

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZ DIŞLI ÇARKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE
MODELLENMESİ VE GERİLMELERİN İNCELENMESİ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN TASTON MERKEZİ**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Cüneyt FETVACI
(503920029012)**

104255

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Şubat 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Haziran 2001**

Tez Danışmanı :

Prof.Dr. Aybars ÇAKIR

Diğer Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Teoman KURTAY (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Can ÖZSOY (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Necati TAHRALI (Y.T.Ü.)

Prof.Dr. Osman YAZICIOĞLU (M.Ü.)

HAZİRAN 2001

ÖNSÖZ

Güç iletiminde kullanılan en önemli makina elemanları olan dişli çarklar günlük hayatta saatlerin mekanizmalarından ev aletlerine, otomobillerden uçak transmisyon elemanlarına kadar geniş bir alanda kullanılmaktadır. Dişli çarkların muhtelif şartlarda fiziksel davranışının modellenmesi ve simülasyonu sayısız araştırmaya konu olmuştur. Günümüzde birçok mühendislik probleminde olduğu gibi dişli çarkların analizinde sayısal metodlar kullanılmaktadır. Sayısal metodların temel prensibi problemi fiziksel davranışları kolaylıkla formüle edilen sonlu sayıda bölgelere ayırmak ve bu bölgelerde tesis edilen denklemleri birleştirerek yapıyı lineer denklem seti ile ifade etmektir. Bu şekilde karmaşık problemler kolaylıkla çözümlenmektedir. Geliştirilen paket programlarla bu metodlar etkin olarak kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar metodu en fazla kullanılan sayısal metoddur.

Çalışmada düz dişli çarkların sonlu elemanlar metodu ile modellenmesi ve analizinde yapılması gereken işlemler ele alınmıştır. Tesis edilen modeller muhtelif sınır şartlarında incelenmiştir. Zaman gerektiren modelleme işlemine ait bu bilgilerin halihazırda konu ile ilgili çalışan ve çalışacak araştırmacılara kolaylık sağlayacağı kanaatindeyim.

Bu konuda çalışma imkanı sağlayan değerli hocam Prof.Dr. Aybars ÇAKIR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışma sırasında beni teşvik eden, moral veren ve yardımcı olan aileme ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Şubat 2001

Cüneyt FETVACI

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Konunun Tanıtımı	1
1.2 Kaynak Taraması	2
1.3 Çalışmanın Kapsamı	3
2. DIŞLI ÇARK GEOMETRİSİ	6
2.1 Giriş	6
2.2 Evolvent Geometrisi	6
2.3 Düz Dişli Çark Referans Profili	8
2.4 Takım Profili	9
2.5 Dişli Çarkın Kök Eğrisi	10
2.6 Yük Tatbik Doğrultusu	11
2.7 İç ve Dış Tekil Kavrama Noktaları	14
3. SONLU ELEMENLAR METODU	17
3.1 Giriş	17
3.2 Sayısal Metodlar	17
3.3 Sonlu Elemanlar Metodu	19
3.3.1 Metodun Adımları	20
3.3.1.1. Problem Geometrisinin Elemanlara Ayrılması	20
3.3.1.2 Alan Değişkenin Tayini	20
3.3.1.3 Elemanların Davranış Matrislerinin Hesaplanması	20
3.3.1.4 Eleman Matrislerinin Birleştirilmesi	21
3.3.1.5 Sistem Denklemlerinin Çözümü	21
3.3.2 Eleman Rijitlik Matrisi	21
3.3.3 Rijitlik Matrisin Türetilmesi	23
3.3.4 Yer Değiştirme Fonksiyonu	25
3.3.5 İsoparametrik Dörtgen Eleman	29
3.3.5.1 İzoparametrik Eşleme	29
3.3.5.2 Eleman Rijitlik Matrisi	34
3.3.5.3 Sayısal İntegrasyon	34
4. GENEL AMAÇLI SONLU ELEMENLAR YAZILIMI	37

4.1 Giriş	37
4.2 Ana Modüller	37
4.2.1 Önışlemci Modülü	38
4.2.2 Çözümleme Modülü	40
4.2.3 Son İşlemci Modülü	41
4.3 Yardımcı Modüller	42
4.4 Model Elde Edilmesi	42
4.4.1 Doğrudan Sonlu Eleman Modelleme	42
4.4.2 Katı Modelden Faydalanılarak Modelleme	42
4.5 Sınır Şartlarının Tatbiki	43
4.6 Gerilmelerin Hesabı	44
4.7 Çalışma Dosyası	45
4.8 Parametrik Modelleme	45
5. DÜŞ DİŞLİ ÇARKIN SONLU ELEMENLAR MODELİNİN ELDE EDİLMESİ	47
5.1 Giriş ve Temel Hususlar	47
5.2 Dış Geometrisini Elde Etmek İçin Geliştirilen Program	48
5.3 ANSYS Önışlemci Modülünde Yapılan İşlemler	49
5.3.1 Katı Modelin Oluşturulması	49
5.3.2 Eleman Tipi ve Malzeme Özelliklerinin Seçilmesi	50
5.3.3 Eleman Dağılımının Tayini	51
5.3.4 Eleman Ağının Oluşturulması	51
5.4 Çözümleyici Modülünde Yapılan İşlemler	52
5.4.1 Modele Tatbik Edilen Sınır Şartları	52
5.4.2 Sınır Şartlarının Parametrik Olarak Tatbiki	53
5.5 Göbek Kalınlığının Modellenmesi	56
6. GERİLMELERİN İNCELENMESİ	57
6.1 Giriş	57
6.2 Kritik Kesitin Tayininde Mukavemet Modelleri	57
6.3 Literatürdeki Tesis Edilmiş Sonlu Eleman Ağları	61
6.4 Çalışmada Geliştirilen Modelde Gerilmelerin İncelenmesi	64
7. SONUÇLAR	72
KAYNAKLAR	73
EKLER	76
ÖZGEÇMİŞ	90

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No.</u>
Şekil 2.1 : Evolvent geometrisi.	6
Şekil 2.2 : DIN 867 normuna göre referans profili	8
Şekil 2.3 : Düz dişli çark geometrisi	8
Şekil 2.4 : Kesici takımın geometrisi	10
Şekil 2.5 : Trokoid formda diş kök eğrisi	10
Şekil 2.6 : Takım diş profili ve uc detayı	11
Şekil 2.7 : Diş boşluğuna bağlı olarak takım uç yuvarlatmasının değişimi	11
Şekil 2.8 : Yük tatbik doğrultusu	12
Şekil 2.9 : Yük tatbik doğrultusu geometrik özellikleri	12
Şekil 2.10 : Kavrama diyagramı	14
Şekil 2.11 : Temas kuvvetinin değişimi	15
Şekil 2.12 : Azami gerilmelerin bölgeleri	15
Şekil 3.1 : Eleman sayısının artmasının çözümün hassasiyetine etkisi	18
Şekil 3.2 : Problem geometrisinin sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodu ile gösterimi	19
Şekil 3.3 : Lineer dikdörtgen eleman	26
Şekil 3.4 : Elemanın fiziksel koordinatlara eşlenmesi	30
Şekil 3.5 : 8-düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman	31
Şekil 3.6 : Gauss Kareleştirme için optimum örnekleme noktası konumları	35
Şekil 3.7 : 8-düğüm noktalı eleman için örnekleme noktaları	35
Şekil 4.1 : Analizde kullanılan modüller	38
Şekil 4.2 : Önışlemci modülünde önemli komut menüleri	39
Şekil 4.3 : PLANE42 sonlu elemanı	39
Şekil 4.4 : PLANE82 sonlu elemanı	40
Şekil 4.5 : Elemana statik sınır şartlarının tatbiki	44
Şekil 5.1 : Karmaşık geometrinin basit geometrik şekillerle katı modellenmesi	49
Şekil 5.2 : PLANE42 ve PLANE82 Sonlu eleman tipleri	50
Şekil 5.3 : Kuvvet kontrollü problemlerde gerilmelerin hesap adımları	50
Şekil 5.4 : Düz dişli çark sonlu elemanlar modeli	51
Şekil 5.5 : Önışlemcide yapılan işlemlerin akış şeması	52
Şekil 5.6 : Kinematik sınır şartları tatbik edilmiş model	53
Şekil 5.7 : Sıralama akış diagramı	54
Şekil 5.8 :Yük tatbik yerinin değişimi	55
Şekil 5.9 : Çözümleyici modülünde icra edilen işlemlerin akış şeması	55
Şekil 5.10 : Göbek kalınlığının ilave edilmesi	56
Şekil 6.1 : Dişdibinde yorulma kırılmasının gelişmesi	57
Şekil 6.2 : Diş dibinde meydana gelen gerilmeler	58
Şekil 6.3 : Lewis mukavemet modeli	58

	<u>Sayfa No.</u>
Şekil 6.4 : Optik gerilme analizi	59
Şekil 6.5 : Dış kritik kesiti	59
Şekil 6.6 : Kritik kesitin tayini	60
Şekil 6.7 : CHABERT ve diğ sonlu elemanlar modeli	61
Şekil 6.8 : SOMPRAKIT ve diğ. sonlu elemanlar modeli	62
Şekil 6.9 : CHANG ve diğ. sonlu elemanlar modeli	62
Şekil 6.10 : SUN ve diğ. sonlu elemanlar modeli	63
Şekil 6.11 : BIBEL ve diğ. sonlu elemanlar modeli	63
Şekil 6.12 : TOBE ve diğ. sonlu elemanlar modeli	64
Şekil 6.13 : Analizde kullanılan sonlu elemanlar modeli	65
Şekil 6.14 : Dış ucundan yükleme hali	65
Şekil 6.15 : Çekme tarafındaki azami gerilmenin karşılaştırılması	66
Şekil 6.16 : Yük tatbik noktasın değişiminin azami gerilmelere olan etkisi	67
Şekil 6.17 : Kavrama açısının değişmesinin azami gerilmeye etkisi	68
Şekil 6.18 : Dış ucundan yükleme halinde gerilmeler	68
Şekil 6.19 : Dış ucundan yükleme halinde gerilmeler	69
Şekil 6.20 : Kesitte gerilmelerin değişimi (BARONET)	69
Şekil 6.21 : Dış ucundan 2 mm mesafede yükleme hali için gerilmeler	70
Şekil 6.22 : Dört düğüm noktalı eleman için gerilmelerin değişmesi	70
Şekil A.1 : Trokoidal yörünge	76
Şekil A.2 : Ucu yuvarlatılmış takımın hasıl ettiği yuvarlatılmış form	78
Şekil A.3 : Evolvervent profile trokoidal kök eğrisinin teğet noktası	79
Şekil A.4 : Kesici takım geometrisi	80
Şekil A.5 : Dış kök eğrisi	82
Şekil B.1 : İki boyutlu katı geometrisi	83
Şekil B.2 : Düzlemsel ele alınan problemler	85

SEMBOL LİSTESİ

a	: Eksenler arası mesafe
d_a	: Dışbaşı dairesi yarıçapı
d_b	: Temel dairesi çapı
d_r	: Dışdibi dairesi yarıçapı
d_0	: Taksimat dairesi yarıçapı
h_a	: Dışbaşı yüksekliği
h_r	: Dışdibi yüksekliği
m	: Modül
p	: Taksimat
s	: Taksimat dairesindeki diş kalınlığı
z	: Diş sayısı
α	: Kavrama açısı
δ	: Virtüel operatör
$[B]$	: Gradyen matrisi
$[D]$	: Elastik sabitler matrisi
$\{F\}$	: Kuvvet vektörü
$[K]$	: Sistemin rijitlik matrisi
$[N]$	: İnterpolasyon fonksiyonu
$\{u\}$	: Yer değiştirme bileşenleri $u(x,y)$ ve $v(x,y)$
$\{u\}^e$	: Düğüm noktasındaki yer değiştirme bileşenleri
$\{\varepsilon\}$	: Birim şekil değiştirme sütun matrisi
$[\partial]$	: Diferansiyel operatör matrisi
$\{\sigma\}$	: Gerilme

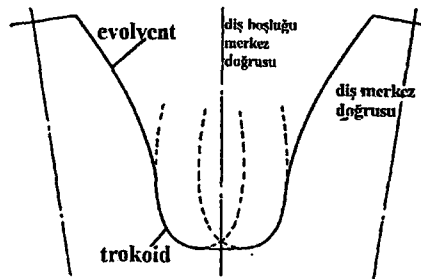
DÜZ DİŞLİ ÇARKLARIN SONLU ELEMANLAR METODU İLE MODELLENMESİ VE GERİLMELERİN İNCELENMESİ

ÖZET

Güç iletiminde kullanılan en önemli makina elemanları olan dişli çarklar günlük hayatta saatlerin mekanizmalarından ev aletlerine, otomobillerden uçak transmisyon elemanlarına kadar geniş bir alanda kullanılmaktadır. Dişli çarkların muhtelif şartlarda fiziksel davranışının modellenmesi ve simülasyonu sayısız araştırmaya konu olmuştur. Başlangıçta basit mukavemet modelleri ile yapılan bu incelemeler, bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler ile sayısal metodlarla devam etmektedir. Sonlu elemanlar metodu, sınır elemanlar metodu ve kompleks potansiyel metodu dişli çarkların gerilme analizinde kullanılan sayısal metodlardır. Çalışmanın gayesi düz dişli çarklarda dişdibi gerilmesini hesaplamak için sonlu elemanlar modeli tesis etmek ve muhtelif sınır şartlarında modeli analiz etmektir.

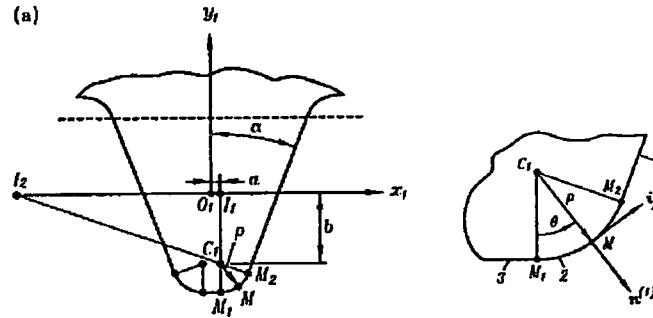
Sayısal metodlar analitik metodla çözülemeyecek formda pratik mühendis problemlerin tatminkar derecede çözülmesini sağlamaktadır. Sonlu elemanlar metodunun, diğer sayısal metodlarda olduğu gibi, esas aldığı prensip yapının (problemin) küçük bir bölgesinin fiziksel davranışını doğru olarak ifade eden denklem ve bağların türetilmesidir. Problem geometrisi sonlu eleman adı verilen basit geometrik şekilli bölgelerin topluğu olarak modellenir. Elemanlar birbirlerine düğüm noktalarından bağlıdır. Problemi çok sayıda küçük bölgelere bölmek ve bu bölgeleri birbirine birleştiren bağları kullanmakla, yapıdaki büyüklükleri (gerilme analizi probleminde gerilme ve yerdeğiştirmeleri) tatminkar bir derecede hesaplamak mümkündür. Modeldeki eleman sayısı arttıkça daha hassas bir çözüm elde edilir. Bu şekilde analitik çözümün zahmet verici olduğu keyfi geometrili ve sınır şartlı problemler modellenir ve çözülür.

Sonlu eleman modelinin tesis için diş profilini tayin eden analitik ifadelerin bilgisayar ortamına aktarmak gerekmektedir. Düz dişli çark profili, diş yan yüzeylerinde evolvent eğrilerden, dişbaşı ve dişdibinde konsantrik yaylardan, diş kökünde ise trokoid eğrisinden meydana gelir. (Şekil 1)



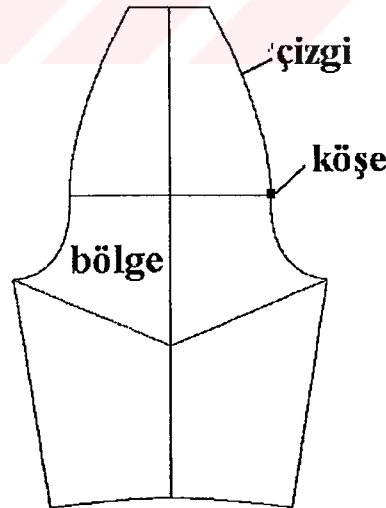
Şekil 1 Diş kök eğrisi

Kremayer şeklinde takımın (Şekil 2) geometrisi profilin şeklini tayin eder. Takımın diş başı, diş dibi yükseklikleri ve yarı profil açısına bağlı olarak takım ucu yuvarlatmasının yarıçapı ve eğrilik merkezi tayin edilmektedir. Takımın yuvarlatılmış ucu, dişlinin kök eğrisini meydana getirir. Doğrusal yan yüzeyler, evolvent profili ve uçtaki doğrusal kısım dişdibindeki dairesel yayı oluşturur.



Şekil 2 Kesici Takım geometrisi

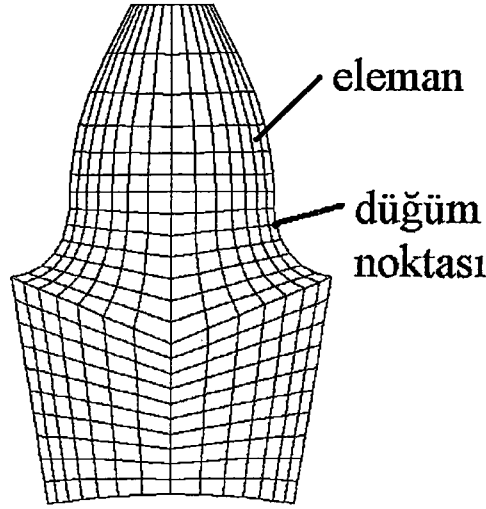
Çalışmada sonlu elemanlar modelini elde etmek gayesi ile dişli geometrisini tayin eden noktaları oluşturan bir hesaplayıcı program geliştirilmiştir. Bu programda evolvent geometriyi ve trokodial formda dişdibi eğrisini tayin eden ifadeler uygun çevrimlerle kullanılmıştır. Bu programın çıkışı olan dosyalar diş geometrisini tayin eden noktaların formatlı yazıldığı koordinat dosyası ile yine diş geometrisinden tayin edilen büyüklüklerin parametrik olarak atandığı parametre dosyasıdır. Koordinat dosyası ANSYS önışlemcide okunarak katı modelleme için ilk adım olan ve diş geometrisini tayin eden köşe noktalar (key point) doğrudan oluşturulmaktadır. Bundan sonra uygun işlemler yapılarak iki boyutlu diş katı modeli elde edilir. (Şekil 3)



Şekil 3 Dişli çark katı modeli

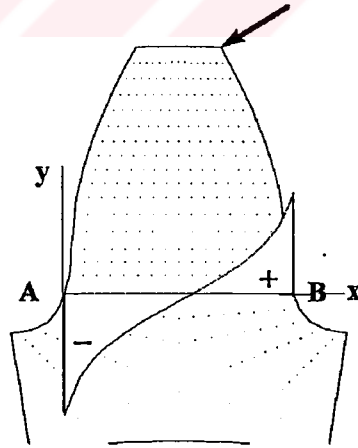
Sonlu elemanlar modeli bu katı modelden faydalanılarak elde edilir (Şekil 4). Bu işlemleri gerçekleştiren komutların sıralandığı ANSYS çalışma dosyasında bazı büyüklükler (eleman sayısı, dağılımı v.b) parametrik olarak değerlendirilmektedir. Bu

parametrik yaklaşım belirli bir ağ kalıbı için programın bir defa çalıştırıldığında muhtelif noktalarda yükleme hallerinin sırayla incelenmesini sağlamaktadır. ANSYS Parametrik Dizayn Lisanının etkin kullanılması ile seçilen düğüm noktalarına kuvvetin otomatik tatbiki ve her hal için çözüm dosyalarının sırayla elde edilmesi gerçekleştirilmiştir.



Şekil 4 Düz dişli çark sonlu elemanlar modeli

Tesis edilen modelin çözümlenmesi neticesinde elde edilen grafikler literatürdeki grafikler ile karşılaştırılmıştır. Metodda dişdibindeki yorulma çatlağının başladığı kritik kesit kolaylıkla tayin edilmektedir. Model üzerinde kritik kesit tayini şekilde gösterilmiştir. Sonlu elemanlar metodu analitik metodlar ile karşılaştırıldığında dişli çarkların gerilme analizinde kullanılan güçlü bir sayısal tekniktir.



Şekil 5 Modelde kritik kesitin tayini

THE MODELLING AND STRESS ANALYZING OF SPUR GEARS WITH FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

Spur gears are widely used in the transmission of power. The physical response of spur gears under various conditions have been investigated both analytical and numerical methods. With the aid of powerful computers and software, numerical methods are widely used in the stress analysis of gears. The aim of this study is to build a finite element model for calculating and evaluating the root stresses of spur gears.

Without numerical techniques, it would be almost impossible to solve practical engineering problems analytically with a reasonable degree of accuracy. Most numerical techniques in continuum mechanics are based on the principle that impossible to derive some equations and relationships that describe accurately the behaviour of a small differential part of the body. By dividing the entire body into a large number of these smaller parts and using further relationships to link up or assemble these parts together, it is possible to obtain a reasonably accurate predictions of the values of variables such as stresses and displacements in the body. As the sizes of these small parts are made smaller, the numerical solution becomes more accurate. The flexibility of finite element methods helps to model problems with complex geometries and nonhomogenous material properties.

Development of the finite element model of spur gear begins with data describing the outline of a single tooth and its fillets from the center of the tooth space on one side to the center of the tooth space on the other side. Several different curves make up the tooth outline: concentric circular arcs at the outside tooth tip and the bottom tooth space lands, involutes on two sides of the tooth, and trochoides between the involutes and the bottom lands at the base of the tooth. (Figure 2)

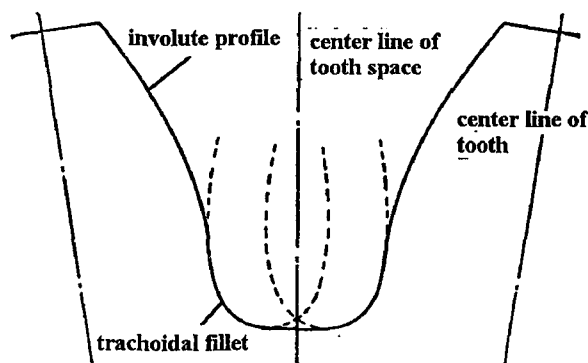


Figure 1 Gear tooth geometry

Figure 2 shows the tooth of a rack-cutter for generation of involute spur gears. Part 1 of the tool profile generates the involute profile of the gear, part 3 of the tool profile is a straight line and generates the dedendum circle of the gear, and part 2 of the tool profile is an arc of radius ρ that generates the fillet of the gear.

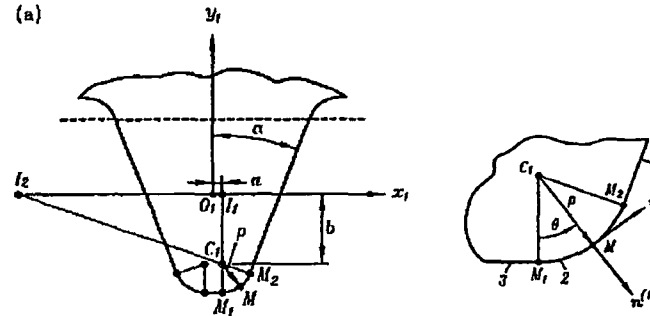


Figure 2 Tool geometry

In the study, a BASIC program is written to obtain the cartesian coordinates of the tooth profile. Analytical equations that determines the involute profile and trochoidal fillet are used with proper loops. The inputs of the program are module and tooth number. One of the output files contains cartesian coordinates of the tooth profile. In the preprocessor of the ANSYS program, this file is easily evaluated. So the keypoints that determines the outline of the tooth profile is generated. Lines connect these keypoints to each other. Four lines form solid areas. (Fig.3)

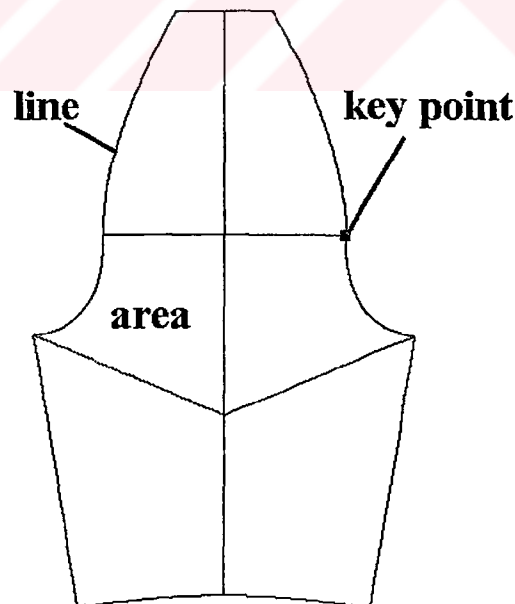


Figure 3 The solid modelling of gear geometry for proper discretization

The solid model of the complex gear geometry is obtained as the collection of small areas of simple geometries. Then element type and material properties are determined.

The nodal configuration (the number and the density of elements in small areas) is determined by the user. So the finite element model of the gear tooth is obtained. (Fig 4). To obtain the flexibility in modelling, the values that determines the nodal configuration are parametrically determined.

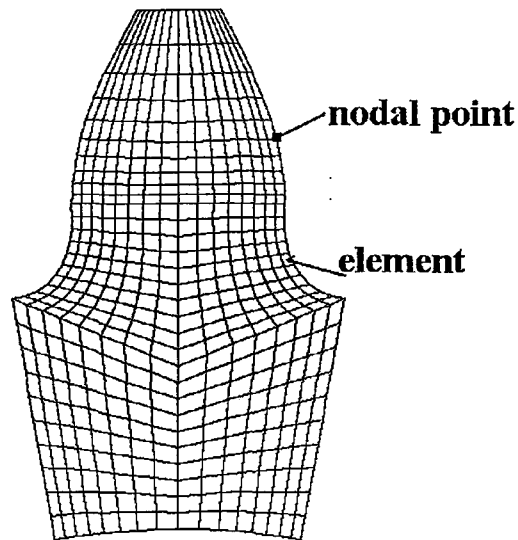


Figure 4 The finite element model of spur gear tooth

The results of the developed model is compared with the results available in literature. The determination of critical section of tooth is shown in the figure. The finite element method is a powerful technique to examine the root stresses besides the analytical methods.

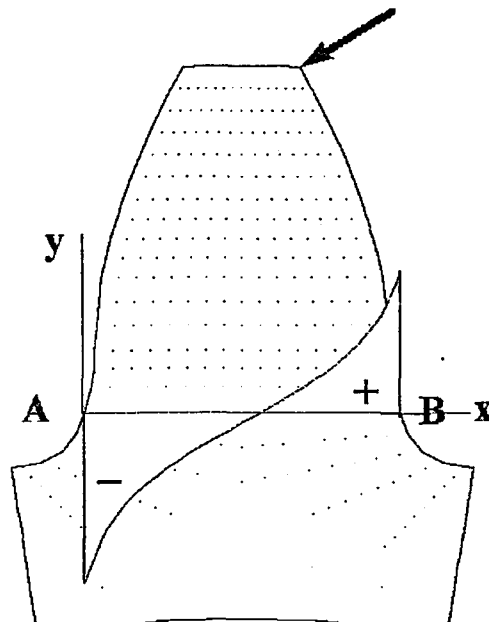


Figure 5 The critical section of gear tooth

1. GİRİŞ

1.1 Konunun Tanıtımı

Güç iletiminde kullanılan en önemli makina elemanları olan dişli çarklar günlük hayatta saatlerin mekanizmalarından ev aletlerine, otomobillerden uçak transmisyon elemanlarına kadar geniş bir alanda kullanılmaktadır. Dişli çarkların muhtelif şartlarda fiziksel davranışının modellenmesi ve simülasyonu sayısız araştırmaya konu olmuştur. Başlangıçta basit mukavemet modelleri ile yapılan bu incelemeler, bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler ile sayısal metodlarla devam etmektedir. Sayısal metodlar analitik çözümün zor olduğu karmaşık geometrili problemlerin çözümünde tercih edilmektedir. Sonlu elemanlar metodu, sınır elemanlar metodu ve kompleks potansiyel metodu dişli çarkların analizinde kullanılan sayısal metodlardır. [1]

Sonlu elemanlar metodu en fazla kullanılan sayısal metoddur. Sonlu elemanlar metodu 1950'li yıllarda uçak-uzay teknolojisinde karmaşık yapıların gerilme analizi için geliştirilmiştir. Günümüzde biomekanikten nükleer teknolojiye birçok disiplinde ve farklı tipten problemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metodun esas aldığı prensip yapının (problemin) küçük bir bölgesinin fiziksel davranışını doğru olarak ifade eden denklem ve bağların türetilmesidir. Problem geometrisi sonlu eleman adı verilen basit geometrik şekilli bölgelerin topluğu olarak modellenir. Elemanlar birbirlerine düğüm noktalarından bağlıdır. Problemi çok sayıda küçük bölgelere bölmek ve bu bölgeleri birbirine birleştiren bağları kullanmakla, yapıdaki büyüklükleri (gerilme analizi probleminde gerilme ve yerdeğiştirmeleri) tatminkar bir derecede hesaplamak mümkündür.

Çalışmanın gayesi, dişli çarklarda diş dibindeki gerilme yığılmasına bağlı olarak kritik kesitte yorulma çatlağına ve ilerleyen aşamada kırılmaya yol açan gerilmeleri hesaplamak, kritik kesitin yerini tayin etmek ve kritik kesit boyunca gerilmelerin değişimini incelemektir. Bu bölgedeki azami gerilmelerin değişim karakteristiğini bilmek, ömrü arttırmak için yapılacak ısıtma işlemleri, taşlama ve bilya püskürtme

neler yapılması gerektiği konusunda yol gösterecektir. Bu bakımdan, problemin fiziksel özelliklerine uygun modelleme yapıldığında dişli çarklardaki gerilmeleri analiz etmede hızlı ve güvenilir bir metod olan sonlu elemanlar metodu çalışmada kullanılmıştır. Bu şekilde çeşitli modül ve diş sayısı hallerinde modellerin incelenmesinde zamandan tasarruf sağlanmaktadır. Çalışmada kaynakların değerlendirilmesi ve yapılan araştırmalarda elde edilen tecrübeye dayanarak, çeşitli sınır şartlarının incelenmesinde esneklik sağlayan yeni bir dişli çark sonlu elemanlar modeli geliştirilmiştir.

1.2 Kaynak Taraması

Metodun dişli çarklara tatbikinde göz önüne alınması gerek hususları ilk olarak WILCOX ve COLEMAN makalelerinde belirtmişlerdir. İki boyutlu dişli çark geometrisinin sonlu elemanlar (nümerik analize esas model) ile temsilinin esasları belirtilmiş ve diş dibindeki gerilmeleri tayin eden teknik verilmiştir. Simetrik ve simetrik olmayan profilli dişlilerdeki dişdibindeki çekme gerilmelerinin sonlu elemanlar metodu ile analizi gerçekleştirilmiştir. Kök bölgesinde gerilme yığılmasını temsil etmek için burada eleman yoğunluğunun artırılması belirtilmiştir. [2]

CHABERT ve diğ., düz dişli çarkların sonlu elemanlar modelinin tesisinde modelin kaç diştan teşkil edeceğini ve sektör kalınlığının ne alınması gerektiğini incelemişlerdir. Dişdibi bölgesinde azami gerilmeyi hesaplayan bir ifade tesis etmişlerdir. [3]

BARONET ve diğ., iki boyutlu elastisite teorisini ve uygun bir dönüşüm fonksiyonu kullanarak, tekil yük altında dişteki gerilme dağılımını incelemişlerdir. [4]

WILCOX bir sonraki çalışmasında düz dişli çarklarda geometrinin kalınlık doğrultusunda değişmediğinden iki boyutlu modelleme yapılabileceğini vurgulamıştır. [5]

TOBE ve diğ., düz dişli çarklarda gerilme ve şekil değişimini incelemek için sonlu elemanlar metodu ile bir model geliştirmiştir. Analiz neticesinde dişdibi bölgesindeki azami çekme gerilmesini veren ampirik bir ifade tesis edilmiştir. [6]

CHANG ve diğ., muhtelif yükleme, sınır şartları, dişdibi yuvarlatma yarıçapı ve sektör kalınlığı için düz dişli çarklarda gerilme analizi neticeleri sunmuşlardır. Neticeler SAP IV Sonlu elemanlar programı ile elde edilmiştir. [7]

SOMPRAKIT ve diğ., geçme parametrelerinin dişli gerilmeleri üzerindeki etkisini ele almışlardır. Analiz için NASTRAN programı ile dişli çarkın sonlu elemanlar modeli kurulmuştur. Muhtelif incelemeler neticesinde her hal için azami gerilmenin basma gerilmesi olduğu sonucu elde edilmiştir. [8]

SUN ve diğ., dişli çarkların gerilme analizinde kullanılan diğeri bir sayısal metod olan sınır eleman metodu ile model tesis etmişlerdir. Sonlu elemanlar metodu ile karşılaştırma yapmışlardır. Sınır eleman metodu ile daha az sayıda elemanla analiz yapılabileceğini vurgulamışlardır. [9]

MORIAWAKI ve diğ., Global Lokal Sonlu Elemanlar Metodunu dişli çarklara tatbik etmişlerdir. Bu metod enerji prensibini esas alarak sonlu elemanlar metodu ile klasik analitik metodları birleştiren bir sayısal tekniktir. Bu metodda, klasik analitik çözümler dişdibi bölgesindeki gerilme yığılmasını yeterli hassasiyette hesaplamaktadır. Bu nedenle dişdibi bölgesinde geleneksel sonlu elemanlar metoduna nazaran modellemede eleman yoğunluğunun arttırılması gerekmediği belirtilmiştir. [10]

BIBEL ve diğ., hafif konstrüksiyonun esas olduğu havacılıkta yüksek glerin naklinde kullanılan ince kalınlıkta dişli çemberleri incelemişlerdir. Bu tip dişlilerdeki dişdibi bölgesindeki gerilmeler çember deformasyonuna bağlı olarak katı dişlilerdekinden farklıdır. Çember kalınlığı bu dişlilerde belirgin bir dizayn parametresidir. Bu parametrenin etkisini inceleme gayesi ile bir çember dişli sektörü üzerinde sonlu elemanlar metodu ile gerilme analizi yapılmıştır. [11]

1.3 Çalışmanın Kapsamı

Çalışmanın ikinci bölümünde dişli geometrisi konusu ele alınmıştır. Diş geometrisi ve geometriyi oluşturan eğriler hakkında bilgi verilmiştir. Düz dişli çark profili, diş yan yüzeylerinde evolvent eğrilerden, dişbaşı ve dişdibinde daire yaylarından, diş kökünde ise trokoid eğrisinden meydana gelir. BUCKINGHAM mehz teşkil eden çalışmasında trokoid formda dişdibi eğrisini tayin eden analitik ifadeleri tesis etmiştir[12]. Tez çalışmasında bu ifade kullanılmıştır. Evolvent geometrisinden tayin edilen dişe tatbik edilen kuvvetin yeri ve tatbik açısını tayin eden ifadeler verilmiştir. EK-A' da trokoidal formda dişdibi eğrisini tayin eden ifadeler ele alınmıştır. [12]

Kompüter ortamında düz dişli çarkların modellenmesi konusunda literatürde mevcut çalışmalara, HEFENG ve diğerlerinin kremayer takımla imal edilmiş düz dişli çarklar modellenmesini ele alan çalışması ile TSAY ve diğerlerinin düz dişli çarklarda parametreye bağlı olarak ifade edilen diş profilleri için geliştirdikleri matematik modeli ele alan çalışması misal gösterilebilir [13,14].

Üçüncü bölümde sonlu elemanlar metodunun temel özellikleri verilmiştir. Sayısal metodların kullanılma nedenleri verilmiştir. Sonlu elemanlar metodunun sonlu farklar metoduna olan üstünlükleri belirtilmiştir. Analizde kullanılan sonlu eleman tipinin matematiksel ifadeleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ANSYS genel amaçlı sonlu elemanlar analiz programının özelliklerinden bahsedilmiştir. Ele alınan bir problemin geometrisine bağlı olarak nasıl modelleme yapılabileceği belirtilmiştir. Ele alınan problemin modellenmesi ve çözülmesi için ANSYS programlama lisansı ile yazılmış komutların sıralandığı çalışma dosyası ve parametrik dizayn lisansı hakkında bilgi verilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümde diş geometrisinin nasıl elde edileceği adım adım belirtilmiştir. Analiz için geliştirilen düz dişli çark sonlu eleman modelinin tesisinde göz önüne alınan hususlar ve yapılan kabuller belirtilmiştir. Literatürdeki genel eğilime uyularak tek bir diştten oluşan model incelenmektedir. Diş kuvvetide tekil yük olarak modele tatbik edilmektedir[2-4,6-11]. Geliştirilen diş profili hasıl etme programı hakkında bilgi verilmiştir. Bu program BASIC programlama lisansı ile yazılmıştır. Profili hasıl eden programda evolvent geometrisini ve trokoidal formda diş dibi eğrisini veren analitik ifadeleri gayeye uygun çevrimlerle kullanılmakta ve elde edilen koordinatlar çıkış dosyasına uygun formatta yazılmaktadır. ANSYS programında, profili tayin eden noktaların değerlendirilmesi ile katı model oluşturulmuştur. Bu katı model üzerinde eleman sayısı ve yoğunluğu tayin edilerek sonlu elemanlar modeli elde edilmiştir. Bu şekilde sonlu elemanlar modelini tesis eden, sınır şartlarını tatbik eden ve çözümleyen komutların sıralandığı bir çalışma dosyası geliştirilmiştir. Esneklik sağlamak gayesi ile bazı büyüklükler parametrik olarak tayin edilmiştir. Bu şekilde çeşitli büyüklüklerin sonuçlara olan etkisini kolaylıkla incelemeyi sağlayan parametrik dizayn edilmiş model elde edilmiştir.

ANSYS Parametrik Dizayn Lisansı kullanılarak bir makro program geliştirilmiştir. Bu program sonlu eleman modelinin konfigürasyonuna bağlı olmaksızın, diş profilinde seçilen düğüm noktalarına otomatik olarak diş kuvveti tatbik etmektedir.

Araştırmacılar geliştirecekleri programlarında evolvent geometrisinden tayin edilen ifadeleri uygun kullanmak şartıyla bu makro programı kullanabilirler.

Çalışmanın altıncı bölümünde, dış dibinde meydana gelen gerilmeler incelenmektedir. Sonlu elemanlar metodu ile gerilme analizinde yapının herhangi bir kesitinde gerilme ve şekil değişimi kolaylıkla incelenmektedir. Dışlı çark modeline yük tatbik edildiğinde kırıktan farklı olarak kuvvetin açılı tatbiki sebebiyle kritik kesitte gerilmenin değişimi dış merkez doğrusuna göre simetrik değildir. Kavramada dış etki eden dış kuvveti teğetsel ve radyal bileşenlerine ayrılabilir. Radyal bileşen dış kesitinde uniform basma gerilmesi oluşturmaktadır. Bu basma gerilmesi nedeniyle basma tarafında gerilmelerin mutlak değeri daha büyüktür. Tecrübeler göstermiştir ki, hasara yol açan çatlaklar çekme tarafında meydana çıkmakta ve basma tarafına doğru ilerlemektedir. Bu nedenle çekme tarafındaki gerilmeler hesaplamalarda göz önüne alınır.

Tesis edilen sonlu elemanlar modeli muhtelif sınır şartları altında incelenmiştir. Literatürdeki mevcut ağ konfigürasyonları ve özellikleri belirtilmiştir. Modelin analizi neticesinde kritik kesit boyunca gerilmelerin değişimini gösteren grafikler elde edilmiştir. Azami gerilmeler beklenildiği gibi dış dibi bölgesinde çıkmaktadır. Hesaplanan gerilmeler ve elde edilen grafikler diğer araştırmacıların neticeleri ile karşılaştırılmıştır.

Sonlu elemanlar metodu, modellemede sağladığı esnekliklerle gerilme analizinde yaygın olarak kullanılan metoddur. Geliştirilen yazılımlar metodun mühendislik problemlerine tatbikini kolaylaştırmıştır. Gerçek sistemin özelliklerine uygun modelleme yapıldığında metod hızlı ve güvenilir bir yardımcıdır. Dışlı çark gibi kesit değişikliği nedeniyle gerilme yığılmasının olduğu problemler uygun modelleme ile tatminkar derecede çözümlenmektedir.

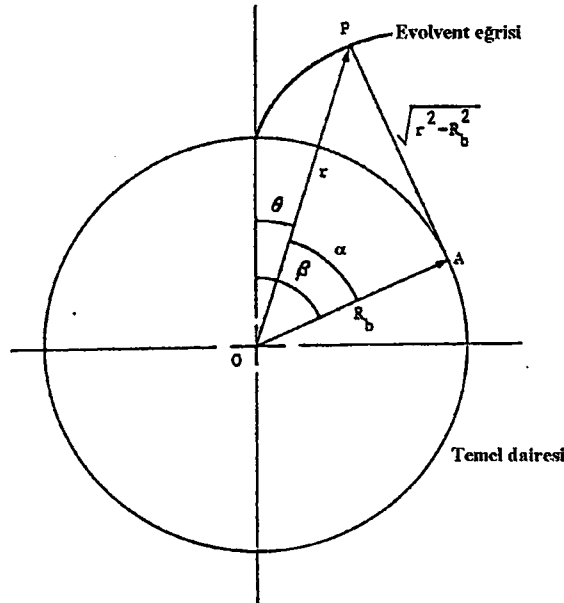
2. DİŞLİ ÇARK GEOMETRİSİ

2.1 Giriş

Çalışmanın bu bölümünde evolvent profilli düz dişli çarkın geometrisi ele alınmaktadır. Düz dişli çark profili, diş yan yüzeylerinde evolvent eğrilerden, dişbaşı ve dişdibinde dairesel yaylardan, diş kökünde ise trokoid eğrisinden meydana gelir. Evolvent geometrisinden dişe etki eden diş kuvvetinin yeri ve doğrultusunda tayin edilmektedir. Diş profilini belirleyen kesici takıma ait özellikler verilmiştir.

2.2 Evolvent Geometrisi

Diş profili olarak evolvent eğrisi kullanılmaktadır. Verilmiş bir temel dairesinin evolventi, Şekil 2.1’ de görüldüğü gibi sabit bir daireden sarımı açılan gergin bir telin tesbit edilen bir noktasının çizdiği eğridir. Diğer bir anlatımla evolvent bir doğrunun (ana doğru) sabit bir daire (temel dairesi) üzerinde kaymadan yuvarlanması esnasında bir noktasının geometrik yeridir.



Şekil 2.1 Evolvent geometrisi

Evolvent ile ilgili ifadeler aşağıda verilmiştir.

R_b : Temel dairesi yarıçapı

r : Evolvent üzerindeki bir noktanın merkeze olan uzaklığı

β : Sarım açısı

α : r yarıçapında kavrama açısı

Şekil 2.1 yardımıyla evolvent profili ile ilgili ifadeler elde edilir. Burada θ açısı,

$$\theta = \beta - \alpha = \beta - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} \quad (2.1)$$

Profili oluşturan doğrunun uzunluğu $\sqrt{r^2 - R_b^2}$ temel dairesinin β açısının gördüğü yayında uzunluğudur ve geometriden ,

$$\beta = \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir. (2.2) ifadesine β açısının (2.1) ifadesindeki değeri yazıldığında,

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} \quad (2.3)$$

bulunur. Bu eşitlik aynı zamanda

$$\theta = e\alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (2.4)$$

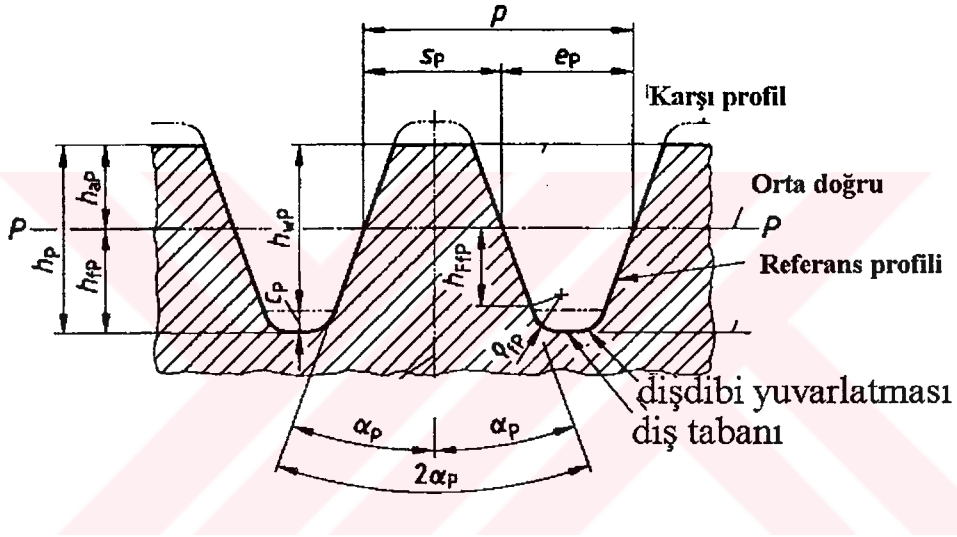
olarak da ifade edilir.

Şekil 2.1'den tanzim edilen diğer bir denklemde,

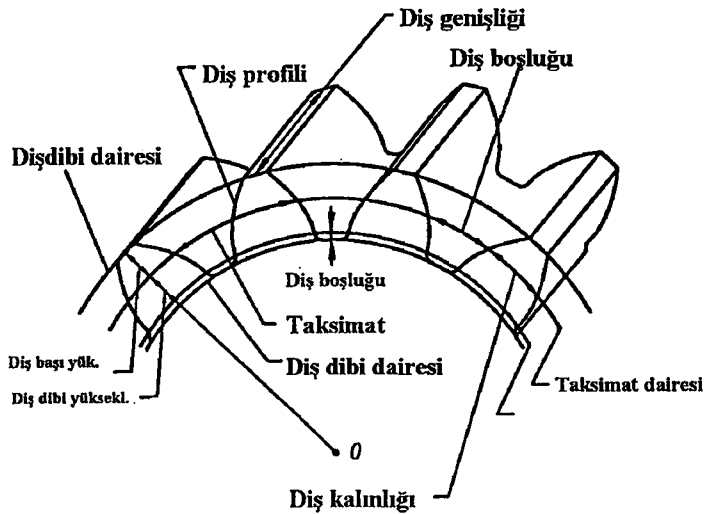
$$r = \frac{R_b}{\cos \alpha} \quad (2.5)$$

2.3 Düz Dişli Çark Referans Profili

Düz dişli çark geometrisini belirleyen temel büyüklükler referans profili denilen, esasen sonsuz diş sayısındaki dişlinin (kremayer dişli) standartlaştırılmış büyüklükleridir. Referans kremayerine ait büyüklükler ISO53 normunda belirlenmiştir[15]. Metrik sistemi kullanan ülkeler kendi standartlarını bu standartı esas alarak geliştirmişlerdir [16]. Genel amaçlı uygulamalarda kullanılan dişlilerin referans profili DIN 867 normunda belirtilmiştir. Şekil 2.2’de DIN 867 normuna göre standart diş profili görülmektedir. [17]



Şekil 2.2 DIN 867 normuna göre referans profili



Şekil 2.3 Düz dişli çark geometrisi

$$\text{Taksimat: } p = m \cdot \pi \quad (2.6)$$

$$\text{Taksimat dairesindeki diş kalınlığı : } s = \frac{p}{2} \quad (2.7)$$

$$\text{Taksimat Dairesi Çapı : } d_o = m \cdot z \quad (2.8)$$

$$\text{Temel Dairesi Çapı : } d_b = d_o \cdot \cos \alpha_p \quad (2.9)$$

$$\text{Diş Başı Yüksekliği : } h_a = 1 \cdot m \quad (2.10)$$

$$\text{Diş Dibi Derinliği : } h_f = 1.25 \cdot m \quad (2.11)$$

$$\text{Diş Başı Dairesi Çapı : } d_a = d_o + 2 \cdot h_a \quad (2.12)$$

$$\text{Diş Dibi Dairesi Çapı : } d_f = d_o - 2 \cdot h_f \quad (2.13)$$

$$\text{Eksenler Arası Mesafe: } a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \quad (2.14)$$

$$\text{Kavrama Oranı : } \varepsilon = \frac{\sqrt{d_{a1}^2 + d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 + d_{b2}^2} - 2 \cdot a \cdot \sin \alpha_p}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot \cos \alpha_p} \quad (2.15)$$

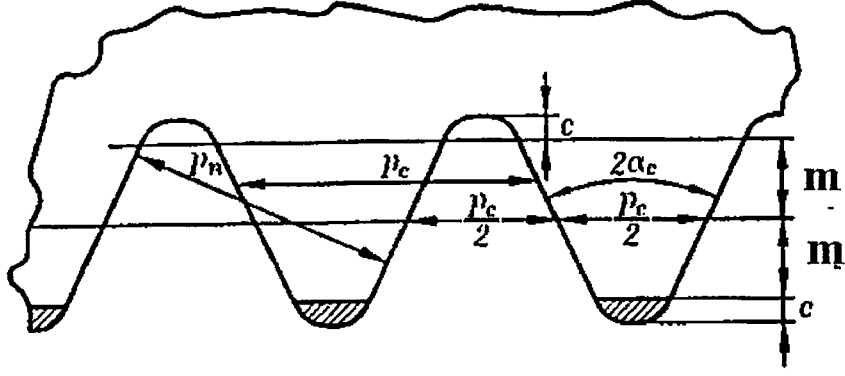
2.4 Takım Profili

Dişli çark imalat metodlarından biri olan yuvarlanma metodunda (generating process) kullanılan takımlar kremayer şeklinde takım, helisel freze ve pinyon şeklinde takım (Fellows) dır. Bu çalışmada kremayer şeklinde takım ile profil oluşturma ele alınmıştır.

Eksenel kesiti kremayer şeklinde takıma özdeş olan helisel frezede neticede aynı profili oluşturmaktadır. [12]

Kremayer şeklindeki takım (rack-cutter) dizayn parametreleri imalatla kolaylık açısından standartlaştırılmıştır. Takım geometrisi referans kremayerine (kremayer dişli) göre belirlenir.

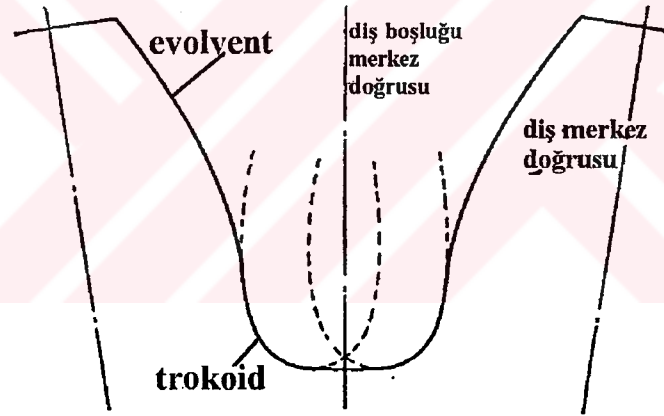
Kremayer dişli düz dişli çarkla eş çalışabilen dişlidir. Kremayer şeklindeki takım ise düz dişli çarkı şekillendirmektedir. Şekil 2.4’de ikisi arasındaki fark görülmektedir. Gölge kısmın ilavesi ile kremayer şeklindeki takım elde edilmektedir. [18]



Şekil 2.4 Kesici takımın geometrisi

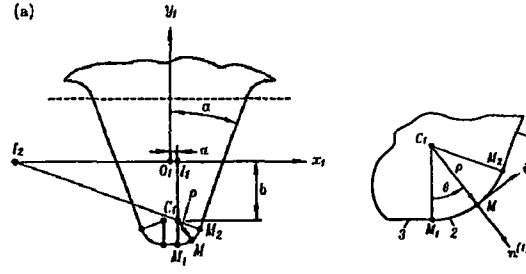
2.5 Dişli Çarkın Kök Eğrisi

Dişli çarkın kök eğrisi diş profilinin evolvent kısmı ile diş dibi dairesini birleştiren eğridir. Şekilde 2.5’de kök eğrisi görülmektedir



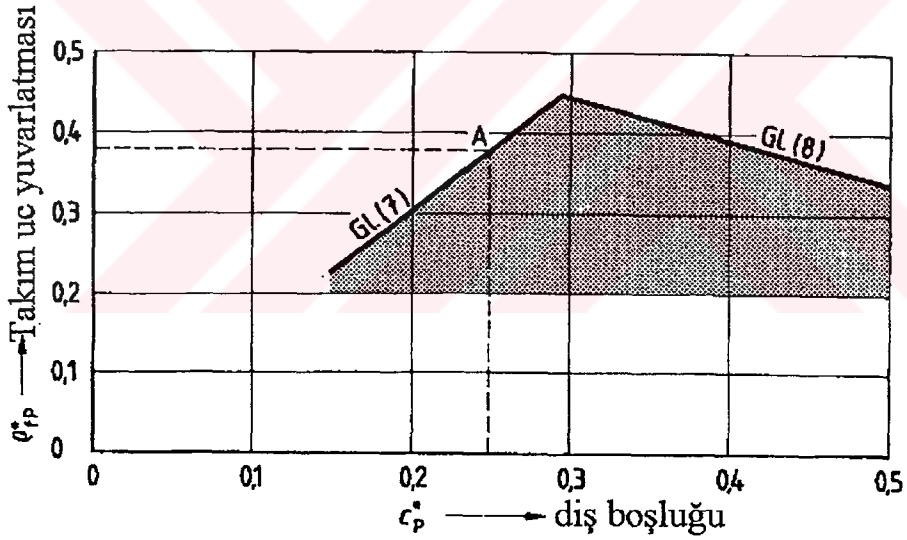
Şekil 2.5 Trokoid formda diş kök eğrisi

Şekilde 2.6’da evolvent profilli düz dişli çarkların imalatında kullanılan kremayer şeklindeki takımın dişi görülmektedir. Takım profilinin 1. kısmı dişli çarkın evolvent profilini hasıl etmektedir. Takım ucundaki doğru kısım dişli çarkın diş dibi dairesini, ve p yarıçaplı bir yay olan yuvarlatılmış kısım dişli çarkın kök eğrisini oluşturmaktadır. Kök eğrisi trokoid formundadır. Bu eğriyi tayin eden analitik ifadeler EK A’da verilmiştir.[12]



Şekil 2.6 Takım diş profili ve uc detayı

DIN 867 normunda diş boşluğuna bağlı olarak takım uc yuvarlatması değerleri verilmiştir. Yarı profil açısı 20° için diş boşluğuna bağlı olarak takım uc yuvarlatması değeri Şekil 2.7'deki grafikten okunabilir. Misal olarak diş boşluğu katsayısı 0,25 için takım ucu yuvarlatması katsayısı 0,38 (azami) dir.



Şekil 2.7 Diş boşluğuna bağlı olarak takım uç yuvarlatmasının değişimi

2.6 Yük Tatbik Doğrultusu

Hareketin herhangi bir safhasında, kavramadaki dişlerin naklettiği yükün yeri ve doğrultusu diş profilinin evolvent geometrisi ile elde edilir. Şekil 2.8'de dişe tatbik edilen yükün doğrultusu görülmektedir.

Öncelikle yapılması gereken herhangi bir yarıçaptaki diş kalınlığını veren ifadeyi tanzim etmektir. Bunun için taksimat dairesindeki diş kalınlığını, taksimat dairesi yarıçapını ve kavrama açısını belirlemek kafi'dir. Evolvent geometrisinden tayin edilen yük tatbik doğrultusu Şekil 2.9'da görülmektedir.

İmalat taksimat dairesindeki diş karakteristikleri bilindiğine göre herhangi bir yarıçaptaki diş kalınlığı aşağıdaki ifade ile tayin edilir.

s_i : herhangi bir yarıçaptaki diş kalınlığı

r : taksimat dairesi yarıçapı

r_i : herhangi bir yarıçap

φ : taksimat dairesinde kavrama açısı (standart 20°)

φ_i : herhangi bir yarıçapta kavrama açısı

ev φ_i : herhangi bir φ açısının evolventi

$$\varphi_i = \cos^{-1}\left(\frac{r_b}{r_i}\right) \quad (2.44)$$

$$s_i = 2 \cdot r_i \left[\left(\frac{s}{2 \cdot r} \right) + \text{ev}\varphi - \text{ev}\varphi_i \right] \quad (2.45)$$

Evolvent profil üzerindeki herhangi bir noktada merkezden çizilen doğru ile diş merkezinden geçen doğru arasındaki açı,

$$\psi_i = \frac{s_i}{2 \cdot r_i} \quad (2.46)$$

Kuvvetin tatbik yeri ile x eksenindeki açı,

$$\beta_i = \varphi_i - \psi_i \quad (2.47)$$

olarak bulunur.

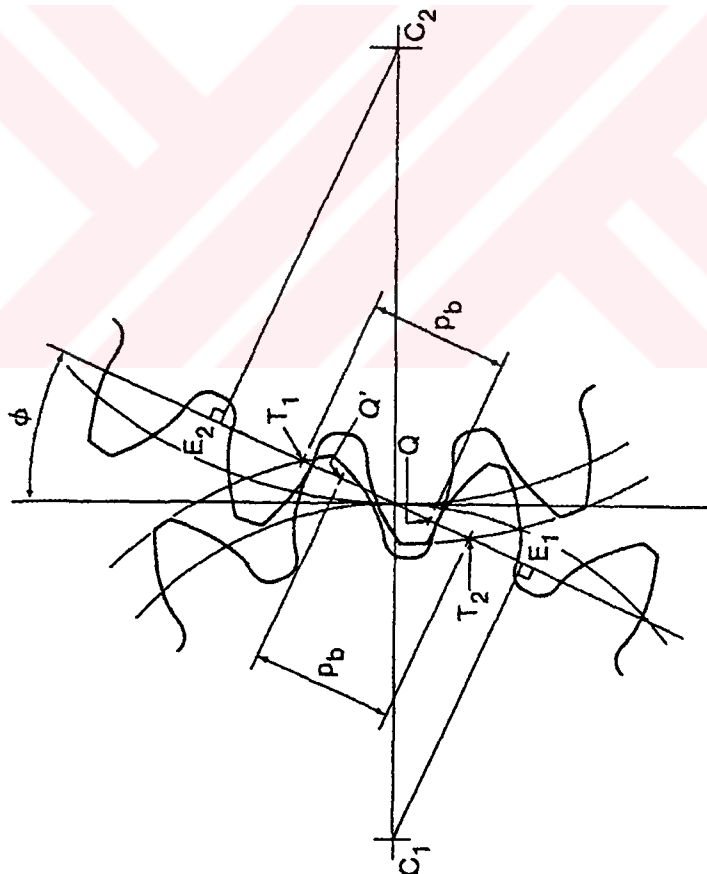
Evolvent profil üzerindeki herhangi bir noktanın Kartezyen Koordinatları ise aşağıdaki ifadeler ile tayin edilmektedir.

$$Y_i = r_i \sin \psi_i \quad (2.48)$$

$$X_i = r_i \cos \psi_i \quad (2.49)$$

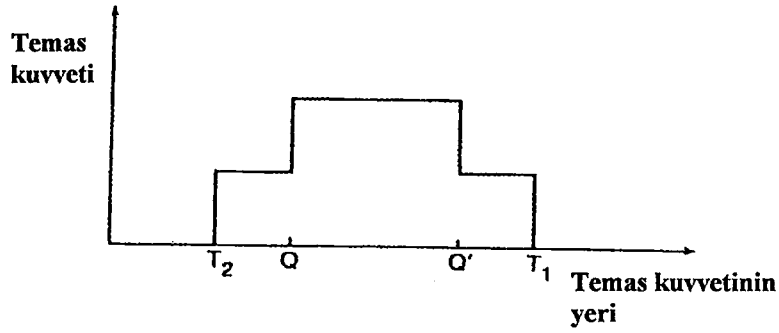
2.7 İç ve Dış Tekil Kavrama Noktaları

Kavrama diagramı şekil 2.10'da gösterilmiştir. Kavramanın başlangıç ve bitişi T1 ve T2 noktalarındadır. T2 ve Q noktaları arasında temas noktası var ise ikinci temas noktası Q' ile T1 arasındadır. İki diş çiftinin kavrama olduğu durum söz konusudur. Q ile Q' arasında temas noktası var ise bu durumda bir dişli çifti temastadır.



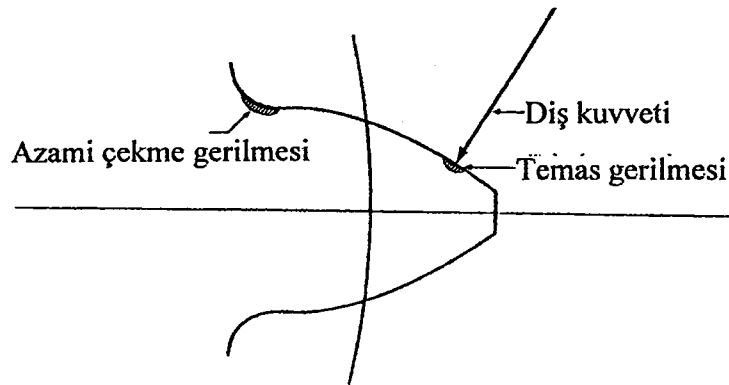
Şekil 2.10 Kavrama diyagramı

Gücün düzgün nakli halinde toplam temas kuvveti sabittir. Şekil 2.11’de temas kuvvetinin kavrama kıtası boyunca değişimi görülmektedir. Kavramanın temas noktasının Q ve Q’ arasında olduğu kısmı tek diş teması olarak adlandırılır. Bu halde eş çalışan dişlilerin sadece belli kısımları birbirleri ile temas eder. Bu bölgenin sınırları dış ve iç tekil kavrama noktaları olarak adlandırılır.



Şekil 2.11 Temas kuvvetinin değişimi

Düz dişli çarkta (dişler yük paylaşımını sağlayacak hassasiyette imal edildikleri takdirde) azami diş dibi gerilmeleri yükün en üst noktasında gerçekleşir. Bu durumda temas dış tekil kavrama noktasındadır. Dişli çarklarda gerilmeler diş dibi bölgesinde ve temas noktasında incelenmektedir. Azami gerilmelerin bölgeleri Şekil 2.12’de gösterilmiştir. Sabit bir diş kuvveti için diş dibi gerilmesi yük diş ucuna kaydıkça artar. Maksimum değere yükün dış tekil kavrama noktasında erişilir.



Şekil 2.12 Azami gerilmelerin bölgeleri

Temas noktasındaki gerilmelerde diş profili boyunca değişmektedir. Bu gerilme tek diş temasının en alt noktasında azami değerine ulaşır. Dış ve iç tekil kavrama noktalarının geometrik yerini tayin eden ifadeler Şekil 2.10'dan çıkarılabilir. Kavramada temas noktası kavrama kıtası boyunca değişirken pinyonda (1 numaralı dişli) diş ucuna ilerler, çarkta ise dişdibine doğru geriler. Pinyonda Q' noktası tek diş temasının en üst noktasıdır. Bu noktanın merkeze olan uzaklığı ise C1Q dur. Geometrik yeri belirleyen ifade aşağıda verilmiştir.

$$R_{HSC1}^2 = R_{b1}^2 + \left[(R_{b1} + R_{b2}) \tan \phi - \sqrt{(R_{T2}^2 - R_{b2}^2)} + p_b \right]^2 \quad (2.50)$$

Q noktasında ise ise tek diş temasının en alt durumu (iç tekil kavrama noktası) söz konusudur. Bu noktanın geometrik yeride aşağıda verilmiştir.

$$R_{LSC1}^2 = R_{b1}^2 + \left[\sqrt{(R_{T1}^2 - R_{b1}^2)} - p_b \right]^2 \quad (2.51)$$

Bu ifadelerde pinyona ait değerlere çarkın değerleri konulduğunda çark için tek diş temasının üst ve alt noktalarının geometrik yeri tayin edilebilir.

3. SONLU ELEMENLAR METODU

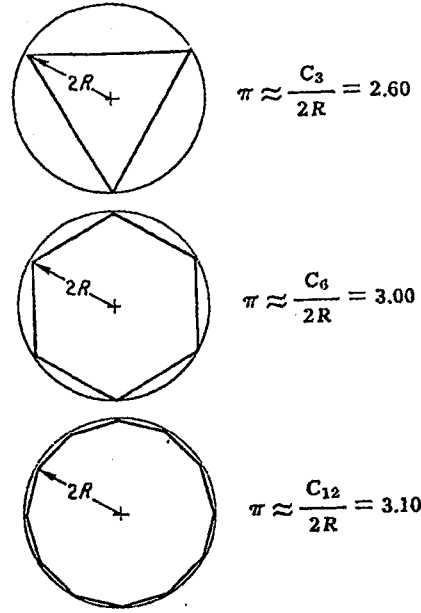
3.1 Giriş

Mühendisler fiziğin yasaları, malzeme ve doğal enerji kaynaklarını kullanarak insanlık yararına mamul ve hizmet üretmektedirler. Bu mamul ve hizmetler günlük yaşamın vazgeçilmez parçalarıdır. Güç iletimi, iletişim, komünikasyon, veri değerlendirme, nakliye ve imalat mühendisliğinin sağladığı mamul ve hizmetlerdir.

Mühendisler bir problemi (fiziksel sistem) ele aldıklarında matematiksel modelleme ile işe başlarlar. Problemdeki fiziksel büyüklükler arasındaki bağ matematiksel ifadelerle dönüştürülür. Genelde bu matematiksel ifadeler cebrik, diferansiyel veya integral formdadır. Bu model basit ise analitik çözüm elde edilir. Pratikte karşılaşılan problemlerin matematik modelleri her zaman analitik yöntemlerle kolayca çözümlenecek tarzda olmaz. Bunun nedeni problemin geometrisinin ve tatbik edilen sınır şartlarının basit olmamasıdır. Bu durumda problemi karakterize eden denklemlere tatminkar netice verebilecek sayısal metodlar ile yaklaşılır. Bu şekilde problemi karakterize eden diferansiyel formdaki denklemler lineer denklemlere dönüştürülür. Bunların çözümü de sayısal bilgisayarlar ile hızlı bir şekilde yapılır.

3.2 Sayısal Metodlar

Sayısal metodların özelliği problemi özellikleri bilinen sonlu sayıda küçük bölgelere ayırmaktır. Bu bölgelerin herbirinde incelenen büyüklük arasında bağı ifade eden denklemler tesis edilir. Problemi bu küçük bölgelere ayırmak ve bu parçaları birbirine bağlayacak ifadeleri tesis ederek, çözüm bölgesindeki gerilme ve yerdeğiştirme (gerilme analizi probleminde) gibi değişkenlerin değerinin tatminkar derecede hesaplanması mümkündür. Bu bölgeler ne kadar küçük olursa sayısal çözüm o derece gerçek çözüme yaklaşır[19]. Şekil 3.1’de eleman sayısının artmasının çözüme etkisi gösterilmiştir.[20]



Şekil 3.1 Eleman sayısının artmasının çözümün hassasiyetine etkisi

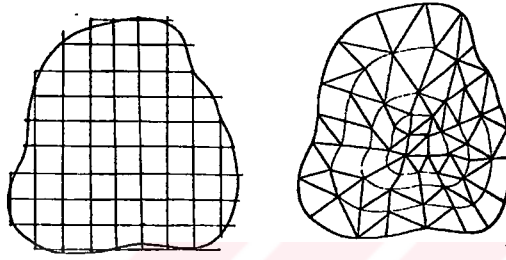
Sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır eleman metodları bilinen sayısal metodlardır. Komputer teknolojisinde gerek yazılım ve gerekse donanım bakımından gelişmelerle bu metodlar etkin olarak kullanılmaktadır. Yazılımcı firmalar bu metodları esas alan paket programlar geliştirmişlerdir. Bu programlar mühendisliğin farklı disiplinlerindeki analizler için kullanılabilmektedir. ANSYS, MARC, NASTRAN ve ABAQUS modelleme, analiz ve sonuçların grafik değerlendirilmesi bakımından tercih edilen programlardır. [21]

Sonlu farklar metodunda, diferansiyel denklemlere sayısal yaklaşım fark denklemleri ile sağlanır. Bu prosedürde, koordinat eksenlerine paralel eşit (üniform) arttırmalar ile düğüm noktaları oluşturulur. Herbir artım için fark denklemleri düzenlenir. Düğüm noktaları birbirlerine eşit mesafede yerleştirilir. Eleman yoktur ve düğüm noktaları topluluğu arasındaki boşluklara herhangi bir özellik atanmaz. Bu özellikler diferansiyel denklemin içinde tanımlanmıştır. Noktaların koordinat eksenlerine paralel olması ve sadece eşit aralıklarla artırımların yapılması karmaşık geometrili problemlerin modellenmesinde sorun çıkarmaktadır. [22]

Sonlu elemanlar metodunda da problem geometrisi küçük bölgelere ayrılmaktadır. Fakat bu bölgelerin köşe noktalarının (düğüm noktaları) koordinat eksenlerine paralel olma zorunluluğu yoktur. Eleman şekilleri (problemin 1,2 veya 3 boyutlu olmasına göre) doğrular, üçgenler, dikdörtgenler, küp v.b şekillerde olabilir. Karmaşık

geometrilik problemler kolaylıkla modellenmektedir. Problem geometrisinde incelenen büyüklüklerin hızlı değıştiğı bölgelerde (çentikler, dış dibindeki gerilmeler v.d) eleman yoğunluğu kolaylıkla artırılabilir. Bu şekilde gerçek fiziksel sisteme tatminkar yaklaşım sağlanır.

Şekil 3.2’de problem geometrisinin sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metodu ile modellenmesi görölmektedir. Karmaşık geometri sonlu elemanlar metodu ile tatminkar şekilde modellenmiştir. Sonlu elemanlar metodunda çözüm bölgesinde farklı geometrik şekilli elemanlar olabilir.



Şekil 3.2 Problem geometrisinin sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodu ile gösterimi

Sınır eleman (Sınır eleman integrasyonu) metodunda problemin diferansiyel denklemleri sınırlarda integral ifadelere dönüştürölür. Bu ifadeler küçük parçalara ayrılmış sınır boyunca sayısal olarak integre edilir. Neticede diğer metodlarda da olduğu gibi lineer denklem seti elde edilir. [19]

3.3 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar metodu mühendislik problemlerine yaklaşık çözüm elde etmek için kullanılan bir sayısal analiz tekniğidir. Metod 50’li yıllarda Uçak-Uzay endüstrisinde karmaşık yapıların gerilme analizi için geliştirilmiştir. Metodun esasları üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda kullanım sahası genişlemiştir. Günümüzde biomekanikten nükleer teknolojiye farklı disiplinlerdeki problemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

Kompüter teknolojisindeki gelişmeler metodun yaygın olarak kullanılmasını sağlamıştır. Geliştirilen paket programlarla veri hazırlanması, çözümleme ve sonuçların değerlendirilmesi kolaylıkla gerçekleştirilmektedir.

3.3.1 Metodun Adımları

Ele alınan problemin sonlu eleman metodu ile analizinde takip edilen adımlar aşağıdadır.

3.3.1.1. Problem Geometrisinin Elemanlara Ayrılması

İlk adım problem sonlu sayıda basit geometrik şekilli bölgelere (sonlu elemanlar) ayırmaktır. Sonlu eleman, uzaydaki konumları global eksen takımına bağlı koordinatlarca verilen, düğüm noktalarına sahiptir. Herbir sonlu elemanın geometrik şekli interpolasyon fonksiyonlarıyla düğüm noktalarının koordinatları cinsinden tanımlanır.

Sayısal modelleme problemin, sınırlarının, sınır şartlarının ve malzeme özelliklerinin matematiksel olarak ifade edilmesinin gerektirmektedir. Analiz edilecek bir problemin karmaşık geometrisinin tam tanımı, yüzeyindeki sonsuz sayıda noktanın konumunun belirlenmesiyle sağlanır. Bu da sonsuz sayıda denklemin çözülmesini gerektirir. Bu nedenle geometri yaklaşık olarak makul sayıda elemanla ele alınır. Elemanların geometrik şekli düğüm noktalarının koordinatları cinsinden interpolasyon fonksiyonu ile tayin edilmektedir. [23]

3.3.1.2 Alan Değişkenin Tayini

Alan değişkeni yapıdaki incelen birincil değişkendir. Gerilme analiz probleminde bu yerdeğiştirmedir. Bundan sonra yapılacak kabul, yer değiştirmenin eleman boyunca değişiminin basit bir fonksiyon olduğudur. İnterpolasyon fonksiyonu yerdeğiştirmenin herbir elemanda değişimini düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden ifade edilmesini sağlar. Bu fonksiyonlar elemanların geometrik şeklini tayin eden interpolasyon fonksiyonları ile aynı olabilir. Bu durumda eleman izoparametrik olarak adlandırılır.

3.3.1.3 Elemanların Davranış Matrislerinin Hesaplanması

Herbir eleman için elemanın fiziksel davranışını tanımlayan katsayı matrisi tanımlanır. Katı cisim mekaniğinden rijitlik matrisi hesaplanır. Bu hesap için kullanılan metodların çoğu toplam potansiyel enerjinin minimize edilmesine dayanır.

3.3.1.4 Eleman Matrislerinin Birleştirilmesi

Eleman ağı ile temsil edilen sistemin özelliklerini bulmak için eleman özelliklerinin birleştirilmesi gerekmektedir. Diğer bir anlatımla, her bir elemanın özelliklerini ifade eden matris denklemleri birleştirilerek tüm çözüm bölgesinin özelliklerini ifade eden matris denklemler elde edilir. Sistemin matris denklemleri tek bir elemanın matris denklemleri ile aynı formda olmasına karşın tüm düğüm noktalarını ihtiva ettiğinden daha fazla sayıda terime sahiptir.

Elemanların birbirlerine bağlandığı yerde (düğüm noktalarında) alan değişkeninin değeri bu noktayı paylaşan her elemanda aynıdır. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi genel olarak sayısal komputerler ile yapılır.

3.3.1.5 Sistem Denklemlerinin Çözümü

Birleştirme prosesi neticesinde alan değişkeninin bilinmeyen düğüm noktası değerlerini elde etmek için çözülmesi gereken simültane denklem seti elde edilir. Eğer denklemler lineer ise standart çözüm teknikleri kullanılabilir.

Denklemlerin çözümü neticesinde birincil bilinmeyenlerin (alan değişkeni) değerleri bulunur. Elastik gerilme-deformasyon analizinde birincil bilinmeyen yer değiştirmelerdir. Birim şekil değiştirmeler elastisite teorisindeki bağıntıları kullanarak elde edilir. Gerilmeler de Hook Kanunu yardımıyla birim şekil değiştirmelerden hesaplanır.

Düğüm noktası değerleri ve interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak, eleman içinde birim şekil değiştirme ve gerilmeler hesaplanabilir.

3.3.2 Eleman Rijitlik Matrisi

Sonlu elemanlar metodunda, incelenen yapı birbirlerine düğüm noktalarından bağlanan elemanlar topluluğu (eleman ağı) ile modellenir. Çözüm, temel gerilme-birim şekil değiştirme (strain) ifadelerini ve komşu elemanlardan düğüm noktaları üzerinden aktarılan kuvvetler sistemini kullanarak her bir elemandaki çökmelerin hesaplanmasıyla elde edilir. Birim şekil değiştirme, düğüm noktalarının çökmelerinden elde edilir. Gerilmeler birim şekil değiştirmelerinden elde edilir. Her düğüm

noktasındaki kuvvet diğer düğüm noktalarındaki kuvvetlere bağlıdır. Elemanlar yay sistemine benzer davranır ve tüm kuvvetler dengede olana kadar şekil değiştirirler. Bu da aynı zamanda çözülmesi gereken lineer denklemler sistemini ifade eder.

Rijitlik matrisi tatbik edilen kuvvetler nedeniyle düğüm noktalarının ne kadar yer değiştirdiğini tanımlayan bir yay sabiti olarak düşünebilir. Matris formunda aşağıda ifade edilmiştir.

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (3.1)$$

Burada $\{f\}$ elemana etki eden kuvvetler vektörü, $[k]$ elemanın rijitlik matrisi, ve $\{u\}$ elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirme vektörüdür. Rijitlik matrisi düğüm noktalarının koordinatları ve malzemenin elastik sabitlerinden oluşur.

Sistemi oluşturan bütün elemanlar için aşağıdaki matris ifade elde edilir.

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (3.2)$$

$\{F\}$ = Herbir düğüm noktasındaki dış kuvvetler $\{F\} = \sum_e \{f\}$

$[K]$ = Tüm elemanlardaki rijitlik matrislerinin birleştirilmesi ile oluşan sistemin rijitlik matrisi $[K] = \sum_e [k]$

$\{U\}$ = Yer değiştirme vektörü

Bu ifadede bilinmeyenler, yer değiştirmelerdir. Uygun matris işleminin tatbiki ile yer değiştirme vektörü eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Gauss eliminasyon yöntemi ile herbir düğüm noktasındaki yer değiştirmeler hesaplanır.

Yer değiştirmeler vektörü, $[B]$ gradyen matrisi ve $[D]$ elastik sabitler matrisi ile çarpıldığında herbir düğüm noktasındaki gerilmeler hesaplanır.

$$[U] = [K]^{-1}\{F\} \quad (3.3)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\}^e \quad (3.4)$$

3.3.3 Rijitlik Matrisin Türetilmesi

Eleman rijitlik matrisini elde etmek için virtüel işler prensipinden faydalanılabilir. Bu prensibe göre, tatbik edilen kuvvetler ile dengede olan bir yapının virtüel yer değiştirmesi halinde dış kuvvetlerin virtüel işi yapıdaki iç gerilmelerin virtüel şekil değiştirme enerjisine eşittir.

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (3.5)$$

δU_e : iç gerilmelerin virtüel şekil değiştirme enerjisi

δW_e : dış kuvvetlerin virtüel işi

Yapıdaki gerilme ve birim şekil değiştirme dağılımlarını hesaplamak için öncelikle birim şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı tesis etmek gerekmektedir. Eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi o noktanın koordinatlarının bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon düğüm noktalarının koordinatları cinsinden ifade edilebilir. Bu polinom ifadesi ile, düğüm noktalarındaki değerlerden eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi tayin edilebilmektedir. Bu fonksiyon interpolasyon fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (3.6)$$

$\{u\}$ yer değiştirme bileşenleri $u(x,y)$ ve $v(x,y)$

$[N]$ interpolasyon fonksiyonu

$\{u\}^e$ düğüm noktasındaki yer değiştirme bileşenleri

Birim şekil değiştirme yer değiştirme bağıntısı bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (3.7)$$

$[B]$ Gradyen matrisi

$\{\epsilon\}$ birim şekil değıştirme sütun matrisi

$[\partial]$ diferansiyel operatör matrisi

Gradyen matrisi birim şekil değıştirme bileşenleri ile düğüm noktası yer değıştirme bileşenlerini birbirine bağlamaktadır.

Gerilme matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir .

$$\{\sigma\} = [E][B]\{u\}^e \quad (3.8)$$

Virtüel düğüm noktası yer değıştirmeleri $\{\delta u^e\}$ için virtüel birim şekil değıştirme enerjisi,

$$\delta U_e = \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.9)$$

dir. Dış kuvvetlerin virtüel işi,

$$\delta W_e = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (3.10)$$

Virtüel işler prensipinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (3.11)$$

Gerilme ve birim şekil değıştirme ifadeleri yerine eşitlikleri konursa ,

$$\int_V \{\delta u^e\}^T [B]^T [E] [B] \{u^e\} dV = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (3.12)$$

Virtüel ve gerçek yer değıştirmeler hacimsel integralden bağımsız olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\{\delta u^e\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{u^e\} = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (3.13)$$

Eşitliğin her iki tarafından $\{\delta u^e\}^T$ silinirse düğüm noktalarındaki yer değıştirmeleri tatbik edilen kuvvetlere bağlayan aşağıdaki ifade elde edilir .

$$[k]\{u\}^e = \{f\} \quad (3.14)$$

Bu ifadede eleman rijitlik matrisi

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (3.15)$$

iki boyutlu problemde ,

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] t dA \quad (3.16)$$

t eleman kalınlığı , A ise eleman alanıdır.

Bu şekilde kabul edilen yer değiştirme fonksiyonunu esas alan herhangi bir elemanın genel matematik ifadesi elde edilmiş oldu. Eleman rijitlik matrisi interpolasyon fonksiyonlarının formuna ve gradyen matrisini oluşturan türevlerine bağlıdır.[24]

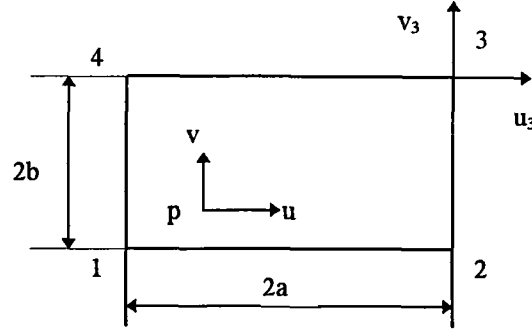
3.3.4 Yer Değiştirme Fonksiyonu

Eleman boyunca yer değiştirmeleri kartezyen koordinatların (düzlemsel problemde x ve y) sürekli fonksiyonları olarak ifade etmekle, sonlu elemanın fiziksel davranışının matematiksel ifadesini elde etmek için ilk adım atılmış olur.

Yer değiştirme fonksiyonları sonlu eleman içinde sürekli ve tüm elemanlarla uyumlu olacak şekilde seçilir. Polinom ifadeler sürekliliği sağlarlar.

Uyumluluk şartı, yük altında deformasyon neticesinde komşu elemanların birbiri üstüne binmemesi veya arada süreksizlik olmamasıdır. Bu nedenle seçilen polinom ifadesinin derecesine karşılık gelen tüm terimleri ihtiva etmesi istenir.

Polinom ifadeler üçgen ve dörtgen elemanların yer değiştirme fonksiyonları olarak kullanılırlar. Matematiksel olarak ele alınmaları kolaydır. Yakınsama için herhangi bir dereceden polinom kullanılabilir. Şekil 3.3’de lineer dikdörtgen eleman görülmektedir.



Şekil 3.3 Lineer dikdörtgen eleman

Düzlem eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi u fonksiyonu matris formda aşağıdaki şekilde yazılır .

$$\{u\} = [u(x, y) \quad v(x, y)]^T \quad (3.17)$$

Değişim bir polinomla ifade edilebilir. Aşağıdaki polinom ifade lineer dikdörtgen elemanın yer değişimi fonksiyonu ifade etmektedir.

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (3.18a)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (3.18b)$$

Yer değiştirmenin düğüm noktalarındaki değerleri ise aşağıdaki ifadelerden bulunur.

$$u(x_1, y_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 = u_1 \quad (3.19a)$$

$$u(x_2, y_2) = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 = u_2 \quad (3.19b)$$

$$u(x_3, y_3) = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 = u_3 \quad (3.19c)$$

$$u(x_4, y_4) = a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 = u_4 \quad (3.19d)$$

Benzer şekilde yer değiştirmenin v bileşeni için ifadeler yazılabilir.

Bundan sonra yapılacak iş yer değiştirme fonksiyonunu düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden ifade etmektir.

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 \quad (3.20a)$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 \quad (3.20b)$$

Neticede matris formda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (3.22)$$

N_i interpolasyon fonksiyonları aşağıdaki eşitlikte verilmiştir. N_i fonksiyonu i numaralı düğüm noktasında 1 diğerlerinde 0 değerindedir. Buna göre şekilden aşağıdaki ifadeler çıkarılabilir .

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) \quad (3.23a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \quad (3.23b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \quad (3.23c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) \quad (3.23d)$$

N_i fonksiyonları iki adet birinci dereceden polinom ifadenin çarpımı olduğundan bu eleman ikidoğrusal (bilinear) olarak adlandırılır. [25]

Birim şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki ifade,

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (3.24)$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Bu matrislerin elde edilmesinden sonra eleman rijitlik matrisi virtüel işler prensibinin tatbiki ile elde edilmektedir.

Birim şekil değiştirme bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 + a_4 y \\ a_6 + a_8 x \\ a_3 + a_4 x + a_6 + a_8 y \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Birim şekil değiştirmeler eleman içinde x ve y' ye bağlı olarak değişmektedir. Gerilme-birim şekil değiştirme bağları sabit olduğundan gerilme bileşenleri de eleman içinde şekil değiştirmelerle benzer değişecektir. Bu şekilde çözüme iyi bir yaklaşım sağlanır.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{sabit} \\ \text{sabit} \\ \text{sabit} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Denklem (3.33)'de ise üç düğüm noktalı elemandaki şekil değişimini veren ifade verilmiştir. Eleman boyunca şekil değişimi bileşenleri sabit olduğundan performansı dörtgen elemandan düşüktür.[26]

3.3.5 İzoparametrik Dörtgen Eleman

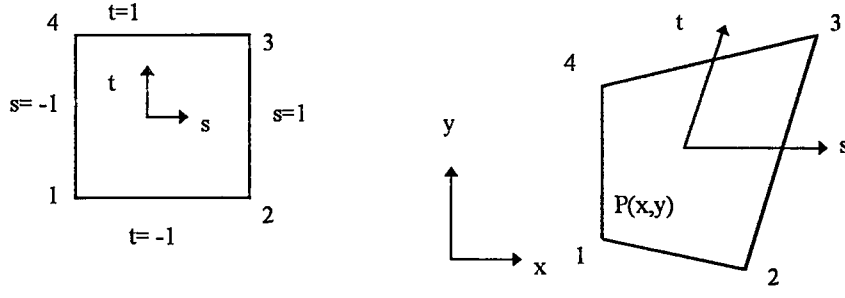
Karmaşık geometrilerin modellenmesinde ikidoğrusal dikdörtgen eleman iyi bir performans göstermez. Genel dörtgen (quadrilateral) elemanlar karmaşık geometriyi daha iyi temsil eder[26]. Bu eleman daha önce ele alınan ikidoğrusal dikdörtgen eleman gibi formüle edilebilirse de gerekli integral işlemleri hayli karmaşıktır. İntegral sınırlarının tanımlanmasında zorluk vardır. Kartezyen koordinatlarda koordinat interpolasyonu elemanın uzaydaki konumuna son derece hassastır. Elemanın bazı konumlarında ara matrisler hesaplanamaz veya sistem denklemleri kötü sonuç verecek şekilde tesis edilir.

İzoparametrik (Eşparametrik) elemanların kullanılması bu dezavantajları gidermektedir. İzoparametrik elemanlar doğal koordinatlarda kare elemanlar olarak formüle edilir ve fiziksel koordinatlara yerdeğiştirme enterpolasyon fonksiyonlara benzeyen koordinat enterpolasyon fonksiyonları yardımı ile eşlenir. Kullanılan izoparametrik elemanın tipine bağlı olarak elemanın fiziksel koordinatlardaki konfigürasyonu genel dörtgen ve eğri kenarlı olabilir. Koordinat enterpolasyonu için kullanılan şekil fonksiyonları yer değiştirme enterpolasyonu için kullanılanlara özdeş ise eleman izoparametrikdir.

İzoparametrik elemanlar çok yönlü kullanılabildiklerinden ve daha güvenilir sayısal netice verdiklerinden sonlu eleman programlarının temel elemanlarıdır.

3.3.5.1 İzoparametrik Eşleme

Şekil 3.4'de dört düğüm noktalı dörtgen elemanın (s,t) doğal koordinatlarından (x,y) koordinat sistemine dönüştürülmesi görülmektedir. Doğal koordinatlarda eleman bir karedir ve koordinat sisteminin orijini merkezdedir. Kartezyen koordinatlarda eleman keyfi dörtgen şeklindedir. Şekil fonksiyonları ile, herhangi bir $P(x,y)$ noktasının koordinatları düğüm noktalarının (x,y) koordinatları cinsinden ifade edilebilir.



Şekil 3.4 Elemanın fiziksel koordinatlara eşlenmesi

$$u(s, t) = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 st \quad (3.29a)$$

$$v(s, t) = b_1 + b_2 s + b_3 t + b_4 st \quad (3.29b)$$

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) x_i \quad (3.30a)$$

$$y(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) y_i \quad (3.30b)$$

$$\begin{Bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{Bmatrix} = [N] \{x_i\} \quad (3.31)$$

$$\{x_i\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4]^T \quad (3.32)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$N_1(s, t) = \frac{(1-s)(1-t)}{4} \quad (3.34a)$$

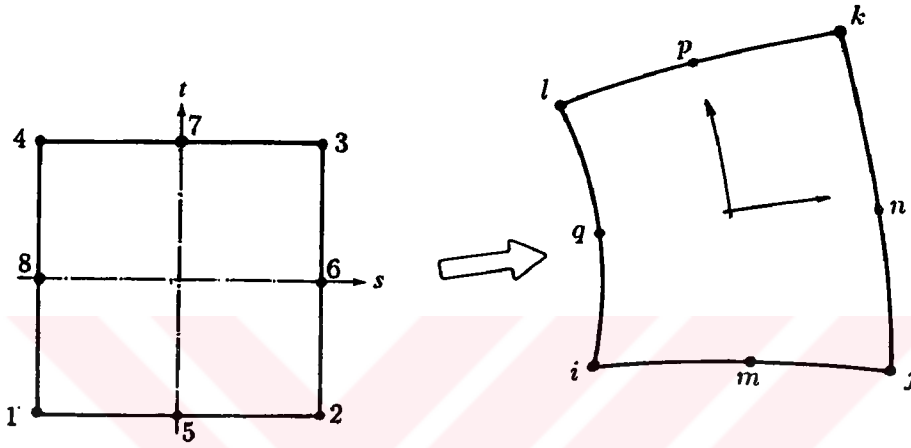
$$N_2(s, t) = \frac{(1+s)(1-t)}{4} \quad (3.34b)$$

$$N_3(s, t) = \frac{(1+s)(1+t)}{4} \quad (3.34c)$$

$$N_4(s, t) = \frac{(1-s)(1+t)}{4} \quad (3.34d)$$

Eleman doğal koordinatlardan kartezyen (fiziksel) koordinatlara eşlendikten sonra s ve t eksenlerinin birbirine dik olması şart değildir.

Analizde kullanılan diğer bir eleman tipi olan, ikinci dereceden yerdeğiştirme fonksiyonlu 8-düğüm noktalı elemana ait şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir. Bu eleman yapıdaki gerilme değişimini lineer eleman nazaran daha iyi temsil etmektedir. Şekil 3.5'de eleman görülmektedir.



Şekil 3.5 8-düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman

Bu elemanın yer değişim fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$u = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 s^2 + a_5 st + a_6 t^2 + a_7 s^2 t + a_8 st^2 \quad (3.35a)$$

$$v = b_1 + b_2 s + b_3 t + b_4 s^2 + b_5 st + b_6 t^2 + b_7 s^2 t + b_8 st^2 \quad (3.35b)$$

Benzer şekilde eleman içindeki herhangi bir noktanın yerdeğiştirmesi ve koordinatları düğüm noktasındaki değerler cinsinden şekil fonksiyonları yardımıyla hesaplanmaktadır.

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) u_i \quad (3.36a)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) v_i \quad (3.36b)$$

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) x_i \quad (3.37a)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) y_i \quad (3.37b)$$

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (3.38)$$

Şekil fonksiyonun düğüm noktasındaki değerlerini veren ifadeler aşağıdadır.

$$N_1(s, t) = -\frac{(1-s)(1-t)(1+s+t)}{4} \quad (3.39a)$$

$$N_2(s, t) = -\frac{(1+s)(1-t)(1-s+t)}{4} \quad (3.39b)$$

$$N_3(s, t) = -\frac{(1+s)(1+t)(1-s-t)}{4} \quad (3.39c)$$

$$N_4(s, t) = -\frac{(1-s)(1+t)(1+s-t)}{4} \quad (3.39d)$$

$$N_5(s, t) = \frac{(1-s^2)(1-t)}{2} \quad (3.39e)$$

$$N_6(s, t) = \frac{(1+s)(1-t^2)}{2} \quad (3.39f)$$

$$N_7(s, t) = \frac{(1-s^2)(1+t)}{2} \quad (3.39g)$$

$$N_8(s, t) = \frac{(1-s)(1-t^2)}{2} \quad (3.39h)$$

İzoparametrik elemanların tercih edilmesinin ana nedeni fiziksel koordinatlarda integral işlemlerinden kaçınmaktır. Bununla birlikte, (3.20) rijitlik matrisi fiziksel

koordinatlarda ifade edilmiştir. Bu nedenle, dx ve dy diferansiyel uzunlukları ds ve dt doğal koordinat diferansiyel uzunlukları cinsinden ifade edilmelidir. Şekil değişimi fiziksel koordinatlara bağlı olarak şekil fonksiyonlarının türevleri cinsinden ifade edilir. Bu türevler $[B]$ matrisinin elemanlarıdır ve doğal koordinatlara bağlı olarak dönüştürülmelidir.

(dx, dy) diferansiyelleri ile (ds, dt) diferansiyelleri arasındaki bağıntı aşağıdaki ifadede verilmiştir.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \quad (3.35a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \quad (3.35b)$$

bu ifadede ,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum \frac{N_i}{\partial s} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sum \frac{N_i}{\partial s} y_i, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sum \frac{N_i}{\partial t} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sum \frac{N_i}{\partial t} y_i$$

Koordinat türevleri matris formda ifade edilir,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$[J]$ matrisi dönüşümün Jacobiyeni dir.

İki koordinat sisteminin diferansiyelleri aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J]^T \begin{Bmatrix} ds \\ dt \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak, (i) düğüm noktası için şekil fonksiyonun türevleri aşağıdaki formda elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

$[J]^{-1}$ var ise, (s,t) koordinatlarından (x,y) koordinatlarına birebir eşleme yapma mümkün olmaktadır. İşlem tersinirdir. $|J|$ determinanı sıfırdan büyük ise, elemanın alanı muhafaza edilmekte ve eşleme fiziksel olarak bir anlam taşımaktadır. $|J|$ elemanın herhangi bir noktasında A_{xy}/A_{st} diferansiyel alan oranıdır.

$[J]$ sabit bir kalınlık için diferansiyel hacimde, düzlem elastisite elemanı için $h dx dy$ nin $h |J| ds dt$ dönüşümünü sağlamaktadır. Integral sabitleri s için -1 den 1 e ve t için -1 den 1 e dir. Bu şekilde, herhangi bir $F(x,y)$ fonksiyonunun integrali doğal koordinatlara aşağıdaki ifade ile dönüştürülür.

$$\int_A F(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x(s,t), y(s,t)) |J| ds dt \quad (3.39)$$

3.3.5.2 Eleman Rijitlik Matrisi

(3.16) ifadesi izoparametrik lineer dörtgen eleman içinde kullanır. Koordinat dönüşümü neticesinde eleman rijitlik matrisi aşağıda ifade edilmiştir.

$$[K] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| ds dt \quad (3.40)$$

3.3.5.3 Sayısal İntegrasyon

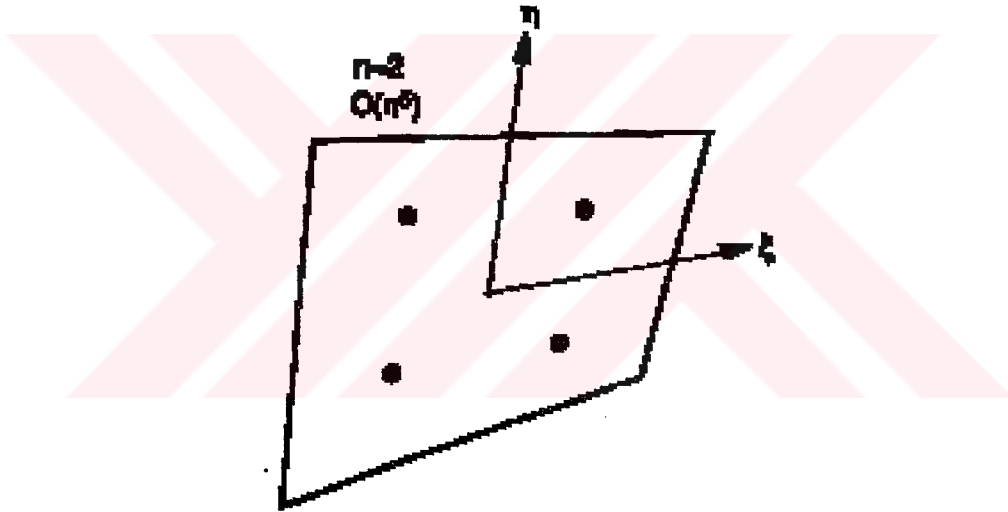
Sonlu elemanlar programlarında integral alma işlemleri sayısal olarak yapılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan sayısal integrasyon metodu Gauss Kareleştirme (Quadrature) metodudur. Bu metodda diğerlerine nazaran daha az örnekleme noktası ile istenen yaklaşım elde edilir.

Bu metodda verilen bir $F(s,t)$ fonksiyonunun integral alma işlemi aşağıdaki forma dönüşür.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(s, t) ds dt = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n w_k w_l F(s_k, s_l) \quad (3.41)$$

Bu ifadede m ve n s ve t yönündeki örnekleme noktaları sayılarıdır. s_k ve t_l k ve l örnekleme noktalarının konumları, w_k ve w_l örnekleme noktalarında F(s,t) ye tatbik edilen ağırlıklardır. Genelde m=n dir. [26]

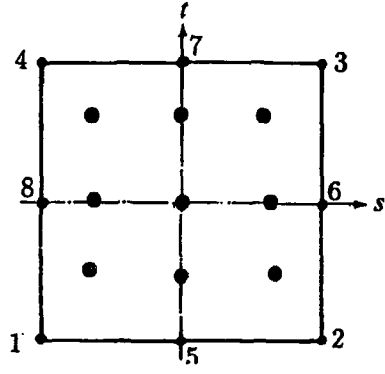
Gauss Kareleştirme metodu ile elde edilen isabetli yaklaşım örnekleme noktalarının yerleri ve ağırlıklarının uygun seçimine bağlıdır. Optimal örnekleme noktaları konumları ve ağırlıkları şekilde verilmiştir. Şekilde 3.6'de 4 örnekleme noktası vardır. Bu noktalar s ve t referans eksenlerine göre ± 0.577350269 konumlarındadır. Ağırlık faktörleri 1 dir.



Şekil 3.6 Gauss Kareleştirme için optimum örnekleme noktası konumları

İntegrasyon noktaları sayısı, elemanın performansına etki etmektedir. Tam integrasyon distorte olmamış eleman için rijitliği tam olarak integral alma için gerekli integrasyon derecesidir. Lineer izoparametrik dörtgen eleman için şekilde gösterildiği gibi 4 örnekleme noktası tam integrasyonu sağlamaktadır.

İkinci dereceden dörtgen eleman için örnekleme noktaları Şekil 3.7'da görülmektedir. Bu eleman için 8 örnekleme noktası tam integrasyonu sağlar.



Şekil 3.7 8-düğüm noktalı eleman için örnekleme noktaları



4. GENEL AMAÇLI SONLU ELEMANLAR YAZILIMI

4.1 Giriş

Yazılım piyasasında çok sayıda iyi hazırlanmış genel amaçlı sonlu elemanlar analiz programları mevcuttur. Bu programlarda problemin sonlu elemanlar modellenmesi, analizi ve sonuçların değerlendirilmesi 3 ayrı modülde gerçekleştirilmektedir. Takip edilen adımlar aynı olduğundan bir programı kullanan araştırmacı diğerlerine de kolaylıkla adapte olmaktadır. Çalışmada dünya çapında yaygın olarak kullanılan ANSYS genel amaçlı sonlu elemanlar analiz programı kullanılmıştır. Bu program 1970 yılında SWANSON Analiz Sistemleri Şirketi tarafından geliştirilmiş ve piyasaya sunulmuştur. Program bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmelere bağlı olarak sürekli olarak yenilenmiştir. Kişisel bilgisayarlar (PC) ve iş istasyonlarında kullanılan sürümleri vardır. [27]

Program statik yapısal analiz, dinamik yapısal analiz, ısı transferi analizi, akışkanlar mekaniği ve akustik analizi, manyetik analiz ve piezoelektrik analiz gruplarına giren çeşitli problemleri çözebilmektedir. Bu analizlerde malzeme özellikleri sıcaklığın bir fonksiyonu olabilir. Farklı disiplinlerin beraber ele alınmasını gerektiren problemlerin çözümü de imkan dahilindedir. Yapısal kuvvetleri oluşturan manyetik alan problemi buna misal gösterilebilir. Termal-Yapısal analiz, Manyetik-Yapısal analiz, Elektro-Manyetik analiz, Elektro-Manyetik-Termal-Yapısal analiz, Elektro-Manyetik-Termal analiz, Termo-Basınç analiz, Hız-Termo-Basınç analiz, Basınç-Yapısal (Akustik) analiz ve Termo-Elektrik analize imkan sağlayan eleman kütüphanesi ve analiz seçenekleri mevcuttur.[28]

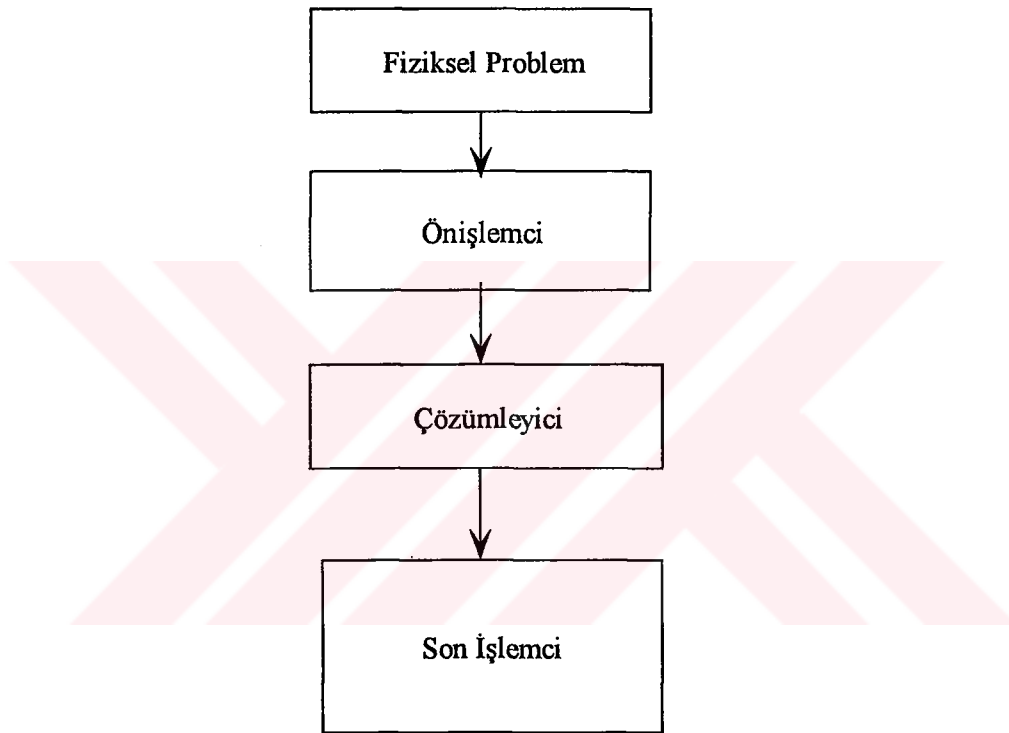
4.2 Ana Modüller

Program üç ana modülden oluşmuştur. Bu modüller ön işlemci, çözümleyici ve son işlemci modülleridir. Yapılan bütün işlemler programın veri tabanına kaydedilmektedir.

Bu şekilde bir modülde gerçekleştirilen işlemlere diğer bir modülde çalışırken de ulaşılabilir. Bununla birlikte bazı komutlar sadece ait olduğu modülde icra edilir.

Misal olarak model geometrisi, sonlu elemanlar modeli her modülde görüntülenebilir. Modeldeki gerilmeler ise sadece son işlemcide incelenebilir. Sınır şart komut etiketleri çözümleyici modülünde olmasına karşın, sınır şartları ön işlemci modülünde de modele tatbik edilebilir.

Şekil 4.1’de ele alınan problemin modüllerde işlem görme sırası görülmektedir .

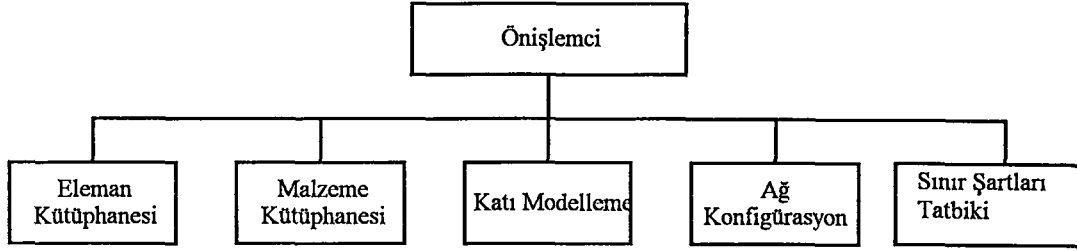


Şekil 4.1 Analizde kullanılan modüller

4.2.1 Ön işlemci Modülü

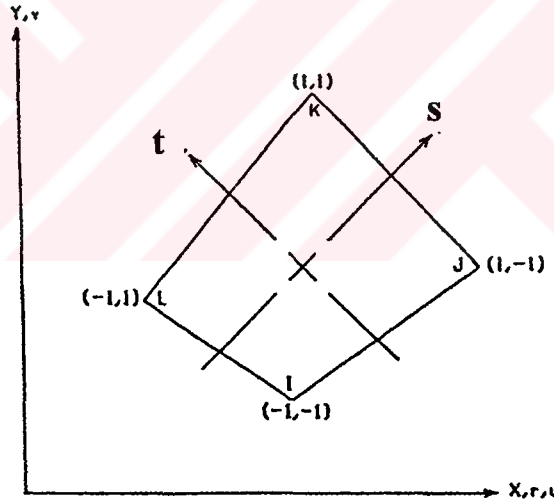
Ön işlemci modülü problem geometrisinin, malzeme özelliklerinin, analize esas eleman tipinin ve opsiyonel katsayılarının, sonlu eleman ağı için konfigürasyonun (eleman ağındaki eleman sayısı, şekli ve yoğunluğu) tayin edildiği ve sonlu eleman ağının oluşturulduğu modüldür.

Komut menüleri şeması Şekil 4.2’de verilmiştir.



Şekil 4.2 Önişlemci modülünde önemli komut menüleri

Eleman kütüphanesinde 1-2-3 boyutlu problemlerin modellenmesinde kullanılan çok sayıda eleman vardır. Bu elemanlar önceden programlanmıştır. Bununla birlikte bazı parametreler kullanıcı tarafından belirlenebilir. Misal olarak PLANE42 2 boyutlu 4 düğüm noktalı izoparametrik sonlu elemanın düzlem gerilme, kalınlık tayin edilerek düzlem gerilme, düzlem şekil değiştirme seçenekleri vardır. Ayrıca bazı elemanların geometrik özelliklerini tayin eden sabit değer (real constant) seçenekleri vardır.



Şekil 4.3 PLANE42 sonlu elemanı

Malzeme özellikleri eleman tipine bağlıdır. Elastisite modülü, kayma modülü, poisson oranı, ısı iletim katsayısı, yoğunluk tipik malzeme özellikleridir.

Bu elemanda yer değiştirmenin değişimi ifadesi doğal koordinat eksenleri cinsinden $(a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 st)$ olarak verilmektedir. Yer değiştirme bileşenleri düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

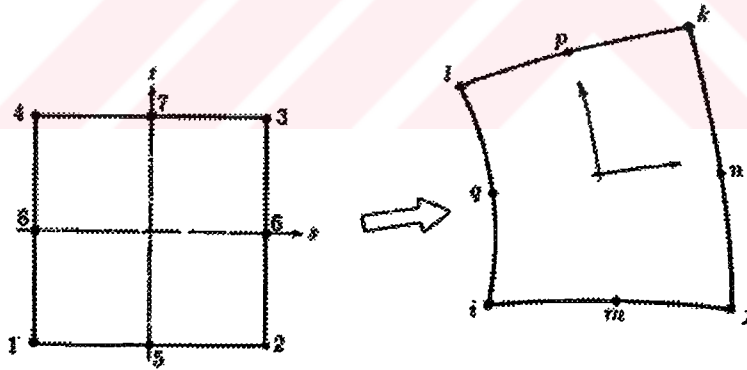
$$u = \frac{1}{4}(u_I(1-s)(1-t) + u_J(1+s)(1-t) + u_K(1+s)(1+t) + u_L(1-s)(1+t)) \quad (4.1)$$

$$v = \frac{1}{4}(v_I(1-s)(1-t) + v_J(1+s)(1-t) + v_K(1+s)(1+t) + v_L(1-s)(1+t)) \quad (4.2)$$

Düzlem problemlerin analizinde kullanılan diğer bir dörtgen eleman olan PLANE82 8-düğüm noktalıdır. Bu eleman Şekil 4.4'de görülmektedir. Köşelere ilaveten kenar ortalarında düğüm noktası vardır. İkinci dereceden bir yer değiştirme fonksiyonu ile formüle edildiğinden yapıdaki gerilmenin değişimin daha iyi temsil etmektedir. Bu elemanda yer değiştirmenin ifadesi düğüm noktası koordinatları cinsinden $(a_1 + a_2s + a_3t + a_4s^2 + a_5st + a_6t^2 + a_7s^2t + a_8st^2)$ olarak verilmektedir. Yer değiştirme bileşenleri düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$u = a_1 + a_2s + a_3t + a_4s^2 + a_5st + a_6t^2 + a_7s^2t + a_8st^2 \quad (4.3)$$

$$v = b_1 + b_2s + b_3t + b_4s^2 + b_5st + b_6t^2 + b_7s^2t + b_8st^2 \quad (4.4)$$



Şekil 4.4 PLANE82 sonlu elemanı

4.2.2 Çözümleme Modülü

Bu modülde, sonlu elemanlar modeline sınır şartları tatbik edilir. Sınır şartlarının tatbik edilmesinden sonra model çözüme hazırdır. Tek bir komutla çözümleme yapılır. Seçilen eleman tipine ve opsiyonlarına göre çözüm işlemi gerçekleşir. Çözüm neticeleri son işlemcide değerlendirilmek üzere ilgili dosyalarda saklanır.

4.2.3 Son İşlemci Modülü

Son işlemcide, çözümleyiciden gelen nümerik bilgiler kullanılarak anlaşılması ve değerlendirmesi daha kolay olan grafikler elde edilir. Bu grafiklerle modelin tatbik edilen sınır şartları neticesinde deformasyonu ve gerilme bileşenleri incelenebilir. Mühendislik uygulamalarında düğüm noktası yerdeğiştirmeleri genelde son derece küçüktür. Bu nedenle incelemede kolaylık açısından yerdeğiştirmeler grafiklerde abartılı olarak gösterilir.

İncelenen yapıda, gerilmelerin normal, asal ve kayma bileşenlerinin değişimi renkli grafiklerle elde edilir. Bir bölgede bir doğrultudaki düğüm noktalarındaki gerilmenin lineerleştirilmiş değişimi grafik olarak incelenebilir. Herhangi bir düğüm noktasındaki yerdeğiştirme veya gerilme bileşenleri sayısal tablolardan da incelenebilir.

Çözüm neticeleri iki aşamada değerlendirilir. Birincil bilinmeyenler sistem denklemlerinin çözümü neticesinde elde edilir. Bunlar problem tipine göre yer değiştirme, sıcaklık ve basınç gibi düğüm noktasında hesaplanan değerlerdir. Sınır şartı verilmiş düğüm noktalarında hesaplanan tepki kuvvetleride bu çözüm grubundadır. [28]

Eleman düğüm noktası verileri birim şekil değiştirme ve gerilme gibi türetilmiş verilerdir. Bu değerler eleman düğüm noktası yerlerinde hesaplanmıştır. Bu değerler iç integrasyon noktalarından en küçük kareler yöntemi ile hesaplanır ve düğüm noktalarında değerlendirilir. Komşu elemanlardan gelen düğüm noktası değerlerinin ortalaması son işlemci modülünde değerleştirilir.

Bu şekilde hesaplanan verilerin grafikleri elde edilmektedir. Yapıdaki büyüklüklerin değişimi renkli grafiklerle kolaylıkla incelenir. Bu büyüklüklerin en düşük değeri mavi renk ile en büyük değeri kırmızı renk ile gösterilir. Üniform artımlı ara değerler diğer renklerle gösterilir. Renk skalasından hangi rengin hangi değere karşılık geldiği okunur. Kullanıcı skala değerlerini ayarlayabilir.

Sonuçların diğer bir grafik değerlendirme şekli de, modelde herhangi bir doğrultuda gerilmenin değişiminin incelenmesidir. Kullanıcı istediği doğrultuyu, bu doğrultudaki başlangıç ve bitiş noktasındaki düğüm noktalarını seğerek belirler. Misal olarak dişli çarktaki kritik kesitte gerilmenin değişimi bu şekilde incelenebilir. Yörüngeyi

belirleyen noktaların seçilmesinden sonra gerilmenin herhangi bir bileşeni kullanıcının belirlediği parametreye atanır.

PDEF, parametre, S,X gerilmenin x yönündeki bileşenini daha sonraki işlemler için parametreye atar. **PLPATH,parametre** komutu ise parametrede belirlenen bileşenin yörünge boyunca değişimi grafiğini vermektedir. İstendiğinde birden fazla bileşenin değişimi tek bir grafikte incelenebilir. Her bir eğriyi tanımlayan parametre grafikte eğrinin yanında yazılmaktadır.

4.3 Yardımcı Modüller

Yardımcı modüller kullanıcıya modelin elde edilmesi ve sınır şartlarının tatbikinde kolaylıklar sağlar. Grafiklerin elde edilmesinde renklerin ayarları, kamera (modele yakından veya uzaktan bakma), koordinat sistemleri, modelin istenen bölgesindeki elemanları (düğüm noktaları, sonlu elemanlar, katı modelin her seviyeden bileşenleri) seçmek gibi işlemler yapılabilir. Ayrıca grafikler yazıcı çıkışı için uygun dosyalara yazdırılır. Grafikler kopyalanarak kelime işlemci programlarına aktarılabilir.

4.4 Model Elde Edilmesi

4.4.1 Doğrudan Sonlu Eleman Modelleme

Ele alınan problemin sonlu elemanlar modelini elde etmek iki ayrı şekilde yapılabilir. Birinci yol, doğrudan düğüm noktalarını oluşturup, bu noktaları uygun şekilde birbirlerine bağlayarak eleman ağını oluşturmaktır. Bu noktaların nasıl birbirlerine bağlanacağı elemene ait giriş resminde belirtilir. Doğrudan sonlu eleman modelini oluşturmak zaman alıcıdır. Bununla birlikte bazı problemlerde temel geometrik dönüşümlerin tatbiki ile model oluşturmada kolaylıklar sağlanabilir.

4.4.2 Katı Modelden Faydalanılarak Modelleme

Katı modelleme yapılırken takip edilen yol problem geometrisine bağlıdır. Problem geometrisi basit geometrik şekilli ise hazır geometrik şekillerden faydalanılabilir. Eğer geometri basit geometrik şekillerin uygun kombinasyonu ile ifade edilebiliyorsa, gerekli Boole cebri işlemleri tatbik edilerek elde edilebilir. Geometri karmaşık ise birden fazla alanın (iki boyutlu problemde) toplamı olarak ifade edilir. Bu durumda

hiyerarşik sıra takip edilerek, önce köşe noktalar, köşe noktaları birbirine bağlanarak çizgiler ve çizgileri birbirine bağlanarak alanlar oluşturulabilir.

Kare kesitli ankastre kiriş probleminin katı modeli, programın katı modelleme modülündeki hazır geometrik şekiller (primitif) kullanılarak elde edilebilir. Bu durumda alt seviyeli katı modelleme elemanı olan köşe noktalar ve çizgiler kendiliğinden oluşur.

Bazı problemlerde ise hazır geometrik şekiller üzerinde Bool cebri işlemleri yapılarak katı model elde edilebilir. Konsantrik dairesel delikli dikdörtgen levha bu şekilde modellenenebilir.

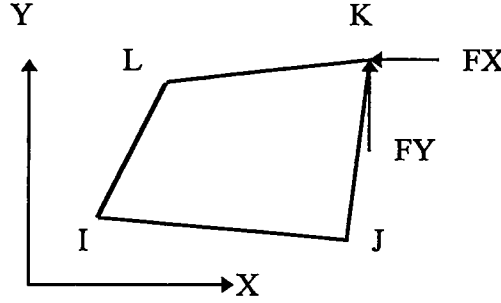
Karmaşık geometrili problemler ise, problemin tabiatı dikkate alınarak, birden fazla alt bölgenin (alanın) topluluğu olarak modellenenebilir. Dikkat edilecek husus, sınır şartlarının tatbik edileceği yerlerde ve problemin tabiatı gereği incelenen değişkenin değişiminin yüksek olması beklenen yerlerde, uygun eleman dağılımına esas olacak katı modelleme yapmaktır. Çünkü sonlu elemanlar modeli katı model üzerinde tayin edilen ağ konfigürasyonu parametrelerine (eleman sayısı, yoğunluğu ve geometrik şekli) bağlı olarak oluşmaktadır.

Bölgenin sınırları olan çizgilerde eleman sayı ve yoğunluğu tayin edilir. Bir çizgi eşit parçalara bölünebileceği gibi dereceli olarak bölünebilir. Bu şekilde eleman sıklığı tayin edilir. Bazı elemanlar (eleman tipleri) birden fazla geometrik şekilde oluşturulabilir. Bu nedenle istenen geometrik şekil belirtilir. Yukarda bahsedilen parametrelerin tayin edilmesinden sonra tek bir komutla bölge sonlu elemanlar ağına dönüşür.

4.5 Sınır Şartlarının Tatbiki

Sonlu eleman modeline tatbik edilen sınır şartları kinematik ve statik olarak ikiye ayrılır. Kinematik sınır şartları düğüm noktalarına tatbik edilen hareket kısıtlamalarıdır. Düğüm noktasının serbestlik derecesi eleman tipine göre değişmektedir. PLANE42 elemanı düğüm noktası bazında serbestlik derecesi iki olan düzlemsel sonlu elemandır. Bu elemana tatbik edilecek sınır şartı düğüm noktasının düzlemde x veya y yönünde veya her iki yönde hareketlerini kısıtlamaktır.

Statik sınır şartları ise sonlu eleman modeline tatbik edilen kuvvetlerdir. Bu kuvvetler düğüm noktalarına tatbik edilir. PLANE42 elemanına tatbik edilen düğüm noktası kuvvetleri x yönünde FX ve y yönünde FY dir. Şekil 4.5 de elemana tatbik edilen statik sınır şartları gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Elemana statik sınır şartlarının tatbiki

Sınır şartları katı model üzerinden de sonlu elemanlar modeline tatbik edilir. Tekil kuvvetler köşe noktalara, yayılı yükler ise çizgilere tatbik edilir. Katı modele tatbik edilen sınır şartları otomatik olarak sonlu elemanlar modeline aktarılır.

Eğik yüzeylere normal doğrultuda etki eden kuvvetler bileşenlerine ayrılmadan da tatbik edilebilir. Bu durumda global kartezyen koordinatlardan konuma uygun şekilde döndürülmüş yerel koordinat sistemi seçilir. İlgili düğüm noktasının koordinatları bu sisteme dönüştürülür. Kuvvet (döndürme açısına göre FX veya FY) tatbik edilir. Bu özellik düz dişli çarkların gerilme analizinde diş profiline normal kuvvetin tatbik edilmesinde kullanılmaktadır.

4.6 Gerilmelerin Hesabı

Gerilmenin düzlemdeki bileşenleri bilindiğinde asal gerilmeler ve eş değer gerilmeyi veren ifadeler aşağıda verilmiştir. (4.5) ifadesinin çözümünden asal gerilmeler hesaplanmaktadır.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

4.7 Çalışma Dosyası

Programın bir özelliği icra edilen komutların yada komut dizilerinin (makrolar) ASCII kodunda çalışma dosyasına yazdırılmasıdır. Kullanıcı tecrübe kazandıkça, bu dosyadaki hatalı işlemlerini herhangi bir Text editöründe düzelterek sadece probleme hizmet eden doğru komutların sıralandığı çalışma dosyasını elde eder. Bu durumda yanlış komutların sebep olduğu vakit kayıpları önlenmiş olur. İsteddiği zamanda bu dosyayı çalıştırarak analizlerine devam eder. Bu elde edilen dosya, verilen problemin tayin edilen malzeme özellikleri, eleman tipi ve opsiyonları, ağ konfigürasyonu ve sınır şartları ile analiz özelliklerini belirleyen özel komutlardan ibarettir. Ayrıca sonuçları değerlendiren komutlarda bu dosyada olabilir. Bu komutların tek bir dosyada sıralanması şart değildir. Parametreler ve komutlar ayrı dosyalarda saklanarak çalışma dosyasından bu dosyalar okunabilir.

Ancak bu çalışma dosyası ile sadece modeli tesis ederken kullanılan sabit değerler için analiz yapılabilir. Farklı değerlerin çözüme olan etkilerini kolaylıkla incelemek için modeli tesis ederken kullanılan büyüklükler parametrik olarak ifade edilmelidir.

4.8 Parametrik Modelleme

Problemin katı modeli değiştirilmeden, farklı eleman sayı ve yoğunluğu, farklı sınır şartları durumunda aynı çalışma dosyasından faydalanmak gayesi ile bu büyüklükler parametrik olarak tayin edilir. ANSYS Parametrik Dizayn Lisanı (APDL) kullanıcıya gerek model oluşturma gerekse çözümleme ve sonuçların değerlendirilmesi aşamalarında kullanıcıya büyük kolaylıklar sağlamaktadır. [29]

Makrolar, (IF... THEN ...ELSE) akış operatörü, DO çevrimleri, matris ve vektör operasyonları kullanıcıya büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Matris operasyonları verilerin sıralandırılarak işlenmesini sağlamaktadır. Bu şekilde hem modelin tesisinde hem de sonuçların görsel veya tablosal değerlendirilmesinde kolaylıklar sağlanmaktadır.

Parametreler çalışma dosyasında önceden tanımlanabildiği gibi, kullanıcının özgün programlarının çıkış dosyalarından da okunabilir. Ayrıca çalışma dosyasının ilgili satırının icrasından önce klavyeden de girilebilir.

Sınır şartlarının tatbik yerleri ve değerleri parametrik olarak tayin edilebilir. Aynı düğüm noktası konfigürasyonu için farklı sınır şartlarının etkisini dosyanın bir kez yüklenmesinde topluca inceleme gayesi ile (IF... THEN) deyimi ve çevrimler kullanılabilir. Bu durumda her sınır hali için ayrı yükleme dosyası oluşur. Bu dosyalar sırayla çözülür. Son işlemcide ilgili yükleme halinin numarası tayin edilerek sonuçları incelenebilir. Bir çevrim yaratılarak sırayla bu sonuçların grafikleri elde edilir. İstendiğinde yazıcı çıkışı için veya animasyon için dosyalarda saklanabilir.



5. DÜZ DİŞLİ ÇARKIN SONLU ELEMANLAR MODELİNİN ELDE EDİLMESİ

5.1 Giriş ve Temel Hususlar

Çalışmanın bu bölümünde sonlu elemanlar metodu ile gerilme analizi için geliştirilen modelin tesisinde göz önüne alınan hususlar ve izlenilen adımlar ele alınmıştır.

Dişli çark profilini tayin eden analitik ifadeleri kullanarak sonlu elemanlar modelinin tesisinde referans teşkil eden noktaları oluşturan bir program geliştirilmiştir. Referans noktalar ANSYS ortamında değerlendirilerek analizi için geliştirilen sonlu elemanlar modeli tesis edilmiştir.

Modellemede ve sınır şartlarının tatbikinde göz önüne alınan temel hususlar aşağıda belirtilmiştir.

Düz dişli çarklarda, diş radyal eksene (diş merkez doğrusu) göre simetriktir. Diş formu genişlik doğrultusunda değişmediğinden ve teorik olarak diş genişliği boyunca kuvvet dağılışının düzgün olduğu kabul edilebildiğinden dişler iki boyutlu cisim olarak modellenebilir [5,30]. İki boyutlu bir problemin düzlem gerilme veya düzlem birim şekil değiştirme olarak modellenmesini düzlemdeki kesitine göre kalınlığı tayin etmektedir. Düzlemsel olarak ele alınan problemler Ek-B’de belirtilmiştir. ZAHAVI iki boyutlu modellemede kalın veya ince olma konusunda net bir ayrım olmadığını, kararı araştırmacının tayin edeceğini vurgulamıştır [31]. Tez çalışmasında düzlem şekil değiştirme hali göz önüne alınmıştır.

Diş kuvvetinin diş ucuna tam değerinde tatbik edilmesi en kötü haldir. Gerçekte kavrama oranına bağlı olarak diş kuvveti müteakip devreye giren dişli çifti ile paylaşılmaktadır. Dişler yük paylaşımını sağlayacak hassasiyette imal edilmedikleri takdirde diş kuvvetinin diş ucunda tam değerinde etki ettiği kabul edilebilir. Bu nedenle diş dibinde azami gerilmeyi sağlayan yük tatbik noktası diş ucudur. [32]

5.2 Diş Geometrisini Elde Etmek İçin Geliştirilen Program

Evolvent profili ve diş dibi eğrisini tayin eden analitik ifadeleri kompüter ortamına aktarmak için BASIC programlama lisanı kullanılarak bir program geliştirilmiştir. Diş dibi eğrisinin koordinatlarını tayin eden analitik ifadeler EK-A'da verilmiştir.

Kesici takımın geometrik özellikleri ISO53'de belirtilen değerlerdir. Kavrama açısı $\alpha_p = 20^\circ$, takım ucu yuvarlatması $\rho = 0,375 \text{ m}$ ve baş boşluğu $c = 0,25 \text{ m}$ standart değerler olarak alınmıştır.[16]

Evolvent profili ve trokoid formda diş dibi yuvarlatmasını tayin eden ifadeleri esas alarak yazılan programda, ANSYS programı ile yapılacak analizdeki yükleme şartlarını sağlayacak çevrimler kullanılmıştır. İfadeler ile sadece bir yandaki noktalar tayin edilirken, temel geometrik dönüşümlerden simetri alma işlemi ile diğer yandaki noktalarda oluşturulmaktadır. Bu noktalar uygun formatta bir veri dosyasına aktarılmaktadır.

Program giriş değerleri olarak diş sayısı, modül ve dişli sektörün kalınlığını belirleyen faktörü istemekte, yapılan hesaplamalar neticesinde;

Diş geometrisini belirleyen noktaları belirlemekte,

Bu noktaları ANSYS Katı modelleme modülü için uygun formatta dosyaya yazdırmakta,

Tatbik edilen yükün geometrik yerini otomatik tayin edilmesinde kullanılan parametreleri dosyaya yazdırmakta,

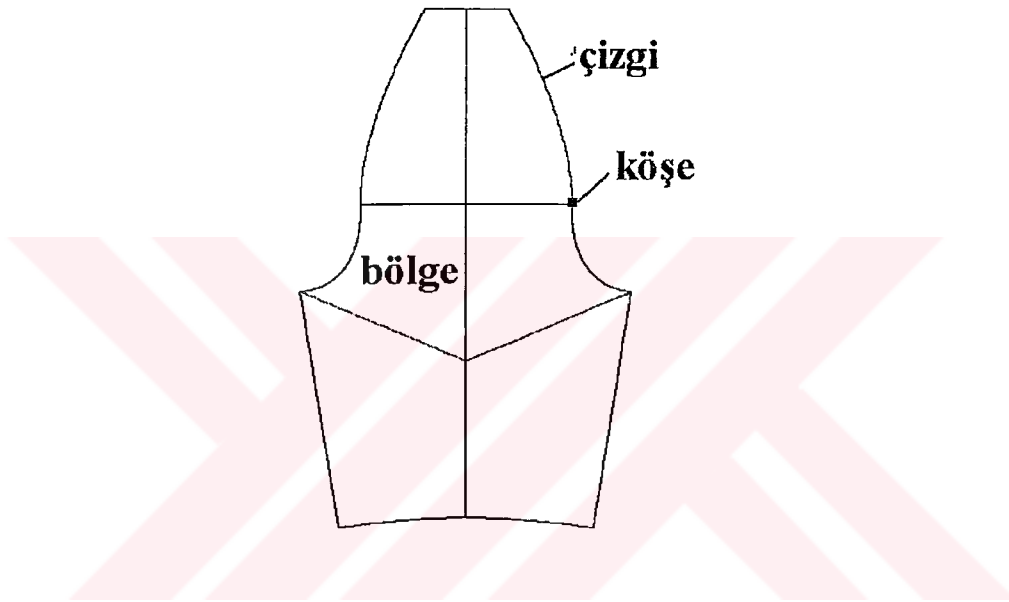
Kinematik sınır şartlarının tatbik yerlerini otomatik belirlenmesinde kullanılan parametreleri dosyaya yazdırmaktadır.

Diş kuvvetinin yerini belirleyen parametreler evolvent geometrisinden hesaplanmaktadır. Kinematik sınır şartını belirleyen parametrelerden biri dişli sektörün merkezi gören açıdan faydalanılarak tatbik edilmektedir. Diğer parametre ise dişli sektör taban yarıçapıdır. Bu parametreler bir veri dosyasına yazdırılmaktadır.

Bu programlama yaklaşımı ile sonlu elemanlar modelinin ANSYS ortamında tesisinde kolaylık sağlanmaktadır. BASIC Lisanında geliştirilen diş profili hasıl etme programının listesi Ek-C'de verilmiştir.

5.3 ANSYS Önışlemci Modülünde Yapılan İşlemler

Düz dişli çarkın sonlu elemanlar modelini elde etmek için öncelikle katı modelini elde etmek gereklidir. Çark dişini uzayda sınırlayan eğrilerin formunu hatırlamakta fayda vardır. Düz dişli çark profili, diş yan yüzeylerinde evolvent eğrilerden, dişbaşı ve dişdibinde konsantrik yaylardan, diş kökünde ise trokoid eğrisinden meydana gelir. Problem karmaşık geometrili olduğundan ilk olarak model basit geometrik şekilli alanların topluğu olarak ifade edilir. Şekil 5.1’de alt geometrik bölgelere ayrılmış katı model görülmektedir.



Şekil 5.1 Karmaşık geometrinin basit geometrik şekillerle katı modellenmesi

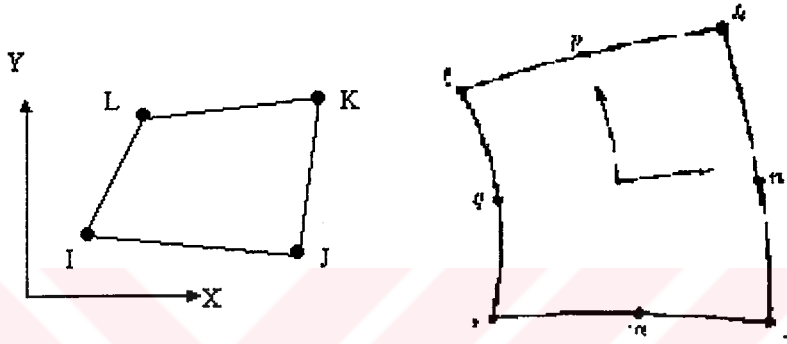
5.3.1 Katı Modelin Oluşturulması

Katı modelin alt seviyede elemanı olan köşe noktalar (key point) hesaplayıcı programın uygun formatlı hazırladığı veri dosyasından okunmaktadır. Şekil 5.1’de verilen kalıbı oluşturmak için öncelikle bu noktalar birbirlerine çizgiler ile bağlanır. Bu şekilde diş geometrisi uzayda çizgilerle belirlenmiş olur. Diş merkez doğrusuna göre simetrik noktalar birbirlerine çizgiler ile bağlanır. Merkez doğrusuna dik bu çizgiler ortadan ikiye bölünerek, merkez doğrusu üzerinde yeni köşe noktalar elde edilir. Bu noktaların birleştirilmesi ile simetri eksenindeki düşey çizgiler elde edilir. Bundan sonra yapılacak iş dört çizginin belirlediği bölgeleri üst seviyeli katı model elemanı olan alanlara dönüştürmektir. Böylece katı model oluşturulur. Çizgiler dereceli olarak bölünerek eleman sayı ve yoğunluğu kontrol edilmektedir.

Diş kökü bölgesindeki gerilme değişimine tatminkar yaklaşımı sağlamak için bu bölgede eleman boyutları küçük tutulmaktadır. Uygun eleman dağılımını sağlamak gayesi ile Şekil 5.1'de gösterilen katı model elde edilirken yukarıda ayrıntılı anlatılan yol izlenmiştir.

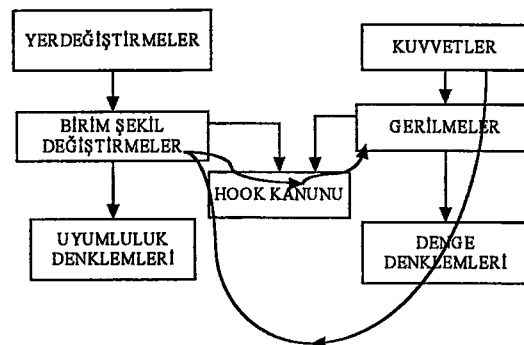
5.3.2 Eleman Tipi ve Malzeme Özelliklerinin Seçilmesi

Dişli çark iki boyutlu olarak modellendiğinden, bu modellemeye uygun eleman tipleri PLANE42 ve PLANE82 'dir. Eleman Şekil 5.2' de görülmektedir.



Şekil 5.2 PLANE42 ve PLANE82 Sonlu eleman tipleri

Malzeme homojen ve isotropiktir. Çeliğin elastisite modülü ve poisson oranı malzeme özellikleridir. Elastisite modülü kuvvet kontrollü problemlerde (gerilmenin bir dış kuvvetin etkisinden meydana geldiği problemler) gerilme değerine etki etmemektedir. Bunun nedeni gerilmelerin hesaplanmasında takip edilen yolda elastisite modülünün net etkisinin olmamasıdır. Şekil 5.3'de bu tip problemlerde elastisite teorisinin tatbik akış şeması görülmektedir. Poisson oranında belli sınırlar dahilinde çözümü etkilemez.



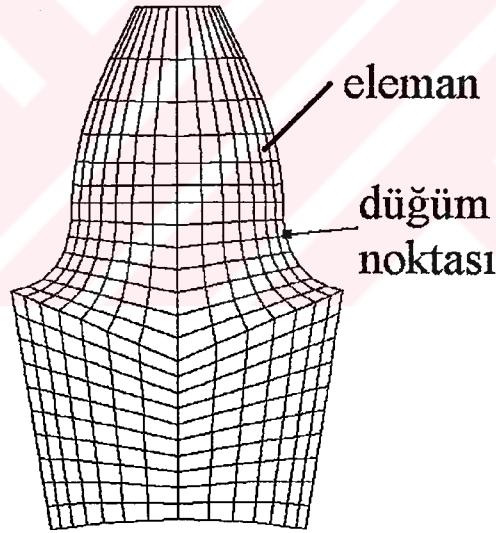
Şekil 5.3 Kuvvet kontrollü problemlerde gerilmelerin hesap adımları

5.3.3 Eleman Dağılımının Tayini....

Azami gerilmeler diş kökü bölgesinde ortaya çıkmaktadır. Diş kökünden diş içine doğru bu gerilmeler azalmaktadır. Bu bölgedeki gerilme değişimine tatminkar yaklaşım sağlamak gayesi ile eleman sıklığı kök bölgesinde arttırılır. Bu da bölgenin kök bölgesinde en küçük boyutta eleman olacak şekilde dereceli olarak bölümlendirilmesini gerektirir. Bölgenin sınırlarında çizgiler dereceli olarak bölümlendirilir. Bir çizginin kaç parçaya ayrılacağı ve nasıl derecelendirileceğini tayin eden sayılar kullanıcı tarafından programa girilir.

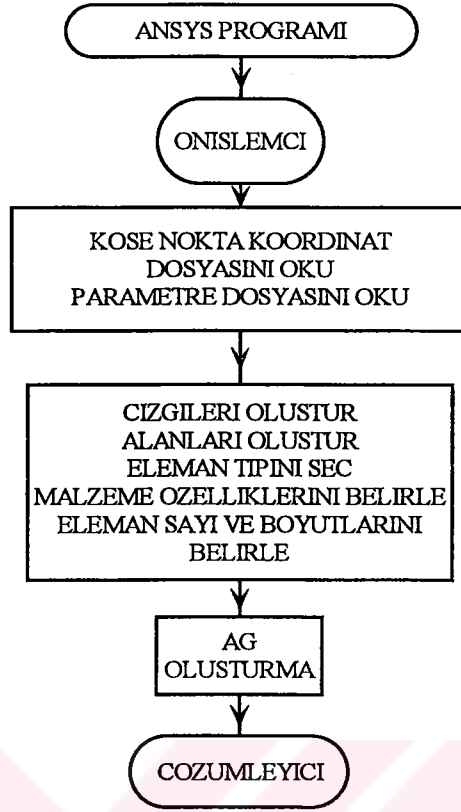
5.3.4 Eleman Ağının Oluşturulması

Problemin katı modelinin, eleman tipinin, malzeme özelliklerinin ve eleman dağılımının tayin edilmesinden sonra bir komutla sonlu elemanlar modeli elde edilmektedir. Şekil 5.4’de düz dişli çarkın sonlu elemanlar modeli görülmektedir.



Şekil 5.4 Düz dişli çark sonlu elemanlar modeli

Bu şekilde önışlemci modülünde yapılması gereken işlemler tamamlanmış olur. Yukarıda anlatılan işlemleri gerçekleştirmek için ANSYS programlama lisansı ile yazılan modelleme ve analiz programının önışlemci modülünde icra ettiği işlemlerin akış şeması Şekil 5.5’de görülmektedir.



Şekil 5.5 Önışlemcide yapılan işlemlerin akış şeması

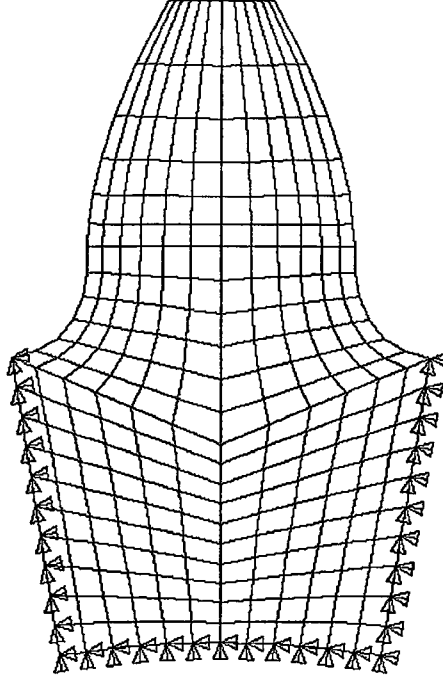
5.4 Çözümleyici Modülünde Yapılan İşlemler

5.4.1 Modele Tatbik Edilen Sınır Şartları

Bu modülde sonlu elemanlar modeline sınır şartları tatbik edilir. Kinematik sınır şartları geçmenin toleransına bağlıdır.

Sıkı geçme halinde dış sektörünün (sonlu elemanlar modeli) radyal kenarlarındaki ve taban yarıçapındaki düğüm noktalarına hareket kısıtlaması verilir. Gevşek geçme halinde ise sadece radyal kenarlara hareket kısıtlaması verilir. Kinematik sınır şartları tatbik edilmiş model Şekil 5.6'da gösterilmiştir.

Statik sınır şartı ise dış kuvvetidir. Düğüm noktalarına tatbik edilir.



Şekil 5.6 Kinematik sınır şartları tatbik edilmiş model

5.4.2 Sınır Şartlarının Parametrik Olarak Tatbiki

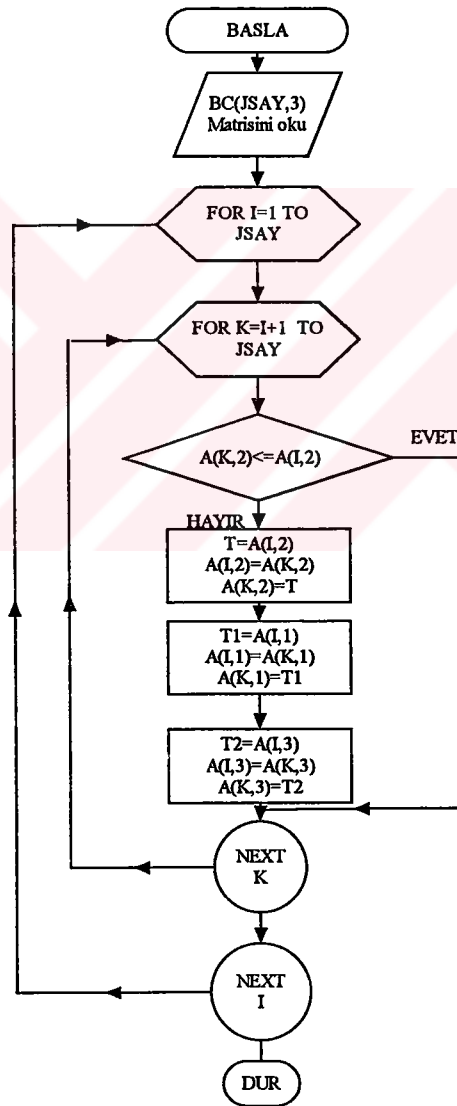
Modelde eleman sayısı değiştiğinde doğal olarak düğüm noktalarının numaraları değişmektedir. Bu nedenle sınır şartlarının uygun düğüm noktalarına tatbiki parametrik olarak gerçekleştirilmektedir.

Herhangi bir düğüm noktasının koordinatı silindirik koordinat sisteminde kolaylıkla ifade edilmektir. Orijine olan radyal mesafenin ve konum açısının tayin edilmesi ile doğru düğüm noktası seçilmiş olur. Bunları tayin eden büyükler hesaplayıcı programın çıkışı veri dosyalarından okunmaktadır.

Diş kuvveti modele temel dairesine teğet doğrultuda etki etmektedir. Bunun için her tatbik noktasındaki yükleme açısına göre koordinat eksenini döndürülmüştür. Bu şekilde normal kuvveti bileşenlerine ayırmaya gerek kalmaz.

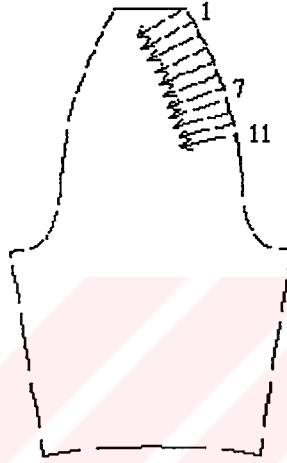
Profilde seçilen düğüm noktalarına diş kuvvetinin otomatik tatbiki için bir makro program geliştirilmiştir. Bu makro program seçilen noktaların numaraları, yarıçap vektörleri ve gerekli yükleme açılarından oluşan bir dizi yaratır. Bu dizi 3 sütun ve seçilen düğüm noktası sayısı kadar satır sayılıdır. Dizi yarıçap sütununa göre büyüktür

küçüğe doğru sıralanır. Sıralama işlemi ilgili APDL (ANSYS Parametric Design Language) komutu ile gerçekleştirilmektedir[29]. Sıralanmış diziden satırların okunması ile, o satırdaki düğüm noktası karşılık gelen yükleme açısına göre global kartezyen koordinatlardan döndürülmüş yerel koordinata transfer edilir. Bu şekilde dış kuvveti profile normal doğrultuda tatbik edilir. Bu noktadaki yükleme için yükleme dosyası (load file) oluşturulur. Bu işlem tüm satırlar için tekrarlanır. Böylelikle satır sayısı kadar ayrı yükleme dosyaları elde edilir. Şekil 5.7’de söz konusu diziyi 2. Sütununa göre büyük değerden küçük değere sıralanması işleminin akış şeması görülmektedir.



Şekil 5.7 Sıralama akış diagramı

Bu makro programla, ağ konfigürasyonuna bakılmaksızın modül, diş sayısı ve kavrama açısı aynı olmak kaydıyla modelin sağ tarafında seçilen düğüm noktalarına statik sınır şartı (evolvent profile normal doğrultuda diş kuvveti) tatbik edilmektedir. Düğüm noktaları istendiğinde kullanıcı tarafından profilin sağ tarafından tek tek seçilebilir. Diğer bir seçim yolu ise profilin sağ tarafında katı model elemanı olan çizgileri seçip bunlara karşılık gelen düğüm noktalarını kullanmaktır. Şekil 5.8’de yukarıda akış şeması verilen sıralama programı neticesinde sırayla tatbik edilen statik sınır şartları görülmektedir.



Şekil 5.8 Yük tatbik yerinin değişimi

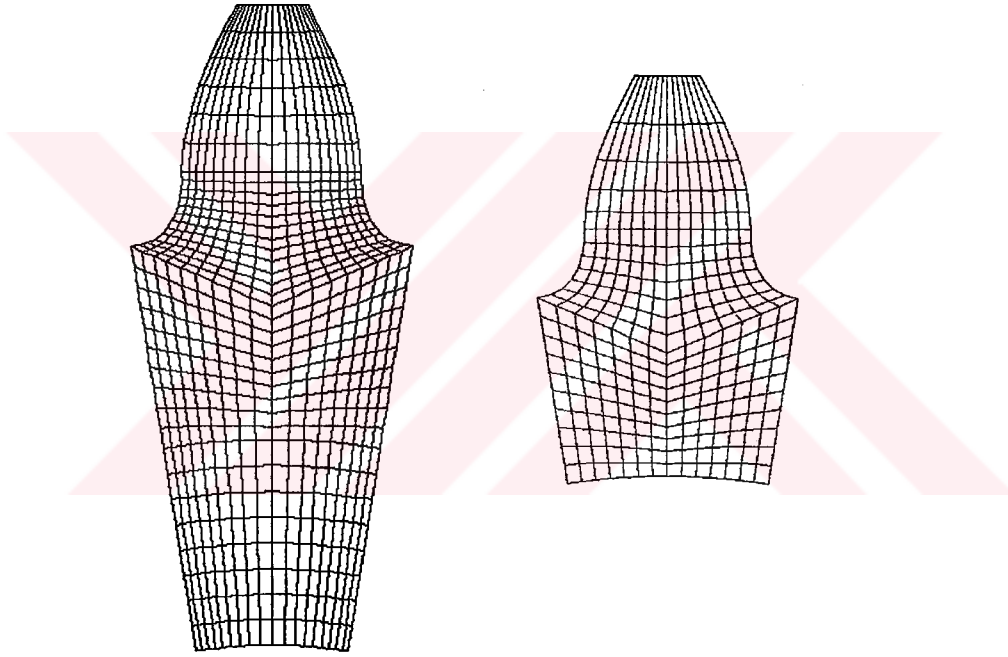
Geliştirilen programın çözümleyici modülünde icra ettiği işlemlerin akış şeması Şekil 5.9’da verilmiştir.



Şekil 5.9 Çözümleyici modülünde icra edilen işlemlerin akış şeması

5.5 Göbek Kalınlığının Modellenmesi

Göbek kalınlığının gerilmelere olan etkisini incelemek gayesi ile geliştirilen modelde, modül değerinde kalınlığı haiz dişli sektöre yine modül değerinde isteğe bağlı sayıda kalınlık artımı verilmektedir. Bu durumda program yüklendiğinde ne kadar göbek kalınlığı verilmesi kullanıcıdan istenmektedir. Geliştirilen çevrimde, ilave kalınlık istenmediği takdirde mevcut modele sınır şartları tatbik edilmektedir. İlave kalınlık istendiğinde, modele sektör ilave edilmektedir (Şekil 5.10). Sektöre ait ölçülerde parametrik tayin edilmektedir. Kinematik sınır şartları bu yeni duruma uygun parametrelerin kullanılmasıyla tatbik edilmektedir.



Şekil 5.10 Göbek kalınlığının ilave edilmesi

Kinematik sınır şartlarının tatbikinde katı modelden faydalanılmaktadır. Dişli sektörün radyal kenarlarındaki çizgi elemanlar seçilmiş, bu çizgilerin üzerindeki düğüm noktalarına kinematik sınır şartı tatbik edilmiştir. Diş kuvveti ise daha önce anlatılan şekilde tatbik edilmektedir. Profilin sağ tarafındaki düğüm noktalarının koordinatlarının değerlendirilmesi ile her bir noktaya diş kuvveti normal doğrultuda tatbik edilmektedir.

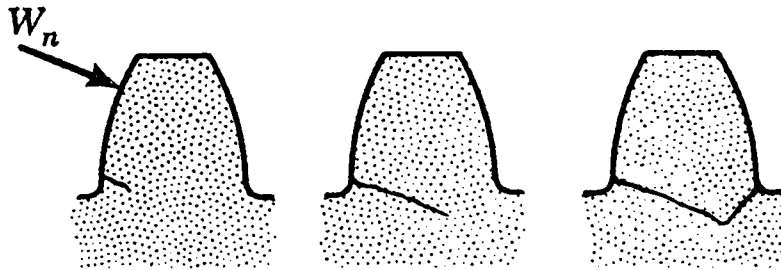
6. GERİLMELERİN İNCELENMESİ

6.1 Giriş

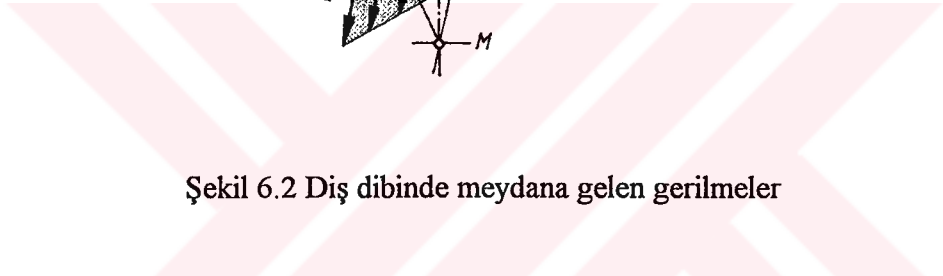
Çalışmanın bu bölümünde dişli çarklarda meydana gelen diş dibi gerilmeleri ele alınmıştır. Mukavemet modelleri hakkında bilgi verilmiştir. Sonlu elemanlar metodu ile analizde dişdibi bölgesindeki kritik kesit kolaylıkla tayin edilmektedir. Tesis edilen sonlu elemanlar modeli çeşitli sınır şartlarında çözümlenmiştir. Çözüm neticesinde kritik kesitte gerilmelerin değişimini gösteren grafikler elde edilmiştir. Neticeler literatürdeki misallerle karşılaştırılmıştır.

6.2 Kritik Kesitin Tayininde Mukavemet Modelleri

Kavramada dişe etki eden diş kuvveti teğetsel ve radyal bileşenlerine ayrılabilir. Teğetsel bileşen dişdibinde uniform eğilme gerilmesini, radyal bileşen diş kesitinde uniform basma gerilmesini oluşturmaktadır. Bu basma gerilmesi nedeniyle basma tarafında gerilmelerin mutlak değeri daha büyüktür. Tecrübeler göstermiştir ki, hasara yol açan çatlaklar çekme tarafında meydana gelmekte ve basma tarafına doğru ilerlemektedir (Şekil 6.1). Bu nedenle çekme tarafındaki gerilmeler hesaplamalarda göz önüne alınır. Şekil 6.2’de diş ucundan yükleme halinde diş kesitinde meydana gelen gerilmeler gösterilmiştir

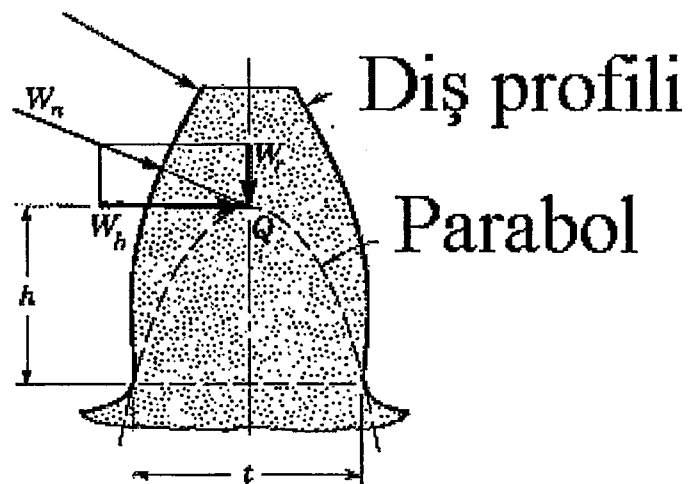


Şekil 6.1 Dişdibinde yorulma kırılmasının gelişmesi



Şekil 6.2 Diş dibinde meydana gelen gerilmeler

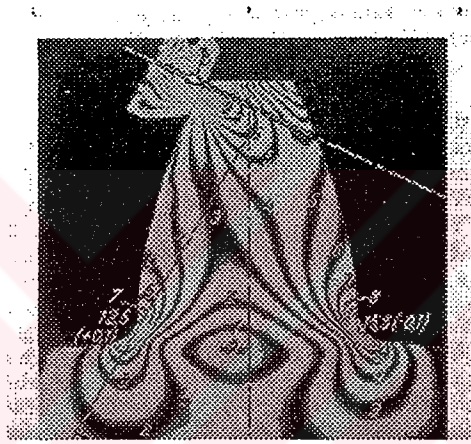
Dişli çarkların gerilme analizi için kurulan mukavemet modellerinde diş ankastre kiriş olarak ele alınmaktadır. Şekil 6.3’de LEWIS tarafından tesis edilen mukavemet modeli görülmektedir.



Şekil 6.3 Lewis mukavemet modeli

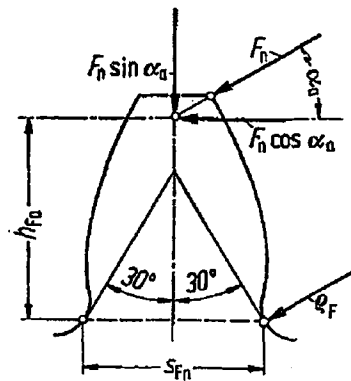
LEWIS diş üzerinde eşit mukavemete sahip bir kiriş tanımlamıştır. Parabolik formdaki kirişin tepe noktası yük tatbik doğrultusu ile diş merkez doğrusunun (simetri eksen) kesim noktasıdır. Esas olarak diş, diş dibi haricinde her bölgede parabolik kirişten daha mukavimdir. Bu nedenle kritik kesit parabolün dişdibi eğrisine teğet olduğu yerdir. Modelde diş dibindeki gerilme yığılmasının etkisi göz önüne alınmamıştır. [33]

Optik gerilme analizleri, en yüksek eğilme gerilmelerinin dişdibinde ve iyi bir yaklaşımla diş merkez doğrusuna 30° lik açı yapan diş dibindeki yuvarlatmaya teğetlerin temas noktalarında hasıl olduğunu gösterir [34]. Şekil 6.4’de optik gerilme analizi neticesinde yapıdaki gerilmelerin dağılımı görülmektedir.



Şekil 6.4 Optik gerilme analizi

Buna göre diş dibindeki gerilme yığılmasının ve diş formunun eğilme gerilmesine etkisini göz önüne alan ifade tesis edilmiştir[35]. Şekil 6.5’de görüldüğü gibi diş kuvveti diş merkez doğrusuna indirgenerek bileşenlerine ayrılmıştır.



Şekil 6.5 Diş kritik kesiti

Diş dibindeki çekme tarafındaki azami gerilmeyi veren ifade,

$$\sigma_{Fa} = \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} \quad (6.1)$$

Kesitteki eğilme gerilmesini veren ifade,

$$\sigma_{eğ} = \frac{F_N \cos \alpha_a h_{Fa}}{bs_{Fn}^2 / 6} \quad (6.2)$$

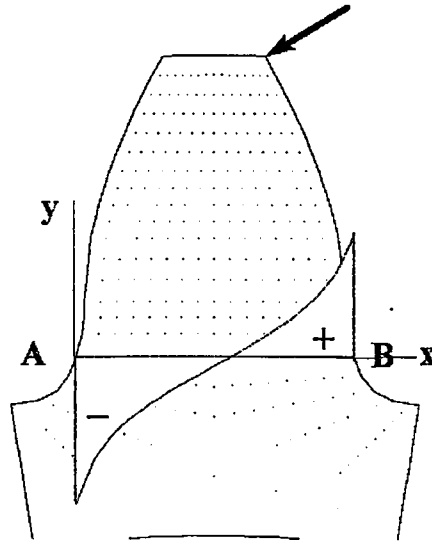
Form faktörü,

$$Y_{Fa} = \frac{6(h_{Fa} / m) \cos \alpha_a}{(s_{Fn} / m)^2 \cos \alpha} \quad (6.3)$$

Diş dibindeki gerilme yığılması ifade eden Gerilme yığılması faktörü,

$$Y_{Sa} = \left(1,2 + 0,13 s_{Fn} / h_{Fa}\right) \left(s_{Fn} / 2 \rho_F\right)^{1/(1,21+2,3 h_{Fa} / s_{Fn})} \quad (6.4)$$

Sonlu elemanlar metodu ile yapılan gerilme analizinde, yapıda gerilmenin maksimum olduğu nokta kolaylıkla tayin edilmektedir. Kritik kesit gerilmenin maksimum olduğu dişdibindeki noktadan basma tarafındaki simetrisine çizilen doğruyla belirlenmektedir. (Şekil 6.6)

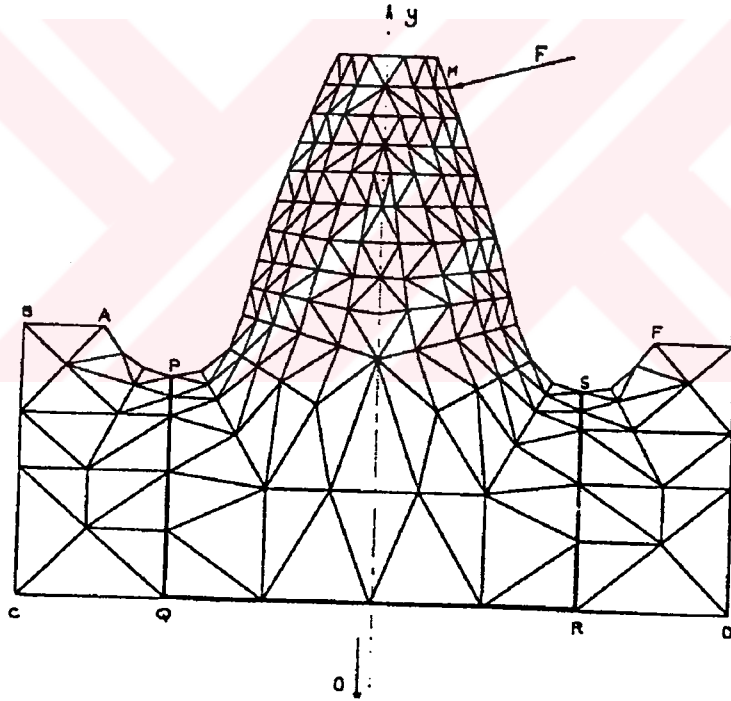


Şekil 6.6 Kritik kesitin tayini

6.3 Literatürdeki Tesis Edilmiş Sonlu Eleman Ağları

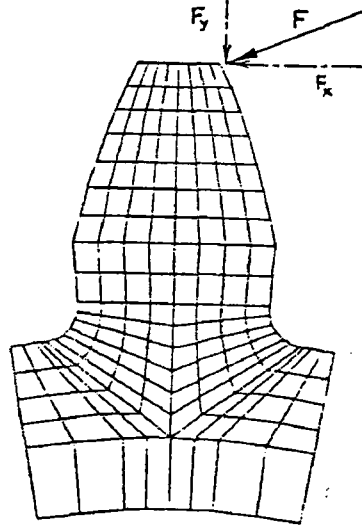
Literatürdeki genel eğilimde dişli çark sonlu eleman modelleri tek dışten tesis edilmiştir. Dış kuvvetide modellere tekil yük olarak tatbik edilmiştir. Ağlar incelendiğinde diş merkez doğrusuna simetrik olarak tesis edildikleri ve kök bölgesindeki gerilme yığılmasını temsil etmek için eleman yoğunluğunun bu bölgeden simetri eksenine göre tedrici olarak arttırıldığı görülmektedir.

CHABERT ve diğ. iki boyutlu dişli çark sonlu eleman modelini 6-düğüm noktalı üçgen elemanlar ile tesis etmişlerdir. Düzlem birim şekil değiştirme kabulü yapılmıştır. Hesaplamalarda kolaylık açısından tek dışten tesis edilen modelin yeterli olacağı belirtilmiştir. Yük diş ucuna yakın bir mesafeden tekil olarak tatbik edilmiştir. Şekil 6.7 'da tesis edilen model görülmektedir. [3]



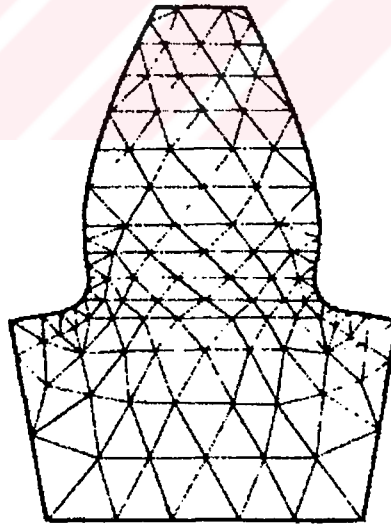
Şekil 6.7 CHABERT ve diğ. sonlu elemanlar modeli

SOMPRAKIT ve diğ., dört düğüm noktalı dörtgen sonlu elemanla tesis ettikleri model tek dışten oluşmaktadır. Yük tekil kuvvet olarak diş ucuna tatbik edilmiştir. Model Şekil 6.8'de gösterilmiştir.[8]



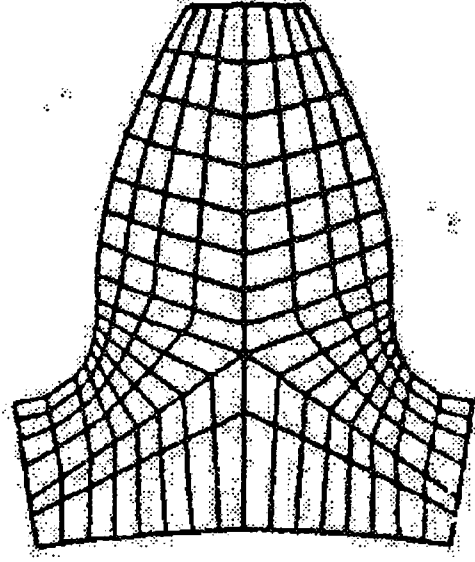
Şekil 6.8 SOMPRAKIT ve diğ. modeli

CHANG ve diğ. üçgen sonlu elemanla tesis ettikleri model de tek diştten oluşmaktadır(Şekil 6.9). Yük tekil kuvvet olarak diğ ucuna tatbik edilmiştir. Makalede yükün tatbik edilmesinden dolayı tatbik noktasının hemen altında meydana gelen yerel yığılma haricinde azami gerilmelerin kök bölgesinde meydana geldiği belirtilmiştir.[7]



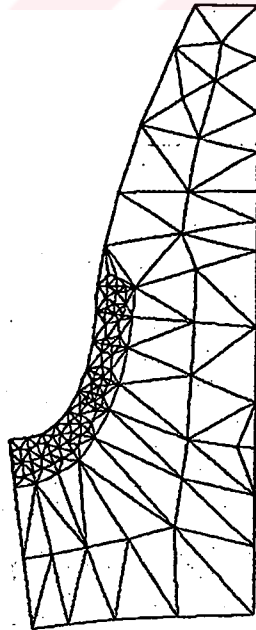
Şekil 6.9 CHANG ve diğ. modeli

SUN ve diğ., tesis ettikleri model Şekil 6.10 'da görülmektedir. Model dörtgen elemanlardan tesis edilmiştir. İki boyutlu modelde düzlem gerilme hali kabul edilmiştir.[9]



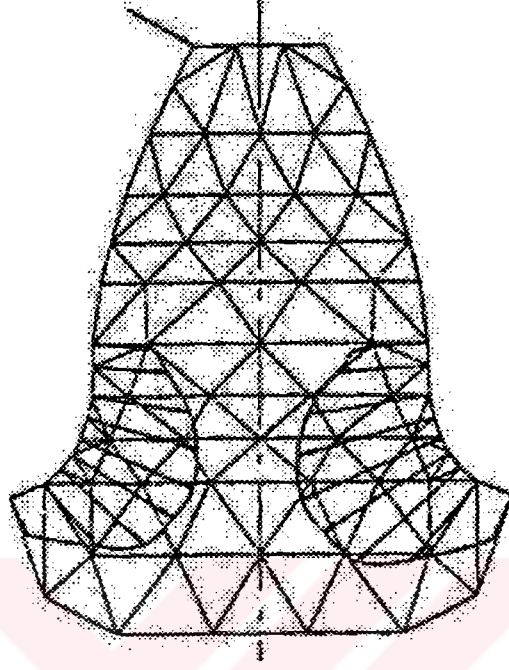
Şekil 6.10 SUN ve diğ. sonlu elemanlar modeli

BIBEL ve diğ. 6-düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman ile tesis ettikleri model Şekil 6.11’de görülmektedir. Düzlem gerilme hali kabul edilmiştir [11]. Kök bölgesindeki gerilme yığılmasını temsil etmek için yapıdaki sadece kök civarında eleman sayısı artırılmıştır. Bu bölgenin dışında eleman büyüklüğü ani olarak artmaktadır. Model bu açıdan diğer modellere benzememektedir.



Şekil 6.11 BIBEL ve diğ. sonlu elemanlar modeli

TOBE ve diğ., 6-düğüm noktalı eleman tesisinde düzlem şekil değiştirme halini kabul etmişlerdir. Yük dış ucuna tekil olarak tatbik edilmiştir. Şekil 6.12’de model görülmektedir. [6]

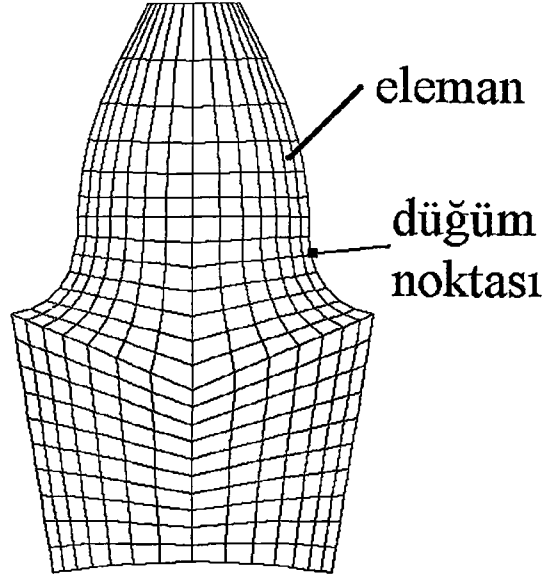


Şekil 6.12 TOBE ve diğ. sonlu elemanlar modeli

Yukarıdaki bütün modellerde dış kuvveti tekil yük olarak tatbik edilmektedir. Yükün tekil tatbik edilmesinden doğan yük tatbik noktası civarındaki yerel yığılmanın etkisi SAINT-VENANT prensibine göre ihmal edilmektedir. Bu prensibe göre sınır şartlarının bu şekilde tatbikinden dolayı meydana gelen yerel davranışın etkisi makul bir mesafede hızla sönümlenmektedir[36,37]. Bu bakımdan yerel yığılma incelemeye söz konusu bölge olan ve tatbik noktasından yeterince uzaklıkta olan kök bölgesindeki gerilme değerini etkilememektedir. Bu durum literatürde incelenen makalelerde açık olarak belirtilmemekle birlikte modellerde yükü tatbik ederken bu prensip göz önüne alınmıştır.

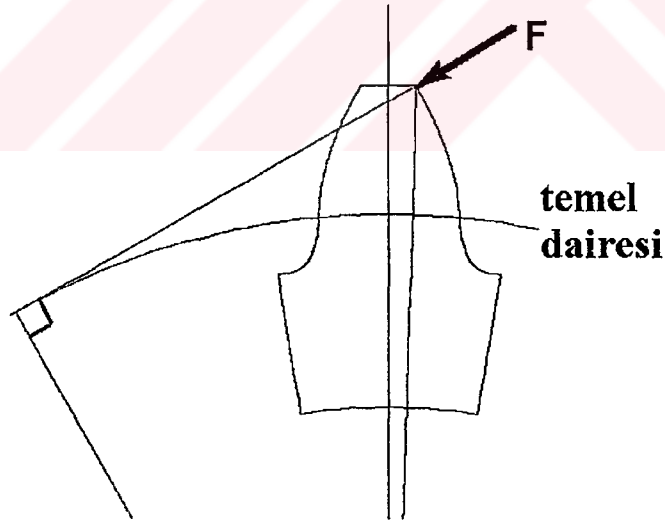
6.4 Çalışmada Geliştirilen Modelde Gerilmelerin İncelenmesi

Kaynakların değerlendirilmesi neticesinde edinilen tecrübeye ve 5.Bölüm’de açıklanan hususlara göre tesis edilen düz dişli çark sonlu elemanlar modeli Şekil 6.13’de görülmektedir.



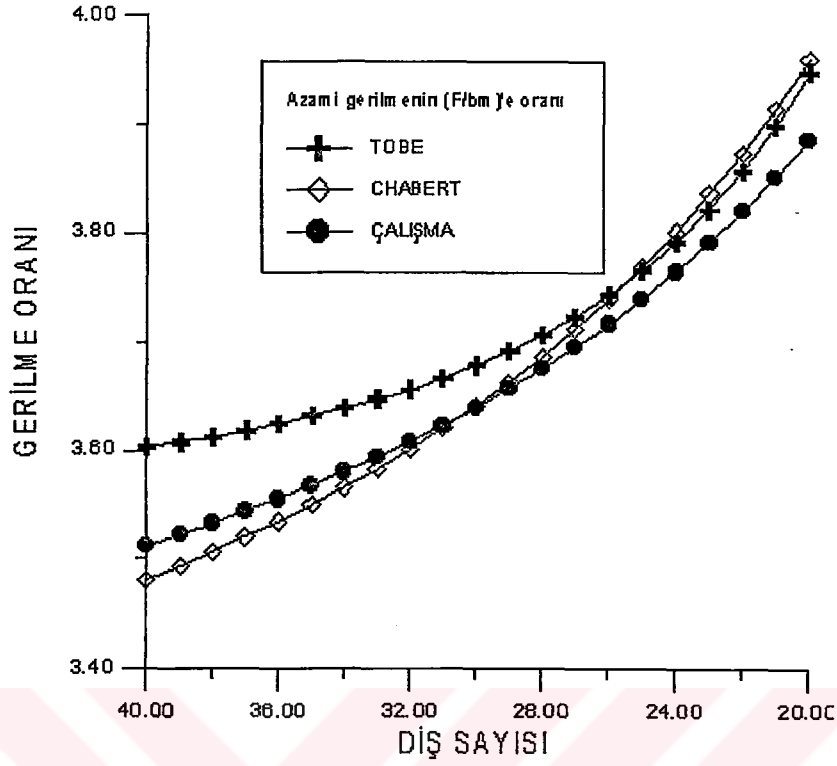
Şekil 6.13 Analizde kullanılan sonlu elemanlar modeli

Modele tatbik diş ucundan tatbik edilmesi Şekil 6.14’de görülmektedir. Yük profile normal doğrultuda tatbik edilmektedir.



Şekil 6.14 Diş ucundan yükleme hali

Şekil 6.15’deki grafikte 20 ile 40 diş sayıları arasında modelin analiz neticeleri CHABERT ve TOBE’nin neticeleri ile karşılaştırılarak verilmiştir. Bu grafikte dişucundan yükleme halinde dişdibi çekme tarafındaki azami gerilme incelenmiştir.



Şekil 6.15 Çekme tarafındaki azami gerilmenin karşılaştırılması

CHABERT ve diğerlerinin tayin ettiği ifade,

$$\sigma_{\max} = \left[3 + \left(38 - 50 \frac{\rho}{m} \right) \frac{1}{z} \right] \frac{F}{bm} \quad (6.5)$$

F : Normal kuvvet (N)
b : Diş genişliği (mm)
m : Modül (mm)
z : Diş sayısı
ρ : Takım ucu yuvarlatması

TOBE ve diğerlerinin tayin ettiği ifade,

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{bm} \left[2.50 \left(\frac{1}{z} \right) + 2600 \left(\frac{1}{z} \right)^3 + 3.50 \right] \exp \left[\left\{ 2.50 \left(\frac{1}{z} \right) - 50 \right\} \frac{\lambda_p}{m} \right] \quad (6.6)$$

F : Normal kuvvet (N)
b : Diş genişliği

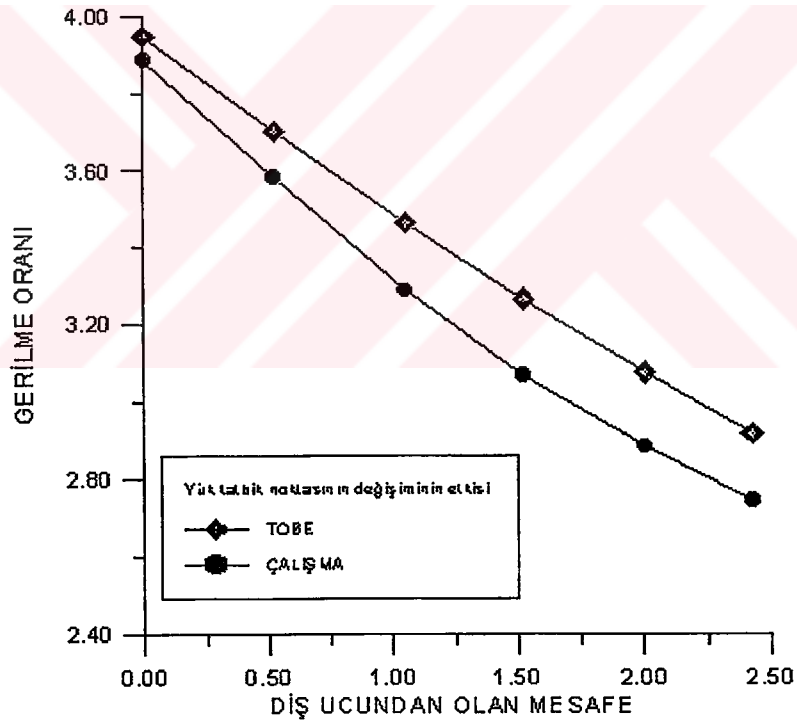
m : Modül

z : Diş sayısı

λ_p : Yük tatbik noktasından diş başı dairesine olan mesafe (Diş merkez doğrusu boyunca ölçülür)

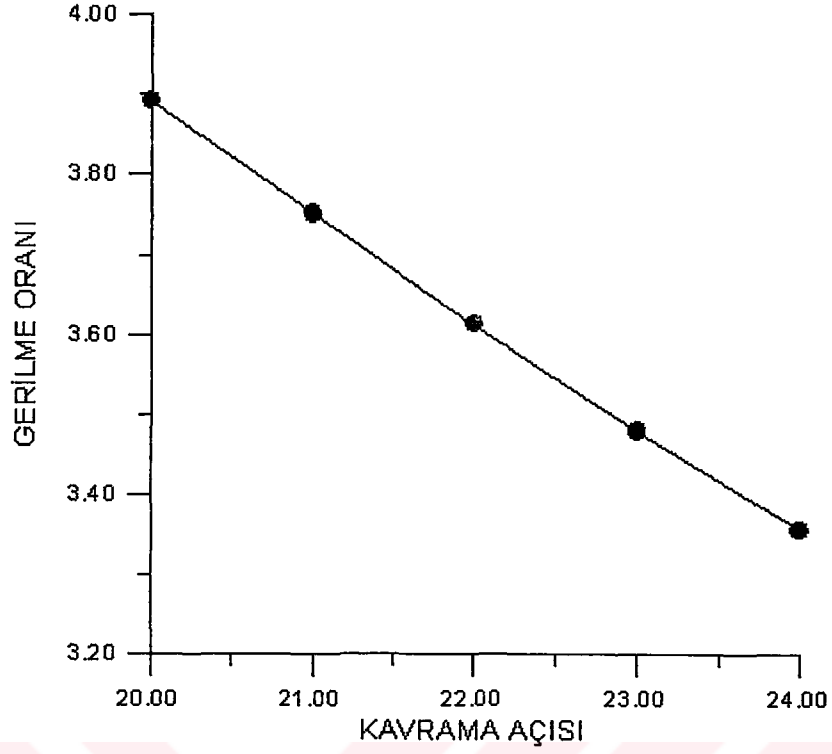
Modelde 252 eleman ve 866 düğüm noktası vardır .Model 8-düğüm noktalı dörtgen eleman ile tesis edilmiştir. Modül $m=3$ mm, sektör kalınlığı $2*m$, analizler sabit moment nakline göre belirtilen diş sayılarında yapılmıştır. ($N=6$ kw, $n=1500d/d$)

Aynı modelde yük tatbik noktasını değişimin azami gerilmelere olan etkisini gösteren grafik Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Yük sırayla grafikte belirtilen mesafelerde tatbik edilmiştir. Yük diş ucundan aşağı kaydıka moment kolu da küçüldüğünden gerilemeler azalmaktadır.



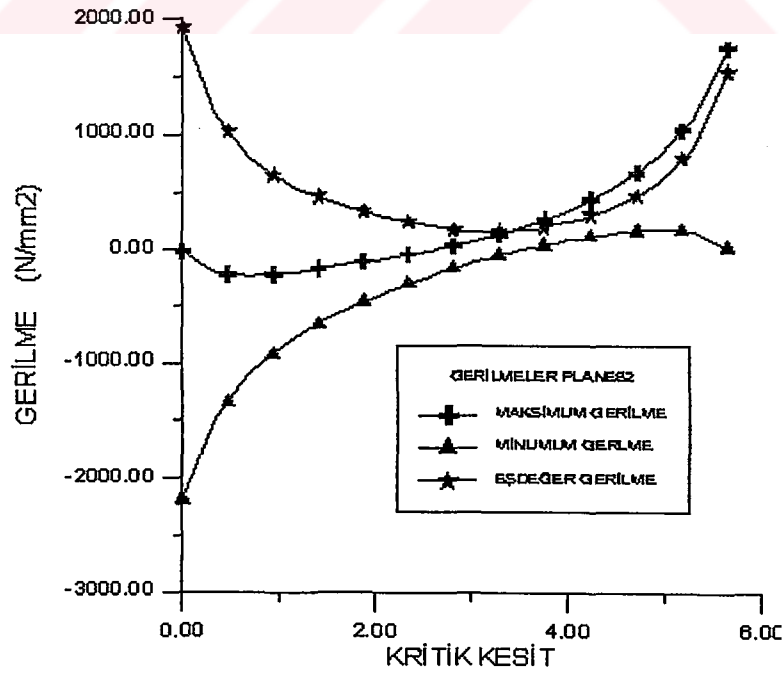
Şekil 6.16 Yük tatbik noktasının değişiminin azami gerilmelere olan etkisi

Modelde kesici takımın kavrama açısının değişmesinin dişdibindeki azami gerilmelere olan etkisi Şekil 6.17'de incelenmiştir. Kavrama açısı arttığında diş kesiti büyüdüğüden verilen bir kuvvet için diş dibindeki gerilemeler azalmaktadır.



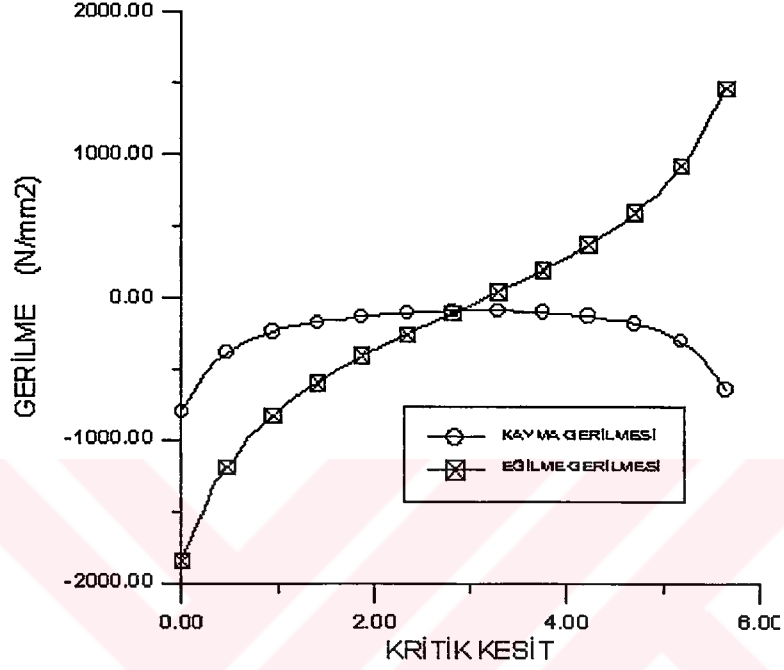
Şekil 6.17 Kavrama açısının değişmesinin azami gerilmeye etkisi

Modelde kritik kesitte gerilmelerin basma tarafından çekme tarafına doğru değişmesini gösteren grafikler Şekil 6.18 ve Şekil 6.19’da verilmiştir.



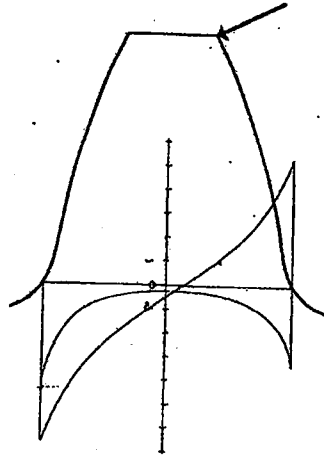
Şekil 6.18 Diş ucundan yükleme halinde gerilmeler

Maksimum asal gerilme basma tarafında sıfır değerinden başlamaktadır. Kritik kesitin ortasında sıfırdan geçmektedir. Minimum asal gerilme çekme tarafındaki diş kökünden sıfır değerini almaktadır. Eşdeğer gerilme ve kayma gerilmesi, basma tarafında daha büyük değerler almaktadır.

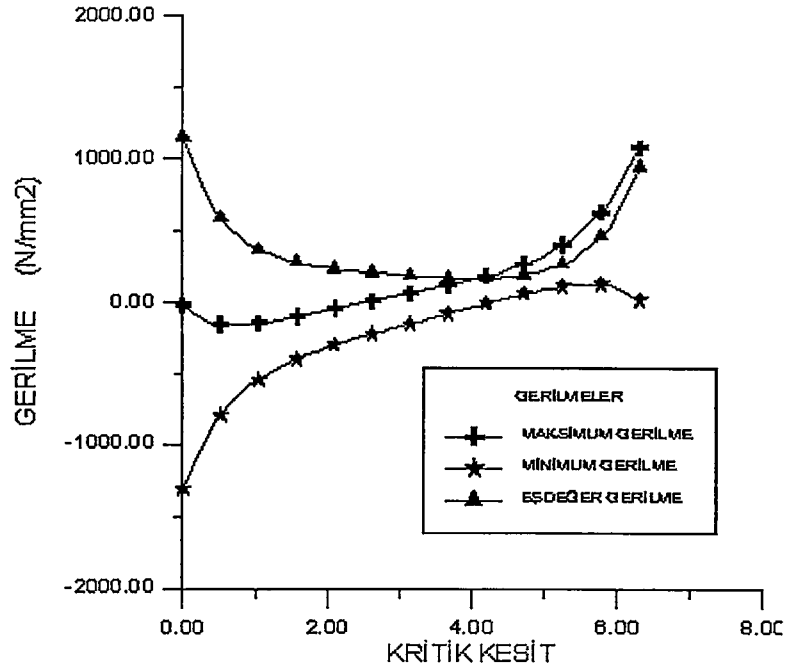


Şekil 6.19 Diş ucundan yükleme halinde gerilmeler

Şekil 6.19'deki grafik Şekil 6.20'de BARONET'in elde ettiği grafikle kalitatif olarak karşılaştırılmıştır. Gerilmeler aynı karakteristikte değişmektedir.[4]

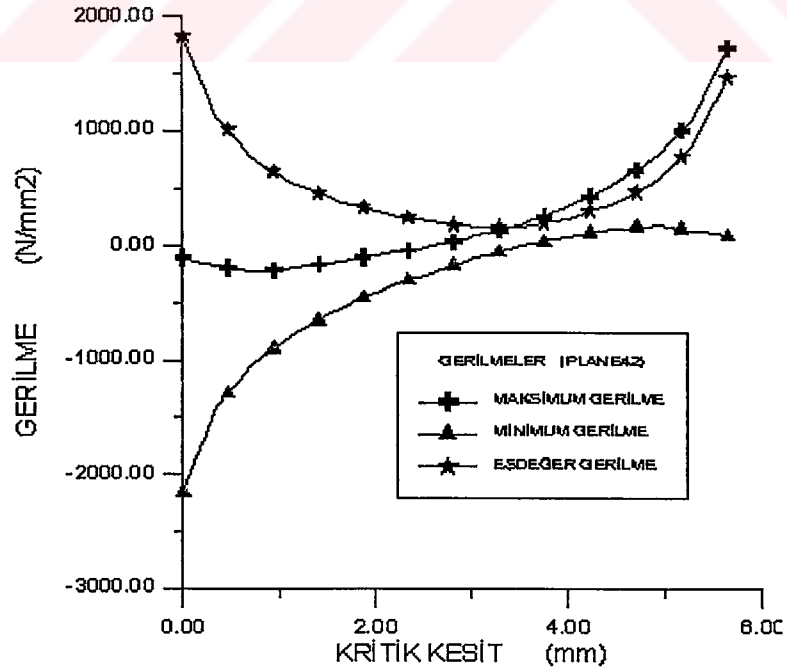


Şekil 6.20 Kritik kesitte gerilmelerin değişimi (BARONET)



Şekil 6.21 Diş ucundan 2 mm mesafede yükleme hali için gerilmeler

Diş ucundan 2 mm mesafede yükleme hali için gerilmelerin değişimi Şekil 6.21’de gösterilmiştir. Şekil 6.22’de modelin dört düğüm noktalı elemanla tesisinde elde edilen grafik gösterilmiştir.



Şekil 6.22 Dört düğüm noktalı eleman için gerilmelerin değişmesi

Modelde 252 eleman ve 308 düğüm noktası vardır. Bu grafik Şekil 6.18 deki grafikle karşılaştırıldığında maksimum asal gerilmenin basma tarafında 0'dan farklı bir değerde olduğu görülmektedir. Aradaki fark elemanın matematiksel ifadesinden kaynaklanmaktadır. 8-düğüm noktalı eleman ikinci dereceden yer değiştirme fonksiyonu ile formüle edildiğinden yapıdaki gerilmenin değişimini daha iyi bir yaklaşımla temsil etmektedir.



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonlu elemanlar metodu, modellemede sağladığı esnekliklerle, dişli çarkların gerilme analizinde kullanılmaktadır. Dişli çark problemin karakteristik özelliği olan kök bölgesindeki gerilme yığılmasını doğru temsil eden sonlu elemanlar modelinin nasıl tesis elde edileceği ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Sonlu elemanlar metodu ile modellemede çeşitli modül ve diş sayılarında tesis edilen modellerin muhtelif sınır şartlarında incelenmesi dişli çarkların yorulma ömrünü arttırmak için yapılacak ısıtma işlemi, taşlama ve bilya püskürtme işlemleri için bilgi sağlamaktadır. Bu bakımdan sonlu elemanlar metodu kısa zamanda netice veren güvenilir bir tekniktir.

Çalışmada edinilen tecrübeye göre geliştirilen dişli çark sonlu elemanlar modelinde diş geometrisini tayin eden evolvent profil ve trokoidal formda dişdibi eğrisi hassas olarak tanımlanmıştır. Ayrıca model muhtelif sınır şartlarında analizlerde otomasyon sağlayan parametrik bir yaklaşımla tesis edilmiştir. Bu şekilde analizde büyük kolaylıklar sağlanmıştır.

Geliştirilen modelin muhtelif sınır şartlarında analizleri yapılmıştır. Diş dibi bölgesindeki yorulma kırılmasına sebep olan gerilmelerin kritik kesit boyunca değişimini gösteren grafikler elde edilmiştir. Neticeler literatürde tesis edilen modeller ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar çalışmada geliştirilen modelin dişli çarkların muhtelif şartlarda fiziksel davranışını tatminkar derece incelenmesini sağlayan bir model olduğunu göstermektedir.

Geliştirilen sonlu eleman modeli daha sonraki çalışmalarda diğer dişli tiplerine ve simetrik olmayan diş profillerine tatbik edilebilir. Dişli profilini hasıl eden programın ANSYS programlama lisansı ile yazılarak çalışma dosyasının başına eklenmesi daha hızlı bir modellemeyi sağlayabilir. Ancak burada dikkat edilmesi husus gereken kullanılan parametrelerin ANSYS'in reserve parametreleri ile çakışmayacak şekilde adlandırılmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Errichello, R., 1983. Review on Gears, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 105, 283-284.
- [2] Wilcox, L. and Coleman, W., 1973. Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 95, 1139-1147.
- [3] Chabert, G., Tran, T.D. and Mathis, R., 1974. An Evaluation of Stresses and Deflection of Spur Gear Teeth Under Strain, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96, 85-93.
- [4] Baronet, C.N. and Tordion, G.V., 1973. Exact Stress Distribution in Standart Gear Teeth and Geometry Factors, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 95, 1159-1163.
- [5] Wilcox, L., 1978. Finite Element Analysis Pinpoints Gear Tooth Stresses, *Machine Design*, Vol. 50, No.4, 88-92.
- [6] Tobe, T., Kato, M. and Inoue, K., 1979. True Stress and Stifness of Spur Gear Teeth, *ASME Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, 1105-1108.
- [7] Chang, S.H., Huston, R.L. and Coy J.J., 1983. A Finite Element Stress Analysis of Spur Gears Including Fillet Radii and Rim Thickness Effects, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 105, 327-330.
- [8] Somprakit, P., Pourazdy, M. and Huston, R.L., 1989. Effect of Fitting Parameters on Spur Gear Stresses, *ASME Proceeding of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference*, Chicago, 815-822.
- [9] Sun, H., Mavripilis, D., Huston, R.L. and Oswald, F.B., 1989. Comparision of Boundary Element and Finite Element Methods in Spur Gear Root Stress Analysis, *ASME Proceeding of the International Power Transmission and Gearing Conference*, Chicago, 163-166.
- [10] Moriwaki, I., Fukuda, T., Watabe, Y. and Saito, K., 1993. Global Local Finite Element Method [GLFEM] in Gear Tooth Stress Analysis, *ASME Journal of Mechanical Design*, 115, 1008-1012.

- [11] **Bibel, G.D., Reddy, S.K. and Savage, M.**, 1994. Effects of Rim Thickness on Spur Gear Bending Stress Analysis, *ASME Journal of Mechanical Design*, 116, 1157-1162.
- [12] **Buckingham, E.**, 1949. Analytical Mechanics of Gears, McGraw-HILL Book Company Inc., New York.
- [13] **Hefeng, B., Savage, M. and Knorr, R.J.**, 1985. Computer Modelling of Rack Generated Spur Gears, *Mechanisms and Machine Theory*, 20, 351-360.
- [14] **Chang, H.L. and Tsai, Y.C.**, 1992. A Mathematical Model Of Parametric Tooth Profiles for Spur Gears, *ASME Journal of Mechanical Design*, 114, 8-16.
- [15] **Michalec, G.W. and Buchsbaum, F.**, 1973. Shifting to Metric Gears, *Machine Design*, 45, 94-97.
- [16] **ISO-53**, 1974. Cylindrical gears for general and heavy engineering-Basic Rack, *International Organization for Standardization*, Switzerland.
- [17] **DIN Taschenbuch 106**, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [18] **Litvin, F.L.**, 1994. Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, New Jersey.
- [19] **Becker, A.A.**, 1992. The Boundary Element Method in Engineering, McGraw-Hill Cambridge.
- [20] **Huebner, K.H.**, 1974. Stress Analysis and Much More, *Machine Design*, January 1974, 92-99.
- [21] **Akin, J.E.**, 1994. Finite Element Analysis and Design, Academic Press Limited, London
- [22] **Krishnamachari, S.I.**, 1993. Applied Stress Analysis of Plastics: A Mechanical Engineering Approach, Von Nostrand Reinhold, New York.
- [23] **Beer, G. and Watson, J.O.**, 1994. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers, John Wiley.
- [24] **Knight, C.E.**, 1993. The Finite Element Method in Mechanical Design, PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- [25] **Cook, R.D.**, 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, New York.

- [26] **Boresi, A.P., Schmidt , R.J. and Sidebottom, O.M.**, 1993. Advanced Mechanics of Materials, John Wiley and Sons, Singapore,
- [27] **Hsu,T. and Sinha, D.K.**, 1992. Computer Aided Design : An Integrated Approach, West Publishing Company, St.Paul.
- [28] **ANSYS User Manual for Revision 5.0** , Swanson Analysis System Inc., Houston, 1992
- [29] **ANSYS Parametric Design Language, a revision 5.0 tutorial**, Swanson Analysis System Inc., Houston, 1992
- [30] **Akkurt, M.**, 1986. Makina Elemanları Cilt 3 Dişli Çarklar, Birsen Yayınevi,
- [31] **Zahavi , E.**, 1992. The Finite Element Method in Machine Design, Prentice-Hall, New Jersey,
- [32] **Colbourne, J.R.**, 1987. The Geometry of Involute Gears, Springer-Verlag New Jersey .
- [33] **Phelan, M.R.**, 1961. Fundamentals of Mechanical Design, McGraw-Hill, New York
- [34] **Niemann, G. and Winter, H.**, 1986. Maschinenelemente, Springer-Verlag, Berlin
- [35] **DIN3990 Teil-3**, 1987. Tragfähigkeitsberechnung von Strinraedern : Berechnung der Zahnfusstragfähigkeit Beuth Verlag GmbH,
- [36] **Budynas, R.G.**, 1999. Advanced Strength and Applied Stress Analysis, McGraw-Hill, Singapore.
- [37] **Mottram, J.T. and Shaw, C.,T. ,** 1996. Using Finite Elements in Mechanical Design, McGraw-Hill, New York.

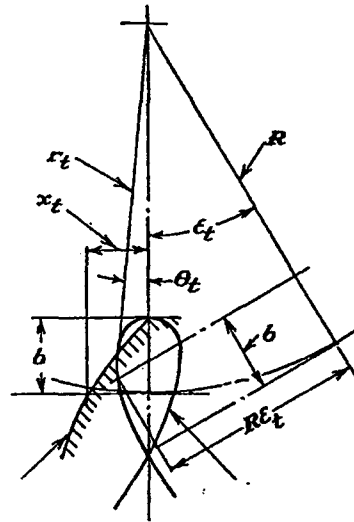
EK A DIŞ DİBİ EĞRİSİNİ TAYİN EDEN İFADELER

Düz dişli çarkta diş dibi dairesini evolvent profile bağlayan dibi eğrisini (fillet) tayin eden ifadeler aşağıda ele alınmıştır. [12]

A.1 Takım Ucunun Çark Diş Dbinde Trokoidi

Takım olarak çubuk dişli profili ele alındığında, trokoid çark dişinin dişdibi yuvarlatma formunu vermektedir. Altan kesme olmaması halinde, bu trokoid hasil edilen çark profiline teğet olacaktır. Bu trokoid yörüngeyi tayin eden ifadeler aşağıda verilmiştir.

- R: Çarkın taksimat yarıçapı
b: Çubuk dişlinin keskin köşesinin taksimat hattına olan mesafesi
 r_t : Trokoidin herhangi bir yarıçapı
 θ_t : Trokoidin vektörel açısı
 ψ_t : Trokoide teğet olan doğru ile yarıçap vektörü arasındaki açı
 ε_t : Çarkın dönme açısı
 x_t : Çubuk dişli takım ucunun taksimat noktasına olan mesafesi



Şekil A.1 Trokoidal yörünge

$$\theta_t = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}}{R-b} \right] - \frac{\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}}{R} \quad (A.1)$$

$$\tan \psi_t = \frac{R(R-b) - r_t^2}{R\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}} \quad (A.2)$$

Bu trokoidi belli bir çark profiline uygun olarak çizmek için öncelikle her iki eğrinin orijinleri arasındaki açısı tayin etmek gerekir.

$$\text{arc } \delta = x_t/R \quad (A.3)$$

Trokoidin kartezyen koodinatlarını ise aşağıdaki ifadelerle tayin edilir.

θ' : Diş merkezinde veya diş boşluğu merkezindeki orijinal vektörel açı

θ_t : Trokoidin hesaplanan vektörel açısı

θ''_t : Trokoidin dişmerkezi veya diş boşluğundan Y eksenine nazaran vektörel açısı

$$\theta''_t = \theta' - \delta \pm \theta_t \quad (A.4)$$

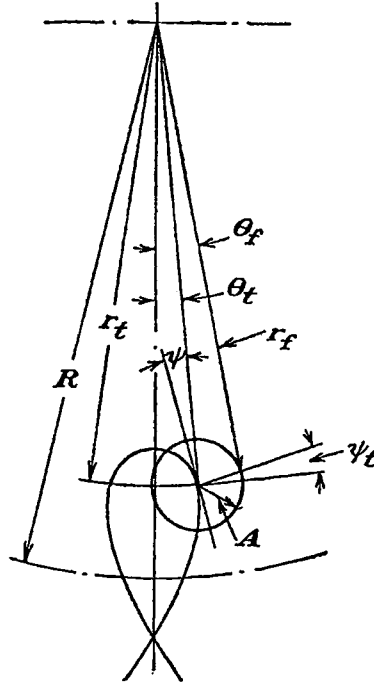
Neticede kartezyen koordinatlar

$$X_t = r_t \sin \theta''_t \quad (A.5)$$

$$Y_t = r_t \cos \theta''_t \quad (A.6)$$

A.2 Takımın Yuvarlatılmış Ucunun Çark Dışdibinde Trokoidi

Çubuk dişli takımın diş uçları genelde yuvarlatılmıştır. Bu halde uç yuvarlatmasının merkezi A.1, A.2 ve A.3 numaralı ifadeler ile tayin edilen yörüngeyi takip eder. Fakat yuvarlatmanın gerçek formu merkezleri trokoidal yörünge üzerinde bulunan ve uç yuvarlatması yarıçapında dairelerin zarfı (envelope) olacaktır. Bu yuvarlatma formu analitik olarak incelenebilmektedir.



Şekil A.2 Ucu yuvarlatılmış takımın hasıl ettiği trokoidal form

- x_t : Çubuk dişlinin uc yuvarlatması merkezinin taksimat hattından ölçülen absisi
 b : Uç yuvarlatması merkezinin taksimat hattından ölçülen ordinatı
 A : Yuvarlatma yarıçapı
 r_f : Trokoidal yuvarlatma formun herhangi bir yarıçapı
 θ_f : Trokoidal yuvarlatma formun vektörel açısı
 δ : Trokoid ile çark diş profilinin orijinleri arasındaki açı

Şekil A.2'den aşağıdaki ifadeler tanzim edilebilir.

$$r_f = \sqrt{r_t^2 + A^2 - 2Ar_t \sin \psi_t} \quad (A.7)$$

$$\theta_f = \theta_t + \cos^{-1}[(r_t - A \sin \psi_t) / r_f] \quad (A.8)$$

A.3 Kesici Takımın ve Çark Dişinin Yükseklikleri Verildiğinde, Evolvent Profil İle Trokoid Eğrisinin Teğet Noktasının Yarıçapının Tayini.

Altan kesme olmadığında, trokoidal dişdibi yuvarlatması evolvent profile teğet olur. Helisel freze takım (veya çubuk dişli) dişi için bu teğet noktası, takım profilinin düz

kısımının sonunun yörüngesinin kavrama eğrisini kestiği yerdir. Şekil A.3’de bu durum görülmektedir.

R_f : Yuvarlatmanın en üst noktasına olan yarıçap.

R : Taksimat yarıçapı

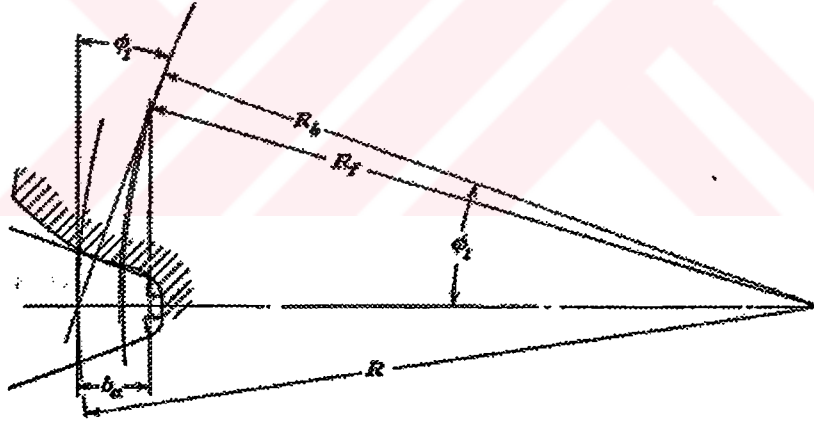
R_b : Temel dairesi yarıçapı

ϕ_1 : Taksimat dairesindeki kavrama açısı .

b_a : Takımın taksimat hattından yuvarlatılmış köşenin başlangıcına olan mesafe

Şekilden aşağıdaki ifade yazılabilir.

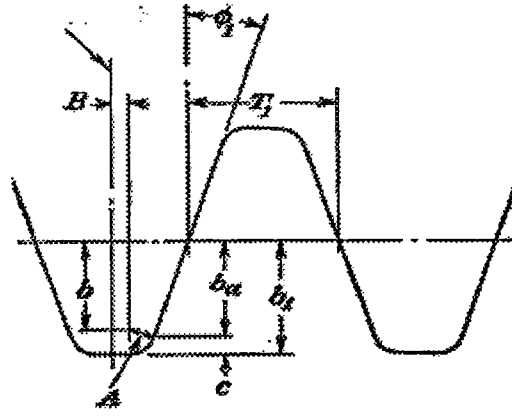
$$R_f = \sqrt{\left[R \sin \phi_1 - \left(\frac{b_a}{\sin \phi_1} \right) \right]^2 + R_b^2} \quad (A.9)$$



Şekil A.3 Evolvent profile trokoidal kök eğrisinin teğet noktası

A.4 Köşeleri Yuvarlatılmış Takımla Kök Eğrisi Hasıl Etme

İlk olarak yuvarlatılmış köşenin eğrilik merkezinin yeri ve eğrilik yarıçapının hesaplanması gerekmektedir. Şekilde kremayer şeklindeki takımın (veya helisel frezenin) geometrisi görülmektedir.



Şekil A. 4 Kesici takımın geometrisi

- T_1 : Çarkın taksimat dairesindeki diş kalınlığı, ve çubuk dişlinin (veya helisel frezenin) taksimat doğrusundaki boşluğunun genişliği
- R : Taksimat dairesi yarıçapı
- p : Diş taksimatı.
- ϕ_1 : Taksimat dairesindeki kavrama açısı ve çubuk dişlinin (veya helisel frezenin) yarı profil açısı.
- b_1 : Çarkın dişdibi yüksekliği ve takımın dişbaşı yüksekliği.
- b_a : Takımın taksimat doğrusundan köşe yuvarlatmasının başlangıcına olan mesafe.
- A : Yuvarlatılmış köşenin yarıçapı.
- b : Takımın taksimat doğrusundan köşe yuvarlatmasının merkezine olan mesafe.
- B : Takımın merkezinden geçen düşey doğru ile köşe yuvarlatmasının merkezi arasındaki mesafe.
- c : Diş boşluğu.

Buna göre aşağıdaki ifadeler tanzim edilebilir.

$$c = b_1 - b_a = A (1 - \sin \phi_1) \quad (\text{A.10})$$

$$A = (b_1 - b_a) / (1 - \sin \phi_1) \quad (\text{A.11})$$

$$b = b_1 - A \quad (\text{A.12})$$

$$B = (T_1/2) - (b \tan \phi_1 + A / \cos \phi_1) \quad (\text{A.13})$$

δ_s : Diş boşluğunun merkezinden geçen doğru ile trokoidin orijini arasındaki açı.

$$\delta_s = B/R \quad (A.14)$$

δ_t : Dişin merkezinden geçen doğru ile trokoidin orijini arasındaki açı.

$$\delta_t = ((p/2) - B)/R \quad (A.15)$$

Yuvarlatma merkezinin trokoidal yörüngesini aşağıdaki denklemler tayin etmektedir.

r_t : Trokoidin herhangi yarıçapı

θ_t : Trokoidin vektörel açısı

ψ_t : Trokoide teğet olan doğru ile yarıçap vektörü arasındaki açı

$$\theta_t = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}}{R-b} \right] - \frac{\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}}{R} \quad (A.16)$$

$$\tan \psi_t = \frac{R(R-b) - r_t^2}{R\sqrt{r_t^2 - (R-b)^2}} \quad (A.17)$$

Diş dibi yuvarlatmasının koordinatların tayin eden ifadeler,

$$r_f = \sqrt{r_t^2 + A^2 - 2Ar_t \sin \psi_t} \quad (A.18)$$

$$\theta_f = \theta_t + \cos^{-1} \frac{r_t^2 - A \sin \psi_t}{r_f} \quad (A.19)$$

r_f : Diş dibi yuvarlatmasının herhangi bir yarıçapı.

θ_f : Diş dibi yuvarlatmasının vektörel açısı.

θ'' : Seçilen merkez doğrusuna göre dişdibi yuvarlatmasının vektörel açısı

X_f : Diş dibi yuvarlatmasının absisi

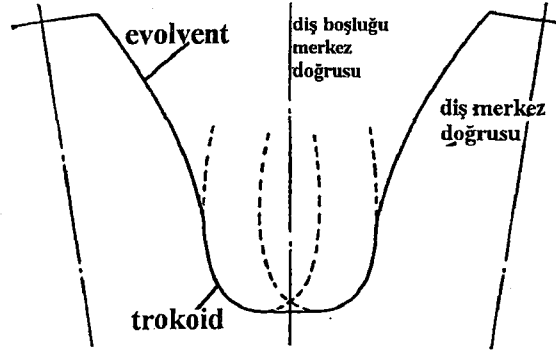
Y_f : Diş dibi yuvarlatmasının ordinatı

$$\theta''_f = \delta + \theta_f \quad (A.20)$$

$$X_f = r_f \sin \theta_f \quad (A.21)$$

$$Y_f = r_f \cos \theta_f \quad (A.22)$$

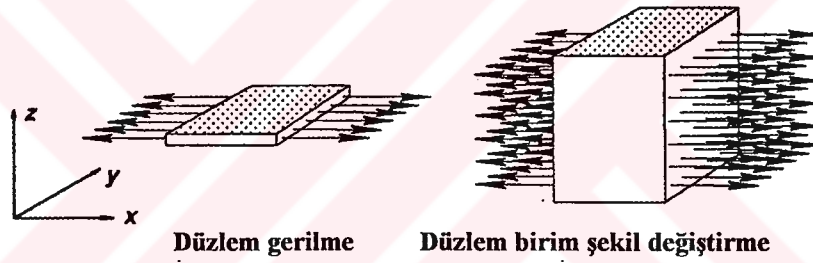
Bu şekilde diş dibi yuvarlatmasının koordinatları tayin edilmiş olur. şekil A.5’de diş kök eğrisi gösterilmiştir.



şekil A.5 Diş kök eğrisi

EK B İKİ BOYUTLU MODELLEME

Problem geometrisi bir düzlemde tanımlanabilir ve tatbik edilen yüklerde aynı düzlemde ise, bu durumda problem düzlemsel (2 boyutlu) olarak incelenebilir. İki boyutlu problemlerin iki genel hali vardır: düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme. Düzlem gerilme, yapıların düzlemdeki boyutlarına nazaran küçük kalınlıkta olması durumunda söz konusudur. Bu durumda düzlem dışı koordinata bağlı gerilme bileşenlerinin tümü sıfırdır. Kalınlık düzlemdeki boyutlardan son derece büyükse bu durumda düzlem şekil değiştirme hali vardır. Düzlem şekil değiştirme halinde düzlem dışı doğrultuda birim şekil değiştirmeler sıfırdır.



Şekil B.1 İki boyutlu katı geometrisi

Teorik olarak düzlem gerilme halinde kalınlık sıfıra, düzlem şekil değiştirme halinde kalınlık sonsuza gider. Kalınlık sonlu değerde ve aşağı yukarı düzlemdeki boyutlarla aynı ise bu durumda üç boyutlu hal söz konusudur. Bununla birlikte pratikte sadece düzlem yükleri varsa, düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme yaklaşımları gerçek 3 boyutlu çözüme uygundur. Düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme çözümleri genelde benzer ve bazı durumlarda ise aynı neticeyi vermektedir. [24]

Elastisite teorisinde türetilen ifadeler iki boyutlu problemlerin çözümünü sağlar. Bu ifadeler yer değiştirme, birim şekil değiştirme ve gerilme bileşenlerini birbirine bağlamaktadır. Lineer elastisite mühendislik problemlerin incelenmesinde esas alınmaktadır. Malzeme homojen ve izotropiktir. Küçük deformasyonlara izin verilmiştir. Gerilme ve birim şekil değiştirme, veya kuvvet ve deformasyon arasında

lineer bir bağı vardır. Tatbik edilen kuvvetler kaldırıldığında deformasyonlarda ortadan kalkar.

İki boyutlu yapıda, düzlemde herhangi bir noktanın hareketini tanımlayan iki yer değiştirme bileşeni vardır. Bir cisim x-y koordinat sistemine yerleştirildiğinde x yönündeki yer değiştirme bileşeni $u(x,y)$ ve y yönündeki yer değiştirme bileşeni $v(x,y)$ dir. Düzlem çözümde birim şekil değiştirme bileşenleri ϵ_x , ϵ_y ve γ_{xy} dir. Birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (B.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (B.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (B.3)$$

Bu birim şekil değiştirmelerine karşılık gelen gerilmeler σ_x , σ_y ve τ_{xy} dir. Düzlem gerilmede σ_z , τ_{yz} ve τ_{xz} sıfırdır. Düzlem gerilme hali için,

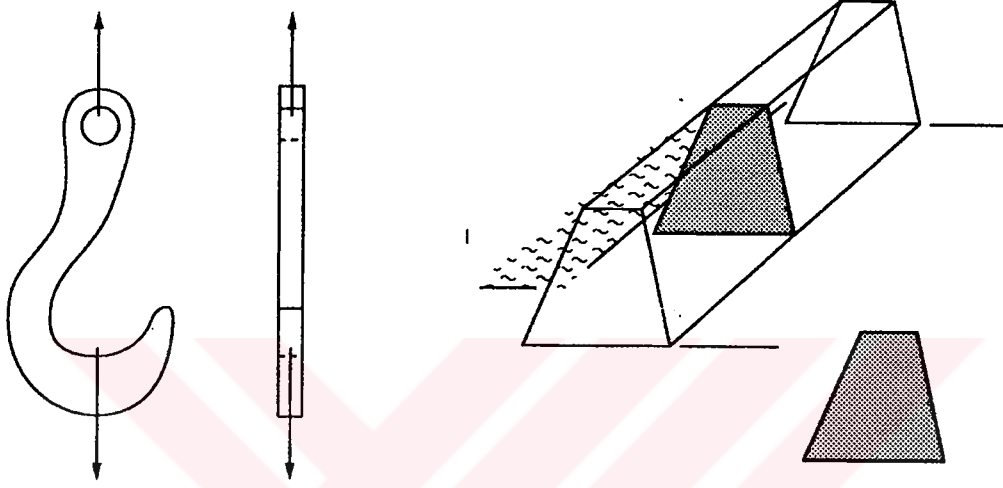
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (B.4)$$

Bu ifadede σ_x ve σ_y normal gerilme bileşenleri, τ_{xy} kayma gerilmesi, E elastisite modülü ve ν poisson oranıdır.

Düzlem şekil değiştirme durumunda, birim şekil değiştirme bileşenleri ϵ_z , γ_{xz} ve γ_{yz} sıfırdır. Gerilme bileşenleri σ_z , τ_{xz} ve τ_{yz} sıfırdan farklı ve σ_z belirgin bir değerde olabilir. σ_z , $\epsilon_z=0$ şartının sağlanması durumunda düzlemdeki bileşenlerden doğrudan hesaplanabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Aşağıdaki şekillerde iki boyutlu modellenebilen problemler görülmektedir.



Şekil B.2 Düzlemsel ele alınan problemler

EK C. DIŞ PROFİLİ HASIL EDEN BASIC PROGRAMI

```
10 INPUT"modul";M
20 REM standart takımla dis profili hasil eden program
30 REM bicak ISO 53 yuvarlatma .375*m
40 REM yazilim * cuneyt fetvaci
50 REM profil genere eder ve koordinat dosyası ile
60 REM parametre dosyası hazırlar
70 INPUT"pinyon dis sayisi ";Z1
80 INPUT"cark dis sayisi ";Z2
90 INPUT"kavrama acisi ";DA
100 INPUT"cember kal faktor ";J
110 BA=M
120 B1=1.25*M
130 RD=DA*3.141592/180
140 R=M*Z1/2 : R2=M*Z2/2
150 RT=R+M : RT2=R2+M
160 RDD=R-1.25*M : RDD2=R2-1.25*M
170 RB=R*COS(RD) : RBC=R2*COS(RD)
180 T1=M*3.141592/2
190 RF1=R*SIN(RD)
200 RF2=BA/SIN(RD)
210 RF3=(RF1-RF2)^2
220 RB2=RB*RB : RB2C=RBC*RBC
230 RF=(RF3+RB2)^.5
240 PRINT RF,RB,RDD
250 REM trachoid
260 REM *****
270 REM A=(B1-BA)/(1-SIN(RD))
280 A=.375*M
290 B=B1-A
300 BB=(T1/2)-((B*TAN(RD))+(A/COS(RD)))
310 PRINT BB
320 P=M*3.141592
330 REM *****
340 PB=P*COS(RD)
350 KAVOR=((SQR(RT*RT-RB*RB))+(SQR(RT2*RT2-RBC*RBC))-(R+R2)*SIN(RD))/PB
360 KITA=((SQR(RT*RT-RB*RB))+(SQR(RT2*RT2-RBC*RBC))-(R+R2)*SIN(RD))
370 RAP=SQR(RB*RB+((R+R2)*SIN(RD)-SQR(RT*RT-RB*RB))^2)
380 RHSC=SQR(RB*RB+((R+R2)*SIN(RD)-SQR(RT2*RT2-RBC*RBC)+PB)^2)
390 RW=SQR(RB*RB+(SQR(RT*RT-RB*RB)-(KAVOR-1)*PB)^2)
400 RLSC=SQR(RB*RB+(SQR(RT*RT-RB*RB)-PB)^2)
410 REM *****
```

```

420 DELTT=BB/R : REM *****Diş boşluğu
430 REM DELTT=((P/2)-BB)/R : REM diş merkezi
440 OPEN"kompl.dat" FOR OUTPUT AS #1 : REM KOORDİNAT DOSYASI
450 OPEN"fillet.dat"FOR OUTPUT AS #2
460 PRINT#2,"a=";A
470 PRINT#2,"m=";M
480 PRINT#2,"z=";Z1
490 PRINT#2,"rtak=";R
500 PRINT#2,"ekar=";R*2
510 PRINT#2,"kava=";DA
520 PRINT#2,"kavr=";RD
530 PRINT#2,"daci=";90/Z1
540 PRINT#2,"rim=";RDD-(M*J) : REM KALINLIK MODUL KATI
550 PRINT#2,"j=";J
560 PRINT#2,"base=";RB
570 PRINT#2,"kita=";KITA
580 CLOSE#2
590 REM merkez noktası
600 REM PRINT#1,"k","",",",0,"",0 : REM diş merkezi
610 REM disdibinin geometrik yeri
620 DX=0 :DY=RDD
630 LRDD=J*M
640 DYC=RDD-LRDD
650 DER=3.141592/Z1
660 CX1=DX*COS(DER)-DYC*SIN(DER)
670 CY1=DX*SIN(DER)+DYC*COS(DER)
680 PRINT#1,"k","",",",CX1,"",CY1
690 PRINT#1,"k","",",",-CX1,"",CY1
700 DX1=DX*COS(DER)-DY*SIN(DER)
710 DY1=DX*SIN(DER)+DY*COS(DER)
720 PRINT#1,"k","",",",DX1,"",DY1
730 PRINT#1,"k","",",",-DX1,"",DY1
740 REM *****
750 FOR RVAR=(R-B)TO RF+.03 STEP (RF-(R-B))/8
760 IF RVAR=(R-B) THEN 910
770 KOK=((RVAR^2)-(R-B)^2)^.5
780 E1=KOK/(R-B)
790 E2=KOK/R
800 E3=ATN(E1)
810 TETAT=E3-E2 : REM trakoidin vektörel açısı
820 F1=(R*(R-B))-(RVAR^2)
830 F2=R*KOK
840 KSIT=ATN(F1/F2) : REM *****
850 RAF=((RVAR*RVAR)+(A*A)-(2*A*RVAR*SIN(KSIT)))^.5
860 H=RVAR-(A*SIN(KSIT))
870 H1=H/RAF
880 H2=1.570796-ATN(H1/SQR(1-H1*H1))
890 TETAF=TETAT+H2 : REM dişdibi eğrisinin orijine göre vektörel açısı
900 GOTO 940

```

```

910 TETAF=0
920 RAF=R-B1
930 ERAF=R-B
940 TETA2F=DELTT+TETAF-(3.141592/Z1)
950 TETS2F=-DELTT-TETAF+(3.141592/Z1)
960 XF=RAF*SIN(TETA2F)
970 XFS=RAF*SIN(TETS2F)
980 YF=RAF*COS(TETA2F)
990 YFS=RAF*COS(TETS2F)
1000 PRINT RVAR,XF,YF
1010 PRINT#1,"k",",",XF,",",YF
1020 PRINT#1,"k",",",XFS,",",YFS
1030 NEXT
1040 REM egrilik merkezi
1050 TETAF=0
1060 TETA2F=DELTT+TETAF-(3.141592/Z1)
1070 TETS2F=-DELTT-TETAF+(3.141592/Z1)
1080 EXF=ERAF*SIN(TETA2F)
1090 EXFS=ERAF*SIN(TETS2F)
1100 EYF=ERAF*COS(TETA2F)
1110 EYFS=ERAF*COS(TETS2F)
1120 PRINT EXF,EYF
1130 PRINT#1,"k",",",EXF,",",EYF
1140 PRINT#1,"k",",",EXFS,",",EYFS
1150 RF1=R*SIN(RD)
1160 RF2=M/SIN(RD)
1170 RF3=(RF1-RF2)^2
1180 RB2=RB*RB
1190 RF=(RF3+RB2)^.5
1200 PRINT RF,RB,RDD
1210 OPEN"taks.dat"FOR OUTPUT AS#3
1220 OPEN"fillet.dat"FOR APPEND AS#2
1230 FOR RVAR=RF TO RHSC+.03 STEP (RHSC-RF)/3
1240 X=RB/RVAR
1250 REM IF RVAR=RB THEN 13700
1260 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))
1270 EV=TAN(RD)-RD
1280 EVX=TAN(ANG)-ANG
1290 REM T1=(3.141592*M)/2
1300 T=2*RVAR*((T1/(2*R))+EV-EVX)
1310 T2V=(T/2)/RVAR
1320 Y1=RVAR*COS(T2V)
1330 X1=RVAR*SIN(T2V)
1340 REM *****
1350 IF RVAR=RHSC THEN 1360 ELSE 1420
1360 BETAT=ANG-T2V
1370 PRINT#3,"atakh=";T2V*180/3.141592
1380 PRINT#3,"betath=";BETAT*180/3.141592
1390 PRINT#3,"btrh=";BETAT

```

```

1400 CLOSE#3
1410 REM *****
1420 PRINT RVAR,T,X1,Y1,T2V
1430 REM ****
1440 FSAY=FSAY+1
1450 PRINT RVAR,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
1460 PRINT#2,"yuk";FSAY;"=";ANG-T2V
1470 PRINT#2,"koo";FSAY;"=";T2V*180/3.141592
1480 PRINT#2,"crad";FSAY;"=";RVAR
1490 REM ****
1500 PRINT#1,"k",",",X1,",",Y1
1510 Q=-X1 : QY=Y1
1520 PRINT#1,"k",",",Q,",",Y1
1530 NEXT RVAR
1540 REM *****
1550 REM OPEN"fillet.dat"FOR APPEND AS#2
1560 FOR RVAR=RHSC TO RT+.03 STEP (RT-RHSC)/3
1570 X=RB/RVAR
1580 IF RVAR=RHSC THEN 1830
1590 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))
1600 EV=TAN(RD)-RD
1610 EVX=TAN(ANG)-ANG
1620 REM T1=(3.141592*M)/2
1630 T=2*RVAR*((T1/(2*R))+EV-EVX)
1640 T2V=(T/2)/RVAR
1650 REM IF RVAR=RT THEN 1690 ELSE 1740
1660 IF ABS(RVAR-RT)<.00001 THEN 1670 ELSE 1730
1670 PRINT#2,"rt=";RT
1680 BETA=ANG-T2V
1690 PRINT#2,"atip=";T2V*180/3.141592
1700 PRINT#2,"beta=";BETA*180/3.141592
1710 PRINT#2,"betar=";BETA
1720 REM CLOSE#2
1730 Y1=RVAR*COS(T2V)
1740 X1=RVAR*SIN(T2V)
1750 FSAY=FSAY+1
1760 PRINT RVAR,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
1770 PRINT#2,"yuk";FSAY;"=";ANG-T2V
1780 PRINT#2,"koo";FSAY;"=";T2V*180/3.141592
1790 PRINT#2,"crad";FSAY;"=";RVAR
1800 PRINT#1,"k",",",X1,",",Y1
1810 Q=-X1 : QY=Y1
1820 PRINT#1,"k",",",Q,",",Y1
1830 NEXT RVAR
1840 REM *****
1850 PRINT#1,"k",",",0,",",RT
1860 CLOSE#1,2

```

ÖZGEÇMİŞ

Cüneyt Fetvacı, 1966 yılında İstanbul'da doğdu. 1989 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesinden Makina Mühendisi olarak mezun oldu. 1992 yılında İ.T.Ü. F.B.E. Konstrüksiyon-İmalat Programında Yüksek Lisans öğrenimini tamamlayarak Yüksek Mühendis ünvanını almıştır. Aynı yıl İ.T.Ü. F.B.E. Konstrüksiyon-İmalat Programında Doktora öğrenimine başlamıştır. Makina Fakültesi Konstrüksiyon Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

