

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞRİ EKSENLİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN STATİK VE
DİNAMİK PROBLEMLERİ**

DOKTORA TEZİ
Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT

Anabilim Dalı: Makina Mühendisliği
Programı: Makina Mühendisliği

ARALIK 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞRİ EKSENLİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK
PROBLEMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT
(503032711)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 Temmuz 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Aralık 2009

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Alaeddin ARPACI (İTÜ)
Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Doç. Dr. Erol UZAL (İÜ)
Yrd.Doç. Dr. Vedat TEMİZ (İTÜ)**

ARALIK 2009

ÖNSÖZ

Çalışmanın konusunu oluşturan, eğri eksenli çubuklar, mühendisliğin pek çok alanında yapı elemanı olarak kullanılmaktadırlar. Eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerini ifade eden genel denklemler; kayma deformasyonu, dönme eylemsizliği ve eksen uzamasından kaynaklanan etkiler ihmal edilmeden analitik olarak çözülebilmektedir. Bugüne kadar yapılan çalışmaların çoğu konuyu basitleştirerek incelemiş ve söz konusu etkileri ihmal ederek yaklaşık yöntemlerle çözüm önermişlerdir. Bu çalışmada, eğri eksenli çubuklara ait statik ve dinamik denklemlerin kesin çözümleri verilmekte; bu çözüm yöntemlerinden yola çıkılarak, eğri eksenli çubukların hem statik hem de dinamik davranışlarına uygulanabilecek farklı çözüm yöntemlerinin oluşturulması amaçlanmaktadır.

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye teşekkür ederim.

Bu akademik çalışmanın oluşması için, bana her zaman destek olan sevgili eşim Tevfik YİĞİT ve aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2009

Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
KISALTMALAR.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Çalışmanın Amacı	2
2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	5
2.1 Eğri Eksenli Çubukların Statiği Üzerine Yapılan Çalışmalar.....	5
2.2 Eğri Eksenli Çubukların Dinamiği Üzerine Yapılan Çalışmalar.....	8
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ.....	15
3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemi.....	15
3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları	18
3.1.2 Denge denklemleri.....	19
3.1.3 Bünye denklemleri	20
3.2 Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemi	25
4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ PROBLEMLERİNİN KESİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ	29
4.1 Çubukların Statik Denklemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü.....	29
4.1.1 Çember eksenli sabit kesitli çubuğun asal matrisi	37
4.2 Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Düzlem İçi Serbest Titreşimleri	38
5. SÜREKLİ DEĞİŞKEN KESİTE SAHİP ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ.....	41
5.1 Analiz.....	41
5.2 Problemin Tanımı	44
5.3 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	46
5.3.1 Çember eksenli değişken kesitli simetrik çubuklar	48
5.3.2 Spiral eksenli değişken kesitli simetrik çubuklar	54
5.3.3 Parabol eksenli değişken kesitli simetrik çubuklar	55
5.3.4 Çember eksenli değişken kesitli asimetrik çubuklar	56
5.3.5 Spiral eksenli değişken kesitli asimetrik çubuklar	63
5.3.6 Parabol eksenli değişken kesitli asimetrik çubuklar	63
6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ YERDEĞİŞTİRMELERİNE AİT ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN SONLU ELEMAN YÖNTEMİNE UYARLANMASI.....	65
6.1 Sonlu Eleman Formülasyonu.....	65
6.2 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	71
6.2.1 Akastre-serbest sınır şartlarında, uç noktadan etkiyen f_n tekil yükünü taşıyan çember eksenli çubuk.....	71
6.2.2 Akastre-kayar ankastre sınır şartlarında, uç noktadan etkiyen f_n tekil yükünü taşıyan çember eksenli çubuk.....	72

6.2.3 Orta Noktadan Etkiyen Tekil Yüğü Taşıyan 120°lik Çember Eksenli Çubuk.....	74
6.2.4 Uç noktadan etkiyen tekil yüğü taşıyan neredeyse düz çubuk.....	76
6.2.5 Serbest ucundan etkiyen tekil yüğü taşıyan spiral eksenli, değışken kesitli, ankastre-serbest çubuk.....	77
7. EĞRİ EKSENİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	83
7.1 Analiz.....	83
7.2 Özdeğer Probleminin Çözümü	89
7.3 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	89
8. DENEYSEL ÇALIŞMALAR VE DENEYSEL TİTREŞİM ANALİZİ.....	95
8.1 Deney Düzeneğı	96
8.2 Deneyde Kullanılan Test Parçaları	99
8.3 Deney Planlama	102
8.4 Deneyler	104
8.5 Modal Parametrelerin Belirlenmesi.....	106
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	113
KAYNAKLAR.....	117
EKLER.....	123
ÖZGEÇMİŞ.....	141

KISALTMALAR

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
C	: Kayma rijitliği matrisi
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
F_n, F_b, F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
I_n, I_b	: Çubuk eğrisinin normal ve binormal eksenlerine göre kesitin eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jirokobik yarıçap
K	: Rijitlik matrisi
k_n, k_b	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabitler
M	: Kütle matrisi
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r_o, r	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
R	: Eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
T	: Kinetik enerji
u	: Yerdeğiştirme vektörü
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
X	: Yerdeğiştirme vektörü
Y	: Asal matris
Y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y_o	: Başlangıç değerleri vektörü
α	: Spiral geometride kesit değişimini belirleyen sabit katsayı
ψ	: Kademe konumunu belirten açı
μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi / spiral geometride sabit katsayı
η	: Kesit alanının değişim oranı

ρ	: Özgöl kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
Φ	: Yay açıklığı, yay ölçüsü
Φ_n	: Toplam giriş açısı
Θ	: Normalleştirilmiş açı büyüklüğü
ν	: Poisson oranı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 :	k_n , k_b sabitleri.....	22
Çizelge 5.1 :	Sürekli değişken kesitli simetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.1$ ve $\eta = 0.2$ için.....	49
Çizelge 5.2 :	Sürekli değişken kesitli simetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.3$ ve $\eta = 0.4$ için.	50
Çizelge 5.3 :	Ref. [26]'de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\omega/EI_b)^{1/2}$)	52
Çizelge 5.4 :	Ref. [42] ve [43]'de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$).....	53
Çizelge 5.5 :	Ref. [24]'de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$).....	54
Çizelge 5.6 :	Ref. [24]'de spiral eksenli simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$).....	55
Çizelge 5.7 :	Ref. [24]'de parabol eksenli simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$)	56
Çizelge 5.8 :	Sürekli değişken kesitli asimetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.1$ ve $\eta = 0.2$ için.	57
Çizelge 5.9 :	Sürekli değişken kesitli asimetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.3$ ve $\eta = 0.4$ için.....	58
Çizelge 5.10 :	Ref. [26]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$)	61
Çizelge 5.11 :	Ref. [42] ve [43]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$).....	62
Çizelge 5.12 :	Ref. [24]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$)	63
Çizelge 5.13 :	Ref. [24]'de spiral eksenli asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$)	64

Çizelge 5.14 :	Ref. [24]'de parabol eksenli asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_0/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$)	64
Çizelge 6.1 :	Ankastre-serbest çubuk için dış yük altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.....	72
Çizelge 6.2 :	Şekil 6.5'te verilen ankastre-kayıcı ankastre çubuğun B ucunun (düşey) yer değiştirmesinin (cm) sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.....	73
Çizelge 6.3 :	120°'lik çubuk için dış yükler altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.....	75
Çizelge 6.4 :	Neredeyse düz çubuk için sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.....	77
Çizelge 6.5 :	Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması, $\mu=0.0$ ve $\alpha=0.0, 0.2, 0.4$	81
Çizelge 6.6 :	Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması, $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.0, 0.2, 0.4$	82
Çizelge 7.1 :	Ref. [31]'de, ankastre-ankastre ve sabit-sabit çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerlerinin sonlu eleman ve analitik yöntemde karşılaştırılması.....	91
Çizelge 7.2 :	Ref. [53]'de, 90° ve 40° kiriş açıklıklarına sahip sabit-sabit çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması.....	92
Çizelge 7.3 :	Ref. [58]'de, farklı kiriş açıklıklarına sahip sabit-sabit çubuğa ait doğal frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması....	92
Çizelge 7.4 :	Ref. [52]'de, 90° kiriş açıklığına sahip sabit-sabit çubuğa ait doğal frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması.....	93
Çizelge 8.1 :	Deneyde kullanılan kademeli çubukların özellikleri.....	101
Çizelge 8.2 :	Serbest-serbest mesnet şartı için doğal frekans değerleri.....	107
Çizelge 8.3 :	Ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet şartları için doğal frekans değerleri.....	108
Çizelge 8.4 :	Ankastre-serbest mesnet şartı için doğal frekans değerleri.....	109
Çizelge 8.5 :	Kademeli çubuklara ait doğal frekans değerleri.....	110

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.3 : Sabit kesitli kiriş elemanı ile modellenen asimetrik çubuk.....	46
Şekil 5.4 : Lineer değişken kesitli çubuklar (a) simetrik, (b) asimetrik.....	47
Şekil 5.5 : Değişken kesitli ankastre - ankastre simetrik çubuğun ilk 5 moduna ait frekans değerleri.....	51
Şekil 5.6 : Değişken kesitli simetrik çubuğun farklı sınır şartlarında ilk moduna ait frekans değerleri.....	51
Şekil 5.7 : Spiral ve parabol eksenli çubukta geometrik büyüklükler.....	54
Şekil 5.8 : Değişken kesitli ankastre - ankastre asimetrik çubuğun ilk 5 moduna ait frekans değerleri.....	60
Şekil 5.9 : Değişken kesitli asimetrik çubuğun farklı sınır şartlarında ilk moduna ait frekans değerleri.....	60
Şekil 6.1 : Çubukların analitik formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması...	67
Şekil 6.2 : Çubukların sonlu eleman ve matris yöntemleri formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması.....	68
Şekil 6.3 : Eleman üzerindeki kuvvet dengesi.....	70
Şekil 6.4 : Uç noktadan tekil kuvvet etkileyen ankastre-serbest çubuk.....	71
Şekil 6.5 : Uç noktadan tekil kuvvet etkileyen ankastre-kayar ankastre çubuk.....	72
Şekil 6.6 : Orta noktasından tekil yükler etkileyen sabit-sabit mesnetli çubuk.....	74
Şekil 6.7 : Orta noktasından tekil yükler etkileyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk	74
Şekil 6.8 : Uç noktadan tekil kuvvet etkileyen neredeyse düz çubuk.....	76
Şekil 6.9 : Spiral eksenli çubuğa ait geometrik büyüklükler.....	78
Şekil 6.10 : Herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açısal büyüklükler.....	79
Şekil 6.11 : Kullanılan spiral geometriler, (a) $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.2$, (b) $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.4$	80
Şekil 8.1 : Deney düzeneği.....	96
Şekil 8.2 : Piezoelektrik ivmeölçer.....	97
Şekil 8.3 : İvmeölçerlerin bağlanması.....	97
Şekil 8.4 : Darbe çekici.....	98
Şekil 8.5 : Etki ve tepki fonksiyonlarının zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülmesi.....	98
Şekil 8.6 : Deneyde kullanılan cihazlar.....	99
Şekil 8.7 : Eğri eksenli çubukların geometrik özellikleri.....	99
Şekil 8.8 : Deneyde kullanılan çubuklara ait geometriler.....	100

Şekil 8.9 : Çubuk üzerinde kademelerin konumu.....	101
Şekil 8.10 : Serbest-serbest sınır şartına sahip sabit kesitli çubuk.....	102
Şekil 8.11 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun asılma noktaları.....	103
Şekil 8.12 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun tahrik noktaları.....	103
Şekil 8.13 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun ivmeölçer noktaları.....	104
Şekil 8.14 : Model üzerinde ölçüm noktaları.....	105
Şekil 8.15 : Serbest-serbest sınır şartında düzlemiçi darbe uygulanması.....	105
Şekil 8.16 : (a) sisteme verilen darbe kuvveti ve (b) Sistemden alınan cevabın zamana bağlı grafikleri.....	106
Şekil 8.17 : FRF fonksiyonu.....	106
Şekil 8.18 : FRF fonksiyonu üzerindeki doğal frekansları gösteren tepe noktaları	107
Şekil 8.19 : SS, AS ve AA sınır şartlarında düzlem dışına ait mod şekilleri.....	111
Şekil 8.20 : SS, AS ve AA sınır şartlarında düzlem içine ait mod şekilleri.....	112
Şekil A.1 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (219.65 Hz).....	124
Şekil A.2 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (630.95 Hz).....	124
Şekil A.3 : 180o kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (1308.7 Hz).....	125
Şekil A.4 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (2211.6 Hz)	125
Şekil A.5 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (3317.9 Hz).....	126
Şekil A.6 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (263.79 Hz).....	126
Şekil A.7 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (566.07 Hz)	127
Şekil A.8 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (1052.9 Hz)	127
Şekil A.9 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (1470.7 Hz).....	128
Şekil A.10 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1928.1 Hz)	128
Şekil A.11 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (52.15 Hz)	129

Şekil A.12 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (164.2 Hz)	129
Şekil A.13 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (557 Hz)	130
Şekil A.14 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (1229 Hz)	130
Şekil A.15 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (2112 Hz)	131
Şekil A.16 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (26.69Hz)	131
Şekil A.17 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (82.94Hz)	132
Şekil A.18 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (282.3Hz)	132
Şekil A.19 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (624.5 Hz)	133
Şekil A.20 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1081 Hz)	133
Şekil A.21 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre- ankastre çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (518.05 Hz)	134
Şekil A.22 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (1113.7 Hz)	134
Şekil A.23 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (2047.6 Hz)	135
Şekil A.24 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (2952 Hz)	135
Şekil A.25 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (4083.9 Hz)	136
Şekil A.26 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (110.62 Hz)	136
Şekil A.27 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (318.22 Hz)	137
Şekil A.28 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (663.39 Hz)	137
Şekil A.29 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (1129.8 Hz)	138
Şekil A.30 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1712 Hz)	138

EĞRİ EKSENLİ DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİ

ÖZET

Eğri eksenli çubuklar, en basit yapı elemanlarından biri olarak, çok sayıda modern mühendislik yapısının temelini oluşturmaktadır. Seneler boyunca araştırmacıların ilgilendiği bir konu olmakla birlikte, eğri eksenli çubuklar üzerine yapılan çalışmalar hala devam etmektedir.

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışları ele alınmaktadır. Çubukların düzlem içi statik davranışını veren denklemlerin, kayma deformasyonu ve eksenel uzama etkileri dikkate alınarak, kesin analitik çözümü elde edilebilmektedir. Böylece, çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirme, kesit dönmesi ve kesit tesirleri değerleri eksen eğrisi boyunca belirlenebilmektedir.

Çubuk statik davranışını ifade eden denklemlerden hareketle, D'Alembert prensibiyle, dinamik davranışları ifade eden denklemlere ulaşılabilmektedir. Kayma deformasyonu, dönme eylemsizliği ve eksenel uzama etkilerini göz önüne alan dinamik denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Kesin çözüm, sadece, sabit kesitli, çember eksenli çubuklar için söz konusudur.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerinin, kayma deformasyonu, dönme eylemsizliği ve eksenel uzama etkileri dahil edilen kesin çözümleri, literatürdeki mevcut çalışmalarda verilmektedir. Bu çalışmanın temel amacı, çubuk statik ve dinamik davranışı için elde edilen kesin çözüm yöntemini sunmak, daha sonra, elde edilen bu çözüm yönteminden yola çıkarak, eğri eksenli çubukların, düzlem içine ait statik ve dinamik problemlerinin çözümünde kullanılabilecek farklı çözüm yöntemleri oluşturmaktır. Literatürdeki benzer örnekler çözülerek sonuçlar karşılaştırılmakta ve bazı problemler detayları ile verilmektedir.

Birinci bölümde, çubuk teorisi hakkında kısaca bilgi verilmiş, çalışmanın amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, eğri eksenli çubuklarla ilgili literatürdeki mevcut çalışmalar incelenmiş, hem statik hem de dinamik problemlerin çözümünde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Literatürde, eğri eksenli kirişler hakkında çok sayıda araştırma bulunmakla birlikte, çalışmaların birçoğunda çubuğa ait diferansiyel denklemler basitleştirerek kullanılmakta, kayma deformasyonu, dönme eylemsizliği ve eksenel uzama etkileri ihmal edilmektedir. Bu sadeleştirilmiş diferansiyel denklemler, enerji metotları veya sonlu eleman gibi sayısal yöntemler kullanılarak çözülmektedir.

Üçüncü bölümde, eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı genel denklemleri verilmektedir. Eksen eğrisi herhangi bir uzaysal eğri olarak ele alınmaktadır. Çubuk statığının genel denklemlerine bağlı olarak, çubuk titreşimlerinin genel denklemleri elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde, eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerinin kesin çözümü başlangıç değerler yöntemi ile verilmektedir. Başlangıç

değerleri yönteminin üstünlüğü; yüksek mertebe statik belirsizliklerin, problemin çözümüne ilave bir zorluk katmayışıdır. Herhangi bir bilinen sınır şartı ile çözümler elde etmek mümkündür.

Beşinci bölümde, sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubuk için önceki bölümde elde edilen kesin çözüm yöntemi, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemlerinin çözümü için uygulanmaktadır. Sürekli değişken kesitli çubuk için yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri olan bu yöntemde, eleman sayısı arttıkça doğru sonuca olan yakınsama da artmaktadır. Literatürde yapılan benzer çalışmalar incelenmiş, sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde, kesin çözüm yönteminde elde edilen ifadeler kullanılarak, eğri eksenli çubukların statik problemlerinin çözümünde kullanılacak bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmaktadır. Oluşturulan rijitlik (katılık) matrisi, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermekte, farklı yükleme koşulları ve farklı sınır şartları altında düzlem içi yer değiştirmeler ve kesit tesirleri hesaplanabilmektedir. Literatürde yer alan çok sayıda örnek incelenmiştir. Eğrilik yarıçapının değişken olması durumu da göz önüne alınmış, spiral ve parabol eksenli çubukların statik davranışına ait örnekler çözülmüştür.

Yedinci bölümde, çubuğa ait kütle matrisi elde edilerek, statik problemlerin çözümünde kullanılan sonlu eleman formülasyonu, eğri eksenli çubuklara ait dinamik denklemlerin çözümünde de kullanılabilir hale getirilmiştir. Kütle matrisi, dönme eylemsizliği etkisi de göz önüne alınarak, kinetik enerji ifadesi yardımıyla oluşturulmuştur. Statik davranışın çözümünden elde edilen rijitlik matrisi, kütle matrisi ile birlikte kullanılarak problem, özdeğer problemine uyarlanmıştır. Böylece elde edilen özdeğer problemi çözülmüş, özdeğerler yani, çubuğa ait frekans değerleri hesaplanmıştır.

Sekizinci bölüm, deneysel modal analiz çalışmasını içermektedir. Yapılan teorik çalışmaların gerçek durum ile karşılaştırılması amacıyla, eğri eksenli çubukların titreşimleri deneysel olarak da incelenmektedir. Deneylerde hem sabit kesitli, hem de kademeli değişken kesitli çubuklar kullanılmıştır. Farklı sınır koşullarında, farklı giriş açıklıklarına sahip çubuklarla yapılan deney sonuçları, analitik olarak elde edilen sonuçlarla birlikte verilmektedir.

Dokuzuncu bölümde, çalışmanın kapsamı kısaca ele alınmış, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

STATIC AND DYNAMIC PROBLEMS OF CURVED BEAMS WITH VARYING CROSS-SECTIONS

SUMMARY

Arch elements are the most simple and the most commonly used structures in engineering area. Considerable amounts of attention has been devoted to the analysis of such elements in recent years.

The governing differential equations of in-plane deformations of a general curved beam can be solved exactly. The effects of the axial extension and the shear deformation are included in the analyses. The geometry of the beam axis and boundary conditions may be arbitrary.

The governing equations of vibrations of arches are six simultaneous linear differential equations of the first order. When the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are taken into account, the governing equations of motion are very complicated. Because of this complexity, most of the researchers calculated the natural frequencies of vibrations of arches, based on the classical theory in which the foregoing effects are neglected. Although exact methods are employed for only the simple cases, Ritz, Galerkin and finite element methods are used extensively when the complicated cases are considered. The exact solution exists only for a circular arch of uniform cross-section. The equations of motion, which take into account axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects, can be solved exactly.

The purpose of this study is to give analytical solutions of static and dynamic problems of curved beams by considering axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects, and then to develop other new methods to solve either static or dynamic problems by using exact solution.

In the first chapter, a general view for curved beams and the aim of the present study are given in summary.

In the second chapter, a detailed review for the studies in the literature on both static and dynamic problems is given. Reviewing the literature has shown that many excellent papers deal with in-plane vibrations of arches, there is very limited number of studies available in the literature on the dynamic behavior of arches of variable cross-sections. It seems that the finite elements were the major tool in this research. Most work has been done within the scope of Bernoulli-Euler beam theory. This theory is recognized as adequate for common engineering problems. However, for arches having large cross-sectional dimensions in comparison with their span length and for arches in which higher modes of vibration are required, the Timoshenko beam theory, which takes into account the rotatory inertia and the shear effects, gives a better approximation to the actual beam behavior. The most important effect on predicting the frequencies of the vibrations of an arch is the axial deformation effect. Only a few works have taken into account the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects. Almost all of them uses the numerical methods and gives approximate results.

In the third chapter, the governing differential equations of a curved beam are given for the static and dynamic problems. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In the deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section.

In the fourth chapter, the governing differential equations of static and dynamic problems of arches are solved exactly by using initial value method. For the static problems, the curvature and the cross-section of the arch are considered as variable. The solution does not depend on the loading and boundary conditions. The analytical expressions of the fundamental matrix are obtained for general cases. It is possible to use these analytical expressions in order to obtain the displacements and the stress resultants for a curved beam with any loading and boundary conditions. The exact solution of the governing equations is possible only for a uniform circular arch.

The in-plane free vibration of circular arches with continuously varying cross-section is investigated by means of the exact solution in the fifth chapter. As an approximation, such an arch is divided into a number of stepped arches with constant cross-sections. The cross-section of each element is determined by averaging the dimensions of upper and lower bounds of the element. Then, the exact solution of free vibrations for each stepped arch can be obtained by using initial value method. The axial extension, transverse shear deformation and rotatory inertia effects are included in the governing differential equations of free vibrations. As the number of the stepped arches increase, the fast convergence to the frequencies of the original arch is observed. Clamped-clamped, hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-free and free-free boundary conditions are studied for different opening angles. A comparison with available approximate solutions is also performed. The agreement among all these methods is generally good.

In the sixth chapter, the exact solution is adopted to the finite element method. A two-node six degree of freedom element is built by considering axial extension and shear deformation effects. The stiffness matrix is obtained from force-displacement relations and used for solution of static problems of curved beams. The beams with variable curvature are investigated besides the beams with constant curvature. The examples given in the literature are solved and the results are compared.

The natural frequencies of curved beams for in-plane vibrations are investigated by means of finite element method in chapter seven. The element mass matrix is derived based on the equation of kinetic energy with rotatory inertia effect. The natural frequencies are obtained by solving the eigenvalue problem. Some numerical examples in the literature are also solved in details and the results are given.

The experimental studies and modal analysis of several curved beams are given in the chapter eight. The experimental results are compared with the analytical solution for different curved beams and different boundary conditions. Vibration of beams is also studied by using finite element package program ANSYS in order to compare natural frequencies and mode shapes of the beam. The results show that experimental, analytical and finite element solutions are in good agreement with each other.

In the ninth chapter, the scope of the study is given with the results and discussions. Some suggestions are made to improve the methods in advance.

1. GİRİŞ

Çubuk veya kiriş olarak adlandırılan cisimler, mühendislik alanında önemli bir yere sahiptir ve çeşitli endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Pek çok bilim adamı ve mühendis, çubuklar ve çubuk teorisi üzerinde çalışmakta ve en doğru çözüm yöntemini aramaktadır.

Elastik çubukların hesabında kullanılan elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan elastik bir cismi, gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme açısından sistematik bir şekilde inceleyen bilim dalıdır. Ancak, oldukça karmaşık sınır değer problemlerinin ortaya çıkması nedeniyle, çok basit durumlar dışında, elastisite teorisinin kullanılması hemen hemen imkansızdır. Bu nedenle, elastisite teorisi kullanılarak yapılan araştırmalarda, problemi basitleştirmek için çubuk eksen, çubuk kesiti ve çubuğa etkiyen dış kuvvetlerle ilgili varsayımlar ve kabuller yapılmaktadır. Böylece, sadece bazı özel hallerde uygulanabilecek çözümler elde edilmektedir.

Çubuğun eğri eksenli olarak seçildiği, statik ve dinamik problemlerin büyük bir kısmında, bu tür basitleştirmeler görmek mümkündür. Çalışmalarda, genellikle, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisinin esas alındığı görülür. Böylece eşitlikler daha basit hale dönüşmekte; ancak, elastisite teorisinin getirdiklerinden ve gerçek çubuk davranışından uzaklaşmaktadır. Bunun yanı sıra, literatürdeki çalışmalarda, teorisinin getirdiği denklemlerin çözümünde, Ritz, Galerkin ve sonlu eleman gibi yaklaşık yöntemler kullanılarak sonuca ulaşılmaktadır. Özellikle, sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte yaygınlaşan sonlu eleman yöntemi, çalışmaların büyük bölümünde uygulama alanı bulur. Sadece, basit problemler söz konusu olduğunda kesin çözüme başvurulduğu görülür.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışını inceleyen pek çok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu sabit kesit alanına sahip çubukları, eğrilik yarıçapının sabit olması durumunda ele almaktadır. Değişken kesitli ve değişken eğriliğe sahip çubuklar oldukça az çalışmaya konu olmuştur.

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışları ele alınmaktadır. Öncelikle, eğri eksenli çubuk statikliğinin ve dinamiğinin genel denklemleri üzerinde durulmaktadır. Bu denklemler literatürdeki mevcut çalışmalarda yer almaktadır, ancak burada konu bütünlüğünün sağlanması açısından tekrarlanması uygun görülmüştür.

Çubuğun statik davranışını ifade eden denklemler, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermektedir. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, çubuk eksen eğriliğinin ve kesitin eksen boyunca değişimi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Böylece, çubuk eksenindeki her noktada, yer değiştirme ve iç kuvvet büyüklükleri analitik olarak belirlenebilmektedir.

Çubuğun dinamik problemini ifade eden diferansiyel denklemlere, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin yanında dönme eylemsizliği etkisi de dahil edilmektedir. Bu denklemler, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı oluşturmaktadır. Denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum da, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade etmektedir. Çalışmada, herhangi bir basitleştirici varsayım yapılmadan, birinci dereceden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının, başlangıç değerleri yöntemiyle kesin çözümü verilmektedir.

Eğri eksenli çubuk için elde edilen bu çözüm yöntemleri, hem statik hem de dinamik davranışların incelenmesinde kullanılacak başka yöntemlerin oluşturulmasına olanak vermektedir.

Öncelikle, sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubuğun dinamik davranışı için elde edilen kesin çözüm yöntemi, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemlerinin çözümü için uygulanır. Sürekli değişken kesitli, çubuklar, sabit kesit alanlı alt elemanlara ayrılarak çözüm yapılır. Eleman sayısı arttıkça, doğru sonuca olan yakınsama da artmaktadır. Böylece, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmeden yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir. Bu çözüm, çubuk eksen eğrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belli olan herhangi bir çubuğun titreşimlerini incelemede uygulanabilecek genel bir çözümdür.

Sabit eğrilik yarıçapına sahip çubuklara örnek olarak, çember eksenli ve sürekli değişken kesitli çubuklar incelenmektedir. Çubukların, simetrik ve asimetrik geometrileri ayrı ayrı ele alınır. Konu ile ilgili literatürde yayınlanmış benzer

problemlere yer verilir. Değişken eğrilik yarıçapına sahip çubuklara örnek olarak spiral ve parabol eksenli çubuklar göz önüne alınmakta ve çember eksenli çubuklardakine benzer şekilde, kesit alanının değişimi, simetrik ve asimetrik olarak iki ayrı grupta incelenmektedir.

Sürekli değişken kesit alanına sahip çubuklara ait boyutsuz frekans değerlerinin toplam kiriş açısına göre değişimi, grafikler şeklinde sunulduğunda, belirli çubuk açılarında, eğrilerin birbirlerine çok yaklaştıkları görülmektedir. Mod geçişi olarak adlandırılan bu durum, eksenel uzama, kayma deformasyonu veya dönme eylemsizliği etkisinden birinin baskın olduğu mod şeklinden, bir diğerinin baskın olduğu mod şekline geçiş olarak tanımlanabilir.

Sonlu eleman yöntemi, günümüz mühendisliğinde yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Ancak, literatürde yapılan çalışmalarda, eğri eksenli çubuk elemanlar için oluşturulan sonlu eleman formülasyonları sınırlı sayıdadır. Bu çalışmada, genel denklemlerin kesin çözümünden elde edilen sonuçlar kullanılarak, eğri eksenli çubuğun statik problemleri için bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmaktadır. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içeren katılık matrisi kullanılarak, farklı yükleme ve sınır şartlarında düzlem içi yer değiştirmeler ve kesit tesirleri hesaplanmaktadır. Çubuğun statik davranışı ile ilgili literatürde bulunan çalışmalar incelenmekte, sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Sabit eğrilik yarıçapına sahip çubuklara ilave olarak değişken eğrilik yarıçapına sahip çubuklara ait problemlerin çözümüne de yer verilmektedir.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi yer değiştirmelerine ait kesin çözüm yönteminin sonlu eleman yöntemine uyarlanması oldukça başarılı, sonuçlar vermektedir. Benzer yöntem, eğri eksenli çubuklara ait dinamik denklemlerin çözümünde de kullanılmaktadır. Kinetik enerji ifadesinden faydalanılarak, çubuğa ait kütle matrisi oluşturulmuştur. Kütle matrisinin elde edilmesinde, dönme eylemsizliği etkisini göz önüne alan literatürde yapılan çalışmalardan faydalanılmıştır. Statik problemler için elde edilen katılık matrisi ile kütle matrisi kullanılarak bir özdeğer problemine ulaşılmaktadır. Problemin çözümüyle çubuğa ait frekans değerleri bulunmakta ve analitik olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Yapılan tüm bu çalışmalara paralel olarak, elde edilen teorik sonuçların gerçek durum ile karşılaştırılması amacıyla, eğri eksenli çubukların titreşimleri deneysel olarak da incelenmektedir. Bu amaca uygun olarak, bir deney düzeneği tasarlanmıştır. Deney parçası olarak, kiriş açıklığı 70° , 100° , 120° , 135° , 160° ve 180° olan dikdörtgen sabit kesitli çember eksenli çubuklar ve kiriş açıklığı 120° ve

180° olan kademeli kesitli çubuklar kullanılmıştır. Farklı sınır şartlarında serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Deney parçalarının bilgisayar ortamında modelleri oluşturulmuş, deney dataları bu modeller üzerine işlenerek mod şekilleri çizilmiştir. Deneysel olarak elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri, teorik sonuçlarla ve sonlu eleman yöntemi sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Eğri eksenli çubukların, düzlem içi ve düzlem dışındaki davranışlarını inceleyen çalışmaların büyük bir kısmında, çubuk teorisinin denklemlerinin çözümünde yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir. Çalışmalarda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edildiği Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınarak, Ritz, Galerkin ve sonlu eleman yöntemi gibi yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşılmaktadır. Sadece güncel çalışmaların bir kısmında kesin çözüm elde edilmektedir.

Kaynaklar, bugün yaygın olarak kullanılmakta olan çubuk teorisinin Kirchoff tarafından ortaya konduğunu göstermektedir. En yaygın eğilme teorisi, eğilmeden önce çubuk eksenine dik ve düzlem olan kesitin, şekil değiştirmeden sonra da dik ve düzlem kaldığını varsayan Bernoulli-Euler-Navier varsayımına dayanmaktadır.

Bu bölümde, literatürde kullanılan çözüm yöntemlerinin bir özetinin verilmesi amaçlanmaktadır. Literatür araştırması, konu bütünlüğünün korunması açısından iki ana başlık altında incelenecek, çubuğun statik ve dinamik davranışlarını inceleyen çalışmalar ayrı ayrı ele alınacaktır. Tarihsel gelişimin izlenmesi açısından, kaynaklar tarih sırasına göre verilmektedir.

2.1 Eğri Eksenli Çubukların Statiği Üzerine Yapılan Çalışmalar

Eğri eksenli çubuklarla ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biri Love [1]'a aittir. Bu çalışmada, dairesel kesitli, çember eksenli çubukların ve tam halkaların çeşitli yükleme durumları incelenmektedir. Eğri eksenli çubuk, bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmakta ve teori skaler büyüklüklerle verilmektedir.

Kaynaklar içerisinde yer alan [2-6] numaralar arasındaki çalışmalar, mukavemet, elastisite teorisi ve çubuk teorisi konularında temel bilgileri vermektedir.

Çubuk statikini inceleyen kaynakların birçoğu, çember eksen ve dairesel kesit kabulü gibi geometrik basitleştirmeler kullanmakta, çubuğun kendi düzlemindeki eğilmelerini incelerken eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini ihmal eden özel halleri göz önüne almaktadır.

İnan [2,3] tarafından yapılan çalışmalar, çubuk teorisinin temelini oluşturan çalışmaların başında gösterilebilir. [3] çalışmasında çubuk, bazı kısıtlamaları sağlayan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmakta ve sınır değer problemi bu ortamda kurulmaktadır. Herhangi bir eksen eğriliğine sahip ve değişken kesitli çubuklarda da bu denklemler kullanılabilir.

Hem eksenel uzama hem de kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alarak çubuk teorisini inceleyen çalışmalardan biri Cinemre [4]'ye aittir. Bu çalışmada, yer ve şekil değiştirme ilişkileri geometrik yoldan elde edilerek, şekil değiştirme vektörü olarak, birim dönme vektörü yerine açısız değişim vektörü seçilmiştir. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınarak, uzaysal eğri eksenli çubuklara ait denklemler elde edilmektedir. Böylece, genel bir çözüm oluşturulmakta ve şekil değiştirmiş çubuğun geometrisi hakkında bilgi sağlanabilmektedir.

Balasubramanian ve Prathap [7], hem statik hem de dinamik analizlerde kullanılabilecek bir eğri eksenli çubuk sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Yer değiştirme büyüklüklerini hesaplamak için üçüncü dereceden polinomlar kullanmış, böylece kayma ve membran etkilerini göz önüne almıştır.

Tüfekçi [8], eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ayrı ayrı göz önüne alarak incelemiştir. Elde edilen genel denklemlerin çözümünü, başlangıç değerleri yöntemi ile vermiştir. Çember eksenli ve parabol eksenli çubuklar için örnekler çözülmüş, diğer çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu çalışmaya paralel olarak, Tüfekçi ve Arpacı [9]'ya ait olan çalışmada, aynı çözüm yöntemi kullanılarak, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip eğri eksenli çubukların statik davranışı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmaktadır.

Artan [10] tarafından yapılan çalışmada, değişken kesitli eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi gerilme ve yer değiştirme değerleri başlangıç değerler yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Çubukların kendi düzlemlerinde tekil ve yayılı kuvvetle yüklenme durumları için hesaplamalar yapılmıştır. Asal matrisler ve bu matrislerin tersleri elde edilerek örnekler çözülmüştür.

Litewka ve Rakowski [11], sabit eğriliğe sahip çubuk için, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alan bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuştur. Analitik şekil fonksiyonlarını seçerek, katılık matrisini hesaplamıştır.

Lin ve Hsieh [12]'e ait çalışmada, tabakalı karma malzemeden yapılmış eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri incelenmektedir. Herhangi bir eğrilik yarıçapı için

denklemler elde edilmiş, örnek olarak, elips, parabol, zincir eğrisi (catenary) ve spiral eksen eğrisine sahip çubuklar incelenmiştir. Tam halka şeklindeki çubuğa tekil ve yayılı yüklerin etkimesi durumu göz önüne alınmıştır. Eksenel uzama hesaplara dahil edilirken, kayma deformasyonu ihmal edilmiştir.

Gimena ve diğerleri [13] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı davranışını incelemek üzere bir eleman tanımlaması yapılmaktadır. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu, kesit değişimi hesaplara dahil edilmiştir. Matris yöntemi ile çözüm yapılmış, yayılı yük etkisindeki eğri eksenli çubuklar için hesaplamalar, grafikler halinde verilmiştir. Aynı yazarlara ait bir diğer çalışmada [14], aynı çözüm yöntemi global koordinatlar esas alınarak sunulmuştur.

Sonlu elemanlar yöntemi, günümüzde karmaşık mühendislik problemlerinin hassas olarak çözülmesinde etkin olarak kullanılan bir sayısal yöntemdir. Son yıllarda, uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde de başarı ile kullanılabileceği anlaşılmıştır. Bununla birlikte, sonlu elemanlar yöntemi ve çözüm teknikleri hızlı gelişmeler kaydetmiş ve günümüzde birçok pratik problemin çözümü için kullanılan en yaygın yöntemlerden birisi olmuştur. Yöntemin, değişik mühendislik alanları için bu kadar popüler olmasının ana nedenlerinden birisi de gelişen bilgisayar teknolojisiyle, sonlu eleman paket programlarının yaygınlaşmasıdır. Sonlu elemanlar yöntemindeki temel düşünce, karmaşık bir problemi, küçük parçalara ayırarak basite indirgemek ve çözüm bulmaktır. Esas problemin, daha basite indirgenmiş olması nedeni ile kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde edilmektedir. Eğri eksenli kirişler için, sonlu eleman yöntemi, farklı malzeme özellikleri kullanılabilesinin yanı sıra, eksen uzaması, kayma deformasyonu, kesitin çarpılması gibi etkilerin de yapılan analizlere dahil edilebilmesini sağlamaktadır.

Eğri eksenli sonlu eleman formülasyonu ile ilgili çalışmalardan biri olan [15]'de, hem düz hem de eğri eksenli çubuklar göz önüne alınmış, kayma etkisi formülasyona dahil edilmiştir. Çember ve spiral eksenli çubukların düzlem dışı statik davranışları incelenmiştir. Kapania [16] tarafından yapılan diğer çalışmada, ince çubuklar ele alınmış; çubukların kendi ağırlıkları, burkulma kuvveti ve rüzgar yükü etkisindeki statik davranışları üzerinde çalışılmıştır. Molari, Ubertini [17] ve Saffari, Tabatabaei [18] eğri eksenli sonlu elemanlar üzerine çalışma yapan diğer yazarlardır. [18]'de yer değiştirme fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlar olarak seçilmiştir. Tek eleman dahi çözüme ulaşmaya yeterli olacak şekilde matematiksel ifadeler oluşturulmuştur. Farklı sınır şartlarında, tam halka ve çember eksenli çubuğun yer değiştirmeleri hesaplanmıştır.

Tüfekçi [19] tarafından yapılan çalışmada, daireden farklı kesitler için burulma momentinin polar eylemsizlik momentinden farklı olduğu vurgulanmaktadır. Literatürdeki pek çok çalışmada, kesit burulma momenti olarak polar eylemsizlik momentinin alındığını belirtmekte ve bunun kayma gerilmesi hesabında hatalara sebep olduğunu ortaya koymaktadır.

2.2 Eğri Eksenli Çubukların Dinamiği Üzerine Yapılan Çalışmalar

Literatürde eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Çalışmalarda genel olarak, sabit kesit alanına sahip sistemler ele alınmaktadır. Love [1] tarafından ortaya konulan çalışma, eğri eksenli çubukların dinamik davranışı ile ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biridir. Çalışmada, dairesel kesitli tam bir daire halkası çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi ile ele alınmaktadır. Düzlem içi ve düzlem dışı titreşimler incelenmiş, her iki tip titreşimin ilk mod frekanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür.

Den Hartog'a ait olan çalışmada [21], yine dairesel kesitli, çember eksenli çubuğun titreşimleri incelenmektedir. Çubuk ekseninin uzamadığı ve uzadığı varsayımları yapılmış, enerji ifadeleri oluşturularak Rayleigh-Ritz yöntemiyle sonuca ulaşılmıştır. Eksenin uzadığı varsayımı ile oluşturulan ifadelerde, eksenin uzamadığı varsayımından elde ettiği ilişkiyi kullanmış, ankastre ve sabit mesnet şartlarını göz önüne almıştır.

Kademeli değişken kesitli çubukları inceleyen çalışmalardan biri De Irassar ve Laura'ya [22], aittir. Bu çalışmada, kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri yaklaşık çözüm yöntemleri ile ele alınmaktadır. Kademenin ortada olması durumunda, çubukların serbest titreşimlerine ait ilk simetrik mod şekilleri incelenmekte, çubuğun konsantre kütle taşıması durumu da göz önüne alınmaktadır.

Laura ve diğerleri [23], kesiti kademeli değişken çember eksenli çubuğun düzlemindeki titreşimlerini, konsantre kütle olması durumunda Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemekte ve sonuçları sonlu eleman yönteminin sonuçları ile karşılaştırmaktadır. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek, enerji ifadelerinde kütleyle ait terimlere yer verilmiştir. Sabit-sabit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları için elde edilen sonuçlar, sonlu eleman yönteminin verdiği sonuçlarla karşılaştırarak, tablolar halinde sunulmuştur.

Gutierrez ve diğerlerine [24] ait olan çalışmada, kesiti kademeli ve sürekli değişen, farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar seçilerek Ritz yöntemiyle incelenmektedir. Parabol, zincir eğrisi (catenary), spiral, çember ve sikloid şekillerinde eksenlere sahip çubukların doğal frekansları, farklı sınır şartları için sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunulmaktadır. Simetrik ve asimetrik geometriye sahip çubuklar, sürekli değişken kesitli ve kademeli değişken kesitli olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Çalışmada, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir.

Rossi ve diğerlerine [25] ait olan çalışmada, bir önceki çalışma [24] esas alınarak, serbest ucunda konsantre kütle bulunan, ankastre-serbest çubukların titreşimleri incelenmiştir. [24]'te verilen örneklerle aynı geometriye sahip eğri eksenli çubuklar için frekans değerleri hesaplanmıştır.

Auciello ve Rosa [26], çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli teorisi yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktadır. Çalışmada, kademeli değişken kesitli ve sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşulları için incelenmektedir.

Rossi ve Laura [27], kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların titreşimlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak, sonlu eleman yöntemi ile incelemektedir. Kademenin ortada bulunması durumunda, sabit-sabit ve ankastre-ankastre mesnet şartlarına sahip çubukları incelemekte, dinamik katılama olarak adlandırılan, frekans değişiminin kütle değişimine oranını da çalışmada sunulmaktadır.

Kawakami ve Sakiyama [28], eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı davranışlarını incelemiş, Green fonksiyonları ve sayısal integrasyon kullanarak serbest titreşim davranışı için hesaplamalar yapmıştır.

Tarnopolskaya ve diğerlerine ait olan çalışmada [29], değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubuğun düzlem içi titreşimleri, asimptotik yaklaşımla ele alınmaktadır. Bu çözüm yoluyla, mod şekilleri arasındaki geçişi, eğrilik yarıçapının değişimine bağlı olarak açıklamaktadır. Çalışmada deneysel sonuçlara da yer verilmektedir.

Tong ve diğerlerine ait çalışmada [30], çember eksenli değişken kesitli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Euler-Bernoulli çubuk teorisi kullanılarak incelenmektedir. Sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukları, sabit kesitli elemanlara ayırmış ve her bir sabit kesitli çubuğun titreşim frekanslarını kesin

çözümle elde etmiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ederek, elde ettiği sonuçlarda eleman sayısının arttıkça sonucun yakınsadığını göstermektedir.

Tüfekçi ve Arpacı [31], eğri eksenli, sabit kesitli düzlemsel çubukların, düzlem içi serbest titreşimlerinin kesin çözümünü, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek vermektedir. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılmış, sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

Tüfekçi, [32] ve [33]'de sırayla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği genel denklemleri, kesin çözümleriyle birlikte sunmaktadır. Çalışmalarda, beş farklı sınır koşulu için, farklı narinlik oranlarına, kademe oranlarına ve kiriş açılarına sahip çubuklar incelenmiştir. Tüfekçi ve Özdemirci'ye [34] ait olan çalışmada, [32]'ye paralel olarak, tek kademeli değişken kesitli çubukların titreşimi incelenmiş, kademe oranı, kademelerin yeri, sınır şartları, kiriş açıklığı ve narinlik oranının doğal frekans üzerindeki etkisi grafikler halinde sunulmuştur. Aynı çözüm yönteminin uygulandığı bir diğer çalışmada [35], yüksekliğinin kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubukları incelemiştir. Sabit kesitli çubuklar göz önüne alınmış, ilk beş moda ait frekans değerleri elde edilmiştir. Hesaplamalar sonucunda, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerinin sığ çubuklarda, sığ olmayan çubuklara göre daha baskın olduğu görülmektedir.

Tarnopolskaya ve diğerlerine [36] ait çalışmada, düşük frekanslardaki mod geçişi incelenmiştir. Değişken eğrilik ve kesit alanı için hesaplamalar yapılmış, eğrilik yarıçapının mod şekli üzerindeki etkileri mod geçişi açısından ele alınmıştır. Düşük ve yüksek modlardaki mod geçişi durumları karşılaştırılmıştır.

Oh ve diğerleri [37], parabol, elips ve sinüs eğriliklerine sahip çubukların, düzlem içi titreşimlerine ait denklemleri, eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek elde etmiştir. Farklı kayma katsayısı ve narinlik oranları için hesaplamalar, sonlu eleman yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmaktadır. Aynı yazarlara ait bir diğer çalışmada [38], bir önceki çalışmada verilen yöntem kullanılarak kuadratik, parabol, zincir eğrisi (catenary) ve elips şekillerinde eksenlere sahip çubukların, düzlem içi titreşimlerine ait diferansiyel denklemler elde edilmiş, farklı sınır şartlarında doğal frekans ve mod şekilleri hesaplanmıştır. Değişken kesitli çubuklara ait hesapların yapıldığı bu çalışmada, dikdörtgen kesitli çubuklar göz önüne alınmış, deneysel ve teorik sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yüksek modlardaki

davranışlar esas olarak incelenmiş, kayma etkisi ihmal edilmiş, dönme eylemsizliği ve eksenel uzama göz önüne alınmıştır.

Diferansiyel kuadratür yöntemini (differential quadrature method) kullanan çalışmalardan biri olan Rosa ve Franciosi'ye [39] ait makalede, eksenel uzama etkisi ihmal edilerek dönme eylemsizliği ve kayma deformasyonu hesaplara dahil edilmiştir. Sunulan yöntemle göre, derin çubuklarda hata oranı yüksek iken, sığ çubuklarda yüksek frekanslarda dahi düşük hatalarla çözüm elde edilebilmektedir.

Kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini içeren çözümlerden birini sunan Lin ve Lee [40]'ye ait çalışmada Frobenius yöntemi ile elde edilen denklemler, Green fonksiyonu kullanılarak çözüme ulaşılmıştır.

Tüfekçi ve Özdemirci [41], iki kademeli değişken kesitli eğri eksenli çubuğu, sabit kesit alanına sahip üç bölgeye ayırarak ele almaktadır. Çubuğun ilk beş moduna ait düzlem içi titreşimlerini, kesin çözümle incelemekte, dinamik katılma etkisini vurgulamaktadır.

Liu ve Wu [42], çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini (generalized differential quadrature method) kullanarak incelemekte, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmektedir. Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyerek Rayleigh-Ritz, Rayleigh-Schmidt, Galerkin, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization) yöntemleri ile elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır. Karami ve Malekzadeh [43] de aynı geometrilerin titreşimini, diferansiyel kuadratür yöntemini (differential quadrature method) kullanarak incelemiş, sonuçları [42]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Kang ve diğerlerine [44], ait çalışmada eğri eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, dalga yayılımı (wave propagation) yaklaşımı ile incelenmiş, elastik mesnetler, tekil yükler, eğrilik yarıçapı değişimi gibi süreksizlik durumlarını içeren problemler göz önüne alınmıştır. Süreksizlik noktalarına ait dalga yansıması (wave reflection) transfer matrisi ile ele alınmış, hem kinetik hem de geometrik süreksizlikler için çözüm elde edilmiştir.

Literatürdeki, eğri eksenli çubukların zorlanmış titreşimlerini inceleyen çalışmalardan biri Sophianopoulos ve Michaltsos [45]'e ait olan çalışmadır. Sabit-sabit mesnet şartlarına sahip, parabolik çubuğun serbest titreşimlerine paralel olarak, zamana bağlı değişen eksenel kuvvet altında dinamik davranışı ve dinamik kararlılığı incelenmektedir. Sistemin sönümsüz olduğu varsayımı yapılmıştır.

Rosen ve Gur [46] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli çubuğun lineer olmayan davranışı, transfer matrisi yöntemi ile ele alınmaktadır. Çubuk, elemanlara ayrılarak çözüm yapılmakta, büyük deformasyonlar hesaplanabilmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, eğri eksenli çubukların statik davranışında olduğu gibi, dinamik davranışlarının çözümünde de etkin olarak kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Raveendranath ve diğerlerine ait olan [47] ve [48] numaralı çalışmalarda, çubuğa ait yer değiştirmeler seçilen özel fonksiyonlarla ifade edilerek iki düğüm noktasına ve altı serbestlik derecesine sahip sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. [47]'de normal ve teğetsel doğrultulardaki yer değiştirmeler için kübik fonksiyonlar seçilirken, [48]'de normal doğrultudaki yer değiştirme kuadratik fonksiyonla ifade edilmiş ve doğru sonuca olan yakınsama artmıştır. Litewka ve Rakowski [49], eksenel uzama ve kayma deformasyonunun dahil edildiği statik fonksiyonları kullanarak bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuştur. Çubuğun dinamik davranışlarını incelemiş, özellikle kalın çubuklar üzerindeki eksenel uzama ve kayma deformasyonunun etkilerini vurgulamıştır. Wu ve Chiang'a [50] ait çalışmada oluşturulan sonlu eleman formülasyonu ile hem düz, hem de eğri eksenli çubukları içeren geometriler için çözüm aranmış, kinetik enerji ifadesi kullanılarak kütle matrisi hesaplanmıştır. Aynı yazarlara ait olan [51]'de, kayma deformasyonu ve dönme etkileri formüllere dahil edilmiş, etkiler örnekler üzerinde ayrı ayrı ele alınmıştır. İnce çubuklarda, ilk beş mod için kayma deformasyonu etkisi ihmal edilebilecek kadar düşük iken aynı etki kalın çubuklarda önem kazanmaktadır. Sonlu eleman çalışmalarından biri olan [51]'de, kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliği etkileri hesaplara dahil edilerek, Hamilton Prensibi'ne dayalı çözüme gidilmiştir. Farklı sınır koşulları ve farklı geometriler için doğal frekans değerleri ve mod şekilleri hesaplanmıştır. Cannarozzi ve Molari [53] tarafından yapılan çalışmada, yer değiştirme ve gerilme eşitlikleri Hellinger-Reissner prensibine dayalı olarak elde edilen eleman formülasyonu oluşturulmuştur. Oluşturulan eleman, herhangi bir eğriliğe ve değişken kesit alanına sahip çubuğun doğal frekanslarının hesaplanmasında kullanılabilmektedir. Kim ve Park [54, 55]'ye ait olan çalışmalarda, dikdörtgen kesitli çubuklar için, statik ve dinamik analizlerde kullanılabilecek bir hibrit eleman sunulmaktadır. Hem statik hem de dinamik davranışı inceleyen [56]'da, düz ve eğri eksenli çubuklar için bir sonlu eleman oluşturulmuştur. Rijitlik matrisinde, kayma deformasyonu etkisi, kütle matrisinde dönme eylemsizliği etkisi hesaplara dahil edilmiştir. Kim ve Lee [58], eğri eksenli çubuk titreşimlerini incelemek üzere sonlu eleman formülasyonu oluşturmuş, çubuğun düzlem içi eğilme titreşimlerini incelemiştir.

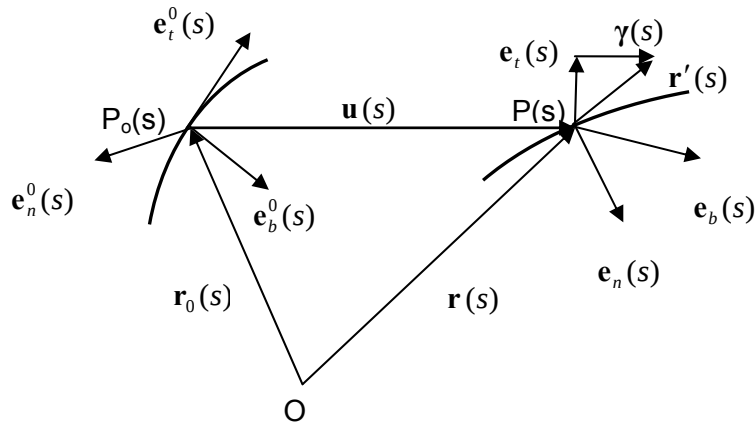
Rubin ve Tüfekçi [59] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli dikdörtgen kesitli çubukların titreşimi, Cosserat Teorisi ile incelenmektedir. Çalışmada, çubuk teorisinin, Cosserat teorisinin, sonlu eleman analizinin ve deneyden elde edilen bulguların karşılaştırılması verilmiştir.

Teorik çalışmalara paralel olarak, deneysel modal analiz (modal testing) de son yıllarda gittikçe daha fazla araştırılan bir konu haline gelmiştir. Özellikle, bilgisayar teknolojisinin geliştiği günümüzde bilgisayar destekli ölçüm cihazları bu işlemin daha hızlı yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu yöntemle, yapıların dinamik karakteristikleri olarak adlandırılan doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları deneysel olarak elde edilebilmektedir. Böyle bir deneysel yöneme gereksinim duyulmasının esas sebepleri arasında, yapıların teorik analizinde yapılan kabullerin gerçekte sağlanıp sağlanmadığının tespit edilmesi, teorik analizinin yapılmasında güçlük olan sistemlerin dinamik karakteristiklerinin deneysel olarak belirlenmesi yer almaktadır. Ewins'e [58] ait olan kitapta, deneysel modal analizin temel esasları ve uygulama alanları anlatılmaktadır. Ölçüm teknikleri ve modal parametrelerin elde edilme yöntemleri verilmekte, matematik modellerin oluşturulması ele alınmaktadır. Bu konuda, literatürde yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır. Cauberghe diğerleri [61] tarafından yapılan çalışmada, deneysel çalışma sırasında ortaya çıkan bozucu kuvvetler ve sızıntı (leakage) etkisini en aza indirmek için bir yöntem sunulmaktadır. Verilen yöntemin geçerliliği, Monte Carlo simülasyonu ve alüminyum plaka üzerinde yapılan deneysel çalışmalarla ispatlanmıştır. Bir diğer modal analiz çalışması, Ren ve diğerlerine [62] aittir. Bir köprü üzerine yapılan deneysel çalışma sonlu eleman çalışmasıyla da desteklenmektedir.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

3.1. Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri

Bu bölümde, çubuk statiğinin ve titreşimlerinin genel denklemlerinin elde edilmesi özetlenecektir. Çubuk malzemesinin elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki her noktada birbirine dik iki birim vektör bağlı bir parametrelili yönlendirilmiş bir ortamla temsil edilmektedir. Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumunda, birim vektörler uzay eğrisinin teğetine diktir ve çubuğun kesitini belirlemektedir. Bu durumda, üçüncü vektör, teğet birim vektörünü ifade eder. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, kesit vektörleri yine birbirlerine dik birim vektörler olarak kalmaktadır. Başlangıçtaki teğet birim vektörü ise kesit vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık, ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır. Böylece, çubuk dik kesitin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Dik kesit ötelenir ve döner; ancak şekil değiştirmez. Yani kesit, serbestçe dönebileceği için şekil değiştirmeden sonraki eksene dik kalmayabilir [4].

Çubuk eksen eğrisi üzerindeki $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen noktada, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri yer almaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve

$$\mathbf{e}_t^0(s) = \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0$$

$$\mathbf{e}_t^0(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır. Bu doğrultular kesit asal eksenleriyle çakışmayabilir. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum göz önüne alınacaktır.

$\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumuna ait bilinen vektörlerdir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü, $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet, ne de birim vektör olma şartı vardır (**Şekil 3.1**). Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \neq \alpha \cdot \mathbf{e}_t(s) \quad (3.2)$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca, artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.

Şekil 3.1'de, çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları gösterilmektedir. Buradaki (0) üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu ifade eder.

Çubuğun yer değiştirme durumu, iki vektörle tanımlanabilir: Birincisi, eksen üzerindeki noktanın yer değiştirme vektörü,

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

İkinci yer değiştirme vektörü, rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörüdür. Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat, burada, yer ve şekil değiştirmeler küçük varsayılarak dönme, bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne,

$$\mathbf{e}_i(s) = Q_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.4)$$

şeklinde, $\mathbf{Q}$ ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin,

$$Q_{ij} = \delta_{ij} + W_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{Birim matris} \quad (3.5)$$

olarak parçalanması durumunda, (3.4) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.6)$$

biçiminde yazılabilir. Dönüşüm matrisinin ortogonallığını kullanarak; yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla; W_{ij} bir antisimetrik matris olacaktır. Antisimetrik bir matris için,

$$W_{ij} \mathbf{e}_i^0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.7)$$

özellikliğini sağlayan bir $\boldsymbol{\Omega}$ vektörü bulunabilir. Çubuk kesitin dönme vektörü olan $\boldsymbol{\Omega}(s)$ ile (3.6) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \boldsymbol{\Omega}(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \quad (3.8)$$

şekline dönüşür. $\boldsymbol{\Omega}(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir. Birinci vektör, çubuğa ait eksenel şekil değiştirme vektörü olan γ vektörüdür. Eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları ifade etmektedir.

γ , eksenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve

$$\gamma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t \quad (3.9)$$

şeklinde tarif edilmektedir.

Diğer şekil değiştirme vektörü, bazı çalışmalarda, birim dönme vektörü olarak tanımlanır ve

$$\omega_1 = \frac{d\Omega}{ds} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir [2]. Bu durumda, ilgili şekil değiştirme denklemi,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \omega_1 \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{M}$ kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, $\mathbf{D}$ ise eğilme rijitliği matrisidir.

Bazı mühendislik çalışmaları ise, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak, ω açısal değişim vektörünü kullanmaktadır. Bu vektör, üçlü eksen takımının, çubuk eksen eğrisi üzerinde birim uzunluk kadar ilerletildiğinde açısal değişimini belirleyen vektör olarak tarif edilmektedir. Bileşenleri, çubuk ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \omega \times \mathbf{e}_i \quad (3.12)$$

olarak tarif edilmektedir. Açısal değişim vektörünün şekil değiştirme büyüklüğü olarak kullanılması, daha genel problemlerin çözümüne ve şekil değiştirmiş çubuğun geometrisini tanımaya olanak sağlamaktadır.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, Ω , γ , ω olarak bilinen altı bilinmeyen, iki yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntısı, iki denge denklemi ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları :

Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.1), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_t^0 + \boldsymbol{\gamma} \quad (3.14)$$

şeklinde, ilk yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur.

(3.8) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} \quad (3.15)$$

Eşitliğinde (3.12) de verilen açısal değişim vektörü yerleştirilerek,

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0) \quad (3.16)$$

ifadesi bulunur. (3.8) eşitliği ve vektörel arpım $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ özellikleri kullanılarak,

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{e}_i^0 = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{e}_i^0 \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (3.17)$$

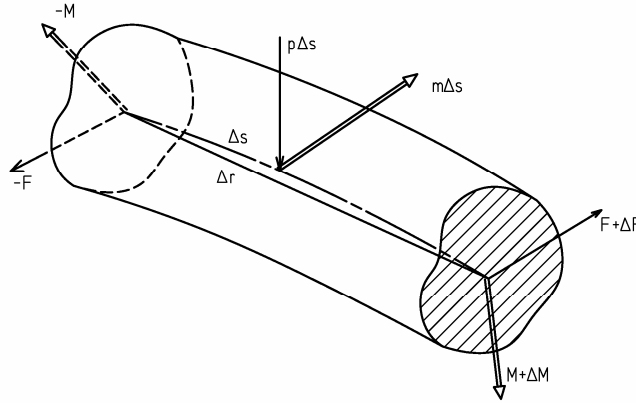
elde edilir. şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımı ile eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak tanımlanabilir. Böylece, eşitliğin sol tarafındaki parantezin iinin de sıfır olması gerekecek, buradan,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilecektir.

3.1.2 Denge denklemleri

$\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ vektörleri, birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ vektörleri ise, sırasıyla, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörlerini göstermek üzere, **Şekil 3.2**'deki elemana ait denge denklemleri,



Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.

$$-\mathbf{F} + \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} + \mathbf{p} \cdot \Delta s = 0$$

$$-\mathbf{M} + \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} + \mathbf{m} \cdot \Delta s + \Delta \mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}) = 0 \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapıp, $(\Delta s \rightarrow 0)$ için limit alındığında,

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir.

3.1.3 Bünye denklemleri

Seçilen herhangi bir koordinat düzleminde,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \frac{d\Omega}{ds}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \gamma \quad (3.21)$$

ilişkisi vardır. Burada, **D** ve **C** ile gösterilen katsayılar, yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı değerler olup, çubuğa ait eğilme ve kayma rijitlik matrislerini gösterir.

Böylece, elastik çubuk teorisinin genel denklemlerine ait 6 adet denklem elde edilmiş olmaktadır. Bunlar, yer değiştirme ve dönme olarak adlandırdığımız **u** ve **Ω**, şekil değiştirme elemanları olan **γ** ve **ω**, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörleri olan **F** ve **M**'dir.

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 = 0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir [4]. Denklemlerde **C** ve **D** matrislerinin ikisi de simetriktr. Eğer, kesit simetrik ise ve $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0$ eksenleri, kesitin simetri eksenleriyle çakışırsa, matrisler, diyagonal matrisler olarak elde edilir [3].

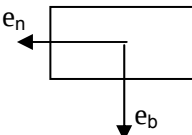
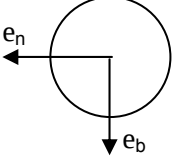
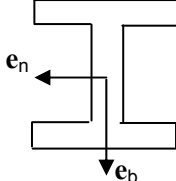
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} GA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_b} GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$C_{11} = C_n = \frac{1}{k_n} GA; \quad C_{22} = C_b = \frac{1}{k_b} GA; \quad C_{33} = C_t = EA$$

$$D_{11} = D_n = EI_n; \quad D_{22} = D_b = EI_b; \quad D_{33} = D_t = GJ$$

Burada, E ve G malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n , I_b kesit eylemsizlik momentlerini, J kesitin burulma eylemsizlik momentini, A kesit alanını ve k_n , k_b ise kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler, **Çizelge 3.1**'de çeşitli kesitler için verilmektedir. İleride ele alınacak sayısal örnekler, kesit geometrisine bağlı olarak, çizelgedeki değerler kullanılarak çözülmüştür.

Çizelge 3.1 : k_n , k_b sabitleri.

Kesit	k_n	k_b
	6/5	6/5
	10/9	10/9
	2.10	2.20

(3.21) eşitliklerinden,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.24)$$

elde edilir.

Bunlar, (3.22)'de verilen genel denklemlerin ilk ikisinde yerine konulduğunda, (3.22) eşitlikleri aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} = -\mathbf{m} \quad (3.25)$$

Buradaki $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ eksen takımında;

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_n^0 + v \mathbf{e}_b^0 + w \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_n \mathbf{e}_n^0 + \Omega_b \mathbf{e}_b^0 + \Omega_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{F} = F_n \mathbf{e}_n^0 + F_b \mathbf{e}_b^0 + F_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{M} = M_n \mathbf{e}_n^0 + M_b \mathbf{e}_b^0 + M_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{p} = p_n \mathbf{e}_n^0 + p_b \mathbf{e}_b^0 + p_t \mathbf{e}_t^0$$

$$\mathbf{m} = m_n \mathbf{e}_n^0 + m_b \mathbf{e}_b^0 + m_t \mathbf{e}_t^0 \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, açısal değişim vektörü,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \kappa_0 \mathbf{e}_n^0 + \kappa_0' \mathbf{e}_b^0 + \tau_0 \mathbf{e}_t^0 \quad (3.27)$$

olarak ifade edilir. Burada, κ_0 , $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ_0' , $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır [2].

(3.26) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.28)$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

Kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan düzlemsel eğri eksenli çubuk için;

$$\kappa_0 = 0 \quad \kappa'_0 = 1/R_0 \quad \tau_0 = 0 \quad (3.29)$$

olarak alınır. Böylece, (3.25) denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + p_n &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + p_b &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dR_t}{ds} - \frac{F_n}{R_0} + p_t &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + m_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + m_b &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{dM_n}{R_0} + m_t &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde elde edilir. Burada; çubuk kesit alanı normal ve binormal eksenlere göre simetrik olduğundan düzlem içindeki ve düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklükler, aynı denklemlerde birlikte bulunmamaktadır. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerini ifade eden denklemlerde, yay uzunluğu yerine $ds = R_0 d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R_0(\phi)}{C_t(\phi)} F_t \\ \frac{du}{d\phi} &= -w + \frac{R_0(\phi)}{C_n(\phi)} F_n + R_0(\phi) \Omega_b \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R_0(\phi)}{D_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R_0(\phi)F_n - R_0(\phi)m_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R_0(\phi)p_t$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R_0(\phi)p_n \quad (3.31)$$

şeklinde elde edilirler. Burada; u ve w normal ve teğetsel yer değiştirmeler; ϕ giriş açıklığı, Ω_b binormal eksen üzerindeki dönme açısı, $R_0(\phi)$ şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı; F_n ve F_t normal ve teğetsel tekil iç kuvvetler; M_b binormal eksen üzerindeki tekil iç moment; p_n ve p_t , normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış yük; m_b binormal eksen üzerindeki yayılı dış momentler şeklinde tanımlanabilir.

3.2. Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri, (3.31) eşitlikleri ile verilmektedir. Denklemlerde, eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alınmaktadır. D’Alambert prensibi yardımı ile, çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{m}$ dış yükleri;

$$\begin{aligned} p_n &= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & m_n &= -\frac{\mu}{A} I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} \\ p_b &= -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} & m_b &= -\frac{\mu}{A} I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} \\ p_t &= -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} & m_t &= -\frac{\mu}{A} I_p \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde eylemsizlik kuvvetleri ve kuvvet çiftleri olarak alınır. Burada, μ birim boyun kütlesi, A kesit alanı, I_n, I_b sırası ile kesitin normal ve binormal eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini, I_p kesitin polar eylemsizlik momentini, göstermektedir. Yer değiştirme büyüklükleri konum ve zamanın fonksiyonlarıdır. O halde tüm büyüklükler de konum ve zamanın fonksiyonları olacaktır. Bu büyüklükler, konum ve zaman fonksiyonlarının çarpımı olduğu varsayımı ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s,t) &= \mathbf{u}(s)e^{i\omega t} & \boldsymbol{\Omega}(s,t) &= \boldsymbol{\Omega}(s)e^{i\omega t} \\ \mathbf{F}(s,t) &= \mathbf{F}(s)e^{i\omega t} & \mathbf{M}(s,t) &= \mathbf{M}(s)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilebilirler. Burada, ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermekte olup, bu eşitlikler (3.32) denklemlerinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} p_n &= \mu \omega^2 u(s)e^{i\omega t} & m_n &= \frac{\mu}{A} I_n \Omega_n(s) \omega^2 e^{i\omega t} \\ p_b &= \mu \omega^2 v(s)e^{i\omega t} & m_b &= \frac{\mu}{A} I_b \Omega_b(s) \omega^2 e^{i\omega t} \\ p_t &= \mu \omega^2 w(s)e^{i\omega t} & m_t &= \frac{\mu}{A} I_p \Omega_t(s) \omega^2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu ifadeler (3.30) denklemlerinde yerine konulur ve zaman fonksiyonu sadeleştirilirse denklemler sadece konuma ve frekansa bağlı olarak elde edilirler.

Kesit asal doğrultularının, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıyla çakışması durumunda, (3.29) denklemleri geçerli olacak ve düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerinin genel denklemleri aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} + \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + \mu \omega^2 u &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + \mu \omega^2 v &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R_0} + \mu \omega^2 w &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + \mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + \mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_0} + \mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t &= 0 \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Burada, düzlem içindeki ve düzlem dışındaki titreşimlerle ilgili büyüklüklerin ayrı denklemlerde bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki eğilmelerini ifade eden denklemlerde yay uzunluğu yerine $ds = R_0(\phi)d\phi$ eşitliği konarak düzenlenir, **C** ve **D** rijitlik matrislerine ait değerler yerlerine konulursa çubuğun kendi düzlemindeki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R_o}{EA} F_t \\
\frac{du}{d\phi} &= -w + \frac{R_o F_n}{GA/k_n} + R_o \Omega_b \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R_o}{EI_b} M_b \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -R_o F_n - R_o \mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_b \\
\frac{dF_t}{d\phi} &= F_n - R_o \mu \omega^2 w \\
\frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t - R_o \mu \omega^2 u \quad (3.36)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ PROBLEMLERİNİN KESİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Eğri eksenli çubukların düzlem içi statik problemlerinin kesin çözümü, çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirmelerin ve kesit tesirlerinin, çubuk eksen eğrisi boyunca belirlenmesine imkan verecek şekilde, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilebilmektedir. Benzer şekilde, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önüne alınması durumunda, çubuk titreşimine ait diferansiyel denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bu çözüm yöntemleri literatürde mevcut olmakla birlikte, burada konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla tekrarlanması uygun olacaktır.

4.1. Çubukların Statik Denklemlerin Başlangıç Değerleri Yöntemi ile Çözümü

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerine ait (3.31) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{dy}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y} + \mathbf{f}(\phi) \quad (4.1)$$

Burada $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini, $\mathbf{f}(\phi)$ ise 6 elemanlı yayılı dış yüklere ait bileşke vektörünü ifade etmektedir. Denklemin çözümü,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_o)\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\phi, \phi_o) \int_{\phi_o}^{\phi} \mathbf{Y}^{-1}(\xi, \phi_o)\mathbf{f}(\xi)d\xi \quad (4.2)$$

olarak elde edilir.

$\phi_o = 0$ olarak belirlenen doğrultu, referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada $\mathbf{y}_o = \mathbf{y}(\phi_o)$, sınır şartlarından elde edilen başlangıç değerleri vektörü ve $\mathbf{Y}(\phi, \phi_o)$ referans koordinatına ait asal matristir. $\mathbf{f}(\phi)$ vektörünün özdeş olarak sıfır olması

yani, çubuk üzerine hiçbir yayılı kuvvet ya da momentin etkimemesi durumunda, çubuğun kendi düzlemindeki statik davranışını ifade eden denklemler, homojen diferansiyel denklemlerdir ve,

$$\frac{dy}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi) \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilirler. Tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği çubuğa ait denklemlerin çözümü,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_0)\mathbf{y}_0 \quad (4.4)$$

şeklinde verilir. $\mathbf{f}(\phi)$ vektörünün bulunmadığı yani çubuk üzerine hiçbir yayılı yük ya da momentin etkimediği durumda $\mathbf{Y}(\phi, \phi_0)$ asal matrisi,

$$\frac{d\mathbf{Y}(\phi, \phi_0)}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{Y}(\phi, \phi_0) \quad \mathbf{Y}(\phi_0, \phi_0) = \mathbf{I} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermektedir. Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (3.31)'de verilen denklem takımının homojen şekli,

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R(\phi)}{E A(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + \frac{R(\phi)}{G A(\phi) / k_n} F_n + R(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{E I_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R(\phi)F_n$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t \quad (4.6)$$

olarak elde edilir.

Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{dy}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi)$$

$$\frac{d}{d\phi} \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{R}{EA} & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & \frac{Rk_n}{GA} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R}{EI_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

yazılabilir.

Denklemler takımı içerisinde teğetsel kuvvet vektörünün türevini içeren beşinci denklem bir kez türetildiğinde elde edilen,

$$\frac{d^2 F_t}{d\phi^2} = \frac{dF_n}{d\phi} \quad (4.8)$$

Denklemleri altıncı denklemde yerine koyulursa,

$$\frac{d^2 F_t}{d\phi^2} + F_t = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$F_t = A \cos \phi + B \sin \phi \quad (4.10)$$

olarak ifade edilir. Buradan,

$$F_n = -A \sin \phi + B \cos \phi \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. F_{t0} ve F_{n0} , $\phi=0$ başlangıç noktasındaki tekil kuvvetler olmak üzere, (4.10) ve (4.11) eşitliklerinden,

$$A = F_{t0}$$

$$B = F_{n0} \quad (4.12)$$

bulunur. Böylece (4.8) denkleminin çözümü,

$$\begin{aligned} F_t &= F_{n0} \sin \phi + F_{t0} \cos \phi \\ F_n &= F_{n0} \cos \phi - F_{t0} \sin \phi \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak elde edilir. F_n 'i veren denklem (4.6) içerisinde M_b momentinin türevini içeren dördüncü denklemde yerine konulursa,

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R(\phi)F_{n0} \cos \phi + R(\phi)F_{t0} \sin \phi \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu denklemin bir kez integrali alındığında,

$$M_b = M_{b0} + \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi F_{t0} - \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi F_{n0} \quad (4.15)$$

ifadesine ulaşılır. M_b 'yi veren bu denklem Ω kesitin dönmesini içeren, (4.6)'nın üçüncü denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R}{EI_b} (M_{b0} + \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi F_{t0} - \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi F_{n0}) \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu denklemin bir kez integrali alındığında çubuğun binormal eksene göre dönmesini veren,

$$\begin{aligned} \Omega_b &= \Omega_{b0} + \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} d\psi M_{b0} + \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} \int_0^\psi R(\xi) \sin \xi d\xi d\psi F_{t0} \\ &\quad - \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} \int_0^\psi R(\xi) \cos \xi d\xi d\psi F_{n0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadesine ulaşılır. Çubuk ekseninin normal ve teğet eksenini doğrultusundaki yer değiştirmelerini veren (4.6)'nın birinci ve ikinci denklemlerinde,

$$f_1(\phi) = \frac{R(\phi)}{k_n} GAF_n + R(\phi)\Omega_b \quad f_2(\phi) = \frac{R(\phi)}{EA} F_t \quad (4.18)$$

olmak üzere,

$$\frac{du}{d\phi} = -w + f_1(\phi) \qquad \frac{dw}{d\phi} = u + f_2(\phi) \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem takımının homojen çözümü, $\Phi=\Phi_0$ başlangıç noktasında, w_0 ve u_0 başlangıç değerleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos \phi - w_0 \sin \phi \\ w &= u_0 \sin \phi + w_0 \cos \phi \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilir. Matris gösterimi ile,

$$\begin{aligned} y(\phi) &= \mathbf{Y}(\phi, \phi_0) \mathbf{y}_0 \\ \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

olarak ifade edilir. (4.1) denkleminde uygulanıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\phi} &= \mathbf{A}(\phi) \mathbf{y} + \mathbf{f}(\phi) \\ \frac{d}{d\phi} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{R(\phi)}{k_n} GAF_{n0} + R(\phi) \Omega_{b0} \\ \frac{R(\phi)}{EA} F_{t0} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

denklemini elde edilir. (4.2) denkleminde,

$$\mathbf{Y}^{-1}(\phi, \phi_0) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

olarak yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \int_{\phi_0}^{\phi} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{R(\phi)}{k_n} GAF_{n0} + R(\phi)\Omega_{b0} \\ \frac{R(\phi)}{EA} F_{t0} \end{Bmatrix} d\xi
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden normal ve teğetsel yer değiştirmeler,

$$\begin{aligned}
u &= -\sin \phi w_o + \cos \phi u_o + \left[\sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \sin \psi d\psi + \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \cos \psi d\psi \right] \Omega_{bo} + \\
&\left[\sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \sin \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi + \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \cos \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi \right] M_{bo} \\
&+ \left\{ -\sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2 \psi}{GA(\psi)} - \sin \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\
&+ \left. \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \cos \psi \left[\frac{\sin \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin \psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\} F_{to} \\
&+ \left\{ \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\sin^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2 \psi}{GA(\psi)} - \cos \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\
&- \left. \sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \sin \psi \left[\frac{\cos \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos \psi}{GA(\psi)} + \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\} F_{no}
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
w &= \cos \phi w_o + \sin \phi u_o + \left[\sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \cos \psi d\psi - \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \sin \psi d\psi \right] \Omega_{bo} \\
&+ \left[\sin \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \cos \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi - \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \sin \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi \right] M_{bo} \\
&+ \left\{ \cos \phi \int_0^{\phi} R(\psi) \left[\frac{\cos^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2 \psi}{GA(\psi)} - \sin \psi \int_0^{\psi} \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^{\xi} R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi \left[\frac{\sin \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \Big\} F_{t0} \\
& + \left\{ \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi \left[\frac{\cos \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\
& \left. + \sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \left[\frac{\sin^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2 \psi}{GA(\psi)} - \cos \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\} F_{n0}
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

olarak bulunur.

$u_0, w_0, \Omega_{b0}, F_{n0}, F_{t0}, M_{b0}$ büyüklükleri $\phi = \phi_0$ başlangıç noktasına ait bilinen değerlerdir.

Elde edilen, (4.14), (4.16), (4.18), (4.25), (4.26) eşitlikleri kısaltmalar yardımıyla ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
w &= Y_{11}w_0 + Y_{12}u_0 + Y_{13}\Omega_{b0} + Y_{14}M_{b0} + Y_{15}F_{t0} + Y_{16}F_{n0} \\
u &= Y_{21}w_0 + Y_{22}u_0 + Y_{23}\Omega_{b0} + Y_{24}M_{b0} + Y_{25}F_{t0} + Y_{26}F_{n0} \\
\Omega_b &= Y_{33}\Omega_{b0} + Y_{34}M_{b0} + Y_{35}F_{t0} + Y_{36}F_{n0} \\
M_b &= Y_{44}M_{b0} + Y_{45}F_{t0} + Y_{46}F_{n0} \\
F_t &= Y_{55}F_{t0} + Y_{56}F_{n0} \\
F_n &= Y_{65}F_{t0} + Y_{66}F_{n0}
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

Böylece, eğri eksenli çubuk için kesit ve eksen eğrisinden bağımsız bir asal matris elde edilmiş olur.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ 0 & 0 & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55} & Y_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix}
\tag{4.28}$$

Elde edilen çözüm, çubuk ekseninin eğrisi, kesitin değişim fonksiyonu, mesnetleme şartları belli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözümdür. Bir başka deyişle, birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımı olan genel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiş olmaktadır. Çözümü ifade eden asal matrisin elemanları aşağıda verilmektedir.

$$Y_{11} = \cos \phi$$

$$Y_{12} = \sin \phi$$

$$Y_{13} = \left[\sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi - \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi \right]$$

$$Y_{14} = \left[\sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi - \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi \right]$$

$$Y_{15} = \left\{ \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \left[\frac{\cos^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2 \psi}{GA(\psi)} - \sin \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\ \left. + \sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi \left[\frac{\sin \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\}$$

$$Y_{16} = \left\{ \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi \left[\frac{\cos \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\ \left. + \sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \left[\frac{\sin^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2 \psi}{GA(\psi)} - \cos \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\}$$

$$Y_{21} = -\sin \phi$$

$$Y_{22} = \cos \phi$$

$$Y_{23} = \left[\sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi + \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi \right]$$

$$Y_{24} = \left[\sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi + \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} d\xi d\psi \right]$$

$$Y_{25} = \left\{ -\sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \left[\frac{\cos^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \sin^2 \psi}{GA(\psi)} - \sin \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\ \left. + \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi \left[\frac{\sin \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \sin \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \sin \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\}$$

$$Y_{26} = \left\{ \cos \phi \int_0^\phi R(\psi) \left[\frac{\sin^2 \psi}{EA(\psi)} + \frac{k_n \cos^2 \psi}{GA(\psi)} - \cos \psi \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right. \\ \left. - \sin \phi \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi \left[\frac{\cos \psi}{EA(\psi)} - \frac{k_n \cos \psi}{GA(\psi)} + \int_0^\psi \frac{R(\xi)}{EI_b(\xi)} \int_0^\xi R(\theta) \cos \theta d\theta d\xi \right] d\psi \right\}$$

$$Y_{33} = 1$$

$$Y_{34} = \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} d\psi$$

$$Y_{35} = \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} \int_0^\psi R(\xi) \sin \xi d\xi d\psi$$

$$Y_{36} = - \int_0^\phi \frac{R(\psi)}{EI_b(\psi)} \int_0^\psi R(\xi) \cos \xi d\xi d\psi$$

$$Y_{44} = 1$$

$$Y_{45} = \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi$$

$$Y_{46} = - \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi$$

$$Y_{55} = \cos \phi$$

$$Y_{56} = \sin \phi$$

$$Y_{65} = -\sin \phi$$

$$Y_{66} = \cos \phi$$

(4.29)

4.1.1 Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubuğun Asal Matrisi

Esken eğrisi çember olan ve kesiti eksen boyunca değişmeyen, sabit kesitli, çubuğun asal matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$Y_{11} = \cos \phi ; \quad Y_{12} = \sin \phi ; \quad Y_{13} = R_o (1 - \cos \phi) ; \quad Y_{14} = \frac{R_o^2}{EI_{bo}} (\phi - \sin \phi) ;$$

$$Y_{15} = \frac{R_o}{2A_o} \left[\sin \phi \left(\frac{1}{E} - \frac{k_n}{G} \right) + \phi \cos \phi \left(\frac{1}{E} + \frac{k_n}{G} \right) \right] + \frac{R_o^3}{2EI_{bo}} \phi (\cos \phi + 2) - \frac{3R_o^3}{2EI_{bo}} \sin \phi ;$$

$$Y_{16} = \frac{R_o}{2A_o} \varphi \sin \varphi \left(\frac{1}{E} + \frac{k_n}{G} \right) + \frac{R_o^3}{2EI_{bo}} (-2 + 2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi);$$

$$Y_{21} = -\sin \phi; \quad Y_{22} = \cos \phi; \quad Y_{23} = R_o \sin \phi; \quad Y_{24} = \frac{R_o^2}{EI_{bo}} (1 - \cos \phi);$$

$$Y_{25} = -\frac{R_o}{2A_o} \varphi \sin \varphi \left(\frac{1}{E} + \frac{k_n}{G} \right) + \frac{R_o^3}{2EI_{bo}} (2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)$$

$$Y_{26} = \frac{R_o}{2A_o} \left[\varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{E} + \frac{k_n}{G} \right) - \sin \varphi \left(\frac{1}{E} + \frac{k_n}{G} \right) \right] - \frac{R_o^3}{2EI_{bo}} [\varphi \cos \varphi - \sin \varphi];$$

$$Y_{33} = 1; \quad Y_{34} = \frac{R_o \phi}{EI_{bo}}; \quad Y_{35} = \frac{R_o^2}{EI_{bo}} (\phi - \sin \phi); \quad Y_{36} = \frac{R_o^2}{EI_{bo}} [-1 + \cos \phi];$$

$$Y_{44} = 1; \quad Y_{45} = R_o (1 - \cos \phi); \quad Y_{46} = -R_o \sin \phi;$$

$$Y_{55} = \cos \phi; \quad Y_{56} = \sin \phi; \quad Y_{65} = -\sin \phi; \quad Y_{66} = \cos \phi \quad (4.30)$$

4.2. Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Düzlem İçi Serbest Titreşimleri

Eğri eksenli kirişin kendi düzlemindeki titreşimlerine ait verilen (3.36) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{dy}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi) \mathbf{y}(\phi)$$

$$\mathbf{y}(\phi) = \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R\mu(I_b/A)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini olarak tanımlanır [31].

Yukarıda elde edilen $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi, aksenal uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önüne alınması durumunda kullanılan matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapıp, doğal frekansları elde edilebilir.

Diferansiyel denklemin kesin çözümü sadece $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubukları ifade eder. Böylece (4.6) denkleminin çözümü ,

$$\mathbf{y}(\phi) = e^{\mathbf{A}\phi} \mathbf{y}(\phi_0) \quad (4.32)$$

şeklinde verilir. $\phi_0 = 0$ olarak belirlenen düşey doğrultu, referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada $\mathbf{y}(\phi_0)$, başlangıç değerleri vektörüdür. $e^{\mathbf{A}\phi}$ teriminin analitik ifadesi Tüfekçi ve Arpacı [31] tarafından verilmektedir. Başlangıç değerleri vektörünün 6 bilinmeyen, çubuğun iki ucu için yazılan sınır şartları yardımıyla elde edilir.

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\text{Sabit mesnet:} \quad w(\phi) = 0, \quad u(\phi) = 0, \quad M_b(\phi) = 0$$

$$\text{Ankastre mesnet:} \quad w(\phi) = 0, \quad u(\phi) = 0, \quad \Omega_b(\phi) = 0$$

$$\text{Serbest uç:} \quad M_b(\phi) = 0, \quad F_t(\phi) = 0, \quad F_n(\phi) = 0$$

Sınır şartlarından elde edilen 6 denklem, homojen denklem takımı oluştururlar. Sistemin sıfırdan farklı bir çözümünün olması, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur.

5. SÜREKLİ DEĞİŞKEN KESİTE SAHİP ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, sürekli değişken kesite ve eğriliğe sahip çubukların düzlem içi titreşimleri, kesin çözüm yöntemi ile incelenmiştir. Çubuk, sabit kesit alanlarına sahip bölgelere ayrılmış ve her bölge, sabit kesit ve eğrilik yarıçaplı çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini ifade eden denklemler ve çözüm yolu kullanılarak incelenmiştir. Değişken eğrilik yarıçapına ve kesite sahip olan çubuklarda, eğrilik yarıçapları ve kesit alanları, her bir bölgenin sahip olduğu ortalama değerler alınarak belirlenmiş ve başlangıç değerleri yöntemi ile sonuca ulaşılmıştır. Denklemler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içermektedir.

5.1. Analiz

Eğri eksenli çubuk titreşimlerinin genel denklemleri (3.36), altı adet lineer diferansiyel denklemden oluşan bir lineer denklem takımıdır. Denklemler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içermektedir. Dördüncü bölümde, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, çubuk ekseninin eğrisi, kesitin eksen boyunca değişimi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilmiştir. Elde edilen birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade etmektedir.

Aynı işlemler, sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukta, çubuğu sabit kesit alanına sahip elemanlara ayırarak uygulanabilir. Her eleman, sabit kesitli ve çember eksenli bir çubuk olarak düşünülür ve her bölge için kesin çözüm, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilir. Elemanların sınır bölgelerindeki geçiş şartları, (kinetik ve kinematik şartlar) sağlanır.

Çubuk teorisinin w , u , Ω_b , M_b , F_t , F_n , olarak belirlenen altı bilinmeyeni, eğri eksenli düzlemsel çubuğun kendi düzlemindeki titreşimini ifade eden denklemler (3.36) eşitliğinde belirlenmiştir.

Eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerine ait denklemler, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. (4.30) eşitliğinden faydalananarak, “i” indisi çubuğun bölündüğü sabit kesit alanına sahip eleman sayısını göstermek üzere denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{d\phi_i} = \mathbf{A} \mathbf{y}_i(\phi_i) \quad (5.1)$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ifade etmek üzere, her eleman için,

$$\mathbf{y}_i(\phi) = \begin{bmatrix} w_i \\ u_i \\ \Omega_{b_i} \\ M_{b_i} \\ F_{t_i} \\ F_{n_i} \end{bmatrix} \quad \text{ve,}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R_i / EA_i & 0 \\ -1 & 0 & R_i & 0 & 0 & R_i k_n / GA_i \\ 0 & 0 & 0 & R_i / EI_{b_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_i \mu_i (I_{b_i} / A_i) \omega^2 & 0 & 0 & -R_i \\ -R_i \mu_i \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R_i \mu_i \omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Yukarıda elde edilen $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisi, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önüne alınması durumunda kullanılan matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapıp, doğal frekanslar elde edilebilir.

$\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü;

$$\mathbf{y}_i(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_i) \mathbf{y}_{i0}$$

$$\mathbf{y}_i(\phi_i) = e^{\mathbf{A}_i \phi_i} \mathbf{y}_i(\phi_{0i}) \quad (5.3)$$

olarak elde edilir. $\phi_i=0$ olarak belirlenen düşey doğrultu, sabit kesitli her kiriş elemanı için referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada, $y_i(\phi_{i0})$, $\phi_i=\phi_{i0}$ koordinatındaki başlangıç değerleri vektörüdür. $e^{A_i\phi_i}$ analitik olarak ifade edilebilmektedir [31]. Başlangıç değerleri vektörünün 6 bilinmeyen, çubuğun her iki ucu için yazılan sınır şartları ve sabit kesitli her kiriş elemanının iki ucu için yazılan kinetik ve kinematik geçiş şartları yardımıyla elde edilir.

Yukarıda ifade edilen çözüm yöntemi, sabit kesitli her kiriş elemanına uygulanmaktadır. Eleman için kiriş açısı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$i. \text{ kiriş eleman için; } \phi_i \leq \phi \leq \phi_{i+1}$$

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç (A ucu) için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\text{Sabit mesnet: } w_A = 0, \quad u_A = 0, \quad M_{bA} = 0$$

$$\text{Ankastre mesnet: } w_A = 0, \quad u_A = 0, \quad \Omega_{bA} = 0$$

$$\text{Serbest uç: } M_{bA} = 0, \quad F_{tA} = 0, \quad F_{nA} = 0$$

İki uç nokta için sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik mevcuttur.

Kiriş elemanların sınır bölgelerinde süreklilik ve denge koşullarını sağlayan ifadeler aşağıda verilmektedir. Bu ifadeye göre komşu kiriş elemanların sınır noktalarındaki büyüklükler birbirlerine eşit olmak zorundadır.

$$\begin{aligned} y_i(\phi_{i+1}) &= y_{i+1}(\phi_{i+1}) \\ e^{A_i\phi_{i+1}} y_i(\phi_{(i+1)0}) &= e^{A_{i+1}\phi_{i+1}} y_{i+1}(\phi_{(i+1)0}) \\ w_i(\phi_{i+1}) &= w_{i+1}(\phi_{i+1}) & M_{bi}(\phi_{i+1}) &= M_{b(i+1)}(\phi_{i+1}) \\ u_i(\phi_{i+1}) &= u_{i+1}(\phi_{i+1}) & F_{ti}(\phi_{i+1}) &= F_{t(i+1)}(\phi_{i+1}) \\ \Omega_{bi}(\phi_{i+1}) &= \Omega_{b(i+1)}(\phi_{i+1}) & F_{ni}(\phi_{i+1}) &= F_{n(i+1)}(\phi_{i+1}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Komşu elemanlara ait asal matrisler arasında aşağıdaki ilişki bulunmaktadır.

$$Y(\phi_{i+1}, \phi_i) = Y(\phi_{i+1}, 0) Y^{-1}(\phi_i, 0)$$

$\mathbf{Y}^{-1}(\phi, 0)$ değeri hesaplanabilir. Eğri eksenli bir çubuk, n adet elemana ayrılıp, (5.3) denklemi her eleman için uygulanırsa, her elemana ait n adet başlangıç değeri elde edilebilir.

Böylece, sınır ve süreklilik şartlarından gelen $6 \times n$ adet eşitlik, matris formunda ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X1} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \dots & \mathbf{01} & \mathbf{01} \\ e^{A_1 \phi_1} & -e^{A_2 \phi_1} & \mathbf{02} & \dots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \mathbf{02} & e^{A_2 \phi_2} & -e^{A_3 \phi_2} & \dots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{02} & \mathbf{02} & \mathbf{02} & \dots & e^{A_{n-1} \phi_{n-1}} & -e^{A_n \phi_{n-1}} \\ \mathbf{01} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \dots & \mathbf{01} & \mathbf{Xn} \end{bmatrix}_{6n \times 6n} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \\ \mathbf{y}_{03} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{0(n-1)} \\ \mathbf{y}_{0n} \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]_{6n \times 1} \quad (5.5)$$

Burada $\mathbf{X1}$ ve $\mathbf{Xn}$, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ve B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; $\mathbf{01}$, 3×6 boyutunda ve $\mathbf{02}$, 6×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{0i} = \mathbf{y}_i(\phi_{0i})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen $6 \times n$ adet eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduklarından, $\mathbf{y}_{0i}$ 'nin sıfırdan farklı çözümü ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω doğal frekansına bağlı bir ifadedir. Böylece, elde edilen denklemden doğal frekanslar bulunur. Aynı çözüm yolu, diğer kabuller için de uygulanabilir.

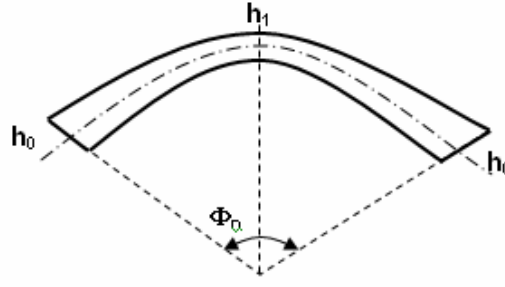
5.2. Problemin Tanımı

Sürekli değişken kesite ve eğriliğe sahip çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, çember eksenli sabit kesitli çubukların serbest titreşimlerini ifade eden denklemlerin kesin çözümü yardımıyla incelenmiştir. Sürekli değişken kesite sahip çubuk için, yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri olan bu yöntemde, sabit kesit alanına sahip bölgelerin sayısı arttıkça kesin sonuca olan yakınsama da artmaktadır.

Yukarıda verilen çözüm yöntemi uygulanarak, **Şekil 5.1**'de gösterilen lineer değişken kesitli simetrik çubuk, referans geometri olarak ele alınmış ve bu çubuğa ait boyutsuz frekans,

$$c = \omega R^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI_b}} \quad (5.6)$$

değerlerinin eleman sayısı ile değişimi incelenmiştir.

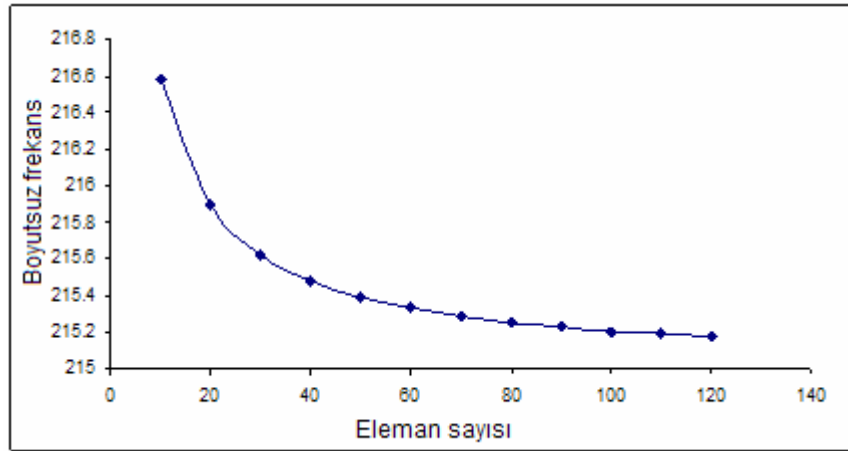


Şekil 5.1 : Lineer değişken kesitli simetrik çubuk.

Şekil 5.1'de verilen çubukta, tepe noktası referans alınarak, kesit yüksekliğinin değişimi,

$$\begin{aligned} h(\phi) &= h_o(1 - 2\eta\phi / \phi_n) & -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0, \\ h(\phi) &= h_o(1 + 2\eta\phi / \phi_n) & 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklindedir. Kiriş açısı $\phi_n=30^\circ$ ve $\eta=0.1$ olan geometriye ait, ankastre-ankastre sınır şartında, farklı eleman sayılarında, çubuğun ilk doğal frekans değerleri elde edilmiştir. İncelenen geometriye ait **Şekil 5.2**'de verilen grafikte, yatay eksen, sabit kesitli kiriş elemanların sayısını, dikey eksen frekans değerini göstermektedir.

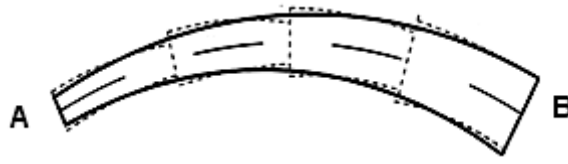


Şekil 5.2 : Ankastre-ankastre simetrik çubuğun birinci doğal frekans değerinin eleman sayısı ile değişimi.

Grafik incelendiğinde, eğrinin belli bir kiriş elemanı sayısında yakınsamaya başladığı ve doğal frekans değerinin eleman sayısının artmasıyla önemli oranda değişmediği görülmektedir. Eleman sayısının doğal frekansa etkisinin azaldığı bu değer 70 olarak alınabilir. Hesaplarda 70 adet kiriş elemanı kullanılmasıyla yeterli doğrulukta

sonuç elde edilmekte, 100 adet kiriş elemanı kullanılmasıyla çok daha hassas sonuçlara ulaşılabilmektedir. Diğer geometriler için de benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

Çubuklar, **Şekil 5.3**'de gösterildiği gibi sabit kesitli kiriş elemanlara bölünmüştür. Her kiriş elemana ait kesit alanı, o elemanın sahip olduğu en büyük ve en küçük kesit alanlarının ortalaması alınarak hesaplara dahil edilmiştir. Bu yöntemle doğal frekansları hesaplanan çubuklar, ankastre-ankastre (A-A), sabit-sabit (S-S), sabit-ankastre (S-A), ankastre-serbest (A-Sr) ve serbest-serbest (Sr-Sr) olarak beş farklı sınır şartı göz önünde bulundurularak incelenmişlerdir.



Şekil 5.3 : Sabit kesitli kiriş elemanı ile modellenen asimetrik çubuk.

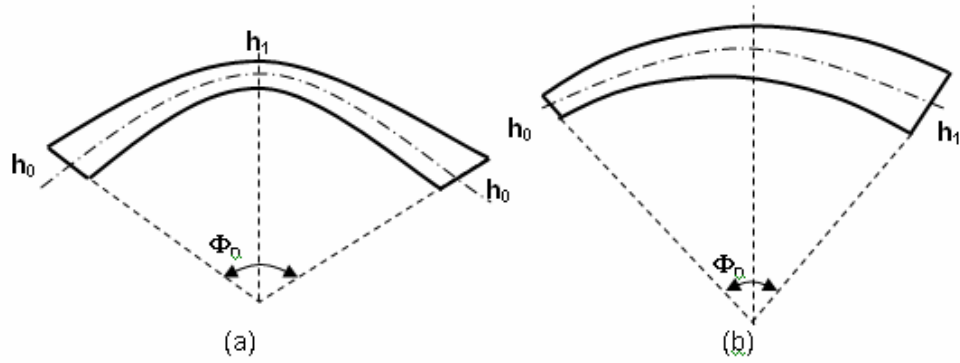
Frekans değerlerini içeren tablolarda, kolonları ifade eden rakamlar, eksenel deformasyon, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ya da dahil eden aşağıdaki durumları gösterir.

- (1) Tüm etkiler: Bu kabulde Euler-Bernoulli çubuk teorisinde ihmal edilen bütün etkiler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.
- (2) Etkiler ihmal: Euler-Bernoulli çubuk teorisine uygun olarak çubuğa etkileyen eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek frekans değerleri hesaplanır.
- (3) Eksenel uzama: Sadece eksenel uzama etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.
- (4) Kayma deformasyonu: Sadece kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.
- (5) Dönme eylemsizliği: Sadece dönme eylemsizliği etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

5.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Simetrik ve asimetrik olarak iki farklı geometriye sahip sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar (Şekil 5.4) incelenmektedir. Kesit alanı dikdörtgen olup,

kesit genişliği eğri boyunca sabittir. Kesit yüksekliği aşağıda verilen ifadelere bağlı olarak değişir.



Şekil 5.4 : Lineer değişken kesitli çubuklar (a) simetrik, (b) asimetrik.

Şekil (a) için;

$$\begin{aligned} h(\phi) &= h_o(1 - 2\eta\phi / \phi_n) & -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0, \\ h(\phi) &= h_o(1 + 2\eta\phi / \phi_n) & 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Şekil (b) için;

$$h(\phi) = h_o(1 + 2\eta\phi / \phi_n) \quad -\phi_n / 2 \leq \phi \leq \phi_n / 2 \quad (5.9)$$

Değişken kesitli eğri eksenli, simetrik ve asimetrik çubuklar için literatürde yapılan benzer çalışmalardan örneklere benzer olarak, çember, spiral ve parabol eksenli çubuklar üzerinde çalışılmış, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalarda çubuklar 70 elemana bölünerek incelenmiştir. Analiz $\eta=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ değerleri için, $\Phi_n = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \text{ve } 40^\circ$ olmak üzere dört farklı giriş açısında ve beş farklı sınır koşulunda gerçekleştirilmiştir.

Yapılan çalışmalarda, dikdörtgen kesitli çubuklar göz önüne alınmaktadır. **Şekil 5.4(a)**'da gösterilen sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli simetrik çubukta, h_0 ve h_1 sırasıyla çubuğa ait en büyük ve en küçük yükseklik değerlerini gösterirken, **Şekil 5.4(b)**'de gösterilen sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli asimetrik çubukta, h_0 ve h_1 çubuğun iki uç noktasına ait, en küçük ve en büyük yükseklik değerlerini vermektedir. Kesit genişliği b sabittir, eğri boyunca değişmez. i 'inci elemana ait olan kesit alanı ve binormal eksene göre alan eylemsizlik momentleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_i = bh_i \quad I_{b_i} = \frac{bh_i^3}{12} \quad (5.10)$$

5.3.1. Çember Eksenli Değişken Kesitli Simetrik Çubuklar

Şekil 5.4(a)'daki çubuk göz önüne alınarak ankastre-ankastre (A-A), sabit-sabit (S-S), sabit-ankastre (S-A), ankastre-serbest (A-Sr) ve serbest-serbest (Sr-Sr) sınır şartlarında doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Sonuçlar, Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de verilmektedir. Kolonlar, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ya da dahil eden durumları gösterir.

Literatürde bulunan çalışmaların tamamında eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir. Ankastre-ankastre ve sabit-sabit sınır koşulları göz önüne alınmış, birinci doğal frekanslar hesaplanmıştır. Çalışmalarda, boyutsuz frekans değerleri farklı formülasyonlarla ifade edilmektedir. Benzer problemlerin sonuçlarını karşılaştırmalı olarak veren aşağıdaki çizelgelerde, boyutsuz frekans formülasyonu, referans çalışmadakine uygun şekilde hesaplara dahil edilmiş ve çizelge ismi içerisinde verilmiştir. Kolon (1) eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren, kolon (2) ise tüm bu etkileri ihmal eden çözümün sonuçlarını vermektedir. Hesaplarda 70 kiriş elemanı kullanılmıştır.

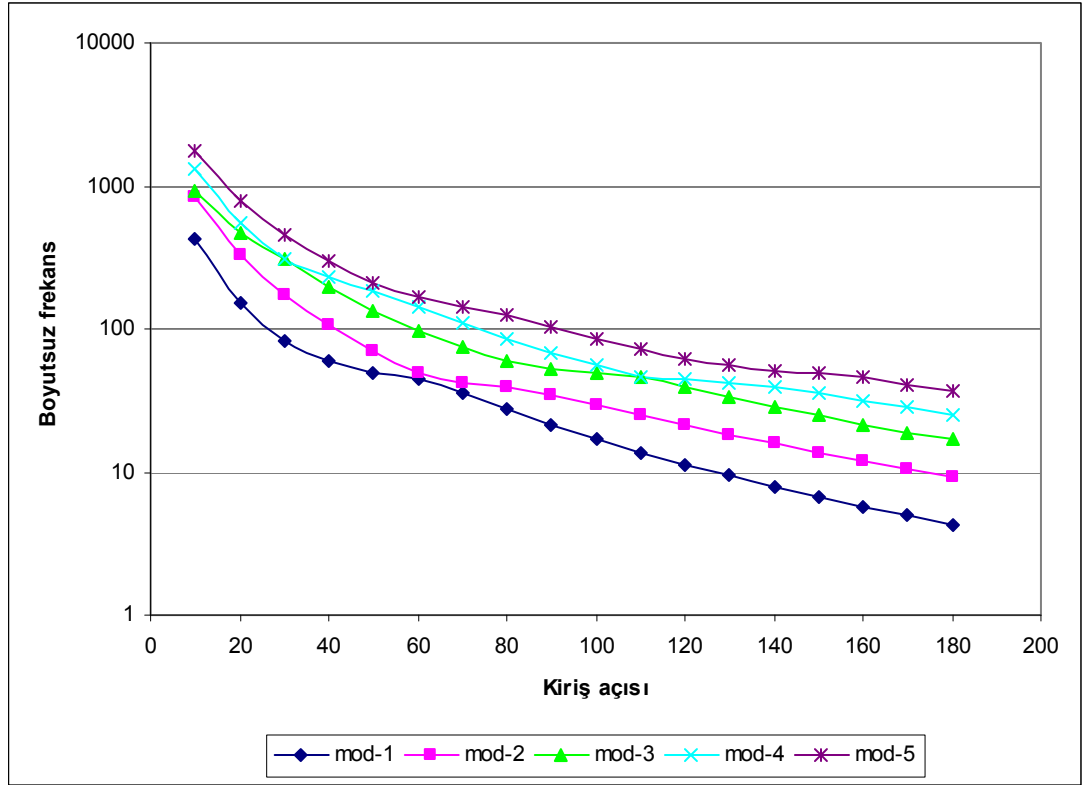
Şekil 5.5, değişken kesitli simetrik çubuğa ait, tüm etkilerin dahil edilmesi durumunda elde edilen frekans değerlerinin kiriş açısı ile değişimini göstermektedir. Sınır şartı, ankastre-ankastre olarak seçilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans değerleri hesaplanmıştır. Grafikten de açıkça görüleceği üzere, bazı açı değerlerinde, iki ayrı moda ait frekanslar birbirlerine çok yakın değerler almaktadır. Birinci ve ikinci moda ait eğriler, 60° kiriş açıklığı değerinde birbirlerine yaklaşmaktadırlar. Aynı durum, ikinci ve üçüncü mod eğrilerinde, 10°'de ; üçüncü ve dördüncü mod eğrilerinde, 30° ve 110°'de; dördüncü ve beşinci mod eğrilerinde, 50°-60°'de görülmektedir. Birbirine yakın frekansların, hemen öncesindeki açının ilk mod şekli ve hemen sonrasındaki açının sonraki mod şekliyle aynıdır. Farklı modlarda yakın frekansların elde edildiği bu durum “mod geçişi” olarak adlandırılmaktadır [36]. Yüksekliğin, kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubuklarda belirgin olarak ortaya çıkan bu durum, [35]'de detaylı olarak ele alınmaktadır.

Çizelge 5.1 : Sürekli değişken kesitli simetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.1$ ve $\eta = 0.2$ için.

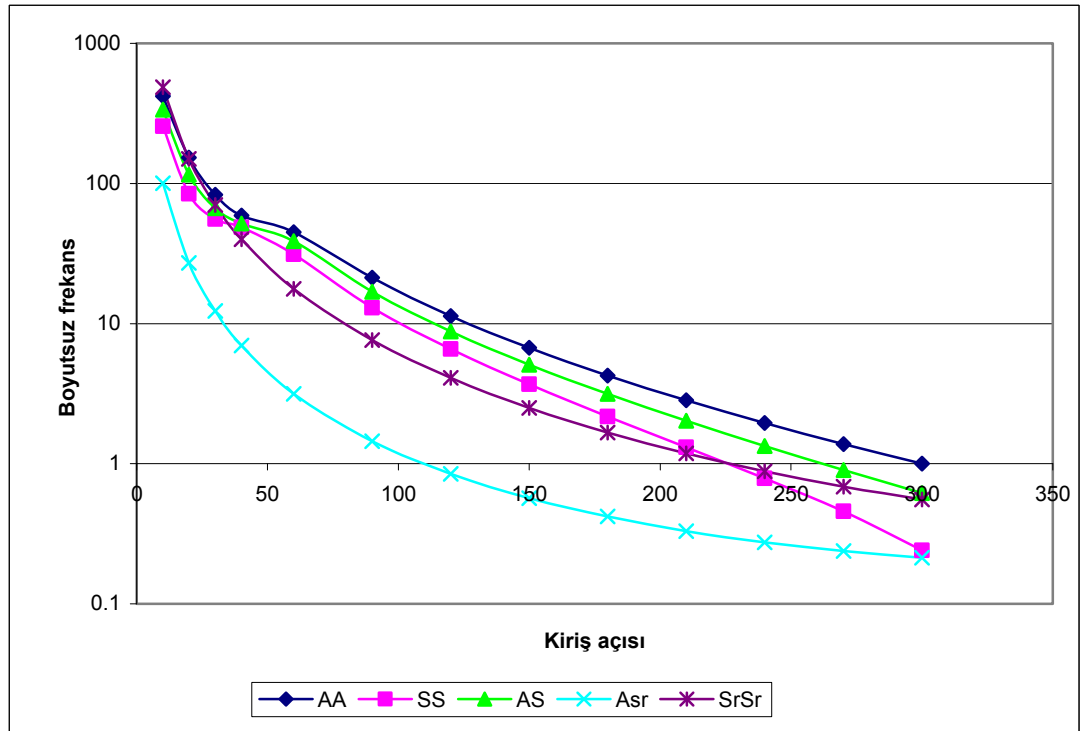
	Açı	$\eta=0.1$					$\eta=0.2$				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
AA	10	431.10	2237.55	887.33	1693.54	812.81	443.09	2493.40	903.37	1793.89	897.51
	20	162.94	557.23	361.30	512.20	206.64	172.83	620.95	376.88	560.07	229.43
	30	89.21	246.08	193.64	236.77	98.70	95.22	274.22	206.31	261.45	108.10
	40	62.26	137.19	118.23	134.27	64.93	65.67	152.88	127.75	148.84	69.45
SS	10	285.57	1431.60	828.99	1119.47	360.79	302.77	1595.96	857.03	1189.34	400.37
	20	94.00	355.84	290.98	330.82	99.99	100.71	396.69	312.01	362.50	108.92
	30	58.66	156.64	141.81	151.54	59.84	61.13	174.62	154.71	167.55	62.76
	40	49.51	86.94	82.01	85.36	49.93	50.42	96.92	90.22	94.71	50.99
SA	10	363.85	1822.21	858.94	1403.78	576.24	385.23	2051.10	880.47	1511.44	658.99
	20	128.95	453.48	327.33	419.40	149.59	140.77	510.48	346.34	464.50	169.56
	30	72.58	200.02	168.24	193.02	76.56	78.49	225.20	182.10	215.63	84.35
	40	54.49	111.33	100.24	109.14	55.56	57.43	125.37	109.98	122.36	59.03
ASr	10	100.37	112.80	102.96	108.79	112.79	97.14	110.21	100.25	105.37	110.21
	20	27.34	28.25	27.58	27.99	28.25	26.64	27.61	26.92	27.29	27.61
	30	12.41	12.60	12.46	12.54	12.60	12.11	12.31	12.17	12.25	12.31
	40	7.06	7.12	7.07	7.10	7.12	6.89	6.96	6.91	6.93	6.96
SrSr	10	548.00	813.59	638.04	605.58	809.67	577.59	912.59	682.58	643.79	887.95
	20	175.60	202.72	188.59	185.15	202.48	191.23	227.40	207.99	203.36	227.05
	30	83.46	89.61	86.67	85.94	89.52	92.12	100.53	96.43	95.42	100.40
	40	47.99	50.03	49.09	48.87	49.99	53.30	56.13	54.81	54.50	56.07

Çizelge 5.2 : Sürekli değişken kesitli simetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu l EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.3$ ve $\eta = 0.4$ için.

	□	$\eta=0.3$					□	$\eta=0.4$				
		Açı	(1)	(2)	(3)	(4)		(5)	(1)	(2)	(3)	(4)
AA		10	453.95	2805.79	918.38	1894.72	895.82	463.45	3200.84	932.40	1993.75	892.40
		20	183.15	698.75	392.09	614.51	257.44	193.83	797.13	406.92	676.94	293.06
		30	102.01	308.58	219.48	290.56	119.81	109.69	352.03	233.07	325.65	134.88
		40	69.74	172.04	138.14	166.29	75.20	74.64	196.27	149.46	187.76	82.77
SS		10	318.65	1797.20	883.32	1258.21	447.85	330.99	2052.43	907.41	1322.96	506.76
		20	108.24	446.70	334.49	398.58	119.81	116.65	510.12	358.41	439.87	133.53
		30	64.09	196.63	169.36	186.50	66.44	67.69	224.53	186.13	209.37	71.25
		40	51.53	109.13	99.80	105.94	52.33	52.93	124.61	111.19	119.78	54.12
SA		10	405.78	2332.39	900.51	1624.59	760.79	425.11	2690.59	919.00	1741.85	877.24
		20	153.71	580.54	365.39	516.79	194.41	167.73	669.75	384.45	578.21	226.42
		30	85.49	256.14	196.90	242.64	94.28	93.81	295.54	212.66	275.69	107.37
		40	61.09	142.62	120.88	138.34	63.58	65.73	164.59	133.09	158.23	69.77
ASr		10	93.76	107.70	97.56	101.70	107.69	90.03	105.20	94.85	97.53	105.19
		20	25.92	26.98	26.28	26.58	26.98	25.18	26.35	25.63	25.83	26.35
		30	11.81	12.03	11.89	11.95	12.03	11.51	11.75	11.61	11.65	11.75
		40	6.73	6.80	6.75	6.77	6.80	6.56	6.64	6.60	6.61	6.64
SrSr		10	606.15	1038.80	731.05	686.15	909.66	628.52	1205.91	783.35	735.22	921.97
		20	209.33	258.87	231.32	224.96	258.32	230.36	300.55	259.77	250.95	299.60
		30	102.57	114.45	108.54	107.08	114.27	115.42	132.91	123.93	121.74	132.61
		40	59.86	63.92	62.00	61.54	63.83	68.14	74.25	71.30	70.58	74.10



Şekil 5.5 : Değişken kesitli ankastre - ankastre simetrik çubuğun ilk 5 moduna ait boyutsuz frekans değerleri.



Şekil 5.6 : Değişken kesitli simetrik çubuğun farklı sınır şartlarında ilk moduna ait frekans değerleri.

Şekil 5.6, değişken kesitli simetrik çubukta, ilk mod frekansı için ankastre-ankastre, sabit-sabit, sabit-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında elde edilen frekans değerlerini karşılaştırmaktadır. Her sınır şartı için, küçük açılarda yüksek olan frekans değerlerinin açı değeri arttıkça düştüğü görülmektedir. 10° , 20° ve 30° 'lerde, ankastre-ankastre ve serbest-serbest sınır şartlarında diğer sınır şartlarına göre daha yüksek frekans değerleri elde edilir. 40° civarında, ankastre-serbest dışındaki sınır şartlarına ait değerler birbirlerine çok yaklaşımakta, 40° itibarıyla sabit-sabit ve ankastre-sabit'e ait frekanslar serbest-serbest frekanslarından yüksek değerlere ulaşmaktadır. 230° derece civarında, serbest-serbest frekansları tekrar sabit-sabit frekanslarından yüksek değerlere sahip olmaktadır. 300° kiriş açıklığında ise, sabit-sabit ile ankastre-serbest ve ankastre-sabit ile serbest-serbest sınır şartlarında birbirlerine çok yakın frekanslar elde edilmiştir.

Auciello ve Rosa [26], değişken kesitli çember eksenli simetrik çubukların titreşimlerini Rayleigh-Ritz (RR) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemleri yardımıyla incelemiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden çalışmada, geometri, (5.7) denkleminde verilmektedir. Çizelge 5.3'te ankastre-ankastre ve sabit-sabit sınır koşullarına sahip değişken kesitli simetrik çubuk için, iki yöntemle de ait sonuçlara yer verilmektedir. Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri (2) ile literatürdeki sonuçlar oldukça yakındır. $\eta=0.1$ için elde edilen değerler [26] sonuçları ile uyumlu iken ve $\eta=0.2$ için mevcut çalışma ve literatür sonuçları arasındaki fark artmaktadır. Burada sunulan çözüm yöntemi, kesitin değişim oranı küçük olan değişken kesitli çubuklar için gerçek sonuçlara daha yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 5.3 : Ref. [26]'de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$				$\eta=0.2$			
		Bu çalışma		[26]		Bu çalışma		[26]	
		(1)	(2)	R-R	CDM	(1)	(2)	R-R	CDM
AA	10	431.10	2237.55	2034	2138.3	443.09	2493.40	2069.8	2263.8
	20	162.94	557.23	506.54	532.59	172.83	620.95	515.48	563.93
	30	89.21	246.08	223.7	235.26	95.22	274.22	227.64	249.15
	40	62.26	137.19	124.73	131.2	65.67	152.88	126.94	139
SS	10	285.57	1431.60	1299	1354.4	302.77	1595.96	1315.1	1416.1
	20	94.00	355.84	322.86	336.7	100.71	396.69	326.88	352.08
	30	58.66	156.64	142.15	148.25	61.13	174.62	143.9	155.05
	40	49.51	86.94	78.89	82.31	50.42	96.92	79.875	86.105

Liu ,Wu [42] ve Karami, Malekzadeh [43], simetrik geometriye sahip çubukların ilk doğal frekans değerlerini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur yöntemini (generalized quadrature method-DQM) kullanılarak elde etmiştir. Çalışmada, aksenal uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmektedir. $\eta=0.1$ ve 0.2 için elde edilen frekans değerleri, Çizelge 5.4’de bu çalışmadaki sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmektedir.

Çizelge 5.4’de, çubuk geometrisi, referans [42]’de verilen aşağıdaki eşitliğe göre hesaplara dahil edilmiştir.

$$\begin{aligned} h(\phi) &= 1 + \eta - 2\eta\phi & -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0, \\ h(\phi) &= 1 - \eta + 2\eta\phi & 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri (2) ile referans [42] ve [43]’de elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

Çizelge 5.4 : Ref. [42] ve [43]’de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu l EI_b)^{1/2}$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$				$\eta=0.2$			
		Bu Çalışma		[42]	[43]	Bu Çalışma		[42]	[43]
		(1)	(2)			(1)	(2)		
AA	10	433.274	2146.611	2149.8	2149.8	447.275	2268.752	2275.4	2275.4
	20	161.363	534.666	535.45	535.45	168.864	565.164	566.81	566.82
	30	88.048	236.172	236.51	236.52	92.154	249.699	250.43	250.34
	40	61.677	131.715	131.9	131.91	63.992	139.303	139.71	139.71
	50	50.841	83.385	83.5	83.507	52.237	88.222	88.48	88.48
SS	10	273.025	1355.272	1357.2	1357.2	277.324	1415.001	1419.1	1419.1
	20	89.697	336.907	337.38	337.89	91.224	351.791	352.79	352.8
	30	57.348	148.337	148.54	148.55	58.058	154.916	155.35	155.36
	40	49.234	82.356	82.47	82.474	49.705	86.028	86.27	86.274
	50	46.460	51.835	51.9	51.91	46.895	54.162	54.317	54.317

Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada benzer hesaplamalar bulunmaktadır. Etkilerin dahil edilmediği çalışmada, çubuk geometrisine ait formülasyon,

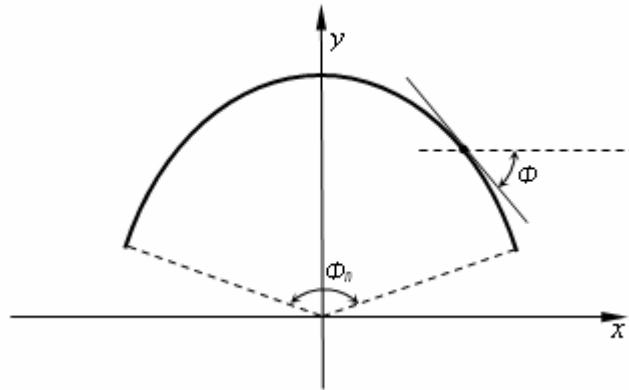
$$\begin{aligned} h(\phi) &= 1 - 2\eta\phi / \phi_n & -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0 \\ h(\phi) &= 1 + 2\eta\phi / \phi_n & 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

olarak verilmektedir. Kiriş açısının 10° , 20° , 30° ve 40° olması durumlarında, $\eta=0.1$ ve 0.2 için karşılaştırmalar yapılmıştır.

Çizelge 5.5 : Ref. [24]'de simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_0/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	13.171	65.315	61.96	13.597	69.110	63.05
	20	19.628	65.073	61.72	20.550	68.864	62.81
	30	24.099	64.674	61.33	25.237	68.456	62.41
	40	30.005	64.123	60.79	31.144	67.894	61.87
SS	10	8.304	41.240	39.57	8.439	43.103	40.06
	20	10.912	41.007	39.34	11.105	42.865	39.83
	30	15.691	40.624	38.97	15.888	42.471	39.45
	40	23.942	40.096	38.45	24.168	41.929	38.93

5.3.2. Spiral Eksenli Değişken Kesitli Simetrik Çubuklar



Şekil 5.7 : Spiral ve parabol eksenli çubukta geometrik büyüklükler.

Şekil 5.4(a)'da kesit değişimi görülen eğri eksenli simetrik çubuğun eksen eğrisinin spiral olması durumunda frekans değerleri incelenmiştir. Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada kullanılan ve (5.12) eşitliğinde verilen, çubuk geometrisine ait formülasyon kullanılmıştır.

Eğrilik yarıçapı,

$$R = \frac{R_0}{\cos \phi} \quad (5.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen yöntemle elde edilen frekans değerleri, **Çizelge 5.6**'da referans çalışma ile karşılaştırılmaktadır. En yüksek hata oranı, ankastre-ankastre mesnet şartı için gerçekleşmektedir. Sabit-ankastre mesnet şartında sonuçlar oldukça uyumludur.

Çizelge 5.6 : Ref. [24]'de spiral eksenli simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması
 $(c=(\rho A_0/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2)$.

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	16.139	65.225	61.81	16.766	68.937	62.89
	20	21.903	64.490	61.1	23.020	68.174	62.17
	30	26.984	63.275	59.93	28.159	66.911	60.99
	40	35.392	61.591	58.31	36.437	65.161	59.35
SS	10	9.121	41.181	39.47	9.283	42.997	39.96
	20	12.267	40.640	38.08	12.457	42.441	39.43
	30	19.541	39.749	36.08	19.730	41.525	38.55
	40	31.368	38.523	36.88	31.618	40.263	37.35
SA	10	12.554	52.272	52.00	12.942	54.932	54.69
	20	16.493	51.639	51.45	17.112	54.278	54.03
	30	22.236	50.593	50.43	22.808	53.196	53.06
	40	32.161	49.149	49.07	32.652	51.701	51.61
	50	43.533	47.326	47.24	44.644	49.813	49.8
	60	43.711	45.149	45.16	45.829	47.555	47.66

5.3.3. Parabol Eksenli Değişken Kesitli Simetrik Çubuklar

Şekil 5.4(a)'daki kesit değişimine sahip parabol eksenli çubuğun frekans değerleri incelenmiştir. Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada benzer problem incelendiğinden, (5.12) eşitliğinde verilen, çubuk geometrisine ait formülasyon kullanılmıştır.

Eğrilik yarıçapı,

$$R = \frac{R_0}{\cos^3 \phi} \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanır.

Çizelge 5.7'de, elde edilen frekans değerleri referans çalışmadaki değerlerle birlikte verilmektedir. En yüksek hata oranı spiral eksenli çubukta olduğu gibi, ankastre-

ankastre mesnet şartı için gerçekleşmektedir. Aynı şekilde, sabit-ankastre mesnet şartında da sonuçlar oldukça uyumludur.

Çizelge 5.7 : Ref. [24]'de parabol eksenli simetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması
($c=(\rho A_o EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	16.080	64.896	61.49	16.706	68.593	62.57
	20	21.541	63.188	59.86	22.642	66.809	60.91
	30	26.127	60.390	57.18	27.253	63.885	58.20
	40	33.925	56.578	53.53	34.884	59.897	54.51
SS	10	9.082	40.975	39.27	9.243	42.785	39.76
	20	12.092	39.825	38.15	12.281	41.602	38.63
	30	19.134	37.949	36.33	19.318	39.671	36.80
	40	30.459	35.410	33.87	30.703	37.053	34.32
SA	10	12.505	52.007	51.76	12.892	54.657	54.47
	20	16.227	50.589	50.43	16.838	53.185	53.06
	30	21.635	48.270	48.16	22.182	50.776	50.75
	40	30.998	45.121	45.07	31.457	47.502	47.58
	50	38.916	41.240	41.18	40.406	43.462	43.54
	60	35.795	36.755	36.44	37.637	38.786	38.67

5.3.4. Çember Eksenli Değişken Kesitli Asimetrik Çubuklar

Şekil 5.4(b)'deki eğri eksenli asimetrik çubuk için beş farklı sınır koşulunda ve dört farklı kiriş açısı için doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Sonuçlar **Çizelge 5.8** ve **Çizelge 5.9**'da sunulmaktadır.

Tüm sınır şartlarında, kesitin değişimini gösteren η katsayısı arttıkça, doğal frekans değerleri de artmaktadır. Ancak ankastre-serbest sınır şartında düşük η değerlerinde frekans yüksek iken, η arttıkça frekans düşmektedir. Bunun nedeni, ankastre mesnetin ince uçta olup, kalınlaşan çubuğun kütle etkisi oluşturmastır. Yani, çubuk serbest uca doğru kalınlaştıkça, kütle artışının etkisi, rijitlik artışından daha fazla olmaktadır.

Çizelge 5.8 : Sürekli değişken kesitli asimetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta=0.1$ ve $\eta=0.2$ için.

		$\eta=0.1$					$\eta=0.2$				
	Açı	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
AA	10	419.29	2039.34	871.66	1603.38	740.99	420.42	2056.62	873.16	1611.69	747.24
	20	155.11	512.17	348.14	476.61	190.62	156.65	520.72	350.79	483.47	193.65
	30	85.17	228.07	184.53	220.61	92.79	86.45	233.70	187.46	225.69	94.62
	40	60.29	128.20	112.35	125.81	62.42	61.20	132.36	115.11	129.73	63.57
SS	10	269.54	1304.61	802.13	1056.33	329.63	271.03	1315.66	804.67	1062.15	332.37
	20	88.98	327.02	274.59	307.36	93.67	89.95	332.48	277.80	311.87	94.87
	30	57.07	145.16	133.12	141.09	58.00	57.57	148.75	135.87	144.37	58.57
	40	48.96	81.24	77.17	79.94	49.32	49.22	83.87	79.42	82.45	49.60
SA	10	343.82	1645.99	837.92	1310.52	512.79	345.70	1661.30	839.93	1319.00	518.30
	20	119.94	413.40	311.66	386.39	135.74	121.69	420.99	314.79	392.72	138.35
	30	68.75	184.00	158.52	178.37	71.78	69.95	189.00	161.63	182.96	73.26
	40	52.83	103.33	94.33	101.53	53.67	53.60	107.03	97.09	105.05	54.53
ASr	10	103.27	115.26	105.52	111.82	115.25	103.00	115.02	105.27	111.54	115.02
	20	27.94	28.81	28.14	28.58	28.81	27.82	28.70	28.03	28.46	28.69
	30	12.64	12.82	12.68	12.77	12.82	12.56	12.75	12.61	12.70	12.74
	40	7.17	7.23	7.18	7.21	7.23	7.12	7.17	7.13	7.16	7.17
SrSr	10	521.78	739.96	600.69	573.33	738.18	524.17	746.26	604.04	576.24	744.37
	20	164.20	185.94	174.86	172.11	185.76	166.38	189.08	177.46	174.59	188.89
	30	77.92	82.87	80.53	79.94	82.80	79.65	84.96	82.44	81.82	84.89
	40	44.99	46.664	45.89	45.714	46.626	46.37	48.21	47.36	47.16	48.17

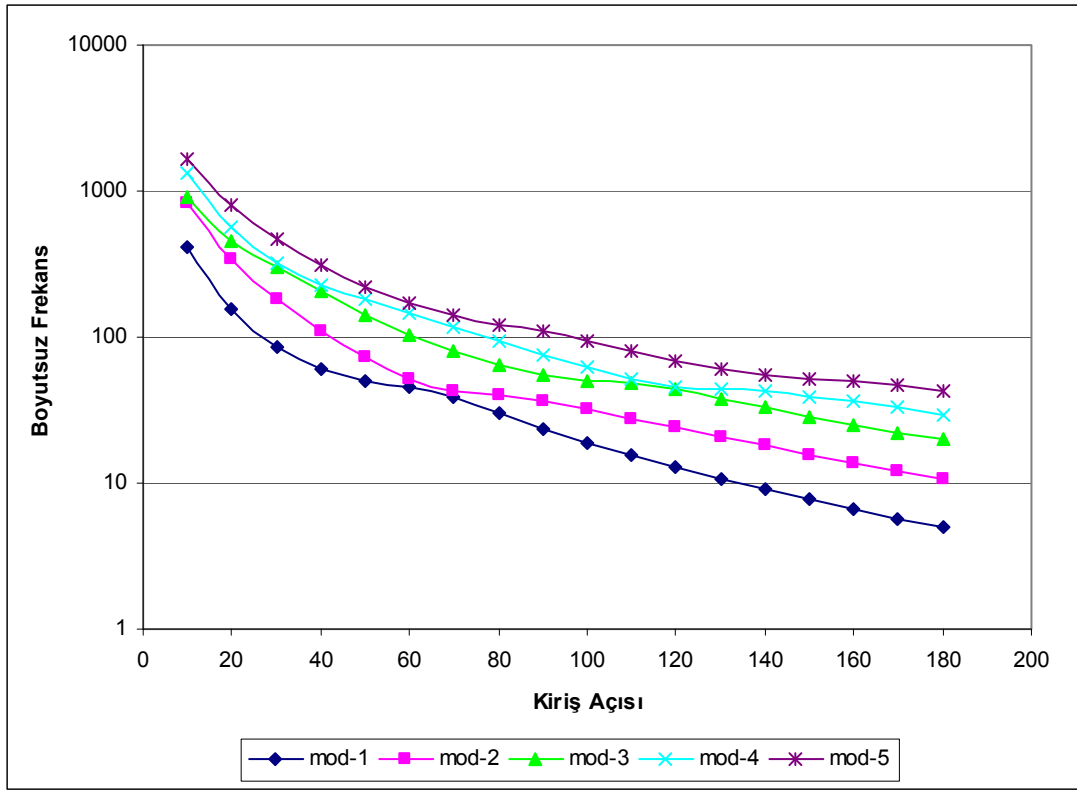
Çizelge 5.9 : Sürekli değişken kesitli asimetrik çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$), $\eta = 0.3$ ve $\eta = 0.4$ için.

	$\eta=0.3$						$\eta=0.4$				
	Açı	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
AA	10	421.52	2073.82	874.63	1619.88	753.47	422.61	2090.94	876.07	1627.95	759.67
	20	158.15	529.20	353.34	490.22	196.66	159.62	537.60	355.81	496.87	199.65
	30	87.70	239.25	190.28	230.68	96.45	88.92	244.75	192.99	235.58	98.26
	40	62.10	136.45	117.76	133.57	64.72	62.98	140.48	120.30	137.34	65.86
SS	10	272.50	1326.67	807.17	1067.89	335.08	273.94	1337.63	809.61	1073.54	337.79
	20	90.90	337.90	280.94	316.32	96.06	91.84	343.28	284.00	320.70	97.24
	30	58.06	152.29	138.55	147.60	59.14	58.55	155.79	141.17	150.77	59.70
	40	49.46	86.47	81.62	84.91	49.88	49.70	89.03	83.76	87.33	50.15
SA	10	347.54	1676.56	841.90	1327.37	523.78	349.35	1691.76	843.83	1335.64	529.25
	20	123.40	428.52	317.81	398.97	140.94	125.09	435.99	320.75	405.13	143.53
	30	71.13	193.94	164.64	187.49	74.73	72.29	198.83	167.55	191.94	76.21
	40	54.35	110.67	99.76	108.51	55.40	55.10	114.27	102.34	111.92	56.26
ASr	10	102.73	114.79	105.04	111.26	114.79	102.47	114.57	104.81	110.99	114.56
	20	27.70	28.59	27.92	28.35	28.59	27.59	28.48	27.81	28.24	28.48
	30	12.49	12.68	12.54	12.63	12.68	12.43	12.61	12.48	12.56	12.61
	40	7.07	7.13	7.08	7.11	7.13	7.02	7.08	7.04	7.06	7.08
SrSr	10	526.53	752.56	607.35	579.11	750.55	528.86	758.85	610.64	581.96	756.72
	20	168.53	192.21	180.04	177.05	192.01	170.66	195.34	182.60	179.48	195.13
	30	81.36	87.04	84.33	83.66	86.95	83.05	89.11	86.21	85.50	89.02
	40	47.74	49.75	48.82	48.60	49.71	49.09	51.29	50.27	50.04	51.24

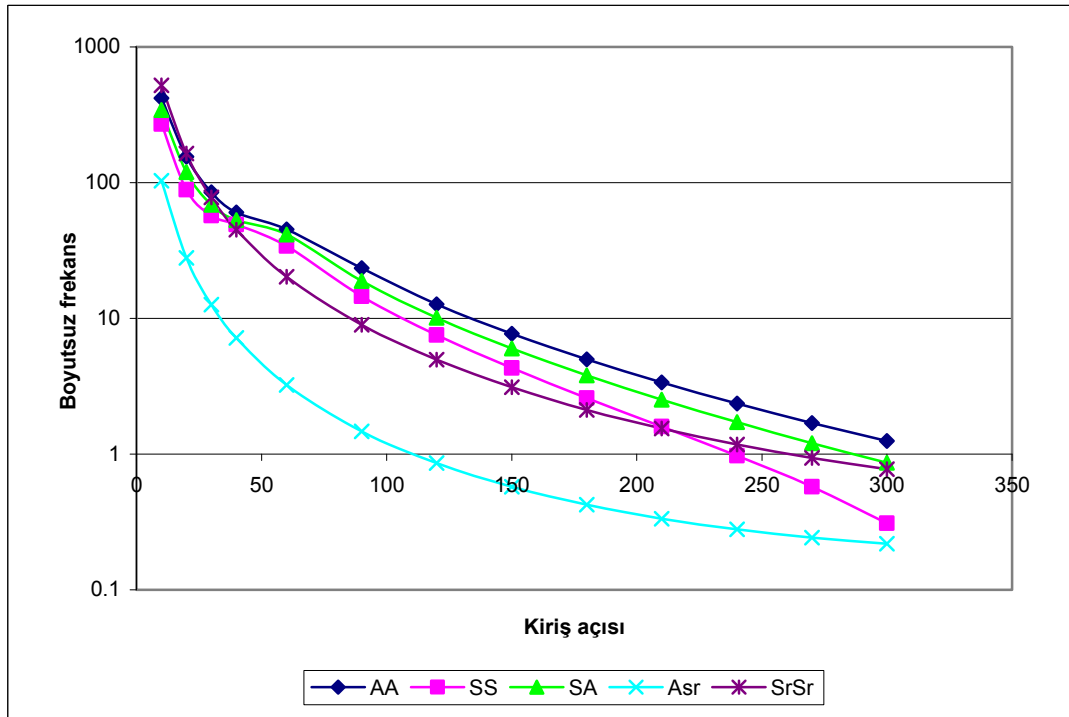
Kolon (1) ve (2), daha önce ifade edildiği şekilde, tüm etkilerin dahil edildiği ve ihmal edildiği çözümleri göstermektedir. Sınır koşulları, yukarıdaki örneklere benzer şekilde, ankastre-ankastre (A-A), sabit-sabit (S-S), sabit-ankastre (S-A), ankastre-serbest (A-Sr) ve serbest-serbest (Sr-Sr) olarak seçilmiştir. 70 kiriş elemanı için hesaplamalar yapılmış, boyutsuz frekans formülasyonu tablo isminde verilmiştir.

Şekil 5.7’de görülen grafik, değişken kesitli asimetric çubuğa ait, tüm etkilerin dahil edilmesi durumunda elde edilen frekans değerlerinin kiriş açısı ile değişimini göstermektedir. Sınır şartı, ankastre-ankastre olarak seçilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans değerleri hesaplanmıştır. Simetrik çubuktakin benzer olarak, bazı açı değerlerinde, iki ayrı moda ait frekanslar birbirlerine çok yakın değerler almaktadır. Birinci ve ikinci moda ait eğriler, 60° - 70° kiriş açıklığı değerleri civarında birbirlerine yaklaşmaktadırlar. Aynı durum, ikinci ve üçüncü mod eğrilerinde, 10° ’de ; üçüncü ve dördüncü mod eğrilerinde, 30° - 40° , ve 110° - 120° ’de; dördüncü ve beşinci mod eğrilerinde, 60° - 70° ’de görülmektedir. Frekansların birbirine yaklaştığı açı değerleri simetrik eğri eksenli çubuk ile benzerlik göstermektedir. Yakın frekans değerlerinin hemen öncesindeki ve sonrasındaki, ilk ve sonraki mod şekilleri yer değiştirmektedir. Örneğin, 40° açıklıktaki çubukta bulunan ilk mod şekli 80° açıklıktaki çubuğun ikinci mod şekliyle aynıdır. 40° açıklıktaki çubukta elde edilen ikinci mod şekli 80° açıklıktaki birinci mod şekliyle aynıdır. Mod geçişi burada da gözlenmektedir.

Şekil 5.8’deki grafik, değişken kesitli asimetric çubukta, ilk mod frekansı için ankastre-ankastre, sabit-sabit, sabit-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartlarında elde edilen frekans değerlerini karşılaştırmaktadır. Simetrik çubuk için çizilen grafiğe benzer olarak, her sınır şartı için, küçük açılarda yüksek olan frekans değerlerinin açı değeri arttıkça düştüğü görülmektedir. Simetrik çubuktaki gibi, 40° civarında, ankastre-serbest dışındaki sınır şartlarına ait değerler birbirlerine çok yaklaşmakta, serbest-serbest frekansları, sabit-sabit ve sabit-ankastre’nin altına düşmekte, 210° derece civarında ise, serbest-serbest frekansları tekrar sabit-sabit frekanslarından yüksek değerlere sahip olmaktadır. 300° kiriş açıklığında ise, sabit-sabit ile ankastre-serbest ve sabit-ankastre ile serbest-serbest sınır şartlarında birbirlerine çok yakın frekanslar elde edilmiştir.



Şekil 5.8 : Değişken kesitli ankastre - ankastre asimetrik çubuğun ilk 5 moduna ait frekans değerleri.



Şekil 5.9 : Değişken kesitli asimetrik çubuğun farklı sınır şartlarında ilk moduna ait frekans değerleri.

Auciello ve Rosa [26], değişken kesitli çember eksenli asimetrik çubukların titreşimlerini de simetrik geometriye benzer şekilde, Rayleigh-Ritz (RR) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemleri yardımıyla incelemiştir. Geometri, denklem (5.9)'de verilen eşitlik göz önüne alınarak oluşturulmuştur. **Çizelge 5.10**'da, ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşullarına sahip değişken kesitli asimetrik çubuk için, iki yönteme de ait sonuçlara yer verilmektedir. $\eta=0.1$ için elde edilen değerler [26] sonuçları ile uyumlu iken ve $\eta=0.2$ için mevcut çalışma ve literatür sonuçları arasındaki fark artmaktadır.

Çizelge 5.10 : Ref. [26]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$				$\eta=0.2$			
		Bu çalışma		[26]		Bu çalışma		[26]	
		(1)	(2)	R-R	CDM	(1)	(2)	R-R	CDM
AA	10	419.286	2039.343	1999.9	2000.5	420.418	2056.618	1999.9	1990.1
	20	155.107	512.174	498.33	499.44	156.649	520.721	497.84	495.6
	30	85.172	228.072	220.06	220.56	86.450	233.698	219.8	218.86
	40	60.285	128.204	122.7	122.97	61.199	132.360	122.55	122.02
	50	50.081	81.788	77.632	77.81	50.710	85.056	77.54	77.214
	60	45.211	56.477	53.172	53.3	45.676	59.148	53.108	52.893
SS	10	269.539	1304.606	1286.5	1287.8	271.032	1315.661	1279.6	1278.7
	20	88.978	327.022	319.09	320.11	89.946	332.484	318.27	317.84
	30	57.067	145.162	141.05	140.92	57.568	148.746	139.92	139.91
	40	48.965	81.238	78.069	78.22	49.217	83.875	77.638	77.66
	50	46.113	51.533	49.124	49.218	46.242	53.594	48.848	48.864
	60	34.157	35.340	33.43	33.484	35.644	37.013	33.229	33.361
SA	10	343.819	1645.985	1637.5	1636.7	345.698	1661.304	1645.3	1641.2
	20	119.943	413.401	407.31	407.32	121.689	420.987	409.37	408.46
	30	68.755	184.002	179.86	179.67	69.949	188.999	180.74	180.19
	40	52.834	103.332	100.17	100.01	53.595	107.027	100.68	100.32
	50	46.733	65.827	63.24	63.152	47.284	68.734	63.568	63.366
	60	41.597	45.370	43.151	43.151	41.597	45.370	43.388	43.311

Liu ,Wu [42] ve Karami, Malekzadeh [43] asimetrik geometriye sahip, değişken kesitli çubukların ilk doğal frekans değerlerini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur yöntemi (generalized quadrature method-DQM) kullanılarak elde etmiştir. Çubuk geometrisi aşağıdaki eşitliğe göre hesaplanmıştır.

$$h(\phi) = 1 + \eta(2\phi - 1) \quad (5.15)$$

Ankastre-ankastre, sabit-sabit ve ankastre-serbest sınır koşullarında farklı kiriş açılarında hesaplamalar yapılmıştır. Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi

durumunda elde edilen frekans değerleri (2) ile referans [42] ve [43]'de elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

Çizelge 5.11 : Ref. [42] ve [43]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması
($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$				$\eta=0.2$			
		Bu Çalışma		[42]	[43]	Bu Çalışma		[42]	[43]
		(1)	(2)			(1)	(2)		
AA	10	418.148	2022.358	2016.98	2016.98	418.130	2022.325	2001.81	2001.81
	20	153.541	503.645	502.303	502.303	153.476	503.326	498.526	498.526
	30	83.865	222.381	221.822		83.773	222.002	220.154	
	40	59.344	123.946	123.669	123.67	59.248	123.561	122.74	122.74
	50	49.423	78.399	78.2575		49.327	78.027	77.669	
	60	44.698	53.676	53.6075	53.6074	44.577	53.323	53.205	53.21
	80	27.952	29.143		29.1456	27.669	28.836	28.927	28.93
SS	10	268.035	1293.746	1290.49	1290.49	267.965	1293.749	1281.34	1281.34
	20	87.991	321.582	320.763	320.763	87.906	321.399	318.485	318.485
	30	56.543	141.544	141.2		56.453	141.321	140.195	
	40	48.674	78.543	78.37	78.3731	48.560	78.314	77.812	77.812
	50	45.732	49.400	49.31		45.177	48.957	48.957	
	60	32.555	33.589	33.54	33.5461	32.310	33.377	33.303	33.303
	80	17.593	17.920		17.9206	17.408	17.734	17.789	17.789
ASr	10	101.396	112.846	101.676	101.676	98.836	109.703	88.4809	88.4809
	20	26.842	27.631	25.467	25.4671	25.458	26.168	22.1631	22.1631
	30	11.895	12.049			11.005	11.137		
	40	6.614	6.662	6.415	6.4152	5.981	6.020	5.5839	5.5839
	50	4.179	4.198			3.699	3.714		
	60	2.867	2.876	2.887	2.8875	2.488	2.494	2.514	2.514
	80	1.579	1.582	1.653	1.6532	1.322	1.324	1.4399	1.4399

Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada asimetrik çubukların boyutsuz frekansları, polinom fonksiyonları yaklaşımı ve Ritz yöntemi ile, dönme eylemsizliği ve kayma etkisi ihmal edilerek hesaplanmıştır. Çubuk geometrisine ait formülasyon,

$$h(\phi) = 1 + \eta 2\phi / \phi_n \quad (5.16)$$

olarak verilmektedir. Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri (2) ile referans [24]'de, $\eta=0.1$ ve 0.2 için elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

Çizelge 5.12 : Ref. [24]'de asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_0/EI_b)^{1/2} \cdot \omega R^2 \Phi^2$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	12.741	61.529	60.92	12.717	61.154	60.92
	20	18.704	61.292	60.72	18.641	60.919	60.66
	30	22.989	60.901	60.33	22.913	60.530	60.26
	40	28.934	60.362	59.8	28.866	59.995	59.73
	50	37.669	59.682	59.12	37.614	59.320	59.05
	60	49.075	58.872	58.31	49.007	58.514	58.24
SS	10	8.148	39.367	39.19	8.074	39.143	38.98
	20	10.708	39.140	38.88	10.635	38.917	38.78
	30	15.500	38.766	38.67	15.437	38.545	38.36
	40	23.736	38.253	38.05	23.663	38.033	37.84
	50	81.306	37.607	37.41	34.350	37.390	37.2
	60	35.710	36.840	36.66	35.465	36.626	36.44
SA	10	10.622	50.108	49.88	10.792	50.306	50.12
	20	14.702	49.879	49.63	14.951	50.081	49.88
	30	18.829	49.502	49.31	19.083	49.710	49.55
	40	25.673	48.983	48.82	25.913	49.198	49.07
	50	35.493	48.330	48.16	35.768	48.554	48.41
	60	44.409	47.552	47.32	44.884	47.787	47.58

5.3.5. Spiral Eksenli Değişken Kesitli Asimetrik Çubuklar

Şekil 5.4(b)'deki eğri eksenli asimetrik çubuğun eksen eğrisinin spiral olması durumunda frekans değerleri incelenmiştir. Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada kullanılan ve (5.16) eşitliğinde verilen, çubuk geometrisine ait formülasyon kullanılmıştır.

Eğrilik yarıçapı (5.13) eşitliğinde verilmiştir. **Çizelge 5.13**'de, elde edilen sonuçların referans çalışmadaki sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

5.3.6. Parabol Eksenli Değişken Kesitli Asimetrik Çubuklar

Şekil 5.4(b)'deki eğri eksenli asimetrik çubuğun eksen eğrisinin parabol olması durumunda yukarıdaki yöntemle göre hesaplanan frekans değerleri Gutierrez ve diğerlerine [24] ait çalışmada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çubuk geometrisi olarak, (5.16) eşitliğinde verilen, formülasyon kullanılmıştır. Eğrilik yarıçapı (5.14) eşitliğinde verilmektedir. **Çizelge 5.14**'de, tüm etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen sonuçların referans çalışmadaki sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.13 : Ref. [24]'de spiral eksenli asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_o EI_b)^{1/2} \omega R^2 \Phi^2$).

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	15.468	61.373	60.79	15.427	60.999	60.79
	20	20.749	60.668	60.13	20.669	60.298	60.06
	30	25.804	59.503	58.99	25.726	59.139	58.92
	40	34.363	57.890	57.55	34.302	57.535	57.41
	50	46.775	55.848	55.57	46.710	55.505	55.35
	60	51.607	53.399	53.21	51.298	53.071	52.92
SS	10	8.921	39.267	39.09	8.845	39.044	38.78
	20	12.044	38.742	38.57	11.975	38.521	38.36
	30	19.327	37.877	37.73	19.265	37.660	37.52
	40	31.052	36.688	36.55	30.886	36.477	36.22
	50	34.436	35.196	35.1	34.198	34.991	34.87
	60	32.930	33.425	33.22	32.728	33.229	32.98
SA	10	11.855	49.014	48.74	11.529	48.244	48
	20	15.510	48.406	48.16	15.107	47.641	47.41
	30	21.359	47.402	47.15	21.009	46.646	46.39
	40	31.371	46.018	45.86	31.026	45.275	45.07
	50	41.412	44.272	44.09	40.613	43.547	43.26
	60	40.983	42.190	42.04	40.274	41.486	41.18

Çizelge 5.14 : Ref. [24]'de parabol eksenli asimetrik çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması

	Kiriş Açısı	$\eta=0.1$			$\eta=0.2$		
		Bu Çalışma		[24]	Bu Çalışma		[24]
		(1)	(2)		(1)	(2)	
AA	10	15.410	61.060	60.53	15.369	60.688	60.46
	20	20.403	59.431	59.05	20.324	59.067	58.85
	30	24.997	56.764	56.49	24.921	56.415	56.21
	40	32.980	53.135	52.91	32.920	52.805	52.65
	50	44.506	48.648	48.41	44.413	48.344	40.08
	60	42.247	43.447	42.98	41.991	43.173	42.70
SS	10	8.881	39.066	38.88	8.805	36.845	38.57
	20	11.872	37.952	37.73	11.803	37.735	37.52
	30	18.924	36.136	36.00	18.862	35.928	35.77
	40	30.125	33.680	33.46	29.900	33.484	33.22
	50	30.093	30.670	30.33	29.897	30.490	30.06
	60	26.887	27.218	26.68	26.725	27.056	26.38
SA	10	11.806	48.763	48.49	11.481	47.997	47.74
	20	15.260	47.413	47.15	14.865	46.665	46.47
	30	20.798	45.208	45.07	20.465	44.491	44.36
	40	30.251	42.216	42.14	29.919	41.542	41.28
	50	36.688	38.535	38.26	36.025	37.915	37.52
	60	33.494	34.291	33.70	32.944	33.735	32.98

6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ YER DEĞİŞTİRMELERİNE AİT ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN SONLU ELEMAN YÖNTEMİNE UYARLANMASI

6.1. Sonlu Eleman Formülasyonu

Sonlu elemanlar yöntemi, mühendisliğin birçok alanında uygulanan sayısal yöntemlerden biridir. Teorik olarak, fiziksel bir sistemin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Sonlu elemanlar yönteminde yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan elemanlara bölünür. Elemanlar, "nod" adı verilen noktalarda birleşmektedirler. Her bir yapı sınıfını modellemek için farklı eleman tipleri oluşturulur. İki boyutu, üçüncü boyutunun yanında çok küçük olan, eksen ve normal kesitiyle tanımlı olan elemana kiriş eleman adı verilir. Bu bölümde, eğri eksenli çubukların statik davranışına ait denklemlerden faydalananarak, eğri eksenli çubuklar için bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulacaktır.

Çubuk teorisinin w , u , Ω_b olarak belirlenen düzlemsel çubuğun kendi düzlemindeki yer değiştirmesini ifade eden denklemler (3.31) eşitliklerinde verilmektedir. Bu çözümden faydalananarak, değişken eğrilik yarıçaplı ve değişken kesitli çubuklar için bir sonlu eleman formülasyonu elde edilecektir.

Yapılan literatür taraması, son zamanlarda yapılan çalışmalarda kiriş eleman formülasyonlarının, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak elde edildiğini göstermektedir. Şekil fonksiyonları, yaklaşık sonuçların elde edilmesini sağlar. Burada verilecek olan formülasyon ise, kesin çözüm yönteminin uygulandığı, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini etkilerini içeren bir kiriş eleman sunmaktadır.

Üzerine tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği eğri eksenli çubuğun statik problemlerine ait genel çözüm,

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_0) \mathbf{y}_0 \quad (6.1)$$

olarak elde edilmişti. Bu denklem açık olarak,

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ 0 & 0 & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55} & Y_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o \\ u_o \\ \Omega_{bo} \\ M_{bo} \\ F_{to} \\ F_{no} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

şeklinde ifade edilir. Başlangıç değerleri bilindiğinde, yer değiştirmeler, dönme açıları, iç kuvvet ve momentler analitik olarak hesaplanabilir. Eşitliğin çözümü (4.29) denklemlerinde verilmektedir.

Sabit ya da değişken kesit alanına sahip çubuk, elemanlara ayrılarak, her eleman için asal matris hesaplanacak ve aşağıda verilen sonlu eleman teorisi ile çözüme ulaşılabacaktır.

Eşitlik (6.2)'de verilen matris alt matrislere ayrılarak incelendiğinde,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

eşitliği yazılabilir. Burada yer değiştirme ,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

ve kuvvet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} M_{b0} \\ F_{t0} \\ F_{n0} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

bileşenlerinden oluşan vektörler elde edilir. “0” alt indisi başlangıç değerlerini belirtir.

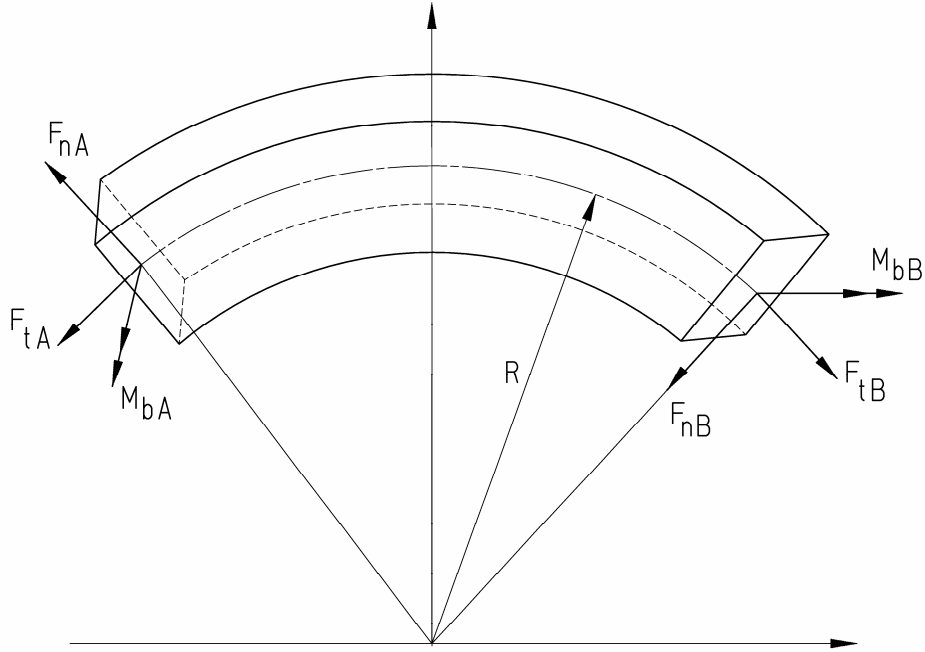
Ayrıca,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{14} & \mathbf{Y}_{15} & \mathbf{Y}_{16} \\ \mathbf{Y}_{24} & \mathbf{Y}_{25} & \mathbf{Y}_{26} \\ \mathbf{Y}_{34} & \mathbf{Y}_{35} & \mathbf{Y}_{36} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{41} & \mathbf{Y}_{42} & \mathbf{Y}_{43} \\ \mathbf{Y}_{51} & \mathbf{Y}_{52} & \mathbf{Y}_{53} \\ \mathbf{Y}_{61} & \mathbf{Y}_{62} & \mathbf{Y}_{63} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{44} & \mathbf{Y}_{45} & \mathbf{Y}_{46} \\ \mathbf{Y}_{54} & \mathbf{Y}_{55} & \mathbf{Y}_{56} \\ \mathbf{Y}_{64} & \mathbf{Y}_{65} & \mathbf{Y}_{66} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

yardımcı matrisleri tarif edilmektedir.

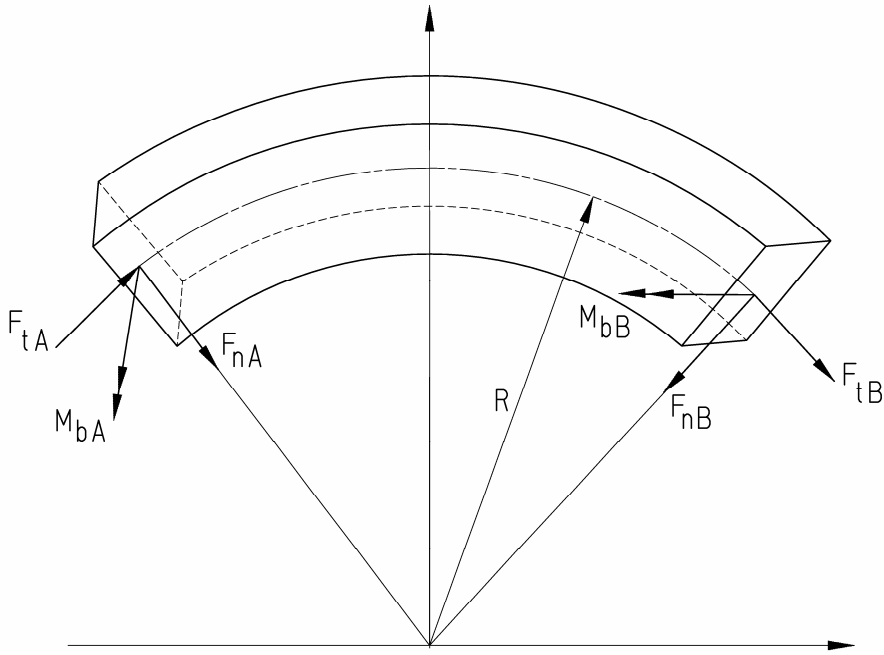
Burada, kesit tesirlerinin kabul edilen pozitif yönleri önemli bir konudur. Mevcut çalışmada verilen teoride kullanılan işaret anlaşması **Şekil 6.1**'de görülmektedir.



Şekil 6.1 : Çubukların analitik formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması.

Yer değiştirme büyüklüklerinin pozitif yönleri, analitik formülasyonda ve sonlu elemanlar yönteminde aynı yönler olarak kabul edilmektedir. Burada verilen teoride kullanılan işaret anlaşması **Şekil 6.1**'de verilmektedir. Çubukların analitik formülasyonundan elde edilen çözüme göre, A ucuna ait yer değiştirme ve kuvvet büyüklüklerini, bu çubuğa ait çözümünden elde edilen $\mathbf{Y}$ rijitlik matrisi ile çarparak, B ucuna ait büyüklükler elde edilmektedir.

Sonlu eleman analizinde ise, **Şekil 6.2**'de verilen işaret anlaşması kullanılmaktadır. Buna göre, çubuk ekseninde hep aynı yönlerde etkiyen büyüklükler esas alınır.



Şekil 6.2 : Çubukların sonlu eleman ve matris yöntemleri formülasyonunda kullanılan pozitif yön anlaşması.

Analitik çalışmadaki formülasyonda verilen,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

eşitliğinde, sonlu eleman formülasyonu için kullanılan işaret anlaşması uyarınca,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ -\mathbf{F}_A \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

olması gerektiği açıktır. Burada, $\mathbf{F}_A$ vektörünün önündeki negatif işaret, matris içine atılabilir. Böylece,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

ifadesi elde edilir. Sonlu eleman formülasyonunun temelini oluşturan,

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{X} \quad (6.10)$$

eşitliğidir. Burada, $\mathbf{F}$ kuvvet vektörü, $\mathbf{K}$ rijitlik matrisi, $\mathbf{X}$ ise yer değiştirme vektörüdür.

(6.9) denklemi açılırsa,

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{A} \mathbf{X}_A - \mathbf{B} \mathbf{F}_A$$

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{C} \mathbf{X}_A - \mathbf{D} \mathbf{F}_A \quad (6.11)$$

elde edilir. Denklemler kuvvet ve yer değiştirme ifadeleri eşitliğin iki ayrı tarafına alınarak dzenlendiğinde,

$$\mathbf{B} \mathbf{F}_A = \mathbf{A} \mathbf{X}_A - \mathbf{X}_B$$

$$\mathbf{D} \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{C} \mathbf{X}_A \quad (6.12)$$

elde edilir. Matris olarak,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

yazılabilir. Burada “**I**” birim vektörü ve “**O**” sıfır vektörünü ifade eder. Böylece;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

denklemine ulaşılır. Burada, eğri eksenli kiriş elemana ait rijitlik matrisi,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

olarak alındığında (6.10) eşitliği elde edilmektedir. Böylece, her bir eleman için $\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{X}^e$ denklemi oluşturulabilir. Burada “e” üst indisi rijitlik matrisinin hangi elemana ait olduğunu göstermektedir. Örneğin, A, B, C noktaları elemanların sınır noktaları olmak üzere, iki elemandan oluşan bir çubuk için denklemler,

1 no’lu elemanda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{AI} \\ \mathbf{F}_{BI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^I & \mathbf{K}_2^I \\ \mathbf{K}_3^I & \mathbf{K}_4^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

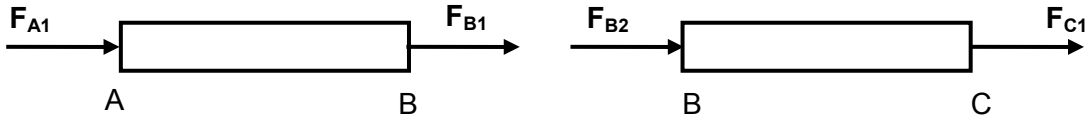
2 no’lu elemanda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B2} \\ \mathbf{F}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^2 & \mathbf{K}_2^2 \\ \mathbf{K}_3^2 & \mathbf{K}_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_C \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

şeklinde ifade edilir. Alt indislerde verilen, A, B, C harfleri, nodları; rakamlar ise elemanları göstermektedir. Eleman sınırlarında, etki tepki prensibi gereğince, kuvvetler birbirine eşit olacaktır. Şekil 6.3, eleman üzerindeki kuvvet dengesini sembolik olarak göstermektedir. Bu şekilde, n adet eleman kullanılan bir sistem düşünüldüğünde kuvvet dengesi gereğince,

$$\mathbf{F}_{A1} = -\mathbf{F}_{B1} \quad \mathbf{F}_{B1} = -\mathbf{F}_{C1} \quad (6.18)$$

eşitlikleri elde edilecektir.



Şekil 6.3 : Eleman üzerindeki kuvvet dengesi.

6x6 büyüklüğündeki $\mathbf{K}$ matrisleri tüm elemanlar için bir araya getirilerek global rijitlik matrisi oluşturulur. Rijitlik matrisinin komşu elemanların ortak nodlarına ait elemanları toplandığında,

$$\mathbf{K}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^1 & \mathbf{K}_2^1 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_3^1 & \mathbf{K}_4^1 + \mathbf{K}_1^2 & \mathbf{K}_2^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_3^2 & \mathbf{K}_4^2 + \mathbf{K}_1^3 & \mathbf{K}_2^3 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_3^3 & \mathbf{K}_4^3 + \mathbf{K}_1^4 \\ & & & \dots \\ & & & \dots \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

şeklinde diyagonal bir matris elde edilir. Sisteme etkiyen dış yükler vektörü ise, nodlara etkiyen dış yüklerin oluşturduğu vektördür ve,

$$\mathbf{F}^T = [M_{bA}, F_{tA}, F_{nA}, M_{bB}, F_{tB}, F_{nB}, M_{bC}, F_{tC}, F_{nC} \dots] \quad (6.20)$$

şeklinde ifade edilir. Yerdeğiştirmeler vektörü ise,

$$\mathbf{X}^T = [w_A, u_A, \Omega_{bA}, w_B, u_B, \Omega_{bB}, w_C, u_C, \Omega_{bC} \dots] \quad (6.21)$$

olarak bilinmektedir.

Böylece, her düğüm noktasında üç serbestlik derecesine sahip, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini içeren bir sonlu eleman formülasyonu elde edilmektedir.

6.2. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Yukarıda verilen sonlu eleman formülasyonu kullanılarak, farklı geometriler için, çeşitli yükleme ve sınır şartlarına sahip problemler çözülmüştür. **K** rijitlik matrisi Matlab programında hesaplanmış, matriste yer alan integral hesaplarında Simpson yöntemi kullanılmıştır.

Aşağıda, literatürdeki farklı geometriler için yapılan sayısal örnekler sunulmuş, burada verilen sonlu eleman formülasyonu çözümleri ile karşılaştırmalar yapılmıştır.

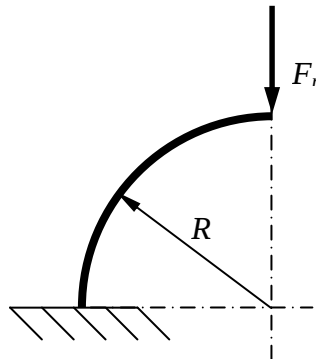
6.2.1. Ankastre-Serbest Sınır Şartlarında, Uç Noktadan Etkiyen F_n Tekil Yükünü Taşıyan Çember Eksenli Çubuk

Şekilde verilen, 90° kiriş açıklığına sahip, sabit kesitli, çember eksenli çubuğun, uç noktasından etkiyen $F_n = 1000$ N büyüklüğündeki kuvvetin etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Kirişe ait geometrik büyüklükler,

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} & E &= 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ h &= 0.03 \text{ m} & \nu &= 0.3 \\ b &= 0.04 \text{ m} \end{aligned}$$

olarak alınmıştır.

Normal, teğetsel yer değiştirmeler ve dönme açısı **Çizelge 6.1**'de analitik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Ayrıca, 60° , 120° , 180° 'lik eğri eksenli çubuklara ait sonuçlar da, aynı tabloda verilmektedir. $n=2$ elemanla elde edilen sonlu eleman sonuçları ile analitik sonuçlar birebir aynıdır.



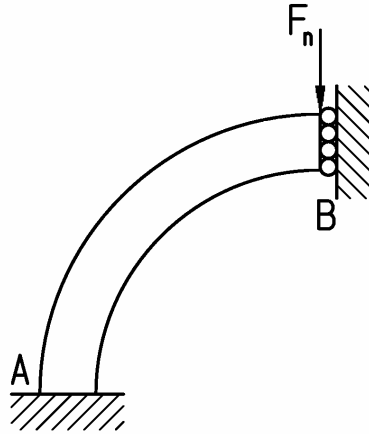
Şekil 6.4 : Uç noktadan tekil kuvvet etkiyen ankastre-serbest çubuk.

Çizelge 6.1 : Ankastre-serbest çubuk için dış yük altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

		Bu çalışma (SEY)	Analitik Yöntem
$\phi=60^\circ$	w (m)	-0,00576	-0,00576
	u (m)	0,01416	0,01416
	Ω (rad)	-0,02412	-0,02412
$\phi=90^\circ$	w (m)	0,02304	0,02304
	u (m)	0,03620	0,0362
	Ω (rad)	0,04825	0,04825
$\phi=120^\circ$	w (m)	-0,05184	-0,05184
	u (m)	0,05824	0,05824
	Ω (rad)	-0,07237	-0,07237
$\phi=180^\circ$	w (m)	-0,09215	-0,09215
	u (m)	0,07240	0,07240
	Ω (rad)	-0,09650	-0,09650

90° kiriş açıklığına sahip çubuk için analitik yöntemle ait sonuçlar Tüfekçi ve Arpacı [9]'a ait çalışmada elde edilmektedir.

6.2.2. Ankastre-Kayar Ankastre Sınır Şartlarında, Uç Noktadan Etkiyen F_n Tekil Yükünü Taşıyan Çember Eksenli Çubuk



Şekil 6.5 : Uç noktadan tekil kuvvet etkiyen ankastre-kayar ankastre çubuk.

Şekil 6.5'de verilen, sabit kesitli, çember eksenli çubuk bir ucundan ankastre olarak, diğer ucundan ise normal doğrultuda yer değiştirmeye izin verecek şekilde kayar ankastre mesnetlenmiştir. Çubuk, dikdörtgen kesitli olup, çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned}
 R &= 100 \text{ cm} & G &= 4 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 h &= 2 \text{ cm} & E &= 10.5 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 R/h &= 50 & k_n &= 5/6
 \end{aligned}$$

Çubuğun, kayar ankastrenin bulunduğu uç noktasından etkiyen $F_n = 1000 \text{ N}$ büyüklüğündeki kuvvetin etkisi altındaki davranışı incelenmektedir. Normal yer değiştirmeler **Çizelge 6.2**'de analitik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. 10° ve 180° arasında, farklı kiriş açıklıklarına sahip eğri eksenli çubuklar için elde edilen sonuçlar, literatürde yapılan benzer çalışmalarla birlikte verilmektedir.

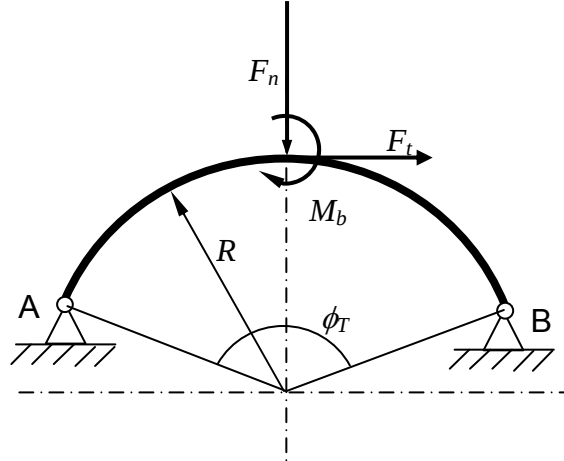
Saffari ve diğerlerine ait olan [18] çalışmada aynı problem, benzer şekilde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüş, eleman formülasyonu trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilmiştir. Tek eleman kullanılarak çözüme ulaşılabilmektedir. Raveendranath ve diğerlerine ait olan [47] çalışmada, normal ve radyal yer değiştirmeler kübik fonksiyonlarla ifade edilerek iki düğüm noktasına ve altı serbestlik derecesine sahip sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Bu çalışmada verilen yöntem kullanılarak, $n=2$ eleman ile elde edilen sonlu eleman sonuçları, literatürde elde edilen sonuçlar ile oldukça uyumludur.

Çizelge 6.2 : Şekil 6.5'te verilen ankastre-kayıcı ankastre çubuğun B ucunun (düşey) yer değiştirmesinin (cm) sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

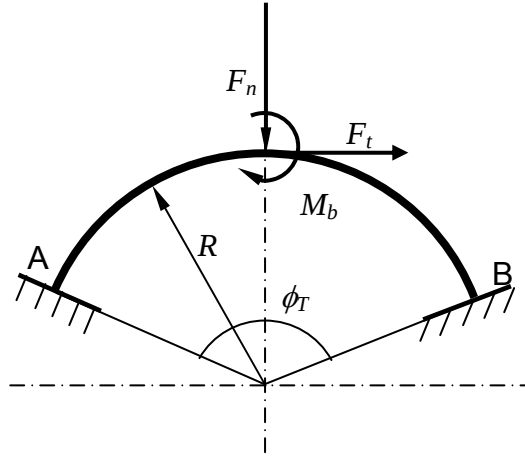
Kiriş Açısı	[18]	[47]	Bu çalışma (SEY)
10	0.00419	0.00419	0.00416
20	0.0077	0.0077	0.00766
30	0.01423	0.0141	0.01416
40	0.02876	0.0286	0.02866
50	0.054	0.054	0.05389
60	0.09316	0.093	0.09301
70	0.14995	0.1485	0.14977
80	0.2288	0.2275	0.22862
90	0.3351	0.3345	0.33487
100	0.4752	0.4745	0.47493
120	0.8898	0.8892	0.88945
140	1.5589	1.5565	1.55844
160	2.6138	2.6078	2.61324
180	4.2539	4.24	4.25321

6.2.3. Orta Noktadan Etkiyen Tekil Yükü Taşıyan 120°'lik Çember Eksenli Çubuk

Şekil 6.6'da verilen, 120° kiriş açıklığına sahip, sabit kesitli, çember eksenli çubuğun, orta noktasından etkiyen, $F_n = 1000$ N, $F_t = 1000$ N ve $M_b = 1000$ Nm büyüklüğündeki normal kuvvet, teğetsel kuvvet ve eğilme momenti etkisindeki yer değiştirmeleri hesaplanmıştır. $n=2$ eleman için çözümler elde edilmiştir.



Şekil 6.6 : Orta noktasından tekil yükler etkiyen sabit-sabit mesnetli çubuk.



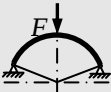
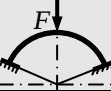
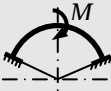
Şekil 6.7 : Orta noktasından tekil yükler etkiyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk.

Litewka ve Rakowski [11]'ya ait çalışmada, şekil fonksiyonları kullanılarak, bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmuştur. Altı serbestlik derecesine sahip eleman, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermektedir. Eğri eksenli çubuk, dikdörtgen kesitli olup, çubuğa ait özellikler aşağıdaki gibi verilmektedir.

$R = 4$ m	$\phi_T = 2\pi/3$	$k_n = 5/6$
$h = 0.6$ m	$E = 3 \times 10^{10}$ N/m ²	
$b = 0.4$ m	$\nu = 0.17$	

Çizelge 6.3, çubuğun tepe noktasından uygulanan çeşitli tekil dış yükler altında ortaya çıkan yer değiştirme ve dönme değerlerini kiriş açısına ve eğrilik yarıçapına bağlı olarak vermektedir. Ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnet koşulları için hesaplamalar yapılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Litewka ve Rakowski [11] ve Tüfekçi ve Arpacı [9]'da elde edilen sonuçlarla birlikte verilmektedir.

Çizelge 6.3 : 120°'lik çubuk için dış yükler altında sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

	$\times 10^{-6}$	[11]	[50]	[9]	Bu çalışma (SEY)
	$\frac{u_0}{R\phi_T}$	0.3047	0.2536	0.280916	0.280823
	$\frac{w_o}{R\phi_T}$	0.2884	0.27346	0.28831	0.288296
	$\frac{\Omega_0}{\phi_T}$	-0.8064	-0.80496	-0.806359	-0.806394
	$\frac{w_o}{R\phi_T}$	-0.2016	-0.2012	-0.20159	-0.201590
	$\frac{\Omega_{bo}}{\phi_T}$	1.3613	1.3396	1.36129	1.361308
	$\frac{u_o}{R\phi_T}$	0.2488	0.22048	0.248781	0.248659
	$\frac{w_o}{R\phi_T}$	0.1252	0.11289	0.12522	0.125177
	$\frac{\Omega_{bo}}{\phi_T}$	-0.3796	-0.3642	-0.3796417	-0.379693
	$\frac{w_o}{R\phi_T}$	-0.0949	-0.0910	-0.09491	-0.094919
	$\frac{\Omega_{bo}}{\phi_T}$	1.0824	1.0373	1.08224	1.082268

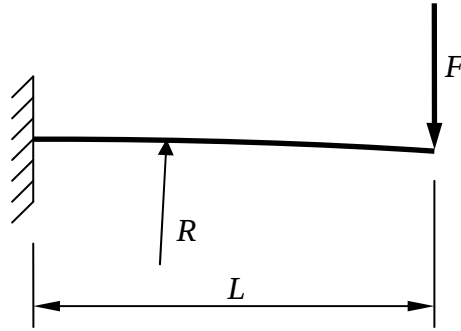
Benzer problem Wu ve Chiang [50]'de de incelenmiştir. Yine bir sonlu eleman formülasyonu oluşturularak çözüme gidilmiş ve bu çalışmada elde edilen değerlere çok yakın yer değiştirme değerleri elde edilmiştir.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi yer değiştirmelerine ait analitik çözümünün sonlu eleman yöntemine uyarlanması oldukça başarılı, kesin analitik çözümden elde edilen değerlerle eşleşen sonuçlar vermektedir.

6.2.4. Uç Noktadan Etkiyen Tekil Yüğü Taşıyan Neredeyse Düz Çubuk

Şekil 6.8'de verilen çok büyük eğrilik yarıçapına sahip, neredeyse düz olarak tanımlanabilecek çubuğa ait yerdeğiştirmeler, eğri eksenli çubuk için geliştirilen sonlu eleman kullanılarak incelenmiştir. Çubuk, uç noktadan uygulanan F normal kuvveti etkisindedir. $\xi = s/L$ oranı çubuk üzerinde, yer değıştirmeleri hesaplanan, farklı noktaları tanımlamaktadır. Çubuğa ait geometrik özellikler aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ in } (=254 \text{ mm}) & R &= 10000 \text{ in } (=254 \text{ m}) & k_n &= 5/6 \\ h &= 0.01 \text{ in } (=0.254 \text{ mm}) & E &= 10^7 \text{ lbf/in}^2 (=7031 \times 10^7 \text{ N/m}^2) \\ b &= 1 \text{ in } (=25.4 \text{ mm}) & \nu &= 0.3 \end{aligned}$$



Şekil 6.8 : Uç noktadan tekil kuvvet etkiyen neredeyse düz çubuk.

Neredeyse düz çubuk için elde edilen yer değıştirme değıerleri, literatürde yapılan benzer çalışmalarla karşılaştırılmaktadır. Çizelge 6.4'te, Tüfekçi ve Arpacı [9] ile Raveendranath ve diğeri [47]'ne ait sonuçlar verilmiştir. Analitik sonuçların burada verilen sonlu eleman formülasyonuna ait sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 6.4 : Neredeyse düz çubuk için sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması.

	[9]			[47]		Bu çalışma (SEY)		
$\xi = s/L$	w (in)	$u \times 10^3$ (in)	$\Omega_b \times 10^2$ (rad)	$u \times 10^3$ (in)	$\Omega_b \times 10^2$ (rad)	w (in)	$u \times 10^3$ (in)	$\Omega_b \times 10^2$ (rad)
1	0.14902	0.4	0.6	0.3999	0.5999	0.15	0.4	0.6
0.75	0.06855	0.253	0.5625	0.2531	0.5625	0.06855	0.25312	0.5625
0.5	0.02178	0.125	0.45	0.125	0.45	0.02188	0.125	0.45
0.25	0.00283	0.03438	0.2625	0.03438	0.2625	0.00293	0.03438	0.2625
0	0	0	0	0	0	0	0	0

6.2.5. Serbest Ucundan Etkiyen Tekil Yüğü Taşıyan Spiral Eksenli, Değişken Kesitli, Ankastre-Serbest Çubuk

Bu örnekte, spiral geometriye sahip eğri eksenli çubukların statik problemleri incelenmiş, sonlu eleman yöntemi uygulanarak çözüme ulaşılmıştır.

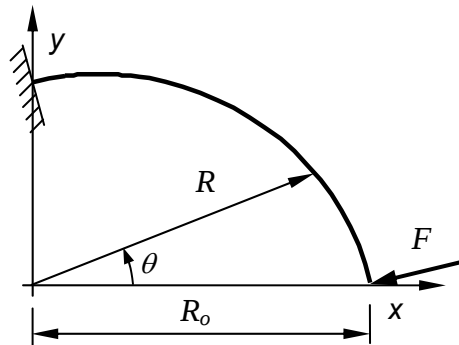
Şekil 6.8'de gösterilen spiral eğri eksenli çubuğun kesit alanı dikdörtgen olup, kesit genişliği eğri boyunca sabittir. Eğrilik yarıçapı, kesit yüksekliği ve kesit alanı aşağıda verilen ifadelerle bağılı olarak değişir.

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 - \mu\theta) \\ A &= A_0(1 - \alpha\Theta)^2 \\ I_b &= I_{b0}(1 - \alpha\Theta)^4 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Burada, R , A ve I_b sırasıyla herhangi bir θ açısal koordinatındaki çubuk eğrilik yarıçapını, kesit alanını ve binormal eksene göre eylemsizlik momentini; R_0 , A_0 ve I_{b0} ise $\theta=0^\circ$ açısal koordinatındaki çubuk eğrilik yarıçapı, kesit alanı ve binormal eksene göre eylemsizlik momenti değerlerini temsil etmektedir. μ , spiral geometriye ait sabit bir katsayı, $\Theta = \theta/\pi$ ise normalleştirilmiş açı büyüklüğüdür.

Spiral çubuğun, Şekil 6.9'da gösterilen, herhangi bir (x,y) koordinatındaki R eğrilik yarıçapı aşağıdaki şekilde hesaplanır [3].

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}} \quad (6.23)$$



Şekil 6.9 : Spiral eksenli çubuğa ait geometrik büyüklükler.

x ve y koordinatları, θ açısal koordinatına bağılı olarak ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} x &= R_o (1 - \mu\theta) \cos \theta \\ y &= R_o (1 - \mu\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (6.24)$$

Türevler hesaplandığında $x' = \partial x / \partial \theta$ ve $y' = \partial y / \partial \theta$ göstermek üzere,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} = \frac{y'}{x'} \quad (6.25)$$

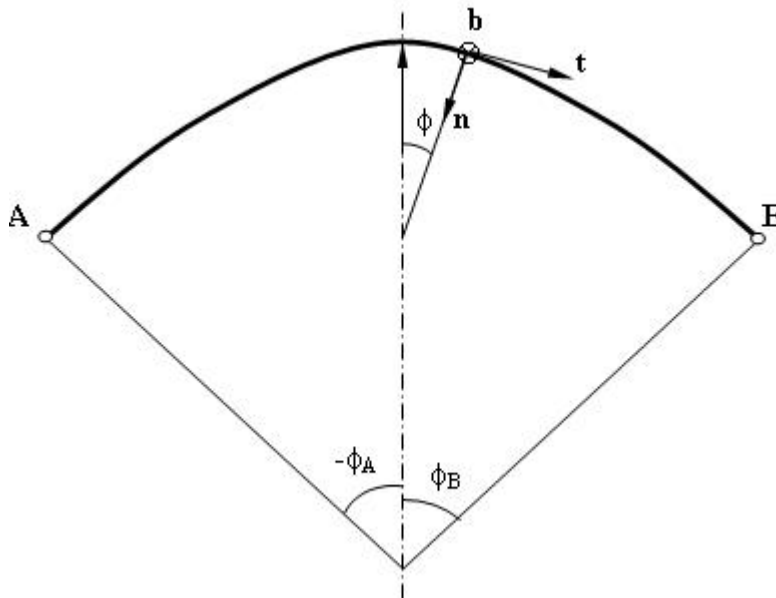
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \frac{1}{x'} \frac{y''x' - x''y'}{x'^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3} \quad (6.26)$$

(6.25) ve (6.26) eşitlikleri (6.23) eşitliğinde yerine konursa,

$$\frac{1}{R} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = - \frac{\frac{y''x' - x''y'}{x'^3}}{\left(1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right)^{3/2}} = - \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (6.27)$$

elde edilir.



Şekil 6.10 : Herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açısal büyüklükler.

Şekil 6.10'da herhangi bir eğri eksenli çubuğa ait açılar gösterilmektedir. Spiral eksenli çubuğa, yukarıda verilen sonlu eleman formülasyonunu uygulayabilmek için, Φ açısal büyüklüğünün θ cinsinden ifade edilebilmesi gerekmektedir. Φ açısı, herhangi bir noktada eğriye çizilen normal doğrultudaki vektörün, referans doğrultusu ile yaptığı açı olmak üzere,

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx}$$

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \text{atan} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \theta}}{\frac{\partial x}{\partial \theta}} \right) = \text{atan} \left(\frac{\cos \theta - \mu \sin \theta - \mu \theta \cos \theta}{-\sin \theta - \mu \cos \theta + \mu \theta \sin \theta} \right) \quad (6.28)$$

olarak hesaplanabilir. A ve B uç noktalarına ait, Φ_A ve Φ_B açıları aşağıdaki şekilde hesaplanır ve sonlu eleman formülasyonuna dahil edilir.

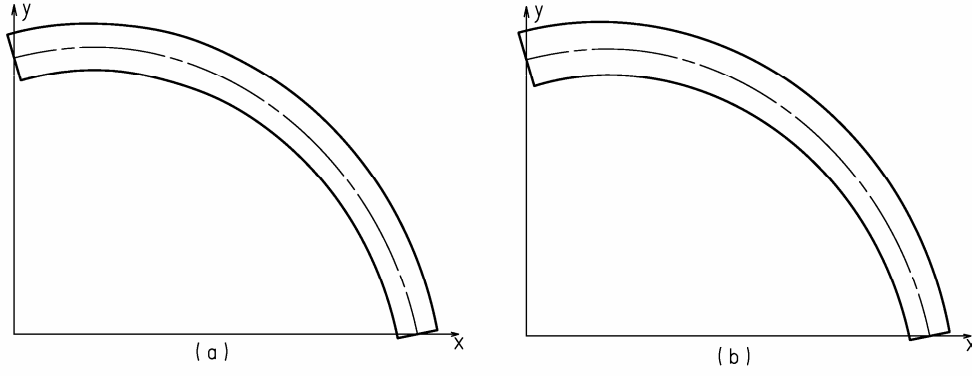
$$\theta_A = 90^\circ \Rightarrow \phi_A = \text{atan} \left(\frac{\cos \theta_A - \mu \sin \theta_A - \mu \theta \cos \theta_A}{-\sin \theta_A - \mu \cos \theta_A + \mu \theta \sin \theta_A} \right) = 0,82208$$

$$\theta_B = 0^\circ \Rightarrow \phi_B = \text{atan} \left(\frac{\cos \theta_B - \mu \sin \theta_B - \mu \theta \cos \theta_B}{-\sin \theta_B - \mu \cos \theta_B + \mu \theta \sin \theta_B} \right) = -1,1903 \quad (6.29)$$

Statik davranışı incelenecek olan spiral çubuğa ait malzeme özellikleri ve geometrik özellikler aşağıda verilmektedir. Çubuk kesiti dikdörtgen olup, kiriş açısı $\theta=90^\circ$ alınarak hesaplara dahil edilmiştir. h yüksekliği α katsayısına bağlı olarak kesit boyunca değişmekte iken çubuk genişliği b sabit kalır.

$R_o = 1 \text{ m}$	$E = 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$A_o = 0.01 \text{ m}^2$	$\nu = 0.15$
$I_{bo} = 8.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$k_n = 5/6$

Spiral çubuğun geometrisini belirleyen (6.22) eşitliğinde; μ eğrilik yarıçapını, α kesit değişimini belirleyen sabit katsayılardır. $\mu = 0.0$ ve 0.2 değerini alması durumunda, $\alpha = 0.2$ ve 0.4 değerleri için hesaplamalar yapılacaktır. $\mu = 0.0$ olması durumu çember eksenli çubuğu ifade eder. **Şekil 6.10**'de $\mu = 0.2$ olması durumunda elde edilen iki farklı spiral geometrisi verilmektedir.



Şekil 6.11 : Kullanılan spiral geometriler,
 (a) $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.2$
 (b) $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.4$.

Yukarıda verilen sonlu eleman formülasyonu ile, 90° kiriş açısına sahip, spiral eksenli ankastre-serbest çubukların yer değiştirmeleri hesaplanmıştır. Spiral çubuğa uç noktasından, normal eksen doğrultusunda $F=1000\text{N}$ büyüklüğünde tekil kuvvet etmektedir.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi yer değiştirmelerine ait analitik çözümünün sonlu eleman yöntemine uyarlanması oldukça başarılı, gerçek çözüm sonuçlarıyla eşleşen sonuçlar vermektedir. Spiral eksenli çubukta, $\mu = 0.0$ iken yani çember eksenli çubuk göz önüne alındığında, elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla oldukça uyumludur. $\mu = 0.2$ olması durumunda, eğrilik değişken olmakta ve iki yöntemin sonuçları arasındaki uyumun iyi olduğu söylenebilir. Kiriş açısının 9 farklı değerinde sonuçları gözlemleyebilmek için, sonlu eleman çözümü 9 eleman kullanılarak elde edilmiştir.

Çizelge 6.5 : Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması, $\mu=0.0$ ve $\alpha=0.0, 0.2, 0.4$.

	α	Yer değiştirme	Kiriş açısı									
			0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Tüfekçi & Arpacı [9]	0	w (cm)	0.30017	0.2228	0.15656	0.10266	0.0614	0.03223	0.01379	0.00405	4.362×10^{-4}	0
		u (cm)	0.47169	0.41299	0.34486	0.27215	0.19846	0.12446	0.0463	-0.04431	-0.15748	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	6.00024	5.90908	5.63838	5.19636	4.59645	3.85688	3.00012	2.0522	1.04193	0
	0.2	w (cm)	0.17054	0.12459	0.08606	0.05542	0.03252	0.01673	0.007	0.00199	1.941×10^{-4}	0
		u (cm)	0.28267	0.24275	0.19829	0.15271	0.10802	0.06369	0.016	-0.04135	-0.11493	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	3.78568	3.6997	3.46329	3.10804	2.66405	2.15933	1.61941	1.06695	0.521625	0
	0.4	w (cm)	0.10544	0.0759	0.05161	0.0327	0.01887	0.00954	0.00391	0.00108	9.312×10^{-5}	0
		u (cm)	0.18334	0.15456	0.12364	0.0931	0.06397	0.03525	0.00363	-0.03569	-0.08718	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	2.57949	2.49829	2.29077	2.00183	1.66604	1.3097	0.95264	0.60914	0.28935	0
Bu çalışma (SEY)	0	w (cm)	0.30045	0.22292	0.15658	0.10262	0.06134	0.03218	0.01376	0.00404	0.00044	0
		u (cm)	0.47273	0.41382	0.34551	0.27293	0.20119	0.13505	0.07879	-0.03593	-0.00912	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	6.00024	5.90908	5.63838	5.19636	4.59645	3.85688	3.00012	2.05220	1.04193	0
	0.2	w (cm)	0.17104	0.12492	0.08626	0.05552	0.03257	0.01676	0.00702	0.00201	0.00020	0
		u (cm)	0.28384	0.24373	0.19909	0.15361	0.11050	0.07236	0.04119	-0.01835	-0.00457	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	3.78778	3.70063	3.46337	3.10755	2.66323	2.15841	1.61854	1.06627	0.52125	0
	0.4	w (cm)	0.10585	0.07616	0.05177	0.03279	0.01892	0.00957	0.00393	0.00110	0.00010	0
		u (cm)	0.18433	0.15536	0.12429	0.09384	0.06606	0.04235	0.02363	-0.01033	-0.00253	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	2.58002	2.49677	2.28820	1.99889	1.66318	1.30725	0.95070	0.60782	0.28870	0

Çizelge 6.6 : Spiral geometriye sahip çubuğa ait sonlu eleman ve analitik sonuçların karşılaştırılması, $\mu=0.2$ ve $\alpha=0.0, 0.2, 0.4$.

	α	Yer değiştirme	Kiriş açısı									
			0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Tüfekci & Arpacı [9]	0	w (cm)	0.19	0.1372	0.09365	0.05956	0.03451	0.01752	0.00723	0.00203	1.918×10^{-4}	0
		u (cm)	0.31542	0.26565	0.21285	0.16071	0.11112	0.06304	0.0121	-0.04814	-0.12291	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	4.56325	4.47162	4.21192	3.80982	3.2936	2.6927	2.03636	1.35242	0.666261	0
	0.2	w (cm)	0.10993	0.0779	0.0521	0.03244	0.01839	0.00912	0.00366	9.88×10^{-4}	7.912×10^{-5}	0
		u (cm)	0.19336	0.15927	0.12438	0.09126	0.06072	0.03124	-9.7×10^{-4}	-0.04057	-0.090792	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	2.94581	2.85936	2.63248	2.30919	1.92698	1.51674	1.10296	0.70419	0.333677	0
	0.4	w (cm)	0.06905	0.04807	0.03156	0.01928	0.01072	0.00521	0.00205	5.32×10^{-4}	3.352×10^{-5}	0
		u (cm)	0.01279	0.10312	0.0786	0.05616	0.036	0.01647	0.00558	-0.03362	-0.069689	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	2.04705	1.96538	1.76616	1.50311	1.21396	0.92426	0.6505	0.40249	0.185145	0
Bu çalışma (SEY)	0	w (cm)	0.18432	0.13203	0.08931	0.05624	0.03224	0.01617	0.00659	0.00182	1.735×10^{-4}	0
		u (cm)	0.30869	0.25848	0.20568	0.15439	0.10788	0.06851	0.03774	-0.01622	-0.38715	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	4.48660	4.39250	4.12750	3.72050	3.20270	2.60570	1.96020	1.29470	0.63427	0
	0.2	w (cm)	0.10419	0.07310	0.04835	0.02975	0.01664	0.00814	0.00322	8.97×10^{-4}	6.90×10^{-5}	0
		u (cm)	0.18563	0.15174	0.11744	0.08558	0.05801	0.03574	-0.01911	-0.07978	-0.18524	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	2.84620	2.75750	2.52760	2.20410	1.82680	1.42720	1.02990	0.65242	0.30679	0
	0.4	w (cm)	0.06439	0.04431	0.02871	0.01730	0.00947	0.00453	0.00175	4.47×10^{-4}	2.83×10^{-5}	0
		u (cm)	0.12125	0.09685	0.07302	0.05180	0.03419	0.02053	0.01072	-0.04375	-0.09948	0
		$\Omega_b \times 10^{-3}$ (rad)	1.95550	1.87180	1.67130	1.41080	1.12920	0.85170	0.59382	0.36404	0.16599	0

7. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Eğri eksenli çubukların düzlem içi yer değiştirmelerine ait analitik çözümünün, sonlu eleman yöntemine uyarlanması oldukça başarılı, gerçek değerlerle eşleşen sonuçlar vermektedir. Benzer çözüm yönteminin eğri eksenli kirişlere ait dinamik denklemlerin çözümünde de kullanılması mümkündür. Dinamik problemlerin incelenmesi çalışmasına eğri eksenli çubuğa ait **M** kütle matrisinin oluşturulması ile başlanmıştır. Her çubuk elemana ait kütle matrisi hesaplanıp, tek bir matris altında birleştirilerek global kütle matrisi elde edilmiştir.

7.1 Analiz

Bir titreşim sisteminde hareket denklemi, sönümsüz serbest titreşim olması durumunda aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (7.1)$$

Burada **M** matrisi, kütle matrisini, **K** matrisi rijitlik (katılık) matrisini, **u** noktasal yer değiştirme ve **ü** noktasal ivme vektörlerini ifade ederler. Bölüm 6'da, eğri eksenli çubukların düzlem içi yer değiştirmelerine ait analitik çözümden faydalananarak **K** rijitlik matrisi elde edilmişti. Eğri eksenli çubukların titreşim problemlerinin çözümü için **M** kütle matrisinin elde edilmesi gerekmektedir.

Sonlu eleman formülasyonuna uygun olarak kütle matrisinin elde edilmesinde tanımlanan yer değiştirme fonksiyonlarının önemi büyüktür. Bu fonksiyonlar, problemin fiziği ile uyumlu, aranan büyüklüğün eleman içindeki değişimini gösteren fonksiyonlardır. Fonksiyon içerisindeki katsayılar, düğüm noktalarındaki aranan büyüklükler cinsinden tayin edilebilmektedir. Çözüm yapıp düğüm noktalarındaki bilinmeyenler elde edildikten sonra eleman içindeki değişim belirlenmiş demektir.

Sonlu eleman içinde, davranışı temsil eden yer değiştirme fonksiyonları, tüm çubuk için bir araya getirildiğinde çubuk davranışını iyi bir yaklaşımla temsil edebilmelidir. Bu çalışmada, literatürdeki benzer çalışmalara paralel olarak [50, 51], yer değiştirme fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlar olarak seçilmektedir. Normal, teğetsel yer değiştirmeler ve dönme açısı,

$$\begin{aligned}
 u &= G_1 + G_2 \cos \theta + G_3 \sin \theta + G_4 \theta \sin \theta + G_6 \theta \cos \theta \\
 w &= G_1 C\theta + G_2 \sin \theta - G_3 \cos \theta + G_4 (\sin \theta - \theta \cos \theta) + G_5 + G_6 (\cos \theta + \theta \sin \theta) \\
 \Omega &= G_1 \frac{C}{R} \theta + G_4 \frac{2}{R} \cos \theta + G_5 \frac{1}{R} + G_6 \frac{2}{R} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

şeklinde ifade edilirler. Burada C katsayısı, I_b kesit eylemsizlik momenti, A kesit alanı ve R eğrilik yarıçapına bağlı olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$C = 1 + \frac{I_b}{AR^2} \tag{7.3}$$

G_1 - G_6 , sınır şartlarına bağlı olarak elde edilecek katsayılardır. (7.2) eşitlikleri matris olarak düzenlendiğinde,

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{G} \tag{7.4}$$

Burada,

$$\mathbf{u} = \{u \ w \ \Omega\} \tag{7.5}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta & \sin \theta & \theta \sin \theta & 0 & \theta \cos \theta \\ C\theta & \sin \theta & -\cos \theta & \sin \theta - \theta \cos \theta & 1 & \cos \theta + \theta \sin \theta \\ \frac{C}{R}\theta & 0 & 0 & \frac{2}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} & \frac{2}{R} \cos \theta \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$\mathbf{G} = \{G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6\} \tag{7.7}$$

şeklinde ifade edilir.

(7.4) denklemi, eğri eksenli elemanın iki ucu için uygulandığında,

$$\delta = \{u_1 \ w_1 \ \Omega_1 \ u_2 \ w_2 \ \Omega_2\} \text{ ve} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \theta_1 \sin \theta_1 & 0 & \theta_1 \cos \theta_1 \\ C\theta_1 & \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1 & 1 & \cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1 \\ \frac{C}{R}\theta_1 & 0 & 0 & \frac{2}{R}\sin \theta_1 & \frac{1}{R} & \frac{2}{R}\cos \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & \theta_2 \sin \theta_2 & 0 & \theta_2 \cos \theta_2 \\ C\theta_2 & \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & \sin \theta_2 - \theta_2 \cos \theta_2 & 1 & \cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2 \\ \frac{C}{R}\theta_2 & 0 & 0 & \frac{2}{R}\sin \theta_2 & \frac{1}{R} & \frac{2}{R}\cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

olmak üzere,

$$\delta = \mathbf{B} \mathbf{G} \quad (7.10)$$

elde edilir.

Buradan,

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{-1} \delta \quad (7.11)$$

bulunur. (7.11) eşitliği (7.4) içine yerleştirildiğinde,

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{B}^{-1} \delta \quad (7.12)$$

elde edilir.

Cisim için kinetik enerji ifadesi, $\dot{u}$, $\dot{w}$ ve $\dot{\Omega}$ yer değiştirmelerin zamana göre türevini yani hızları göstermek üzere,

$$T = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho A(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \rho I_b \dot{\Omega}^2] R d\theta \quad (7.13)$$

şeklinde yazılır. Burada ρ elemana ait özkütle ve I_b binormal eksene göre eylemsizlik momentini ifade eder. Dönme eylemsizliği etkisi enerji ifadesinde yer almaktadır. Literatürde bulunan pek çok çalışmada, bu etki hesaplara dahil edilmemiştir.

Basit bir harmonik hareket denkleminde yer değiştirme, w doğal frekansları göstermek üzere;

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{i\omega t} \quad (7.14)$$

şeklinde ifade edilir.

(7.12) ve (7.14) eşitlikleri kinetik enerji ifadesi içine yerleştirilip, ifade düzenlendiğinde,

$$T = \frac{1}{2} \rho R \omega^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\mathbf{H} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta}]^T \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{bmatrix} [\mathbf{H} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta}] d\theta \quad (7.15)$$

ve

$$T = \frac{1}{2} \rho R \omega^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{H}^T] \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{bmatrix} [\mathbf{H} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta}] d\theta \quad (7.16)$$

elde edilir.

Sabit katsayılı terimleri içeren $\boldsymbol{\delta}$ vektörü integral dışına alındığında,

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \boldsymbol{\delta}^T \underbrace{\rho R \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{H}^T] \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{bmatrix} [\mathbf{H} \mathbf{B}^{-1}]}_{\mathbf{M}} d\theta \boldsymbol{\delta} \quad (7.17)$$

elde edilir. Kinetik enerji denklemi,

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\delta} \quad (7.18)$$

haline gelir.

Burada, $\mathbf{M}$ kütle matrisi, $\mathbf{B}$ vektörü integral dışına alınarak yazılırsa,

$$\mathbf{M} = \rho R (\mathbf{B}^{-1})^T \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{H}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{H} d\theta \right) \mathbf{B}^{-1} \quad (7.19)$$

elde edilir. $\mathbf{\Lambda}$ matrisi ifadeyi basitleştirmek amacıyla oluşturulmuş elemana ait, kesit alanı ve dönme eylemsizlik momentini içeren matristir.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Kütle matrisinin hesabı, parametrik olarak yapıldığında, çok uzun ve karmaşık ifadeler ortaya çıkmaktadır. Bu ifadelerin burada verilmesi uygun olmadığından, kütle matrisi ifadesi içerisinde yer alan,

$$\bar{\mathbf{H}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{H}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{H} d\theta \quad (7.21)$$

integralinin çözümü oluşturan $\bar{\mathbf{H}}$ matrisinin elemanları aşağıda verilmektedir. Kütle matrisi, burada incelenecek olan örnekler için sayısal olarak hesaplanmıştır.

$$\bar{\mathbf{H}}_{11} = \left[A\theta + C^2 \left(A + \frac{I_y}{R^2} \right) \left(\frac{\theta^3}{3} \right) \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{21} = A \left[(1 + C) \sin \theta - C\theta \cos \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{22} = A [\theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{31} = A \left[-(1 + C) \cos \theta - C\theta \sin \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{32} = 0$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{33} = A [\theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{41} = \left[\left(A + 3AC + \frac{2CI_y}{R^2} \right) (\sin \theta - \theta \cos \theta) - AC\theta^2 \sin \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{42} = \frac{A}{2} [\theta - \sin \theta \cos \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{43} = \frac{A}{2} [\theta^2 - \sin^2 \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{44} = \left[\frac{A\theta^3}{3} + \left(A + \frac{2I_y}{R^2} \right) (\theta - \sin \theta \cos \theta) - A\theta \sin^2 \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{51} = \left[\left(\frac{C}{2} \right) \left(A + \frac{I_y}{R^2} \right) \theta^2 \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{52} = A [-\cos \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{53} = A [-\sin \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{54} = \left[- \left(2A + \frac{2I_y}{R^2} \right) \cos \theta - A\theta \sin \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{55} = \left[\left(A + \frac{I_y}{R^2} \right) \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{61} = \left[\left(A + 3AC + \frac{2CI_y}{R^2} \right) (\cos \theta + \theta \sin \theta) - AC\theta^2 \sin \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{62} = \frac{A}{2} [\theta^2 + \sin^2 \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{63} = \frac{A}{2} [-\theta - \sin \theta \cos \theta]_{\theta^1}^{\theta^2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{H}}_{64} &= \frac{1}{2} \left[-A \left(\theta \sin 2\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) + \left(A + \frac{4I_y}{R^2} \right) \sin^2 \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2} \\
\bar{\mathbf{H}}_{65} &= \left[\left(2A + \frac{2I_y}{R^2} \right) \sin \theta - A\theta \cos \theta \right]_{\theta^1}^{\theta^2} \\
\bar{\mathbf{H}}_{66} &= \left[\frac{A\theta^3}{3} + A \sin \theta (\cos \theta + \theta \sin \theta) + \left(\frac{2I_y}{R^2} \right) (\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_{\theta^1}^{\theta^2} \quad (7.22)
\end{aligned}$$

7.2 Özdeğer Probleminin Çözümü

Sönümü ihmal edilmiş bir sistemde, serbest titreşim hareketinin denklemi yer değiştirmelere bağlı olarak (7.1) eşitliğinde ifade edilmektedir. İfade edilen basit harmonik hareket denkleminin çözümü (7.14) eşitliğinde verilmiştir. (7.14) ifadesi (7.1)'de verilen hareket denklemi içerisine yerleştirildiğinde,

$$([K] - \omega^2 [M])\{u\} e^{i\omega t} = \{0\} \quad (7.23)$$

elde edilir. Hareket denklemi, bir özdeğer problemidir ve denklemin çözümünün olması için aşağıda verilen şartın sağlanması gerekmektedir.

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (7.24)$$

Eşitliğin çözümünden, özdeğerler yani doğal frekans değerleri elde edilir.

7.3 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Yukarıda verilen yöntem, eğri eksenli çubuk elemana ait $\mathbf{M}$ kütle matrisinin hesaplanmasında kullanılmaktadır. Böylece, Bölüm 6'da verilen yöntemle göre hesaplanan $\mathbf{K}$ rijitlik matrisi ile birlikte, eğri eksenli çubukların titreşim problemi, oluşturulan sonlu eleman formülasyonu ile çözülebilmektedir. Her eleman için elde edilen $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{M}$ matrisleri, birleştirilerek global $\mathbf{K}$ ve global $\mathbf{M}$ matrisleri oluşturulmakta, farklı geometriler için, çeşitli yükleme ve sınır şartlarına sahip problemler çözülebilmektedir.

Matris hesaplamaları, Matlab programında yapılmış, uzun ve karmaşık ifadelerden oluşan kütle matrisi sayısal olarak hesaplanmıştır. Problemlerin çözümünde, global **K** ve global **M** matrisleri kullanılarak özdeğer problemi oluşturulmuş, (7.24)'de verilen determinant hesabı yapılarak özdeğerler yani çubuğa ait doğal frekanslar elde edilmiştir.

Aşağıda, literatürdeki farklı geometriler için yapılan sayısal örnekler sunulmakta ve burada verilen sonlu eleman formülasyonu çözümleri ile karşılaştırmalar yapılmaktadır. Burada sunulan yöntem, çubuk tek elemanla modellendiğinde bile yeterince doğru sonuç verebilmektedir. Ancak Matlab'de oluşturulan program, çubuğun en az iki elemana bölünmesini gerektirmektedir. Aşağıda verilen örnekler çubuk 4 elemana bölünerek hesaplanan değerlerdir.

Tüfekçi ve Arpacı'ya ait [31] çalışmada, farklı kiriş açıklıklarına sahip, çember eksenli sabit kesitli çubuk için doğal frekans değerleri hesaplanmaktadır. Çalışmada, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ayrı ayrı dahil edilmesi durumlarına ait frekans değerleri de sunulmaktadır. Burada verilen sonuçlar, tüm etkilerin hesaplara dahil edilmesi durumunda elde edilen değerlerdir.

Çizelge 7.1, 180° kiriş açıklığına sahip, sabit kesitli, çember eksenli çubuğun, ankastre-ankastre ve sabit-sabit mesnet koşulları altında elde edilen doğal frekans değerini vermektedir. Frekans değeri boyutsuz olup,

$$c = \omega R^2 \theta^2 \sqrt{\mu / EI} \quad (7.25)$$

şeklinde hesaplanır.

λ sembolü, narinlik oranını göstermektedir ve

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_{b1}}{A_1}}} \quad (7.26)$$

olarak tanımlanır. Üç farklı narinlik oranında incelemeler yapılmıştır. Eşitlikte, R kiriş ekseninin eğrilik yarıçapını ve i jirasyon yarıçapını ifade eder. λ 'nın 50, 75 ve 100 olması durumları incelenmektedir.

Çizelge 7.1 : Ref. [31]'de, ankastre-ankastre ve sabit-sabit çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerlerinin sonlu eleman ve analitik yöntemde karşılaştırılması.

	Mod No	[31]	Bu çalışma (SEY)	[31]	Bu çalışma (SEY)
		ankastre-ankastre		sabit-sabit	
$\lambda=100$	1	43.1709	43.19805	22.3496	22.35409
	2	94.7556	94.89133	68.1643	68.20785
	3	175.7111	176.252	137.4288	137.6692
	4	268.4875	270.1158	223.7427	224.6374
	5	387.7377	391.9819	332.0705	334.7061
$\lambda = 75$	1	43.0922	43.13896	22.3325	22.34035
	2	94.3657	94.57862	68.036	68.10486
	3	174.8113	175.5799	137.0236	137.3643
	4	265.9794	268.1028	222.5925	223.7601
	5	383.912	389.1347	329.9577	333.2013
$\lambda = 50$	1	42.8696	42.97104	22.2835	22.30124
	2	93.268	93.68532	67.6721	67.81042
	3	172.2951	173.6441	135.8837	136.4849
	4	258.4766	261.689	219.2887	221.1031
	5	372.7893	380.2215	323.9065	328.624

Bu çalışmada sunulan sonlu eleman yöntemi ile analitik yöntem arasındaki sonuçların, sadece 4 eleman kullanılmasına rağmen, oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Yüksek mod sayılarında frekans değerinin farklılaşması, kütle matrisinin şekil fonksiyonları yardımıyla oluşturulması ve çok az sayıda eleman kullanılması nedeniyledir. Sonlu eleman yöntemi sonuçları, tüm modlar için analitik olarak elde edilen sonuçlardan daha yüksek değerlere sahiptir.

Cannorozzi ve Molari tarafından yapılan çalışma [64], yine bir sol eleman çalışmasıdır. Oluşturulan sonlu eleman formülasyonu, sabit eğriliğe ve sabit kesit alanına sahip çubuğun doğal frekanslarının hesaplanmasında kullanılabilir. Çalışmada, 90° ve 40° giriş açıklıklarına sahip sabit kesitli eğri eksenli çubuğun, sabit-sabit sınır koşullarındaki dinamik davranışı incelenmektedir. Aşağıda verilen geometrik özelliklere sahip çubuk için elde edilen frekans değerleri (rad/s) Çizelge 7.2'de, [53] ile karşılaştırılmaktadır.

$$R = 0.3048 \text{ m}, \quad h = 0.00635 \text{ m}, \quad b = 0.01588 \text{ m}, \\ E = 2.096 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad \rho = 292393.9524 \text{ kg/m}^3$$

Çizelge 7.2 : Ref. [53]'de, 90° ve 40° kiriş açıklıklarına sahip sabit-sabit çubuğa ait doğal frekans (rad/s) değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması.

	Mod No	[53]	Bu çalışma (SEY)
Kiriş Açısı=90°	1	229.391	229.8982
	2	537.886	542.6056
	3	1025.11	1075.113
	4	1586.19	1662.71
Kiriş Açısı=40°	1	1304.11	1309.313
	2	2299.86	2323.187
	3	3260.39	3318.502
	4	5260.08	5878.917

Kim ve Lee'ye ait çalışmada [58], dikdörtgen kesitli eğri eksenli çubukların titreşimlerini incelemek üzere bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmuştur. Farklı kiriş açıklıklarına sahip çubuğun sabit-sabit sınır koşullarındaki doğal frekans değerleri sunulmaktadır. Çubuk geometrisi daha önce verilen örnekteki [53] geometri ile aynıdır. Hesaplanan frekans değerleri (rad/s) Çizelge 7.3'de, [58] ile karşılaştırılmalı olarak verilmektedir. Elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

Çizelge 7.3 : Ref. [58]'de, farklı kiriş açıklıklarına sahip sabit-sabit çubuğa ait doğal frekans değerlerinin (rad/s) mevcut çalışma ile karşılaştırılması.

Kiriş Açısı	[58]	Bu çalışma (SEY)
30°	2370.01	2349.4767
60°	564.05	561.7001
90°	230.31	229.8982
120°	115.82	115.6670
150°	64.52	64.4313
180°	37.91	37.8547
210°	22.8	22.7663
240°	13.69	13.6612
270°	7.94	7.9216
300°	4.2	4.1846
330°	1.71	1.6920
350°	0.51	0.4943

Sonlu eleman çalışmalarından biri olan Yang ve diğerlerine ait olan [52]'de eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği denklemler kullanılarak, çözüme gidilmiştir. . Boyutsuz frekans değeri,

$$c = \omega l^2 \sqrt{\rho A / EI} \quad (7.27)$$

olarak hesaplara dahil edilmiştir.

Ankastre-ankastre sınır şartı için, çubuk geometrisi,

$$\begin{aligned} R &= 0.6366 \text{ m}, & A &= 1 \text{ m}^2, & I &= 0.0016 \text{ m}^4, & R/r &= 15.915, \\ E &= 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & \rho &= 2777 \text{ kg/m}^3, & k_b &= 0.85, & l/r &= 25, \end{aligned}$$

sabit-sabit sınır şartı için, çubuk geometrisi,

$$\begin{aligned} R &= 0.75 \text{ m}, & A &= 4 \text{ m}^2, & I &= 0.001 \text{ m}^4, & R/r &= 15, \\ E &= 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & \rho &= 2777 \text{ kg/m}^3, & k_b &= 0.85, & l/r &= 23.56, \end{aligned}$$

olarak alınmıştır.

90° kiriş açıklığına sahip, sabit kesitli eğri eksenli çubuğun, boyutsuz frekans değerleri Çizelge 7.4'de verilmektedir.

Çizelge 7.4 : Ref. [52]'de, 90° kiriş açıklığına sahip sabit-sabit çubuğa ait boyutsuz doğal frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması.

	Mod No	[52]	Bu çalışma (SEY)
AA	1	36.657	36.54711
	2	42.289	41.90753
	3	82.228	79.58173
	4	84.471	84.19125
	5	122.298	114.5232
SS	1	29.306	29.10423
	2	33.243	33.18855
	3	67.123	65.1371
	4	79.95	79.61166
	5	107.844	100.7788

Analitik çözüm yönteminin, sonlu eleman yöntemine uyarlanarak oluşturulan eleman formülasyonu, eğri eksenli çubuğa ait titreşim problemlerinin çözümünde oldukça başarılı sonuçlar vermektedir. Burada verilen örnekler, sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubukları kapsamaktadır. Eğrilik yarıçapını ve kesit alanı, değişken olarak enerji ifadesinde yer alan integral hesabına dahil edilebilir. Bu şekilde, sonlu eleman formülasyonunu, kütle matrisini düzenleyerek değişken eğrilik ve değişken kesitli çubuklar için de oluşturmak mümkündür.

8. DENEYSEL ÇALIŞMALAR VE DENEYSEL TİTREŞİM ANALİZİ

Deneysel titreşim analizi (modal analiz), son yıllarda gittikçe daha fazla araştırılan bir konu haline gelmiştir. Özellikle, bilgisayar teknolojisinin geliştiği günümüzde, bilgisayar destekli ölçüm cihazları, bu işlemin, daha hızlı yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu yöntemle, yapıların dinamik karakteristikleri olarak adlandırılan doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları deneysel olarak elde edilebilmektedir. Böyle bir deneysel yöntem gereksinim duyulmasının esas sebepleri arasında, yapıların teorik analizinde yapılan kabullerin gerçekte sağlanıp sağlanmadığının tespit edilmesi, teorik analizinin yapılmasında güçlük olan sistemlerin dinamik karakteristiklerinin deneysel olarak belirlenmesi ve kullanılmış ve/veya hasar görmüş yapıların durumlarının belirlenmesi yer almaktadır.

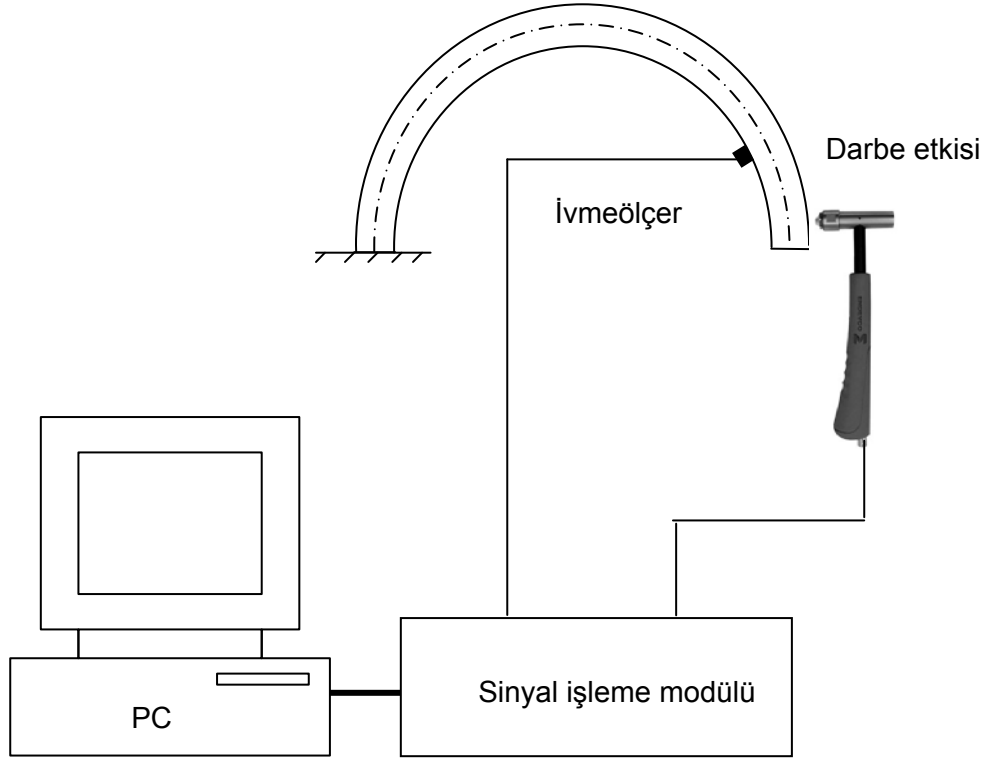
Son yıllardaki teknolojik gelişmelere bağlı olarak, dijital sinyal işleme tekniği, bilgisayar sistemleri ve kullanılan yazılımlar da gelişmekte, böylece deneysel titreşim analizi yaygın ve uygulanabilir bir hal almaktadır. Bir yapının ya da sistemin modal parametreleri, onun dinamik davranışının anlaşılmasında önemli rol oynar.

Basit bir deneysel titreşim analizinde bulunması gereken temel cihazlar; sinyal üretici, ivmeölçer (transducer) ve analizör olarak sayılabilir. Sinyal üretici adı verilen cihaz farklı özelliklere sahip titreşimler oluşturmaktadır. Sisteme, giriş sinyali olarak verilen ve büyüklüğü bilinen bu titreşim hareketi, ivmeölçer ile elektrik sinyallerine çevrilir. Elde edilen dijital sinyaller, okumayı kolaylaştırmak amacıyla bir sinyal yükselticiden geçirilerek analizöre iletilir. Analizör, içerisinde bulunan yazılım ile, sinyal üreticiden gelen ve ivmeölçerin ilettiği sinyalleri, ivmeölçerin karakteristik özelliklerine bağlı olarak işleyerek analiz eder ve sistemin dinamik yapısı hakkında bilgi elde edilir.

Bu çalışmada, farklı geometrik özelliklere sahip çember eksenli çubuklara ait deneysel titreşim ölçümleri sunulmakta, çubukların doğal frekansları ve mod şekilleri incelenmektedir. Çalışmada, sinyal üretici yerine titreşim ölçümleri için özel olarak tasarlanan bir çekiç kullanılmış ve sistemlerin serbest titreşimleri ele alınmıştır. Deneysel olarak elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri, teorik sonuçlarla ve sonlu eleman yöntemi sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

8.1 Deney Düzeneği

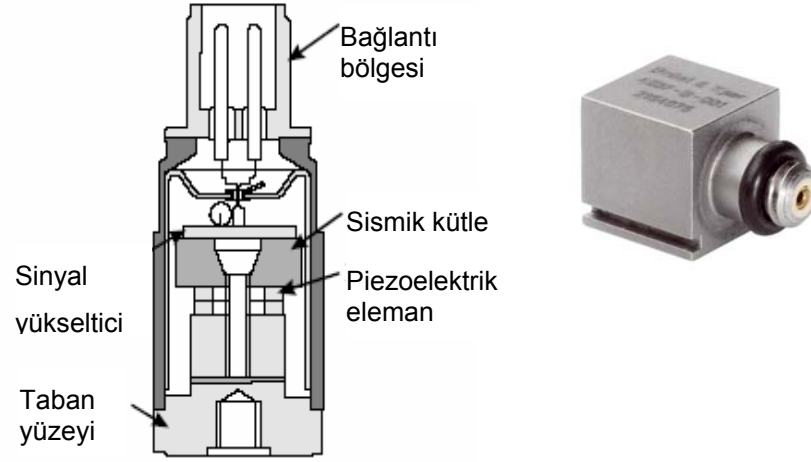
Deney düzeneği, bu çalışma için özel olarak tasarlanmış olup, ana kaide, iki adet mesnet, bağlantı elemanları, titreşim sönümleyici lastik takozlar, lme elemanı ve ekipmanlarından oluşmaktadır. Düzenekte, ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest sınır şartları sağlanmış, düzlem içi ve düzlem dışı titreşim hareketi için deneysel veriler elde edilmiştir



şekil 8.1 : Deney düzeneği.

Düzlem içi ve düzlem dışı titreşim sinyallerinin algılanması amacıyla, 4507B (Brüel&Kjaer) tipi tek eksenli piezoelektrik ivmeölçer, hem düzlem içi hem de düzlem dışı doğrultularda çubuk üzerine yapıştırılmıştır. Bir piezoelektrik ivmeölçer; pizeoelektrik eleman, sismik kütleler ve sinyal yükselticiden meydana gelir. Piezoelektrik elemanın bir yüzü, algılayıcının tabanındaki katı desteğe bağlıdır. Sismik kütle ise diğer tarafındadır. İvmeölçer titreşim etkisinde kaldığında, piezoelektrik elemana etki eden bir kuvvet oluşur. Newton Kanunu'na göre bu kuvvet, sismik kütlenin yarattığı ivmenin sonucudur. Piezoelektrik ilkesine göre, uygulanan bu kuvvetle orantılı bir şekilde elektriksel yük çıkışı gözlemlenir. Sismik kütle, sabit bir değerde olduğundan dolayı ortaya çıkan bu elektriksel yük, kütlenin ivmesiyle doğru orantılıdır. Çok düşük votajlarda olan bu sinyaller, yükseltici tarafından daha yüksek seviyelere çıkartılarak, sinyal işleme modülüne

iletilir. Yüksek hassasiyete sahip olan piezoelektrik ivmeölçerler ile oldukça geniş frekans aralığındaki titreşim hareketi incelenebilmektedir.



Şekil 8.2 : Piezoelektrik ivmeölçer.

İvmeölçerin bağlanma şekli, ölçümün doğruluğunda önemli rol oynar. En iyi performans için, özellikle yüksek frekanslarda, ivmeölçerin tabanı ve test edilecek nesnenin yüzeylerinin temiz, düz, pürüzsüz, çiziksiz olmasına dikkat edilmelidir. Yapılan deneylerde, test parçaları temiz, pürüzsüz ancak eğrisel yüzeylere sahip parçalardır. Eğrisel yüzey, çalışma için bir dezavantaj oluşturmaktadır. İvmeölçer, eğrisel yüzey üzerine, hem sağlam bir mekanik bağ oluşturacak, hem de yüzey ve ivmeölçer arasındaki boşlukları kapatacak şekilde, özel bir yapışkanlı madde ile bağlanmıştır.



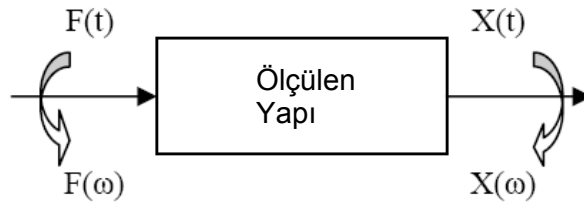
Şekil 8.3 : İvmeölçerlerin bağlanması.

Çubuğa uygulanan ilk hareket, darbe etkisi şeklinde uygulanmış olup, bu iş için özel olarak tasarlanan bir çekiçten (Endevko, 2302-10 tip) faydalanılmıştır. Darbe etkisi uygulandığında, çekicinin ucuna yerleştirilmiş bulunan sinyal algılayıcısı (ivmeölçer) sayesinde, uygulanan kuvveti ölçebilmektedir. Deneylerde kullanılan çekiç, çelik uçlu olup, 1 pC/N hassasiyetine sahiptir.



Şekil 8.4 : Darbe çekici.

Modal parametreler adı verilen doğal frekanslar ve frekanslara ait mod şekilleri, yapıya ait bir dizi frekans cevabı fonksiyonu (Frequency Response Function-FRF) elde edilerek hesaplanır. Yapıya uygulanan etki, darbe (impact) şeklinde zaman ortamında ölçülür. Uygulanan bu kuvvet altında, yapı; sınır koşullarına ve malzeme özelliklerine bağlı olarak bir titreşim hareketi yapar. Yapının, bu etkiye gösterdiği tepki (response) ise yapıya bağlanan ivmeölçerle yine zaman ortamında ölçülür. Fourier dönüşümü (FFT – Fast Fourier Transform) kullanılarak etki ve tepki fonksiyonları zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülür (**Şekil 8.5**).



Şekil 8.5 : Etki ve tepki fonksiyonlarının zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülmesi.

Yapıya ait frekans cevabı fonksiyonu (FRF), Fourier dönüşümleri yapılmış tepki fonksiyonunun, etki fonksiyonuna bölünmesiyle elde edilir [60]. FRF fonksiyonun hangi iki nokta arasındaki bilgiyi taşıdığı sonuçların işlenmesi aşamasında büyük önem taşımaktadır.

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (8.1)$$

Burada;

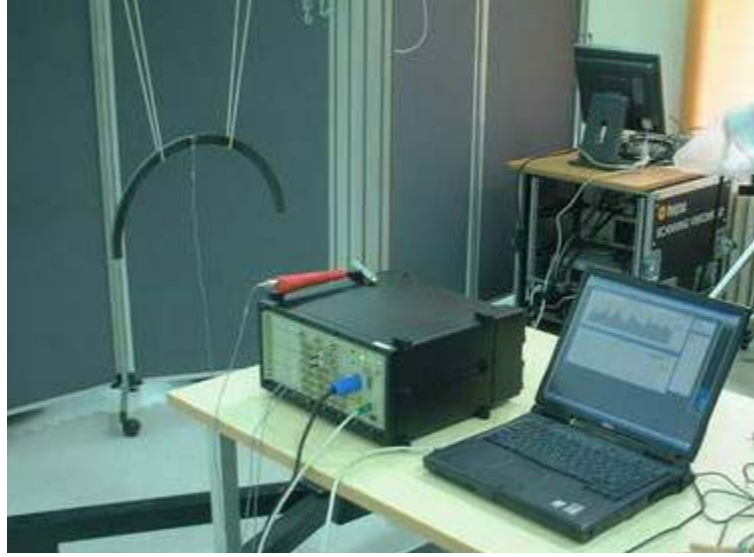
$X(\omega)$: frekans ortamındaki tepki fonksiyonunu,

$F(\omega)$: frekans ortamındaki etki fonksiyonunu,

$H(\omega)$: frekans cevap fonksiyonunu göstermektedir.

Deney sırasında, özel olarak deneysel titreşim analizleri için geliştirilmiş olan PULSE (Brüel&Kjaer) sinyal toplama ve işleme modülü kullanılmıştır. Örnekleme frekansı ve hassasiyet, bilgisayar programı içerisinde ayarlanabilmekte olup, bu bilgiler

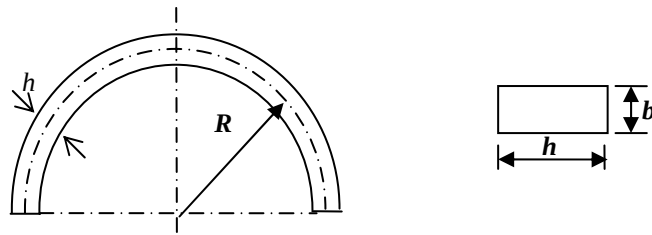
doğrultusunda, ivmeölçer ve çekiçten gelen sinyaller toplanarak işlenmektedir. Elde edilen tüm veriler, FRF diyagramlarına aktarılmakta ve UFF (Universal File Format) olarak saklanabilmektedir. FRF fonksiyonları işlenerek, titreşim sistemine ait, rezonans frekansları, sönüm oranları ve mod şekilleri elde edilebilmektedir. Modal analiz aşamaları aşağıda ayrıntılı olarak ele alınacaktır.



Şekil 8.6 : Deneyde kullanılan cihazlar.

8.2 Deneyde Kullanılan Test Parçaları

Deneyde kullanılan çember eksenli çubuklar, sıcak çekme levha malzemeden lazer yöntemi ile kesilerek imal edilmiş olup, çubuğun boyut değerleri ve malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir:



Şekil 8.7 : Eğri eksenli çubukların geometrik özellikleri.

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 7715 \text{ kg/m}^3$$

$$G = 8.077 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

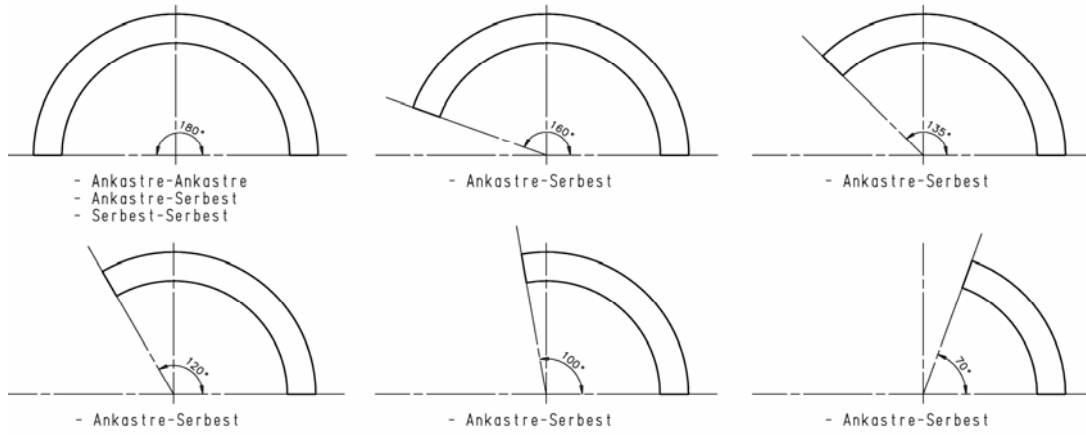
$$h \times b = (20.1 \times 10) \text{ mm}$$

$$\nu = 0.3$$

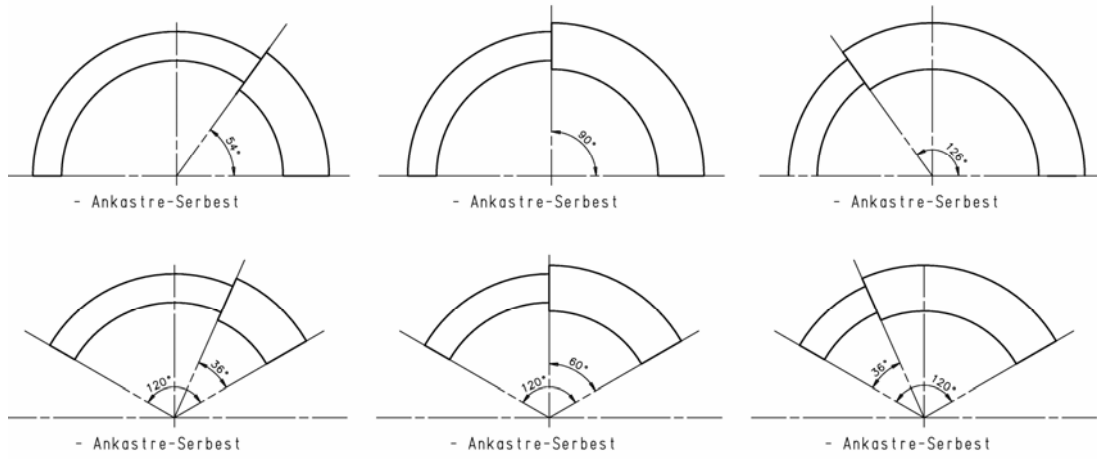
$$R = 200 \text{ mm}$$

“b” ve “h” değerleri sırasıyla kesit yüksekliği ve kesit genişliği olarak tarif edilir. Yapılan çalışmada, dikdörtgen kesitli, kesiti sabit ve kademeli değişen çember

eksenli çubuklar göz önüne alınmıştır. Çubukların, düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri incelenmiştir. Uygulaması, diğer sınır şartlarına göre daha kolay ve muhtemel deney hataları daha az olduğundan, ankastre-serbest sınır şartı bütün çubuklar için tercih edilen sınır şartı olmuştur. Çubuklar, sol uçta serbest, sağ uçta ankastre sınır şartını sağlayacak şekilde mesnetlenmişlerdir. Deneylerde kullanılan çember eksenli çubuklara ait geometriler ve sınır koşulları **Şekil 8.8**'de sunulmaktadır.



(a) Sabit kesitli çubuklar



(b) Kademeli kesitli çubuklar

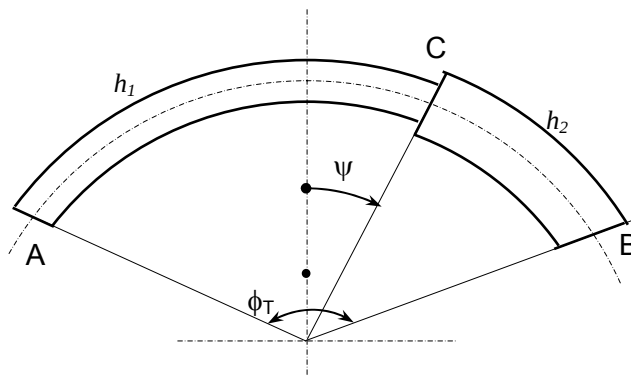
Şekil 8.8 : Deneyde kullanılan çubuklara ait geometriler.

Sabit kesitli çubuklar 70°, 100°, 120°, 135°, 160° ve 180° kiriş açıları (ϕ_T) için test edilmiştir. Kesiti kademeli olarak değişen çubuklarda, kademenin konumu ve kademe oranları Çizelge 8.1’de verilmektedir.

Çizelge 8.1 : Deneyde kullanılan kademeli çubukların özellikleri.

Kiriş Açısı	Kademe Oranı	Kademe Konumu
ϕ_T	$\eta = \frac{h_2}{h_1}$	$\frac{\psi}{\phi_T}$
180°	0.8	-0.2
180°	0.8	0.0
180°	0.8	+0.2
120°	0.8	-0.2
120°	0.8	0.0
120°	0.8	+0.2

Birinci ve ikinci bölgelerin kesitlerinin yükseklikleri arasındaki oran, kademe oranı olarak adlandırılmaktadır ve h_2 / h_1 olarak ifade edilmektedir. Kademenin konumu ψ açısıyla tanımlanmaktadır. ψ / ϕ_T ’ın pozitif değerleri kademenin referans ekseninin sağında olduğu durumu, negatif değerleri ise solunda olduğu durumu ifade eder.

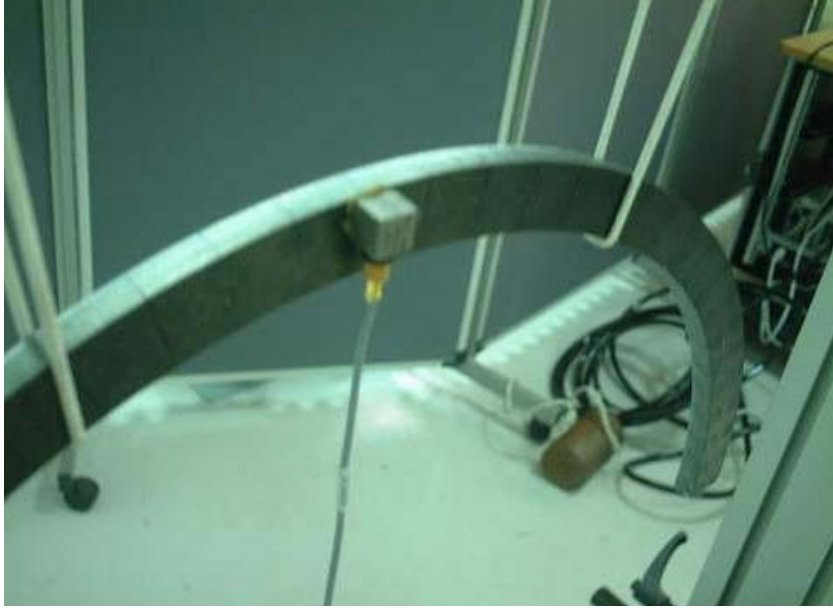


Şekil 8.9 : Çubuk üzerinde kademenin konumu.

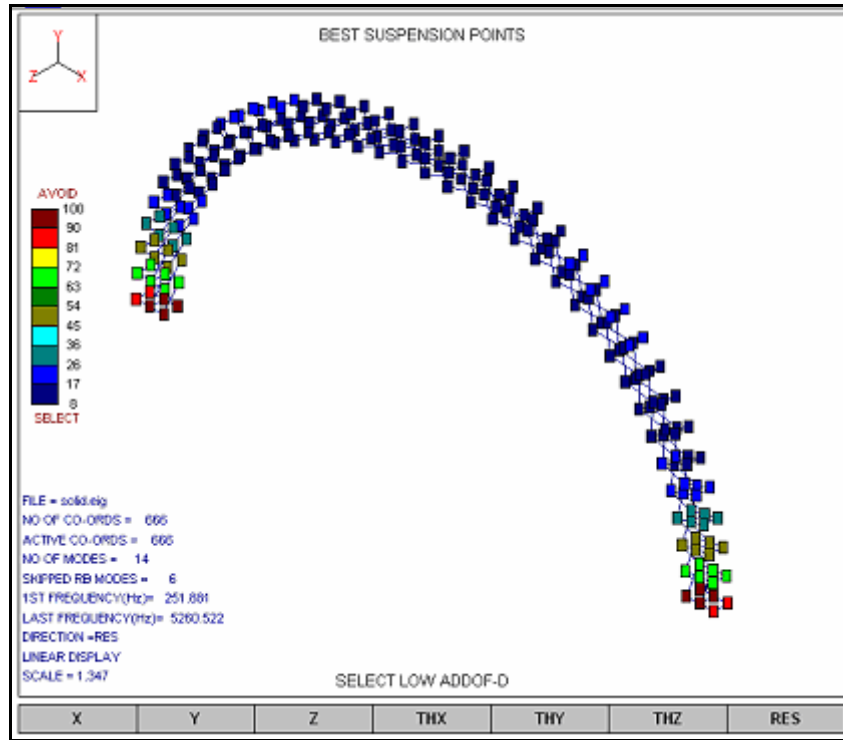
8.3 Deney Planlama

ICATS paket programı, deneysel modal analizin tüm aşamaları için özel olarak tasarlanmış bir programdır. FINES sonlu eleman modülünde hazırlanan, test edilecek parçaya ait model (DSP uzantılı dosya olarak), ICATS içerisindeki MODPLAN modülüne aktarılarak, deney için en uygun mesnet noktaları, tahrik ve ölçüm noktaları belirlenmiştir.

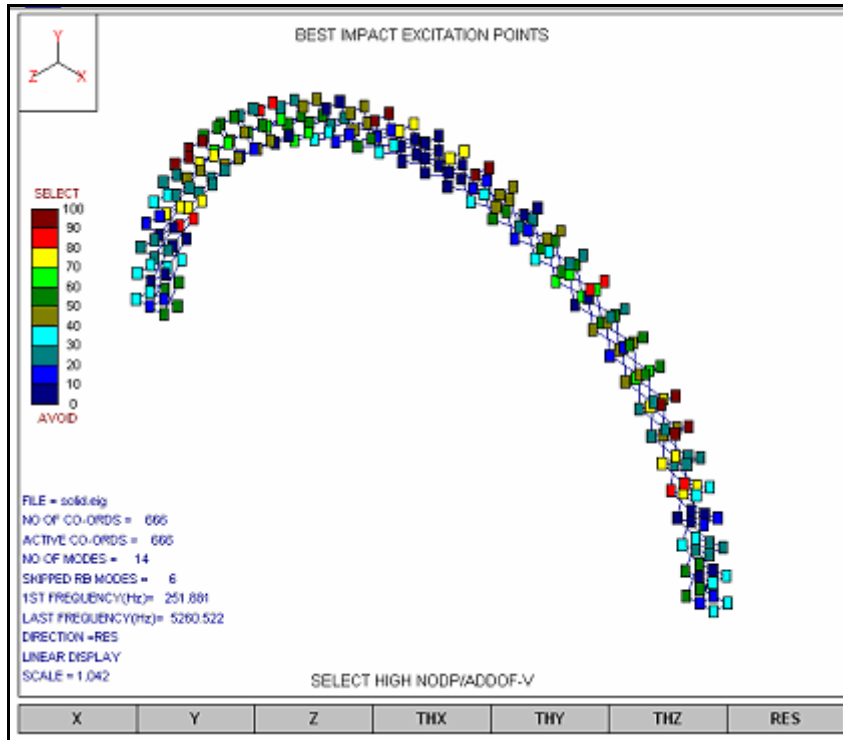
Serbest-serbest sınır şartı çubukların lastiklerle uygun bir yere asılmasıyla gerçekleştirilmiştir (**Şekil 8.11**). Serbest-serbest sınır şartına ait en uygun mesnet noktaları, çember eksenli çubuğun tepe noktası ve civarındaki noktalar olarak hesaplanmıştır (**Şekil 8.11**). Çubuklar, bu verilere dayanarak, tepe noktasının iki yanından, yeterince esnek lastiklerle bağlanarak asılmışlardır. Darbe etkisi için en uygun tahrik noktaları **Şekil 8.12**'de kahverengi ve kırmızı renklerle gösterilen noktalardır. İvmeölçerin yapıştırılacağı en uygun ölçüm noktaları ise, çubuğun uç bölgesinde bulunan kahverengi noktalardır (**Şekil 8.13**). Tüm bu hesaplanan noktalar deney sırasında göz önünde bulundurulmuştur.



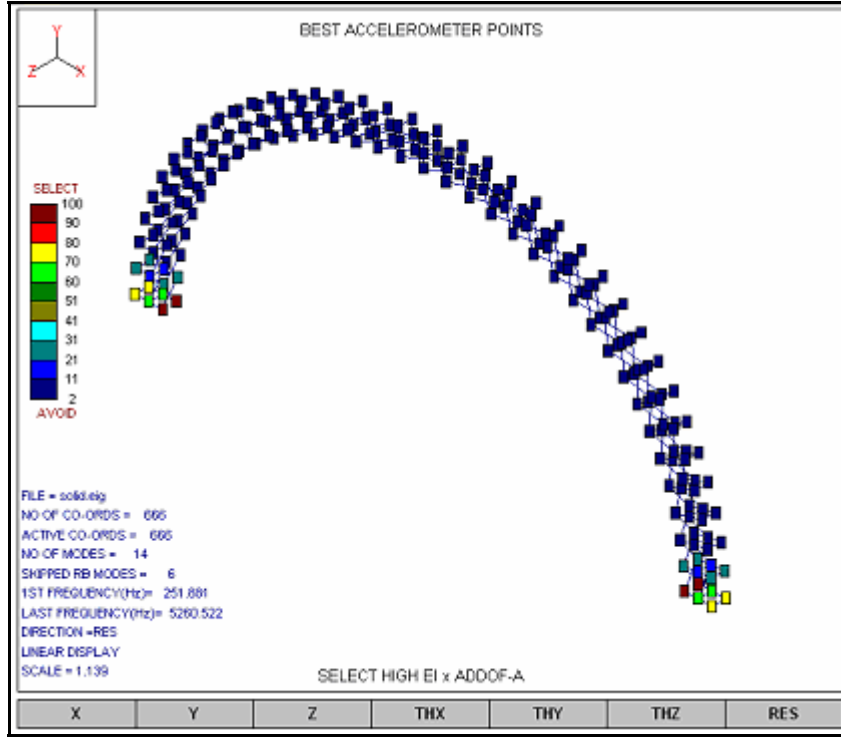
Şekil 8.10 : Serbest-serbest sınır şartına sahip sabit kesitli çubuk.



Şekil 8.11 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun asılma noktaları.



Şekil 8.12 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun tahrik noktaları.



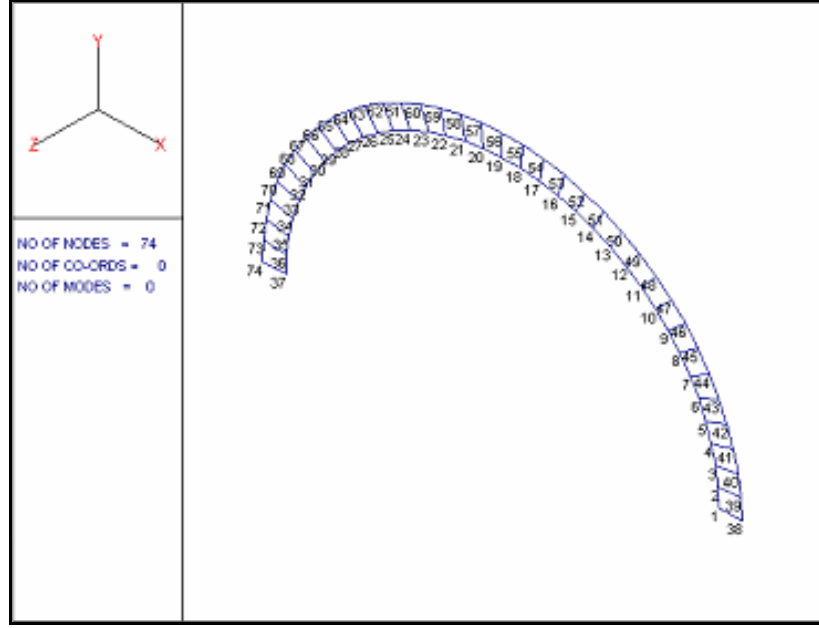
Şekil 8.13 : Serbest-serbest sınır şartı için çubuk üzerindeki en uygun ivmeölçer noktaları.

8.4 Deneyler

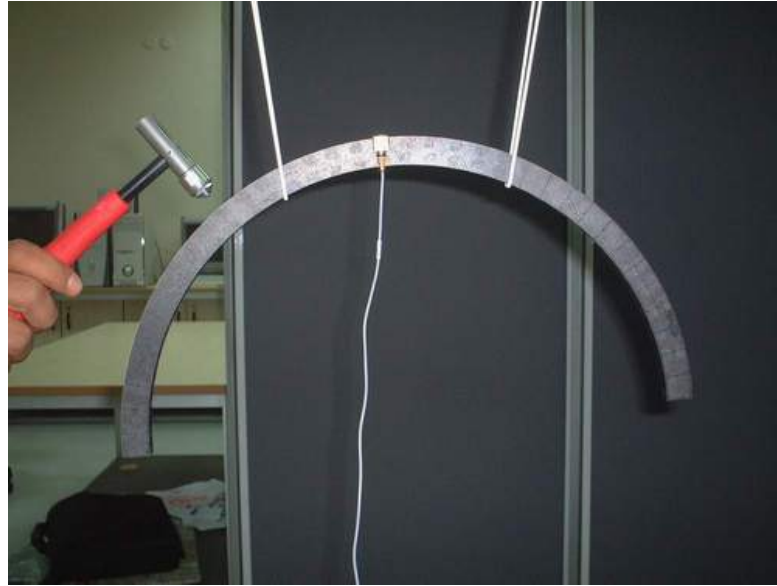
Deneylerde kullanılacak çember eksenli çubuklar, tahrik ve ölçüm noktalarını oluşturmak üzere, elemanlara ayrılarak, bilgisayar ortamında modelleri oluşturulmuştur. Deney sonuçlarının işlenmesi aşamasında kullanılacak olan bu model üzerindeki her nokta, gerçek yapılar üzerinde de işaretlenerek numaralandırma yapılmıştır. Nokta sayısı arttıkça, deneyin hassasiyeti artar.

Deneylerde, sabit bir tahrik noktası belirlenmiş, o nokta da dahil olmak üzere diğer tüm noktalardan ölçümler alınmıştır. Darbe çekici ile sabit bir noktadan tahrik uygulanırken, ivmeölçer sırayla tüm noktalara yapıştırılarak elde edilen veriler toplanmıştır.

Deney hatalarını mümkün olduğunca azaltmak için her noktada üçer adet ölçüm yapılmış ve ortalamaları alınmıştır. Ayrıca, yine deneyin doğruluğunu artırmak amacıyla, ikinci bir tahrik noktası seçilerek ölçümler tekrarlanmıştır. Zaman sınırlaması ve laboratuvar şartları nedeniyle, bütün çubuklar bu yöntemle test edilememiş, bazıları için sadece doğal frekans değerlerini gösteren tek FRF fonksiyonu elde edilmiştir.

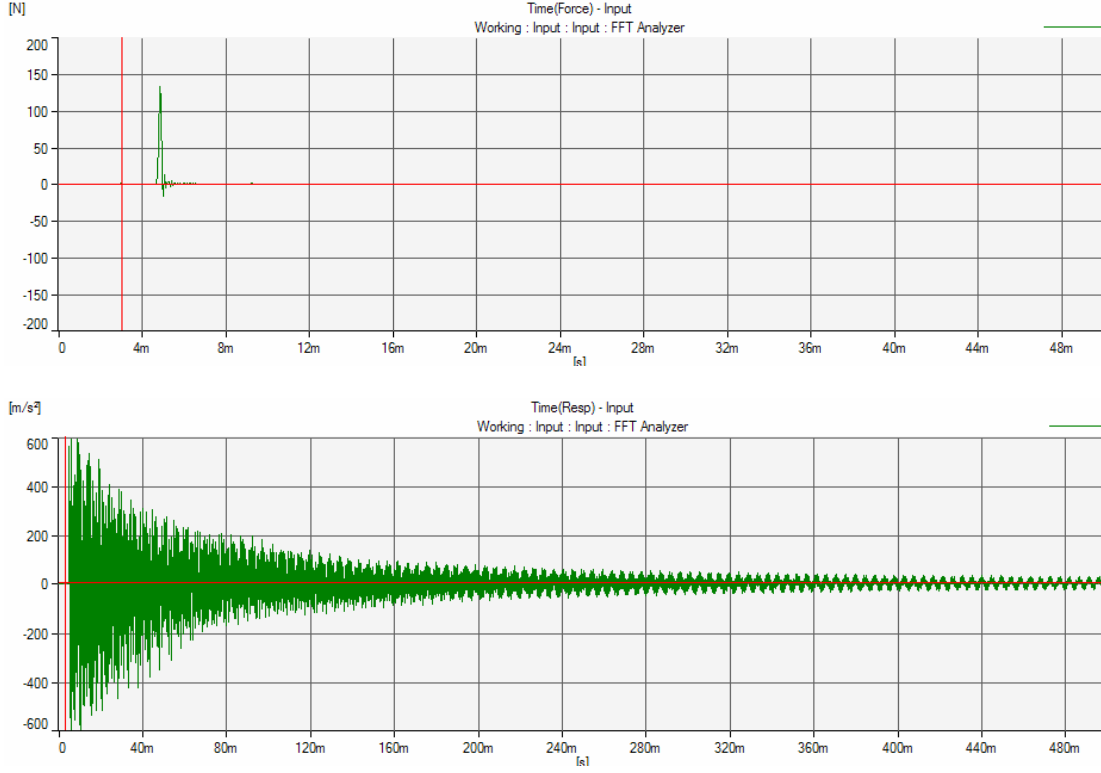


Şekil 8.14 : Model üzerinde ölçüm noktaları.

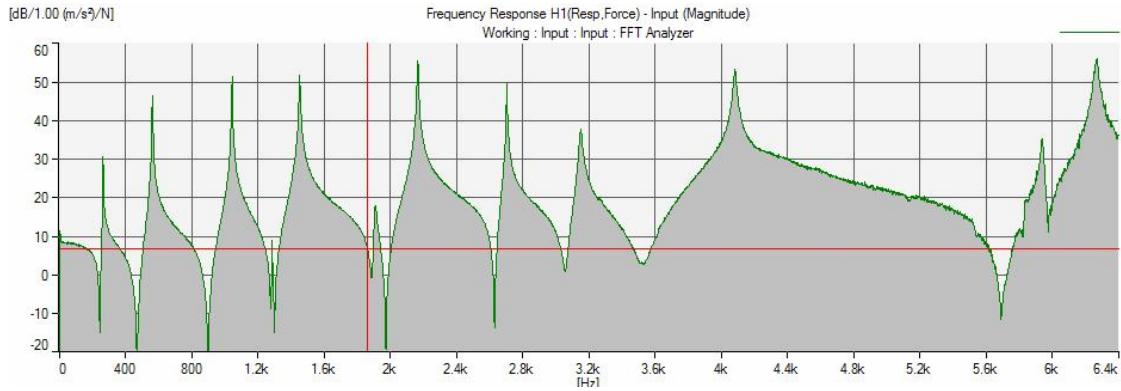


Şekil 8.15 : Serbest-serbest sınır şartında düzlemiçi darbe uygulanması.

Şekil 8.16'da, tipik bir deneyde çubuğa uygulanan darbe etkisine ait giriş ve çıkış fonksiyonları, zamana bağlı olarak gösterilmektedir. **Şekil 8.17**'de ise, sistemden, bu darbe etkisi altındaki çubuğa ait bir FRF fonksiyonu verilmektedir. Her tepe noktası bir doğal frekans değerini ifade eder.



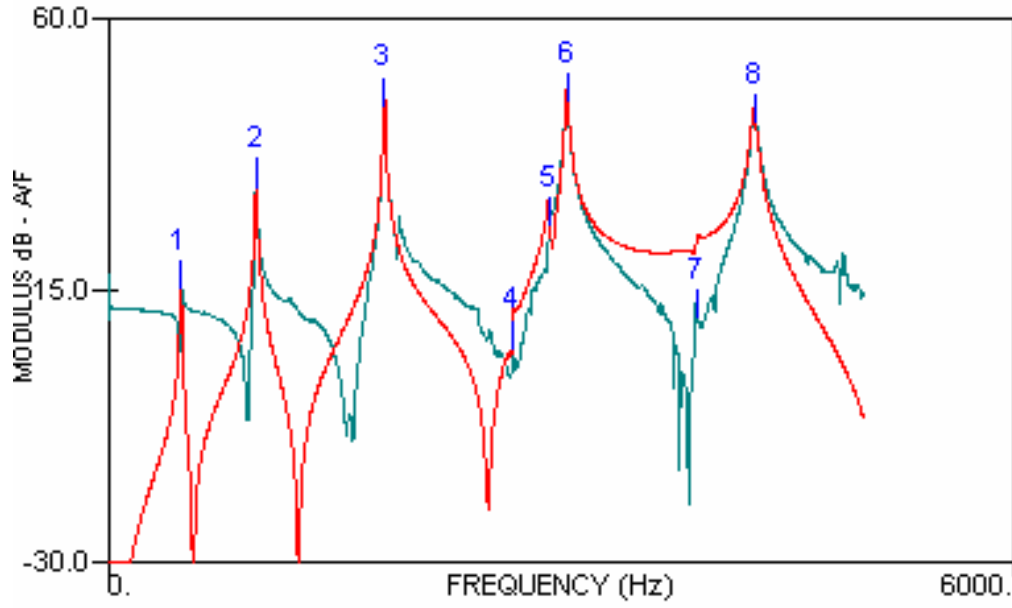
Şekil 8.16 : (a) Sisteme verilen darbe kuvveti ve (b) Sistemden alınan cevabın zamana bağlı grafikleri.



Şekil 8.17 : FRF fonksiyonu.

8.5 Modal Parametrelerin Belirlenmesi

Elde edilen FRF fonksiyonları ICATS programı içerisindeki modüller kullanılarak işlenmiş, doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilerek hem sonlu eleman sonuçları hem de analitik olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Aşağıdaki şekil, tek bir FRF fonksiyonundan elde edilen doğal frekans değerlerini frekans düzleminde göstermektedir. Kırmızı grafik teorik sonlu eleman programından hesaplanan değerlere, yeşil grafik ise deneysel verilerden hesaplanan değerlere aittir.



Şekil 8.18 : FRF fonksiyonu üzerindeki doğal frekansları gösteren tepe noktaları.

Farklı sınır şartları için, deneysel, analitik ve sonlu eleman yöntemi olmak üzere üç farklı çözüm ile elde edilen doğal frekans değerleri, çizelgelerde verilmektedir. Sonlu eleman çözümleri ANSYS paket programı kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 8.2 : Serbest-serbest mesnet şartı için doğal frekans değerleri.

MOD NO	SERBEST -SERBEST		
	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL
1	219.4207	219.65	215.1314
2	263.8413	263.79	262.2198
3	566.8247	566.07	561.1123
4	629.4832	630.95	612.4967
5	1054.107	1052.9	1040.853
6	1304.948	1308.7	1281.244
7	1471.63	1470.7	1449.477
8	1928.182	1928.1	1902.611
9	2185.054	2186.4	2163.492
10	2204.247	2211.6	2167.299
11	2709.119	2714.7	2669.679
12	3188.051	3186.4	3146.361
13	3305.395	3317.9	3257.634
14	4132.34	4131.5	4083.18
15	4176.063	4198.5	5951.308
16	4589.013	4608.6	4525.765
17	5160.683	5162.9	6287.995
18	5868.977	5862.4	5798.318

Koyu renkle verilen frekans değerleri, düzlem içi titreşim hareketine ait frekanslardır. **Çizelge 8.2** ve **Çizelge 8.3**'de, 180° kiriş açıklığına sahip çember eksenli çubuklara ait sonuçlar sunulmaktadır. Bu çizelgelerde verilen analitik çözüme ait düzleme dik (dışı) frekans değerleri, referans [20]'de hesaplanan değerlerdir.

180° kiriş açıklığına sahip çember eksenli çubuklara ait deneylerde, sabit bir tahrik noktası belirlenerek, o nokta da dahil olmak üzere diğer tüm noktalardan ölçümler alınmıştır. Modal analiz prosedürü tam olarak uygulanmış, böylece çubuklara ait deneysel mod şekilleri de elde edilmiştir. Ancak, diğer çubuklara ait aşağıda verilen sonuçlar tek bir noktadan alınan FRF fonksiyonu ile frekans analizi yapılarak elde edilen verilere dayanmaktadır. Laboratuvar koşulları ve zaman kısıtlaması nedeniyle her deney parçası için deneysel modal analiz çalışması yapılamamıştır.

Çizelge 8.3 : Ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet şartları için doğal frekans değerleri.

MOD NO	ANKASTRE-SERBEST			ANKASTRE-ANKASTRE		
	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL
1	26.50742	26.69	25.1792	110.1	110.62	102.3
2	52.1067	52.15	44	317.3	318.22	292.7
3	82.76855	82.94	80.56	515.4	518.05	515.4
4	163.7571	164.2	128.1154	661.8	663.39	601.6
5	281.7848	282.3	270.3411	1107	1113.7	1107
6	555.0798	557	458	1127	1129.8	1006
7	624.1684	624.5	591.1681	1708	1712	1427
8	1079.98	1081	1016.275	2035	2047.6	2035
9	1223.593	1229	1221.489	2400	2405.9	2291
10	1623.029	1624	1488.126	2662	2683	2554
11	2001.874	2007	1981.026	2935	2952	2935
12	2102.294	2112	2042.652	3199	3208	2956
13	2432.606	2435	2361.318	4073	4083.9	4073
14	3155.92	3165	3033.311	4102	4114.2	3745
15	3158.583	3175	3037.8	4245	4274.1	4248
16	3413.637	3433	3890.588	4248	4296.4	3954
17	4119.513	4127	4107.431	5104	5121.3	4307
18	4185.391	4198	4058.754	5691	5701.5	5691
19	4791.205	4810	4618.626	5964	6006.1	5964
20	5020.281	5045	4782.381	6021	6103.3	5623
21	5196.401	5230	5453.815			
22	5993.478	6026	5710.165			
23	6216.909	6230	5985.819			

70°, 100°, 135° ve 160° kiriş açıklığına sahip çember eksenli çubuklara ait sonuçlar **Çizelge 8.4**'de verilmektedir. Ankastre-serbest mesnet şartı uygulanmıştır. Ankastre-serbest sınır şartı, uygulanması en kolay ve deney hataları en az olan sınır şartı olduğundan tercih edilmiştir. Önceki çizelgelerde olduğu gibi, koyu renkle verilen frekans değerleri düzlem içi titreşim hareketine ait frekanslardır.

Çizelge 8.4 : Ankastre-serbest mesnet şartı için doğal frekans değerleri.

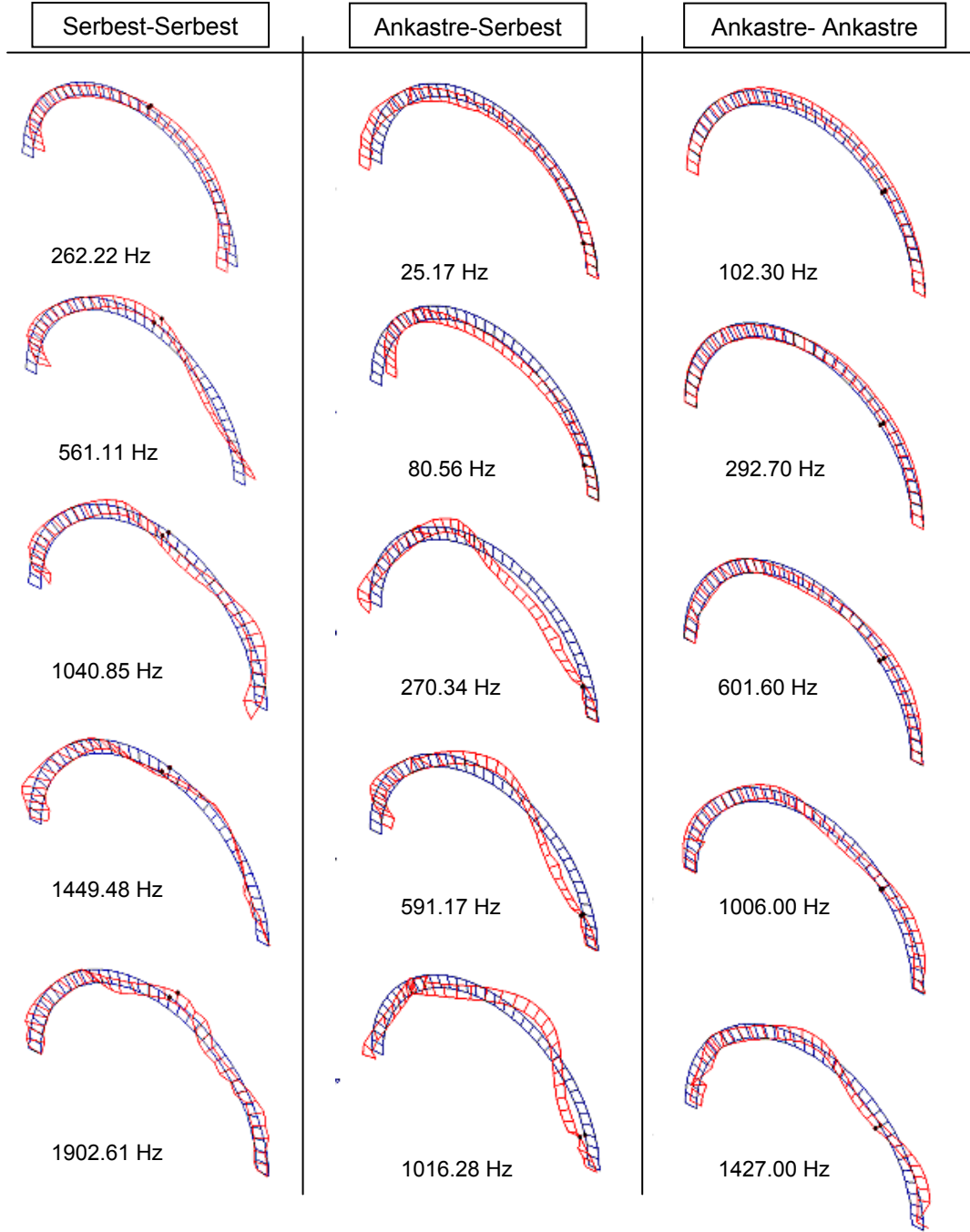
MOD NO	70°			100°		
	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL
1	145.8106	147	126	74.03104	74.595	58
2	289.4437	290.37	218	146.7649	147.07	114
3	757.6027	760.32	664	337.718	338.61	304
4	1469.331	1480.6	1412	662.3173	666.06	616
5	2200.563	2214.8	1558	1064.589	1068.1	944
6	3019.682	3044.4		2063.503	2069.4	1578
7	4199.288	4224.2		2063.645	2074.2	
8	4622.817	4646.4		2551.548	2566.8	
9	6444.709	6465.2		3749.447	3758.7	
10				4029.162	4055.6	
MOD NO	135°			160°		
	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL
1	42.94035	43.258	38	32.09678	32.327	29.2979
2	84.82744	84.948	78	63.22828	63.297	44
3	165.7064	166.07	138	109.9369	110.16	102.4108
4	326.6944	328.07	258	217.2315	217.99	196
5	552.0739	553.29	520	373.357	374.07	346.506
6	1081.532	1086.1		734.1323	736.93	716
7	1158.23	1159.5	1054	807.8171	808.46	741.1625
8	1878.411	1883.9		1375.336	1377	1244.391
9	2249.15	2261.4		1578.105	1585.7	1490
10	2262.058	2267.8	2158	1937.086	1940.6	1874.739
11	3075.789	3082.7	2094	2271.42	2276.6	2171.588
12	3690.474	3708.2		2668.554	2681.6	2050

Çizelge 8.5, kademeli çubuklara ait doğal frekans değerlerini vermektedir. Ankastre-serbest mesnet şartı uygulanmıştır.

Çizelge 8.5 : Kademeli çubuklara ait doğal frekans değerleri.

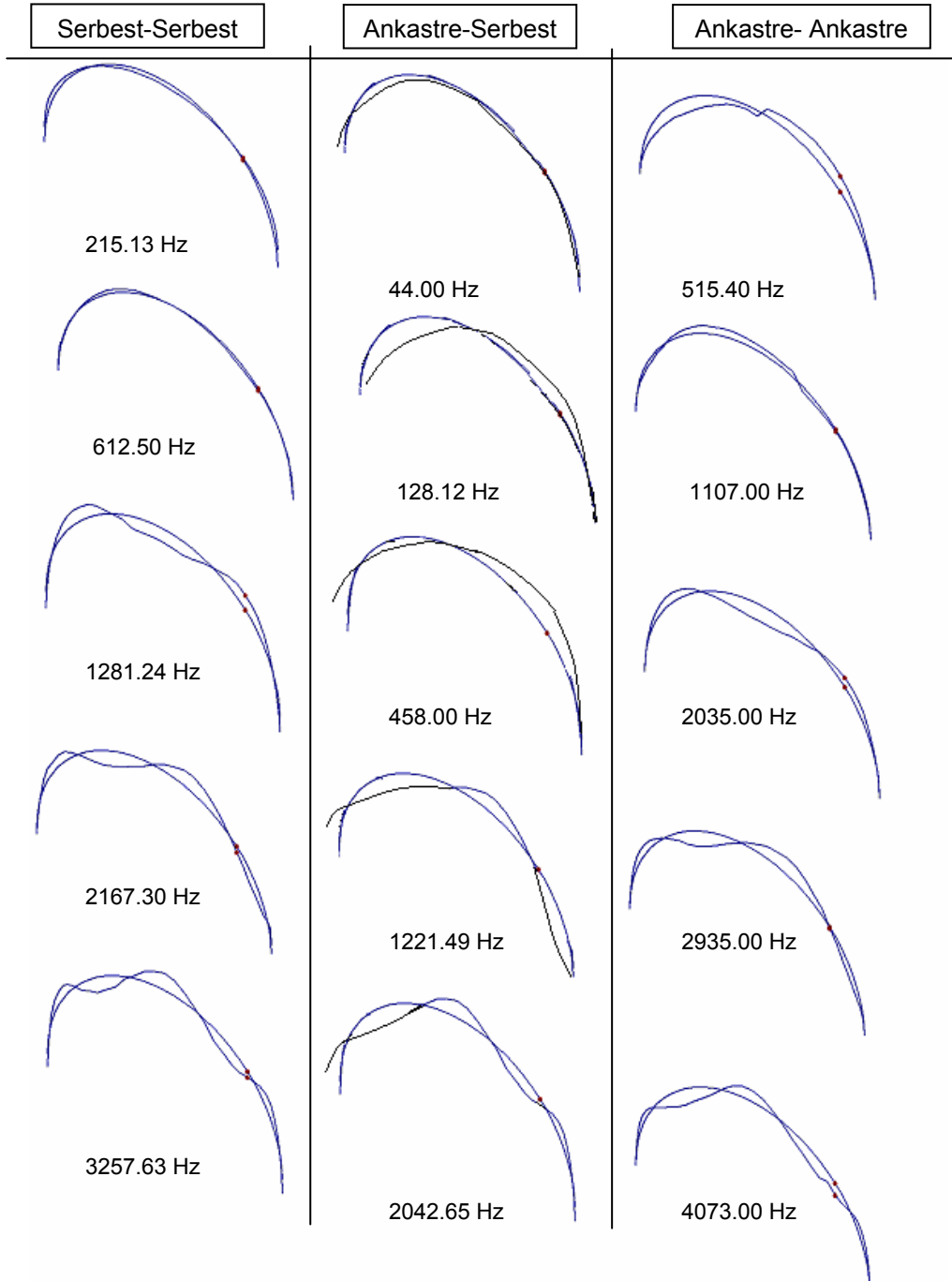
	MOD NO	$\phi_T=120^\circ$			$\phi_T=180^\circ$		
		ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL	ANALİTİK	SEY (ANSYS)	DENEYSEL
$\psi/\phi_T = -0.2$	1	57.255	57.548	50	28.446	28.58	28
	2	105.782	105.64	92	52.29359	52.228	46
	3	230.596	230.99	214	87.593	87.753	62
	4	388.7107	389.92	280	147.8878	148.2	114
	5	718.419	719.25	648	281.419	281.72	266
	6	1223.031	1224.3	1212	485.4898	485.98	346
	7	1477.495	1478	1302	619.953	620.01	582
	8	2389.728	2396.7	2368	1073.306	1076	1080
	9	2522.582	2531.6	2384	1082.819	1083.4	1008
$\psi/\phi_T = 0.0$	1	58.427	58.778	50	29.197	29.351	28
	2	113.7972	113.86	94	56.57071	56.58	48
	3	227.73	227.92	210	86.457	86.57	64
	4	405.3126	405.51	464	155.101	155.14	122
	5	724.514	725.61	654	283.348	283.63	266
	6	1276.939	1282.2	1268	504.8851	506.43	534
	7	1480.722	1480	1306	621.202	620.91	582
	8	2348.291	2354.9	2378	1078.046	1078.4	1002
	9	2557.016	2562.6	2414	1087.613	1089.5	1108
$\psi/\phi_T = 0.2$	1	57.513	57.877	50	28.739	28.90	28
	2	113.5319	113.68	94	56.27953	56.32	48
	3	226.845	226.96	208	85.69	85.77	64
	4	447.7076	448.67	480	171.7521	172.01	128
	5	728.662	729.11	652	286.737	286.88	270
	6	1312.763	1313.1	1272	521.2782	521.54	356
	7	1502.867	1504	1306	631.396	631.48	590
	8	2347.9	2354.2	2490	1089.225	1089.10	1010
	9	2652.002	2662.6	2454	1129.438	1133.00	1134

180° kiriş açıklığına sahip çember eksenli çubuklara ait deneysel verilerin analizi sonucunda serbest-serbest, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır şartlarına ait mod şekilleri **Şekil 8.19** ve **Şekil 8.20**'de verilmektedir. Düzlem içi ve düzlem dışı veriler ayrı ayrı işlenmiştir. Düzlem dışına ait veriler, burulma şekil değiştirmesi nedeniyle iki boyutlu bir model üzerinde görüntülenirken, düzlem içine ait şekil değiştirmeler için tek boyutlu model yeterli olmaktadır.



Şekil 8.19 : SS, AS ve AA sınır şartlarında düzlem dışına ait mod şekilleri.

Sonlu eleman paket programı ile teorik olarak elde edilen düzlem içi ve düzlem dışına ait mod şekilleri Ekler bölümünde verilmektedir. Analitik ve deneysel modal analiz sonuçları karşılaştırıldığında elde edilen mod şekillerinin ve frekans değerlerinin uyum içerisinde olduğu görülmüştür.



Şekil 8.20 : SS, AS ve AA sınır şartlarında düzlem içine ait mod şekilleri.

Bazı mod sayılarındaki frekanslardaki farkların artması, analizler sırasında dikkate alınan malzeme özellikleri ile sınır şartlarında yapılan kabullerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Oluşturulan analitik modelde yapılan kabullerin, deneysel çalışmadaki şartlarla uyumunun mükemmel olamaması nedeniyle, bazı modlarda sonuçlar arasındaki fark artmaktadır.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışlarına ait denklemler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, analitik olarak elde edilmektedir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak yapılmış, eğri eksenli çubuklar için genel bir çözüm elde edilmiştir. Böylece, birçok çalışmada ancak yaklaşık hesabı yapılabilen eğri eksenli çubukların, düzlem içi statik ve dinamik problemlerinin kesin hesabı yapılabilmektedir.

Literatürde, eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemlerini inceleyen, pek çok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu sabit kesit alanına sahip çubukları ele almaktadır. Yapılan kaynak taramasında, çubuk teorisinin genel denklemlerine çeşitli birleştirici varsayımlarla ve yaklaşık yöntemlerle çözüm arandığı görülmüştür. Özellikle, sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, yaygınlaşan sonlu eleman yönteminin çalışmaların büyük bölümünde uygulama alanı bulduğu söylenebilir. Sadece basit problemler söz konusu olduğunda kesin çözüme başvurulduğu görülmektedir.

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların statik problemleri için, çubuk eğrilik yarıçapı ve çubuk kesit alanı eksen eğrisi boyunca değişen her çubuğa uygulanabilecek bir çözüm sunulmuştur. Dinamik problemlerde ise, elde edilen diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade etmektedir. Gerek statik gerekse dinamik davranışın çözümünden elde edilen integral hesapları bilgisayar kullanımını zorunlu kılmaktadır. Integral hesaplamaları, parametrik olarak Mathematica programı, sayısal olarak ise Matlab programı yardımıyla yapılmıştır.

Verilen çözüm yöntemleri literatürdeki mevcut çalışmalarda bulunmakla birlikte, burada konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla tekrarlanmaktadır. Bu çalışmanın literatürdeki benzer çalışmalardan farkı, elde edilen bu çözüm yöntemlerinden yola çıkılarak, eğri eksenli çubukların hem statik hem de dinamik davranışlarına uygulanabilecek farklı çözüm yöntemleri oluşturulmasıdır.

İlk olarak, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemleri, çember eksenli, sabit kesitli çubuğa ait kesin çözüm yönteminden yola çıkılarak elde edilmektedir. Sürekli değişken kesitli çubuklar, sabit kesit alanına sahip elemanlara ayrılarak çözüm yapılmıştır. Eleman sayısı arttıkça doğru sonuca olan yakınsama da artmaktadır. Sabit kesitli bir çubuk için elde edilen kesin çözüm yöntemi, değişken kesitli çubuk için bir yaklaşık yöntem haline gelmektedir. Çubuk geometrisi simetrik ve asimetrik olarak iki ana başlık altında incelenmektedir. Sabit eğrilik yarıçapına sahip çember eksenli çubuklarla birlikte, değişken eğrilik yarıçapına sahip, spiral ve parabol eksenli çubuklar için de hesaplamalar yapılmış, kesit değişiminin farklı oranlarında, literatürdeki benzer problemler çözülmüştür.

Literatürde bulunan çalışmaların, neredeyse tamamında eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmektedir. Buna bağlı olarak, mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri ile literatürdeki sonuçlar oldukça yakındır.

Farklı modlarda ve farklı mesnet şartlarında, etkilerin tümünün hesaplara dahil edildiği durum için hesaplanan boyutsuz frekans değerleri, grafikler üzerinde gösterilmiştir. Grafiklerden, ayrı modlara ait eğrilerin, aynı frekans değerinde buluşabildiği gözlenmektedir. Farklı modlarda benzer frekansların yakalandığı bu durum “mod geçişı” olarak adlandırılmaktadır. Hem simetrik hem de asimetrik çubuklar için mod geçişı durumu görölmüştür.

Düzlemsel eğri eksenli çubuğun statik probleminin çözümünde, eksen eğri tipi bilinen sabit kesitli bir düzlemsel çubuğun, herhangi bir noktasından ve herhangi bir doğrultuda tekil kuvvetle yüklenmesi durumu için bir denklem takımı elde edilmişti. Bu çalışmada, düzlemsel eğri eksenli çubuğun statik problemini karakterize eden bu diferansiyel denklem takımından, çubuğa ait rijitlik (katılık) matrisi elde edilerek, kesin çözüm yöntemi, sonlu eleman yöntemine uyarlanmaktadır. Böylece, çubuğa ait rijitlik matrisi, dış yükler vektörü ve yer değiştirme vektörü bir araya getirilerek, eğri eksenli çubuğun statik problemleri için bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmuştur.

Elde edilen sonlu eleman formülasyonu, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini içermekte ve kesin analitik çözümü esas almaktadır. Farklı yükleme koşulları ve farklı sınır şartları altında literatürdeki sayısal örnekler çözülmüş, düzlem içi yer değiştirmeler hesaplanmıştır.

Tek elemanla dahi doğru sonuçlar elde edilebilmektedir, ancak, Matlab programında hazırlanan algoritmanın bir gereği olarak, çözümler iki elemanla yapılmıştır.

Eğri eksenli kirişin titreşim problemi de sonlu eleman yöntemiyle incelenmektedir. Literatürde yer alan dinamik çözümlerde, sonlu eleman formülasyonu, özellikle son yıllarda üzerinde çok çalışılan konulardan biri haline gelmiştir. Bu çalışmada kullanılan yer değiştirme fonksiyonlarının seçiminde de literatürdeki benzer çalışmalardan faydalanılmış, trigonometrik yer değiştirme fonksiyonları kullanılmıştır. Kinetik enerji ifadesi yardımıyla, çubuğa ait kütle matrisinin tanımı yapılmıştır. Elde edilen kütle matrisi çok uzun ve karmaşık ifadelerden oluşmaktadır. Matris ifadesinin bu çalışma kapsamında verilebilmesi mümkün olmamış, ancak hesaplamalarda kullanılan alt matrisler verilebilmiştir.

Elde edilen kütle matrisi, statik problemlerin çözümünde elde edilen rijitlik matrisi ile birlikte kullanılarak titreşim denkleminin ana ifadeleri oluşturulmuştur. Matrisler özdeğer problemine uyarlanmış, bilgisayar programına aktararak özdeğerler yani doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Literatürdeki uygun örneklerle karşılaştırılmalar yapılmıştır.

Böylece kesin çözüm ifadeleri kullanılarak eğri eksenli çubuğa ait hem statik hem de dinamik problemlerin çözümünde kullanılabilecek bir sonlu eleman formülasyonu oluşturulmuştur. Literatürdeki benzer problemlerle olan karşılaştırmalar, oluşturulan sonlu eleman formülasyonunun oldukça başarılı olduğunu göstermektedir. Bu çalışmada elde edilen kütle matrisi, literatürdeki örnek çalışmalara paralel olarak, sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubukları kapsamaktadır. Değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanı hesaplara dahil edilmemiştir. Ancak, kütle matrisi ifadesi yeniden düzenlenerek, kesit alanı ve eğrilik yarıçapı değişimini de hesaplara dahil etmek mümkündür.

Teorik ve deneysel hesaplamaların karşılaştırıldığı, çalışmanın son bölümünde, modal analiz uygulaması sunulmaktadır. Deneysel modal analiz çalışması, farklı kiriş açıklıklarına sahip, çember eksenli deney çubukları üzerinde yapılmıştır. Deneylerde hem sabit kesitli, hem de kademeli değişken kesitli çubuklar kullanılmıştır.

Modal analiz aşamalarının ayrıntılı olarak ele alındığı çalışmada, deneysel modal analizin tüm aşamaları için özel olarak tasarlanmış olan ICATS paket programı kullanılmıştır. Deney çubukları için en uygun mesnet noktaları, tahrik ve ölçüm noktaları belirlenmiş olup, serbest-serbest sınır şartı, çubukların lastiklerle uygun bir yere asılmasıyla sağlanmıştır. 180° kiriş açıklığına sahip, sabit kesitli çember eksenli

ubuk için, mod şekilleri deneysel olarak belirlenmiş, teorik olarak elde edilen mod şekilleri ile karılatırılmıtır. Deney sonuçları incelendiğinde, serbest-serbest sınır şartında deneysel çalışma ile analitik ve sonlu eleman sonuçları arasında %1 - %3 civarında hata değeri bulunmaktadır. Ankastre-serbest sınır şartında aynı hata değeri, %1 - %8 arasında değişirken, ankastre-ankastre sınır şartında %4 - %10 değerleri arasında yer alır.

Çalışmada, laboratuvar koşulları ve zaman kısıtlaması nedeniyle her deney parçası için deneysel modal analiz çalışması tam olarak yapılamamıştır. Deneylerde kullanılan diğer çubuk geometrileri için sadece frekans değerleri incelenebilmitir. Elde edilen doğal frekans değerleri, analitik olarak hesaplanan ve ANSYS sonlu eleman paket programı kullanılarak hesaplanan değerlerle karılatırılmaktadır. Elde edilen değerler birbiri ile olduğa uyumludur. Sonuçlar arasındaki farklılıklar ise analitik modelde yapılan kabuller, dikkate alınan malzeme özellikleri ve sınır şartlarının, deneysel çalışmadaki şartlarla tamamen uyumlu olamamasından kaynaklanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1]. **Love, A.E.H.**, 1994. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication, New York.
- [2]. **İnan, M.**, 1966. *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İTÜ Yayını, İstanbul
- [3]. **İnan, M.**, 1967. *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Yayını, İstanbul
- [4]. **Cinemre, V.**, 1982. *Çubuk Teorisinde Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri*, İTÜ Dergisi, Cilt 40, No:3-6.
- [5]. **Timoshenko, S., Goodier, J.N.**, 1951. *Theoriy of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [6]. **Pilkey, W., D.**, 2002. *Analysis and Design of Elastic Beams Computational Methods*, John Willey and Sons.
- [7]. **Balasubramanian, T.S., Prathap, G.**, 1988. A Field consistent Higher Order Curve Beam Element for Static and Dynamic Analysis of stepped Arches, *Computers and structures*, 33, 281-288.
- [8]. **Tüfekçi, E.**, 1994. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [9]. **Tüfekçi, E., Arpacı, A.**, 2006. Analytical Solutions of In-Plane Static Problems for Non-Uniform Curved Beams Including Axial and Shear Deformations, *Structural Engineering and Mechanics*, 22 (2), 131-150.
- [10]. **Artan, R.**, 1997. The Analytical Calculations of Circular Rods of Variable Cross-Section by the Initial Values Method, *Computers and structures*, 62, 445-461.
- [11]. **Litewka, P., Rkowski, J.**, 1998. The Exact Thick Arch Finite Element, *Computers and structures*, 68, 369-379.
- [12]. **Lin, K.C., Hsieh, C.M.**, 2007. The Closed form General Solutions of 2-D Curved Laminated Beams of Variable Curvatures, *Composite Structures*, 79, 606-618.
- [13]. **Gimena, F.N., Gonzaga, P., Gimena, L.**, 2008. Stiffness and Transfer Matrices of a Non-Naturally Curved 3D-Beam Element, *Engineering Structures*, 30, 1770-1781.

- [14]. **Gimena, L., Gimena, F.N., Gonzaga, P.,** 2008. Structural Analysis of a Curved Beam Element Defined in Global Coordinates, *Engineering Structures*, 30, 3355-3364.
- [15]. **Sheikh, A.H.,** 2002. New Concept to Include Shear Deformation in a Curved Beam Element, *Journal of Structural Engineering*, 128, 406-410 .
- [16]. **Kapania, R.K., Lee, J.,** 2003. A Formulation and Implementation of Geometrically Exact Curved Beam Elements Incorporating Finite Strains and Finite Rotations , *Computational Mechanics*, 30, 444-459.
- [17]. **Molari, L., Ubertini, F.,** 2006. A Flexibility-Based Finite Element for Linear Analysis of Arbitrarily Curved Arches, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, 1333-1353.
- [18]. **Saffari, H., Tabatabaei, R.,** 2007. A Finite Circular Arch Element Based on Trigonometric Shape Functions, *Mathematical Problems in engineering*, ID:78507.
- [19]. **Tüfekçi, E.,** 2004. On "finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures, *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 193, 4067-4068.
- [20]. **Dogruer, O.Y.,** 2005. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Düzlem Dışı Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [21]. **Den Hartog, J.P.,** 1952. *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [22]. **Verniere De Irassar, P.L., Laura, P.A.A.,** 1986. A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.116, 580-584.
- [23]. **Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L., Carnicer, R., Berteo, R.,** 1988. A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration*, V.120(1), 95-105.
- [24]. **Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Berteo, R., Villaggi, A.,** 1989. In-Plane Vibrations of Non-Circular Archs of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.129(2), 181-200.
- [25]. **Rossi, R.E., Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L.,** 1989. In-Plane Vibrations Of Cantilevered Non-Circular Arcs Of Non-Uniform Cross-Section With A Tip Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 129, 201-213.
- [26]. **Auciello, N.M., Rosa, M.A.,** 1994. Free Vibrations of Circular Arches: A Review, *Journal of Sound and Vibration*, V.176(4), pp. 433-458.
- [27]. **Rossi, R.E., Laura, P.A.A.,** 1995. Numerical Experiments on Dynamic Stiffening of a Circular Arch Executing In-Plane Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, V.187(5), 897-909.

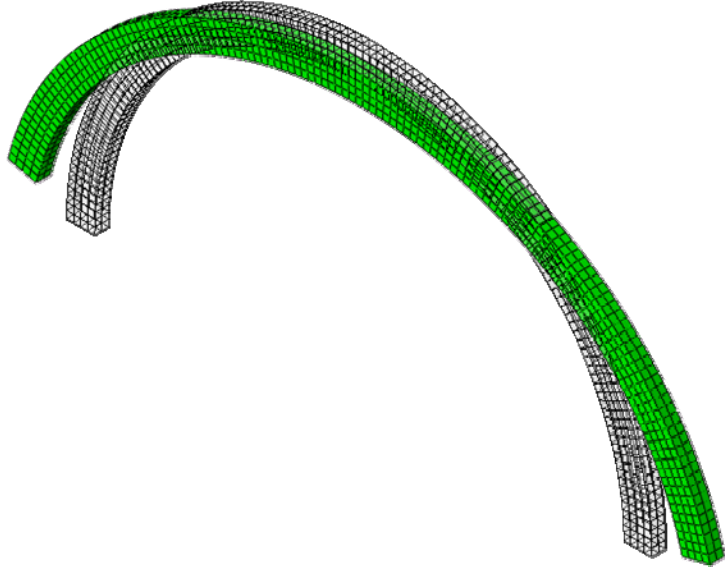
- [28]. **Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsuda, H., Morita, C.,** 1995. In-Plane And Out-Of-Plane Free Vibrations Of Curved Beams With Variable Cross-Sections, *Journal Of Sound And Vibration*, 187, 381-401.
- [29]. **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., Thwaites, S.,** 1996. Asymptotic Analysis of the free in-Plane Vibrations of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.196(5), 659-680.
- [30]. **Tong, X., Mrad, N., Tabarrok, B.,** 1998. In-Plane Vibration Of Circular Arches with Variable Cross-Sections, *Journal of Sound and Vibration*, V.212(1), 121-140.
- [31]. **Tüfekçi, E., Arpacı, A.,** 1998. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856.
- [32]. **Tüfekçi, E.,** 1999. Exact Solution of in-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia-Pacific Vibration Conference '99*, V. 2, 1158-1163, Singapore.
- [33]. **Tüfekçi, E.,** 2001. In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Section, *Proceedings of IMAC XIX, A Conference on Structural Dynamics*, V. 2, 1688-1694, Florida, A.B.D.
- [34]. **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2006. Exact Solution Of Free In-Plane Vibration Of A Stepped Circular Arch, *Journal of Sound and Vibration*, 295, 725-738
- [35]. **Tüfekçi, E.,** 2001. Exact Solution of Free in-Plane Vibration of Shallow Circular Arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, V.1, No: 3, 409-428.
- [36]. **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H.,** 1999. Low-Frequency Mode Transition in the Free in-Plane Vibration of Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration*, V.228(1), 69-90.
- [37]. **Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.,** 1999. Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation, *Journal of Sound and Vibration*, V.219(1), 23-33.
- [38]. **Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.,** 2000. Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4871-4891.
- [39]. **De Rosa, M.A., Franciosi, C.,** 2000. Exact and Approximate Dynamic Analysis of Circular Arches Using DQM, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 1103-1117.
- [40]. **Lin, S.M., Lee, S.Y.,** 2001. Closed Form Solution for Dynamic Analysis of Extentional Circular Timoshenko Beams with General Elastic Boundary Conditions, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 227-240

- [41]. **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.**, 2002. On the Dynamic Stiffening of a Stepped Circular Arch: Exact Solution, *6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Paper No. APM-067, Istanbul, Türkiye.
- [42]. **Liu, G.R., Wu, T.Y.**, 2001. In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, V.43, 2597-2611.
- [43]. **Karami, G., Malekzadeh, P.**, 2004. In-Plane Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-Sections Using Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration*, 274, 777-799.
- [44]. **Kang, B., Riedel, C.H., Tan, C.A.**, 2003. Free Vibration Analysis of Planar Curved Beams by Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, 260, 19-44.
- [45]. **Sophianopoulos, D.S., Michaltsos, G.T.**, 2003. Analytical Treatment of In-Plane Parametrically Excited Undamped Vibrations of Simply Supported Parabolic Arches, *Journal of Vibration and Acoustics*, 125, 73-79.
- [46]. **Rosen, A., Gur, O.**, 2009. A Transfer Matrix Model of Large Deformations of Curved Rods, *Computers and structures*, basım aşamasında.
- [47]. **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.**, 1999. Two-Noded Locking Free Shear Flexible Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 265-280.
- [48]. **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.**, 2000. Free Vibration of Arches based on A Coupled Polynomial Displacement field, *Computers and structures*, 78, 583-590.
- [49]. **Litewka, P., Rkowski, J.**, 2001. Free Vibrations of Shear-Flexible and Compressible Arches by FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 273-286.
- [50]. **Wu, J.S., Chiang, L.K.**, 2003. Free Vibration Analysis of Arches using Curved Beam Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 1907-1936.
- [51]. **Wu, J.S., Chiang, L.K.**, 2004. A New Approach for Free Vibration Analysis of Arches with Effects of Shear Deformation and Rotatory Inertia Considered, *Journal of Sound and Vibration*, 277, 49-71.
- [52]. **Yang, F., Sedaghati, R., Esmailzadeh E.**, 2008. Free in-Plane Vibration of General Curved Beams Using Finite Element Method, *Journal of Sound and Vibration*, 318, 850-867.
- [53]. **Cannarozzi, M., Molari, L.**, 2008. A Mixed Stress Model for Linear Elastodynamics of Arbitrarily Curved Beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74, 116-137.

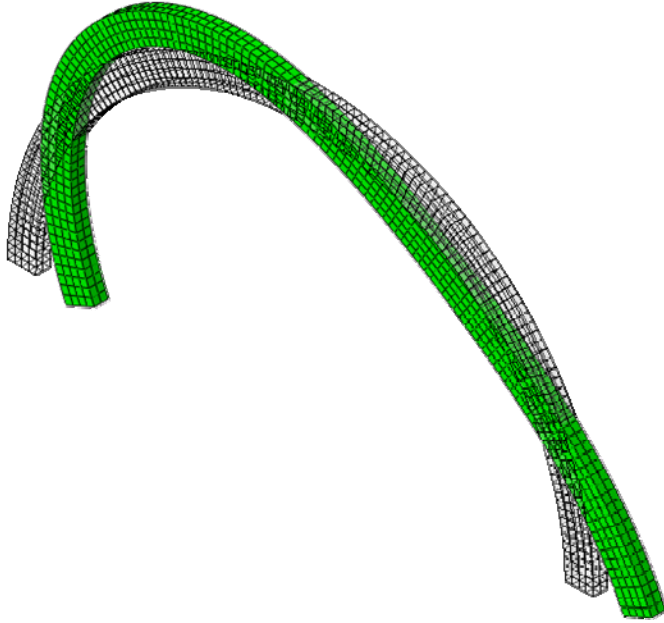
- [54]. **Kim, J.G., Park, Y.L.**, 2006. Hybrid-Mixed Curved Beam Elements with Increased Degrees of Freedom for Static and Vibration Analyses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68, 690-706.
- [55]. **Kim, J.G., Park, Y.K.**, 2008. The Effect of Additional Equilibrium Stress Functions on the Three-Node Hybrid Mixed Curved Beam Element, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22, 2030-2037.
- [56]. **Sengupta, D., Dasgupta, S.**, 1997. Static and Dynamic Applications of a Five Noded Horizontal Curved Beam Element with Shear Deformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1801-1819.
- [57]. **Tüfekçi, E., Dogruer, O.Y.**, 2006. Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section, *Journal of Engineering Mechanics*, 132, 600-609.
- [58]. **Kim, J.G., Lee, J.K.**, 2008. Free Vibration Analysis of Arches Based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions, *Computers and structures*, 86, 1672-1681.
- [59]. **Rubin, M.B., Tüfekçi, E.**, 2005. Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a Cosserat point, *Computer Methods Journal of Sound and Vibration*, 286, 799-816.
- [60]. **Ewins, D., J.**, 2000. *Modal Testing, Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press
- [61]. **Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboben, P., Parloo, E.**, 2003. Identification of Modal Parameters Including Unmeasured Forces and Transient Effects, *Journal of Sound and Vibration*, 265, 609-625.
- [62]. **Ren, W.X., Peng, X.L., Lin, Y.Q.**, 2005. Experimental and Analytical Studies On Dynamic Characteristics Of A Large Span Cable-Stayed Bridge, *Engineering Structures*, 27, 535-548.

EKLER

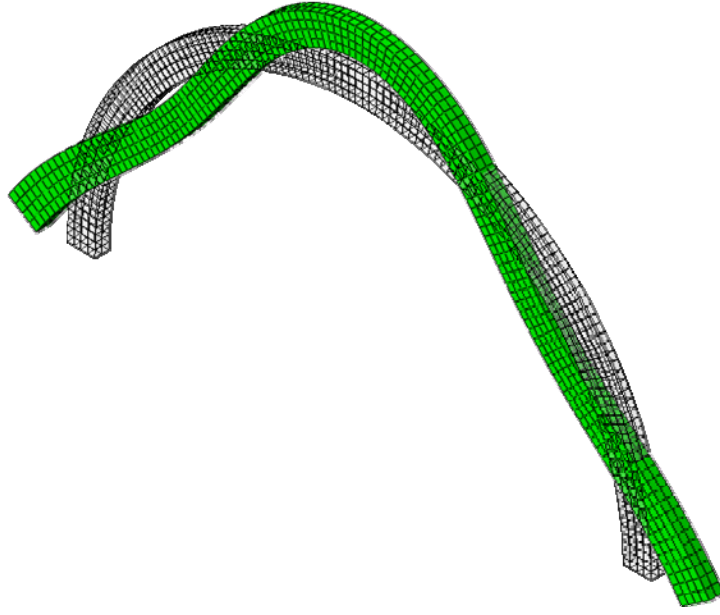
EK A : 180° Kiriş Açıklığına Sahip Çubuk için Düzlem İçi ve Düzlem Dışına Ait Mod Şekilleri



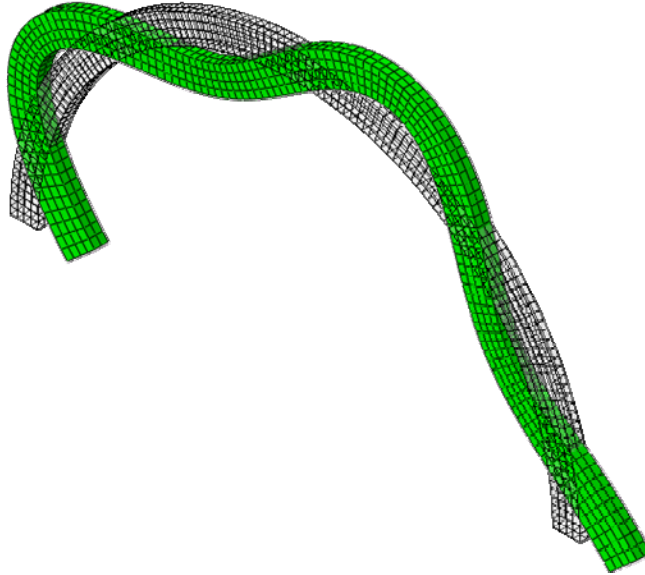
Şekil A. 1 : 180° giriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (219.65 Hz)..



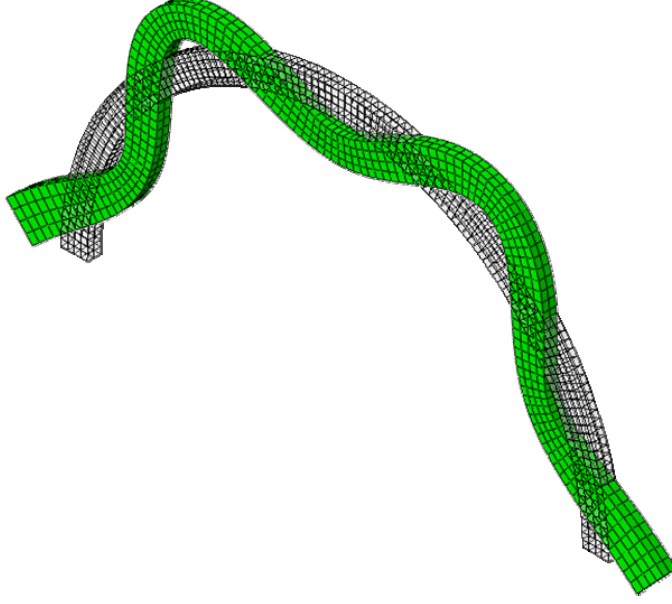
Şekil A. 2 : 180° giriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (630.95 Hz)..



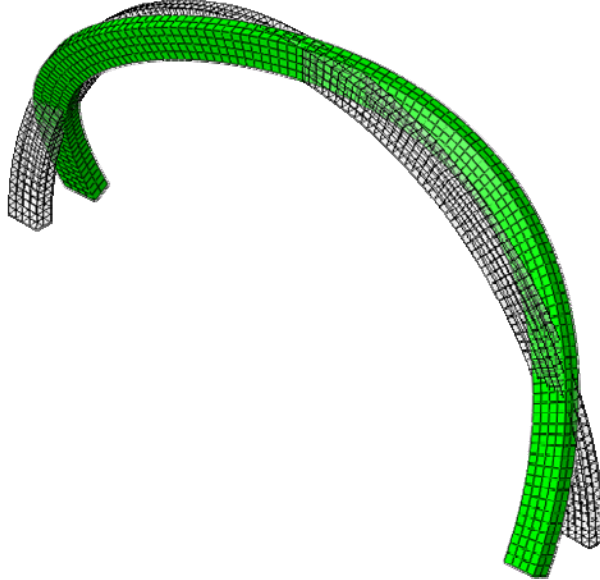
Şekil A. 3 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (1308.7 Hz).



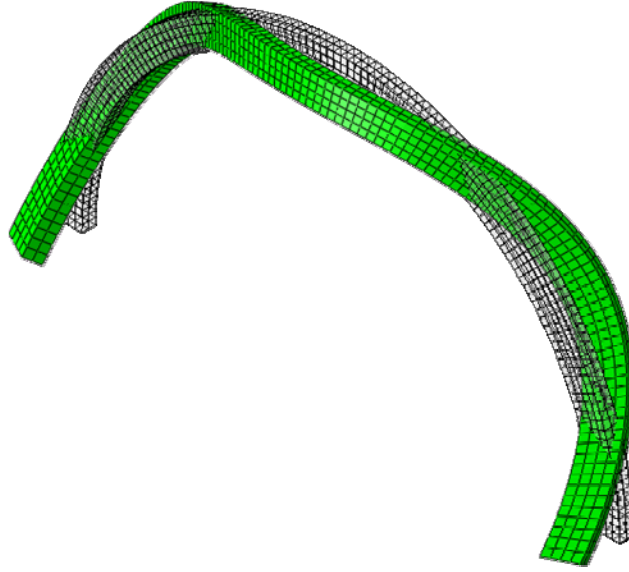
Şekil A. 4 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (2211.6 Hz).



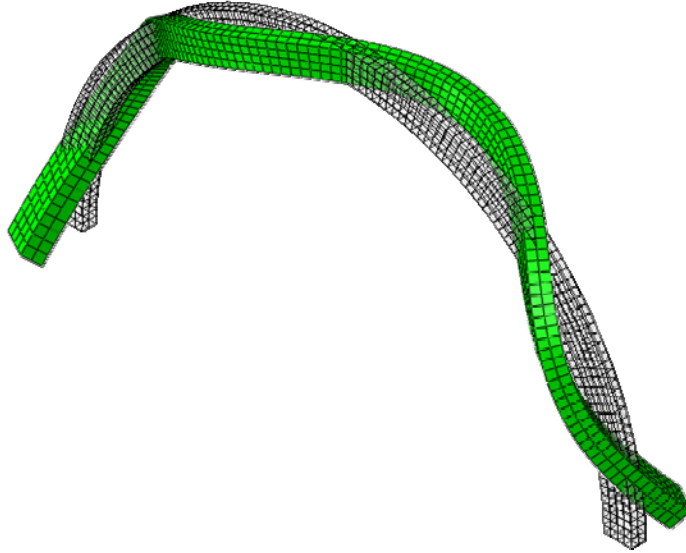
Şekil A. 5 : 180° kırış açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (3317.9 Hz).



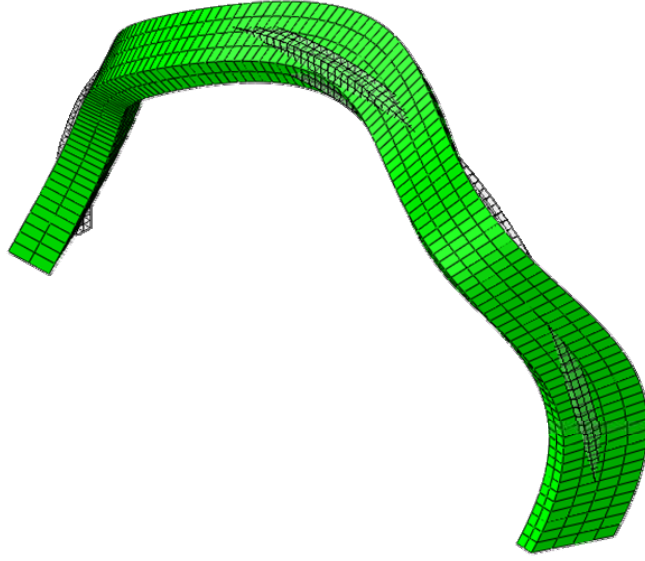
Şekil A. 6 : 180° kırış açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (263.79 Hz).



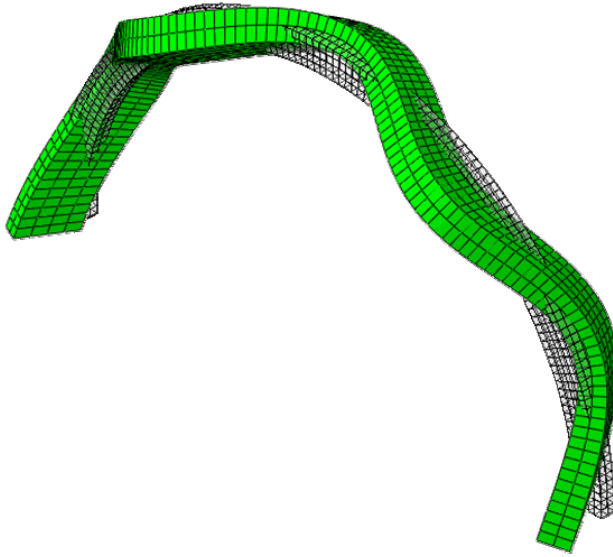
Şekil A. 7 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (566.07 Hz).



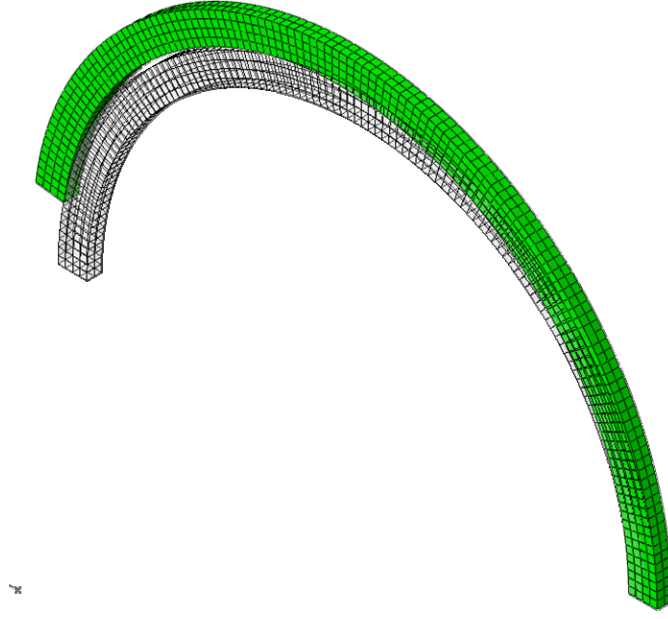
Şekil A. 8 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (1052.9 Hz).



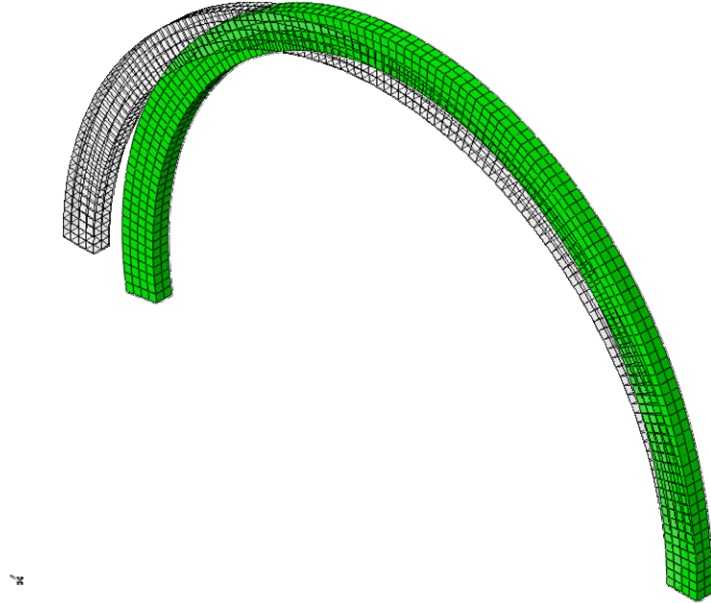
Şekil A. 9 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (1470.7 Hz).



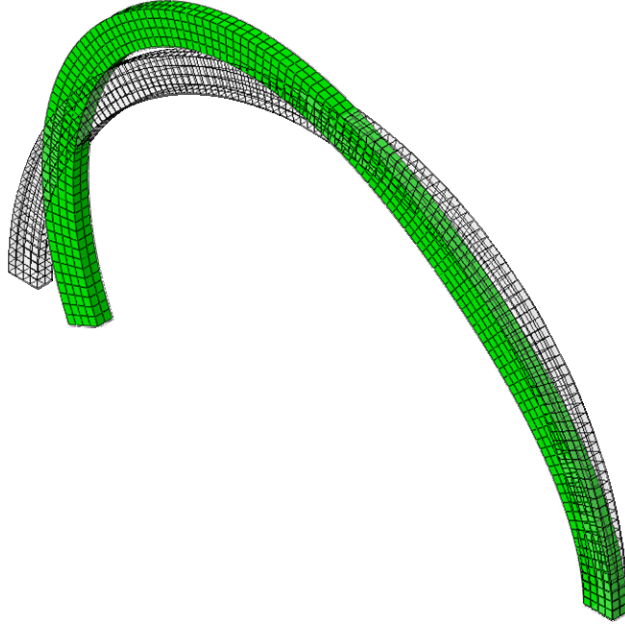
Şekil A. 10 : 180° kiriş açıklığına sahip serbest-serbest çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1928.1 Hz).



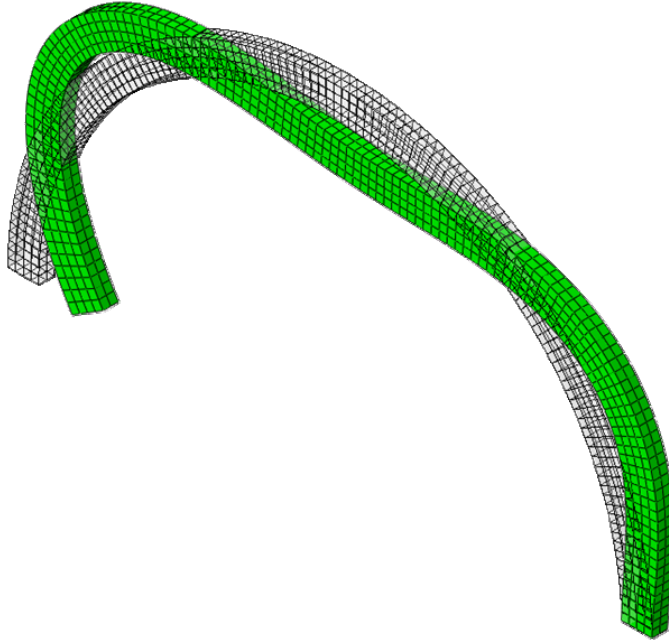
Şekil A. 11 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (52.15 Hz).



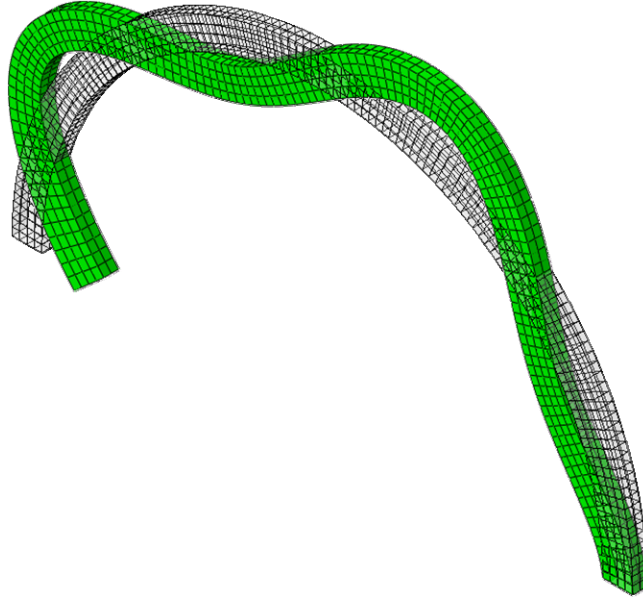
Şekil A. 12 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (164.2 Hz).



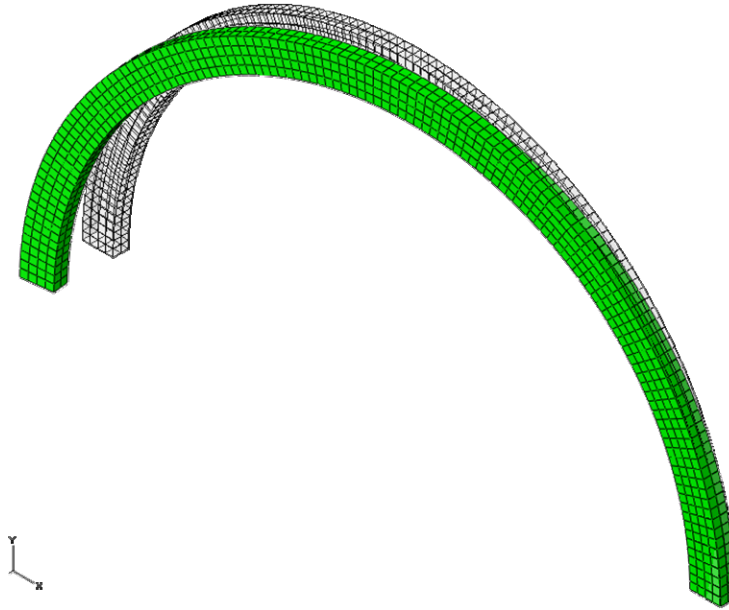
Şekil A. 13 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (557 Hz).



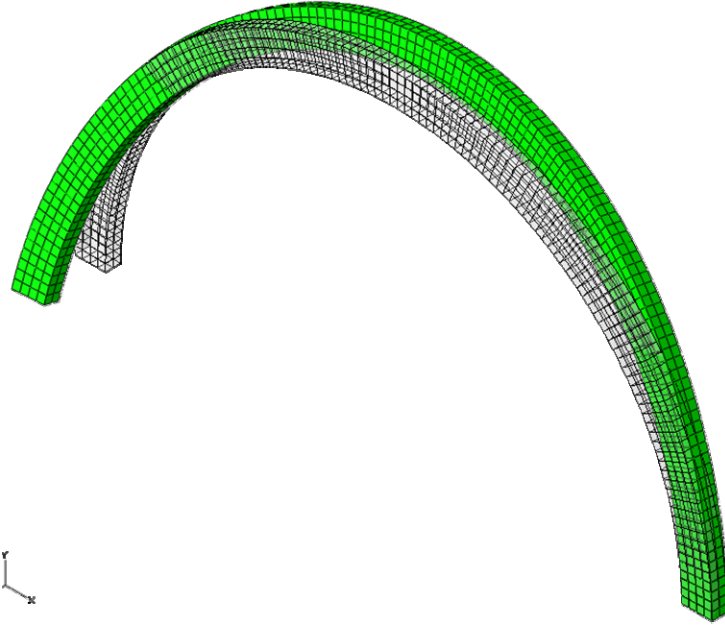
Şekil A. 14 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (1229 Hz).



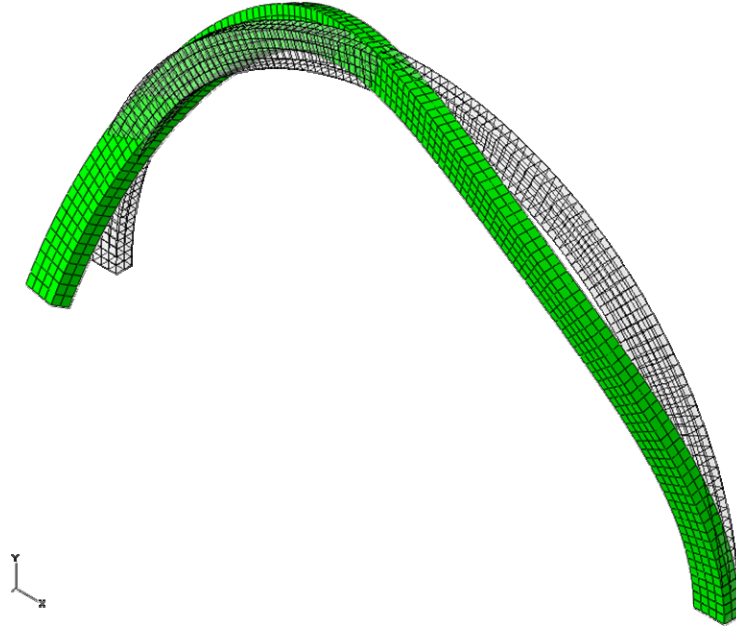
Şekil A : 15 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (2112 Hz).



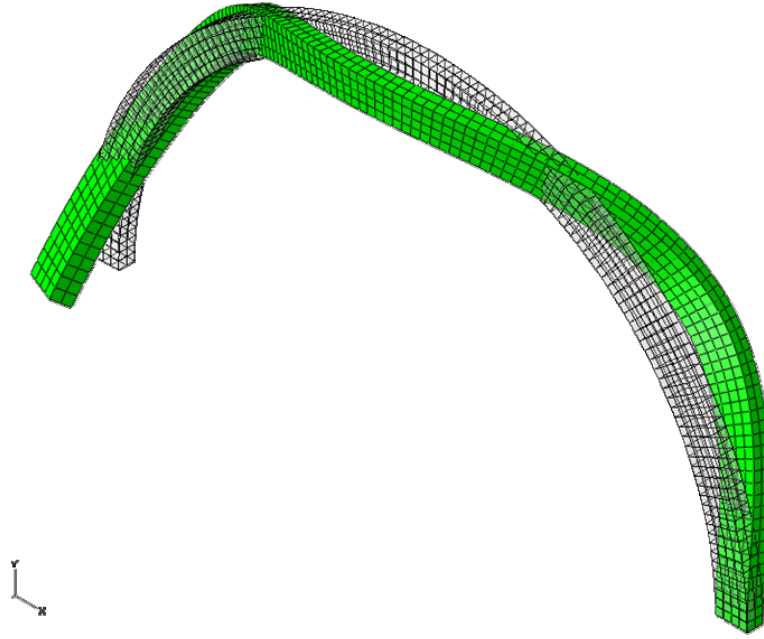
Şekil A. 16 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (26.69Hz).



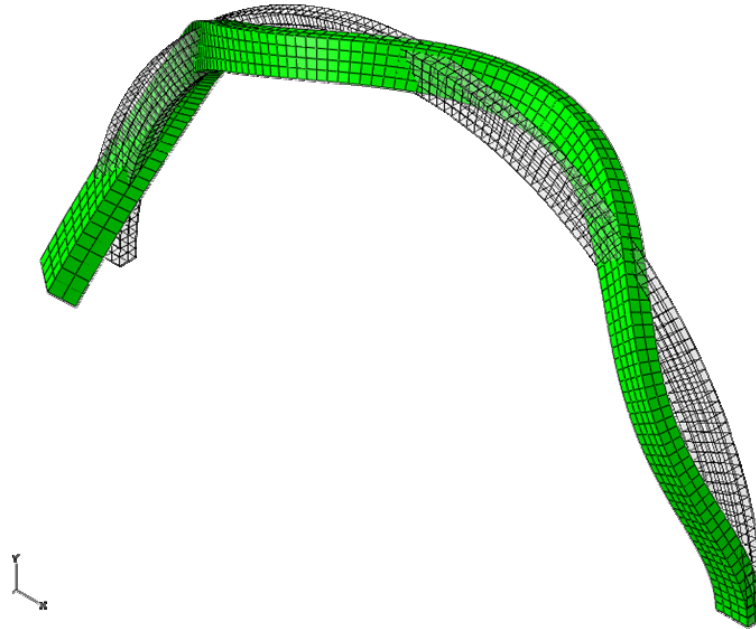
Şekil A. 17 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (82.94Hz).



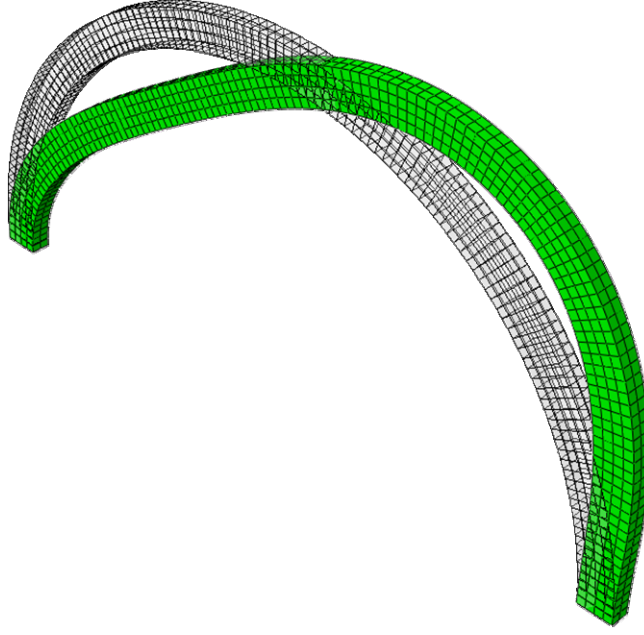
Şekil A. 18 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (282.3Hz).



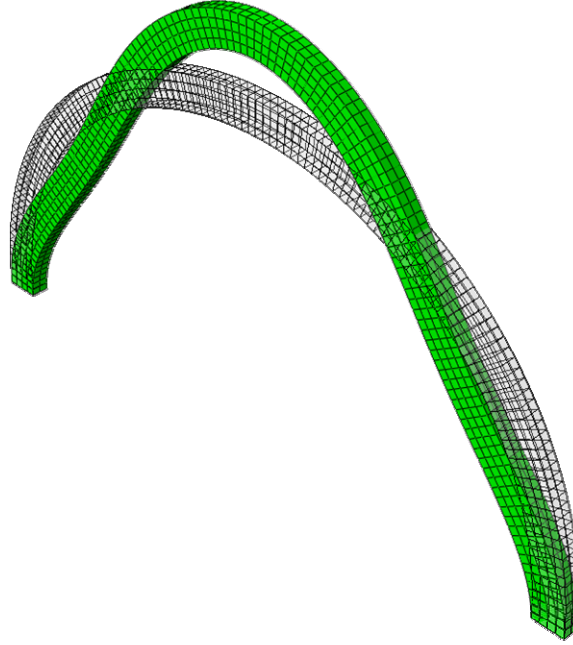
Şekil A. 19 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (624.5 Hz).



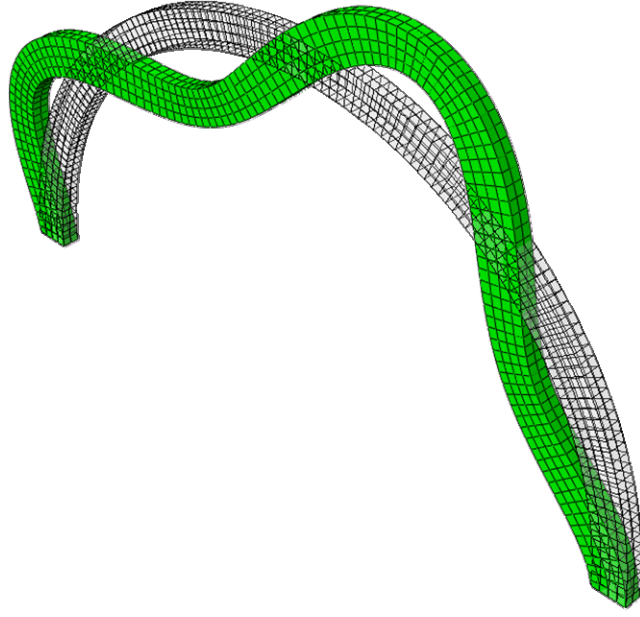
Şekil A. 20 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-serbest çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1081 Hz).



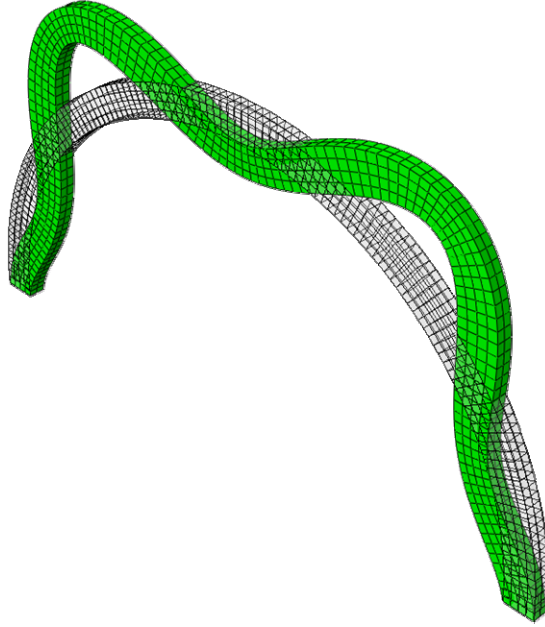
Şekil A. 21 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre- ankastre çubuğun düzlem içine ait birinci mod şekli (518.05 Hz).



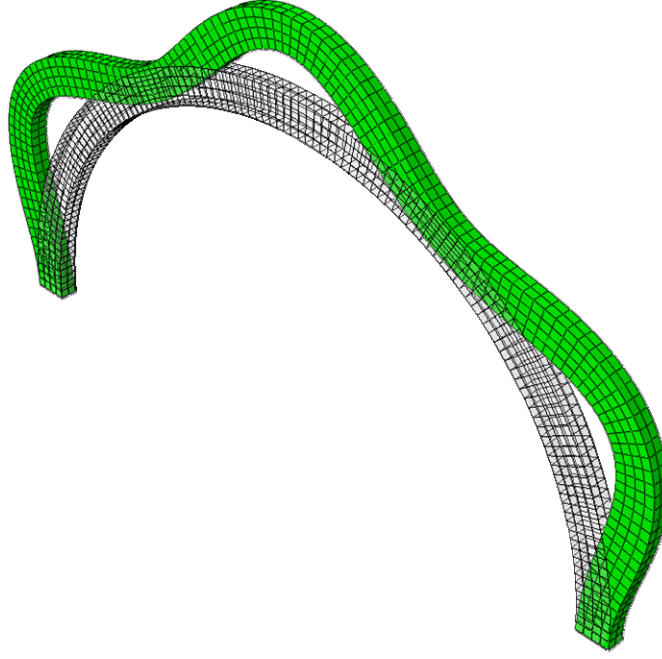
Şekil A. 22 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem içine ait ikinci mod şekli (1113.7 Hz).



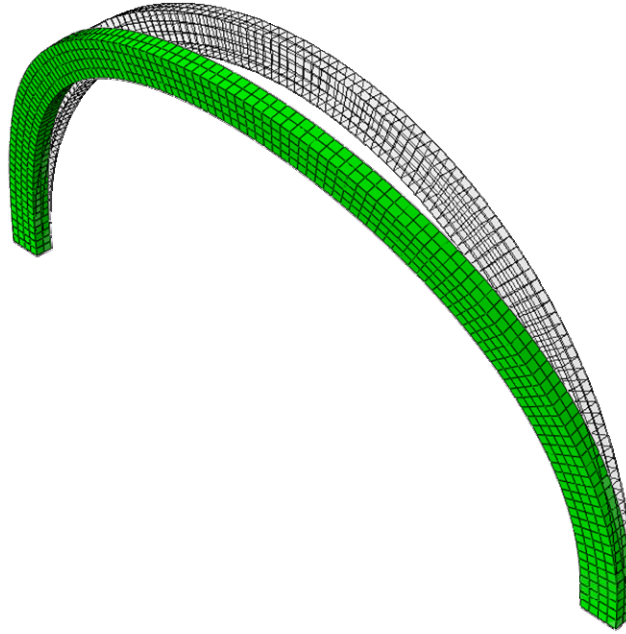
Şekil A. 23 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait üçüncü mod şekli (2047.6 Hz).



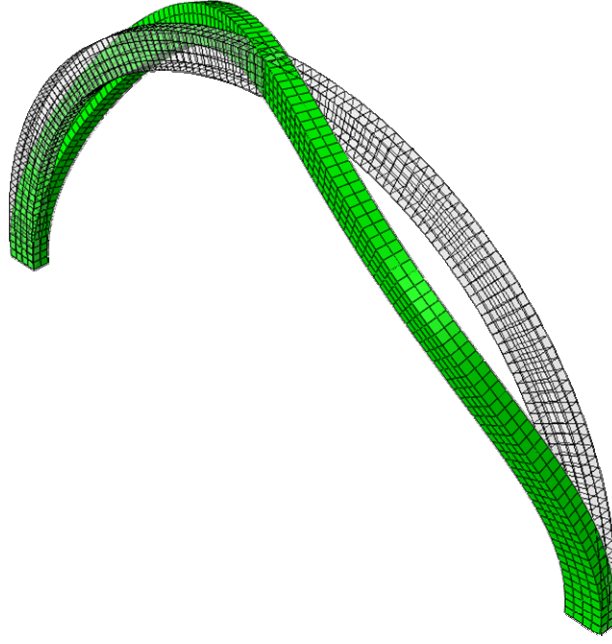
Şekil A. 24 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastreçubuğun düzlem içine ait dördüncü mod şekli (2952 Hz).



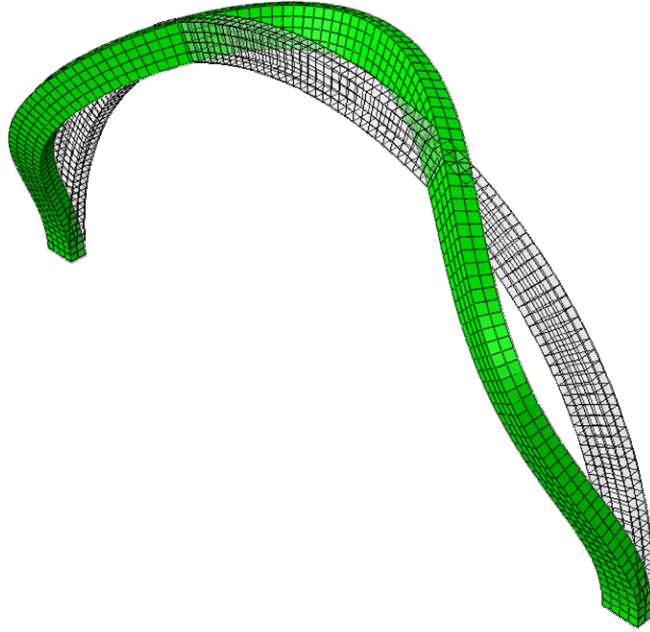
Şekil A. 25 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem içine ait beşinci mod şekli (4083.9 Hz).



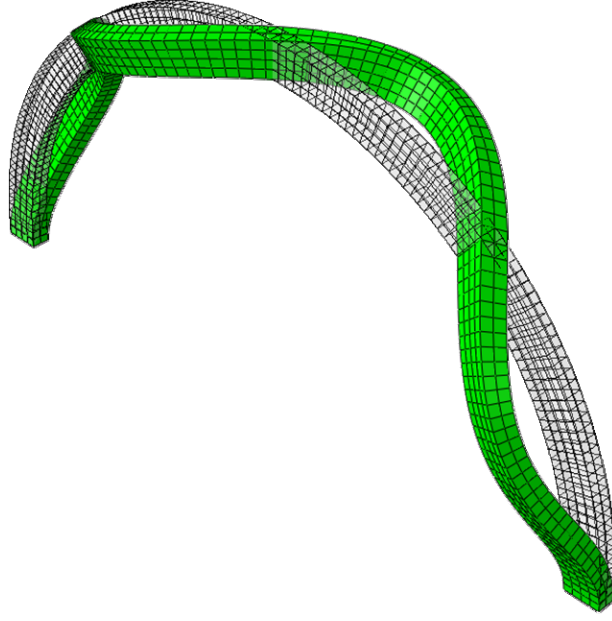
Şekil A. 26 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait birinci mod şekli (110.62 Hz).



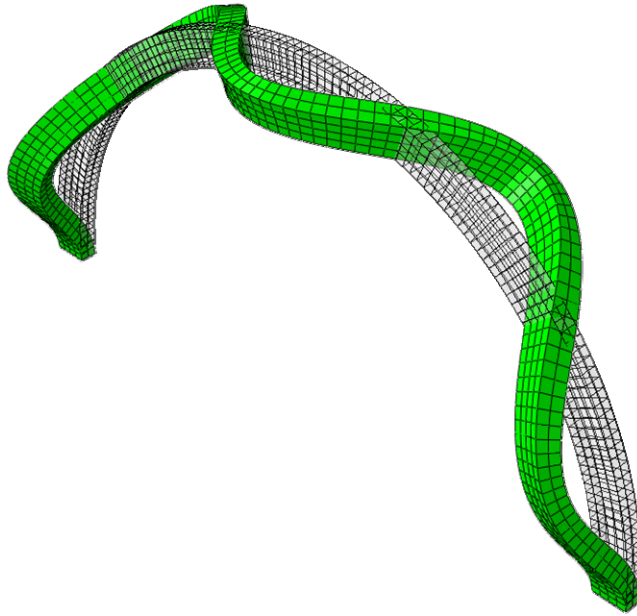
Şekil A. 27 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait ikinci mod şekli (318.22 Hz).



Şekil A. 28 : 180° kiriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait üçüncü mod şekli (663.39 Hz).



Şekil A. 29 : 180° giriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait dördüncü mod şekli (1129.8 Hz).



Şekil A. 30 : 180° giriş açıklığına sahip ankastre-ankastre çubuğun düzlem dışına ait beşinci mod şekli (1712 Hz).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT

Doğum Yeri ve Tarihi: 22.08.1979

Lisans / Yüksek Lisans Üniversitesi: İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

- **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2002. On the Dynamic Stiffening of a Stepped Circular Arch: Exact Solution, *6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis(ESDA)*, İstanbul, Türkiye.
- **Tüfekçi, E., Bostancı, T., Özdemirci, Ö., Oldaç, O.,** 2002. Experimental Verification Of Numerical And Analytical Solutions Of Free Vibrations Of Curved Beams, *The 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamic (ICSSD)*, Singapore
- **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2004. In-Plane Vibrations of Circular Arches with Varying Cross-Sections, *International Modal Analysis Conference (IMACXXII)*, Detroit, ABD.
- **Tüfekçi, E., Dogruer, Y., Özdemirci, Ö.,** 2004. Experimental Verification of Analytical and Numerical Solutions of In-Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Circular Arches, *International Modal Analysis Conference (IMACXXII)*, Detroit, ABD.
- **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2006. Exact Solution Of Free In-Plane Vibration Of A Stepped Circular Arch, *Journal of Sound and Vibration*, 295, 725-738.