

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSİK EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEMLERİN KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Onur ALBOSTAN

Anabilim Dalı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği
Programı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

OCAK 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSİK EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEMLERİN KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Onur ALBOSTAN
(504071139)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Aralık 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Ocak 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin GÖKAŞAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İbrahim EKSİN (İTÜ)
Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)

OCAK 2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmadaki katkılarından dolayı tez danışmanım Prof. Dr. Metin Gökaşan' a ve uygulamalı çalışmalarda bana gerekli ortamı hazırlayan İstanbul Teknik Üniversitesi Mekatronik Eğitim ve Araştırma Merkezi yöneticileri ile çalışanlarına çok teşekkür ederim.

Aralık 2010

Onur Albostan

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
KISALTMALAR.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xv
SUMMARY.....	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Özeti.....	1
1.3 Hipotez.....	2
2. KISMİ GERİBESLEME LİNEERİZASYONU	3
2.1 Giriş	3
2.2 Odaklı Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu.....	4
2.3 Odaksız Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu.....	4
2.4 Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu ile Swing-up Kontrol Uygulamaları.....	5
2.4.1 Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorleri.....	6
2.4.1.1 Pendubot.....	6
2.4.1.2 Acrobot.....	8
2.4.2 Eksik eyleyicili 3 DOF planar robot manipulatorleri.....	10
2.4.2.1 Konfigürasyon 1.....	11
2.4.2.2 Konfigürasyon 2.....	13
2.4.2.3 Konfigürasyon 3.....	16
2.4.3 Araba çubuk sistemi	18
2.4.4 Dönel sarkaç.....	20
3. ENERJİ TEMELLİ KONTROL.....	23
3.1 Eksik Eyleyicili Mekanik Sistemlerin Pasivite Özelliği.....	23
3.2 Enerji Temelli Swing-up Kontrol Uygulamaları.....	24
3.2.1 Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorleri.....	24
3.2.1.1 Pendubot.....	26
3.2.1.2 Acrobot.....	29
3.2.2 Eksik eyleyicili 3 DOF planar robot manipulatorleri.....	32
3.2.2.1 Konfigürasyon 1.....	36
3.2.2.2 Konfigürasyon 2.....	39
3.2.2.3 Konfigürasyon 3.....	41
3.2.3 Araba çubuk sistemi	43
3.2.4 Dönel sarkaç.....	49
4. DİĞER NONLİNEER KONTROL YÖNTEMLERİ	53
4.1 İki Kural Temelli Bulanık Kontrol.....	53
4.1.1 İki kural temelli bulanık kontrol uygulamaları	53

4.1.1.1 Pendubot	58
4.1.1.2 Acrobot	59
4.2 Kaskad Geriadımlamalı Kontrol.....	60
4.2.1 Kaskad geriadımlama yöntemi	60
4.2.2 Kaskad geriadımlamalı kontrol uygulaması	63
4.2.2.1 Eksik eyleyicili deniz aracı	63
4.3 Sistem İndirgemeli Nonlineer Kontrol.....	72
4.3.1 Sistem indirgemeli nonlineer kontrol uygulaması	72
4.3.1.1 Araba çubuk sistemi	72
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	79
KAYNAKLAR.....	81
EKLER	83

KISALTMALAR

DOF	: Serbestlik Derecesi
KGL	: Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu
ETK	: Enerji Temelli Kontrol
İKTBK	: İki Kural Temelli Bulanık Kontrol
KGK	: Kaskad Geriadımlamalı Kontrol
SİNK	: Sistem İndirgemeli Nonlineer Kontrol

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Eksik eyleyicili mekanik sistemler ve kontrol stratejileri.79

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Kısmi geribesleme lineerizasyonu blok diyagramı.....	3
Şekil 2.2 : KGL ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.	8
Şekil 2.3 : KGL ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	8
Şekil 2.4 : KGL ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.	10
Şekil 2.5 : KGL ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	10
Şekil 2.6 : KGL ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	13
Şekil 2.7 : KGL ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.....	13
Şekil 2.8 : KGL ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	15
Şekil 2.9 : KGL ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.....	15
Şekil 2.10 : KGL ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.....	17
Şekil 2.11 : KGL ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.....	18
Şekil 2.12 : KGL ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.....	19
Şekil 2.13 : KGL ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	19
Şekil 2.14 : KGL ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.....	25
Şekil 2.15 : KGL ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.....	25
Şekil 3.1 : ETK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.	28
Şekil 3.2 : ETK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	29
Şekil 3.3 : ETK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.	32

Şekil 3.4 : ETK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	32
Şekil 3.5 : ETK ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	38
Şekil 3.6 : ETK ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	38
Şekil 3.7 : ETK ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	40
Şekil 3.8 : ETK ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	40
Şekil 3.9 : ETK ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	42
Şekil 3.10 : ETK ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	43
Şekil 3.11 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	46
Şekil 3.12 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	46
Şekil 3.13 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında viskoz sürtünmenin ihmal edilmediği durumda konum ve hızların zamana göre değişimi.	47
Şekil 3.14 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında viskoz sürtünmenin ihmal edilmediği durumda kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	48
Şekil 3.15 : ETK ile gerçek Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	48
Şekil 3.16 : ETK ile gerçek Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	49
Şekil 3.17 : ETK ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında açısız konum ve hızların zamana göre değişimi.	52
Şekil 3.18 : ETK ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.	52
Şekil 4.1 : İKTBK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısız konum ve hızların zamana göre değişimi.	58
Şekil 4.2 : İKTBK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	59
Şekil 4.3 : İKTBK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısız konum ve hızların zamana göre değişimi.	59
Şekil 4.4 : İKTBK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	60
Şekil 4.5 : KGK ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.	67

Şekil 4.6 : KGK ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.	67
Şekil 4.7 : KGK ve Dönüşüm X ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.	71
Şekil 4.8 : KGK ve Dönüşüm X ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.	71
Şekil 4.9 : KGK, Dönüşüm X ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.	72
Şekil 4.10 : KGK, Dönüşüm X ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.	72
Şekil 4.11 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi/4$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi	76
Şekil 4.12 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi/4$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.	76
Şekil 4.13 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.	77
Şekil 4.14 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi	78
Şekil A.1 : 2 DOF Planar Robot Manipulatörü.	85
Şekil A.2 : 3 DOF Planar Robot Manipulatörü.	89
Şekil A.3 : Deniz Aracı.	99
Şekil A.4 : Araba Çubuk Sistemi.	101
Şekil A.5 : Dönel Sarkaç.	105

EKSİK EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEMLERİN KONTROLÜ

ÖZET

Eksik eyleyicili mekanik sistemler serbestlik derecesi sayısından daha az sayıda kontrol girişine sahip olan mekanik sistemlerdir. Eksik eyleyicili mekanik sistemlere gereksinim duyulmasında maliyeti düşürmek, donanım karmaşıklığını azaltmak, olası eyleyici arızalarında sistemin çalışmaya devam etmesini sağlamak vb. gibi nedenler yer almaktadır. Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin Lagrange dinamiklerinin ileri-yol nonlineer özellikleri, minimum fazlı olmayan sıfır dinamikler, holonomik olmayan birinci ve ikinci dereceden kısıtlar içermesi bu tip sistemlerin nonlineer kontrol araştırmaları alanında öncü bir konuma gelmesine neden olmuştur. Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin uygulama alanları arasında deniz araçları, hava ve uzay araçları, mobil robotlar, robot manipülatörleri yer almaktadır.

Eksik eyleyicili mekanik sistemleri tamamen lineerleştirmek mümkün değildir ancak kısmi lineerleştirme yöntemleri mevcuttur. Bu yöntemler içinde en çok kullanılanı kısmi geribesleme lineerizasyonudur. Kısmi geribesleme lineerizasyonu yöntemi ile eksik eyleyicili mekanik sistemlere ilişkin dinamik denklemlerin bir kısmı lineerleştirilebilmektedir. Bu doğrultuda eyleyicisiz serbestlik derecesine veya derecelere ait hareket denklemi veya denklemleri çıkış noktasını oluşturmaktadır. Kısmi geribesleme lineerizasyonu iki farklı yöntemle gerçekleştirilmektedir. Bu yöntemler sırasıyla odaklı kısmi geribesleme lineerizasyonu ve odaksız kısmi geribesleme lineerizasyonu şeklindedir. Odaklı kısmi geribesleme lineerizasyonu ile sistem ilişkin hareket denklemleri eyleyicili konfigürasyon değişkeni veya değişkenleri cinsinden lineerleştirilmektedir. Odaksız kısmi geri besleme lineerizasyonu ile ise sistem ilişkin hareket denklemleri eyleyicisiz konfigürasyon değişkeni veya değişkenleri cinsinden lineerleştirilmektedir. Her iki yöntem ile de lineerleştirilmiş hareket denklemlerinden yararlanarak ivme ileri beslemeli bir PD kontrolör tasarlamak mümkündür. Tasarlanan kontrolör ile sadece lineerleştirilmiş denklemde veya denklemlerde yer alan konfigürasyon değişkeni veya değişkenleri kontrol edilmektedir. Lineerleştirilmiş denklemde veya denklemlerde yer almayan konfigürasyon değişkeni veya değişkenleri sistemin kendi dinamik özelliği ile hareket etmektedir. Kısmi geribesleme lineerizasyonu yöntemiyle tasarlanan kontrol algoritmasında ivme ileri beslemesi ile ilgili konfigürasyon değişkeni veya değişkenlerine istenen referans yörünge takip ettirilirken, PD kontrolör ile kararlılık ve performans kriterleri sağlanmaktadır. Kısmi geribesleme lineerizasyonu bütün eksik eyleyicili mekanik sistemler üzerinde rahatlıkla uygulanabilmektedir. Bu tezde, kısmi geribesleme lineerizasyonunun eksik eyleyicili iki ve üç serbestlik dereceli planar robot manipülatörleri, araba çubuk sistemi ve dönel sarkaç üzerindeki swing-up kontrol uygulamalarına yer verilmiştir. Swing-up aksiyonunu başarmak için eksik eyleyicili iki serbestlik dereceli planar robot manipülatörlerinden Pendubot' ta odaklı Acrobat' ta odaksız kısmi geribesleme lineerizasyonu, eksik eyleyicili üç serbestlik dereceli planar robot manipülatörlerinde birinci ve ikinci konfigürasyonda odaksız

üçüncü konfigürasyonda odaklı kısmi geribesleme lineerizasyonu, araba çubuk sistemi ve dönel sarkaçta odaklı kısmi geribesleme lineerizasyonu tercih edilmiştir.

Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin kontrolünde sıklıkla kullanılan diğer bir yöntem enerji temelli kontrol algoritmasıdır. Enerji temelli kontrol algoritması bütün eksik eyleyicili mekanik sistemlerde var olan pasivite özelliği üzerine kurulmuş bir algoritmadır. Pasivite özelliği, eksik eyleyicili mekanik sistemlere ait genel hareket denklemleri ifadesinin matris gösteriminde yer alan kütle (eylemsizlik) matrisi ve hız matrisi arasındaki skew-symmetry özelliği kullanılarak ortaya çıkarılmıştır. Pasivite özelliği ile eksik eyleyicili mekanik sistemlerin harcadığı enerjinin bir alt sınırı olduğu bilinmektedir ve enerjideki değişim ile eyleyicisiz konfigürasyon değişkenleri veya değişkenlerinin kontrolü sağlanmaktadır. Eksik eyleyicili mekanik sisteme ait toplam enerji ile kinetik enerji arasında kurulan ilişki ile pozisyon ve hareket kontrolü yapmak oldukça zordur. Bu nedenle enerji temelli kontrol algoritmasında toplam enerji ile potansiyel enerji arasındaki ilişkiden faydalanılmaktadır. Enerji temelli kontrol algoritmasının uygulanabilmesi için ele alınan eksik eyleyicili mekanik sisteme ilişkin en az bir konfigürasyon değişkeninin dikey düzlemde hareket yeteneğine sahip olması gerekmektedir. Enerji temelli kontrol algoritmasında geribesleme kararlılık problemi Lyapunov kararlılık koşulu sağlanarak çözümlenmektedir. Lyapunov kararlılık koşuluna göre bir aday Lyapunov fonksiyonu belirlenmektedir. Lyapunov fonksiyonunda eksik eyleyicili mekanik sistemlere ilişkin eyleyicili konfigürasyon değişkeni veya değişkenlerine ilişkin konum ve hız ifadeleri ile enerji ifadesi yer almaktadır. Enerji ifadesi, eyleyicisiz konfigürasyon değişkeni veya değişkenlerine ilişkin konum ve hız bilgilerini içinde barındırmaktadır. Enerji temelli kontrol algoritmasıyla denge noktasında kararlılaştırma sorunu çözümlenmekte iken yörünge izletme problemini çözmek mümkün değildir. Bu tezde enerji temelli kontrol ile eksik eyleyicili mekanik sistemlere ilişkin swing-up kontrol problemi ele alınmıştır. Bu doğrultuda enerji temelli kontrol algoritmasıyla, eksik eyleyicili iki ve üç serbestlik dereceli planar robot manipülatörleri, araba çubuk sistemi ve dönel sarkaçta swing-up kontrol problemine ilişkin uygulamalı çözümlere yer verilmiştir.

Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin kontrolünde kısmi geribesleme lineerizasyonu ve enerji temelli kontrol algoritmaları dışında kullanılan yöntemler arasında iki kural temelli bulanık kontrol, kaskad geriadım lamalı kontrol ve sistem indirgemeli nonlineer kontrol yer almaktadır. İki kural temelli bulanık kontrol algoritması, neden-sonuç ilişkisi ile belirlenen bulanık mantık kurallarının matematiksel denklemlere dönüştürülmesi şeklinde geliştirilmiş bir algoritmadır. Bu doğrultuda hata ve hatanın değişim oranı olmak üzere iki durum değişkeninin tanımlanmasıyla başlayan daha sonra bu durumlar pozitif iken kontrol aksiyonunu pozitif, negatif iken kontrol aksiyonunu negatif yapan bulanık mantık kuralları geliştirilmektedir. Bulanık mantık kuralları, hiperbolik tanjant fonksiyonu kullanılarak matematiksel bulanık kümelerle dönüştürülmektedir. İki kural temelli bulanık kontrol algoritması ile swing-up kontrol probleminin çözümüne ilişkin uygulamalar iki serbestlik dereceli planar robot manipülatörleri pendubot ve acrobot üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Kaskad geriadım lamalı kontrol, geriadım lamalı kontrol algoritmaları içinde Lyapunov temelli olmayan bir kontrol algoritmasıdır. Kaskad geriadım lamalı kontrol algoritması, dinamik denklemleri kesin geribesleme formunda olan eksik eyleyicili mekanik sistemler üzerinde uygulanmakta iken bu formda olmayan sistemler üzerinde uygulanamamaktadır. Kaskad geriadım lamalı kontrol algoritmasını kullanmak için öncelikle ele alınan eksik eyleyicili mekanik sisteme ait hareket

denklemleri zincir forma dönüştürülür. Daha sonra zincir formun durum uzayındaki karşılığı kullanılarak referans değerler ile hata dinamikleri belirlenir. Son olarak hareket dinamikleri alt sistemler şeklinde yazılır ve geriadımlama yöntemiyle kontrol kuralı belirlenir. Kaskad geriadımlamalı kontrol algoritması, geribesleme kararlılık problemini çözmenin dışında yörünge izletme problemine de çözümler üretmektedir. Bu tezde kaskad geriadımlamalı kontrol uygulaması eksik eyleyicili deniz aracı üzerinde uygulanmıştır. Uygulama süresince tekillik sorunu yaşanmaması için durum değişkenleri belirlenirken iki farklı dönüşüm tekniği kullanılmıştır.

Sistem indirgeme, eksik eyleyicili mekanik sisteme ait hareket denklemlerini daha düşük mertebeden bir nonlinear sistem formuna dönüştürme işlemidir. Bu tezde konu edilen sistem indirgemeli nonlinear kontrol algoritması sadece kesin ileriyol formuna indirgenebilen eksik eyleyicili mekanik sistemler üzerinde uygulanabilmektedir. Kesin ileriyol formu dışında başka formlara indirgenebilen eksik eyleyicili sistemler için özgün nonlinear kontrol algoritmaları bulunmaktadır. Sistem indirgemeli nonlinear kontrol algoritması ile swing-up kontrol uygulaması araba çubuk sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Uygulamada, sistem indirgeme işlemi sırasında çeşitli koordinatlar değişiklikleri yapılmaktadır. Kesin ileriyol formunda bir nonlinear sistem elde edildikten sonra istenen denge noktasında global kararlılaştırılma işlemi gerçekleştirilmektedir. Global kararlılaştırma işlemi sonucunda belirlenen kontrol kuralı kısmi geribesleme lineerizasyonu ile elde edilen kuvvet denkleminde yerine konularak kontrol kuralı belirlenmektedir. Swing-up aksiyonu ise iç içe geçmiş satürasyon fonksiyonları yardımıyla gerçekleştirilmektedir.

CONTROL OF UNDERACTUATED MECHANICAL SYSTEMS

SUMMARY

Underactuated mechanical systems have fewer control inputs than the number of degrees of freedom. The reasons of existence of such systems can be stated as reducing the economical cost, simplifying the hardware equipments, ensuring the persistence of the system operation. Underactuated mechanical systems have gained a major importance at the nonlinear control research field because of their Lagrangian dynamics are composed of feedforward nonlinearity, non-minimum phased zero dynamics and first and second order nonholonomic constraints. The application fields of underactuated mechanical systems include surface vessels, aerospace vehicles, mobile robots, robot manipulators.

Underactuated mechanical systems can not be fully linearized but there are several partial linearization techniques are available. The most commonly used one at these techniques is the partial feedback linearization. With the partial feedback linearization it is possible to linearize the certain parts of the dynamic equations of the underactuated mechanical systems. In this manner, the equation or equations related to the unactuated configuration variable or variables become the starting point. Partial feedback linearization is performed in two different methods. These two methods are collocated partial feedback linearization and noncollocated partial feedback linearization respectively. With collocated partial feedback linearization, equations of motion are linearized in terms of the actuated configuration variable or variables. However, with noncollocated partial feedback linearization, equations of motion are linearized in terms of the unactuated configuration variable or variables. It is possible to design a PD controller with feedforward acceleration by using the partially linearized equations derived from both collocated and noncollocated partial feedback linearization. This controller only achieves the control of the configuration variable or variables appear in the linearized equations. Configuration variable or variables which are not appear in the linearized equations moves according to the dynamic property of the subjected system. At the control algorithm which is designed by partial feedback linearization, feedforward acceleration term tracks a desired trajectory or trajectories related to the configuration variable or variables and PD controller ensures the feedback stabilization and performance criterias. Partial feedback linearization technique can be easily applied on all types of the underactuated mechanical systems. In this thesis, the swing-up control applications of planar robot manipulators with two and three degrees of freedom, cart pole system and rotating pendulum are implemented with the partial feedback linearization. In order to achieve the swing-up action, collocated partial feedback linearization has been preferred in Pendubot, in third configuration of the planar robot manipulator with three degrees of freedom, in cart pole system and in rotating pendulum. Noncollocated partial feedback linearization has been preferred in Acrobot, in first and second configurations of the planar robot manipulator with three degrees of freedom.

Another control technique which is commonly used in the control of underactuated mechanical systems is energy based control. Energy based control algorithm is based on the passivity property which is subjected to all types of the underactuated mechanical systems. Passivity property has been derived with the skew-symmetry property of the inertia matrix and speed matrix which appear in the matrix representation of the dynamic equations of the underactuated mechanical systems. Passivity property informs that the energy dissipated by the underactuated mechanical systems has a lower limit and it is possible to control the configuration variable or variables by using the rate of change in total energy value. It is very complicated to use the relationship between the total energy and kinetic energy values in a motion control task. Therefore, the relationship between potential energy and total energy values are preferred in energy based control algorithm. In order to implement energy based control, the applied underactuated mechanical system must have at least a configuration variable which has the movement ability in vertical space. Feedback stabilization problem is solved by ensuring the Lyapunov stability criteria in energy based control. According to the Lyapunov stability criteria a candidate Lyapunov function must be determined. The candidate Lyapunov function consists of the position and velocity information of the actuated configuration variable or variables of the underactuated mechanical system and an energy statement. Energy statement contains the position and velocity information of the unactuated configuration variable or variables. While energy based control resolves the feedback stabilization problem, tracking problem can not be solved with this control technique. In this thesis, the swing-up control problem of underactuated mechanical systems are investigated with energy based control. Accordingly, the swing-up control applications of planar robot manipulators with two and three degrees of freedom, cart pole system and rotating pendulum are implemented with energy based control.

Beside the partial feedback linearization and energy based control, there are several nonlinear control algorithms are used in the pursuit of controlling the underactuated mechanical systems. The other control techniques which are subjected to this thesis are two rule based fuzzy control, cascaded backstepping control and nonlinear control with system reduction respectively. Two rule based fuzzy control algorithm is based on the fuzzy logic rules which are obtained by reason and result method. Fuzzy logic rules are derived by denoting two state variables which are the error and the rate of change of error. Then the two fuzzy rules makes the control action positive while the state variables are positive and makes control action negative while the state variables are negative. Fuzzy logic rules are transformed into mathematical fuzzy sets by using the hyperbolic tangent function in the process. The applications of two rule based fuzzy control algorithm applied on the planar robot manipulators with two degrees of freedom in order to resolve the swing-up control problem.

Cascaded backstepping control is a non Lyapunov based backstepping control algorithm. Cascaded backstepping control algorithm can only be applicable on the underactuated mechanical systems with dynamic equations that can be transformed into strict feedback form. While using the cascaded backstepping procedure at first the dynamic equations of the underactuated mechanical system is transformed into the chained form. Then using the state space representation of the chained form of dynamic equations, reference trajectories and error statements are determined. Finally the equations of motion are represented as subsystems and control law is

determined by using the backstepping procedure. Cascaded backstepping control algorithm resolves the feedback control problem, besides that tracking control problem is also resolved by this algorithm. In this thesis, cascaded backstepping control algorithm is applied on an underactuated surface vessel. In order to eliminate the singularity problem during the application, two different transformation techniques used at the determination process of state variables.

System reduction is the operation of reducing the order of dynamic equations of the underactuated mechanical systems. With the nonlinear control with system reduction algorithm subjected in this thesis, it is only possible to control a certain type of underactuated mechanical systems that is in strict feedforward form. There are several unique nonlinear control algorithms exist for the systems which are not in strict feedforward form. In this thesis, application of nonlinear control with system reduction algorithm is performed on the cart pole system. At the application, there are several coordinate transformations take place during the system reduction procedure. After achieving a transformed nonlinear system in strict feedforward form, global stabilization to a desired equilibrium point can be executed. The control law determined by the global stabilization procedure takes it place in the torque equation which is formerly obtained by the partial feedback linearization. Finally, the swing-up action is executed by using the nested saturation functions.

1. GİRİŞ

Eksik eyleyicili mekanik sistemler sahip oldukları serbestlik derecesi sayısından daha az sayıda eyleyici bulunduran sistemlerdir. Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin ortaya çıkmasında maliyeti düşürmek, donanım karmaşıklığını azaltmak, olası arızalarda sistemin çalışmasını sürdürmek vb. gibi nedenler yer almaktadır. Eksik eyleyicili mekanik sistemler robot manipülatörleri, mobil robotlar, hava ve uzay araçları ve deniz araçlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Eksik eyleyicili mekanik sistemler ileri besleme nonlinearlikleri, minimum fazlı olmayan sıfır dinamikler ve holonomik olmayan kısıtlar bulundurmaktadır. Yukarıda belirtilen nedenlerden ötürü eksik eyleyicili mekanik sistemler gelişen ve ilgi duyulan bir araştırma sahası yaratmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı eksik eyleyicili mekanik sistemlere ilişkin matematik modellerin elde edilmesi ve çeşitli kontrol algoritmalarının bu sistemler üzerinde uygulanmasıdır. Matematik modeller dinamik modelleme yöntemi ile elde edilmiş ve ekler bölümünde verilmiştir. Kontrol algoritmaları belirlenirken ilgili alanlarda daha önce yapılmış çalışmalardan yararlanılmıştır. Uygulama bölümlerinde belirlenen kontrol algoritmaları gerekli olduğunda çeşitli değişiklikler yapılarak farklı sistemler üzerinde gerçekleştirilmiştir.

1.2 Literatür Özeti

Eksik eyleyicili mekanik sistemlerin kontrolüne ilişkin çalışmaların başlangıç noktasını eksik eyleyicili planar robot manipülatörlerindeki swing-up kontrol problemi teşkil etmektedir. Bu problemin çözümünde ilk olarak 1990' lı yılların başında Spong ve Block tarafından kısmi geribesleme lineerizasyonu yöntemi önerilmiştir.

Ancak bu yöntem herhangi bir kararlılık analizine imkan tanımamaktadır. 1999 yılı içerisinde Fantoni ve Lazoni tarafından enerji temelli kontrol yaklaşımı kararlılık analizi ile birlikte önerilmiştir. İlerleyen dönemde swing-up kontrol problemi ile ilgili bulanık kontrol, yapay sinir ağları vb. gibi nonlinear kontrol yöntemlerine yer veren çalışmalar bulunmaktadır.

Daha geniş kapsamda eksik eyleyicili mekanik sistemlerin kontrolü üzerine yapılmış çalışmalar da mevcuttur. Bunlardan en öne çıkanı 2001 yılında Olfati-Saber' in eksik eyleyicili mekanik sistemleri sınıflandırdığı ve kararlılık problemine ilişkin kontrol çözümleri önerdiği doktora tezi çalışmasıdır. Bir diğeri ise kararlılık problemi dışında yörünge izletme problemine de çözümler öneren 2003 yılında Aneke tarafından hazırlanmış doktora tezi çalışmasıdır.

1.3 Hipotez

Bu tezde kısmi geribesleme lineerizasyonu, enerji temelli kontrol ve diğer nonlinear kontrol yöntemleri başlığı altında iki kural temelli bulanık kontrol, kaskad geriadımlamalı kontrol ve sistem indirgemeli nonlinear kontrol algoritmaları ile bu algoritmaların 2 ve 3 DOF planar robot manipülatörleri, araba çubuk ve dönel sarkaç sistemleri ve eksik eyleyicili deniz aracı üzerindeki uygulamalarına yer verilmiştir. Literatürde şu ana kadar fazla yer almamış ve bu tezde incelenen çalışmalar sırasıyla; 3 DOF Planar Robot manipülatörlerinin üç farklı konfigürasyonu ve dönel sarkaç sisteminin iki farklı kontrol tekniğiyle swing-up kontrol uygulaması, viskoz sürtünmesi ihmal edilmemiş Araba çubuk sisteminin enerji temelli kontrol tekniği ile swing-up control uygulaması, Acrobat' un iki kural temelli bulanık kontrol tekniği ile swing-up control uygulaması, Aneke tarafından önerilen kaskad geriadımlama teorisi ve Bommer tarafından önerilen dönüştürme tekniklerinin eksik eyleyicili deniz aracı üzerindeki uygulaması şeklindedir.

2. KİSMİ GERİBESLEME LİNEERİZASYONU

2.1 Giriş

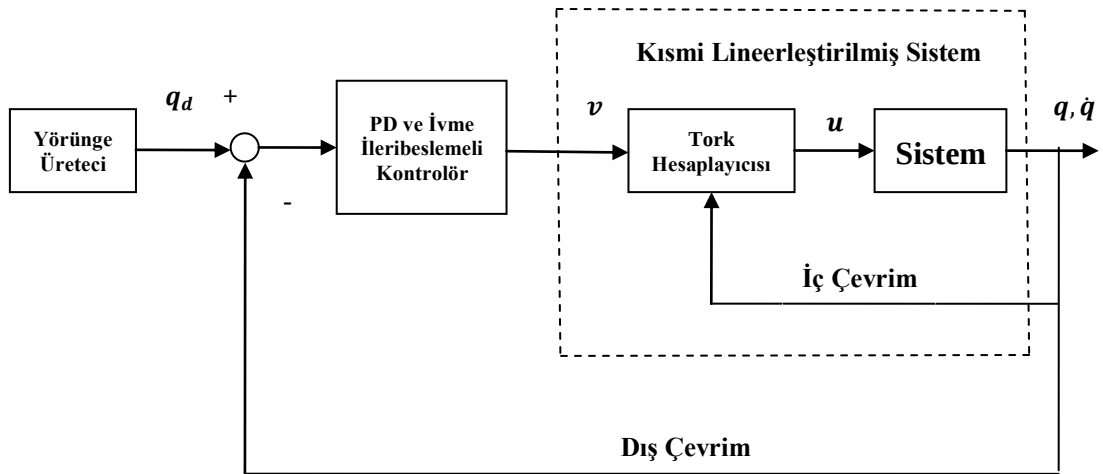
Eksik eyleyicili mekanik sistemlere ait hareket denklemlerinin matris formunda genelleştirilmiş gösterimi aşağıdaki gibidir [1].

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q) \quad (2.1)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & \cdots & d_{1n}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & \cdots & d_{2n}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}(q) & d_{n2}(q) & \cdots & d_{nn}(q) \end{bmatrix}, B(q) = \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ \vdots \\ b_n(q) \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}, \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix},$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \text{ ve } C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & \cdots & c_{1n}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & \cdots & c_{2n}(q, \dot{q}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}(q, \dot{q}) & c_{n2}(q, \dot{q}) & \cdots & c_{nn}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

Eksik eyleyicili sistemlerde kontrol girişlerinden $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ en az bir tanesi eksik yani sıfırdır. Bu nedenle eksik eyleyicili sistemleri tamamen lineerleştirmek mümkün değildir ancak kısmi lineerleştirme yöntemleri mevcuttur. Kısmi lineerleştirme yöntemleri içinde en yaygın olarak kullanılan yöntem kısmi geribesleme lineerizasyonudur. Kısmi geribesleme lineerizasyonu yöntemine ilişkin blok diyagram aşağıda gösterilmiştir [2].



Şekil 2.1 : Kısmi geribesleme lineerizasyonu blok diyagramı.

2.2 Odaklı Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu

Eyleyicili konfigürasyon vektörü veya vektörlerine ait dinamik denklemlerin lineerizasyon işlemine odaklı (collocated) kısmi geribeslemeli lineerizasyon denir [3]. Aşağıda gösterilen eksik eyleyicili mekanik sistem için eyleyicili konfigürasyon vektörü q_1 ' dir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(q, \dot{q}) \\ n_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q) \quad (2.2)$$

(2.2)' de verilen eksik eyleyicili mekanik sistemin dinamik denklemlerini kısmi olarak lineerleştiren aşağıdaki gibi bir kontrol kuralı önerilir [4].

$$\tau = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q}) \quad (2.3)$$

Burada; $\dot{q}_2 = p_2$, $\dot{p}_2 = f_0(q, p) + g_0(q)u$, $\dot{q}_1 = p_1$, $\dot{p}_1 = u$, $\alpha(q)$ mutlak pozitif simetrik matris ve $g_0(q) = -d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)$ şeklindedir.

İspat: (2.2)' nin ikinci satırından

$$\ddot{q}_2 = -d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)\ddot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q}) \text{ elde edilir.}$$

Burada $f_0(q, p) = -d_{22}^{-1}(q)n_2(q, p)$ ve $g_0(q) = -d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)$ olduğu açıkça görülmektedir.

(2.2)' nin ilk satırında $\ddot{q}_2$ yerine $-d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)\ddot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})$ konulursa;

$$d_{11}(q)\ddot{q}_1 + d_{12}(q)[-d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)\ddot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})] + n_1(q, \dot{q}) = \tau$$

$$[d_{11}(q) - d_{12}(q)d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)]\ddot{q}_1 + n_1(q, \dot{q}) - d_{12}(q)d_{22}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q}) = \tau$$

elde edilir. Burada $\alpha(q) = d_{11}(q) - d_{12}(q)d_{22}^{-1}(q)d_{21}(q)$ ve

$\beta(q, \dot{q}) = n_1(q, \dot{q}) - d_{12}(q)d_{22}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})$ olduğu açıkça görülmektedir. Son olarak $\alpha(q)$ ' nun mutlak pozitif matris olduğu belirlenerek ispat tamamlanır.

2.3 Odaksız Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu

Eyleyicisiz konfigürasyon vektörüne ait dinamik denklemlerin lineerizasyon işlemine odaklı (noncollocated) kısmi geribeslemeli lineerizasyon denir. Bu işlem yalnızca kontrol girişlerinin sayısı eyleyicisiz konfigürasyon değişkeni sayısına eşit veya

büyükse mümkündür. (2.2)' de gösterilen mekanik sistem için eyleyicisiz konfigürasyon vektörü q_2 ' dir [4].

(2.2)' de verilen eksik eyleyicili mekanik sistemin dinamik denklemlerini kısmi olarak lineerleştiren aşağıdaki gibi bir kontrol kuralı önerilir [4].

(2.3)' te $\dot{q}_1 = p_1$, $\dot{p}_1 = f_0(q, p) + g_0(q)u$, $\dot{q}_2 = p_2$, $\dot{p}_2 = u$, $\alpha(q)$ mutlak pozitif simetrik matris ve $g_0(q) = -d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)$ şeklindedir.

İspat: (2.2)' nin ikinci satırından

$$\ddot{q}_1 = -d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)\ddot{q}_2 - d_{21}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q}) \text{ elde edilir.}$$

Burada $f_0(q, p) = -d_{21}^{-1}(q)n_2(q, p)$ ve $g_0(q) = -d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)$ olduğu açıkça görülmektedir.

(2.2)' nin ilk satırında $\ddot{q}_1$ yerine $-d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)\ddot{q}_2 - d_{21}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})$ konulursa

$$d_{11}(q)[-d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)\ddot{q}_2 - d_{21}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})] + d_{12}(q)\ddot{q}_2 + n_1(q, \dot{q}) = \tau$$

$$[d_{12}(q) - d_{11}(q)d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)]\ddot{q}_2 + n_1(q, \dot{q}) - d_{11}(q)d_{21}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q}) = \tau$$

elde edilir. Burada $\alpha(q) = d_{12}(q) - d_{11}(q)d_{21}^{-1}(q)d_{22}(q)$ ve

$\beta(q, \dot{q}) = n_1(q, \dot{q}) - d_{11}(q)d_{21}^{-1}(q)n_2(q, \dot{q})$ olduğu açıkça görülmektedir. Son olarak $\alpha(q)$ ' nun mutlak pozitif matris olduğu belirlenerek ispat tamamlanır.

2.4 Kısmi Geribesleme Lineerizasyonu ile Swing-up Kontrol Uygulamaları

Bu bölümde incelenen eksik eyleyicili mekanik sistemlerin swing-up kontrol uygulamaları için iki farklı kontrol algoritması kullanılmıştır. Başlangıç pozisyonundan (dikey rotasyonel eklem veya eklemlerin aşağıda olduğu pozisyon) istenen pozisyona (dikey rotasyonel eklem veya eklemlerin yukarıda olduğu pozisyon) getirmek için odaklı veya odaksız geribesleme lineerizasyonu, o pozisyonda sabitlemek için ise lokal kararlılık sağlayan dengeleyici kontrolör kullanılmıştır. Dengeleyici kontrolör tasarımı, sistem istenen pozisyonda iken dinamik denklemleri lineerleştirilerek durum uzayında yapılır. Tasarım yöntemi olarak kutup atama yöntemi veya LQR algoritması kullanılabilir. Son aşamada iki farklı kontrol algoritması bir anahtarlama algoritmasıyla birleştirilir.

2.4.1 Eksik Eyleyicili 2 DOF Planar Robot Manipulatörleri

Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatörlerine ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \end{bmatrix} = \tau \quad (2.4)$$

$$d_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 ,$$

$$d_{12}(q) = d_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 , \quad d_{22}(q) = m_2 l_1 l_{c2} ,$$

$$c_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 , \quad c_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] ,$$

$$c_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 , \quad c_{22}(q, \dot{q}) = 0 ,$$

$$b_1(q) = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) ,$$

$$b_2(q) = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) .$$

2.4.1.1 Pendubot

Pendubot' ta swing-up kontrol için odaklı kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır [5].

Pendubot' a ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

(2.5)' te ikinci satır $\ddot{q}_2$ için çözülür,

$$\ddot{q}_2 = -d_{22}^{-1}(q) d_{21}(q) \ddot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q) c_{21}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q) b_2(q)$$

ve birinci denklemde yerine konulur.

$$d_{11}(q) \ddot{q}_1 + d_{12}(q) [-d_{22}^{-1}(q) d_{21}(q) \ddot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q) c_{21}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 - d_{22}^{-1}(q) b_2(q)] + c_{11}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 + c_{12}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 + b_1(q) = \tau$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [d_{11}(q) - d_{12}(q) d_{22}^{-1}(q) d_{21}(q)] \ddot{q}_1 + [c_{11}(q, \dot{q}) - d_{12}(q) d_{22}^{-1}(q) c_{21}(q, \dot{q})] \dot{q}_1 \\ + c_{12}(q, \dot{q}) \dot{q}_2 + b_1(q) - d_{12}(q) d_{22}^{-1}(q) b_2(q) = \tau \end{aligned}$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{11} = d_{11}(q) - d_{12}(q) d_{22}^{-1}(q) d_{21}(q)$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11}(q, \dot{q}) - d_{12}(q) d_{22}^{-1}(q) c_{21}(q, \dot{q})$$

$$\bar{c}_{12} = c_{12}(q, \dot{q})$$

$$\bar{b}_1 = b_1(q) - d_{12}(q)d_{22}^{-1}(q)b_2(q)$$

yazılarak;

$$\bar{d}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{b}_1 = \tau$$

elde edilir.

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

v_1 : referans giriş işareti olmak üzere;

$$u = \bar{d}_{11}v_1 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{b}_1. \quad (2.6)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.7)$$

$$d_{22}(q)\ddot{q}_2 + c_{21}(q, \dot{q})\dot{q}_1 + b_2(q) = -d_{21}(q)v_1 \quad (2.8)$$

(2.7) lineer bir eşitlik olduğu için ivme ileri beslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür [6].

$$v_1 = \ddot{q}_{1d} + K_d(\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1) + K_p(q_{1d} - q_1) \quad (2.9)$$

Kontrolör parametrelerinin belirlenmesi için hata işaretlerine bakılır.

$$e_1 = q_{1d} - q_1, \quad e_2 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1, \quad (2.10)$$

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = -K_d e_2 - K_p e_1.$$

Sistemi kararlı kılan kontrol kuralı K_p ve K_d parametrelerinin pozitif seçilmesiyle elde edilir.

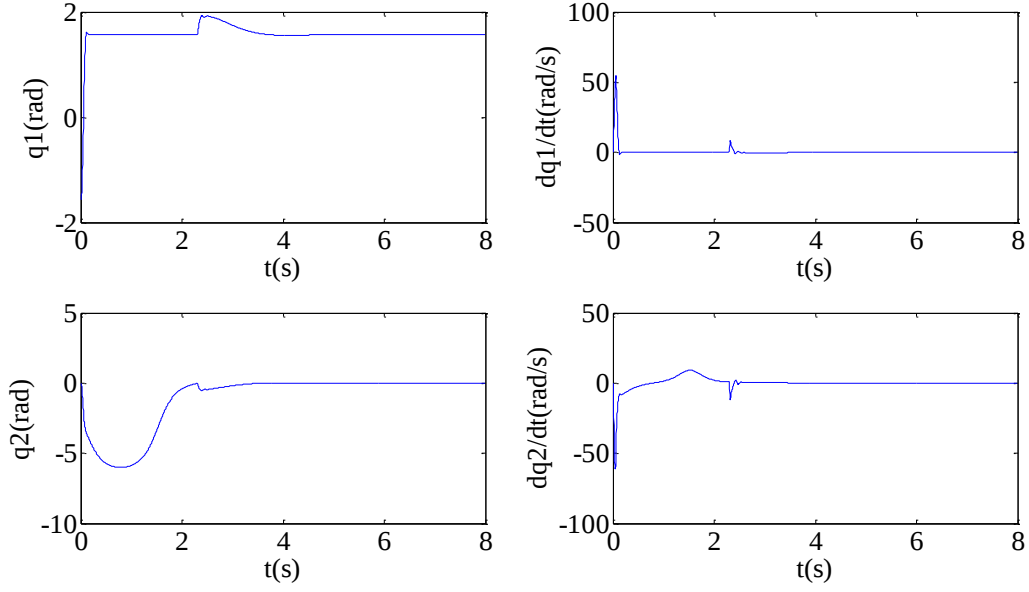
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.3346 \text{ kg},$$

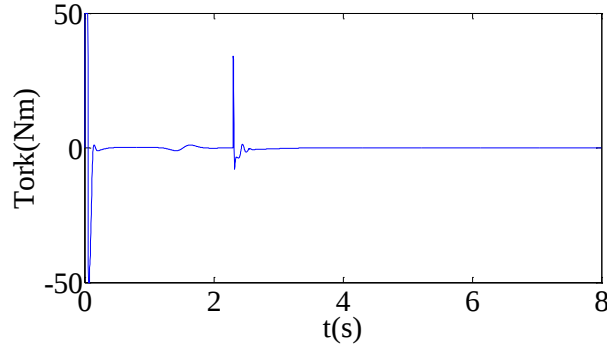
$$l_1 = 0.26987 \text{ m}, \quad l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, \quad l_{c_2} = 0.18208 \text{ m},$$

$$I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$K_p = 3042, \quad K_d = 78.$$



Şekil 2.2 : KGL ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.3 : KGL ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

2.4.1.2 Acrobot

Acrobot' ta swing-up kontrol için odaksız kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır [7].

Acrobot' a ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

(2.11)' de 1. satır $\ddot{q}_2$ için çözülür,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 = & -d_{12}^{-1}(q)d_{11}(q)\ddot{q}_1 - d_{12}^{-1}(q)c_{11}(q, \dot{q})\dot{q}_1 - d_{12}^{-1}(q)c_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_2 \\ & - d_{12}^{-1}(q)b_1(q) \end{aligned}$$

ve 2. denklemde yerine konulur.

$$d_{21}(q)\ddot{q}_1 + d_{22}(q) \begin{bmatrix} -d_{12}^{-1}(q)d_{11}(q)\ddot{q}_1 - d_{12}^{-1}(q)c_{11}(q,\dot{q})\dot{q}_1 \\ -d_{12}^{-1}(q)c_{12}(q,\dot{q})\dot{q}_2 - d_{12}^{-1}(q)b_1(q) \end{bmatrix} \\ + c_{21}(q,\dot{q})\dot{q}_1 + b_2(q) = \tau$$

$$\rightarrow [d_{21}(q) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)d_{11}(q)]\ddot{q}_1 + [c_{21}(q,\dot{q}) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)c_{11}(q,\dot{q})]\dot{q}_1 \\ - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)c_{12}(q,\dot{q})\dot{q}_2 + b_2(q) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)b_1(q) = \tau$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{21} = d_{21}(q) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)d_{11}(q)$$

$$\bar{c}_{21} = c_{21}(q,\dot{q}) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)c_{11}(q,\dot{q})$$

$$\bar{c}_{12} = -d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)c_{12}(q,\dot{q})$$

$$\bar{b}_2 = b_2(q) - d_{22}(q)d_{12}^{-1}(q)b_1(q)$$

yazılırsa;

$$\bar{d}_{21}\ddot{q}_1 + \bar{c}_{21}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{b}_2 = \tau$$

elde edilir.

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

$$u = \bar{d}_{21}v_2 + \bar{c}_{21}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{b}_2 \quad , \quad v_2: \text{referans giriş işareti} \quad (2.12)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

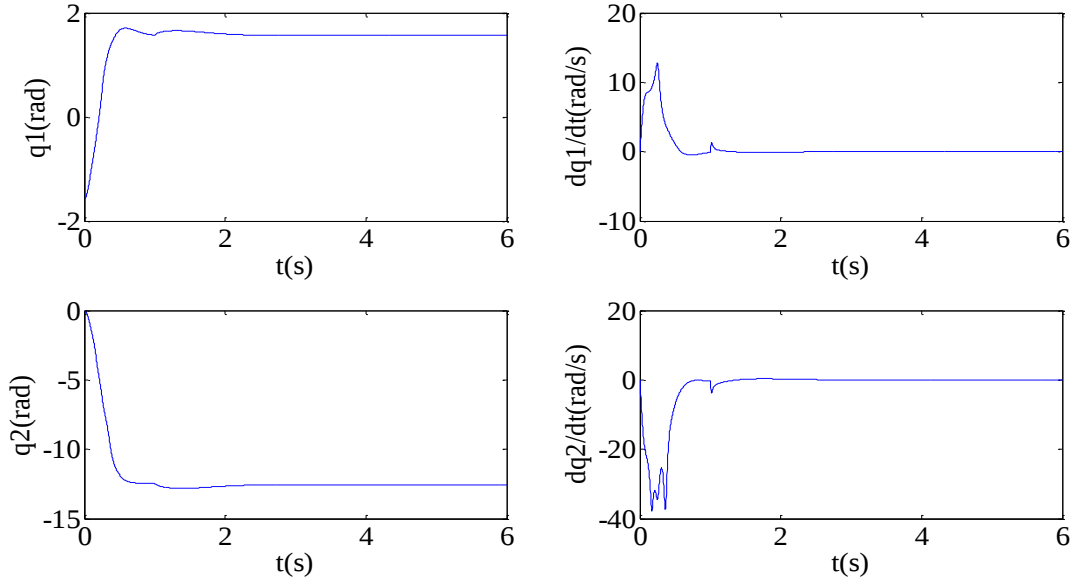
$$\ddot{q}_1 = v_2 \quad (2.13)$$

$$d_{12}(q)\ddot{q}_2 + c_{11}(q,\dot{q})\dot{q}_1 + c_{12}(q,\dot{q})\dot{q}_2 + b_1(q) = -d_{11}(q)v_2 \quad (2.14)$$

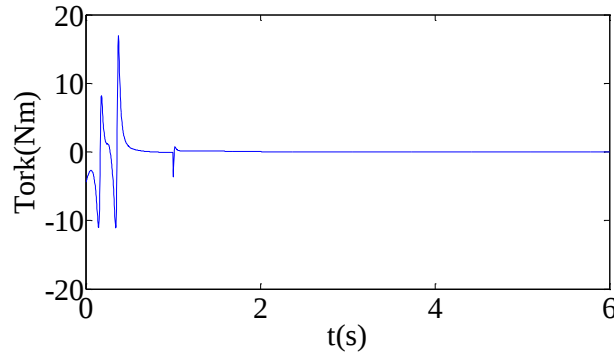
(2.13) lineer bir eşitlik olduğu için (2.9)' da verildiği üzere ivme ileri beslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg} , \quad m_2 = 0.3346 \text{ kg} , \quad l_1 = 0.26987 \text{ m} , \quad l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, \\ l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, \quad I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ K_p = 58.32, \quad K_d = 10.8.$$



Şekil 2.4 : KGL ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.5 : KGL ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

2.4.2 Eksik Eyleycili 3 DOF Planar Robot Manipulatörleri

Eksik eyleycili 3 DOF planar robot manipulatörlerine ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \\ h_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \end{bmatrix} = \tau \quad (2.15)$$

$$d_{11}(q)$$

$$= \left(m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + 2 \cos q_2 (m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \right. \\ \left. + m_3 l_2^2 + 2 m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right)$$

$$d_{12}(q) = d_{21}(q)$$

$$= \left((m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \right. \\ \left. 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right)$$

$$d_{13}(q) = d_{31}(q) = m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{22}(q) = m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{23}(q) = d_{32}(q) = m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{33}(q) = m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$\begin{aligned} h_1(q, \dot{q}) = & -(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] \\ & - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\ & - (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(q, \dot{q}) = & -\dot{q}_3(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] \\ & + \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) m_3 l_1 l_{c_3} \end{aligned}$$

$$h_3(q, \dot{q}) = \dot{q}_1^2 [m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3)] + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3$$

$$\begin{aligned} b_1(q) = & \cos q_1 [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m_3 l_1]g + \cos(q_1 + q_2) [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2]g \\ & + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \end{aligned}$$

$$b_2(q) = \cos(q_1 + q_2) [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2]g + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

$$b_3(q) = \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

3 DOF planar robot manipulatorları [8]' de verildiği üzere üç farklı konfigürasyonda ele alınmıştır.

2.4.2.1 Konfigürasyon 1

Konfigürasyon 1, 3 DOF planar robot manipulatoründe $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 \neq 0$ kontrol girişlerinin yer aldığı konfigürasyondur. Konfigürasyon 1' de swing-up kontrol için odaksız kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \\ h_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

(2.16)' da ilk satır $\ddot{q}_2$ için çözülür,

$$\ddot{q}_2 = -d_{12}^{-1} [d_{11}\ddot{q}_1 + d_{13}\ddot{q}_3 + h_1 + \phi_1]$$

ve tork ifadelerinde yerine konur.

$$\begin{aligned}\tau_2 &= d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}(-d_{12}^{-1}[d_{11}\ddot{q}_1 + d_{13}\ddot{q}_3 + h_1 + b_1]) + d_{23}\ddot{q}_3 + h_2 + b_2 \\ &= \ddot{q}_1(d_{21} - d_{22}d_{12}^{-1}d_{11}) + \ddot{q}_3(d_{23} - d_{22}d_{12}^{-1}d_{13}) + (h_2 - d_{22}d_{12}^{-1}h_1) \\ &\quad + (b_2 - d_{22}d_{12}^{-1}b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}(-d_{12}^{-1}[d_{11}\ddot{q}_1 + d_{13}\ddot{q}_3 + h_1 + b_1]) + d_{33}\ddot{q}_3 + h_3 + b_3 \\ &= \ddot{q}_1(d_{31} - d_{32}d_{12}^{-1}d_{11}) + \ddot{q}_3(d_{33} - d_{32}d_{12}^{-1}d_{13}) + (h_3 - d_{32}d_{12}^{-1}h_1) \\ &\quad + (b_3 - d_{32}d_{12}^{-1}b_1)\end{aligned}$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{21} = d_{21} - d_{22}d_{12}^{-1}d_{11}, \bar{d}_{23} = d_{23} - d_{22}d_{12}^{-1}d_{13}, \bar{d}_{31} = d_{31} - d_{32}d_{12}^{-1}d_{11}$$

$$\bar{d}_{33} = d_{33} - d_{32}d_{12}^{-1}d_{13}, \bar{h}_2 = h_2 - d_{22}d_{12}^{-1}h_1, \bar{h}_3 = h_3 - d_{32}d_{12}^{-1}h_1$$

$$\bar{b}_2 = b_2 - d_{22}d_{12}^{-1}b_1, \bar{b}_3 = b_3 - d_{32}d_{12}^{-1}b_1$$

yazılarak

$$\tau_2 = \ddot{q}_1\bar{d}_{21} + \ddot{q}_3\bar{d}_{23} + \bar{h}_2 + \bar{b}_2$$

$$\tau_3 = \ddot{q}_1\bar{d}_{31} + \ddot{q}_3\bar{d}_{33} + \bar{h}_3 + \bar{b}_3$$

elde edilir.

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralları belirlenir.

$$u_2 = v_1\bar{d}_{21} + \bar{h}_2 + \bar{b}_2, \quad u_3 = v_1\bar{d}_{31} + \bar{h}_3 + \bar{b}_3, \quad v_1: \text{referans giriş işareti} \quad (2.17)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$d_{12}\ddot{q}_2 + d_{13}\ddot{q}_3 + h_1 + b_1 = -d_{11}v_1 \quad (2.18)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.19)$$

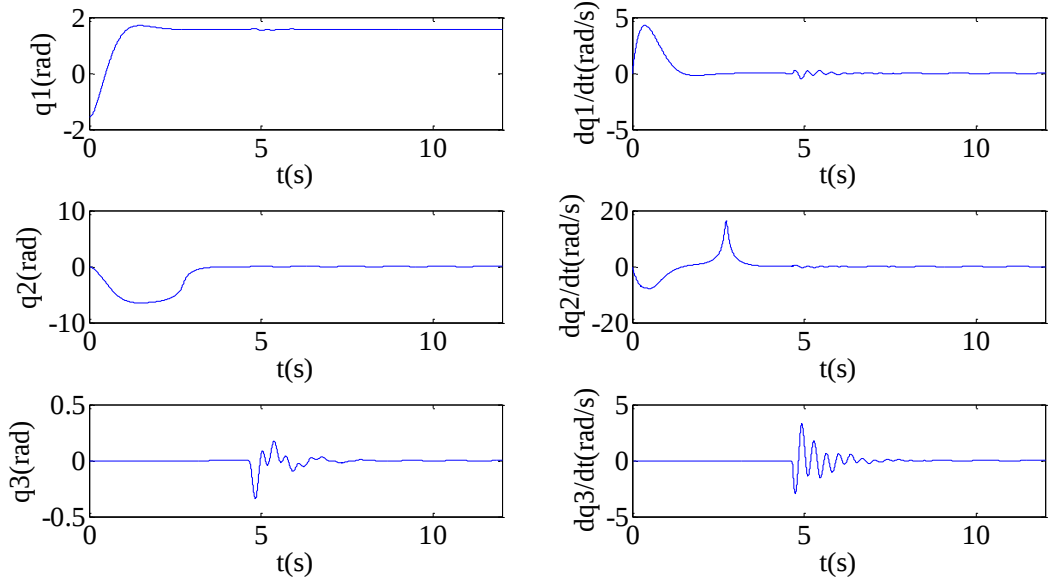
(2.19) lineer bir eşitlik olduğu için (2.9)' da verildiği üzere ivme ileribeslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

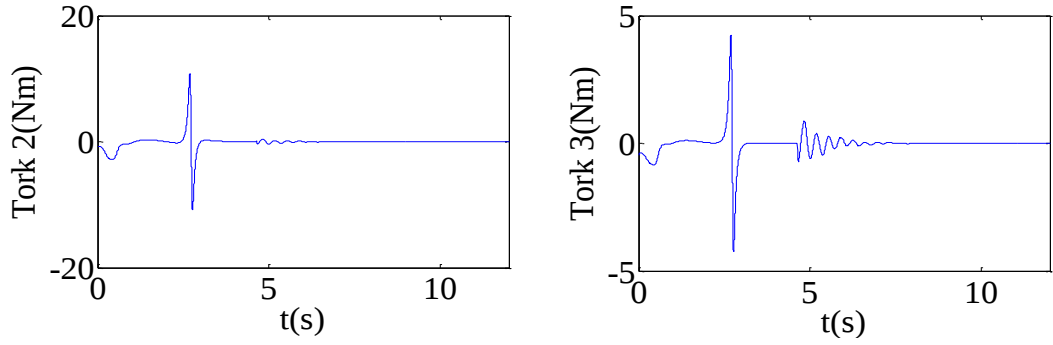
$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m},$$

$$l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, l_{c_3} = 0.2 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, K_p = 8.8818, K_d = 4.2147.$$



Şekil 2.6 : KGL ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.7 : KGL ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

2.4.2.2 Konfigurasyon 2

Konfigurasyon 2, 3 DOF planar robot manipulatöründe $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0, \tau_3 \neq 0$ kontrol girişlerinin yer aldığı konfigürasyondur. Konfigurasyon 2' de swing-up kontrol için odaksız kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \\ h_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

(2.20)' de ikinci satır $\ddot{q}_3$ için çözülür,

$$\ddot{q}_3 = -d_{23}^{-1} [d_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\ddot{q}_1 + h_2 + b_2]$$

ve tork ifadelerinde yerine konur.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + d_{13}(-d_{23}^{-1}[d_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\ddot{q}_1 + h_2 + b_2]) + h_1 + b_1 \\ &= \ddot{q}_1(d_{11} - d_{13}d_{23}^{-1}d_{21}) + \ddot{q}_2(d_{12} - d_{13}d_{23}^{-1}d_{22}) + (h_1 - d_{13}d_{23}^{-1}h_2) \\ &\quad + (b_1 - d_{13}d_{23}^{-1}b_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + d_{33}(-d_{23}^{-1}[d_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\ddot{q}_1 + h_2 + b_2]) + h_3 + b_3 \\ &= \ddot{q}_1(d_{31} - d_{33}d_{23}^{-1}d_{21}) + \ddot{q}_2(d_{32} - d_{33}d_{23}^{-1}d_{22}) + (h_3 - d_{33}d_{23}^{-1}h_2) \\ &\quad + (b_3 - d_{33}d_{23}^{-1}b_2)\end{aligned}$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{11} = d_{11} - d_{13}d_{23}^{-1}d_{21}, \bar{d}_{12} = d_{12} - d_{13}d_{23}^{-1}d_{22}, \bar{d}_{31} = d_{31} - d_{33}d_{23}^{-1}d_{21}$$

$$\bar{d}_{32} = d_{32} - d_{33}d_{23}^{-1}d_{22}, \bar{h}_1 = h_1 - d_{13}d_{23}^{-1}h_2, \bar{h}_3 = h_3 - d_{33}d_{23}^{-1}h_2$$

$$\bar{b}_1 = b_1 - d_{13}d_{23}^{-1}b_2, \bar{b}_3 = b_3 - d_{33}d_{23}^{-1}b_2$$

yazılırsa

$$\tau_1 = \ddot{q}_1\bar{d}_{11} + \ddot{q}_2\bar{d}_{12} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1$$

$$\tau_3 = \ddot{q}_1\bar{d}_{31} + \ddot{q}_2\bar{d}_{32} + \bar{h}_3 + \bar{b}_3$$

elde edilir.

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

$$u_1 = v_1\bar{d}_{11} + v_2\bar{d}_{12} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1, \quad v_1, v_2: \text{referans giriş işaretleri} \quad (2.21)$$

$$u_3 = v_1\bar{d}_{31} + v_2\bar{d}_{32} + \bar{h}_3 + \bar{b}_3 \quad (2.22)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$d_{23}\ddot{q}_3 + h_2 + b_2 = d_{21}v_1 - d_{22}v_2 \quad (2.23)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.24)$$

$$\ddot{q}_2 = v_2 \quad (2.25)$$

(2.24) ve (2.25) lineer eşitlikler olduğu için ivme ileribeslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

$$v_1 = \ddot{q}_{1d} + K_{d_1}(\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1) + K_{p_1}(q_{1d} - q_1) \quad (2.26)$$

$$v_2 = \ddot{q}_{2d} + K_{d_2}(\dot{q}_{2d} - \dot{q}_2) + K_{p_2}(q_{2d} - q_2) \quad (2.27)$$

Kontrolör parametreleri (2.10)'da gösterildiği şekilde belirlenir.

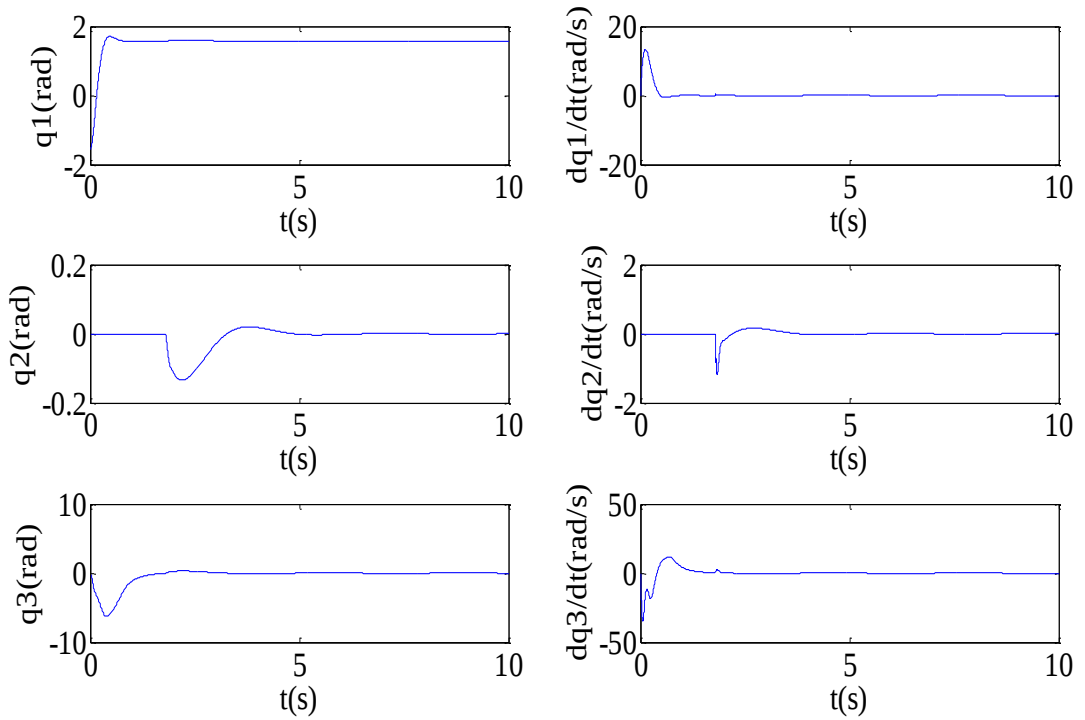
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m},$$

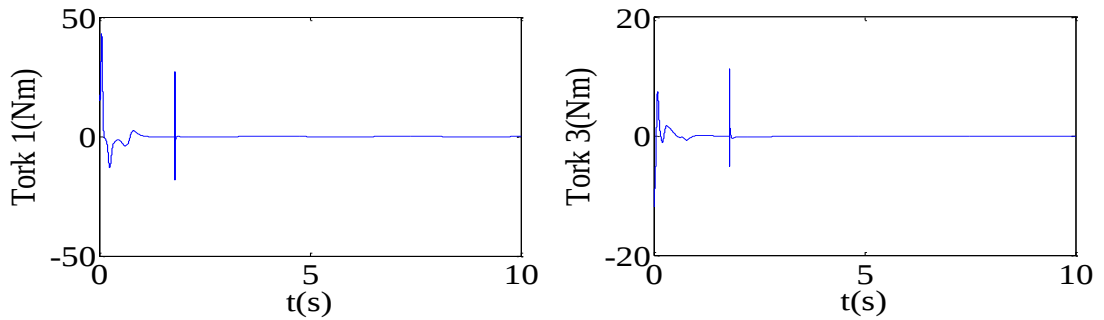
$$l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, l_{c_3} = 0.2 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, K_{p_1} = 87.12, K_{d_1} = 13.2,$$

$$K_{p_2} = 2, K_{d_2} = 2.$$



Şekil 2.8 : KGL ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.9 : KGL ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

2.4.2.3 Konfigurasyon 3

Konfigurasyon 3, 3 DOF planar robot manipulatöründe $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0, \tau_3 = 0$ kontrol girişlerinin yer aldığı konfigürasyondur. Konfigurasyon 3' te swing-up kontrol için odaklı kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \\ h_3(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

(2.28)' de üçüncü satır $\ddot{q}_3$ için çözülür,

$$\ddot{q}_3 = -d_{33}^{-1} [d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + h_3 + b_3]$$

ve tork ifadelerinde yerine konur.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + d_{13}(-d_{33}^{-1} [d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + h_3 + b_3]) + h_1 + b_1 \\ &= \ddot{q}_1(d_{11} - d_{13}d_{33}^{-1}d_{31}) + \ddot{q}_2(d_{12} - d_{13}d_{33}^{-1}d_{32}) + (h_1 - d_{13}d_{33}^{-1}h_3) \\ &\quad + (b_1 - d_{13}d_{33}^{-1}b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + d_{23}(-d_{33}^{-1} [d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + h_3 + b_3]) + h_2 + b_2 \\ &= \ddot{q}_1(d_{21} - d_{23}d_{33}^{-1}d_{31}) + \ddot{q}_2(d_{22} - d_{23}d_{33}^{-1}d_{32}) + (h_2 - d_{23}d_{33}^{-1}h_3) \\ &\quad + (b_2 - d_{23}d_{33}^{-1}b_3) \end{aligned}$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{11} = d_{11} - d_{13}d_{33}^{-1}d_{31}, \bar{d}_{12} = d_{12} - d_{13}d_{33}^{-1}d_{32}, \bar{d}_{21} = d_{21} - d_{23}d_{33}^{-1}d_{31}$$

$$\bar{d}_{22} = d_{22} - d_{23}d_{33}^{-1}d_{32}, \bar{h}_1 = h_1 - d_{13}d_{33}^{-1}h_3, \bar{h}_2 = h_2 - d_{23}d_{33}^{-1}h_3$$

$$\bar{b}_1 = b_1 - d_{13}d_{33}^{-1}b_3, \bar{b}_2 = b_2 - d_{23}d_{33}^{-1}b_3$$

yazılırsa

$$\tau_1 = \ddot{q}_1\bar{d}_{11} + \ddot{q}_2\bar{d}_{12} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1$$

$$\tau_2 = \ddot{q}_1\bar{d}_{21} + \ddot{q}_2\bar{d}_{22} + \bar{h}_2 + \bar{b}_2$$

elde edilir.

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

$$u_1 = v_1\bar{d}_{11} + v_2\bar{d}_{12} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1, v_1, v_2: \text{referans giriş işaretleri} \quad (2.29)$$

$$u_2 = v_1 \bar{d}_{21} + v_2 \bar{d}_{22} + \bar{h}_2 + \bar{b}_2$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$d_{33}\ddot{q}_3 + h_3 + b_3 = -d_{31}v_1 - d_{32}v_2 \quad (2.30)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.31)$$

$$\ddot{q}_2 = v_2 \quad (2.32)$$

(2.31) ve (2.32) lineer eşitlikler olduğu için (2.26) ve (2.27)' de verildiği üzere ivme ileribeslemeli birer PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

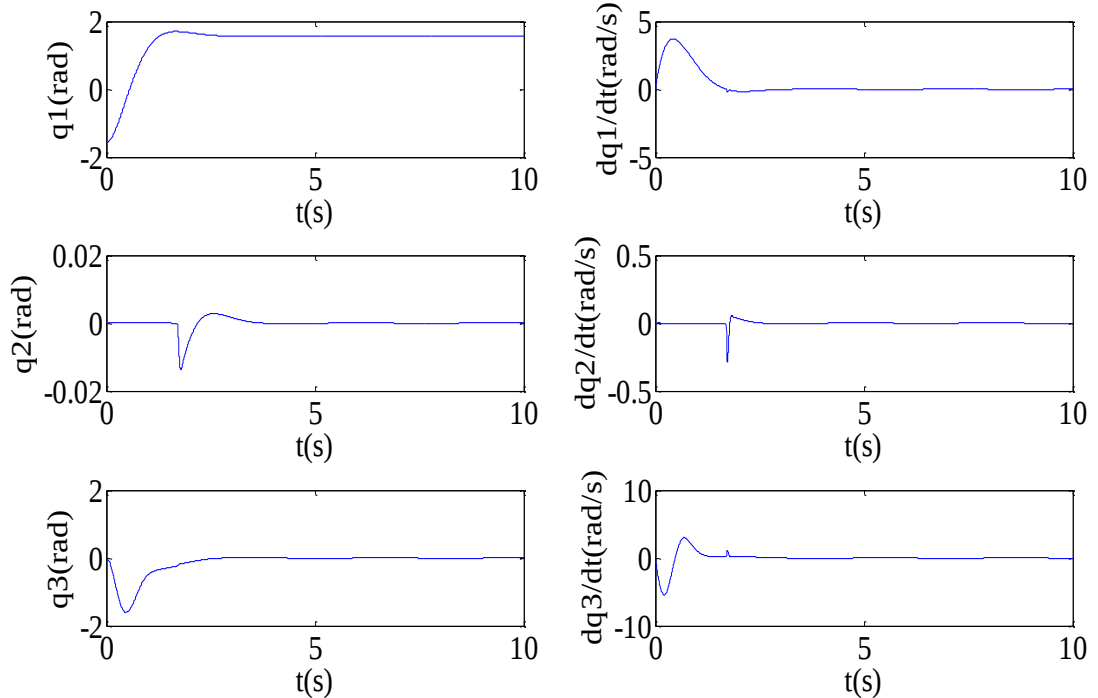
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m},$$

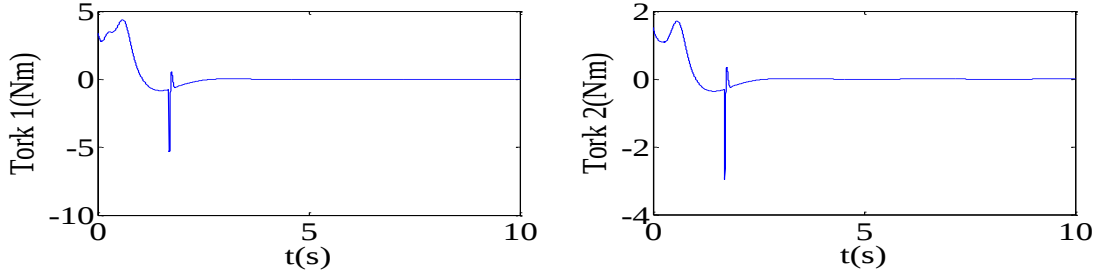
$$l_{c1} = 0.13494 \text{ m}, l_{c2} = 0.18208 \text{ m}, l_{c3} = 0.2 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, K_{p1} = 6.6686, K_{d1} = 3.652,$$

$$K_{p2} = 2, K_{d2} = 2.$$



Şekil 2.10 : KGL ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.11 : KGL ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

2.4.3 Araba Çubuk Sistemi

Araba Çubuk sisteminde swing-up kontrol için odaklı kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Araba Çubuk sistemine ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$d_{11}(q) = m_1 + m_2, \quad d_{12}(q) = d_{21}(q) = m_2 l_2 \cos(q_2), \quad d_{22}(q) = m_2 l_2^2 + I_2$$

$$h_1(q, \dot{q}) = -\dot{q}_2^2 m_2 l_2 \sin q_2, \quad h_2(q, \dot{q}) = 0, \quad b_1(q) = 0, \quad b_2(q) = -m_2 g l_2 \sin q_2$$

(2.33)' te ikinci satır $\ddot{q}_2$ için çözülür,

$$\ddot{q}_2 = -d_{22}^{-1} [d_{21} \ddot{q}_1 + h_2 + b_2]$$

ve ilk satırda yerine konur.

$$\tau_1 = d_{11} \ddot{q}_1 + d_{12} (-d_{22}^{-1} [d_{21} \ddot{q}_1 + h_2 + b_2]) + h_1 + b_1$$

$$\tau_1 = \ddot{q}_1 [d_{11} - d_{12} d_{22}^{-1} d_{21}] + (h_1 - d_{12} d_{22}^{-1} h_2) + (b_1 - d_{12} d_{22}^{-1} b_2)$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{11} = d_{11} - d_{12} d_{22}^{-1} d_{21}$$

$$\bar{h}_1 = h_1 - d_{12} d_{22}^{-1} h_2$$

$$\bar{b}_1 = b_1 - d_{12} d_{22}^{-1} b_2$$

yazılarak

$$\tau_1 = \ddot{q}_1 \bar{d}_{11} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1 \text{ elde edilir.}$$

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

$$u_1 = v_1 \bar{d}_{11} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1 \quad (2.34)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

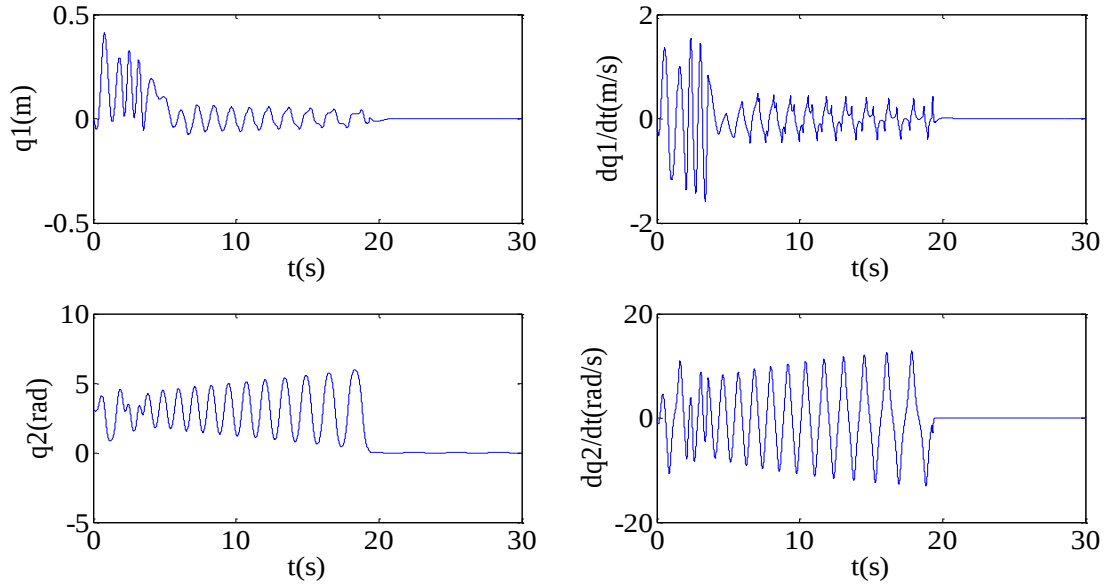
$$d_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + b_2 = -d_{21}v_1 \quad (2.35)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.36)$$

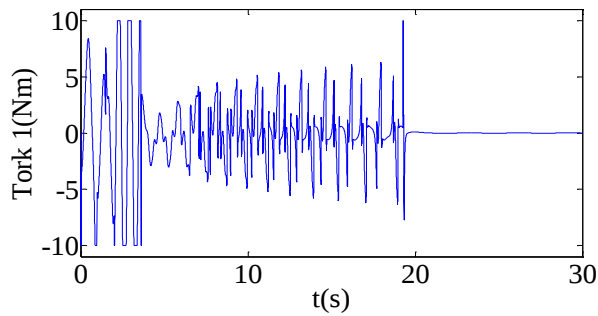
(2.36) lineer bir eşitlik olduğu için (2.9)' da gösterildiği gibi ivme ileribeslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.7031 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.127 \text{ kg}, \quad l_2 = 0.1778 \text{ m}, \quad I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ K_p = 4, K_d = 8.$$



Şekil 2.12 : KGL ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.13 : KGL ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

2.4.4 Dönel Sarkaç

Dönel Sarkaç sisteminde swing-up kontrol için odaklı kısmi geribesleme lineerizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Dönel Sarkaç sistemine ait dinamik denklemlerin matris formunda gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$d_{11}(q) = m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2)) \quad ,$$

$$d_{12}(q) = d_{21}(q) = m_2 L_1 l_2 \cos(q_2)$$

$$d_{22}(q) = m_2 l_2^2 + I_2$$

$$h_1(q, \dot{q}) = 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$h_2(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1^2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)$$

$$b_1(q) = 0 \quad , \quad b_2(q) = -m_2 g l_2 \sin(q_2)$$

(2.37)' de ikinci satır $\ddot{q}_2$ için çözülür,

$$\ddot{q}_2 = -d_{22}^{-1} [d_{21} \ddot{q}_1 + h_2 + b_2]$$

ve ilk satırda yerine konur.

$$\tau_1 = d_{11} \ddot{q}_1 + d_{12} (-d_{22}^{-1} [d_{21} \ddot{q}_1 + h_2 + b_2]) + h_1 + b_1$$

$$\tau_1 = \ddot{q}_1 [d_{11} - d_{12} d_{22}^{-1} d_{21}] + (h_1 - d_{12} d_{22}^{-1} h_2) + (b_1 - d_{12} d_{22}^{-1} b_2)$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$\bar{d}_{11} = d_{11} - d_{12} d_{22}^{-1} d_{21}$$

$$\bar{h}_1 = h_1 - d_{12} d_{22}^{-1} h_2$$

$$\bar{b}_1 = b_1 - d_{12} d_{22}^{-1} b_2$$

yazılarak

$$\tau_1 = \ddot{q}_1 \bar{d}_{11} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1 \text{ elde edilir.}$$

Bir sonraki aşamada aşağıda gösterildiği üzere kontrol kuralı belirlenir.

$$u_1 = v_1 \bar{d}_{11} + \bar{h}_1 + \bar{b}_1 \quad (2.38)$$

Eşdeğer sistem denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$d_{22}\ddot{q}_2 + h_2 + b_2 = -d_{21}v_1 \quad (2.39)$$

$$\ddot{q}_1 = v_1 \quad (2.40)$$

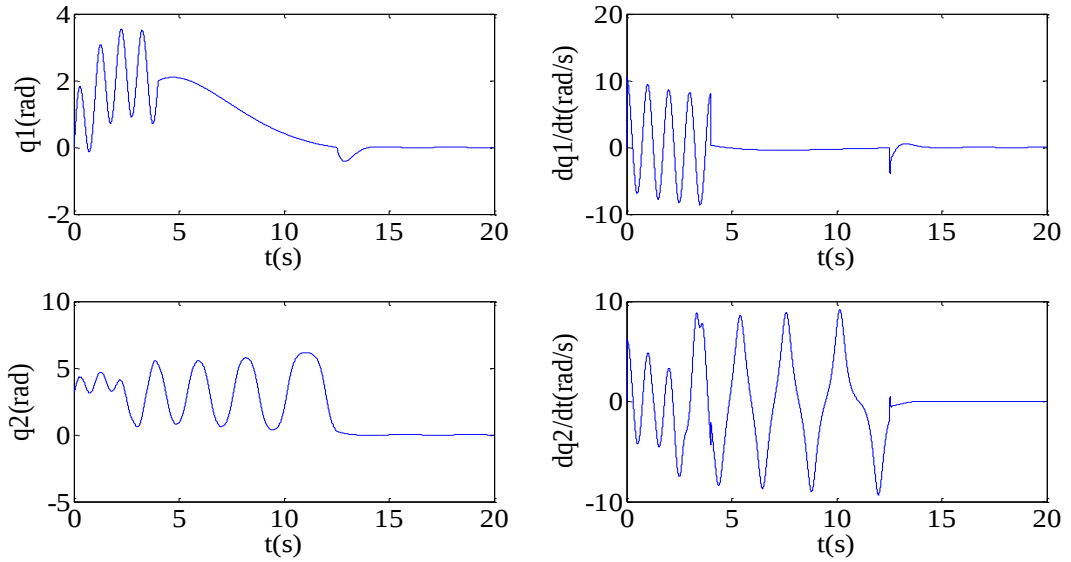
(2.40) lineer bir eşitlik olduğu için (2.9)' da gösterildiği gibi ivme ileri beslemeli bir PD kontrolörü tasarlamak mümkündür.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

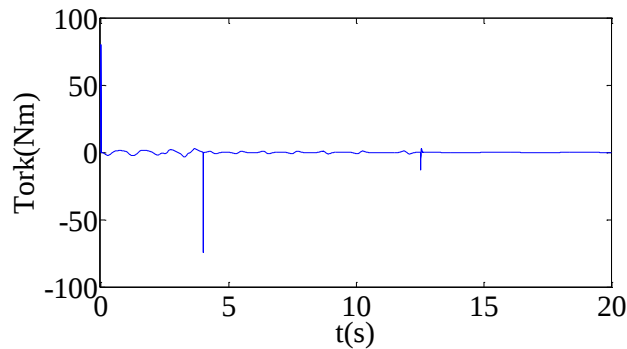
$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, L_1 = 0.26987 \text{ m}, l_1 = 0.13494 \text{ m},$$

$$l_2 = 0.18208 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$K_p = 0.18, K_d = 0.6.$$



Şekil 2.14 : KGL ile Dönel Sarkaç'ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 2.15 : KGL ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

3. ENERJİ TEMELLİ KONTROL

3.1 Eksik Eyleyicili Mekanik Sistemlerin Pasivite Özelliği

Mekanik sistemlere ilişkin toplam enerji ifadesi $K(q, \dot{q})$ kinetik enerji, $P(q)$ potansiyel enerji olmak üzere aşağıda gösterilmiştir [1].

$$E(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + P(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + P(q) \quad (3.1)$$

Enerji ifadesinin zamana göre türevi alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{K}(q, \dot{q}) + \dot{P}(q) = \dot{q}^T D(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T B(q) \quad (3.2)$$

Yukarıdaki eşitlikte (2.1)' den yararlanarak $D(q) \ddot{q}$ yerine $\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B(q)$ koyularak.

$$\begin{aligned} \dot{E}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B(q)) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T B(q) \\ \dot{E}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \dot{q}^T (\tau - B(q)) + \dot{q}^T B(q) \\ \dot{E}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T [\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} + \dot{q}^T \tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.

Bu aşamada $D(q)$ ve $C(q, \dot{q})$ matrisleri arasında varolan Skew-Symmetric matris özelliği, $D(q)$ mutlak pozitif ve simetrik matris olmak şartıyla kullanılır.

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = -(\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}))^T \quad (3.4)$$

Bu özellik kullanılarak

$$\dot{q}^T [\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0 \quad (3.5)$$

olduğu belirlenir. Daha sonra bu eşitlik (3.3)' te yerine konularak

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \tau \quad (3.6)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının da integrali alınarak

$$\int_0^t \dot{q}^T \tau dt = E(t) - E(0) \geq -E(0) \quad (3.7)$$

elde edilir. Pasivite özelliğine göre mekanik sistemlerin harcadığı enerjinin (3.7)' de görüldüğü üzere bir alt sınırı vardır. Sonuç olarak, giriş işareti τ çıkış işareti $\dot{q}$ olan sistem “passive” dir denir.

3.2 Enerji Temelli Swing-up Kontrol Uygulamaları

Bu bölümde incelenen eksik eyleyicili mekanik sistemlerin swing-up kontrol uygulamaları için iki farklı kontrol algoritması kullanılmıştır. Başlangıç pozisyonundan (dikey rotasyonel eklem veya eklemlerin aşağıda olduğu pozisyon) istenen pozisyona (dikey rotasyonel eklem veya eklemlerin yukarıda olduğu pozisyon) getirmek için enerji temelli kontrol algoritması, o pozisyonda sabitlemek için ise lokal kararlılık sağlayan dengeleyici kontrolör kullanılmıştır. Dengeleyici kontrolör tasarımı, sistem istenen pozisyonda iken dinamik denklemleri lineerleştirilerek durum uzayında yapılır. Tasarım yöntemi olarak kutup atama yöntemi veya LQR algoritması kullanılabilir. Son aşamada iki farklı kontrol algoritması bir anahtarlama algoritmasıyla birleştirilir.

3.2.1 Eksik Eyleyicili 2 DOF Planar Robot Manipulatörleri

Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatörlerine ait dinamik denklemlerde yer alan yedi parametre aşağıdaki gösterilen şekilde beşe düşürülür.

$$\theta_1 = m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2, \quad \theta_2 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2, \quad \theta_3 = m_2 l_1 l_{c_2}, \quad \theta_4 = m_1 l_{c_1} + m_2 l_1, \\ \theta_5 = m_2 l_{c_2}$$

Yukarıdaki gösterimle (2.1)' deki matrisler aşağıdaki şekle dönüşür.

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 \cos q_1 + \theta_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

$D(q)$ matrisinin bütün q değerleri için mutlak pozitif ve simetrik olup olmadığı araştırılır [9].

$$d_{11} = \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 \geq \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3 \geq m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \geq m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 (l_1 - l_{c2})^2 > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_1 \theta_2 - (\theta_3 \cos q_2)^2 \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) - (m_2 l_1 l_{c2})^2 (\cos q_2)^2 \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) + (m_2 l_1 l_{c2})^2 + m_2 l_1^2 I_2 \\ &\quad - (m_2 l_1 l_{c2})^2 [1 - (\sin q_2)^2] \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) + m_2 l_1^2 I_2 + (m_2 l_1 l_{c2})^2 (\sin q_2)^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Yukarıda gösterildiği üzere $D(q)$ matrisi mutlak pozitif ve simetrik bir matristir.

Daha sonra $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisinin skew-symmetric bir matris olup olmadığı araştırılır.

$$\begin{aligned} \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) &= \theta_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -2\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} - \theta_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \theta_3 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = -\left(\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})\right)^T \text{ olduğu açıkça görülmektedir.}$$

Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorlerine ilişkin potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$P(q) = \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \quad (3.8)$$

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2] + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [\theta_2 + \theta_3 \cos q_2] \quad (3.9)$$

Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorlerinin dört denge noktasına ait toplam enerji ($E(q, \dot{q})$) ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$E\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) = E_{top} = (\theta_4 + \theta_5)g$$

$$E\left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) = E_{l_1} = (-\theta_4 - \theta_5)g$$

$$E\left(-\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0\right) = E_{mid} = (-\theta_4 + \theta_5)g$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0\right) = E_{l_2} = (\theta_4 - \theta_5)g.$$

3.2.1.1 Pendubot

Pendubot' ta toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)' dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1 \quad (3.10)$$

Kontrol kuralının belirlenmesinde aşağıdaki adımlar izlenir [9].

a1) $\dot{q}_1 = 0$ ve **a2)** $E(q, \dot{q}) = E_{top} = (\theta_4 + \theta_5)g$ olduğu varsayılırsa;

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] + \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) = (\theta_4 + \theta_5)g \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitlikten $q_1 \neq \frac{\pi}{2}$ ise $\dot{q}_2 > 0$ olduğu görülmektedir.

Eğer **a3)** $q_1 = \frac{\pi}{2}$ ise,

$$\frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] + \theta_4 g \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta_5 g \sin\left(\frac{\pi}{2} + q_2\right) = (\theta_4 + \theta_5)g$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] + \theta_4 g + \theta_5 g \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(q_2) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(q_2) \right] = (\theta_4 + \theta_5)g$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] + \theta_4 g + \theta_5 g [\cos(q_2)] = (\theta_4 + \theta_5)g$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 [\theta_2] = \theta_5 g [1 - \cos(q_2)] \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitlik “homoklinik yörünge” olarak adlandırılan çok özel bir yörüngeyi tanımlamaktadır.

Sistem bu yörüngeyi takip ettiği sürece ikinci eklem saat yönünde veya saatin tersi yönünde hareket ederek denge noktasına $((q_2, \dot{q}_2) = (0,0))$ ulaşmaktadır.

Sonuç olarak sistem homoklinik yörüngeye **a1** , **a2** ,**a3** koşullarını sağlamak şartıyla ulaştırıldığında “swing-up” problemi çözülmüş olur.

$\tilde{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2}$ ve $\tilde{E} = E - E_{top}$ olmak üzere aday Lyapunov fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} k_E \tilde{E}^2(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k_P \tilde{q}_1^2, \quad k_E, k_D, k_P > 0 \quad (3.11)$$

Aday Lyapunov fonksiyonu belirlenirken $\tilde{E}$, $\dot{q}_1$, $\tilde{q}_1$ değerlerinin sıfıra yakınsaması isteği göz önüne alınmıştır.

Aday Lyapunov fonksiyonun zamana göre türevi alınır.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{E}(q, \dot{q}) + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 \dot{q}_1$$

(3.10)' dan $\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1$ olduğu bilinmektedir.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 \dot{q}_1 = \dot{q}_1 [k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1]$$

Daha sonra (2.1)' in ilk satırından $\ddot{q}_1$ çekilir.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \left[\frac{\theta_2 \tau_1 + \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 -}{\theta_2 \theta_4 g \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2)} \right]$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \theta_2 \theta_4 g \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2)$$

yazılırsa $\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} [\theta_2 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)]$ elde edilir. Buradan hareketle;

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \left[k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} [\theta_2 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)] + k_P \tilde{q}_1 \right]$$

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \left[\tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + k_P \tilde{q}_1 \right]$$

yazılabilir. Aşağıdaki gibi bir kontrol kuralı önerilirse;

$$-\dot{q}_1 = \tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + k_P \tilde{q}_1$$

$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1^2$ sonucuna ulaşılır.

Kontrol kuralının düzenlenmiş şekli aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau_1 = \frac{-k_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2) (\dot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1)}{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2) k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \theta_2}$$

Yukarıda verilen kontrol kuralı $k_E \tilde{E}(t) + k_D \frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \neq 0$

$$(|k_E \tilde{E}(t)| < \frac{k_D}{\theta_1} \rightarrow |k_E \tilde{E}(t)| < \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2}, |\tilde{E}(t)| \leq \frac{k_D - \varepsilon}{k_E \theta_1}, \text{ herhangi bir } \varepsilon > 0$$

için)

olduğu sürece sistem tekillik sorunu yaşamaz.

Ayrıca sistem homoklinik yörüngeye yakınsamaya başladıktan sonra $|\tilde{E}(t)| < |E_{top} - E_{l_2}| = |2\theta_5 g|$ olduğu sürece sistem $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0)$ denge noktasında takılıp kalmaz.

Buradan, sistem homoklinik yörüngeye yakınsarken $|\tilde{E}(t)| < \min\left(|2\theta_5 g|, \frac{k_D}{k_E \theta_1}\right) = c$ için $|V(t)| < k_E \frac{c^2}{2}$ olduğu görülmektedir.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0 \rightarrow V(t) \leq V(0).$$

$|\tilde{E}(t)| < c$ ve $|V(t)| < k_E \frac{c^2}{2}$ koşulları sağlandığı sürece,

Pendubot $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ dışındaki denge noktalarında takılıp kalmaz.

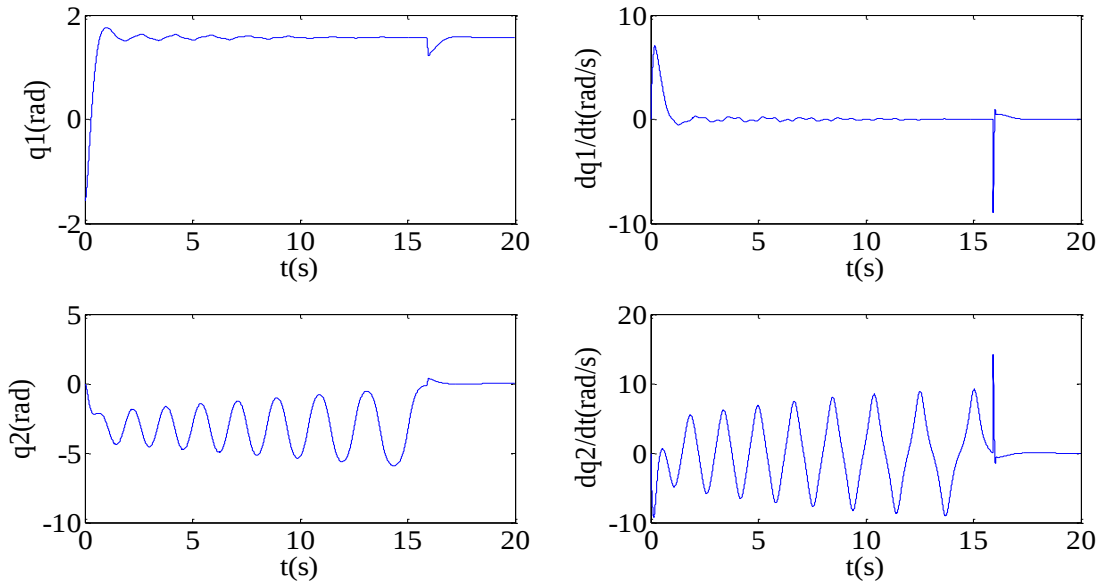
Kontrol kuralına ilişkin kararlılık analizi [9] ve [10]'da verilmiştir.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

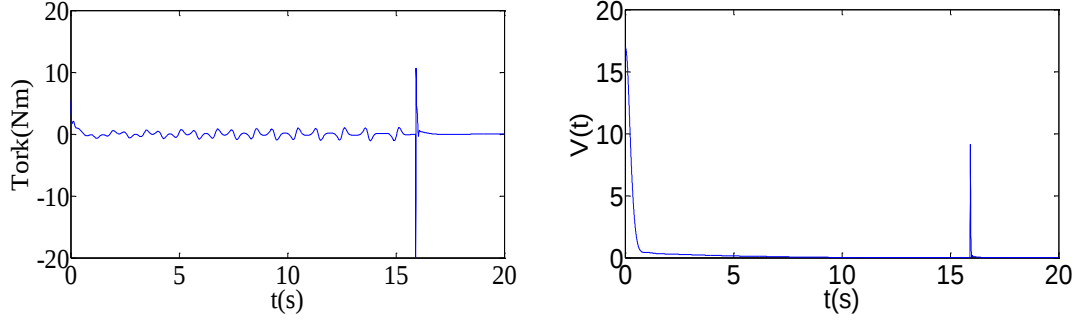
$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_{c_1} = 0.13494 \text{ m},$$

$$l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, \quad I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$k_P = 1.5, k_D = 0.2, k_E = 1.$$



Şekil 3.1 : ETK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.2 : ETK ile Pendubot’ ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.1.2 Acrobot

Acrobot’ ta toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)’ dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_2 \tau_2 \quad (3.12)$$

Acrobot’ a ait dinamik denklemler aşağıda gösterildiği şekilde düzenlenebilir.

Konfigurasyon vektörü:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \triangleq (q_1 - \pi/2, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T \quad (3.13)$$

Konfigurasyon vektörünün zamana göre türevi:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.14)$$

(3.14)’ te yer alan $g(x)$ matrisi ile $f(x)$ ve u vektörleri aşağıda gösterilmiştir.

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}, u = \tau_2 \quad (3.15)$$

$f(x)$ ve $g(x)$ vektörlerini oluşturan elemanlar:

$$f_3 =$$

$$\frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\theta_2 \theta_3 [x_3 + x_4]^2 \sin x_2 + \theta_2 \theta_4 g \sin x_1 + \theta_3^2 x_3^2 \cos x_2 \sin x_2 \\ &- \theta_3 \theta_5 g \sin(x_1 + x_2) \cos x_2 \end{aligned} \right\}$$

$$g_3 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2} \{ -(\theta_2 + \theta_3 \cos x_2) \}$$

$$f_4 =$$

$$\frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &-(\theta_2 + \theta_3 \cos x_2)(2x_3 x_4 + x_4^2) \theta_3 \sin x_2 - \theta_2 \theta_4 g \sin x_1 \\ &- \theta_3 \theta_4 g \cos x_2 \sin x_1 + \theta_1 \theta_5 g \sin(x_1 + x_2) \\ &+ \theta_3 \theta_5 g \sin(x_1 + x_2) \cos x_2 - (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2) x_3^2 \theta_3 \sin x_2 \end{aligned} \right\}$$

$$g_4 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2} \{ \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2 \}$$

(3.13), (3.14) ve (3.15)' ten aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_3 = f_3 + g_3 u, \dot{x}_4 = f_4 + g_4 u \quad (3.16)$$

Acrobot' un toplam enerjisi:

$$\begin{aligned} E(x) = & \frac{1}{2} x_3^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2] + \frac{1}{2} x_4^2 [\theta_2] + x_3 x_4 [\theta_2 + \theta_3 \cos x_2] + \theta_4 g \cos x_1 + \\ & \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Acrobot'un yukarı dikey pozisyonundaki toplam enerjisi:

$$E_{top} = (\theta_4 + \theta_5)g \quad (3.18)$$

$\hat{E}(x) = E(x) - E_{top}$ tanımlanır ve

$x_2 = x_4 = 0$ ve $\hat{E}(x) = 0$ için yeniden düzenlenirse;

$$\frac{1}{2} x_3^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3] + (\theta_4 + \theta_5)g \cos x_1 - E_{top} = 0 \quad (3.19)$$

elde edilir.

$\dot{\hat{E}}(x) = 0$ için (3.19)'un zamana göre türevi alınır.

$$\rightarrow x_3 \dot{x}_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3] - (\theta_4 + \theta_5)g \sin x_1 \dot{x}_1 = 0$$

$$\rightarrow \dot{x}_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3] - (\theta_4 + \theta_5)g \sin x_1 = 0$$

Yukarıda verilen eşitlik, uzunluğu $\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}{\theta_4 + \theta_5}$ olan ve $-g$ yerçekimi ivmesi etkisindeki bir pendulumun hareketini tanımlamaktadır [11].

Kontrol kuralını belirlemek için aday Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilir.

$$V(x) = \frac{1}{2} [k_p x_2^2 + k_d x_4^2 + k_e \hat{E}(x)^2], k_p, k_d, k_e > 0 \quad (3.20)$$

Aday Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi:

$$\dot{V}(x) = k_p x_2 \dot{x}_2 + k_d x_4 \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) \dot{\hat{E}}(x) = x_4 (k_p x_2 + k_d \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) u)$$

(3.12), (3.13) ve (3.15)' ten $\dot{\hat{E}}(x) = x_4 u$ yukarıdaki denklemde yerine konulur.

$$\dot{V}(x) = k_p x_2 x_4 + k_d x_4 \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) x_4 u = x_4 (k_p x_2 + k_d \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) u).$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ olması için

$$k_p x_2 + k_d \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x)u = -x_4 \quad (3.21)$$

seçilir ve $\dot{V}(x) = -x_4^2$ elde edilerek $\dot{V}(x) \leq 0$ sağlanmış olur.

$\dot{x}_4 = f_4 + g_4 u$ eşitliği (3.21)' de yerine konularak

$$k_p x_2 + k_d (f_4 + g_4 u) + k_e \hat{E}(x)u = -x_4 \quad (3.22)$$

elde edilir.

(3.22)' den yararlanılarak kontrol kuralı belirlenir:

$$u = \frac{-\{x_4 + k_p x_2 + k_d f_4\}}{k_d g_4 + k_e \hat{E}(x)} \\ = \frac{-(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2)(x_4 + k_p x_2 + k_d f_4)}{k_d (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2) + k_e (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2) \hat{E}(x)}$$

Kontrol kuralının hiçbir tekillik sorunu yaşamaması için

$$k_d (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2) + k_e (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2) \hat{E}(x) \neq 0 \quad \text{koşulunun}$$

sağlanması gerekir.

Yukarıdaki ifade $\frac{k_d (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2)}{k_e (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 (\cos x_2)^2)} + \hat{E}(x) \neq 0$ şeklinde de yazılabilir.

Buradan, $|\hat{E}(x(0))| \leq \frac{k_d a - \epsilon}{k_e}$ ($a = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2}$ ve $\epsilon > 0$ olmak üzere) koşulu sağlandığında tekillik sorunu yaşanmayacağı görülmektedir.

Kontrol kuralının tekillik problemi dışında karşılaşılabileceği diğer bir problem de Acrobot' un istenen denge noktası dışındaki denge noktalarında takılıp kalmasıdır. Bu problemten kaçınmak için aşağıda verilen koşulun sağlanması gerekir.

$$|\hat{E}(x(0))| < \min\{|E_{top} - E_{mid}|, |E_{top} - E_{l_1}|, |E_{top} - E_{l_2}|\} = \min\{2\theta_4 g, 2\theta_5 g\}$$

Kontrol kuralının karşılabileceği problemlerden kaçınmak için verilen koşullar birleştirilirse

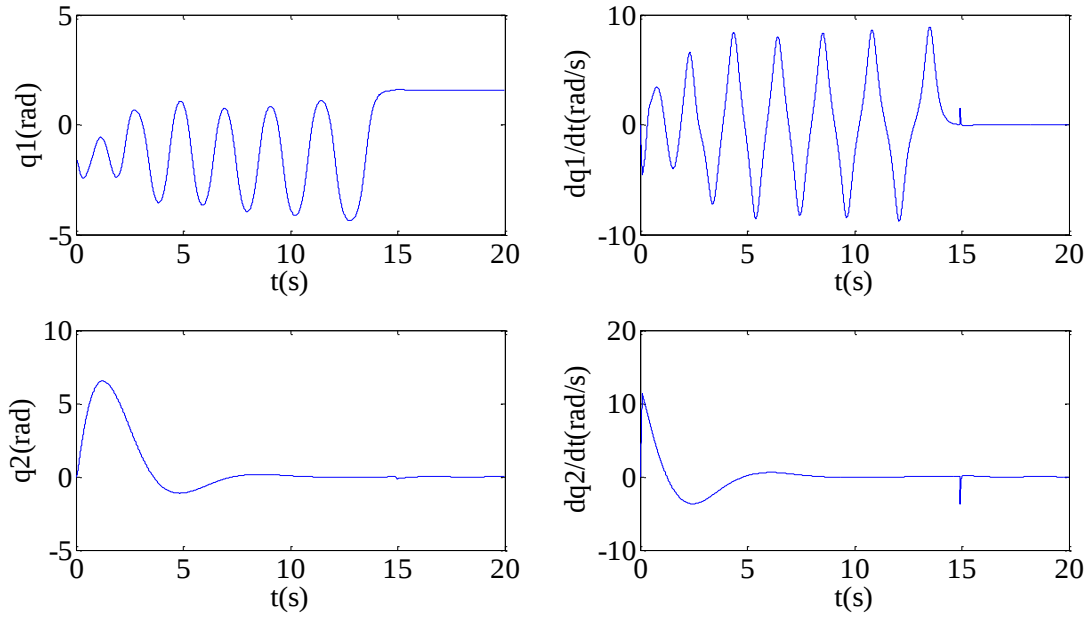
$$|\hat{E}(x(0))| < c = \min\{2\theta_4 g, 2\theta_5 g, \frac{k_d a - \epsilon}{k_e}\} \text{ elde edilir.}$$

Kontrol kuralına ilişkin kararlılık analizi [11]' de verilmiştir.

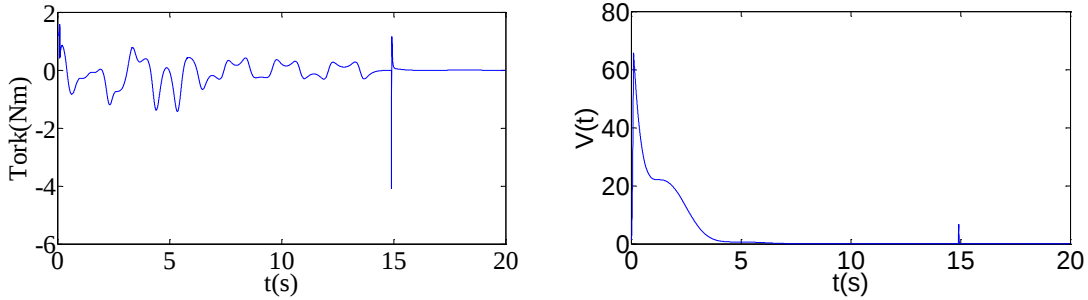
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_{c_1} = 0.13494 \text{ m},$$

$l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}$, $I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $k_p = 1$,
 $k_d = 1$, $k_e = 0.1343$.



Şekil 3.3 : ETK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.4 : ETK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.2 Eksik Eyleylicili 3 DOF Planar Robot Manipulatörleri

Eksik eyleylicili 3 DOF planar robot manipulatörlerine ait dinamik denklemlerde yer alan onbir parametre aşağıdaki gösterilen şekilde dokuza düşürülür.

$$\theta_1 = m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2, \theta_2 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2, \theta_3 = m_3 l_{c_3}^2 + I_3,$$

$$\theta_4 = m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2, \theta_5 = m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m_3 l_1, \theta_6 = m_2 l_{c_2} + m_3 l_2,$$

$$\theta_7 = m_3 l_{c_3}, \theta_8 = m_3 l_1 l_{c_3}, \theta_9 = m_3 l_2 l_{c_3}$$

Yukarıdaki gösterimle (2.1)' deki matrisler aşağıdaki şekle dönüşür.

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) \end{bmatrix}$$

$$d_{11}(q) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 \cos q_2 + 2\theta_8 \cos(q_2 + q_3) + 2\theta_9 \cos q_3$$

$$d_{12}(q) = d_{21}(q) = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \cos q_2 + \theta_8 \cos(q_2 + q_3) + 2\theta_9 \cos q_3$$

$$d_{13}(q) = d_{31}(q) = \theta_3 + \theta_8 \cos(q_2 + q_3) + \theta_9 \cos q_3$$

$$d_{22}(q) = \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_9 \cos q_3$$

$$d_{23}(q) = d_{32}(q) = \theta_3 + \theta_9 \cos q_3$$

$$d_{33}(q) = \theta_3$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & c_{13}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & c_{23}(q, \dot{q}) \\ c_{31}(q, \dot{q}) & c_{32}(q, \dot{q}) & c_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$c_{11}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_2[\theta_4 \sin(q_2) + \theta_8 \sin(q_2 + q_3)] - \dot{q}_3[\theta_8 \sin(q_2 + q_3) + \theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{12}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1[\theta_4 \sin(q_2) + \theta_8 \sin(q_2 + q_3)] - \dot{q}_2[\theta_4 \sin(q_2) + \theta_8 \sin(q_2 + q_3)] \\ - \dot{q}_3[\theta_8 \sin(q_2 + q_3)]$$

$$c_{13}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1[\theta_8 \sin(q_2 + q_3) + \theta_9 \sin(q_3)] - \dot{q}_2[\theta_8 \sin(q_2 + q_3) + 2\theta_9 \sin(q_3)] \\ - \dot{q}_3[\theta_8 \sin(q_2 + q_3) + \theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{21}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1[\theta_4 \sin(q_2) + \theta_8 \sin(q_2 + q_3)] - \dot{q}_3[2\theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{22}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_3[\theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{23}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_2[\theta_9 \sin(q_3)] - \dot{q}_3[\theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{31}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1[\theta_8 \sin(q_2 + q_3) + \theta_9 \sin(q_3)] + \dot{q}_2[2\theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{32}(q, \dot{q}) = \dot{q}_2[\theta_9 \sin(q_3)]$$

$$c_{33}(q, \dot{q}) = 0$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ b_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_5 g \cos q_1 + \theta_6 g \cos(q_1 + q_2) + \theta_7 g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ \theta_6 g \cos(q_1 + q_2) + \theta_7 g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ \theta_7 g \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

$D(q)$ matrisi bütün q değerleri için mutlak pozitif ve simetriktir. $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisinin skew-symmetric bir matris olup olmadığı araştırılır.

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{d}_{11} - 2c_{11} & \dot{d}_{12} - 2c_{12} & \dot{d}_{13} - 2c_{13} \\ \dot{d}_{21} - 2c_{21} & \dot{d}_{22} - 2c_{22} & \dot{d}_{23} - 2c_{23} \\ \dot{d}_{31} - 2c_{31} & \dot{d}_{32} - 2c_{32} & \dot{d}_{33} - 2c_{33} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$$\dot{d}_{11} - 2c_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{12} - 2c_{12} &= \theta_4 \sin(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ &+ \theta_8 \sin(q_2 + q_3) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + \theta_9 \sin(q_3) [-2\dot{q}_3] \end{aligned}$$

$$\dot{d}_{13} - 2c_{13} = \theta_8 \sin(q_2 + q_3) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + \theta_9 \sin(q_3) [2\dot{q}_1 + 4\dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{21} - 2c_{21} &= \theta_4 \sin(q_2) [-2\dot{q}_1 - \dot{q}_2] + \theta_8 \sin(q_2 + q_3) [-2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3] \\ &+ \theta_9 \sin(q_3) [2\dot{q}_3] \end{aligned}$$

$$\dot{d}_{22} - 2c_{22} = 0$$

$$\dot{d}_{23} - 2c_{23} = \theta_9 \sin(q_3) [2\dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$\dot{d}_{31} - 2c_{31} = \theta_8 \sin(q_2 + q_3) [-2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3] + \theta_9 \sin(q_3) [-2\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2 - \dot{q}_3]$$

$$\dot{d}_{32} - 2c_{32} = \theta_9 \sin(q_3) [-2\dot{q}_2 - \dot{q}_3]$$

$$\dot{d}_{33} - 2c_{33} = 0$$

şeklindedir.

$$\dot{d}_{12} - 2c_{12} = -(\dot{d}_{21} - 2c_{21}), \dot{d}_{13} - 2c_{13} = -(\dot{d}_{31} - 2c_{31}) \text{ ve}$$

$\dot{d}_{23} - 2c_{23} = -(\dot{d}_{32} - 2c_{32})$ eşitlikleri gözlenerek $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisinin skew-symmetric bir matris olduğu sonucuna ulaşılır.

Eksik eyleyicili 3 DOF planar robot manipulatörlerine ilişkin potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 d_{11}(q) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 d_{22}(q) + \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 d_{33}(q) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 d_{12}(q) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 d_{13}(q) + \\ &\quad \dot{q}_2 \dot{q}_3 d_{23}(q) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$P(q) = \theta_5 g \sin q_1 + \theta_6 g \sin(q_1 + q_2) + \theta_7 g \sin(q_1 + q_2 + q_3) \quad (3.24)$$

Eksik eyleyicili 3 DOF planar robot manipulatörlerine ait dinamik denklemler aşağıda gösterildiği şekilde düzenlenebilir.

Konfigürasyon vektörü:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = \left(q_1 - \frac{\pi}{2}, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \right)^T \quad (3.25)$$

Konfigürasyon vektörünün zamana göre türevi:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.26)$$

(3.26)' da yer alan $g(x)$ matrisi ile $f(x)$ ve u vektörleri aşağıda gösterilmiştir.

$$f(x) = (x_4, x_5, x_6, f_1, f_2, f_3)^T, g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, u = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T \quad (3.27)$$

$f(x)$ vektörü ve $g(x)$ matrisini oluşturan elemanlar

$$\gamma(x) = d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}^2 - d_{12}^2d_{33} + d_{12}d_{23}d_{13} + d_{13}d_{12}d_{23} - d_{22}d_{13}^2$$

olmak üzere aşağıda gösterilmiştir.

$$f_1 = \frac{1}{\gamma(x)} \left\{ \begin{aligned} &(d_{22}d_{33} - d_{23}^2)(-(c_{11}x_4 + c_{12}x_5 + c_{13}x_6) - b_1) \\ &+ (d_{13}d_{23} - d_{12}d_{33})(-(c_{21}x_4 + c_{22}x_5 + c_{23}x_6) - b_2) \\ &+ (d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22})(-(c_{31}x_4 + c_{32}x_5 + c_{33}x_6) - b_3) \end{aligned} \right\},$$

$$f_2 = \frac{1}{\gamma(x)} \left\{ \begin{aligned} &(d_{23}d_{13} - d_{12}d_{33})(-(c_{11}x_4 + c_{12}x_5 + c_{13}x_6) - b_1) \\ &+ (d_{11}d_{33} - d_{13}^2)(-(c_{21}x_4 + c_{22}x_5 + c_{23}x_6) - b_2) \\ &+ (d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23})(-(c_{31}x_4 + c_{32}x_5 + c_{33}x_6) - b_3) \end{aligned} \right\},$$

$$f_3 = \frac{1}{\gamma(x)} \left\{ \begin{aligned} &(d_{21}d_{23} - d_{22}d_{13})(-(c_{11}x_4 + c_{12}x_5 + c_{13}x_6) - b_1) \\ &+ (d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23})(-(c_{21}x_4 + c_{22}x_5 + c_{23}x_6) - b_2) \\ &+ (d_{11}d_{22} - d_{12}^2)(-(c_{31}x_4 + c_{32}x_5 + c_{33}x_6) - b_3) \end{aligned} \right\},$$

$$g_{11} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{22}d_{33} - d_{23}^2), \quad g_{12} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{13}d_{23} - d_{12}d_{33}),$$

$$g_{13} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22}), \quad g_{21} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{23}d_{13} - d_{12}d_{33}),$$

$$g_{22} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{11}d_{33} - d_{13}^2), \quad g_{23} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23}),$$

$$g_{31} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{21}d_{23} - d_{22}d_{13}), \quad g_{32} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23}),$$

$$g_{33} = \frac{1}{\gamma(x)}(d_{11}d_{22} - d_{12}^2).$$

(3.25), (3.26) ve (3.27)' den aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \quad (3.28)$$

$$\dot{x}_4 = f_1 + g_{11}\tau_1 + g_{12}\tau_2 + g_{13}\tau_3 \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_5 = f_2 + g_{21}\tau_1 + g_{22}\tau_2 + g_{23}\tau_3 \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_6 = f_3 + g_{31}\tau_1 + g_{32}\tau_2 + g_{33}\tau_3 \quad (3.31)$$

Eksik eyleyicili 3 DOF planar robot manipulatorlerine ait toplam enerji ifadesi aşağıda gösterilmiştir.

$$E(x) = \frac{1}{2}x_4^2d_{11} + \frac{1}{2}x_5^2d_{22} + \frac{1}{2}x_6^2d_{33} + x_4x_5d_{12} + x_4x_6d_{13} + x_5x_6d_{23} + \theta_5g \cos x_1 + \theta_6g \cos(x_1 + x_2) + \theta_7g \cos(x_1 + x_2 + x_3) \quad (3.32)$$

Manipulatorün yukarı dikey pozisyondaki toplam enerjisi:

$$E_{top} = (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)g. \quad (3.33)$$

$\hat{E}(x) = E(x) - E_{top}$ olarak tanımlanır.

(3.32) ve (3.33)' ten;

$$\hat{E}(x) = \frac{1}{2}x_4^2d_{11} + \frac{1}{2}x_5^2d_{22} + \frac{1}{2}x_6^2d_{33} + x_4x_5d_{12} + x_4x_6d_{13} + x_5x_6d_{23} + \theta_5g(\cos x_1 - 1) + \theta_6g(\cos(x_1 + x_2) - 1) + \theta_7g(\cos(x_1 + x_2 + x_3) - 1) \quad (3.34)$$

elde edilir.

3.2.2.1 Konfigurasyon 1

Konfigurasyon 1' de toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)' dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{\hat{E}}(x) = \dot{q}^T \tau = \dot{q}_2\tau_2 + \dot{q}_3\tau_3 = x_5\tau_2 + x_6\tau_3 \quad (3.35)$$

$x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ ve $\hat{E}(x) = 0$ için (3.34) yeniden düzenlenir.

$$\hat{E}(x) = \frac{1}{2}x_4^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_8 + 2\theta_9) + (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)g(\cos x_1 - 1) = 0 \quad (3.36)$$

(3.36)' nın zamana göre türevi alınır.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{E}}(x) &= x_4\dot{x}_4(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_8 + 2\theta_9) - (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)g \sin(x_1) \dot{x}_1 = 0 \\ &= x_4(\dot{x}_4(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_8 + 2\theta_9) - (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)g \sin(x_1)) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

(3.37)' de,

$$\dot{x}_4(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_8 + 2\theta_9) - (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)g \sin(x_1) = 0 \quad (3.38)$$

olduğu görülmektedir.

(3.38) uzunluğu $\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+2\theta_4+2\theta_8+2\theta_9}{\theta_5+\theta_6+\theta_7}$ olan ve -g yerçekimi ivmesi etkisindeki bir pendulumun hareketini tanımlar.

Kontrol kuralını belirlemek için aday Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilir.

$k_{p_2}, k_{d_2}, k_{p_3}, k_{d_3}, k_e > 0$ olmak üzere;

$$V(x) = \frac{1}{2}(k_{p_2}x_2^2 + k_{d_2}x_5^2 + k_{p_3}x_3^2 + k_{d_3}x_6^2 + k_e\hat{E}(x)^2). \quad (3.39)$$

Aday Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi:

$$\dot{V}(x) = k_{p_2}x_2\dot{x}_5 + k_{d_2}x_5\dot{x}_5 + k_{p_3}x_3\dot{x}_6 + k_{d_3}x_6\dot{x}_6 + k_e\hat{E}(x)\dot{\hat{E}}(x)$$

(3.35)' ten $\dot{\hat{E}}(x) = x_5\tau_2 + x_6\tau_3$ yukarıdaki denklemde yerine konulur.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= k_{p_2}x_2\dot{x}_5 + k_{d_2}x_5\dot{x}_5 + k_{p_3}x_3\dot{x}_6 + k_{d_3}x_6\dot{x}_6 + k_e\hat{E}(x)(x_5\tau_2 + x_6\tau_3) \\ &= x_5[k_{p_2}x_2 + k_{d_2}\dot{x}_5 + k_e\hat{E}(x)\tau_2] + x_6[k_{p_3}x_3 + k_{d_3}\dot{x}_6 + k_e\hat{E}(x)\tau_3] \end{aligned}$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ olması için

$$k_{p_2}x_2 + k_{d_2}\dot{x}_5 + k_e\hat{E}(x)\tau_2 = -x_5 \quad \text{ve} \quad (3.40)$$

$$k_{p_3}x_3 + k_{d_3}\dot{x}_6 + k_e\hat{E}(x)\tau_3 = -x_6 \quad (3.41)$$

seçilerek $\dot{V}(x) = -x_5^2 - x_6^2 \leq 0$ sağlanmış olur.

(3.30) ve (3.31), (3.40) ve (3.41)' te yerine konularak,

$$k_{p_2}x_2 + k_{d_2}[f_2 + g_{22}\tau_2 + g_{23}\tau_3] + k_e\hat{E}(x)\tau_2 = -x_5 \quad (3.42)$$

$$k_{p_3}x_3 + k_{d_3}[f_3 + g_{32}\tau_2 + g_{33}\tau_3] + k_e\hat{E}(x)\tau_3 = -x_6 \quad (3.43)$$

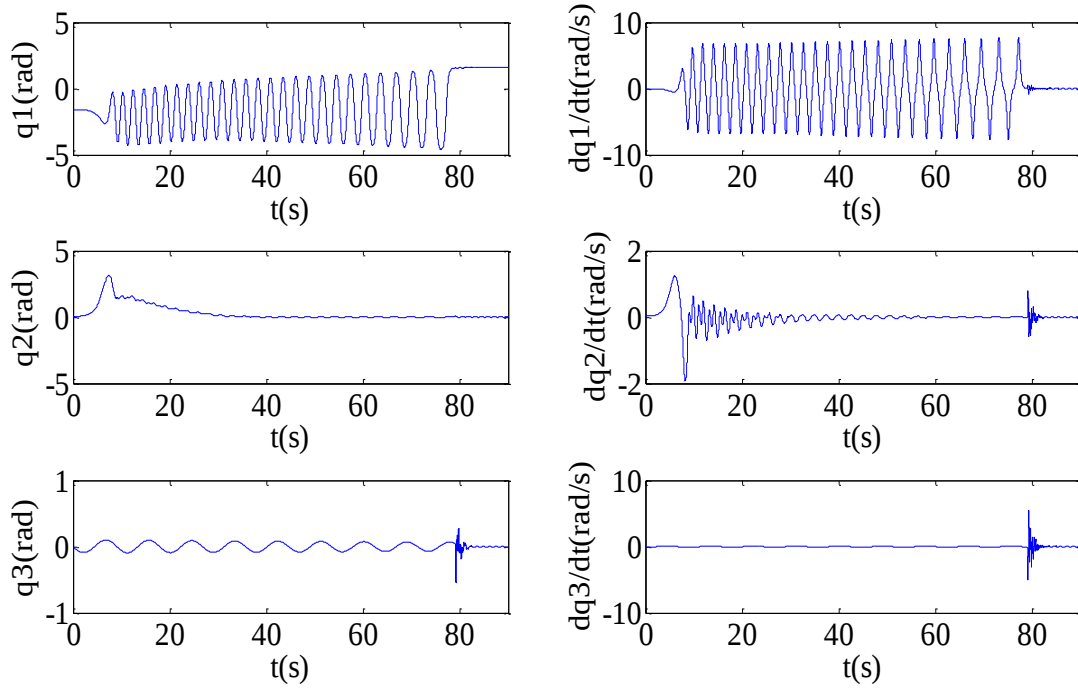
elde edilir.

(3.42) ve (3.43)' ten kontrol kuralları belirlenir.

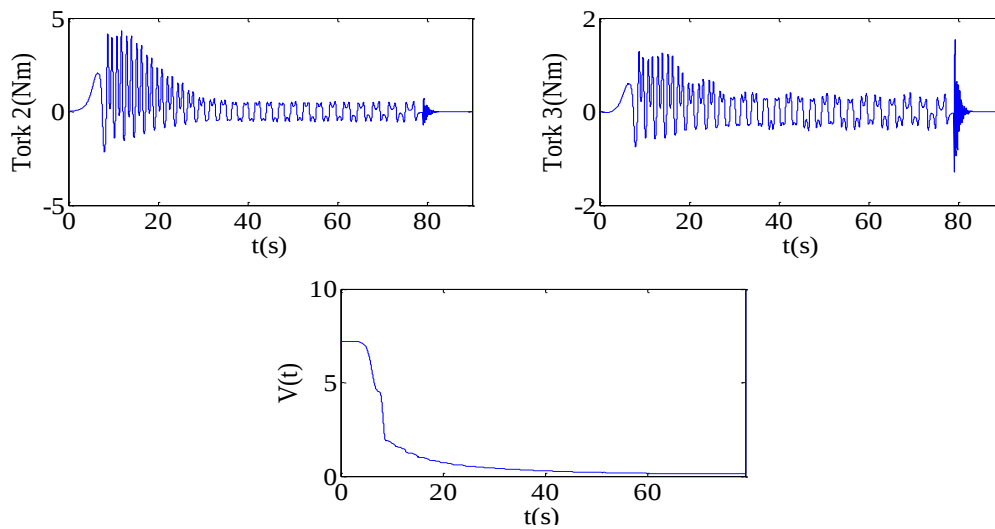
$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{-(x_5 + k_{p_2}x_2 + k_{d_2}f_2)(k_{d_3}g_{33} + k_e\hat{E}(x)) + k_{d_2}g_{23}(x_6 + k_{p_3}x_3 + k_{d_3}f_3)}{(k_{d_3}g_{33} + k_e\hat{E}(x))(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x)) - k_{d_2}g_{23}k_{d_3}g_{32}} \\ \tau_3 &= \frac{-(x_6 + k_{p_3}x_3 + k_{d_3}f_3)(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x)) + k_{d_3}g_{33}(x_5 + k_{p_2}x_2 + k_{d_2}f_2)}{(k_{d_3}g_{33} + k_e\hat{E}(x))(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x)) - k_{d_2}g_{23}k_{d_3}g_{32}} \end{aligned}$$

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$m_1 = 0.5289 \text{ kg}$, $m_2 = 0.3346 \text{ kg}$, $m_3 = 0.3 \text{ kg}$, $l_1 = 0.26987 \text{ m}$, $l_2 = 0.3 \text{ m}$,
 $l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}$, $l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}$, $l_{c_3} = 0.2 \text{ m}$, $I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
 $I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $k_{p_2} = 0.5$, $k_{d_2} = 0.5$, $k_{p_3} = 50$, $k_{d_3} = 100$, $k_e = 0.177$.



Şekil 3.5 : ETK ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.6 : ETK ile Konfigurasyon 1' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.2.2 Konfigurasyon 2

Konfigurasyon 2' de toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)' dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{\hat{E}}(x) = \dot{q}^T \tau = \dot{q}_1 \tau_1 + \dot{q}_3 \tau_3 = x_4 \tau_1 + x_6 \tau_3 \quad (3.44)$$

Kontrol kuralını belirlemek için aday Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilir.

$k_{p_1}, k_{d_1}, k_{p_3}, k_{d_3}, k_e > 0$ olmak üzere;

$$V(x) = \frac{1}{2} (k_{p_1} x_1^2 + k_{d_1} x_4^2 + k_{p_3} x_3^2 + k_{d_3} x_6^2 + k_e \hat{E}(x)^2). \quad (3.46)$$

Aday Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi:

$$\dot{V}(x) = k_{p_1} x_1 x_4 + k_{d_1} x_4 \dot{x}_4 + k_{p_3} x_3 x_6 + k_{d_3} x_6 \dot{x}_6 + k_e \hat{E}(x) \dot{\hat{E}}(x)$$

(3.44)' ten $\dot{\hat{E}}(x) = x_4 \tau_1 + x_6 \tau_3$ yukarıdaki denklemde yerine konulur.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= k_{p_1} x_1 x_4 + k_{d_1} x_4 \dot{x}_4 + k_{p_3} x_3 x_6 + k_{d_3} x_6 \dot{x}_6 + k_e \hat{E}(x) (x_4 \tau_1 + x_6 \tau_3) \\ &= x_4 [k_{p_1} x_1 + k_{d_1} \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) \tau_1] + x_6 [k_{p_3} x_3 + k_{d_3} \dot{x}_6 + k_e \hat{E}(x) \tau_3] \end{aligned}$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ olması için

$$k_{p_1} x_1 + k_{d_1} \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) \tau_1 = -x_4 \quad \text{ve} \quad (3.47)$$

$$k_{p_3} x_3 + k_{d_3} \dot{x}_6 + k_e \hat{E}(x) \tau_3 = -x_6 \quad (3.48)$$

seçilerek $\dot{V}(x) = -x_4^2 - x_6^2 \leq 0$ sağlanmış olur.

(3.29) ve (3.31), (3.47) ve (3.48)' de yerine konularak,

$$k_{p_1} x_1 + k_{d_1} [f_1 + g_{11} \tau_1 + g_{13} \tau_3] + k_e \hat{E}(x) \tau_1 = -x_4 \quad (3.49)$$

$$k_{p_3} x_3 + k_{d_3} [f_3 + g_{31} \tau_1 + g_{33} \tau_3] + k_e \hat{E}(x) \tau_3 = -x_6 \quad (3.50)$$

elde edilir.

(3.49) ve (3.50)' den kontrol kuralları belirlenir.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{-(x_4 + k_{p_1} x_1 + k_{d_1} f_1) (k_{d_3} g_{33} + k_e \hat{E}(x)) + k_{d_1} g_{13} (x_6 + k_{p_3} x_3 + k_{d_3} f_3)}{(k_{d_3} g_{33} + k_e \hat{E}(x)) (k_{d_1} g_{11} + k_e \hat{E}(x)) - k_{d_1} g_{13} k_{d_3} g_{31}} \\ \tau_3 &= \frac{-(x_6 + k_{p_3} x_3 + k_{d_3} f_3) (k_{d_1} g_{11} + k_e \hat{E}(x)) + k_{d_3} g_{31} (x_4 + k_{p_1} x_1 + k_{d_1} f_1)}{(k_{d_3} g_{33} + k_e \hat{E}(x)) (k_{d_1} g_{11} + k_e \hat{E}(x)) - k_{d_1} g_{13} k_{d_3} g_{31}} \end{aligned}$$

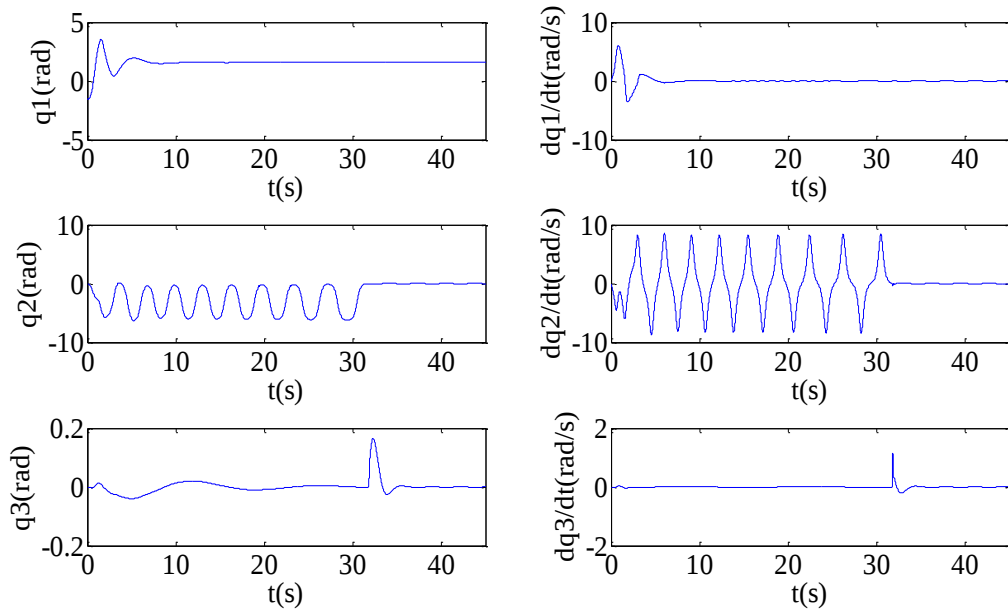
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m},$$

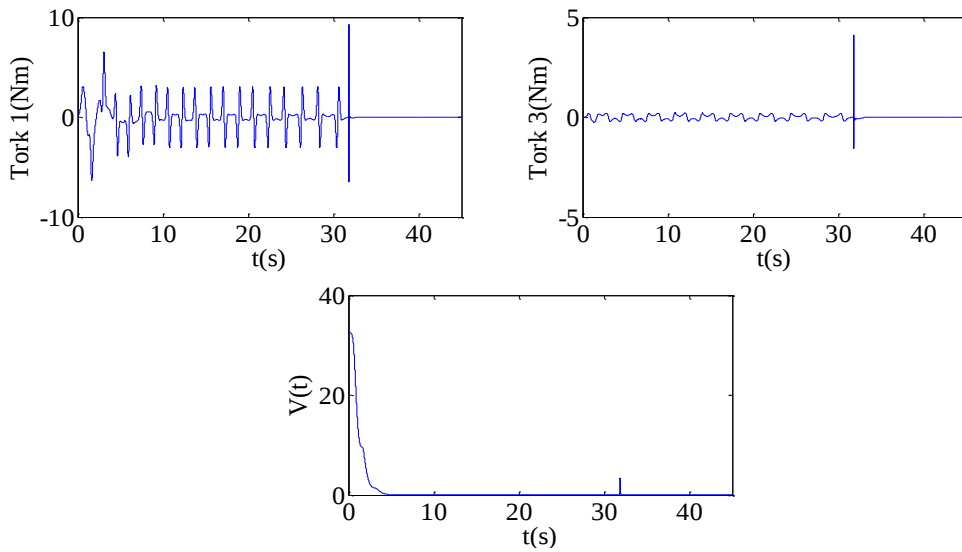
$$l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, l_{c_3} = 0.2 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, k_{p_1} = 1, k_{d_1} = 1, k_{p_3} = 5,$$

$$k_{d_3} = 1, k_e = 0.7004.$$



Şekil 3.7 : ETK ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.8 : ETK ile Konfigurasyon 2' de $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.2.3 Konfigurasyon 3

Konfigurasyon 3’ te toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)’ dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{\hat{E}}(x) = \dot{q}^T \tau = \dot{q}_1 \tau_1 + \dot{q}_2 \tau_2 = x_4 \tau_1 + x_5 \tau_2 \quad (3.51)$$

$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ ve $\hat{E}(x) = 0$ için (3.34) yeniden düzenlenir.

$$\hat{E}(x) = \frac{1}{2} x_6^2 d_{33} + \theta_7 g(\cos(x_3) - 1) = 0 \quad (3.52)$$

(3.52)’ den

$$\frac{1}{2} x_6^2 d_{33} = \theta_7 g(1 - \cos(x_3)) \quad (3.53)$$

elde edilir.

(3.53) “homoklinik yörünge” olarak adlandırılan çok özel bir yörüngeyi tanımlamaktadır.

Sistem bu yörüngeyi takip ettiği sürece ikinci eklem saat yönünde veya saatin tersi yönünde hareket ederek denge noktasına $((x_3, x_6) = (0,0))$ ulaşmaktadır.

Kontrol kuralını belirlemek için aday Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilir.

$k_{p_1}, k_{d_1}, k_{p_2}, k_{d_2}, k_e > 0$ olmak üzere;

$$V(x) = \frac{1}{2} (k_{p_1} x_1^2 + k_{d_1} x_4^2 + k_{p_2} x_2^2 + k_{d_2} x_5^2 + k_e \hat{E}(x)^2) \quad (3.54)$$

Aday Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi:

$$\dot{V}(x) = k_{p_1} x_1 \dot{x}_1 + k_{d_1} x_4 \dot{x}_4 + k_{p_2} x_2 \dot{x}_2 + k_{d_2} x_5 \dot{x}_5 + k_e \hat{E}(x) \dot{\hat{E}}(x)$$

(3.51)’ den $\dot{\hat{E}}(x) = x_4 \tau_1 + x_5 \tau_2$ yukarıdaki denklemde yerine konulur.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= k_{p_1} x_1 \dot{x}_1 + k_{d_1} x_4 \dot{x}_4 + k_{p_2} x_2 \dot{x}_2 + k_{d_2} x_5 \dot{x}_5 + k_e \hat{E}(x) (x_4 \tau_1 + x_5 \tau_2) \\ &= x_4 [k_{p_1} x_1 + k_{d_1} \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) \tau_1] + x_5 [k_{p_2} x_2 + k_{d_2} \dot{x}_5 + k_e \hat{E}(x) \tau_2] \end{aligned}$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ olması için

$$k_{p_1} x_1 + k_{d_1} \dot{x}_4 + k_e \hat{E}(x) \tau_1 = -x_4 \quad (3.55)$$

ve

$$k_{p_2} x_2 + k_{d_2} \dot{x}_5 + k_e \hat{E}(x) \tau_2 = -x_5 \quad (3.56)$$

seçilerek $\dot{V}(x) = -x_4^2 - x_5^2 \leq 0$ sağlanmış olur.

(3.29) ve (3.30), (3.55) ve (3.56)' da yerine konularak,

$$k_{p_1}x_1 + k_{d_1}[f_1 + g_{11}\tau_1 + g_{12}\tau_2] + k_e\hat{E}(x)\tau_1 = -x_4 \quad (3.57)$$

$$k_{p_2}x_2 + k_{d_2}[f_2 + g_{21}\tau_1 + g_{22}\tau_2] + k_e\hat{E}(x)\tau_2 = -x_5 \quad (3.58)$$

(3.57) ve (3.58)' den kontrol kuralları belirlenir.

$$\tau_1 = \frac{-(x_4 + k_{p_1}x_1 + k_{d_1}f_1)(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x)) + k_{d_1}g_{12}(x_5 + k_{p_2}x_2 + k_{d_2}f_2)}{(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x))(k_{d_1}g_{11} + k_e\hat{E}(x)) - k_{d_1}g_{12}k_{d_2}g_{21}}$$

$$\tau_2 = \frac{-(x_5 + k_{p_2}x_2 + k_{d_2}f_2)(k_{d_1}g_{11} + k_e\hat{E}(x)) + k_{d_2}g_{21}(x_4 + k_{p_1}x_1 + k_{d_1}f_1)}{(k_{d_1}g_{11} + k_e\hat{E}(x))(k_{d_2}g_{22} + k_e\hat{E}(x)) - k_{d_1}g_{12}k_{d_2}g_{21}}$$

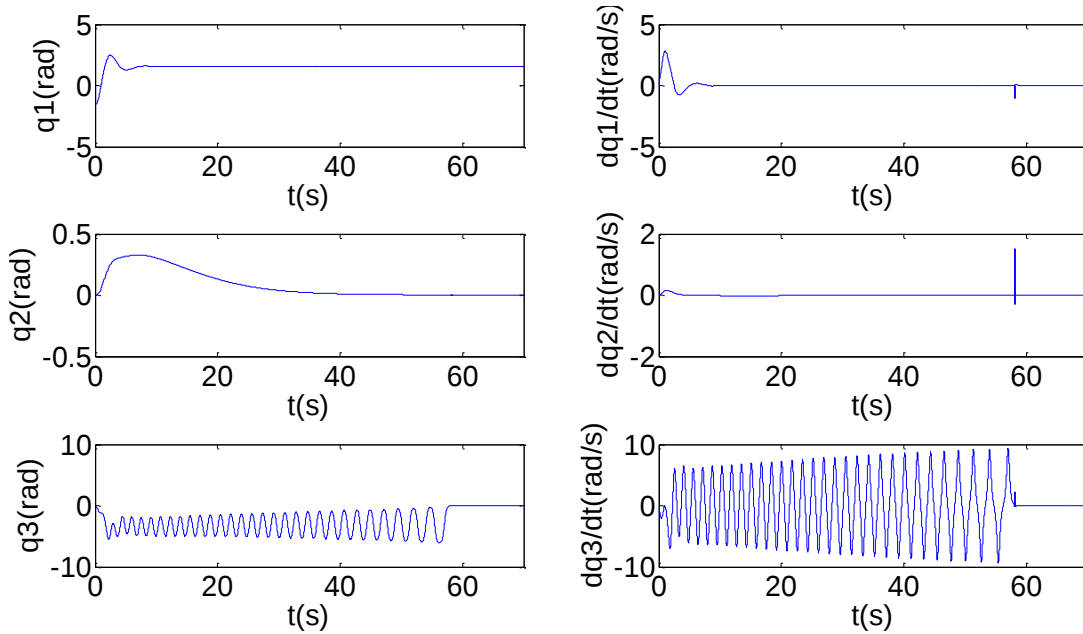
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, m_3 = 0.3 \text{ kg}, l_1 = 0.26987 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m},$$

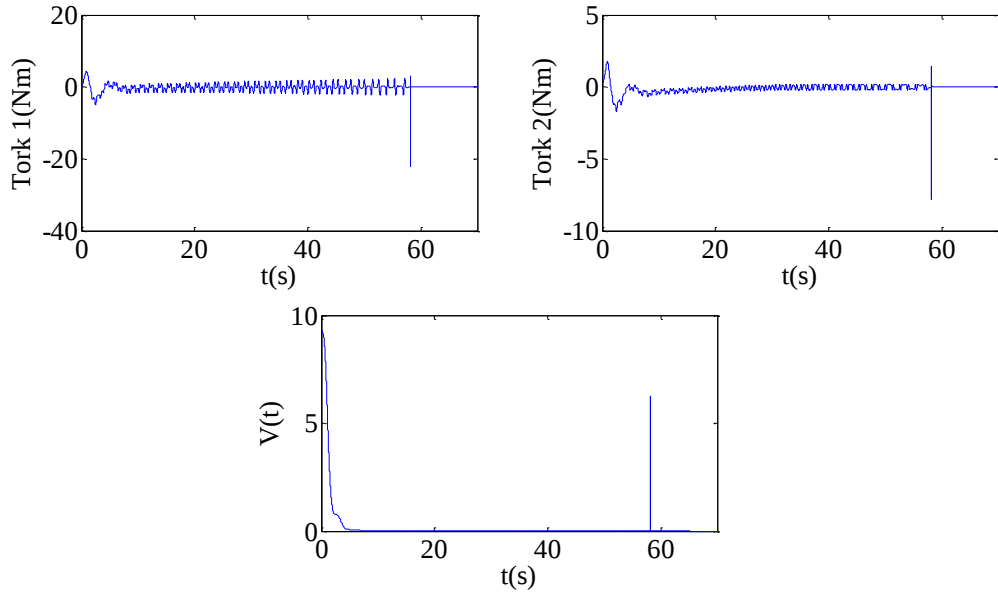
$$l_{c_1} = 0.13494 \text{ m}, l_{c_2} = 0.18208 \text{ m}, l_{c_3} = 0.2 \text{ m}, I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, k_{p_1} = 1, k_{d_1} = 1, k_{p_2} = 5,$$

$$k_{d_2} = 0.01, k_e = 0.11.$$



Şekil 3.9 : ETK ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.10 : ETK ile Konfigurasyon 3' te $q_1(0) = -\pi/2$, $q_2(0) = 0$ ve $q_3(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretleri ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.3 Araba Çubuk Sistemi

Araba Çubuk sistemine ait dinamik denklemlerde yer alan dört parametre aşağıdaki gösterilen şekilde üçe düşürülür.

$$\theta_1 = m_1 + m_2, \theta_2 = m_2 l_2, \theta_3 = m_2 l_2^2 + I_2$$

Yukarıdaki gösterimle (2.1)' deki matrisler aşağıdaki şekle dönüşür.

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \theta_2 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_2 g \sin(q_2) \end{bmatrix}.$$

$D(q)$ matrisinin bütün q değerleri için mutlak pozitif ve simetrik olup olmadığı araştırılır.

$$d_{11} = \theta_1 > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_1 \theta_3 - (\theta_2 \cos q_2)^2 = (m_1 + m_2)(m_2 l_2^2 + I_2) - (m_2 l_2)^2 (\cos q_2)^2 \\ &= m_1(m_2 l_2^2 + I_2) + m_2 I_2 + (m_2 l_2)^2 [1 - (\cos q_2)^2] \\ &= m_1 m_2 l_2^2 + m_1 I_2 + m_2 I_2 + (m_2 l_2)^2 (\sin q_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Yukarıda gösterildiği üzere $D(q)$ matrisi mutlak pozitif ve simetrik bir matristir.

Daha sonra $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisinin skew-symmetric bir matris olup olmadığı araştırılır.

$$\begin{aligned}\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ -\theta_2 \sin q_2 \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2\theta_2 \sin q_2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \theta_2 \sin q_2 \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = -\left(\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})\right)^T$ olduğu açıkça görülmektedir.

Araba Çubuk sistemine ilişkin potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$P(q) = \theta_2 g \cos q_2 \quad (3.59)$$

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \theta_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \theta_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [\theta_2 \cos q_2] \quad (3.60)$$

Araba Çubuk sistemine ilişkin toplam enerji ifadesi aşağıda gösterilmiştir.

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \theta_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \theta_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [\theta_2 \cos q_2] + \theta_2 g \cos q_2 \quad (3.61)$$

Araba Çubuk sisteminde toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)' dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1 \quad (3.62)$$

Araba Çubuk sisteminin yukarı dikey pozisyonadaki toplam enerji değeri aşağıda gösterilmiştir.

$$E_{top} = \theta_2 g \cos(q_2)|_{q_2=0} = \theta_2 g \quad (3.63)$$

$\tilde{E}(q, \dot{q}) = E(q, \dot{q}) - E_{top}$ olmak üzere aday Lyapunov fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} k_E \tilde{E}^2(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k_P q_1^2, \quad k_E, k_D, k_P > 0 \quad (3.64)$$

Aday Lyapunov fonksiyonu belirlenirken $\tilde{E}$, $\dot{q}_1$, q_1 değerlerinin sıfıra yakınsaması isteği göz önüne alınmıştır.

(3.64)' ün zamana göre türevi alınır.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{\tilde{E}}(q, \dot{q}) + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P q_1 \dot{q}_1$$

(3.62)' den $\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1$ olduğu bilinmektedir.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P q_1 \dot{q}_1 = \dot{q}_1 [k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P q_1]$$

Daha sonra (2.1)' in ilk satırından $\ddot{q}_1$ çekilir.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} [\theta_3 \tau_1 + \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_2)^2 - \theta_2^2 g \sin(q_2) \cos(q_2)]$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_2)^2 - \theta_2^2 g \sin(q_2) \cos(q_2) \text{ yazılarak;}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} [\theta_3 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)]$$

elde edilir.

Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= \dot{q}_1 \left[k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \frac{1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} [\theta_3 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)] \right. \\ &\quad \left. + k_P q_1 \right] \\ &= \dot{q}_1 \left[\tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_3}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} + k_P q_1 \right] \end{aligned}$$

yazılabilir.

Aşağıdaki gibi bir kontrol kuralı önerilerek;

$$-\dot{q}_1 = \tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_3}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} + k_P q_1$$

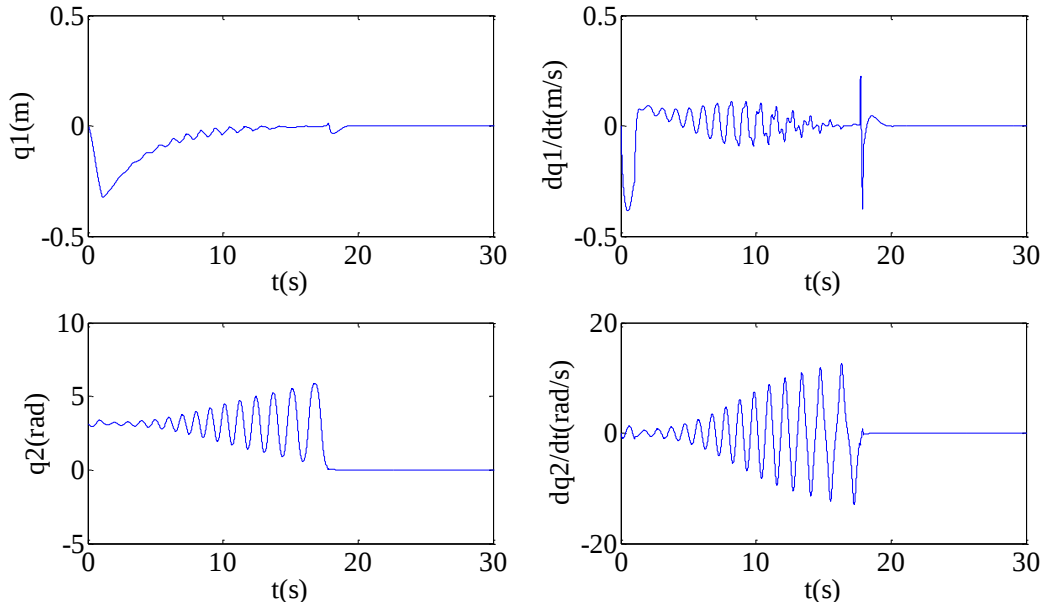
$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1^2 \leq 0 \text{ sağlanmış olur.}$$

Kontrol kuralının düzenlenmiş şekli aşağıda gösterilmiştir.

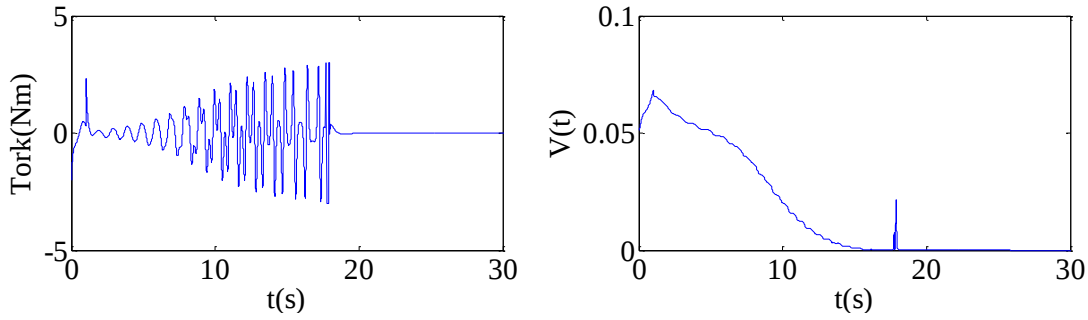
$$\tau_1 = \frac{-k_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - (\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2) (\dot{q}_1 + k_P q_1)}{(\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2) k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \theta_3}$$

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.7031 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.127 \text{ kg}, \quad l_2 = 0.1778 \text{ m}, \quad I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ k_P = 0.29, k_D = 0.29, k_E = 0.52.$$



Şekil 3.11 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.12 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

Viskoz sürtünmenin ihmal edilmediği durum

Viskoz sürtünmenin ihmal edilmemesi durumunda, enerji temeline dayanarak belirlenen kontrol kuralında küçük bir değişiklik yapmak gereklidir. Bunun için öncelikle sistemin dinamik denklemleri viskoz sürtünmeye ilişkin parametreler eklenerek yeniden ele alınır.

$$\tau_1 = \theta_1 \ddot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_2 - \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + B_{eq} \dot{q}_1 \quad (3.64)$$

$$\tau_2 = 0 = \theta_2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \theta_3 \ddot{q}_2 - \theta_2 g \sin q_2 + B_p \dot{q}_2 \quad (3.65)$$

(3.64) ve (3.65)' ten $\ddot{q}_1$ ve $\ddot{q}_2$ eşitlikleri elde edilir.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} [\theta_3 \tau_1 + \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_2)^2 - \theta_2^2 g \sin(q_2) \cos(q_2) - \theta_3 B_{eq} \dot{q}_1 + \theta_2 \cos(q_2) B_p \dot{q}_2]$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2} \left[-\theta_2 \cos(q_2) \tau_1 - \theta_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) (\dot{q}_2)^2 \right. \\ \left. + \theta_1 \theta_2 g \sin(q_2) + \theta_2 \cos(q_2) B_{eq} \dot{q}_1 - \theta_1 B_p \dot{q}_2 \right]$$

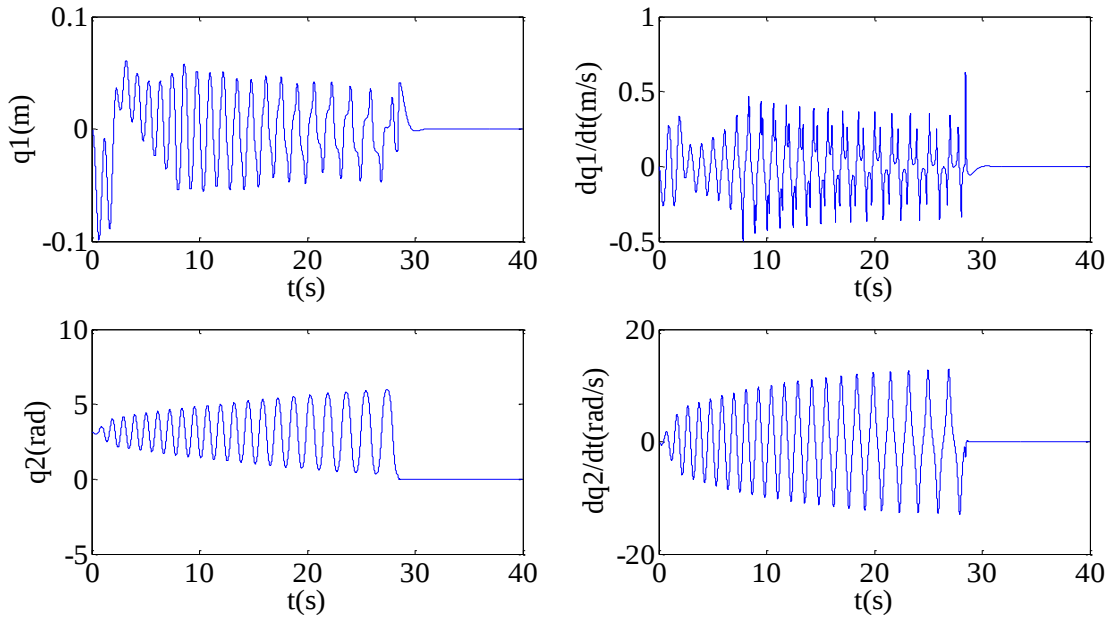
Konumsal ve açısal ivme denklemlerindeki viskoz sürtünmeye ilişkin parametrelerden tamamen kurtulmak mümkün değildir ancak birinci denklemdeki “ $-\theta_3 B_{eq} \dot{q}_1$ ” ve ikinci denklemdeki “ $\theta_2 \cos(q_2) B_{eq} \dot{q}_1$ ” ile “ $-\theta_1 B_p \dot{q}_2$ ” parametrelerinden kurtulmak mümkündür.

Bunun için kontrol kuralına “ $B_{eq} \dot{q}_1$ ” ve “ $-\frac{\theta_1}{\theta_2 \cos(q_2)} B_p \dot{q}_2$ ” parametrelerini eklemek yeterlidir. Elde edilen yeni kontrol kuralı aşağıda gösterilmiştir.

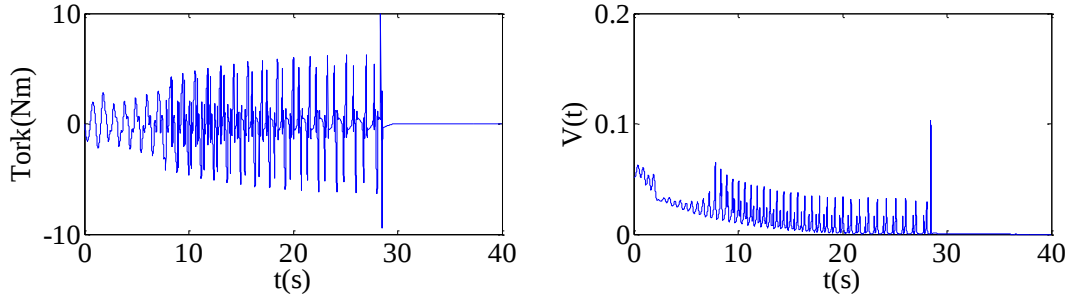
$$\tau_1^* = \frac{-k_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - (\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2) (\dot{q}_1 + k_P q_1)}{(\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2 \cos^2 q_2) k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \theta_3} + B_{eq} \dot{q}_1 \\ - \frac{\theta_1}{\theta_2 \cos(q_2)} B_p \dot{q}_2$$

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$m_1 = 0.7031 \text{ kg}$, $m_2 = 0.127 \text{ kg}$, $l_2 = 0.1778 \text{ m}$, $I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
 $k_P = 0.5$, $k_D = 0.5$, $k_E = 0.521$, $B_{eq} = 4.3$, $B_p = 0.0024$.



Şekil 3.13 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında viskoz sürtünmenin ihmal edilmediği durumda konum ve hızların zamana göre değişimi.



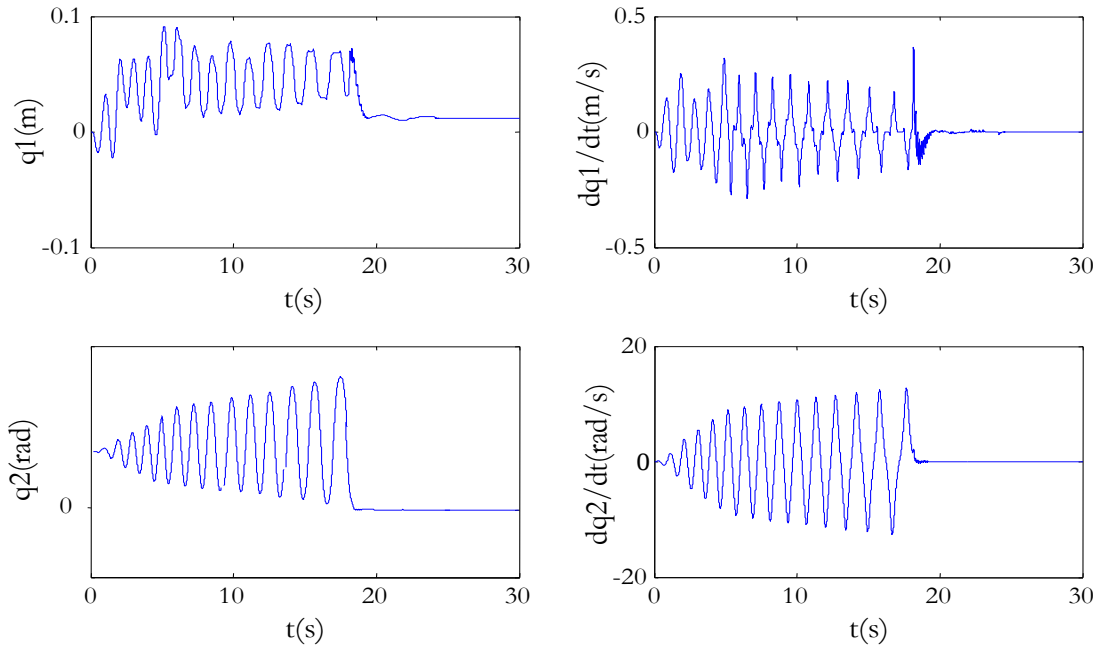
Şekil 3.14 : ETK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında viskoz sürtünmenin ihmal edilmediği durumda kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

Araba Çubuk sisteminin gerçek zamanlı uygulaması

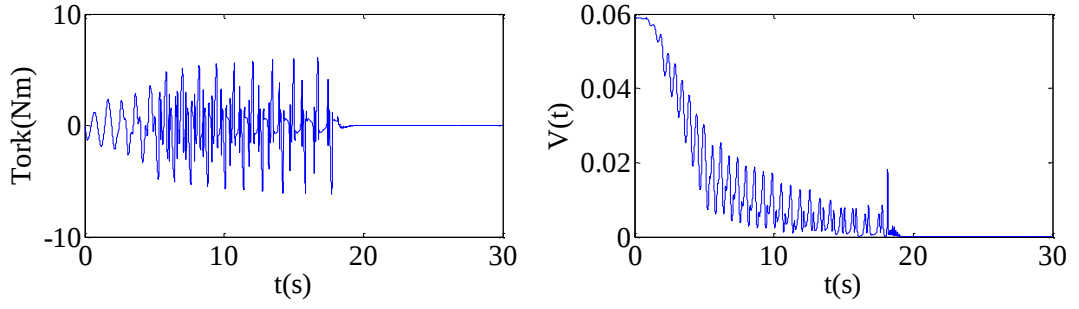
Gerçek zamanlı uygulama, Quanser SESIP IP02, Universal Power Module, Multi Q-PCI Terminal Board ve bir bilgisayarla gerçekleştirilmiştir. Bilgisayar, Matlab/Simulink’ te oluşturulan kontrol algoritmasını çalıştırır ve real-time workshop toolbox aracılığı ile ürettiği gömülü yazılımı Multi Q-PCI Terminal Board’ a gönderir.

Gerçek sistem parametreleri ve kullanılan kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.7031 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.127 \text{ kg}, \quad l_2 = 0.1778 \text{ m}, \quad I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ k_P = 0.25, \quad k_D = 0.25, \quad k_E = 0.6, \quad B_{eq} = 4.3, \quad B_p = 0.0024.$$



Şekil 3.15 : ETK ile gerçek Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.16 : ETK ile gerçek Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

3.2.4 Dönel Sarkaç

Dönel Sarkaç sistemine ait dinamik denklemlerde yer alan yedi parametre aşağıdaki gösterilen şekilde beşe düşürülür.

$$\theta_1 = m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 L_1^2, \theta_2 = m_2 l_2^2, \theta_3 = m_2 L_1 l_2, \theta_4 = m_2 l_2^2 + I_2, \theta_5 = m_2 l_2$$

Yukarıdaki gösterimle (2.1)'deki matrisler aşağıdaki şekle dönüşür.

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2) & \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_3 \cos(q_2) & \theta_4 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) & \dot{q}_1 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2 \theta_3 \sin(q_2) \\ -\dot{q}_1 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_5 g \sin(q_2) \end{bmatrix}.$$

$D(q)$ matrisinin bütün q değerleri için mutlak pozitif ve simetrik olup olmadığı araştırılır.

$$d_{11} = \theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2) > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_1 \theta_4 + \theta_2 \theta_4 \sin^2(q_2) - (\theta_3 \cos(q_2))^2 \\ &= m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 + I_1 m_2 l_2^2 + m_2 L_1^2 m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2 I_2 + I_1 I_2 \\ &\quad + m_2 L_1^2 I_2 + m_2^2 l_2^4 \sin^2(q_2) + m_2 l_2^2 I_2 \sin^2(q_2) \\ &\quad - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(q_2) \\ &= m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 + I_1 m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2 I_2 + I_1 I_2 + m_2 L_1^2 I_2 \\ &\quad + m_2^2 l_2^4 \sin^2(q_2) + m_2 l_2^2 I_2 \sin^2(q_2) + m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin^2(q_2) > 0. \end{aligned}$$

Yukarıda gösterildiği üzere $D(q)$ matrisi mutlak pozitif ve simetrik bir matristir.

Daha sonra $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ matrisinin skew-symmetric bir matris olup olmadığı araştırılır.

$$\begin{aligned}\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 2\theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &- 2 \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) & \dot{q}_1 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2 \theta_3 \sin(q_2) \\ -\dot{q}_1 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \\ &= (2\dot{q}_1 \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2 \theta_3 \sin(q_2)) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = -\left(\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})\right)^T$ olduğu açıkça görülmektedir.

Dönel Sarkaç sistemine ilişkin potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$P(q) = \theta_5 g \cos(q_2) \quad (3.66)$$

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [\theta_4] \dot{q}_2^2 + \theta_3 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (3.67)$$

Dönel Sarkaç sistemine ilişkin toplam enerji ifadesi aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}E(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [\theta_4] \dot{q}_2^2 + \theta_3 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &+ \theta_5 g \cos(q_2)\end{aligned} \quad (3.68)$$

Dönel Sarkaç sisteminde toplam enerjinin zamana göre türevi (3.6)' dan yararlanarak elde edilir.

$$\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1 \quad (3.69)$$

Dönel Sarkaç sisteminin ikinci eklem yukarı dikey pozisyonda iken sahip olduğu enerji değeri aşağıda gösterilmiştir.

$$E_{top} = \theta_5 g \cos(q_2)|_{q_2=0} = \theta_5 g \quad (3.70)$$

$\tilde{E} = E - E_{top}$ olmak üzere aday Lyapunov fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} k_E \tilde{E}^2(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k_P q_1^2, \quad k_E, k_D, k_P > 0 \quad (3.71)$$

Aday Lyapunov fonksiyonu belirlenirken $\tilde{E}$, $\dot{q}_1$, q_1 değerlerinin sıfıra yakınsaması isteği göz önüne alınmıştır.

(3.71)' in zamana göre türevi alınır.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{E}(q, \dot{q}) + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P q_1 \dot{q}_1$$

(3.69)' dan $\dot{E}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \tau_1$ olduğu bilinmektedir.

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P q_1 \dot{q}_1 = \dot{q}_1 [k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P q_1]$$

Daha sonra (2.1)' in ilk satırından $\ddot{q}_1$ çekilir.

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_4 + \theta_2 \theta_4 \sin^2(q_2) - \theta_3^2 \cos^2(q_2)} \{ \theta_4 \tau_1 - 2 \theta_2 \theta_4 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ + \theta_3 \theta_4 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 - \theta_3 \theta_5 g \sin(q_2) \cos(q_2) \}$$

İfadeyi basitleştirmek için

$$F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = -2 \theta_2 \theta_4 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_3 \theta_4 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ - \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 - \theta_3 \theta_5 g \sin(q_2) \cos(q_2)$$

ve

$$\gamma(q_2) = \theta_1 \theta_4 + \theta_2 \theta_4 \sin^2(q_2) - \theta_3^2 \cos^2(q_2) \text{ yazılarak;}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\gamma(q_2)} [\theta_4 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)] \text{ elde edilir. Buradan hareketle;}$$

$$\rightarrow \dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{q}_1 \left[k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \frac{1}{\gamma(q_2)} [\theta_4 \tau_1 + F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)] + k_P q_1 \right] \\ = \dot{q}_1 \left[\tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_4}{\gamma(q_2)} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\gamma(q_2)} + k_P q_1 \right]$$

yazılabilir. Aşağıdaki gibi bir kontrol kuralı önerilerek;

$$-\dot{q}_1 = \tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \frac{\theta_4}{\gamma(q_2)} \right) + k_D \frac{F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)}{\gamma(q_2)} + k_P q_1$$

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1^2 \leq 0 \text{ sağlanmış olur.}$$

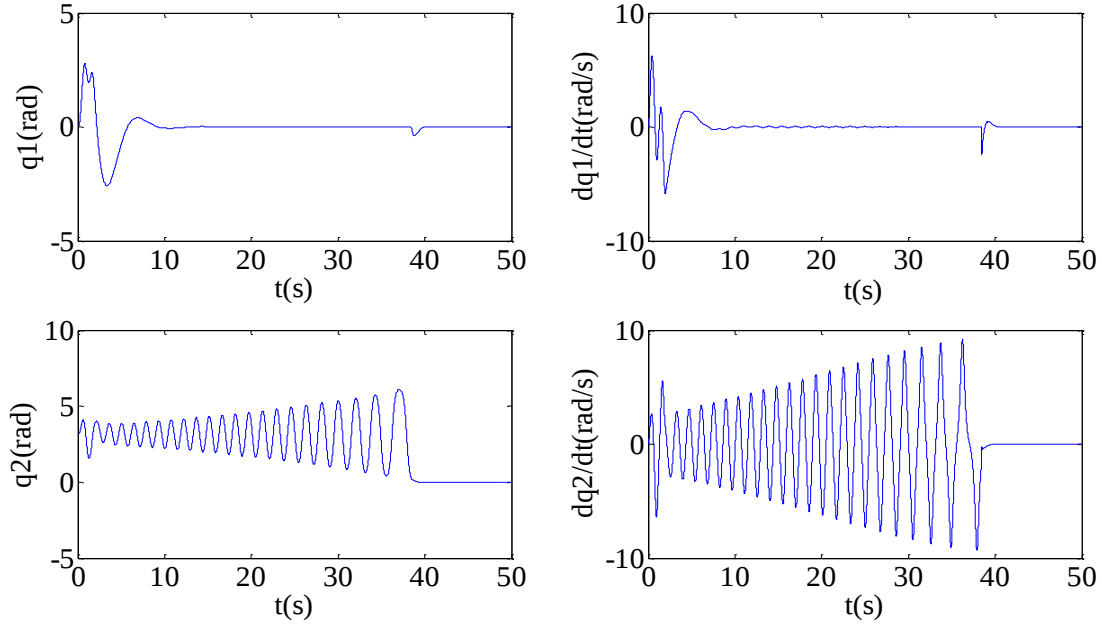
Kontrol kuralının düzenlenmiş şekli aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau_1 = \frac{-k_D F(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) - \gamma(q_2) (\dot{q}_1 + k_P q_1)}{\gamma(q_2) k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + k_D \theta_4}$$

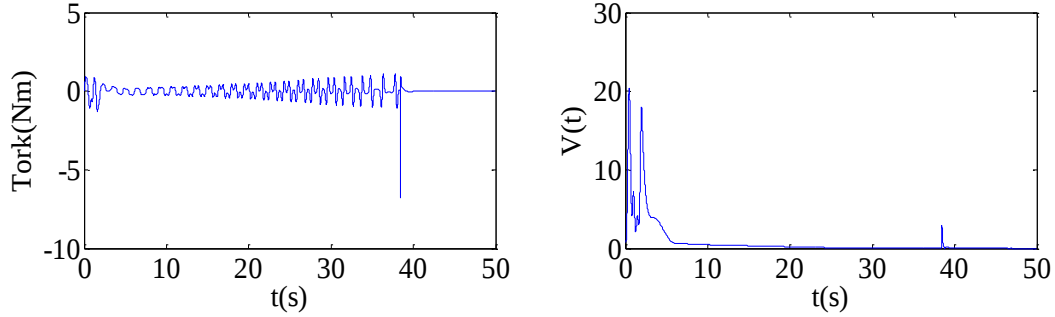
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.5289 \text{ kg}, m_2 = 0.3346 \text{ kg}, L_1 = 0.26987 \text{ m}, l_1 = 0.13494 \text{ m},$$

$l_2 = 0.18208 \text{ m}$, $I_1 = 13.863 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_2 = 16.749 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $k_D = 1$,
 $k_P = 1$, $k_E = 1$.



Şekil 3.17 : ETK ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 3.18 : ETK ile Dönel Sarkaç' ta $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işareti ve Lyapunov fonksiyonunun zamana göre değişimi.

4. DİĞER NONLİNEER KONTROL YÖNTEMLERİ

4.1 İki Kural Temelli Bulanık Kontrol

İki kural temelli bulanık kontrol algoritması [12]' de verildiği şekilde tanımlanmış ve bu algoritmanın uygulaması 2 DOF planar robot manipulatorleri üzerinde gerçekleştirilmiştir.

İki kural temelli bulanık kontrol algoritması aşağıda verilmiştir.

“E” hata, “RE” hatanın değişim oranı olmak üzere sisteme ait iki durum tanımlanır.

E negatif VE RE negatif & E pozitif VE RE pozitif.

Bu iki durum, sistem durumu negatif & sistem durumu pozitif şeklinde de ifade edilebilir.

Verilen iki durum için kontrol kuralları türetilir:

Eğer sistem durumu pozitif ise **o zaman** kontrol aksiyonu pozitifdir.

Eğer sistem durumu negatif ise **o zaman** kontrol aksiyonu negatiftir.

Kontrol kurallarında, kontrol aksiyonu değişkeninin hem hata değerine hem de hatanın değişim oranına karşılık geldiği görülmektedir.

4.1.1 İki kural temelli bulanık kontrol uygulamaları

İki kural temelli bulanık kontrol algoritması eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorleri Pendubot ve Acrobot üzerinde uygulanmıştır. İki manipulator için de aynı algoritma kullanılmıştır.

Eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatorlerinin iki kural temelli bulanık swing-up kontrol uygulamasında ilk olarak aşağıda gösterilen kısaltmalar verilir.

1. eklem: S, 2. eklem: E

1. eklemin durumu: SS, 2. eklemin durumu: ES

1. ekleme ilişkin durumlar: SS={SE, RSE}

(**SE**: 1. eklemin açısal konum hatası ve **RSE**: 1. eklemin açısal konum hatasının değişim oranı)

2. ekleme ilişkin durumlar **ES**=**{EE, REE}**

(**EE**: 2. eklemin açısal konum hatası ve **REE**: 2. eklemin açısal konum hatasının değişim oranı)

İki ekleme ilişkin açısal konum hataları ve bunların değişim oranları aşağıda gösterilmiştir. (h : örnekleme periyodu)

$$se = \frac{\pi}{2} - q_1$$

$$rse = \frac{se(t) - se(t-h)}{h} = \frac{\left[\frac{\pi}{2} - q_1(t)\right] - \left[\frac{\pi}{2} - q_1(t-h)\right]}{h} = -\frac{[q_1(t) - q_1(t-h)]}{h} = -\dot{q}_1$$

$$ee = \frac{\pi}{2} - (q_1 + q_2)$$

$$\begin{aligned} ree &= \frac{ee(t) - ee(t-h)}{h} = \frac{\left[\frac{\pi}{2} - q_1(t) - q_2(t)\right] - \left[\frac{\pi}{2} - q_1(t-h) - q_2(t-h)\right]}{h} \\ &= -\frac{[q_1(t) - q_1(t-h)]}{h} - \frac{[q_2(t) - q_2(t-h)]}{h} = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \end{aligned}$$

se , rse , ee , ree değişkenlerine ilişkin pozitif ve negatif işaretli iki bulanık küme tanımlanır.

Σ , yukarıda verilen değişkenlerden birisini temsil etmek üzere bu değişkenlere ilişkin bulanık kümeler aşağıda gösterilmiştir.

$$\Sigma P(x) = \frac{1 + \tanh(kx)}{2}, \quad \Sigma N(x) = \frac{1 - \tanh(kx)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Sigma P(x) + \Sigma N(x) = 1$ olduğu gözlenir.

Bulanık kontrol kuralını türetmek için öncelikle 1. eklem ele alınır.

se 'nin tüm gerçek değerlerine karşılık sıfır üyelik derecesine sahip olmayan giriş bulanık kümeleri vardır. Öncelikli hedef için belirlenen kontrol stratejisi aşağıda gösterilmiştir.

Kural 1: EĞER “SS, SSP ise” **O HALDE** “tork τ pozitifdir”.

Kural 2: EĞER “SS, SSN ise” **O HALDE** “tork τ negatiftir”.

(SSP: 1. ekleme ait durumlar pozitif, SSN: 1. ekleme ait durumlar negatif.)

SSP ve SSN bulanık kümeleri, SSP ve SSN' ye göre her se, rse çiftinin üyelik derecesi kullanılarak tanımlanır.

$SEP(se) = \frac{1+\tanh(k_1 se)}{2}$, $RSEP(rse) = \frac{1+\tanh(k_2 rse)}{2}$, $SEN(se) = \frac{1-\tanh(k_1 se)}{2}$ ve $RSEN(rse) = \frac{1-\tanh(k_2 rse)}{2}$ olmak üzere SSP ve SSN bulanık kümeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$SSP(se, rse) = \mu_s SEP(se) + (1 - \mu_s) RSEP(rse), \mu_s \in [0,1] \quad (4.1)$$

$$SSN(se, rse) = \mu_s SEN(se) + (1 - \mu_s) RSEN(rse), \mu_s \in [0,1] \quad (4.2)$$

μ_s ' nin değeri, se ve rse değişkenlerinden hangisine daha fazla önem verildiğini belirlemektedir.

$SSP(se, rse) + SSN(se, rse) = 1$ olduğu açıkça görülmektedir.

$se_1 = k_1 se$ ve $se_2 = k_2 rse$ olmak üzere $S(se_1, se_2)$ eşitliği aşağıda gösterildiği gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} S(se_1, se_2) &= SSP(se, rse) - SSN(se, rse) \\ &= \mu_s SEP(se) + (1 - \mu_s) RSEP(rse) \\ &\quad - [\mu_s SEN(se) + (1 - \mu_s) RSEN(rse)] \\ &= \mu_s [SEP(se) - SEN(se)] + (1 - \mu_s) [RSEP(rse) - RSEN(rse)] \\ &= \mu_s [SEP(se) - (1 - SEP(se))] \\ &\quad + (1 - \mu_s) [RSEP(rse) - (1 - RSEP(rse))] \\ &= \mu_s [2SEP(se) - 1] + (1 - \mu_s) [2RSEP(rse) - 1] \\ &= \mu_s \left[2 \left(\frac{1+\tanh(k_1 se)}{2} \right) - 1 \right] + (1 - \mu_s) \left[2 \left(\frac{1+\tanh(k_2 rse)}{2} \right) - 1 \right] \\ &= \mu_s \tanh(k_1 se) + (1 - \mu_s) \tanh(k_2 rse) \\ &= \mu_s \tanh(se_1) + (1 - \mu_s) \tanh(se_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sistem çıkışı olarak verilen çıkış bulanık kümeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$TP(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{eğer } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{eğer } -1 \leq \xi < 0 \end{cases}, \quad TN(\xi) = \begin{cases} |\xi| & \text{eğer } -1 \leq \xi \leq 0 \\ 0 & \text{eğer } 0 \leq \xi < 1 \end{cases}$$

$\tau = G_1 \xi$ eşitliğiyle ξ ve τ arasında bir ilişki kurulmuştur.

Durulaştırılmış çıkış, $\xi = S(se_1, se_2)$ olmak üzere aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau(se, rse) = G_1 \xi = G_1 [SSP(se, rse) - SSN(se, rse)] \quad (4.4)$$

Benzer şekilde, 2. eklem için de açısal konum hatasının tanımından faydalanarak ESP ve ESN olmak üzer iki farklı durum tanımlanır. ESP ve ESN bulanık kümeleri, ESP ve ESN' ye göre her ee, ree çiftinin üyelik derecesi kullanılarak tanımlanır.

$EEP(ee) = \frac{1+\tanh(k_3 ee)}{2}$, $REEP(ree) = \frac{1+\tanh(k_4 ree)}{2}$, $EEN(ee) = \frac{1-\tanh(k_3 ee)}{2}$ ve $REEN(ree) = \frac{1-\tanh(k_4 ree)}{2}$ olmak üzere ESP ve ESN bulanık kümeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$ESP(ee, ree) = \mu_e EEP(ee) + (1 - \mu_e) REEP(ree), \mu_e \in [0,1] \quad (4.5)$$

$$ESN(ee, ree) = \mu_e EEN(ee) + (1 - \mu_e) REEN(ree), \mu_e \in [0,1] \quad (4.6)$$

μ_e ' nin değeri, ee ve ree değişkenlerinden hangisine daha fazla önem verildiğini belirlemektedir.

$ESP(ee, ree) + ESN(ee, ree) = 1$ olduğu açıkça görülmektedir.

$ee_1 = k_3 ee$ ve $ee_2 = k_4 ree$ olmak üzere $E(ee_1, ee_2)$ eşitliği aşağıda gösterildiği gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} E(ee_1, ee_2) &= ESP(ee, ree) - ESN(ee, ree) \\ &= \mu_e EEP(ee) + (1 - \mu_e) REEP(ree) - [\mu_e EEN(ee) + (1 - \mu_e) REEN(ree)] \\ &= \mu_e [EEP(ee) - EEN(ee)] + (1 - \mu_e) [REEP(ree) - REEN(ree)] \\ &= \mu_e [EEP(ee) - (1 - EEP(ee))] + (1 - \mu_e) [REEP(ree) - (1 - REEP(ree))] \\ &= \mu_e [2EEP(ee) - 1] + (1 - \mu_e) [2REEP(ree) - 1] \\ &= \mu_e \left[2 \left(\frac{1+\tanh(k_3 ee)}{2} \right) - 1 \right] + (1 - \mu_e) \left[2 \left(\frac{1+\tanh(k_4 ree)}{2} \right) - 1 \right] \\ &= \mu_e \tanh(k_3 ee) + (1 - \mu_e) \tanh(k_4 ree) \\ &= \mu_e \tanh(ee_1) + (1 - \mu_e) \tanh(ee_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\tau = G_2 \xi$ eşitliğiyle ξ ve τ arasında bir ilişki kurulmuştur.

Durulaştırılmış çıkış, $\xi = E(ee_1, ee_2)$ olmak üzere aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau(ee, ree) = G_2 \xi = G_2 [ESP(ee, ree) - ESN(ee, ree)] \quad (4.8)$$

Swing-up kontrolde eksik eyleyicili 2 DOF planar robot manipulatörünü yukarı dikey pozisyona getirmek için aşağıda gösterilen kontrol stratejisi kullanılır.

Kural 1: EĞER “SS, SSP” VE HATTA “ES, ESP ise” O HALDE “tork τ pozitifdir”.

Kural 2: EĞER “SS, SSN” VE HATTA “ES, ESN ise” O HALDE “tork τ negatiftir”.

“**VE HATTA**” ifadesi 1. eklem durumu SS’ ye 2. Eklem durumu ES’ den daha fazla önem verildiğini vurgulamak için özellikle konulmuştur. Matematiksel olarak bu ifadeyi gerçekleştirirken aşağıdaki eşitliklerde $\lambda > 0.5$ seçilir (OS: genel durum).

$$OSP = \lambda SSP(se, rse) + (1 - \lambda) ESP(ee, ree) \quad (4.9)$$

$$OSN = \lambda SSN(se, rse) + (1 - \lambda) ESN(ee, ree) \quad (4.10)$$

OS değişkeni SS ve ES değişkenlerini içermektedir.

Durulaştırılmış çıkış aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \tau &= G[OSP - OSN] \\ &= G[\lambda SSP(se, rse) + (1 - \lambda) ESP(ee, ree) - \lambda SSN(se, rse) \\ &\quad - (1 - \lambda) ESN(ee, ree)] \\ &= G[\lambda S(se_1, se_2) + (1 - \lambda) E(ee_1, ee_2)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kontrol kuralının parametreler cinsinden ifade edilmiş şekli aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \tau &= G \left\{ \lambda \left[\mu_s \tanh(k_1 \left(\frac{\pi}{2} - q_1 \right)) + (1 - \mu_s) \tanh(-k_2 \dot{q}_1) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) \left[\mu_e \tanh(k_3 \left(\frac{\pi}{2} - q_1 - q_2 \right)) + (1 - \mu_e) \tanh(k_4 (-\dot{q}_1 - \dot{q}_2)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Kontrol kuralının analizi aşağıda gösterildiği şekilde yapılabilir.

$\mu_s, \mu_e \in [0,1]$ ve $\tanh(se), \tanh(ee) \in [-1,1]$ tanımları gereğince $S(se_1, se_2), E(ee_1, ee_2) \in [-1,1]$ olduğu görülmektedir.

Benzer şekilde $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $-1 \leq [\lambda S(se_1, se_2) + (1 - \lambda) E(ee_1, ee_2)] \leq 1$ olduğu görülmektedir.

Buradan, $-G \leq \tau \leq G$ sonucuna ulaşılır. Son eşitsizlikten kontrol işaretinin sınırlı olduğu ve G parametresinin maksimum ve minimum tork değerini belirlediği görülmektedir.

λ parametresi 1. eklem ve 2. eklemden hangisine daha fazla önem verileceğini belirler.

$\lambda > 0.5$ iken 1. ekleme, aksi halde 2. ekleme daha fazla önem verilir. $\lambda = 0.5$ iken ise eklemlere verilen önem aynıdır.

μ_s, μ_e parametreleri sırasıyla 1. ve 2. eklemlerde açısal konum hatası ve açısal konum hatasının değişim oranından hangisine daha fazla önem verileceğini belirler.

$\mu_s, \mu_e > 0.5$ iken açısal konum hatasına aksi halde açısal konum hatasının değişim oranına daha fazla önem verilir. $\mu_s, \mu_e = 0.5$ iken ise iki değişkene verilen önem aynıdır.

k_1, k_3 parametreleri açısal konum hatalarına k_2, k_4 parametreleri açısal konum hatası değişim oranlarına ilişkindir. k_1/k_2 oranı 1. eklemden, k_3/k_4 oranı 2. eklemden açısal konum hatası ve açısal konum hatasının değişim oranından hangisine daha fazla önem verileceğini belirler.

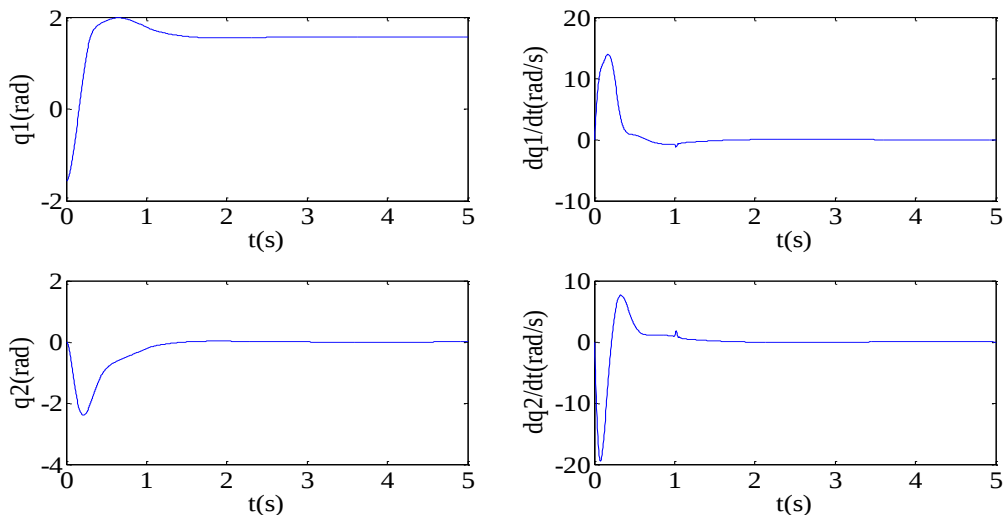
$k_1/k_2, k_3/k_4 > 0.5$ iken açısal konum hatasına aksi halde açısal konum hatasının değişim oranına daha fazla önem verilir. $k_1/k_2, k_3/k_4 = 0.5$ iken ise iki değişkene verilen önem aynıdır.

4.1.1.1 Pendubot

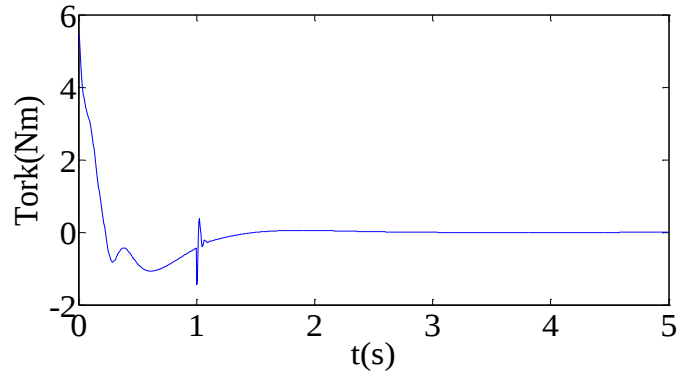
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\theta_1 = 0.0308, \theta_2 = 0.0106, \theta_3 = 0.0095, \theta_4 = 0.2087, \theta_5 = 0.063$$

$$k_1 = 0.9, k_2 = 0.1, k_3 = 0.9, k_4 = 0.1, \mu_s = 0.5, \mu_e = 0.65, \lambda = 0.7, G = 10.04.$$



Şekil 4.1: İKTBK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısal konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.2 : İKTBK ile Pendubot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

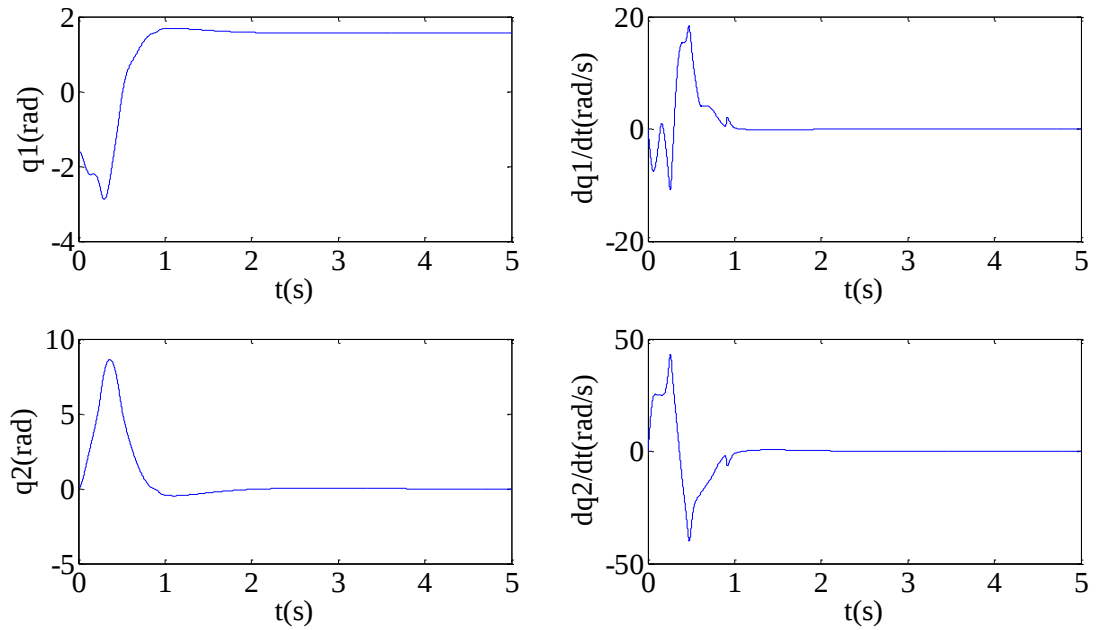
4.1.1.2 Acrobot

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

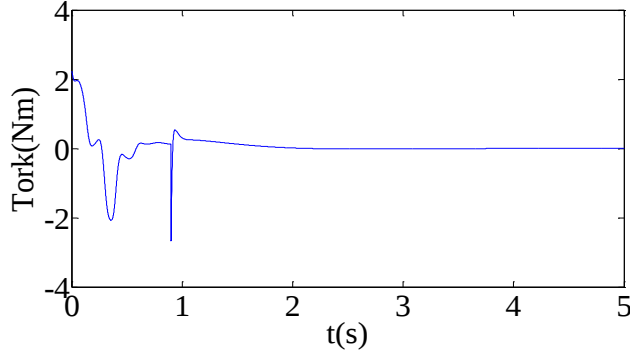
$$\theta_1 = 0.0308, \theta_2 = 0.0106, \theta_3 = 0.0095, \theta_4 = 0.2087, \theta_5 = 0.063$$

$$k_1 = 0.5, k_2 = 0.1, k_3 = 0.5, k_4 = 0.1, \mu_s = 0.5, \mu_e = 0.5,$$

$$\lambda = 0.528, G = 4.9.$$



Şekil 4.3: İKTBK ile Acrobot' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında açısai konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.4: İKTBK ile Acrobat' ta $q_1(0) = -\pi/2$ ve $q_2(0) = 0$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

4.2 Kaskad Geriadımlamalı Kontrol

4.2.1 Kaskad geriadımlama yöntemi

İkinci dereceden bir sisteme ait zincir form aşağıda gösterilmiştir [13].

$$\ddot{\epsilon}_1 = u_1, \quad \ddot{\epsilon}_2 = u_2, \quad \ddot{\epsilon}_3 = \epsilon_2 u_1 \quad (4.13)$$

(4.13)'ün durum uzayındaki karşılığı $x_{2i-1} = \epsilon_i, x_{2i} = \dot{\epsilon}_i, i = 1,2,3$ olmak üzere aşağıda gösterilmiştir [14].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 & \dot{x}_4 &= u_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6 & \dot{x}_6 &= x_3 u_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Kaskad geriadımlamalı kontrolde durum vektörünün ($x = [x_1, \dots, x_6]^T$) referans vektörünü ($x_d = [x_{1d}, \dots, x_{6d}]^T$) takip etmesi istenmektedir. Referans vektörünün elemanları aşağıda gösterilmiştir [14].

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= x_{2d} & \dot{x}_{2d} &= u_{1d} \\ \dot{x}_{3d} &= x_{4d} & \dot{x}_{4d} &= u_{2d} \\ \dot{x}_{5d} &= x_{6d} & \dot{x}_{6d} &= x_{3d} u_{1d} \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.14), (4.15) ve $x_{ie} = x_i - x_{id} (i = 1, \dots, 6)$, eşitliği kullanılarak hata dinamikleri belirlenir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= x_{2e} & \dot{x}_{2e} &= u_1 - u_{1d} \\ \dot{x}_{3e} &= x_{4e} & \dot{x}_{4e} &= u_2 - u_{2d} \\ \dot{x}_{5e} &= x_{6e} & \dot{x}_{6e} &= x_{3e} u_{1d} + x_3 (u_1 - u_{1d}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Bu tasarım yöntemiyle hata dinamiklerinin $x = 0$ denge noktasında kararlılaştırılması sağlanır. Öncelikle hata dinamikleri $x_{11} = x_{1e}, x_{12} = x_{2e}$,

$x_{21} = x_{3e}, x_{22} = x_{4e}, x_{31} = x_{5e}, x_{32} = x_{6e}$ olmak üzere daha kullanışlı bir formda yeniden yazılır [15].

$$\begin{aligned} \Delta 1 &= \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = x_{21}u_{1d} + (x_{21} + \mathcal{E}_{2d})(u_1 - u_{1d}) \end{cases} & \Delta 2 &= \begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = u_2 - u_{2d} \end{cases} \\ \Delta 3 &= \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = u_1 - u_{1d} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17)' de $\mathcal{E}_{2d}, \mathcal{E}_2$ durum değişkeninin takip etmesi istenen referans yörüngeyi temsil etmektedir.

$\Delta 3$ alt sistemini $(x_{11}, x_{12}) = (0,0)$ noktasında kararlı kılan kontrol kuralı aşağıda gösterilmiştir [15].

$$u_1 = u_{1d} - k_1 x_{11} - k_2 x_{12} \quad , \quad k_1, k_2 > 0 \quad (4.18)$$

k_1, k_2 parametreleri $p(\lambda) = \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2$ polinomu Hurwitz kararlılık kriterini sağlamak üzere belirlenir.

(4.17) ve (4.18)' den $x_{12} \equiv 0$ iken $u_1 - u_{1d} \equiv 0$ elde edilir ve $\Delta 1$ alt sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta 1 = \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = x_{21}u_{1d} \end{cases} \quad (4.19)$$

$\Delta 1$ alt sistemini kararlı kılan geribesleme kuralı x_{21} ' in sanal giriş olarak seçildiği geriadımlama algoritması kullanılarak tasarlanır.

$\Delta 1$ alt sisteminde $\dot{x}_{31} = x_{32}$ eşitliğinde x_{32} ' nin sanal giriş olduğu varsayılır. Bu eşitliği kararlı kılan $x_{32} = \alpha_1(x_{31})$ fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir [15].

$$\alpha_1 = -c_1 u_{1d}^2 x_{31} \quad , \quad c_1 > 0 \quad (4.20)$$

u_{1d} ' nin karesinin alınmasındaki neden, $\Delta 1, \Delta 2$ alt sistemleri geriadımlama algoritmasıyla kararlı kılınırken u_{1d} ' ye bölme işlemi olmamasını garanti altına almaktır.

[15]' te verildiği şekilde $\bar{x}_{32} = x_{32} - \alpha_1(x_{31}) = x_{32} + c_1 u_{1d}^2 x_{31}$ tanımlanır ve $\Delta 1$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{32}$ hesaplanır.

$$\dot{\bar{x}}_{32} = \dot{x}_{32} + c_1 u_{1d}^2 \dot{x}_{31} + 2c_1 u_{1d} \dot{u}_{1d} x_{31} = x_{21}u_{1d} + c_1 u_{1d}^2 \dot{x}_{31} + 2c_1 u_{1d} \dot{u}_{1d} x_{31}$$

$\bar{x}_{32}$ alt sistemini kararlı kılan ($\dot{\bar{x}}_{32} = -c_2 u_{1d}^2 \bar{x}_{32}$ yapan), $x_{21} = \alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})$ fonksiyonu $\bar{u}_{1d} = (u_{1d}, \dot{u}_{1d}, \dots, u_{1d}^{(3)})$ ve x_{21} sanal giriş olmak üzere aşağıda gösterilmiştir [15].

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -c_1 u_{1d} x_{32} - 2c_1 \dot{u}_{1d} x_{31} - c_2 u_{1d} \bar{x}_{32} \\ &= -c_1 u_{1d} x_{32} - 2c_1 \dot{u}_{1d} x_{31} - c_2 u_{1d} (x_{32} + c_1 u_{1d}^2 x_{31}) \\ &= -(c_1 c_2 u_{1d}^3 + 2c_1 \dot{u}_{1d}) x_{31} - (c_1 u_{1d} + c_2 u_{1d}) x_{32} \quad , \quad c_2 > 0\end{aligned}\quad (4.21)$$

[15]' te verildiği şekilde $\bar{x}_{21} = x_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin birinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{21}$ hesaplanır.

$$\dot{\bar{x}}_{21} = \dot{x}_{21} - \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] = x_{22} - \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})]$$

$\bar{x}_{21}$ alt sistemini kararlı kılan ($\dot{\bar{x}}_{21} = -c_3 \bar{x}_{21}$ yapan), $x_{22} = \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})$ fonksiyonu x_{22} sanal giriş olmak üzere aşağıda gösterilmiştir [15].

$$\alpha_3 = -c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \quad , \quad c_3 > 0 \quad (4.22)$$

[15]' te verildiği şekilde $\bar{x}_{22} = x_{22} - \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{22}$ hesaplanır.

$$\dot{\bar{x}}_{22} = \dot{x}_{22} - \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})] = u_2 - u_{2d} - \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})]$$

$\bar{x}_{22}$ alt sistemi u_2 girişi aşağıdaki gibi seçilerek ($\dot{\bar{x}}_{22} = -c_4 \bar{x}_{22}$ yapılarak) kararlı kılınır [15].

$$u_2 = u_{2d} - c_4 \bar{x}_{22} + \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})] \quad (4.23)$$

$$= u_{2d} - c_4 (x_{22} - \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})) + \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})]$$

$$\begin{aligned}&= u_{2d} - c_4 \left(x_{22} - \left(-c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right) \right) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[-c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{2d} - c_4 \left(x_{22} - \left(-c_3(x_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})) + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right) \right) \\
&\quad + \frac{d}{dt} \left[-c_3(x_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})) + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right] \\
&= u_{2d} - c_3 c_4 x_{21} - (c_3 + c_4) x_{22} + c_3 c_4 \alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32}) \\
&\quad + (c_3 + c_4) \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})] + \frac{d^2}{dt^2} [\alpha_2(\bar{u}_{1d}, x_{31}, x_{32})]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

u_1 ve u_2 kontrol kuralları ile, $(\Delta 1, \Delta 2)$ ve $(\Delta 3)$ alt sistemleri eksponansiyel kararlı olduğu için bütün sistem asimptotik kararlıdır.

4.2.2 Kaskad geriadımlamalı kontrol uygulaması

4.2.2.1 Eksik eyleyicili deniz aracı

Sisteme ait hareket denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= m(\ddot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\
0 &= m(-\ddot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + c_y(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$T_3 = I\ddot{\theta} + c_z \dot{\theta}$$

Dönüşüm Z

Kaskad form için tanımlanmış yeni durumlar aşağıda gösterilmiştir [16].

$$z_1 = x \quad z_2 = \dot{x} \quad z_3 = \tan \theta \quad z_4 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \quad z_5 = y \quad z_6 = \dot{y} \tag{4.26}$$

(4.25) ve (4.26)' dan hareket denklemleri aşağıda gösterildiği şekilde kaskad forma dönüştürülür.

$$f_1 = c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta), \quad f_2 = c_y(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta), \quad \dot{z}_2 = u_1 \quad \text{ve} \quad \dot{z}_4 = u_2$$

olmak üzere;

$$u_1 = F_1 \frac{\cos \theta}{m} - f_1 \frac{\cos \theta}{m} + f_2 \frac{\sin \theta}{m},$$

$$u_2 = \frac{d^2(\tan \theta)}{dt^2} = 2\dot{\theta}^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \ddot{\theta} = 2\dot{\theta}^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{T_3 - c_z \dot{\theta}}{I} \right) \quad \text{ve}$$

$$0 = m(-u_1 \sin \theta + \dot{z}_6 \cos \theta) + c_y(-z_2 \sin \theta + z_6 \cos \theta) \quad \text{elde edilir.}$$

Yukarıdaki son eşitlikten $\dot{z}_6$ ifadesi belirlenir.

$$\dot{z}_6 = u_1 \tan \theta + \frac{c_y}{m} (z_2 \tan \theta - z_6) = u_1 z_3 + \frac{c_y}{m} (z_2 z_3 - z_6)$$

Hareket denklemlerinin kaskad formda gösterilişi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & \dot{z}_2 &= u_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 & \dot{z}_4 &= u_2 \\ \dot{z}_5 &= z_6 & \dot{z}_6 &= z_3 u_1 + \frac{c_y}{m} (z_2 z_3 - z_6) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$\theta = (-\pi, \pi)$ aralığında olduğu düşünülürse ele alınan dönüşümün, $\tan \theta$ ve $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ terimleri nedeniyle $\theta \approx \pm \frac{\pi}{2}$ olduğu durumlarda “tekillik” sorunuyla karşılaşacağı aşikardır. Bu nedenle bu yöntem ancak yerel kararlılık sağlamaktadır.

Takip edilmesi istenen yörüngeyi tanımlayan durum değişkenleri (4.27)’ den yararlanarak belirlenir.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1d} &= z_{2d} & \dot{z}_{2d} &= u_{1d} \\ \dot{z}_{3d} &= z_{4d} & \dot{z}_{4d} &= u_{2d} \\ \dot{z}_{5d} &= z_{6d} & \dot{z}_{6d} &= z_{3d} u_{1d} + \frac{c_y}{m} (z_{2d} z_{3d} - z_{6d}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hata dinamikleri $z_e = z - z_d$ olmak üzere (4.27) ve (4.28)’ den hesaplanır ($\bar{u}_{1d} = u_{1d} + \frac{c_y}{m} z_{2d}$).

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1e} &= z_{2e} & \dot{z}_{2e} &= \dot{z}_2 - \dot{z}_{2d} = u_1 - u_{1d} \\ \dot{z}_{3e} &= z_{4e} & \dot{z}_{4e} &= \dot{z}_4 - \dot{z}_{4d} = u_2 - u_{2d} \\ \dot{z}_{5e} &= z_{6e} & \dot{z}_{6e} &= \dot{z}_6 - \dot{z}_{6d} = z_{3e} \bar{u}_{1d} - \frac{c_y}{m} z_{6e} + z_3 \left(\frac{c_y}{m} z_{2e} + u_1 - u_{1d} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Bir sonraki aşamada dönüşüm Z ile kaskad geribeslemeli kontrolör tasarlanır.

$z_{11} = z_{1e}$, $z_{12} = z_{2e}$, $z_{21} = z_{3e}$, $z_{22} = z_{4e}$, $z_{31} = z_{5e}$, $z_{32} = z_{6e}$ olmak üzere alt sistemler (4.17)’ de verildiği şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Delta 1 &= \begin{cases} \dot{z}_{31} = z_{32} \\ \dot{z}_{32} = z_{21} \bar{u}_{1d} - \frac{c_y}{m} z_{32} + z_3 \left(\frac{c_y}{m} z_{12} + u_1 - u_{1d} \right) \end{cases} & \Delta 2 &= \begin{cases} \dot{z}_{21} = z_{22} \\ \dot{z}_{22} = u_2 - u_{2d} \end{cases} \\ \Delta 3 &= \begin{cases} \dot{z}_{11} = z_{12} \\ \dot{z}_{12} = u_1 - u_{1d} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$\Delta 3$ alt sistemini $(z_{11}, z_{12}) = (0,0)$ noktasında kararlı kılan kontrol kuralı (4.18)’ de olduğu gibi aşağıda gösterilmiştir.

$$u_1 = u_{1d} - k_{z_1} z_{11} - k_{z_2} z_{12} , \quad k_1, k_2 > 0 \quad (4.31)$$

(4.30) ve (4.31)' den $z_{12} \equiv 0$ iken $u_1 - u_{1d} \equiv 0$ elde edilir ve $\Delta 1$ alt sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta 1 = \begin{cases} \dot{z}_{31} = z_{32} \\ \dot{z}_{32} = z_{21}\bar{u}_{1d} - \frac{c_y}{m}z_{32} \end{cases} \quad (4.32)$$

$\Delta 1$ alt sistemini kararlı kılan geribesleme kuralı z_{21} ' in sanal giriş olarak seçildiği geriadımmlama algoritması kullanılarak tasarlanır.

$\Delta 1$ alt sisteminde $\dot{z}_{31} = z_{32}$ eşitliğinde z_{32} ' nin sanal giriş olduğu varsayılır. Bu eşitliği kararlı kılan $z_{32} = \alpha_1(z_{31})$ fonksiyonu (4.20)' den yararlanılarak elde edilir.

$$\alpha_1 = -c_1\bar{u}_{1d}^2 z_{31} \quad , \quad c_1 > 0 \quad (4.33)$$

İlk olarak $\bar{z}_{32} = z_{32} - \alpha_1(z_{31}) = z_{32} + c_1\bar{u}_{1d}^2 z_{31}$ tanımlanır ve $\Delta 1$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{z}}_{32}$ hesaplanır.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{32} &= \dot{z}_{32} + c_1\bar{u}_{1d}^2 \dot{z}_{31} + 2c_1\bar{u}_{1d}\dot{\bar{u}}_{1d}z_{31} \\ &= z_{21}\bar{u}_{1d} - \frac{c_y}{m}z_{32} + c_1\bar{u}_{1d}^2 \dot{z}_{31} + 2c_1\bar{u}_{1d}\dot{\bar{u}}_{1d}z_{31} \end{aligned}$$

$\bar{z}_{32}$ alt sistemini kararlı kılan $z_{21} = \alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})$ fonksiyonu z_{21} sanal giriş olmak üzere (4.21)' den yararlanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_1\bar{u}_{1d}z_{32} - 2c_1\dot{\bar{u}}_{1d}z_{31} - c_2\bar{u}_{1d}\bar{z}_{32} - \frac{c_y}{m}c_1\bar{u}_{1d}z_{31} \\ &= -c_1\bar{u}_{1d}z_{32} - 2c_1\dot{\bar{u}}_{1d}z_{31} - c_2\bar{u}_{1d}(z_{32} + c_1\bar{u}_{1d}^2 z_{31}) - \frac{c_y}{m}c_1\bar{u}_{1d}z_{31} \\ &= -\left(c_1c_2\bar{u}_{1d}^3 + 2c_1\dot{\bar{u}}_{1d} + \frac{c_y}{m}c_1\bar{u}_{1d}\right)z_{31} - (c_1\bar{u}_{1d} + c_2\bar{u}_{1d})z_{32} \quad , \quad c_2 > 0 \quad (4.34) \end{aligned}$$

Daha sonra $\bar{z}_{21} = z_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin birinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{z}}_{21}$ hesaplanır.

$$\dot{\bar{z}}_{21} = \dot{z}_{21} - \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] = z_{22} - \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})]$$

$\bar{z}_{21}$ alt sistemini kararlı kılan $z_{22} = \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})$ fonksiyonu z_{22} sanal giriş olmak üzere (4.22)' den yararlanılarak elde edilir.

$$\alpha_3 = -c_3\bar{z}_{21} + \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \quad , \quad c_3 > 0 \quad (4.35)$$

Son olarak $\bar{z}_{22} = z_{22} - \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{z}}_{22}$ hesaplanır.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_{22} &= \dot{z}_{22} - \frac{d}{dt}[\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})] \\ &= u_2 - u_{2d} - \frac{d}{dt}[\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})]\end{aligned}$$

$\bar{z}_{22}$ alt sistemi u_2 girişi (4.22)' de verildiği şekilde seçilerek kararlı kılınır.

$$u_2 = u_{2d} - c_4 \bar{z}_{22} + \frac{d}{dt}[\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})] \quad (4.36)$$

$$= u_{2d} - c_4 \left(z_{22} - \alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32}) \right) + \frac{d}{dt}[\alpha_3(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, \bar{z}_{21}, z_{31}, z_{32})]$$

$$= u_{2d} - c_4 \left(z_{22} - \left(-c_3 \bar{z}_{21} + \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \right) \right) + \frac{d}{dt} \left[-c_3 \bar{z}_{21} + \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \right]$$

=

$$\begin{aligned}u_{2d} - c_4 \left(z_{22} - \left(-c_3 \left(z_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32}) \right) + \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \right) \right) + \\ \frac{d}{dt} \left[-c_3 \left(z_{21} - \alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32}) \right) + \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \right]\end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned}u_{2d} - c_3 c_4 z_{21} - (c_3 + c_4) z_{22} + c_3 c_4 \alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32}) + \\ (c_3 + c_4) \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] + \frac{d^2}{dt^2}[\alpha_2(\bar{u}_{1d}, \dot{\bar{u}}_{1d}, z_{31}, z_{32})] \quad (4.37)\end{aligned}$$

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

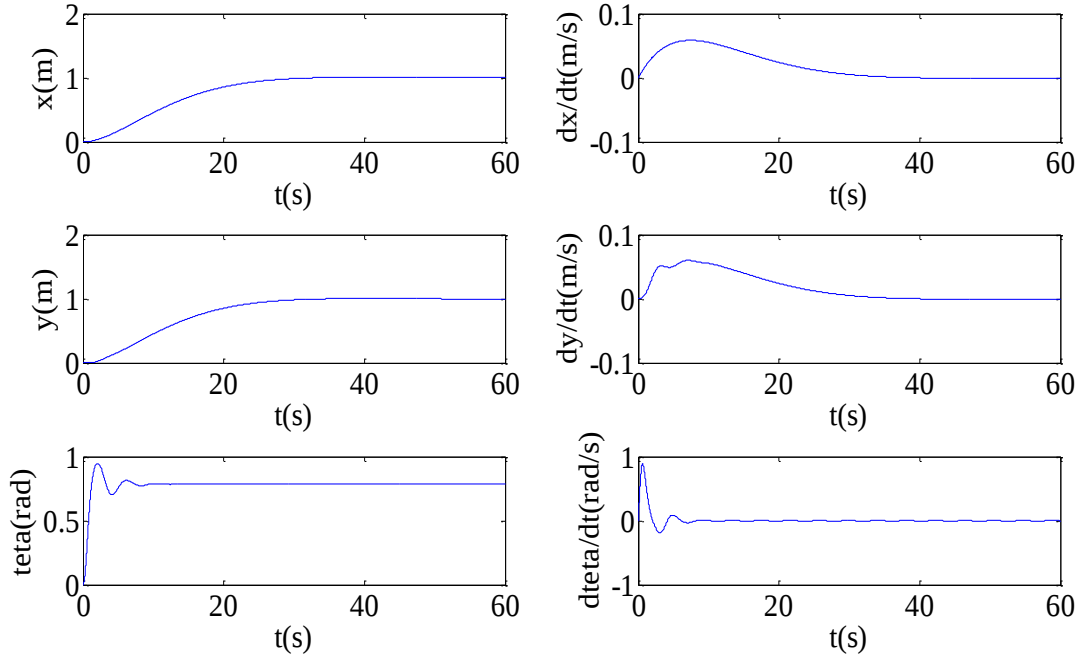
$$m = 1, \quad I = 1, \quad c_x = 1, \quad c_y = 1, \quad c_z = 1,$$

$$k_{z_1} = 0.02, \quad k_{z_2} = 1.4142, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 0.5, \quad c_4 = 5.$$

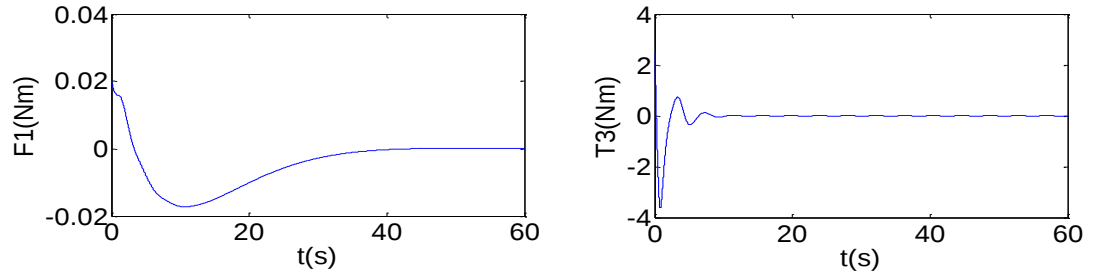
Başlangıç koşulları ve ulaşılmak istenen değerler aşağıda gösterilmiştir.

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0,$$

$$x_d = 1, \quad y_d = 1, \quad \theta_d = \pi/4.$$



Şekil 4.5: KGK ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.6: KGK ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

Dönüşüm X

Kaskad form için tanımlanmış yeni durumlar aşağıda gösterilmiştir [14].

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad x_3 = \cot \theta \quad x_4 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \quad x_5 = x \quad x_6 = \dot{x} \quad (4.38)$$

(4.25) ve (4.38)' den hareket denklemleri aşağıda gösterildiği şekilde kaskad forma dönüştürülür.

$$f_1 = c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta), \quad f_2 = c_y(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta), \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \text{ve} \quad \dot{x}_4 = v_2$$

olmak üzere

$$v_1 = F_1 \frac{\sin \theta}{m} - f_1 \frac{\sin \theta}{m} - f_2 \frac{\cos \theta}{m},$$

$$v_2 = \frac{d^2(\cot \theta)}{dt^2} = 2\dot{\theta}^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \ddot{\theta} = 2\dot{\theta}^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{T_3 - c_z \dot{\theta}}{I} \right) \text{ ve}$$

$0 = m(-\ddot{x} \sin \theta + v_1 \cos \theta) + c_y(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)$ elde edilir.

Yukarıdaki son eşitlikten $\dot{x}_6$ ifadesi belirlenir.

$$\dot{x}_6 = v_1 \cot \theta + \frac{c_y}{m}(\dot{y} \cot \theta - \dot{x}) = v_1 x_3 + \frac{c_y}{m}(x_2 x_3 - x_6)$$

Hareket denklemlerinin kaskad formda gösterilişi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_2 &= v_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 & \dot{x}_4 &= v_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6 & \dot{x}_6 &= x_3 v_1 + \frac{c_y}{m}(x_2 x_3 - x_6) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$\theta = (-\pi, \pi)$ aralığında olduğu düşünülürse ele alınan dönüşümün $\cot \theta$ ve $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ terimleri nedeniyle $\theta \approx 0, \pm\pi$ olduğu durumlarda “tekillik” sorunuyla karşılaşacağı aşıkardır. Bu nedenle bu yöntem ancak yerel kararlılık sağlamaktadır.

Takip edilmesi istenen yörüngeyi tanımlayan durum değişkenleri (4.39)’ dan yararlanarak belirlenir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= x_{2d} & \dot{x}_{2d} &= v_{1d} \\ \dot{x}_{3d} &= x_{4d} & \dot{x}_{4d} &= v_{2d} \\ \dot{x}_{5d} &= x_{6d} & \dot{x}_{6d} &= x_{3d} v_{1d} + \frac{c_y}{m}(x_{2d} x_{3d} - x_{6d}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hata dinamikleri $x_e = x - x_d$ olmak üzere (4.39) ve (4.40)’ tan hesaplanır

$$(\bar{v}_{1d} = v_{1d} + \frac{c_y}{m} x_{2d}).$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= x_{2e} & \dot{x}_{2e} &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} = v_1 - v_{1d} \\ \dot{x}_{3e} &= x_{4e} & \dot{x}_{4e} &= \dot{x}_4 - \dot{x}_{4d} = v_2 - v_{2d} \\ \dot{x}_{5e} &= x_{6e} & \dot{x}_{6e} &= \dot{x}_6 - \dot{x}_{6d} = x_{3e} \bar{v}_{1d} - \frac{c_y}{m} x_{6e} + x_3 \left(\frac{c_y}{m} x_{2e} + v_1 - v_{1d} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bir sonraki aşamada dönüşüm X ile kaskad geribeslemeli kontrolör tasarlanır.

$x_{11} = x_{1e}$, $x_{12} = x_{2e}$, $x_{21} = x_{3e}$, $x_{22} = x_{4e}$, $x_{31} = x_{5e}$, $x_{32} = x_{6e}$ olmak üzere alt sistemler (4.17)’ de verildiği şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Delta 1 &= \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = x_{21} \bar{v}_{1d} - \frac{c_y}{m} x_{32} + x_3 \left(\frac{c_y}{m} x_{12} + v_1 - v_{1d} \right) \end{cases} & \Delta 2 &= \begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = v_2 - v_{2d} \end{cases} \\ \Delta 3 &= \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = v_1 - v_{1d} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\Delta 3$ alt sistemini $(x_{11}, x_{12}) = (0,0)$ noktasında kararlı kılan kontrol kuralı **(4.18)**' de olduğu gibi aşağıda gösterilmiştir.

$$v_1 = v_{1d} - k_{x_1}x_{11} - k_{x_2}x_{12} \quad , \quad k_1, k_2 > 0 \quad (4.43)$$

(4.42) ve **(4.43)**' ten $x_{12} \equiv 0$ iken $v_1 - v_{1d} \equiv 0$ elde edilir ve $\Delta 1$ alt sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta 1 = \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = x_{21}\bar{v}_{1d} - \frac{c_y}{m}x_{32} \end{cases} \quad (4.43)$$

$\Delta 1$ alt sistemini kararlı kılan geribesleme kuralı x_{21} ' in sanal giriş olduğu geriadımleme algoritması kullanılarak tasarlanır.

$\Delta 1$ alt sisteminde $\dot{x}_{31} = x_{32}$ eşitliğinde x_{32} ' nin sanal giriş olduğu varsayılır. Bu eşitliği kararlı kılan $x_{32} = \alpha_1(x_{31})$ fonksiyonu **(4.20)**' den yararlanılarak elde edilir.

$$\alpha_1 = -c_1\bar{v}_{1d}^2x_{31} \quad , \quad c_1 > 0 \quad (4.44)$$

İlk olarak $\bar{x}_{32} = x_{32} - \alpha_1(x_{31}) = x_{32} + c_1\bar{v}_{1d}^2x_{31}$ tanımlanır ve $\Delta 1$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{32}$ hesaplanır.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{32} &= \dot{x}_{32} + c_1\bar{v}_{1d}^2\dot{x}_{31} + 2c_1\bar{v}_{1d}\dot{\bar{v}}_{1d}x_{31} \\ &= x_{21}\bar{v}_{1d} - \frac{c_y}{m}x_{32} + c_1\bar{v}_{1d}^2\dot{x}_{31} + 2c_1\bar{v}_{1d}\dot{\bar{v}}_{1d}x_{31} \end{aligned}$$

$\bar{x}_{32}$ alt sistemini kararlı kılan $x_{21} = \alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})$ fonksiyonu x_{21} sanal giriş olmak üzere **(4.21)**' den yararlanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_1\bar{v}_{1d}x_{32} - 2c_1\dot{\bar{v}}_{1d}x_{31} - c_2\bar{v}_{1d}\bar{x}_{32} - \frac{c_y}{m}c_1\bar{v}_{1d}x_{31} \\ &= -c_1\bar{v}_{1d}x_{32} - 2c_1\dot{\bar{v}}_{1d}x_{31} - c_2\bar{v}_{1d}(x_{32} + c_1\bar{v}_{1d}^2x_{31}) - \frac{c_y}{m}c_1\bar{v}_{1d}x_{31} \\ &= -\left(c_1c_2\bar{v}_{1d}^3 + 2c_1\dot{\bar{v}}_{1d} + \frac{c_y}{m}c_1\bar{v}_{1d}\right)x_{31} - (c_1\bar{v}_{1d} + c_2\bar{v}_{1d})x_{32} \quad , \quad c_2 > 0 \quad (4.45) \end{aligned}$$

Daha sonra $\bar{x}_{21} = x_{21} - \alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin birinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{21}$ hesaplanır.

$$\dot{\bar{x}}_{21} = \dot{x}_{21} - \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] = x_{22} - \frac{d}{dt}[\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})]$$

$\bar{x}_{21}$ alt sistemini kararlı kılan $x_{22} = \alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})$ fonksiyonu x_{22} sanal giriş olmak üzere **(4.22)**' den yararlanılarak elde edilir.

$$\alpha_3 = -c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] , \quad c_3 > 0 \quad (4.46)$$

Son olarak $\bar{x}_{22} = x_{22} - \alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})$ tanımlanır ve $\Delta 2$ alt sisteminin ikinci denkleminde faydalanılarak $\dot{\bar{x}}_{22}$ hesaplanır.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{22} &= \dot{x}_{22} - \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})] \\ &= v_2 - v_{2d} - \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})] \end{aligned}$$

$\bar{x}_{22}$ alt sistemi v_2 girişi (4.22)' de verildiği şekilde seçilerek kararlı kılınır.

$$v_2 = v_{2d} - c_4 \bar{x}_{22} + \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})] \quad (4.47)$$

$$= v_{2d} - c_4 \left(x_{22} - \alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32}) \right) + \frac{d}{dt} [\alpha_3(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, \bar{x}_{21}, x_{31}, x_{32})]$$

$$\begin{aligned} &= v_{2d} - c_4 \left(x_{22} - \left(-c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right) \right) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[-c_3 \bar{x}_{21} + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right] \end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned} &v_{2d} - \\ &c_4 \left(x_{22} - \left(-c_3 \left(x_{21} - \alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32}) \right) + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right) \right) + \\ &\frac{d}{dt} \left[-c_3 \left(x_{21} - \alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32}) \right) + \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \right] \end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned} &v_{2d} - c_3 c_4 x_{21} - (c_3 + c_4) x_{22} + c_3 c_4 \alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32}) + \\ &(c_3 + c_4) \frac{d}{dt} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] + \frac{d^2}{dt^2} [\alpha_2(\bar{v}_{1d}, \dot{\bar{v}}_{1d}, x_{31}, x_{32})] \end{aligned} \quad (4.48)$$

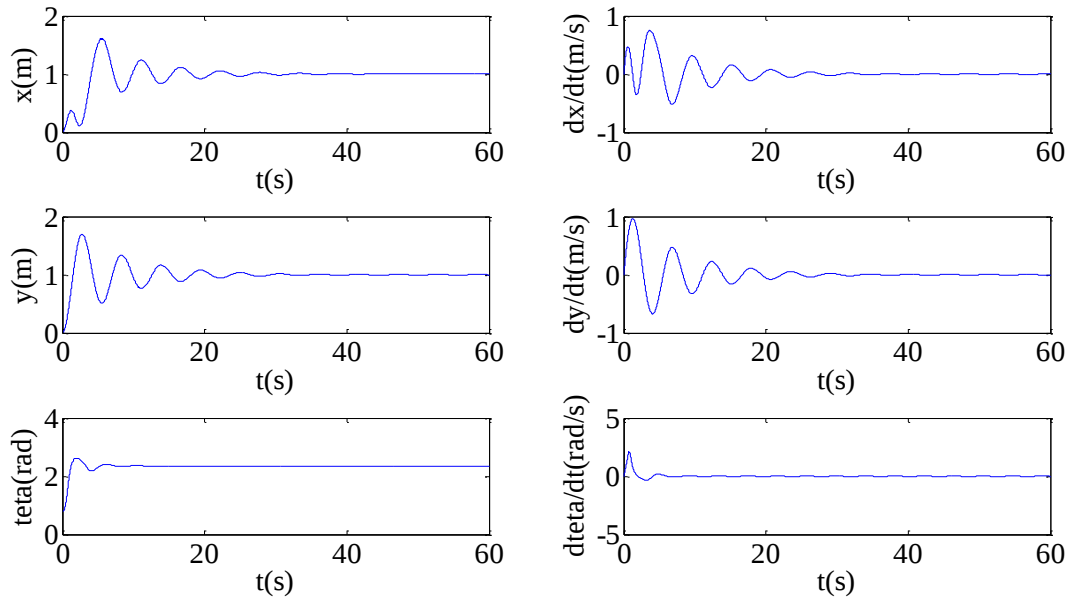
Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m = 1 , \quad I = 1 , \quad c_x = 1 , \quad c_y = 1 , \quad c_z = 1 ,$$

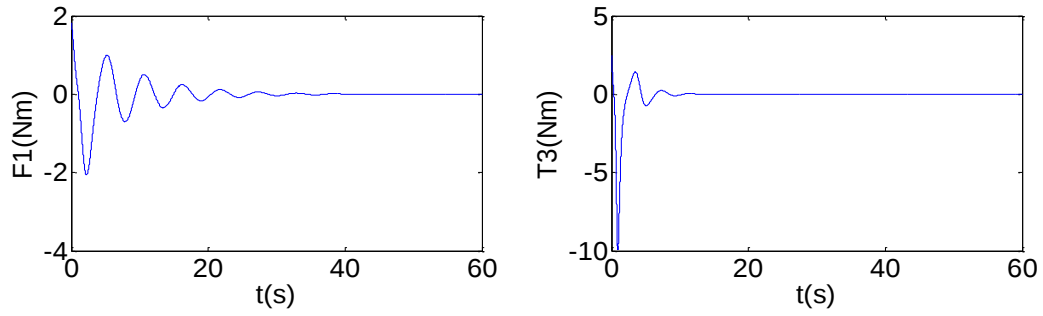
$$k_{x_1} = 1.292 , \quad k_{x_2} = 1.6075 , \quad c_1 = 3 , \quad c_2 = 3 , \quad c_3 = 0.5 , \quad c_4 = 5 .$$

Başlangıç koşulları ve ulaşılmak istenen değerler aşağıda gösterilmiştir.

$$x(0) = 0 , \quad x_d = 1 , \quad y(0) = 0 , \quad y_d = 1 , \quad \theta(0) = \pi/4 , \quad \theta_d = 3\pi/4 .$$



Şekil 4.7 : KGK ve Dönüşüm X ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.8 : KGK ve Dönüşüm X ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

Dönüşüm Z ve X' in birleştirilmesi

Dönüşüm Z ile tasarlanan kontrol kuralı $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ ve $|\theta| \geq \frac{3\pi}{4}$ iken dönüşüm X ile tasarlanan kontrol kuralı ise $\frac{\pi}{4} < |\theta| < \frac{3\pi}{4}$ iken uygulanarak kontrol kurallarının tekillik sorunu yaşadığı durumlardan kaçınılır.

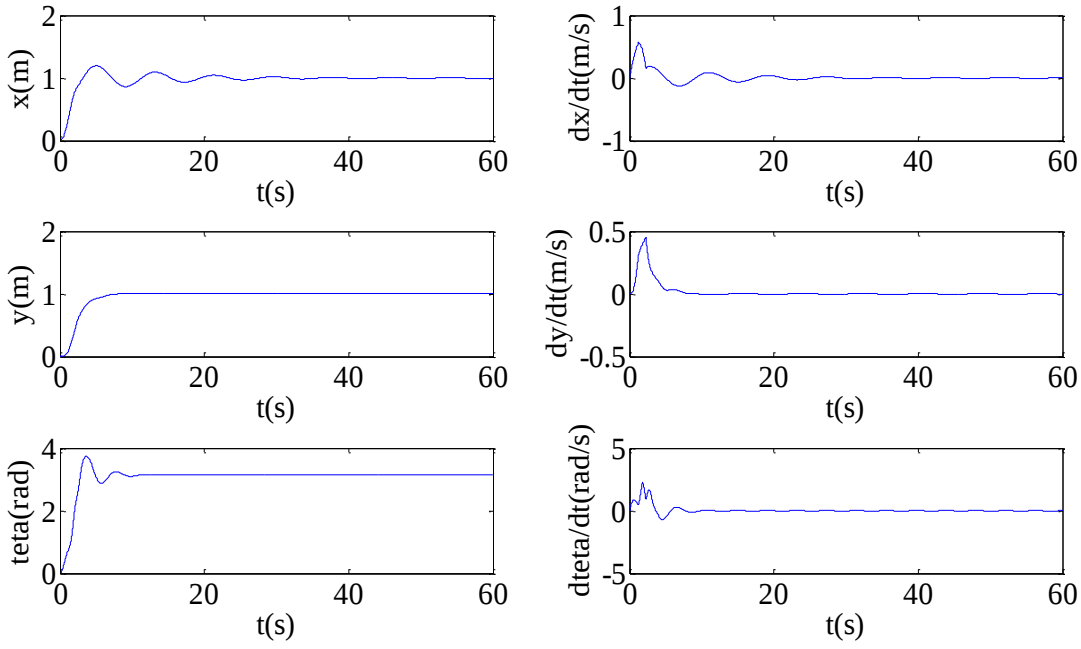
Kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri aşağıda gösterilmiştir.

$$m = 1, I = 1, c_x = 1, c_y = 1, c_z = 1,$$

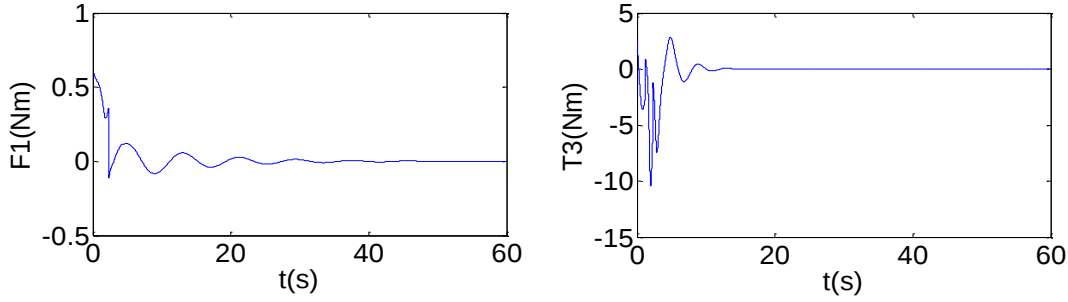
$$k_{z_1} = 0.6, k_{z_2} = 1.0954, k_{x_1} = 0.26, k_{x_2} = 0.7211, c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 0.5, c_4 = 5.$$

Başlangıç koşulları ve ulaşılmak istenen değerler aşağıda gösterilmiştir.

$$x(0) = 0, x_d = 1, y(0) = 0, y_d = 1, \theta(0) = 0, \theta_d = \pi.$$



Şekil 4.9: KGK, Dönüşüm X ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.10 : KGK, Dönüşüm X ve Dönüşüm Z ile eksik eyleyicili deniz aracında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

4.3 Sistem İndirgemeli Nonlinear Kontrol

Eksik eyleyicili mekanik sistemlerinde nonlinear kontrol teorisinin uygulanması aşamasında sistemlerin dinamik denklemleri üzerinde çeşitli formasyon değişiklikleri yapmak gereklidir. Bu formasyon değişikliklerine sistem indirgeme denmektedir.

4.3.1 Sistem indirgemeli nonlinear kontrol uygulaması

4.3.1.1 Araba Çubuk Sistemi

Sisteme ilişkin dinamik denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$F = \ddot{q}_1[m_1 + m_2] + \ddot{q}_2[m_2 l_2 \cos(q_2)] - \dot{q}_2^2[m_2 l_2 \sin(q_2)] \quad (4.49)$$

$$0 = \ddot{q}_1[m_2 l_2 \cos(q_2)] + \ddot{q}_2[m_2 l_2^2 + I_2] - m_2 g l_2 \sin(q_2)$$

Eylemsizlik matrisi elemanları aşağıda gösterilmiştir.

$$d_{11} = m_1 + m_2, d_{12} = d_{21} = m_2 l_2 \cos(q_2), d_{22} = m_2 l_2^2 + I_2.$$

Denge noktasında global kararlılaştırma

Bu kısımda Araba Çubuk sistemini $q_1 = q_2 = 0$ denge noktasında, $q_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ için kararlı kılan kontrol kuralı belirlenecektir. Bunun için ilk aşamada sistem dinamikleri üzerinde odaksız geribesleme lineerizasyonu uygulanır.

(4.49)' dan yararlanarak,

$$F = (d_{12} - d_{11}d_{21}^{-1}d_{22})\ddot{q}_2 + (m_1 + m_2)g \tan(q_2) - \dot{q}_2^2[m_2 l_2 \sin(q_2)] \quad \text{elde edilir.}$$

Bu eşitlikte $\ddot{q}_2 = u$ yazılarak, u yeni kontrol kuralı olmak üzere q_2 dinamikleri çift integratöre indirgenmiş olur. Elde edilen yeni denklem takımı aşağıda gösterilmiştir.

$$F = (d_{12} - d_{11}d_{21}^{-1}d_{22})u + (m_1 + m_2)g \tan q_2 - \dot{q}_2^2[m_2 l_2 \sin(q_2)] \quad (4.50)$$

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = u$$

Daha sonra [4]' te verildiği üzere aşağıda gösterildiği gibi koordinat değişimi işlemi uygulanır.

$$q_r = q_1 + \gamma(q_2), \quad p_r = d_{21}p_1 + d_{22}p_2, \quad (p_1 = \dot{q}_1) \quad (4.51)$$

$$\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} \frac{d_{22}}{d_{21}(\theta)} d\theta = \frac{m_2 l_2^2 + I_2}{m_2 l_2} \log \left(\frac{1 + \tan(q_2/2)}{1 - \tan(q_2/2)} \right), \quad q_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Değiştirilmiş koordinatlar Araba Çubuk sisteminin dinamiklerini aşağıdaki şekle dönüştürür.

$$q_s = q_2, \quad g_r(q_s) = m_2 g l_2 \sin q_s \text{ olmak üzere;}$$

$$\dot{q}_r = \frac{1}{d_{21}(q_s)} p_r$$

$$\dot{p}_r = g_r(q_s) + \frac{1}{d_{21}(q_s)} \frac{d(d_{21}(q_s))}{dq_s} p_r p_s - \frac{d_{22}}{d_{21}(q_s)} \frac{d(d_{21}(q_s))}{dq_s} p_s^2 \quad (4.52)$$

$$\dot{q}_s = p_s$$

$$\dot{p}_s = u.$$

(4.52)' de verilen sistem dinamikleri kesin ileri yol formdaki bir nonlinear sisteme aittir [4].

Araba Çubuk sisteminin kesin ileri yol formda bir nonlinear sisteme indirgenebilmesi yarı-global kararlılık sağlayan kontrol kuralının belirlenmesini mümkün kılmaktadır.

(4.52)' de verilen ikinci denklem $\frac{1}{d_{21}(q_s)} \frac{d(d_{21}(q_s))}{dq_s} = \frac{-m_2 l_2 \sin(q_s)}{m_2 l_2 \cos(q_s)} = -\tan(q_s)$ eşitliği kullanılarak sadeleştirilir.

$$\dot{p}_r = m_2 g l_2 \sin q_s - \tan(q_s) p_r p_s + \tan(q_s) d_{22} p_s^2 \quad (4.53)$$

Koordinatlar [4]' te verildiği üzere aşağıda şekilde yeniden değiştirilir.

$$z_1 = q_r \quad , \quad z_2 = p_r / d_{21} \quad (4.54)$$

(4.54)' ten,

$$\dot{z}_1 = z_2 \text{ ve}$$

$$\dot{z}_2 = \tan(q_s) \left\{ g + \frac{m_2 l_2^2 + l_2}{m_2 l_2 \cos(q_s)} p_s^2 \right\} \text{ eşitlikleri elde edilir.}$$

[4]' te verildiği üzere yeni tanımlanan koordinatlar ve kontrol değişkeni aşağıda gösterilmiştir.

$$\varepsilon_1 = \tan(q_s)$$

$$\varepsilon_2 = (1 + \tan^2(q_s)) p_s \quad (4.55)$$

$$v = (1 + \tan^2(q_s)) u + 2 \tan(q_s) (1 + \tan^2(q_s)) p_s$$

Son iki koordinat değişimi ile Araba Çubuk sisteminin dinamikleri aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \varepsilon_1 \left\{ k_1 + k_2 \frac{\varepsilon_2^2}{(1 + \varepsilon_1^2)^{3/2}} \right\} \quad , \quad k_1 = g \quad , \quad k_2 = \frac{m_2 l_2^2 + l_2}{m_2 l_2} \quad (4.56)$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = v$$

$|\varepsilon_1 / (1 + \varepsilon_1^2)^{3/2}| < 1$ olması Araba Çubuk sistemine ait dinamik denklemlerin kesin ileri yol formda bir nonlinear sistem olduğunu belirtmektedir [4].

Kontrol kuralını belirlemek için [4]' te verildiği üzere değiştirilmiş koordinatlar ve kontrol değişkeni aşağıda gösterilmiştir.

$$\eta_1 = \frac{1}{k_1} z_1 + \frac{2}{k_1} z_2 + 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

$$\eta_2 = \frac{1}{k_1} z_2 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (4.57)$$

$$w = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + v$$

(4.57)' de kontrol değişkeni $\sigma_i(x) = sat_\epsilon(x) = \epsilon \cdot sgn(x) \cdot \min(1, |x/\epsilon|)$ olmak üzere $w = -\sigma_2(\eta_2 + \sigma_1(\eta_1))$ şeklindedir. (ϵ : kontrol parametresi)

Son aşamada elde edilen kontrol değişkenleri ile kontrol kuralı aşağıda gösterildiği şekilde belirlenir.

(4.55)' ten $v = (1 + \mathcal{E}_1^2)u + 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ sonucuna ulaşılır.

Buradan u çekilerek,

$$u = \frac{v - 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{1 + \mathcal{E}_1^2} \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.57)' de üçüncü eşitlikte $w = -\sigma_2(\eta_2 + \sigma_1(\eta_1))$ ifadesinden yararlanılarak,

$$v = -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \sigma_2(\eta_2 + \sigma_1(\eta_1)) \quad (4.59)$$

elde edilir.

(4.58) ve (4.59)' dan

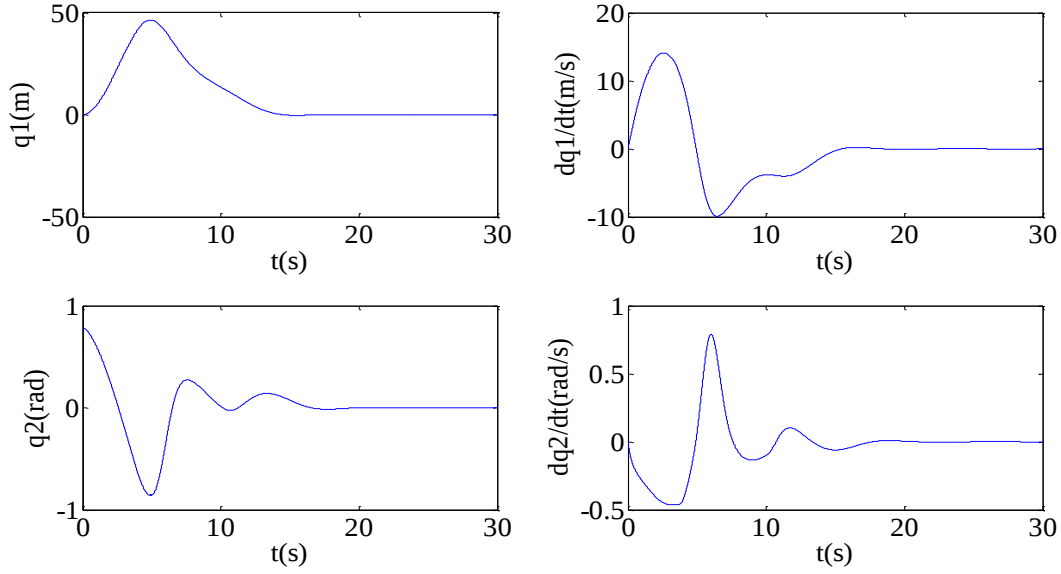
$$u = \frac{-\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \sigma_2(\eta_2 + \sigma_1(\eta_1)) - 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{1 + \mathcal{E}_1^2} \quad (4.60)$$

sonucuna ulaşılır. (4.60)' ta verilen kontrol kuralı (4.50)' de yerine konularak yarı-global kararlılık sağlayan kontrol algoritması tamamlanmış olur.

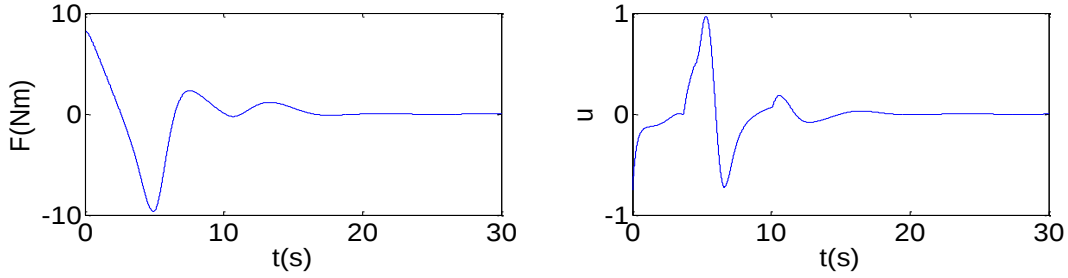
$$F = (d_{12} - d_{11}d_{21}^{-1}d_{22}) \left(\frac{-\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \sigma_2(\eta_2 + \sigma_1(\eta_1)) - 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{1 + \mathcal{E}_1^2} \right) + (m_1 + m_2)g \tan q_2 - \dot{q}_2^2 [m_2 l_2 \sin(q_2)] \quad (4.61)$$

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri ile başlangıç koşulları aşağıda gösterilmiştir.

$$m_1 = 0.7031 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.127 \text{ kg}, \quad l_2 = 0.1778 \text{ m}, \quad I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \epsilon = 0.5, \quad q_1(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad q_2(0) = \pi/4, \quad \dot{q}_2(0) = 0.$$



Şekil 4.11 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi/4$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.12 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi/4$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi.

Agresif Swing-up

Bu bölümde amaç Araba Çubuk sistemini $q_1 = 0$ ve $q_2 = \pi$ ilk konumundan $q_1 = 0$, $q_2 < \pi/2$ son konumuna getirmektir.

Daha önceki bölümde olduğu gibi odaksız geribesleme lineerleştirme yöntemiyle q_2 ' ye ait dinamikler aşağıda gösterildiği şekilde bir çift integratöre indirgenir.

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = u$$

Araba Çubuk sistemini $(q_2, p_2) = 0$ noktasında kararlı kılan kontrol kuralı aşağıda gösterildiği şekildedir [4].

$$u = -c_1 q_2 - c_2 p_2, \quad c_1, c_2 > 0 \quad (4.62)$$

(4.50)' den

$$F(q_2, p_2) = (d_{11}d_{21}^{-1}d_{22} - d_{12})(c_1q_2 + c_2p_2) \\ + (m_1 + m_2)g \tan q_2 - \dot{q}_2^2 [m_2l_2 \sin(q_2)]$$

elde edilir.

Kontrol algoritmasındaki temel zorluk pendulum açısının $q_2 = \pi/2$ olduğu anda $F \rightarrow \infty$ olmasıdır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için aşağıda gösterilen kontrol kuralı uygulanır [2a].

$$\phi(F) = \begin{cases} 0, & |F| \leq F_{max} \\ F, & \text{diğer} \end{cases} \text{ olmak üzere,}$$

$$F_{app}(q_2, p_2) = F - \phi(F). \quad (4.63)$$

Kontrolörlerin Birleştirilmesi

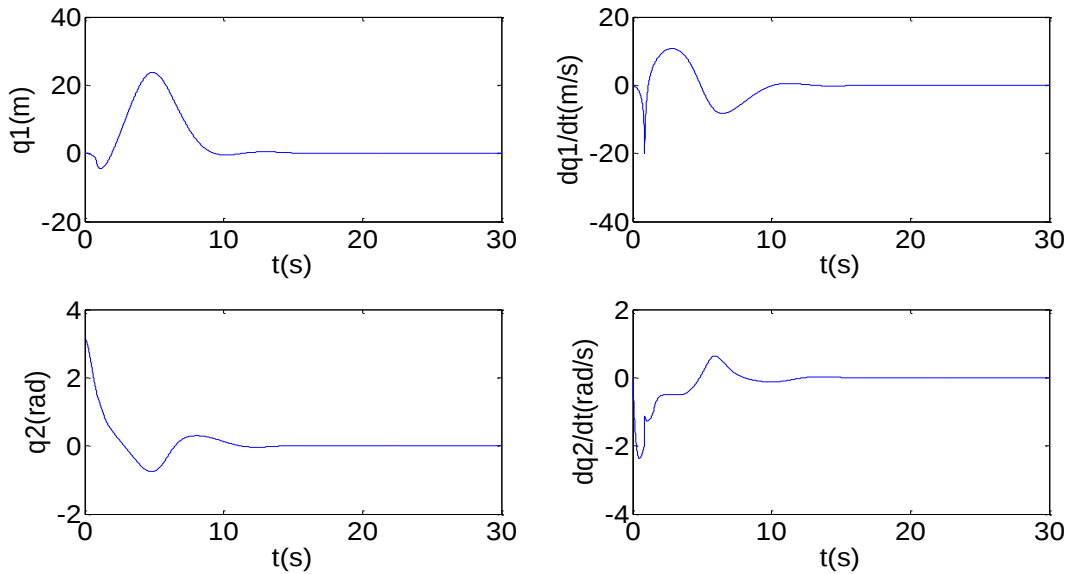
Önceki bölümlerde tasarlanan yarı-global kararlılık sağlayan kontrol kuralları $-\frac{\pi}{2} < q_2 < \frac{\pi}{2}$ olduktan sonra belirlenen bir q_2 değerinde anahtarlanarak birleştirilir.

Benzetme çalışmaları Matlab/SIMULINK ile gerçekleştirilmiştir, kullanılan sistem ve kontrolör parametreleri ile başlangıç koşulları aşağıda gösterilmiştir.

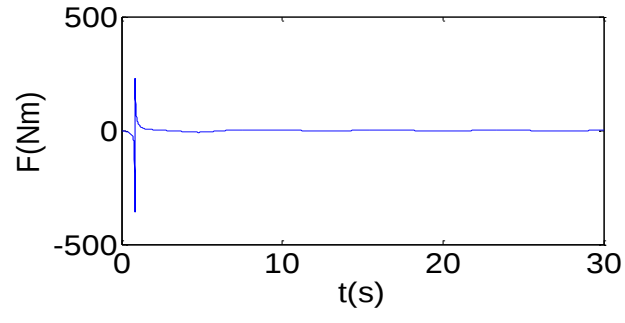
$$m_1 = 0.7031 \text{ kg}, m_2 = 0.127 \text{ kg}, l_2 = 0.1778 \text{ m}, I_2 = 1.1987 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\epsilon = 0.5, c_1 = 4, c_2 = 4, F_{max} = 400, \text{ anahtarlama anı: } q_2 = \pi/4,$$

$$q_1(0) = 0, \dot{q}_1(0) = 0, q_2(0) = \pi, \dot{q}_2(0) = 0.$$



Şekil 4.13 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında konum ve hızların zamana göre değişimi.



Şekil 4.14 : SİNK ile Araba Çubuk sisteminde $q_1(0) = 0$ ve $q_2(0) = \pi$ başlangıç koşulu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Aşağıda bu tezde incelenen eksik eyleyicili mekanik sistemler ve bu sistemler üzerinde başarılı sonuçlara ulaşılan kontrol stratejileri tablo halinde gösterilmiştir.

Çizelge 5.1: Eksik eyleyicili mekanik sistemler ve kontrol stratejileri.

EKSİK EYLEYİCİLİ MEKANİK SİSTEM	KONTROL STRATEJİSİ	KONTROL STRATEJİSİ				
		KGL	ETK	İKTBK	KGK	SİNK
2 DOF PLANAR ROBOT MANIPULATORLERİ	PENDUBOT	X	X	X		
	ACROBOT	X	X	X		
3 DOF PLANAR ROBOT MANIPULATORLERİ	KONFIG. 1	X	X			
	KONFIG. 2	X	X			
	KONFIG. 3	X	X			
ARABA ÇUBUK		X	X			X
DÖNEL SARKAÇ		X	X			
EKSİK EYLEYİCİLİ DENİZ ARACI					X	

Kısmi geribesleme lineerizasyonu ve enerji temelli kontrol stratejileri uygulanarak 2 ve 3 DOF robot manipulatorleri, Araba Çubuk ve Dönel Sarkaç sistemleri üzerinde başarılı sonuçlara ulaşılmıştır. Sonuçların ve süreç aşamasında kazanılan deneyimin katkısıyla iki kontrol stratejisinin karşılaştırması yapılabilir. KGL' nin en büyük

avantajı oldukça hızlı çalışmasıdır, diğer avantajları arasında kontrol algoritmasının basit olması ve yatay ya da dikey hareket fark etmeksizin kullanılabilmesi sayılabilir. Dezavantajları arasında ise kontrol parametrelerinin belirlenmesinde yaşanan zorluk, parametre belirsizliklerine karşı hassasiyet, kararlılık analizine imkan tanınamaması yer almaktadır. ETK' nin avantajları içinde, kontrolörler arasında anahtarlama kolaylığı sağlaması, kararlılık analizine imkan tanınması, doğruluk oranının yüksek olması yer alırken başlıca dezavantajları yavaş çalışması ve uygulandığı sistemin dikey hareket yeteneğine sahip olması zorunluluğudur.

Diğer nonlinear kontrol yöntemleri içinde ilk olarak iki kural temelli bulanık kontrol 2 DOF robot manipulatörleri üzerinde uygulanarak başarılı sonuçlar elde edilmiştir. İKTBK' nin daha önceki bölümlerde kullanılan kontrol algoritmalarından farkı neden sonuç ilişkisine dayanarak belirlenen kontrol kuralı olmasıdır. Bu nedenle her bir eksik eyleyicili mekanik sistem için özel çözümlemeler gerektirmektedir. İkinci olarak kaskad geriadımlamalı kontrol algoritması eksik eyleyicili deniz aracı üzerinde uygulanmış ve başarılı sonuçlara ulaşılmıştır. KGK hem kararlılık problemine hem de yörünge izletme problemine çözümler getirmektedir. Ne yazık ki KGK [1]' de belirtildiği üzere sadece belirli formda bir dinamik yapıya sahip sistemler üzerinde kullanılabilir. Son olarak sistem indirgemeli nonlinear kontrol algoritması Araba Çubuk sistemi üzerinde uygulanmış ve başarılı sonuçlara ulaşılmıştır. Önceki bölümlerde Araba Çubuk sistemi üzerinde uygulanan kontrol algoritmalarına göre teorik açıdan daha gelişmiş bir algoritmadır ve doğruluk oranı daha yüksektir.

Gelecekte eksik eyleyicili mekanik sistemlerin kontrolü konusunda yapılacak çalışmaların kararlılık ve yörünge izletme probleminin yanı sıra parametre belirsizliklerine karşı da çözümler üretmesi beklenmektedir. Bu amaç doğrultusunda bu tezde konu edilen kontrol algoritmalarının uyarlamalı veya robust kontrol teorileri ile desteklenmesinin yanı sıra sliding mode kontrol, hybrid kontrol ve yapay sinir ağları gibi kontrol teknikleri de tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M., 2006. *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Hoboken NJ.
- [2] Block, D.J., 1991. Mechanical Design and Control of the Pendubot, *M.A.Sc Thesis*, University of Illinois.
- [3] Spong, M.W., 1996. Energy Based Control of a class of underactuated mechanical systems, *Proc. IFAC 13th Triennial World Congress*, pp. 431-435.
- [4] Olfati-Saber, R., 2001. Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles, *Ph.D. Thesis*, Department of EECS, MIT.
- [5] Spong, M.W. & Block, D.J., 1995. The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education, *34th IEEE CDC*, New Orleans.
- [6] Wang, G., 2003. Observer-Based Feedback Control Methods For an Underactuated Robot System, *M.A.Sc Thesis*, Dept. Of Engineering Science, Simon Fraser University.
- [7] Spong, M.W., 1995. The Swing Up Control Problem For the Acrobot, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 15, pp. 49-55.
- [8] Mahindrakar, A. D. & Banavar, R. N., 2002. Controllability properties of a planar 3R underactuated manipulator, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp.489-494, Glasgow, Scotland U.K..
- [9] Fantoni, I., Lozano, R. ve Spong, M.W., 1999. Passivity based control of the Pendubot, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 268-272, San Diego.
- [10] Xin, X., Kaneda, M., Toshikada, O., 2002. The Swing-up Control for The Pendubot Based on Energy Control Approach, *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- [11] Mahindrakar, A. D. & Banavar, R. N., 2005. A swing-up of the acrobot based on a simple pendulum strategy, *International Journal of Control*, pp. 424-429, Vol. 78, No.6.
- [12] Xiao Q. M., 2001. Fuzzy control for an Underactuated Robotic Manipulator: Pendubot, *M.A.Sc Thesis*, Dept. of Mechanical Engineering, Concordia University.
- [13] Aneke N.P.I., Nijmeijer H., de Jager A. G., 2003. Tracking control of second-order chained form systems by cascaded backstepping, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(2), 95-115.

- [14] **Bommer A., 2004.** Control of Underactuated Mechanical Systems, *Traineeship Report*, Eindhoven University of Technology.
- [15] **Aneke N.P.I., 2003.** Control of Underactuated Mechanical Systems, *Ph.D. Thesis*, Eindhoven University of Technology.
- [16] **Reyhanoglu M., Schaft A.v.d., McClamroch N.M., Kolmanovsky I., 1996.** Nonlinear Control of a Class of Underactuated Systems, *IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan.

EKLER

EK A.1 : 2 DOF Planar Robot Manipulatorünün Modellenmesi

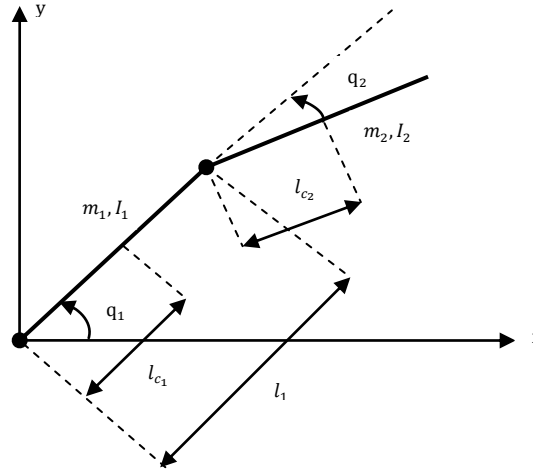
EK A.2 : 3 DOF Planar Robot Manipulatorünün Modellenmesi

EK A.3 : Deniz Aracı Modellenmesi

EK A.4 : Araba Çubuk Sistemi Modellenmesi

EK A.5 : Dönel Sarkaç Modellenmesi

EK A.1



Şekil A.1 : 2 DOF Planar Robot Manipütörü

Manipulatör' e ait konum ve hız denklemleri

Eklemelerin koordinat sistemi üzerindeki konumları uzunluklar ve açılar cinsinden ifade edilir

$$x_1 = l_{c1} \cos q_1, \quad y_1 = l_{c1} \sin q_1$$

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

Eklemlere ilişkin hız ifadeleri konum ifadelerinin zamana göre türevleri alınarak hesaplanır.

$$\dot{x}_1 = -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1, \quad \dot{y}_1 = l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

Kinetik ve potansiyel enerji denklemleri

Kinetik enerji denklemleri [1]:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left([-l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1]^2 \right) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2 [\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)] + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1]$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(\left[-l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right]^2 + \left[l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right]^2 \right) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + 2 l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ & l_{c_2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 \\ & 2 l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c_2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{aligned} \right) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1) \\ & + 2 l_1 l_{c_2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2)] \\ & + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 (\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)) \end{aligned} \right) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2) = \cos q_2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2 l_1 l_{c_2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_2 l_1^2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2]$$

Toplam kinetik enerji:

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1] + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_2 l_1^2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2]$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2]$$

Potansiyel enerji denklemleri **[1]**:

$$P_1 = m_1 g l_{c_1} \sin q_1$$

$$P_2 = m_2 g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)$$

Toplam potansiyel enerji:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = m_1 g l_{c_1} \sin q_1 + m_2 g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)$$

Tork denklemleri

Eklemlere ilişkin tork denklemleri elde edilirken enerji dengesine dayalı Lagrange-Euler analitik yöntemi kullanılır [1].

$L = K - P$ olmak üzere eklemlere ilişkin tork denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad , \quad \tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \dot{q}_1 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2] + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 \\ &\quad + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] &= \ddot{q}_1 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2] + (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 \\ &\quad - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2}] + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\cos q_1 [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1] - \cos(q_1 + q_2) m_2 g l_{c_2}$$

$$\tau_1 = \left(\begin{aligned} &\ddot{q}_1 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2 \cos q_2 (m_2 l_1 l_{c_2}) + m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \\ &+ \ddot{q}_2 [(m_2 l_1 l_{c_2}) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2] - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2}] \\ &+ \cos q_1 [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1] + \cos(q_1 + q_2) m_2 g l_{c_2} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 [(m_2 l_1 l_{c_2}) \cos q_2] + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] &= \ddot{q}_1 [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] - \dot{q}_1 \dot{q}_2 [m_2 l_1 l_{c_2} \sin q_2] \\ &\quad + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) m_2 l_1 l_{c_2} - \cos(q_1 + q_2) m_2 g l_{c_2}$$

$$\tau_2 = \ddot{q}_1 [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2] + \ddot{q}_2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] + \dot{q}_1^2 \sin(q_2) m_2 l_1 l_{c_2} + \cos(q_1 + q_2) m_2 g l_{c_2}$$

Elde edilen tork ifadelerinin matris formunda yazılışı aşağıdaki gibidir [1].

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2 \cos q_2 m_2 l_1 l_{c_2} + m_2 l_{c_2}^2 + I_2$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2$$

$$d_{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_2$$

$$h_1 = -(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2}]$$

$$h_2 = \dot{q}_1^2 \sin(q_2) m_2 l_1 l_{c_2}$$

$$\phi_1 = \cos q_1 [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1]g + \cos(q_1 + q_2) m_2 l_{c_2} g$$

$$\phi_2 = \cos(q_1 + q_2) m_2 l_{c_2} g$$

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - B(q))$$

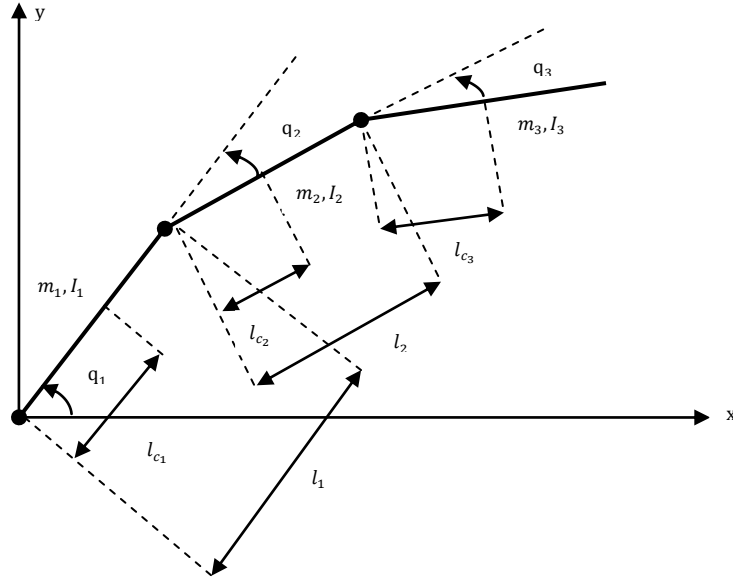
Ağırlık matrisinin tersi:

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \begin{bmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{12} & d_{11} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{d_{22}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) - d_{12}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{-d_{12}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + d_{11}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

EK A.2



Şekil A.2 : 3 DOF Planar Robot Manipulatörü

Manipulator' e ait dinamik denklemlerin ifadesi

Konum ve hız denklemleri

Eklemlerin koordinat sistemi üzerindeki konumları uzunluklar ve açılar cinsinden ifade edilir.

$$x_1 = l_{c1} \cos q_1$$

$$y_1 = l_{c1} \sin q_1$$

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

$$x_3 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$y_3 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

Eklemlere ilişkin hız ifadeleri konum ifadelerinin zamana göre türevleri alınarak hesaplanır.

$$\dot{x}_1 = -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1$$

$$\dot{y}_1 = l_{c_1} \cos(q_1) \dot{q}_1$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\dot{x}_3 = -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\dot{y}_3 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

Kinetik ve potansiyel enerji denklemleri

Kinetik enerji denklemleri:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left([-l_{c_1} \sin(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_{c_1} \cos(q_1) \dot{q}_1]^2 \right) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2 [\sin^2(q_1) + \cos^2(q_1)] + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1]$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left([-l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]^2 + [l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]^2 \right) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

=

$$\frac{1}{2} m_2 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + 2l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ & l_{c_2}^2 \sin^2(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 \\ & + 2l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c_2}^2 \cos^2(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{aligned} \right) +$$

$$\frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1) \\ & + 2l_1 l_{c_2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2)] \\ & + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 (\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)) \end{aligned} \right) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2) = \cos q_2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c_2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + l_{c_2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_2 l_1^2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2]$$

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \left(\begin{aligned} & \left[-l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right]^2 \\ & + \left[-l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right]^2 \\ & + \left[l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right]^2 \\ & + \left[l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right]^2 \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + 2l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ & + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ & + 2 \left[l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] [l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \\ & + l_{c_3}^2 \sin^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ & + l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + 2l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ & + l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ & + 2 \left[l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] [l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \\ & + l_{c_3}^2 \cos^2(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \dot{q}_1^2 (\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1) + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \left(\frac{\sin^2(q_1 + q_2)}{\cos^2(q_1 + q_2)} \right) \\ & + l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 (\sin^2(q_1 + q_2 + q_3) + \cos^2(q_1 + q_2 + q_3)) \\ & + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2)] \\ & + 2l_1 l_{c_3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[\frac{\sin q_1 \sin(q_1 + q_2 + q_3)}{\cos q_1 \cos(q_1 + q_2 + q_3)} \right] \\ & + 2l_2 l_{c_3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[\frac{\sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3)}{\cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3)} \right] \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

$$\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2) = \cos q_2$$

$$\sin q_1 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2 + q_3) = \cos(q_2 + q_3)$$

$$\sin(q_1 + q_2) \sin(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2 + q_3) = \cos q_3$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \left(\begin{aligned} & l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_{c_3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ & + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + 2l_1 l_{c_3} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) \\ & + 2l_2 l_{c_3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos q_3 \end{aligned} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$$

$$\begin{aligned} K_3 = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_3 l_1^2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_3 l_2^2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 [m_3 l_{c_3}^2 + I_3] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_3 l_1 l_2 \cos q_2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3)] \\ & + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3] \end{aligned}$$

Toplam kinetik enerji:

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1] + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_2 l_1^2] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2] \\ & + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2] + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_3 l_1^2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_3 l_2^2] \\ & + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 [m_3 l_{c_3}^2 + I_3] + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_3 l_1 l_2 \cos q_2] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3)] \\ & + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3] \\ K = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 [m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2] \\ & + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 [m_3 l_{c_3}^2 + I_3] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_3 l_1 l_2 \cos q_2] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3)] \\ & + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3] \end{aligned}$$

Potansiyel enerji denklemleri:

$$P_1 = m_1 g l_{c_1} \sin q_1$$

$$P_2 = m_2 g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)$$

$$P_3 = m_3 g l_1 \sin q_1 + m_3 g l_2 \sin(q_1 + q_2) + m_3 g l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

Toplam potansiyel enerji:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = m_1 g l_{c_1} \sin q_1 + m_2 g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) + m_3 g l_1 \sin q_1 \\ + m_3 g l_2 \sin(q_1 + q_2) + m_3 g l_{c_3} \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$P = [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1 + m_3 g l_1] \sin q_1 + [m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2] \sin(q_1 + q_2) \\ + [m_3 g l_{c_3}] \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

Tork denklemleri

Eklemlere ilişkin tork denklemleri elde edilirken enerji dengesine dayalı Lagrange-Euler analitik yöntemi kullanılır.

$L = K - P$ olmak üzere eklemlere ilişkin tork denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad , \quad \tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2} \quad , \quad \tau_3 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] \\ + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_3 l_1 l_2 \cos q_2] \\ + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2] + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \\ + (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_{c_3}^2 + I_3]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = \ddot{q}_1 [m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] \\ + (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) [m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_3 l_1 l_2 \cos q_2] \\ - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] \\ + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2] \\ + (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \\ - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\ + (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 - (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \dot{q}_3 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3$$

$$+(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)[m_3 l_{c_3}^2 + I_3]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} = & -\cos q_1 [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1 + m_3 g l_1] - \cos(q_1 + q_2) [m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2] \\ & - \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \end{aligned}$$

$$\tau_1 =$$

$$\left(\begin{aligned} & \ddot{q}_1 \left[m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + 2 \cos q_2 (m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \right] \\ & + m_3 l_2^2 + 2 m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] \\ & + \ddot{q}_2 \left[(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \right] \\ & + 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \\ & + \ddot{q}_3 [m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3] \\ & - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] \\ & - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\ & - (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \dot{q}_3 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + \cos q_1 [m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_1 + m_3 g l_1] \\ & + \cos(q_1 + q_2) [m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2] + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 [(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2] + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2]$$

$$+ \dot{q}_1 m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3$$

$$+ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) [m_3 l_{c_3}^2 + I_3]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = \ddot{q}_1 [(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2] - \dot{q}_1 \dot{q}_2 [(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \sin q_2]$$

$$+ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) [m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2] + \ddot{q}_1 m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3)$$

$$- \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + (2\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3$$

$$- \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) [m_3 l_{c_3}^2 + I_3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 (m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2)$$

$$- \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) m_3 l_1 l_{c_3}$$

$$- \cos(q_1 + q_2) [m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2] - \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_2 \\
& = \left(\begin{aligned} & \ddot{q}_1 \left[(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 \right] \\ & + \ddot{q}_2 \left[m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] \\ & + \ddot{q}_3 \left[m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left[(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \sin q_2 \right] \\ & - \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) - \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 \right] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \left[m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2 \right] \\ & + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) m_3 l_1 l_{c_3} + \cos(q_1 + q_2) \left[m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2 \right] \\ & + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \end{aligned} \right) \\
& \tau_2 = \left(\begin{aligned} & \ddot{q}_1 \left[(m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 \right] \\ & + \ddot{q}_2 \left[m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] \\ & + \ddot{q}_3 \left[m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] - \dot{q}_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 \\ & + \dot{q}_1^2 \sin q_2 \left[m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2 \right] + \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) m_3 l_1 l_{c_3} \\ & + \cos(q_1 + q_2) \left[m_2 g l_{c_2} + m_3 g l_2 \right] \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= \dot{q}_1 \left[m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \right] + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 \\
&+ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right] &= \ddot{q}_1 \left[m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \right] - \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \right] \\
&+ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 - \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 \\
&+ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \left[m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_3} &= -\dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \right] \\
&- (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 - \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}
\end{aligned}$$

$$\tau_3 = \left(\begin{aligned} & \ddot{q}_1 \left[m_3 l_{c_3} (l_1 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos q_3 + l_{c_3}) + I_3 \right] \\ & + \ddot{q}_2 \left[m_3 (l_2 l_{c_3} \cos q_3 + l_{c_3}^2) + I_3 \right] + \ddot{q}_3 \left[m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right] \\ & - \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \right] \\ & - \dot{q}_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \left[m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \right] \\ & + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \end{aligned} \right)$$

$$\tau_3 = \left(\ddot{q}_1 [m_3 l_{c_3} (l_1 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos q_3 + l_{c_3}) + I_3] + \dot{q}_1^2 [m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3)] \right. \\ \left. + \ddot{q}_2 [m_3 (l_2 l_{c_3} \cos q_3 + l_{c_3}^2) + I_3] + \ddot{q}_3 [m_3 l_{c_3}^2 + I_3] \right. \\ \left. + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3} \right)$$

Elde edilen tork ifadelerinin matris formunda yazılışı aşağıdaki gibidir.

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + d_{13}\ddot{q}_3 + h_1 + \phi_1$$

$$\tau_2 = d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + d_{23}\ddot{q}_3 + h_2 + \phi_2$$

$$\tau_3 = d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + d_{33}\ddot{q}_3 + h_3 + \phi_3$$

$$d_{11} = \left(m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + 2 \cos q_2 (m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \right. \\ \left. + m_3 l_2^2 + 2 m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right)$$

$$d_{12} = d_{21} = \left((m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2) \cos q_2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) \right. \\ \left. 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3 \right)$$

$$d_{13} = d_{31} = m_3 l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2 m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{23} = d_{32} = m_3 l_2 l_{c_3} \cos q_3 + m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$d_{33} = m_3 l_{c_3}^2 + I_3$$

$$h_1 = -(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] \\ - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) \\ - (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3$$

$$h_2 = -\dot{q}_3(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3 \\ + \dot{q}_1^2 \sin q_2 [m_2 l_1 l_{c_2} + m_3 l_1 l_2] + \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) m_3 l_1 l_{c_3}$$

$$h_3 = \dot{q}_1^2 [m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3)] + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 m_3 l_2 l_{c_3} \sin q_3$$

$$\phi_1 = \cos q_1 [m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m_3 l_1]g + \cos(q_1 + q_2) [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2]g + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

$$\phi_2 = \cos(q_1 + q_2) [m_2 l_{c_2} + m_3 l_2]g + \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

$$\phi_3 = \cos(q_1 + q_2 + q_3) m_3 g l_{c_3}$$

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - B(q))$$

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{\gamma(q)} \begin{bmatrix} d_{22}d_{33} - d_{23}^2 & d_{13}d_{23} - d_{12}d_{33} & d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22} \\ d_{23}d_{13} - d_{12}d_{33} & d_{11}d_{33} - d_{13}^2 & d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23} \\ d_{21}d_{23} - d_{22}d_{13} & d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23} & d_{11}d_{22} - d_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma(q) = d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}^2 - d_{12}^2d_{33} + d_{12}d_{23}d_{13} + d_{13}d_{12}d_{23} - d_{22}d_{13}^2$$

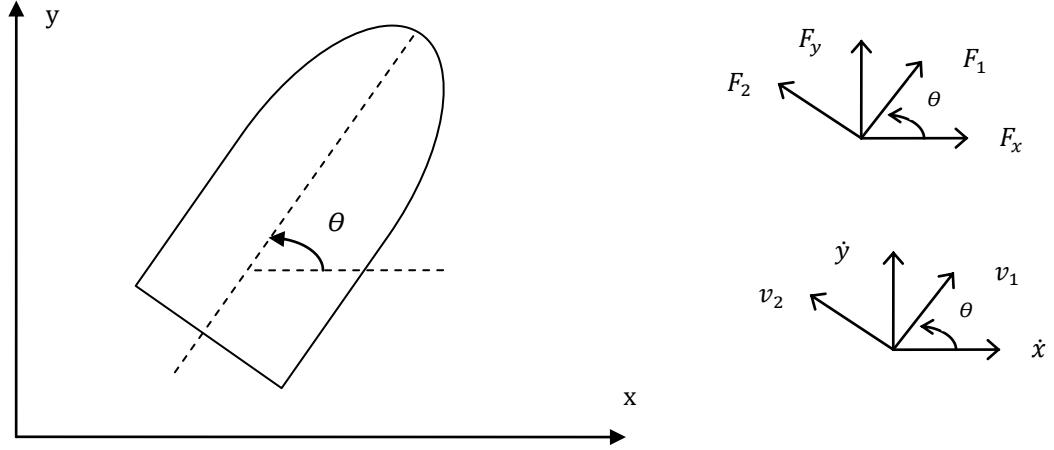
$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\gamma(q)} \left\{ (d_{22}d_{33} - d_{23}^2)(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + (d_{13}d_{23} - d_{12}d_{33})(\tau_2 - h_2 - \phi_2) + (d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22})(\tau_3 - h_3 - \phi_3) \right\}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{\gamma(q)} \left\{ (d_{23}d_{13} - d_{12}d_{33})(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + (d_{11}d_{33} - d_{13}^2)(\tau_2 - h_2 - \phi_2) + (d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23})(\tau_3 - h_3 - \phi_3) \right\}$$

$$\ddot{q}_3$$

$$= \frac{1}{\gamma(q)} \left\{ (d_{21}d_{23} - d_{22}d_{13})(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + (d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23})(\tau_2 - h_2 - \phi_2) + (d_{11}d_{22} - d_{12}^2)(\tau_3 - h_3 - \phi_3) \right\}$$

EK A.3



Şekil A.3 : Deniz Aracı

Hız denklemleri

$$v_1 = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta$$

$$v_2 = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta$$

$$w = \dot{\theta}$$

Kinetik ve potansiyel enerji denklemleri

Kinetik enerji denklemleri:

$$K_1 = \frac{1}{2} m(v_1^2) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 \cos^2 \theta + \dot{y}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{x}\dot{y} \sin \theta \cos \theta)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m(v_2^2) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 \sin^2 \theta + \dot{y}^2 \cos^2 \theta - 2\dot{x}\dot{y} \sin \theta \cos \theta)$$

$$K_3 = \frac{1}{2} I(w^2) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Toplam kinetik enerji:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Toplam potansiyel enerji:

$$P = 0$$

Tork Denklemleri

Eklemlere ilişkin tork denklemleri elde edilirken enerji dengesine dayalı Lagrange-Euler analitik yöntemi kullanılır.

$L = K - P$ olmak üzere eklemlere ilişkin tork denklemleri:

$$F_x = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} , \quad F_y = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] - \frac{\partial L}{\partial y} , \quad T_z = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = m\ddot{x} \qquad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] = m\ddot{y} \qquad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = I\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$F_x = m\ddot{x} , \quad F_y = m\ddot{y} , \quad T_z = I\ddot{\theta}$$

c_x, c_y, c_z viskoz sürtünme katsayıları.

$$F_1 = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + c_x v_1 = m(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta) + c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta + c_y v_2 \\ &= m(-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta) + c_y(-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) \end{aligned}$$

$$T_3 = T_z + c_z w = I\ddot{\theta} + c_z \dot{\theta}$$

Kuvvet ve tork denklemlerinin matris formunda gösterimi aşağıda gösterilmiştir.

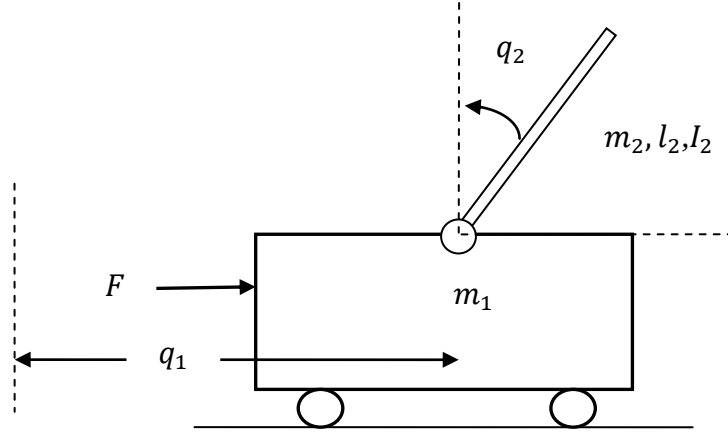
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cos \theta & m \sin \theta & 0 \\ -m \sin \theta & m \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \cos \theta & c_x \sin \theta & 0 \\ -c_y \sin \theta & c_y \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{\cos \theta}{m} [F_1 - c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] - \frac{\sin \theta}{m} [F_2 + c_y(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)]$$

$$\ddot{y} = \frac{\sin \theta}{m} [F_1 - c_x(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \frac{\cos \theta}{m} [F_2 + c_y(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{T_3 - c_z \dot{\theta}}{I}$$

EK A.4



Şekil A.4 : Araba Çubuk Sistemi

Konum ve hız denklemleri

Eklemlerin koordinat sistemi üzerindeki konumları uzunluklar ve açılar cinsinden ifade edilir

$$x_1 = q_1 \quad , \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = q_1 + l_2 \sin q_2 \quad , \quad y_2 = l_2 \cos q_2$$

Eklemlere ilişkin hız ifadeleri konum ifadelerinin zamana göre türevleri alınarak hesaplanır.

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 \quad , \quad \dot{y}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2$$

Kinetik ve potansiyel enerji denklemleri

Kinetik enerji denklemleri:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 l_2 \cos(q_2) + l_2^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2 + l_2^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2$$

$$= \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2l_2 \cos(q_2) + l_2^2 \dot{q}_2^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2l_2 \cos(q_2) + l_2^2 \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2$$

Toplam kinetik enerji:

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2[m_1 + m_2] + \dot{q}_1\dot{q}_2[m_2l_2 \cos(q_2)] + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2[m_2l_2^2 + I_2]$$

Potansiyel enerji denklemleri:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = m_2gl_2 \cos q_2$$

Toplam potansiyel enerji:

$$P = P_1 + P_2 = m_2gl_2 \cos q_2$$

Tork Denklemleri

Eklemlere ilişkin tork denklemleri elde edilirken enerji dengesine dayalı Lagrange-Euler analitik yöntemi kullanılır.

$L = K - P$ olmak üzere eklemlere ilişkin tork denklemleri:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad , \quad \tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1[m_1 + m_2] + \dot{q}_2[m_2l_2 \cos(q_2)]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = \ddot{q}_1[m_1 + m_2] + \ddot{q}_2[m_2l_2 \cos(q_2)] - \dot{q}_2^2[m_2l_2 \sin(q_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\tau_1 = \ddot{q}_1[m_1 + m_2] + \ddot{q}_2[m_2l_2 \cos(q_2)] - \dot{q}_2^2[m_2l_2 \sin(q_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1[m_2l_2 \cos(q_2)] + \dot{q}_2[m_2l_2^2 + I_2]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = \ddot{q}_1[m_2l_2 \cos(q_2)] - \dot{q}_1\dot{q}_2[m_2l_2 \sin(q_2)] + \ddot{q}_2[m_2l_2^2 + I_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\dot{q}_1\dot{q}_2[m_2l_2 \sin(q_2)] + m_2gl_2 \sin q_2$$

$$\tau_2 = \ddot{q}_1[m_2l_2 \cos(q_2)] + \ddot{q}_2[m_2l_2^2 + I_2] - m_2gl_2 \sin q_2$$

Elde edilen tork ifadelerinin matris formunda yazılışı aşağıdaki gibidir [2].

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = m_1 + m_2$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 l_2 \cos(q_2)$$

$$d_{22} = m_2 l_2^2 + I_2$$

$$h_1 = -\dot{q}_2^2 m_2 l_2 \sin q_2, \quad \text{viskoz sürtünme dahil ise; } h_1 = B_{eq} \dot{q}_1 - \dot{q}_2^2 m_2 l_2 \sin q_2$$

$$h_2 = 0, \quad \text{viskoz sürtünme dahil ise; } h_2 = B_p \dot{q}_2,$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = -m_2 g l_2 \sin q_2$$

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - B(q))$$

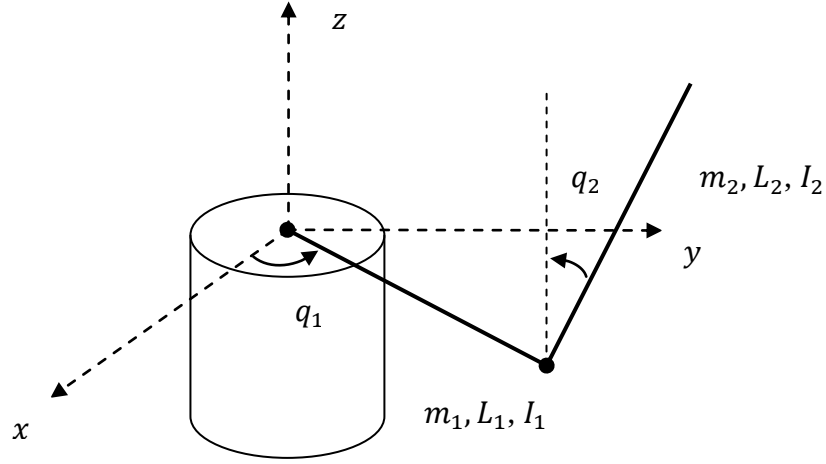
Ağırlık matrisinin tersi:

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \begin{bmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{12} & d_{11} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{d_{22}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) - d_{12}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{-d_{12}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + d_{11}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

EK A.5



Şekil A.5 : Dönel Sarkaç

Konum ve hız denklemleri

Eklemlerin koordinat sistemi üzerindeki konumları uzunluklar ve açılar cinsinden ifade edilir

$$x_1 = l_1 \cos(q_1) \quad , \quad y_1 = l_1 \sin(q_1) \quad , \quad z_1 = 0$$

$$x_2 = L_1 \cos(q_1) - l_2 \sin(q_1) \sin(q_2) \quad , \quad y_2 = L_1 \sin(q_1) + l_2 \cos(q_1) \sin(q_2) \quad ,$$

$$z_2 = l_2 \cos(q_2)$$

Eklemlere ilişkin hız ifadeleri konum ifadelerinin zamana göre türevleri alınarak hesaplanır.

$$\dot{x}_1 = -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \quad , \quad \dot{y}_1 = l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \quad , \quad \dot{z}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -L_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \cos(q_1) \dot{q}_1 \sin(q_2) - l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \quad ,$$

$$\dot{y}_2 = L_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1) \dot{q}_1 \sin(q_2) + l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \quad ,$$

$$\dot{z}_2 = -l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2$$

Kinetik ve potansiyel enerji denklemleri

Kinetik enerji denklemleri:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + I_1) \dot{q}_1^2$$

$$\dot{x}_2^2 =$$

$$L_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_2^2 \cos^2(q_1) \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + 2L_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1^2 +$$

$$2L_1 l_2 \sin^2(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2l_2^2 \sin(q_1) \sin(q_2) \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 +$$

$$l_2^2 \sin^2(q_1) \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2$$

$$\dot{y}_2^2 =$$

$$L_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_1) \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 - 2L_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1^2 +$$

$$2L_1 l_2 \cos^2(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2l_2^2 \sin(q_1) \sin(q_2) \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 +$$

$$l_2^2 \cos^2(q_1) \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2$$

$$\dot{z}_2^2 = l_2^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = [L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2)] \dot{q}_1^2 + 2L_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_2^2 \dot{q}_2^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}[m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2 l_2^2 + I_2] \dot{q}_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Toplam kinetik enerji:

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = \frac{1}{2}[m_1 l_1^2 + I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2 l_2^2 + I_2] \dot{q}_2^2$$

$$+ m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Toplam potansiyel enerji:

$$P = m_2 g l_2 \cos(q_2)$$

Tork denklemleri

Eklemlere ilişkin tork denklemleri elde edilirken enerji dengesine dayalı Lagrange-Euler analitik yöntemi kullanılır.

$L = K - P$ olmak üzere eklemlere ilişkin tork denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad , \quad \tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 [m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] + \dot{q}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] &= \ddot{q}_1 [m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] \\ &\quad + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) \\ &\quad - \dot{q}_2^2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \ddot{q}_1 [m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] + \ddot{q}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) \\ &\quad + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) + \dot{q}_2 [m_2 l_2^2 + I_2]$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = \ddot{q}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2) + \ddot{q}_2 [m_2 l_2^2 + I_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \dot{q}_1^2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2) + m_2 g l_2 \sin(q_2)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \ddot{q}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) + \ddot{q}_2 [m_2 l_2^2 + I_2] - \dot{q}_1^2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \\ &\quad - m_2 g l_2 \sin(q_2) \end{aligned}$$

Elde edilen tork ifadelerinin matris formunda yazılışı aşağıdaki gibidir [2].

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B(q) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 L_1 l_2 \cos(q_2)$$

$$d_{22} = m_2 l_2^2 + I_2$$

$$h_1 = 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 m_2 L_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$h_2 = -\dot{q}_1^2 m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = -m_2 g l_2 \sin(q_2)$$

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - B(q))$$

Ağırlık matrisinin tersi:

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \begin{bmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{12} & d_{11} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{d_{22}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) - d_{12}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \{-d_{12}(\tau_1 - h_1 - \phi_1) + d_{11}(\tau_2 - h_2 - \phi_2)\}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Onur Albostan

Doğum Yeri ve Tarihi: Boğazlıyan 1983

Lisans Üniversitesi: İstanbul Teknik Üniversitesi