hat{\Omega}M + svT - \hat{v}T \end{array} \right) ds \quad (4.29)$$

elde edilir. Denklem (4.29)'daki integraller çözümlerse,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) = & -\frac{P}{2} [v'', v] + \frac{1}{2} [T', v] + \frac{1}{2} [M', \Omega] - \frac{1}{2} [T, \Omega] - \frac{1}{2} [\Omega', M] + \frac{1}{2D_n} [M, M] \\ & - \frac{1}{2} [v', T] - \frac{1}{2} [\Omega, T] + \frac{1}{2C_b} [T, T] - \frac{1}{2} [T, v]_{\sigma} + [\hat{T}, v]_{\sigma} - \frac{1}{2} [M, \Omega]_{\sigma} \\ & + [\hat{M}, \Omega]_{\sigma} + \frac{1}{2} [\Omega, M]_{\varepsilon} - [\hat{\Omega}, M]_{\varepsilon} + \frac{1}{2} [v, T]_{\varepsilon} - [\hat{v}, T]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Denklem (4.30)'ye kısmi integrasyon yaparsak,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & -\frac{P}{2}[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}]_0 + \frac{P}{2}[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}] + \frac{1}{2}[\mathbf{T}, \mathbf{v}]_0 - \frac{1}{2}[\mathbf{T}, \dot{\mathbf{v}}] + \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_0 - \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}] \\
& - \frac{1}{2}[\mathbf{T}, \boldsymbol{\Omega}] - \frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{T}] - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}] + \frac{1}{2C_b}[\mathbf{T}, \mathbf{T}] \\
& - \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{v}]_\sigma + [\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}]_\sigma - \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + [\hat{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}]_\varepsilon - [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon \\
& + \frac{1}{2}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]_\varepsilon - [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{H}]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. Denklem (4.31)'i düzenlersek,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & \frac{P}{2}[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}] - [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{T}] - [\mathbf{M}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\mathbf{T}, \boldsymbol{\Omega}] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] + \frac{1}{2C_b}[\mathbf{T}, \mathbf{T}] \\
& + \frac{1}{2}[\mathbf{v}, (\mathbf{T} - P\dot{\mathbf{v}})]_0 + \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_0 - \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{v}]_\sigma + [\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}]_\sigma - \frac{1}{2}[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma \\
& + [\hat{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}]_\varepsilon - [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon + \frac{1}{2}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]_\varepsilon - [\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{H}]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Denklem (4.32)'ye Denklem (3.88) koyulursa ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa Timoshenko kirişi için fonksiyonel,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & \frac{P}{2}[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}] - [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{T}] - [\mathbf{M}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\mathbf{T}, \boldsymbol{\Omega}] + \frac{1}{2D_n}[\mathbf{M}, \mathbf{M}] + \frac{1}{2C_b}[\mathbf{T}, \mathbf{T}] \\
& + [\boldsymbol{\Omega}, \hat{\mathbf{M}}]_\sigma + [\mathbf{v}, \hat{\mathbf{H}}]_\sigma + [\mathbf{M}, (\boldsymbol{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\Omega}})]_\varepsilon + [\mathbf{H}, (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})]_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir.

5. YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Sayısal hesaplamalarda öncelikli hedef en az yanılğı ile problemin çözümünü gerçekleştirmektir. Çoğu zaman problemin kesin çözümünün elde edilmesi aşamasında bir takım zorluklarla karşılaşılır. Bu aşamada kesin çözümün yerini tutan ve problemin çözümünde yer alan bir takım büyüklüklerin ihmal edilmesi gerçeğine dayanan yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılır. Yapılan çalışmalarda yaygın olarak kullanılan başlıca sayısal çözüm yöntemleri; sonlu farklar yöntemi, Rayleigh-Ritz yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemidir.

Sonlu farklar yöntemi, en eski sayısal hesap yöntemlerinden biri olup, çözümü aranan ana bölgenin alt bölgelere ayrıldığı ve bu ana bölgede davranışın çözümü için birçok bilinmeyen hesaplanmasına gerek duyulduğu bir yaklaşık çözüm yöntemidir.

Rayleigh-Ritz yöntemi, diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonunu bulmak için ilk olarak Rayleigh tarafından kullanılan ve Ritz tarafından geliştirilen, fonksiyoneli minimize edecek katsayıların ve verilen deneme fonksiyonların kullanıldığı bir yöntemdir.

Sonlu elemanlar yöntemi de diğer yaklaşık yöntemlerde olduğu gibi, problemin çok değişkenli küçük bölgelere ayrılarak, bir minimum problemine indirgenmesi gerçeğine dayanır. Bu yöntemi diğer yöntemlerden farklı kılan başlıca özellikler şunlardır.

- Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık geometriye sahip bölgelere kolayca uygulanabilir.
- Sonlu elemanlar yönteminde davranışın yeterli doğrulukta tespit edilmesi için diğer yöntemlere göre daha az bilinmeyenli denklem takımları ile çözüme gidilir.
- Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan yaklaşım fonksiyonları çoğunlukla enterpolasyon teorisi ile geliştirilebilen fonksiyonlar olup çözümü istenen fonksiyonun alt bölgeler arasındaki sürekliliği sağlar.

Yukarıda verilen üstünlüklerden dolayı, bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi ile çözüme gidilmiştir.

5.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminde yaklaşım fonksiyonunun elde edilmesi için, ilk olarak çözümü aranan bölge alt bölgelere ayrılır. Elde edilen alt bölgelerin şekillerine bağlı olarak yaklaşık fonksiyonun biçimi değişir. N sayıda oluşturulmuş her alt bölge (Ψ^e) ile gösterilirse, ana bölge (Ψ) şu şekilde ifade edilir.

$$\Psi = \sum_{e=1}^N \Psi^e \quad (5.1)$$

Küçük elemanlara bölünen ana bölgenin ve her bir elemanın bilinmeyenlerini bulmak için, öncelikle alt bölgeleri temsil edecek yaklaşım fonksiyonları oluşturulur. Böylece, bölgenin yaklaşık çözümü ($\bar{\Psi}$), alt bölgelerin yaklaşık fonksiyonlarının ($\bar{\Psi}^e$) birleşimine bağlı olarak,

$$\bar{\Psi} = \sum_{e=1}^N \bar{\Psi}^e \quad (5.2)$$

ile gösterilir.

Sonlu eleman formülasyonu elde edilirken, ilk olarak yapılması gereken, şekil fonksiyonunun seçilmesidir. Şekil fonksiyonlarındaki terimlerin sayısı, elemanlar üzerindeki düğüm noktaları sayısı ile belirlenir ve bu düğüm noktalarına ait yaklaşım fonksiyonlarına ise şekil fonksiyonları adı verilir. Şekil fonksiyonları yazıldıkları düğüm noktası için bir değerini alırlarken, diğer düğüm noktalarında sıfır değerini alırlar. Ayrıca, herhangi bir elemanın düğüm noktası için oluşturulan şekil fonksiyonların ordinatlarının toplamı bire eşit olmalıdır.

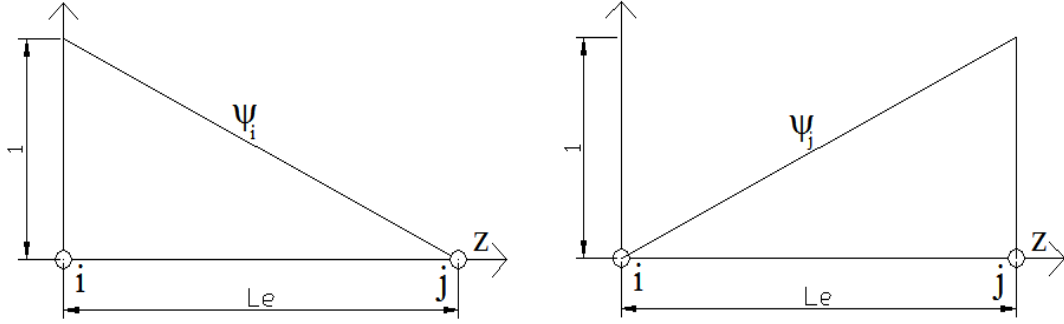
Bu çalışmada,

$$\Psi_i = \frac{z_j - z}{L_e} \quad \Psi_j = \frac{z - z_i}{L_e} \quad (5.3)$$

doğrusal şekil fonksiyonları seçilmiştir. Burada L_e çubuğun boyunu ifade etmektedir ve

$$L_e = z_j - z_i \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilir. Şekil 5.1’de z değişkenine bağlı doğrusal şekil fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 5.1 : Doğrusal şekil fonksiyonları.

Denklem (5.3)’ün bir kez türevi alındığında,

$$\Psi'_i = -\frac{1}{z_j - z_i} = -\frac{1}{L_e} \quad \Psi'_j = \frac{1}{z_j - z_i} = \frac{1}{L_e} \quad (5.5)$$

elde edilir.

5.1.1 Euler kirişi için sonlu elemanlar yöntemi

Denklem (4.16)’daki Euler kirişi için bulunan fonksiyonelin bağımsız değişkenleri v ve M ,

$$v = v_i \Psi_i + v_j \Psi_j \quad (5.6)$$

$$M = M_i \Psi_i + M_j \Psi_j \quad (5.7)$$

şeklinde yazılırlar. Denklem (5.6) ve (5.7) Denklem (4.16)’da Euler kirişi için elde edilen fonksiyonelin yerine konulduğunda,

$$I_e = \frac{N}{2} \int_{z_i}^{z_j} (v_i \Psi'_i + v_j \Psi'_j)^2 dz - \int_{z_i}^{z_j} (M_i \Psi'_i + M_j \Psi'_j) (v_i \Psi'_i + v_j \Psi'_j) dz + \frac{1}{2D_n} \int_{z_i}^{z_j} (M_i \Psi'_i + M_j \Psi'_j)^2 dz \quad (5.8)$$

elde edilir. Denklem (5.8)’e doğrusal şekil fonksiyonları yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}
I_e = & \frac{N}{2L_e^2} v_j^2 \int_{z_i}^{z_j} dz - \frac{N}{L_e^2} v_i v_j \int_{z_i}^{z_j} dz + \frac{N}{2L_e^2} v_i^2 \int_{z_i}^{z_j} dz - \frac{1}{L_e^2} M_j v_j \int_{z_i}^{z_j} dz \\
& + \frac{1}{L_e^2} M_j v_i \int_{z_i}^{z_j} dz + \frac{1}{L_e^2} M_i v_j \int_{z_i}^{z_j} dz - \frac{1}{L_e^2} M_i v_i \int_{z_i}^{z_j} dz \\
& + \frac{1}{2D_n L_e^2} M_i^2 \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)^2 dz + \frac{1}{D_n L_e^2} M_i M_j \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)(z - z_i) dz + \\
& + \frac{1}{2D_n L_e^2} M_j^2 \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i)^2 dz
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Denklem (5.9)'daki integraller çözüldüğünde,

$$\begin{aligned}
I_e = & \frac{N}{2L_e} v_j^2 - \frac{N}{L_e} v_i v_j + \frac{N}{2L_e} v_i^2 - \frac{1}{L_e} M_j v_j + \frac{1}{L_e} M_j v_i + \frac{1}{L_e} M_i v_j - \frac{1}{L_e} M_i v_i \\
& + \frac{L_e}{6D_n} M_i^2 + \frac{L_e}{6D_n} M_i M_j + \frac{L_e}{6D_n} M_j^2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. Euler kırıışı halinde, eleman matrisini elde edebilmek için fonksiyonelin düğüm noktası bilinmeyenlerine göre birinci türevlerinin sıfır olması gerekir.

$$\frac{\partial I_e}{\partial v_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial v_j} = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial M_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial M_j} = 0 \tag{5.12}$$

Denklem (5.11) ve (5.12) uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_e}{\partial v_i} = & -\frac{N}{L_e} v_j + \frac{N}{L_e} v_i + \frac{1}{L_e} M_j - \frac{1}{L_e} M_i = 0 \\
\frac{\partial I_e}{\partial M_i} = & \frac{1}{L_e} v_j - \frac{1}{L_e} v_i + \frac{L_e}{3D_n} M_i + \frac{L_e}{6D_n} M_j = 0 \\
\frac{\partial I_e}{\partial v_j} = & \frac{N}{L_e} v_j - \frac{N}{L_e} v_i - \frac{1}{L_e} M_j + \frac{1}{L_e} M_i = 0 \\
\frac{\partial I_e}{\partial M_j} = & -\frac{1}{L_e} v_j + \frac{1}{L_e} v_i + \frac{L_e}{6D_n} M_i + \frac{L_e}{3D_n} M_j = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Böylece doğrusal şekil fonksiyonuna bağlı denklem takımı elde edilmiştir. N yerine P yazılıp ve bu denklem takımı matris formunda yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_e}{\partial v_i} = 0 &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{P}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & -\frac{P}{L_e} & \frac{1}{L_e} \\ -\frac{1}{L_e} & \frac{L}{3D_n} & \frac{1}{L_e} & \frac{L}{6D_n} \\ \hline -\frac{P}{L_e} & \frac{1}{L_e} & \frac{P}{L_e} & -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} & \frac{L}{6D_n} & -\frac{1}{L_e} & \frac{L}{3D_n} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ M_i \\ v_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. Burada D_n çubuğun eğilme rijitliği, L_e çubuğun boyu, P ise burkulma yüküdür. Böylece Euler kirişi halinde, doğru eksenli bir kompozit kirişin burkulma analizinde kullanılacak sistem matrisi elde edilmiştir.

5.1.2 Timoshenko kirişi için sonlu elemanlar yöntemi

Denklem (4.29)'daki Timoshenko kirişi için bulunan fonksiyonelin bağımsız değişkenleri v , Ω , M ve T ,

$$v = v_i \Psi_i + v_j \Psi_j \tag{5.15}$$

$$\Omega = \Omega_i \Psi_i + \Omega_j \Psi_j \tag{5.16}$$

$$M = M_i \Psi_i + M_j \Psi_j \tag{5.17}$$

$$T = T_i \Psi_i + T_j \Psi_j \tag{5.18}$$

şeklinde yazılır. Denklem (4.33)'deki Timoshenko kirişi için elde edilen fonksiyonele yukarıdaki denklemler koyulursa,

$$\begin{aligned}
I_e = & \frac{P}{2} \int_{z_i}^{z_j} (v_i \Psi_i' + v_j \Psi_j')^2 dz - \int_{z_i}^{z_j} (v_i \Psi_i' + v_j \Psi_j') (T_i \Psi_i + T_j \Psi_j) dz \\
& - \int_{z_i}^{z_j} (M_i \Psi_i + M_j \Psi_j) (\Omega_i \Psi_i' + \Omega_j \Psi_j') dz \\
& - \int_{z_i}^{z_j} (T_i \Psi_i + T_j \Psi_j) (\Omega_i \Psi_i + \Omega_j \Psi_j) dz + \frac{1}{2D_n} \int_{z_i}^{z_j} (M_i \Psi_i + M_j \Psi_j)^2 dz \\
& + \frac{1}{2C_b} \int_{z_i}^{z_j} (T_i \Psi_i + T_j \Psi_j)^2 dz
\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. Timoshenko kirişi için de Euler kirişi için kullanılan doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Denklem (5.3) ve (5.5) yerine koyulup düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
I_e = & \frac{P}{2L_e^2} v_j^2 \int_{z_i}^{z_j} dz - \frac{2P}{2L_e^2} v_i v_j \int_{z_i}^{z_j} dz + \frac{P}{2L_e^2} v_i^2 \int_{z_i}^{z_j} dz - \frac{1}{L_e^2} v_j T_i \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z) dz \\
& - \frac{1}{L_e^2} v_j T_j \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i) dz + \frac{1}{L_e^2} v_i T_i \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z) dz + \frac{1}{L_e^2} v_i T_j \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i) dz \\
& - \frac{1}{L_e^2} M_i \Omega_j \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z) dz + \frac{1}{L_e^2} M_i \Omega_i \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z) dz \\
& - \frac{1}{L_e^2} M_j \Omega_j \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i) dz + \frac{1}{L_e^2} M_j \Omega_i \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i) dz \\
& - \frac{1}{L_e^2} T_i \Omega_i \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)^2 dz - \frac{1}{L_e^2} T_i \Omega_j \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)(z - z_i) dz \\
& - \frac{1}{L_e^2} T_j \Omega_i \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)(z - z_i) dz - \frac{1}{L_e^2} T_j \Omega_j \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i)^2 dz \\
& + \frac{1}{2D_n L_e^2} M_i^2 \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)^2 dz + \frac{2}{2D_n L_e^2} M_i M_j \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)(z - z_i) dz \\
& + \frac{1}{2D_n L_e^2} M_j^2 \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i)^2 dz + \frac{1}{2C_b L_e^2} T_i^2 \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)^2 dz \\
& + \frac{2}{2C_b L_e^2} T_i T_j \int_{z_i}^{z_j} (z_j - z)(z - z_i) dz + \frac{1}{2C_b L_e^2} T_j^2 \int_{z_i}^{z_j} (z - z_i)^2 dz
\end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. Bu denklemde integraller çözülürse,

$$\begin{aligned}
I_e = & \frac{P}{2L_e} v_j^2 - \frac{P}{L_e} v_i v_j + \frac{P}{2L_e} v_i^2 - \frac{1}{2} v_j T_i - \frac{1}{2} v_j T_j + \frac{1}{2} v_i T_i + \frac{1}{2} v_i T_j \\
& - \frac{1}{2} M_i \Omega_j + \frac{1}{2} M_i \Omega_i - \frac{1}{2} M_j \Omega_j + \frac{1}{2} M_j \Omega_i - \frac{L_e}{3} T_i \Omega_i - \frac{L_e}{6} T_i \Omega_j \\
& - \frac{L_e}{6} T_j \Omega_i - \frac{L_e}{3} T_j \Omega_j + \frac{L_e}{6D_n} M_i^2 + \frac{L_e}{6D_n} M_i M_j + \frac{L_e}{6D_n} M_j^2 + \frac{L_e}{6C_b} T_i^2 \\
& + \frac{L_e}{6C_b} T_i T_j + \frac{L_e}{6C_b} T_j^2
\end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. Timoshenko kirişi halinde, eleman matrisini elde edebilmek için fonksiyonelin düğüm noktası bilinmeyenlerine göre birinci türevlerini sıfıra eşitlersek,

$$\frac{\partial I_e}{\partial v_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial v_j} = 0 \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial \Omega_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial \Omega_j} = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial M_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial M_j} = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial T_i} = 0 \quad \frac{\partial I_e}{\partial T_j} = 0 \quad (5.25)$$

elde edilir. Bu denklemler uygulandığında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_e}{\partial v_i} &= -\frac{P}{L_e} v_j + \frac{P}{L_e} v_i + \frac{1}{2} T_i + \frac{1}{2} T_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial \Omega_i} &= \frac{1}{2} M_i - \frac{1}{2} M_j - \frac{L_e}{3} T_i - \frac{L_e}{6} T_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial M_i} &= -\frac{1}{2} \Omega_j + \frac{1}{2} \Omega_i + \frac{L_e}{3D_n} M_i + \frac{L_e}{6D_n} M_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial T_i} &= -\frac{1}{2} v_j + \frac{1}{2} v_i - \frac{L_e}{3} \Omega_i - \frac{L_e}{6} \Omega_j + \frac{L_e}{3C_b} T_i + \frac{L_e}{6C_b} T_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial v_j} &= \frac{P}{L_e} v_j - \frac{P}{L_e} v_i - \frac{1}{2} T_i - \frac{1}{2} T_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial \Omega_j} &= -\frac{1}{2} M_i - \frac{1}{2} M_j - \frac{L_e}{6} T_i - \frac{L_e}{3} T_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial M_j} &= -\frac{1}{2} \Omega_j + \frac{1}{2} \Omega_i + \frac{L_e}{6D_n} M_i + \frac{L_e}{3D_n} M_j = 0 \\ \frac{\partial I_e}{\partial T_j} &= -\frac{1}{2} v_j + \frac{1}{2} v_i - \frac{L_e}{6} \Omega_i - \frac{L_e}{3} \Omega_j + \frac{L_e}{6C_b} T_i + \frac{L_e}{3C_b} T_j = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

elde edilir. Bu denklem takımını matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix}
\frac{P}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{P}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{L_e}{3D_n} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{6D_n} & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & \frac{L_e}{3C_b} & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & \frac{L_e}{6C_b} \\
\hline
-\frac{P}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{P}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{L_e}{6D_n} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{3D_n} & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & \frac{L_e}{6C_b} & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & \frac{L_e}{3C_b}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_i \\
\Omega_i \\
M_i \\
T_i \\
\vdots \\
v_j \\
\Omega_j \\
M_j \\
T_j
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (5.27)$$

elde edilir. Böylece Timoshenko kirişi halinde eleman matrisi elde edilmiştir.

5.1.3 Burkulma analizi

Burkulma analizi için eleman matrisi, Denklem (5.28) ve (5.29)'daki gibi yazılırsa,

$$[K_{11}]\{F\} + [K_{12}]\{v\} = 0 \quad (5.28)$$

$$[K_{21}]\{F\} + P_{kr} [K_{22}]\{v\} = 0 \quad (5.29)$$

Denklem (5.28)'den F çekilip Denklem (5.29)'da yerine konulunca,

$$\left[[K_{21}] \begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{11} \end{bmatrix} - P_{kr} [K_{22}] \right] \{v\} = 0 \quad (5.30)$$

elde edilir. Burada indirgenmiş sistem matrisi olan $\mathbf{K}^*$,

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - \frac{[\mathbf{K}_{21}][\mathbf{K}_{12}]}{[\mathbf{K}_{11}]} \quad (5.31)$$

şeklindedir. Denklem (5.30) düzenlenirse,

$$([\mathbf{K}^*] - \mathbf{P}_{kr} [\mathbf{F}]) \{\mathbf{v}\} = \{0\} \quad (5.32)$$

biçiminde elde edilir ve bu problem bir özdeğer problemine dönüşür. Burada $\mathbf{P}_{kr}$, çubuğun kritik burkulma yükü olup, $\mathbf{v}$ ise yer değiştirme vektörüdür. Bu denklem takımının çözümü katsayılar determinantı sıfıra eşit olduğu zaman sağlanır.

$$\det \mathbf{K}^* = 0 \quad (5.33)$$

Eğer denklem takımı sıfıra eşit olmazsa trivial çözüm ile karşılaşılır. Denklem (5.32) açık halde yazılımı,

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \mathbf{P}_{kr} \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{M}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} [\mathbf{F}] \\ [\mathbf{v}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{F}$ çubuğun iç kuvvetlerine ait vektördür.

6. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde geliştirilen sonlu eleman formülasyonu ile ilgili örnekler ele alınarak çözülmüştür. Sayısal örneklerde, çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişlerde dikdörtgen en kesit kullanılmıştır ve kesme düzeltme faktörü 1,2 olarak alınmıştır. Ayrıca b kesit genişliğini, h kesit yüksekliğini ve L çubuk boyunu ifade etmektedir. Bu çalışmada Euler ve Timoshenko kirişleri için geliştirilen sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişlerin farklı malzeme özellikleri, farklı sınır koşulları, farklı tabaka sayıları ve farklı doğrultular altında kritik burkulma yükleri hesaplanmıştır.

6.1 Geçerlilik

Çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişlerin burkulma analizini hesaplamak amacıyla oluşturulan teoriyi geçerli ve doğru kılmak için izotrop bir kiriş kullanılmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Çizelge 6.1'deki Euler burkulma yükleri Denklem (2.25), (2.30), (2.35) ve (2.40) ile hesaplanmış ve Euler hali için sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.1 : İzotrop kirişin Euler hali için kritik burkulma yükleri.

	Euler Burkulma Yükü (EI/L ²)	Bu Çalışma (EI/L ²)
Ankastre - Boş uç	2,467	2,473
Mafsallı - Mafsallı	9,870	9,890
Ankastre - Mafsallı	20,142	20,277
Ankastre - Ankastre	39,478	39,806

İzotrop kirişin Timoshenko hali için kritik burkulma yükünü hesaplamak amacıyla iki ucu mafsallı bir kiriş kullanılmıştır. L/h=10 m, h=1 m, b=1 m ve kiriş 20 elemana

bölünmüştür. Timoshenko burkulma yükü Denklem (2.47)'den $9,632 \text{ EI/L}^2$ olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise $9,612 \text{ EI/L}^2$ olarak bulunmuştur.

6.2 Tek Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri

Tek tabakalı kompozit kirişlerin kritik yüklerini hesaplamak için 0° ve 90° doğrultulu kirişler kullanılmıştır ve örnek Emam ve Nayfeh [37]'den alınmıştır. Euler kiriş teorisi için kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2 : Malzeme özellikleri.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
155	12,1	4,4	0,248

Euler kiriş teorisi kullanılarak tek katmanlı doğru eksenli kirişler için kritik burkulma yükü hesaplanmıştır. $L/h=250$, $h=0,001 \text{ m}$ ve $b=0,01 \text{ m}$ alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Birimsizleştirme katsayısı kullanılmamıştır. Çizelge 6.3'de Euler kiriş teorisi kullanılarak 0° doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri hesaplanmış ve sonuçlar Emam ve Nayfeh [37] ile karşılaştırılmıştır. P_1 , P_2 , P_3 ve P_4 burkulma yükleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü modları ifade etmektedir. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.3 : Euler hali için 0° doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.

		Emam & Nayfeh [37] (N)	Bu Çalışma (N)
Mafsallı - Mafsallı	P_1	20,495	20,438
	P_2	81,982	82,261
	P_3	184,460	186,996
	P_4	327,929	337,226
Ankastre - Ankastre	P_1	81,982	82,266
	P_2	167,715	169,733
	P_3	327,929	337,227
	P_4	495,731	518,304
Ankastre - Mafsallı	P_1	41,928	41,899
	P_2	123,933	124,88
	P_3	246,912	251,869
	P_4	410,879	426,018

Çizelge 6.4'te Euler kiriş teorisi kullanılarak 90^0 doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri hesaplanmış ve sonuçlar Emam ve Nayfeh [37] ile karşılaştırılmıştır. P_1 , P_2 , P_3 ve P_4 burkulma yükleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü modları ifade etmektedir. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.4 : Euler hali için 90^0 doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.

		Emam & Nayfeh [37] (N)	Bu Çalışma (N)
Mafsallı - Mafsallı	P_1	1,599	1,595
	P_2	6,399	6,421
	P_3	14,399	14,597
	P_4	25,599	26,325
Ankastre - Ankastre	P_1	6,399	6,421
	P_2	13,092	13,249
	P_3	25,599	26,325
	P_4	38,699	40,460
Ankastre - Mafsallı	P_1	3,273	3,271
	P_2	9,674	9,748
	P_3	19,275	19,661
	P_4	32,075	33,256

Timoshenko kiriş teorisi için örnek Reddy [2]'den alınmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 6.5'te verilmiştir.

Çizelge 6.5 : Malzeme özellikleri.

E_1	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}
$25 E_2$	E_2	$0,5 E_2$	$0,5 E_2$	$0,2 E_2$	$0,25$

Çizelge 6.6'da Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak tek katmanlı kompozit doğru eksenli kirişler için kritik burkulma yükü hesaplanmıştır. $L/h=10$, $h=1$ m ve $b=1$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) kullanılmıştır ve sonuçlar Reddy [2] ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

$$\bar{P}_{kr} = \frac{P_{kr} L^2}{b E_2 h^3} \quad (6.1)$$

Çizelge 6.6 : Timoshenko hali için 0^0 ve 90^0 doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.

		0^0	90^0
Mafsallı - Mafsallı	Reddy [2]	13,768	0,784
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	13,739	0,782
Ankastre - Ankastre	Reddy [2]	27,656	2,747
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	27,359	2,727
Ankastre - Boş uç	Reddy [2]	4,576	0,203
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	4,666	0,267

6.3 Üç Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri

Üç tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yüklerini hesaplamak için $0^0/90^0/0^0$ doğrultulu kirişler kullanılmıştır ve örnek Khdeir ve Reddy [34]'ten alınmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 6.7'de verilmiştir.

Çizelge 6.7 : Malzeme özellikleri.

E_1	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}
$40 E_2$	E_2	$0,6 E_2$	$0,6 E_2$	$0,5 E_2$	0,25

Çizelge 6.8'de Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak üç katmanlı kompozit doğru eksenli kirişler için kritik burkulma yükü hesaplanmıştır. $L/h=10$, $h=1$ m ve $b=1$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) kullanılmıştır ve sonuçlar Khdeir ve Reddy [34] ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.8 : Timoshenko hali için $0^0/90^0/0^0$ doğrultulu kirişlerin kritik burkulma yükleri.

	Khdeir & Reddy [34]	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)
Mafsallı - Mafsallı	18,989	18,932
Ankastre - Mafsallı	25,94	25,84
Ankastre - Ankastre	34,426	34,845
Ankastre - Boş uç	6,797	6,793

6.4 Dört Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri

Dört tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yüklerini hesaplamak için $0^0/90^0/90^0/0^0$ ve $90^0/0^0/0^0/90^0$ doğrultulu kirişler kullanılmıştır ve örnek Reddy [2]'den alınmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 6.5'te verilmiştir. $L/h=10$, $h=1$ m ve $b=1$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) kullanılmıştır ve sonuçlar Reddy [2] ile karşılaştırılmıştır. Euler kiriş teorisi kullanılarak hesaplanan kritik burkulma yükleri Çizelge 6.9'da verilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.9 : Euler hali için $(0^0/90^0)_s$ ve $(90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.

		$0^0/90^0/90^0/0^0$	$90^0/0^0/0^0/90^0$
Mafsallı - Mafsallı	Reddy [2]	18,127	3,296
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	18,142	3,293
Ankastre - Ankastre	Reddy [2]	72,507	13,183
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	72,989	13,265
Ankastre - Boş uç	Reddy [2]	4,532	0,824
	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	4,505	0,822

Çizelge 6.10'da Timoshenko kiriş teorisi için $90^0/0^0/0^0/90^0$ doğrultulu kompozit kirişler kullanılmıştır ve kritik burkulma yükleri Reddy [2] ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.10 : Timoshenko hali için $(90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri.

	Reddy [2]	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)
Mafsallı - Mafsallı	11,179	11,889
Ankastre - Ankastre	20,800	20,940
Ankastre - Boş uç	3,922	4,770

6.5 Altı Tabakalı Kompozit Kirişler İçin Kritik Burkulma Yükleri

Altı tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yüklerini hesaplamak için $0^0/90^0/90^0/90^0/90^0/0^0$ ve $90^0/90^0/0^0/0^0/90^0/90^0$ doğrultulu kirişler kullanılmıştır ve sayısal örnek Emam ve Nayfeh [37]'den alınmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 6.2'de verilmiştir. $L/h=250$, $h=0,001$ m, $b=0,01$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür. Birimsizleştirme katsayısı kullanılmamıştır. Çizelge 6.11'de Euler haline ait $0^0/90^0/90^0/90^0/90^0/0^0$ doğrultulu kompozit kirişler için kritik burkulma yükleri hesaplanmış ve Emam ve Nayfeh [37] ile sonuçlar karşılaştırılmıştır. P_1 , P_2 , P_3 ve P_4 burkulma yükleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü modları ifade etmektedir. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.11 : Euler hali için $(0^0/90^0/90^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.

		Emam & Nayfeh [37] (N)	Bu Çalışma (N)
Mafsallı - Mafsallı	P_1	14,896	14,847
	P_2	59,587	59,789
	P_3	134,072	135,913
	P_4	238,350	245,107
Ankastre - Ankastre	P_1	59,587	59,777
	P_2	121,901	123,364
	P_3	238,350	245,105
	P_4	360,314	376,718
Ankastre - Mafsallı	P_1	30,475	30,445
	P_2	90,078	90,761
	P_3	179,464	183,064
	P_4	298,641	309,643

Çizelge 6.12'de Euler haline ait $90^0/90^0/0^0/0^0/90^0/90^0$ doğrultulu kompozit kirişler için kritik burkulma yükleri hesaplanmış ve Emam ve Nayfeh [37] ile sonuçlar karşılaştırılmıştır. P_1 , P_2 , P_3 ve P_4 burkulma yükleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü modları ifade etmektedir. Elde edilen sonuçların literatürle uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.12 : Euler hali için $(90^0/90^0/0^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerin burkulma yükleri.

		Emam & Nayfeh [37] (N)	Bu Çalışma (N)
Mafsallı - Mafsallı	P ₁	2,299	2,292
	P ₂	9,199	9,230
	P ₃	20,698	20,982
	P ₄	36,797	37,840
Ankastre - Ankastre	P ₁	9,199	9,228
	P ₂	18,819	19,045
	P ₃	36,797	37,840
	P ₄	55,626	58,158
Ankastre - Mafsallı	P ₁	4,704	4,700
	P ₂	13,906	14,012
	P ₃	27,706	28,262
	P ₄	46,104	47,803

6.6 Kritik Burkulma Yüküne L/h Oranının Etkisi

Kritik burkulma yüküne L/h oranının etkisini göstermek amacıyla sayısal örnek Reddy [2]'den alınmıştır. Kullanılan malzemeler Çizelge 6.5'te verilmiştir. Timoshenko hali kullanılarak 0^0 doğrultulu kiriş için kritik burkulma yükleri hesaplanmıştır. L/h=20, L/h=100, h=1 m ve b=1 m kullanılmıştır. Kiriş 20 elamana bölünmüş ve birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.13'te Reddy [2] ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlarda L/h oranının artmasıyla kritik burkulma yükünün arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 6.13 : Kritik burkulma yüküne L/h oranının etkisi.

		Reddy [2]	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)
Mafsallı - Mafsallı	L/h=20	18,304	18,265
	L/h=100	20,461	20,418
Ankastre - Ankastre	L/h=20	55,07	54,893
	L/h=100	80,655	79,852
Ankastre - Boş uç	L/h=20	4,987	5,034
	L/h=100	5,134	5,147

6.7 Kritik Burkulma Yüğüne h/b Oranının Etkisi

Kritik burkulma yüğüne h/b oranının etkisini göstermek amacıyla Euler hali için iki ucu mafsallı, 0^0 doğrultulu tek tabakalı kirişler kullanılmıştır. Malzeme özellikleri Çizelge 6.7'deki gibi seçilmiştir. $E_2=2100000$ Pa, $L=10$ m $b=1$ m, ilk kiriş için $h=0,25$ m, ikinci kiriş için $h=0,5$ m ve üçüncü kiriş için $h=1$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür ve birimsizleştirme katsayısı kullanılmamıştır. Euler burkulma yüğü Denklem (2.30) kullanılarak hesaplanmıştır. Çizelge 6.14'te Euler hali kullanılarak farklı h/b değerlerine göre kritik burkulma yükleri gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında h/b oranı arttıkça kritik burkulma yükünün arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 6.14 : Euler hali için kritik burkulma yüğüne h/b oranının etkisi.

	h/b=0,25	h/b=0,5	h/b=1
Euler Burkulma Yüğü (N)	10794	86359	690872
Bu Çalışma (P_{kr})(N)	10824	86595	692764

Kritik burkulma yüğüne h/b oranının etkisini göstermek amacıyla Timoshenko hali için de iki ucu mafsallı, 0^0 doğrultulu tek tabakalı kirişler kullanılmıştır. Malzeme özellikleri Çizelge 6.7'deki gibi seçilmiştir. $E_2=2100000$ Pa, $L=10$ m $b=1$ m, ilk kiriş için $h=0,25$ m, ikinci kiriş için $h=0,5$ m ve üçüncü kiriş için $h=1$ m alınmıştır. Kiriş 20 elemana bölünmüştür ve birimsizleştirme katsayısı kullanılmamıştır. Timoshenko burkulma yüğü Denklem (2.47) kullanılarak hesaplanmıştır. Çizelge 6.15'de Timoshenko hali kullanılarak farklı h/b değerlerine göre kritik burkulma yükleri gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında h/b oranı arttıkça kritik burkulma yükünün arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 6.15 : Timoshenko hali için kritik burkulma yüğüne h/b oranının etkisi.

	h/b=0,25	h/b=0,5	h/b=1
Timoshenko Burkulma Yüğü (N)	10367	82947	416696
Bu Çalışma (P_{kr})(N)	10390	82224	415834

6.8 Eleman Sayısının Kritik Burkulma Yüküne Etkisi

Eleman sayısının kritik burkulma yüküne etkisini göstermek amacıyla sayısal örnek Reddy [2]'den alınmıştır. Bu amaçla iki ucu mafsallı, 0^0 doğrultulu ve Euler kiriş teorisi kullanılan bir kompozit kiriş ele alınmıştır. Çizelge 6.5'teki malzeme özellikleri kullanılmıştır. $L/h=10$, $h=1$ m, $b=1$ m ve birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) kullanılmıştır. Çizelge 6.16'da eleman sayısı arttırılarak kritik burkulma yükleri hesaplanmıştır ve eleman sayısının arttırılmasıyla kritik burkulma yükünün literatürdeki sonuca yaklaştığı gözlenmiştir.

Çizelge 6.16 : Eleman sayısının kritik burkulma yüküne etkisi.

Eleman Sayısı	Bu Çalışma ($\bar{P}_{kr}$)	Reddy [2]
2	25,000	20,562
3	22,500	
4	21,638	
5	21,246	
6	21,035	
7	20,908	
8	20,827	
9	20,772	
10	20,732	
15	20,635	
19	20,613	
20	20,580	

6.9 Malzeme Özelliklerinin Kritik Burkulma Yüküne Etkisi

Malzeme özelliklerinin kritik burkulma yüküne etkisini göstermek amacıyla Euler haline ait bir kompozit kiriş seçilmiştir. Kullanılacak üç kirişinde doğrultuları $0^0/90^0/90^0/0^0$ dir. Malzemeler ise Kevlar epoxy ve Graphite epoxy dir. Kevlar epoxy ve Graphite epoxy malzemesinin özellikleri Çizelge 6.17'de verilmiştir.

Çizelge 6.17 : Malzeme özellikleri.

	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}
Graphite epoxy	181	10,3	7,17	3,433	0,28
Kevlar epoxy	76	5,56	2,3	1,618	0,34

Çizelge 6.18’de birinci kompozit kiriş için kullanılan malzeme 0^0 Kevlar / 90^0 Kevlar / 90^0 Kevlar / 0^0 Kevlar , ikinci kompozit kiriş için kullanılan malzeme, 0^0 Kevlar / 90^0 Graphite / 90^0 Graphite / 0^0 Kevlar, üçüncü kompozit kiriş için kullanılan malzeme ise, 0^0 Graphite / 90^0 Kevlar / 90^0 Kevlar / 0^0 Graphite dir. Sayısal örnekte üç örnek içinde iki ucu mafsallı bir kiriş kullanılmıştır. $L/h=10$, $h=1$ m, $b=1$ m ve birimsizleştirme katsayısı olarak Denklem (6.1) alınmıştır. Üç kirişte de birimsizleştirme katsayısındaki E_2 değeri, Kevlar malzemesinin E_2 değeridir. Euler kirişi için ilk üç moda ait bulunan burkulma yükleri Çizelge 6.18’de verilmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında Graphite epoxy malzemesinin ilk ve son tabakada olması durumunda en yüksek burkulma yüküne sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 6.18 : Euler hali için $(0^0/90^0)_s$ doğrultulu kompozit kirişlerde farklı malzeme özelliklerinin burkulma yüküne etkisi.

	Kev/Kev/Kev/Kev	Kev/Grap/Grap/Kev	Grap/Kev/Kev/Grap
$\bar{P}_{kr1}$	159,547	161,049	377,015
$\bar{P}_{kr2}$	641,419	647,066	1518,304
$\bar{P}_{kr3}$	1458,035	1470,891	3451,526

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Gateaux türevi yöntemi kullanılarak çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişler için Euler ve Timoshenko haline ait iki farklı fonksiyonel elde edilmiştir. Daha sonra yaklaşık çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar metodu kullanılarak iki ayrı durum için eleman matrisleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar modeli, Euler hali için her nodda 2 adet bilinmeyene sahiptir. Bunlar yer değiştirme (v) ve eğilme momenti (M) dir. Sonlu elemanlar modeli, Timoshenko halinde ise her nodda 4 bilinmeyene sahiptir. Bunlar yer değiştirme (v), dönme (Ω), eğilme momenti (M) ve kesme kuvveti (T) dir. Doğru eksenli kompozit kirişler için kullanılan yöntem ile farklı sınır şartları ve farklı tabaka açıları kullanılarak hesaplanan kritik burkulma yükleri Fortran bilgisayar programında gerekli formülasyon yazılarak elde edilmiştir.

Bu çalışmada geliştirilen yöntem ile hesaplanan kritik burkulma yükleri çapraz tabakalı kompozit doğru eksenli kirişler için literatürde daha önceden çözölen sayısal örneklerle karşılaştırılıp sonuçları değerlendirilmiştir. Karşılaştırma sonucu bulunan değerler ile literatürdeki değerlerle çok yakın ve uyumlu sonuçlar vermiştir. Bu da geliştirilen yöntemin ve hazırlanan formülasyonun geçerli ve güvenilir olduğunu göstermektedir.

Sadece yer değiştirmeleri değişken olarak alan klasik sonlu eleman formülasyonunun kullanımında ortaya çıkan türev ve yuvarlama hataları bu çalışmada kullanılan karışık sonlu elemanlar yöntemi ile minimize edilmektedir.

Euler ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılarak elde edilen fonksiyoneller içinde en yüksek birinci mertebeden türev olduğundan fonksiyonellerin çözümü doğrusal şekil fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır.

Tek tabakalı kompozit kirişler için yapılan hesaplarda iki ucu mafsallı, iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre bir ucu boş uç olan kirişler kullanılmıştır. Euler ve Timoshenko halleri için 0° ve 90° doğrultulu kompozit kirişler için hesaplanan kritik burkulma yüklerine bakıldığında en fazla kritik burkulma yük iki ucu ankastre olan kirişlerde gözlenmiştir.

Dört ve altı tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yüklerini hesaplarken iki ucu mafsallı, iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre bir ucu boş uç olan kirişler kullanılmıştır. Hesaplarda $0^0/90^0/90^0/0^0$ ve $90^0/0^0/0^0/90^0$ doğrultulu kirişlerin kritik burkulma yüklerinin birbirlerinden farklı oldukları gözlenmiştir. Aynı şekilde $0^0/90^0/90^0/90^0/90^0/0^0$ ve $90^0/90^0/0^0/0^0/90^0/90^0$ doğrultulu kirişlerin kritik burkulma yükleri de birbirlerinden farklıdır. Bu iki durum için de en fazla kritik burkulma yükü iki ucu ankastre olan kirişlerde gözlenmiştir.

Kritik burkulma yüküne L/h oranının etkisini göstermek için iki ucu mafsallı, iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre bir ucu boş uç olan kirişler kullanılmıştır. $L/h=20$ ve $L/h=100$ değerleri için sonuçlar karşılaştırıldığında, L/h değeri arttıkça kritik burkulma yükünün arttığı görülmektedir.

Kritik burkulma yüküne h/b oranının etkisini göstermek için iki ucu mafsallı bir kiriş kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında h/b oranı arttıkça kritik burkulma yükünün de arttığı gözlenmiştir.

Sonlu eleman yönteminde kiriş eleman sayısının artırılmasının kritik burkulma yüküne etkisini göstermek amacıyla iki ucu mafsallı bir kiriş kullanılmıştır. Kiriş eleman sayısını arttırdığımızda kritik burkulma yükünün istenilen sonuca yaklaştığı görülmektedir. Ancak bunun sonucunda eleman sayısının artması işlem yoğunluğunun artmasına neden olmaktadır. Günümüzdeki bilgisayarlar yüksek standartlara sahip olduklarından dolayı istenilen sayıda eleman kullanılmıştır.

Malzeme özelliklerinin burkulma yüküne etkisini göstermek amacıyla iki ucu mafsallı ve doğrultuları $0^0/90^0/90^0/0^0$ olan kompozit kirişler kullanılmıştır. Malzeme özellikleri birinci kirişte Kev/Kev/Kev/Kev, ikinci kirişte Kev/Grap/Grap/Kev ve üçüncü kirişte Grap/Kev/Kev/Grap kullanılmıştır. Graphite epoxy'nin ilk ve son tabakada kullanıldığı kompozit kirişin en yüksek burkulma yüküne sahip olduğu gözlenmektedir. Sadece Kevlar epoxy'nin kullanıldığı kompozit kirişte ise en düşük burkulma yükü elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışma ile Gateaux türevi yöntemi ve sonlu elemanlar yaklaşım yönteminin problem çözümünde yeterli yakınsaklıkta sonuç verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] **Jones M. R.**, 1999. *Mechanics Of Composite Materials*, Taylor & Francis.
- [2] **Reddy J. N.**, 2004. *Mechanics Of Laminated Composite Plates And Shells: Theory And Analysis*, 2nd ed. Boca Raton, Fl:Crc Press.
- [3] **Kaw A. K.**, 2006. *Mechanics Of Composite Materials*, Taylor & Francis.
- [4] **Desai Y.M., Ramtekkar G.S., Shah A.H.**, 2003. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model, *Composite Structures*, vol. **59**, pp. 237–249.
- [5] **Zhang Y.X., Yang C.H.**, 2009. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates, *Composite Structures*, vol. **88**, pp. 147–157.
- [6] **Ganapathi M., Patel B.P., Pawargi D.S.**, 2002. Dynamic analysis of laminated cross-ply composite circular thick cylindrical shells using higher-order theory, *International Journal of Solids and Structures*, vol. **39**, pp. 5945–5962.
- [7] **Parka T., Kimb K., Han S.**, 2006. Linear static and dynamic analysis of laminated composite plates and shells using a 4-node quasi-conforming shell element, *Composites: Part B*, vol. **37**, pp. 237–248.
- [8] **Khdeir A. A., Reddy J. N.**, 1997. Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches, *International Journal Solids Structures*, vol. **34**, no. 10, pp. 1217-1234.
- [9] **Gün T.**, 2002. Doğru eksenli çubukların burkulma analizi için geliştirilen yeni bir fonksiyonel ve sonlu elemanlar çözümü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [10] **Gürsoy A.**, 2004. Elastik çubuk ve çerçeve sistemlerin burkulma yüklerinin varyasyonel türev ile incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [11] **Özkan S.**, 2002. Elastik zemine outran kirişlerde burkulma problemi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [12] **Yeni U.**, 1996. Elastik çubukların titreşim frekanslarının ve burkulma yüklerinin sonlu elemanlar yöntemiyle analizi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [13] **Aköz A.Y., Kadioğlu F.**, 1996. The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Computers and Structures*, vol. **60**, no. 4, pp. 643-651.
- [14] **Aköz A.Y., Kadioğlu F.**, 1999. The mixed finite element method for quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. **44**, no. 12, pp. 1909-1932.

- [15] **Kadioğlu F., Aköz A.Y.**, 2003. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *An international Journal Structural Engineering and Mechanics*, vol. **15**, no. 6, pp. 735-752.
- [16] **Oden J.D., Reddy J.N.**, 1976. Variational Methods In Theoretical Mechanics, Springer, Berlin.
- [17] **İnan M.**, 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, Berksoy Matbaası.
- [18] **Jun L., Hongxing H., Rongying S.**, 2008. Dynamic stiffness analysis for free vibrations of axially loaded laminated composite beams, *Composite Structures*, vol. **84**, pp. 87-98.
- [19] **Rao M. K., Desai Y. M., Chitnis M. R.**, 2001. Free vibrations of laminated beams using mixed theory, *Composite Structures*, vol. **52**, pp. 149-160.
- [20] **Aydoğdu M.**, 2005. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. **47**, pp. 1740-1755.
- [21] **Ramtekkar G. S., Desai Y. M.**, 2002. Natural vibrations of laminated composite beams by using mixed finite element modelling, *Journal of Sound and Vibration*, vol. **257**, no. 4, pp. 635-651.
- [22] **Jun L., Hongxing H., Rongying S.**, 2008. Dynamic stiffness analysis for free vibrations of axially loaded laminated composite beams, *Composite Structures*, vol. **84**, pp. 87-98.
- [23] **Shi G., Lam K. Y.**, 1999. Finite element vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol. **219**, no. 4, pp. 707-721.
- [24] **Jun L., Hongxing H.**, 2009. Dynamic stiffness analysis of laminated composite beams using trigonometric shear deformation theory, *Composite Structures*, vol. **89**, pp. 433-442.
- [25] **Jun L., Hongxing H., Rongying S.**, 2008. Dynamic finite element method for generally laminated composite beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. **50**, pp. 466-480.
- [26] **Bassiouni A. S., Gad-Elrab R. M., Elmahdy T. H.**, 1999. Dynamic analysis for laminated composite beams, *Composite Structures*, vol. **44**, pp. 81-87.
- [27] **Subramanian P.**, 2001. Flexural analysis of symmetric laminated composite beams using C finite element, *Composite Structures*, vol. **54**, pp. 121-126.
- [28] **Fatmi E. R., Zenzri H.**, 2002. On the structural behavior and the Saint Venant solution in the exact beam theory Application to laminated composite beams, *Computers and Structures*, vol. **80**, pp. 1441-1456.
- [29] **Subramanian P.**, 2006. Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements, *Composite Structures*, vol. **73**, pp. 342-353.

- [30] **Kant T., Marurb S. R., Rae G. S.,** 1998. Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory, *Composite Structures*, vol. **40**, no. 1, pp. 1-9.
- [31] **Kıraç M.,** 2007. Doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hatay.
- [32] **Xu R., Wu Y. F.,** 2008. Free vibration and buckling of composite beams with interlayer slip by two-dimensional theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol. **313**, pp. 875–890.
- [33] **Aydoğdu M.,** 2006. Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *Composites Science and Technology*, vol. **66**, pp. 1248–1255.
- [34] **Khdeir A. A., Reddy J. N.,** 1997. Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, vol. **37** no. 1, pp. 1-3.
- [35] **Loja M. A. R., Barbosa J. I., Soares C. M. M.,** Buckling behaviour of laminated beam structures using a higher-order discrete model, *Composite Structures*, vol. **38**, no. 1-4, pp. 119-131.
- [36] **Xu R., Wu Y.,** 2007. Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. **49**, pp. 1139–1155.
- [37] **Emam S. A., Nayfeh A. H.,** 2009. Postbuckling and free vibrations of composite beams, *Composite Structures*, vol. **88**, pp. 636-642.
- [38] **Eryiğit E.,** 2006. Tabakalı kompozit çubuklarda yanal yük etkisi ile oluşan burkulma davranışlarının incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Gökhan ÖZKAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Konya, 18.01.1985

Lisans Üniversitesi: Selçuk Üniversitesi