

Ağırsız Radyal Noktasal İnterpolasyon Yönetiminin İki Boyutlu Elastik Probleme Uygulanması

Ahmet ERKLİĞ*, Nihat ATMACA**, İbrahim H. GÜZELBEY*

* Gaziantep Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep – Türkiye

** Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep MYO, 27310, Gaziantep – Türkiye

ÖZET

Ağırsız yöntemler, yeni geliştirilmeye başlanmış nümerik analiz metotlardır. Sonuca hızlı ulaşması ve gerçek çözüm sonucuna yakınsaması oldukça iyidir. Radyal Noktasal İnterpolasyon metodu yeni bir ağırsız yöntemdir. Ağırsız metodların avantajlarının yanı sıra Kronecker delta özelliğine de sahiptir. Şekil fonksiyonları radyal ve polinom temel fonksiyonlardan oluşmaktadır. Kronecker delta özelliği sayesinde sınır şartları sonlu elemanlar metodundaki gibi rahatlıkla uygulanabilmektedir. Bu çalışma radyal esaslı fonksiyonu kullanan ağırsız bir yöntem olan Radyal Noktasal İnterpolasyon yönteminin (RPIM) temel teorisine girişir. Radyal Noktasal İnterpolasyon yönteminin iki boyutlu statik elastik probleme uygulandı ve sonuçlar ANSYS sonuçları ile karşılaştırıldı. Sonuçların gerçek çözümlere çok yakın olduğu görülmüştür.

ABSTRACT

Meshfree Method is a new numerical analysis method. It has excellent accuracy and rapid convergence. Radial Point Interpolation Method (RPIM) is a new meshfree method among them. It has not only all the advantages of meshfree method but also the Kronecker delta function property. Its shape function is constructed by the combination of radial and polynomial basis the combination of radial and polynomial basis functions, so it is convenient to implement the boundary conditions as the traditional FEM. This article introduced the basic theory of the radial basis function , the radial point interpolation (RPIM), and used use this method to construct the interpolation function, solve a two-dimensional static elastic problem and have a good performance.

1. Giriş

Ağırsız metotlar yeni geliştirilmekte olan nümerik bir metot olup sadece düğüm nokta bilgisine ihtiyaç duymaktadır. Elemana ihtiyaç duymadığından ağ yapısına gerek yoktur. Sonlu elemanlar metoduna göre daha az sayıda ağ yapısıyla sonuçlar gerçek çözüme daha yakın elde

edilmektedir. Sonuçların yakınsaması ve hızlı çözme kabiliyetleri sayesinde son yıllarda hızlı şekilde geliştirilmiş ve halen geliştirilmektedir. Literatürde pek çok ağsız yöntem mevcuttur. Düzgün Parça Hidrodinamik (SPH), Elemansız Galerkin Metodu (EFG), Çoğalan Çekirdek Parçacık (RKP), hp bulut metot, Noktasal İnterpolasyon Yöntemi (PIM) ve benzer şekilde şuana kadar pek çok ağsız metot geliştirilmiş durumdadır [1,2,3,4,5]. Radyal Noktasal İnterpolasyon Yöntemi yeni bir ağsız yöntem olup, şekil fonksiyonları radyal ve polinom tabanlı fonksiyonların birleşiminden oluşmaktadır. Kronecker Delta fonksiyon özelliğine sahip olduğundan sınır şartları sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi rahatlıkla uygulanabilmektedir.

Radyal Noktasal İnterpolasyon Yöntemi Polinom Noktasal İnterpolasyon Yönteminin moment matrisinin tekil çıkma problemi nedeniyle geliştirilmiştir. [1,2]

2. Radyal Temelli Fonksiyon

Radyal temelli fonksiyonda, değişken, r , ilgilenilen nokta, x , ile düğüm noktası, x_i , arasındaki mesafedir. İki boyutlu problemler için r aşağıdaki gibi yazılır:

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Radyal temelli pekçok yöntem geliştirilmiş [1]. En sık kullanılan üç çeşit radyal temelli fonksiyonlar Tablo 2.1’de verilmektedir.

Tablo 2.1 Boyutsuz şekil parametreleri ile tipik radyal temelli fonksiyonlar

	Adı	Formülü	Şekil Parametreleri
1	Multi-quadrics (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
2	Gaussian (EXP)	$R_i(x, y) = \exp \left[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c} \right)^2 \right]$	α_c
3	İnce Plaka Spline (Thin Plate Spline, TPS)	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η

α_c, q, d_c ve η şekil parametreleridir. Bu parametrelerin seçimi sonucu etkilemektedir. J.G. Wang ve G.R. Liu kitaplarında bu parametrelerin etkileri incelenmiş olup MQ’da en iyi performans için $\alpha_c = 1.42$, $q = 1.03$ olduğu belirtilmiştir [1,2]. Bu çalışmada MQ şekil fonksiyonu ve parametreler de Wang ve Liu tarafında belirtildiği gibi kullanılmıştır.

3. Radyal Noktasal İnterpolasyon Yöntemi

Radyal Noktasal İnterpolasyon yönteminde deplasman, radyal temelli ve polinom temelli olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [1,2,5]:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x) b_j = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x) \mathbf{b} \quad (3.1)$$

burada $R_i(x)$ radyal temelli fonksiyon (RBF), n RBF denklem sayısını, $p_j(x)$ polinom temelli fonksiyonu ve m polinom temelli fonksiyon sayısını göstermektedir. a_i ve b_j fonksiyonların

etki katsayılarıdır. $P_j(x)$ denklemi Pascal üçgenini kullanarak yazılır. 3.1 denklemini matris formatında yazarsak

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_0 \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (3.2)$$

burada $\mathbf{U}_s$ vektörü, $\mathbf{U}_s = \{u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n\}^T$

Radyal Temelli Fonksiyon moment matrisi

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (3.3)$$

Polinom moment matrisi

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (3.4)$$

Radyal Temelli Fonksiyonun katsayı vektörü

$$\mathbf{a}^T = \{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\} \quad (3.5)$$

polinom fonksiyon katsayı vektörü

$$\mathbf{b}^T = \{b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n\} \quad (3.6)$$

3.3 denkleminin $R_i(r_k)$ içerisindeki r_k aşağıdaki gibi tanımlanır

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad (3.7)$$

3.2 denkleminde görüldüğü gibi $n+m$ tane değişken bulunmaktadır. Ek olarak m tane kısıtlayıcı durum eklemek gerekmektedir. Kısıtlayıcı denklemi matris formatında yazarsak,

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

3.2 ve 3.8 denklemlerini birleştirip matris formatında yazarsak

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{a}_0 \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{a}_0^T = \{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m\} \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \{u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0\} \quad (3.11)$$

$\mathbf{R}_0$ matrisi simetrik olduğu için $\mathbf{G}$ matriside simetriktir. 3.9 denklemini çözersek katsayıları aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (3.12)$$

3.1 denklemini aşağıdaki gibi tekrar yazarsak

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} = \left\{ \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

3.12 denklemini kullanarak aşağıdaki form elde edilir

$$u(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \right\} \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s = \tilde{\Phi}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (3.14)$$

burada Radyal Noktasal İnterpolasyon yöntemi şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T(\mathbf{x}) &= \left\{ \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \right\} \mathbf{G}^{-1} \\ &= \{ \phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x}) \quad \phi_{n+1}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_{n+m}(\mathbf{x}) \} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sonuçta noktasal deplasman vektörü ile ilgili olarak Radyal Noktasal İnterpolasyon şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{ \phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x}) \} \quad (3.16)$$

3.14 denklemini düzenleyip tekrar yazarsak

$$u(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (3.17)$$

elde edilir.

Burada ϕ_i radyal ve polinom tabanlı şekil fonksiyondur. Şekil fonksiyonların türevleri rahatlıkla alınabilmektedir.

4. İki boyutlu denlilik denklemi

Ω problem alanındaki iki boyutlu statik elastik problem denge denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \Omega \text{ problem alanında} \quad (4.1a)$$

Sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \Gamma_t \text{ yüzeyindeki} \quad (4.1b)$$

$$u = \bar{u} \quad \Gamma_u \text{ yüzeyindeki} \quad (4.1c)$$

İki boyutlu global çözüm alanı için denge denklemi (4.1) denklemi, varyasyonel yöntem kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir [1]:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{u}^T) \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (4.2)$$

3.17'deki genel deplasman denklemi 4.2'de yerine yazılır ve düzenlenirse kontrol denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.3)$$

$$\text{burada } K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega \quad (4.4)$$

$$f = f_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i b d\Omega \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N]^T \quad (4.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

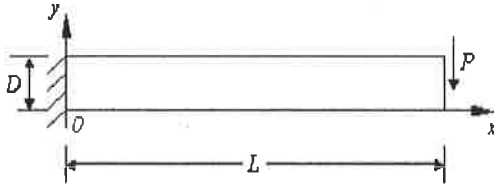
i ve j sayıları 1'den N'e değişmekte ve N, global problem alanındaki toplam düğüm sayısını göstermektedir.

5. Çözümler

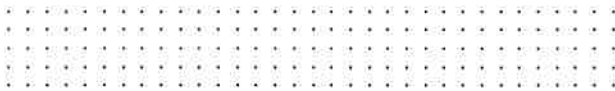
Radyal Noktasal İnterpolasyon yönteminin uygulaması için iki ayrı problem seçilmiş ve sonuçlar Ansys ve gerçek çözümler ile karşılaştırılmıştır.

5.1 Ankastre Kiriş

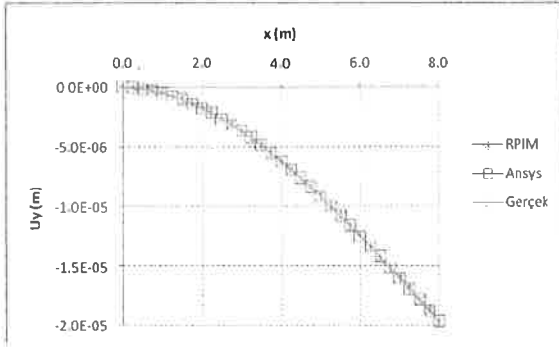
Bu problemde boy, $L = 8$ m, genişlik, $D = 1$ m boyutlarında bir kirişin ucundan $P = 1$ N'luk kuvvet uygulanmıştır (Şekil 1). Malzeme Elastik modülü $E = 105$ GPa, Poisson's oranı $\nu = 0.25$ olarak alınmıştır. Bu problemin gerçek çözümü literatürde mevcuttur. Ağsız Radyal Noktasal İnterpolasyon yöntemi için problem alanı düzgün dağıtılmış 165(33x5) düğüm noktası ve 128 (32x4) arka plan hücresinden oluşturuldu (Şekil 2). Her arka plan hücresinde 3x3 Gauss noktası kullanıldı. Yatay eksen boyunca dikey deplasman dağılımı Şekil 3'te, yatay eksen boyunca yatay gerilim dağılımı Şekil 4'te gösterilmiştir.



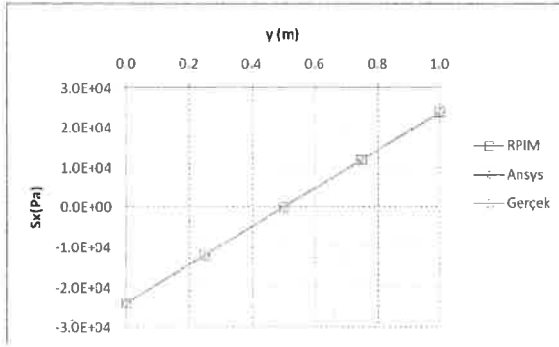
Şekil 1. Ankastre kiriş



Şekil 2. Ağsız radyal noktasal interpolasyon modeli



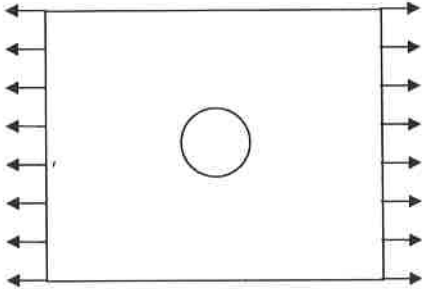
Şekil 3. Ankastre kirişin yatay eksen boyunca dikey deplasman dağılımı



Şekil 4. Ankastre kirişin x = 4 m'deki dikey eksen boyunca σ_x dağılımı

5.2 Merkezi Delikli Plaka

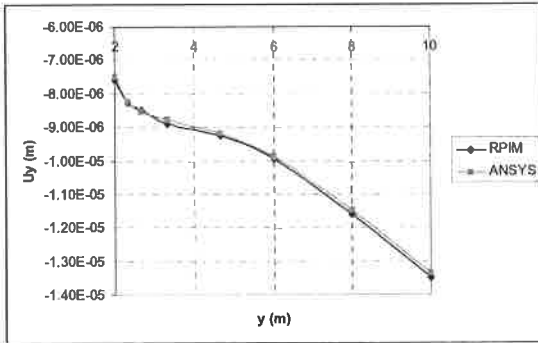
Bu çalışmada iki yönden çekme kuvveti uygulanmış delikli plaka alınmıştır. Plaka 20m x 20m ölçülerinde olup delik çapı 2 m olarak alınmıştır (Şekil 5). Malzeme Elastik modülü $E = 3 \times 10^7$ Pa, Poisson's oranı $\nu = 0.25$ olarak alınmıştır. Simetri olduğu için sadece 1/4'ü alındı ve modellendi. Alan, 72 düğüm noktası ile modellendi, 56 dikdörtgen arka plan hücresi kullanıldı ve 4 x 4 Gauss noktası kullanıldı (Şekil 6). Lineer temelli ve MQ Radyal Noktasal İntegrasyon yaklaşımında şekil parametresi olan $\alpha_c = 0.003$ olarak kullanıldı. Kıyaslama için sonlu elemanlar metodunda Plane 42 elemanı seçildi ve aynı düğüm noktalarını kullanarak 56 eleman ile model oluşturuldu. Şeklin simetrik olan yüzeylerin yatay yönde oluşan deplasman dağılımı ve dikey yönde oluşan deplasman dağılımı sırasıyla Şekil 7 ve Şekil 8'de gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 9'da $x=0$ 'da dikey eksen boyunca yatay yöndeki gerilmeler görülmektedir.



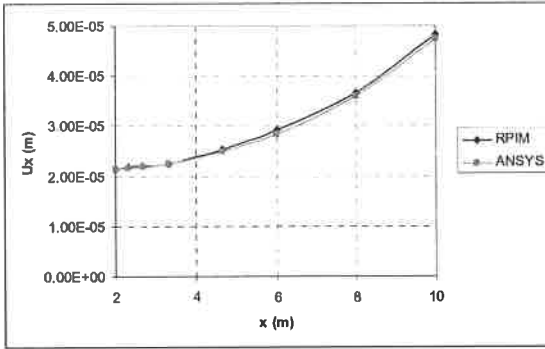
Şekil 5. Merkezi delikli plaka



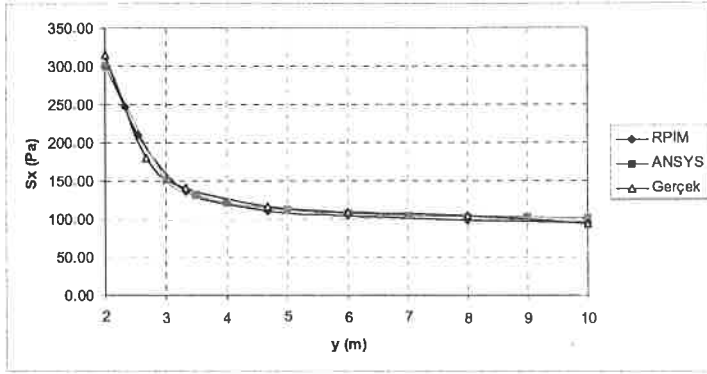
Şekil 6. Ağsız radyal noktasal interpolasyon modeli



Şekil 7. $x=0$ 'da dikey eksen boyunca oluşan dikey deplasman değişimi



Şekil 8. $y=0$ 'da yatay eksen boyunca oluşan yatay deplasman değişimi



Şekil 9. $X=0$ 'da dikey eksen boyunca oluşan yatay gerilim (σ_x)

6. Sonuçlar

Polinom temelli noktasal interpolasyon yönteminin sorunlarında biri olan moment matrisi tekilliği problemi Radyal noktasal interpolasyon yöntemi ile ortadan kalkmış ve analizlerde herhangi bir problem ile karşılaşılmamıştır. Arka plan hücresi delikli plaka örneğinde düğüm noktaları koordinatları kullanılarak seçilmesine rağmen tekillik oluşmamaktadır.

Radyal Noktasal İnterpolasyon yöntemi başarı ile iki boyutlu elastik problemlere uygulanmıştır. Yapılan örnek analiz sonuçları gerçek çözümler ve Ansys sonuçları ile örtüşmektedir.

Kaynaklar

1. G.R.Liu, Y.T.Gu. (2005), *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Springer.
2. Wang J G, Liu G R.A, Point Interpolating Meshless Method Based on Radial Functions. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2002,(54):1623-1648
3. V.M.A. Leitão, C.J.S. Alves and C. A. Duarte (2007), *Advances in Meshfree Techniques*, Springer.
4. G.R.Liu, Y.T.Gu., A Point Interpolation Method for Two-Dimensional Solids, *Int.J. Numer. Meth. Engng*, 2001, (50): 937-951
5. K. Y. Dai, G. R. Liu, K. M. Lim, X. Han, S. Y. Du, A meshfree radial point interpolation method for analysis of functionally graded material (FGM) plates, *Computational Mechanics*, 2004, (34): 213-223