İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT TOEPLITZ OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülşen ÖZDEMİR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Mayıs 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Haziran 1996

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nazım SADIKOV N. Sadı

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Kadir AHRE K Ahre

: Prof. Dr. Abbas AZİMOV

MAYIS 1996

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması esnasında her türlü yardımı gösteren sayın hocam Prof.Dr. Nazım SADIKOV'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Abstract Toeplitz operatörleri tanımlanmış, örnekler verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Abstract Toeplitz operatörleri, spektral teorisi ve Banach cebrinin genel teorisi bakımından da incelenmiştir. Çalışmanın son kısmında ise, Riesz sistemlerin denkliği tanımlanarak sonsuz sayıda denk olmayan Riesz sistem olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY
SPEKTRAL THEORY of ABSTRACT TOEPLITZ OPERATOR

In this work,Spektral theory of Abstract Toeplitz operators are studied.

Toeplitz operators are related to different branches of mathematics such as convergence theory of analytic functions, the integral equation, Wiener-Hopf equation and control theory. For this reason, Toeplitz operators have a great importance in the theory of operators.

This work contains four section. The first section is introduce section. The second section contains preliminaires about bounded linear operators on Hilbert spaces, Banach and operator algebras. Now let us give some fundamental concepts.

The set of all measurable complex function on X is denoted by $L^2(X,\nu)$ which satisfy $\int_X |f|^2 < \infty$. The unit circle is denoted by T and the normalized measure on T is denoted by μ. In this condition, $L^2(T,\mu)$ denotes the st of all measurable functions in the unit circle which satisfy $\int_T |f|^2 < \infty$.

The orthonormal basis in $L^2(T,\mu)$ is given as

$$e_n(\theta) = e^{in\theta}, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ n = 0, \pm 1, ..$$

The inner product on $L^2(T,\mu)$ is defined by

$$(f,g) = \int_T f.\overline{g} d\mu, \ \ \forall f,g \in L^2(T,\mu)$$

The essentially bounded complexed valued functions in the unit circle is denoted by $L^\infty(T,\mu)$.

The norm in this space is defined by

$$\|f\|_\infty = inf\{c > 0 : \ \mu(x \in T : |f(x)| > c) = 0\}.$$

Let us define the H^2 space

$$H^2 = \{f \in L^2(T,\mu) : \int_T f.\bar{e}_n d\mu = 0, \ \forall n < 0\}$$

$$H^2 = \{f \in L^2(T,\mu) : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f.e_n d\theta = 0, \ \forall n \geq 0\}$$

The functions in H^2 space are called analytic functions and this space is called Hardy space.

The linear bounded operators space on Hilbert space is denoted by $B(H)$. We give some definitions about operators in $B(H)$, and definition of spektral measure and some theorems about it.

In the third section,we have studied spektral theory of Abstract Toeplitz operators. Firstly, we give some definitions.

Let H be any infinite dimensional Hilbert space and let R be a maxsimal abelian von Neumann algebra of operators acting on R. A closed subspace $K \neq \{0\} \subseteq H$ is said to be a weak Riesz subspace for R if each $0 \neq f \in K$ is seperating vector for R. By definition this means that if $L \in R$ and $Lf = 0$, then $L = 0$.

A proper subspace $K \subset H$ is a Riesz subspace for R if both K and $K^\perp$ are weak Riesz subspaces for R.

A triple (H,R,K) is called a Riesz system if H is an infinite dimensional Hilbert space, R is a maximal abelian von Neumann algebra on H and $K \subset H$ is a Riesz subspace for R.

If (H,R,K) is any Riesz system, the linear operator that projects H onto the subspace K is always denoted by P. Furthermore, every operator $L \in R$ is called Abstract Laurent operator and every operator of form PL acting on the Hilbert space K is called a Abstract Topelitz operator.

Then, we have given some examples of Riesz systems. First, we have showed that (L^2, L^∞, H^2) is a Riesz system.

In this section we suppose as given some fixed but arbitrary Riesz system (H,R,K). Recall that P denotes the projection of H onto K. We first obtain some preliminary results that lead to the spectral inclusion theorem.

If M is any linear manifold in H, the closure of M is denoted by $[M]$.

Lemma 3.2: If L is Abstract Laurent operator and $[LH] \neq H$, then $[LH] = [LK] = [LK^\perp]$.

Here, the following result is taken:

Corollary 3.3: H is infinite dimensional Hilbert space, R is maximal abelian von Neumann algebra on H, then (H, R, K) is a Riesz system if and only if $EH = [EK] = [EK^{\perp}]$ for every nonzero projection $E < 1$ in R.

The following proposition is proved by using the above corollary.

Proposition 3.5: The maximal abelian von Neumann algebra R contains no minimal projections and the subspaces K and $K^{\perp}$ are both infinite dimensional.

If A is any operator, we denoted by $\sigma(A)$ the spektrum of A and by $\pi(A)$ the approximate point spektrum of A. If $L \in R$ (L is Abstract Laurent operator), then the operator PL (PL is Abstract Toeplitz operator) on K is denoted by T_L.

Teorem 3.6: If $L \in R$, then $\sigma(L) \subset \pi(T_L) \subset \sigma(T_L)$.

Then, the spektral radius of an operator A is denoted by $r(A)$. Let (H, R, K) be Riesz system. The collection of Abstract Toeplitz operators is denoted by GT. It is obvious that GT is closed subset of $B(K)$.

Let $\psi : R \to GT$ be defined by $\psi(L) = T_L$.

Corollary 3.7: The mapping ψ is linear,one-to-one,isometric-isomorph and preserves adjoints.

To prove Corollary 3.7 is used Teorem 3.6.

Corollary 3.8: If $L \in R$ that is not scalar, then L and T_L have no proper value in common.

We obtain a corollary about compact Abstract Toeplitz operator.

Corollary 3.11: The only compact Abstract Toeplitz operator is zero.

The proving of Corollary 3.11 is used Theorem 3.6 and the following Lemma.

Lemma 3.9: If $a \in B(H)$ is compact operator, $\lambda \neq 0$ and $\lambda \in \sigma(A)$, then λ is proper value of A.

Abstract Laurent operator L and its associated Abstract Topelitz operator are said to be analytic if $LK \subset K$, and to be co-analytic if $LK^{\perp} \subset K^{\perp}$. It follows L is analytic if and only if L^* is co-analytic.

In this section, it is showed when T_L is isometry operator.

Theorem 3.14: A T_L is an isometry if and only if L is analytic unitary operator.

Let $A \in B(H)$. A is called quasinilpotent, if $\sigma(A) = 0$.

Let $\mathcal{R}$ be algebra. The radical of $\mathcal{R}$ is defined by $Rad\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{R} : (I - AB)^{-1} \in \mathcal{R},\ \forall B \in \mathcal{R},\ \text{exists}\ \}$.

If $Rad\mathcal{R} = \{0\}$, then $\mathcal{R}$ is called semisimple.

Lemma 3.15: The collection of analytic Abstract Toeplitz operators with any Riesz system form a semisimple commutative Banach algebra under the operator norm.

The collection of analytic Abstract Toeplitz operators is denoted by $\mathcal{AGT}$. Let $\sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ denote the spektrum of an analytic Abstract Toeplitz operator T_L regarded as an element of $\mathcal{AGT}$.

Lemma 3.16: $\forall T_L \in \mathcal{AGT}$,

$$\sigma(T_L) = \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$$

.

Theorem 3.18: The spectrum of every analytic Abstract Toeplitz operator T_L is connected.

In the four section, we study way in which Riesz systems can differ.

Definition 4.1: Two Riesz systems (H, R, K) and (H_1, R_1, K_1) are said to be equivalent if there is a Hilbert space isomophism ϕ of H onto H_1 such that $\phi(K) = K_1$ and such that $\phi R \phi^{-1} = R_1$.

Proposition 4.1: If two Riesz system (H, R, K) and (H_1, R_1, K_1) are equivalent, then the spaces GT and GT_1 are isometrically isomorphic which is given by $FT_L = T_{\phi L \phi^{-1}}$.

Let $F(n)$ be any finite subset of the non-negative integer and the subspace $M_{F(n)} \subset K$ spaned by the orthonormal vectors $\{e^{in\theta} : n \in N/F(n)\ \}$. $M_{F(n)} = \vee\{e^{in\theta} :\ n \in N/F(n)\ \}$. The Riesz system $(H, R, M_{F(n)})$ is denoted by $R_{F(n)}$.

Lemma 4.2: Hermitian Abstract Toeplitz operator associated with the Riesz system $R_{F(n)}$ has a null space whose dimension is at most n and there exists a hermitian Abstract Toeplitz operator whose null space dimension is n.

Following theorem is proved by the using of Lemma 4.2. It shows that there are a lot of Riesz systems which can be differ.

Theorem 4.3: If m and n are distinct possitive integers. The Riesz systems $R_{F(n)}$ and $R_{F(m)}$ are not equivalent. Furthermore no Riesz system $R_{F(n)}$ is equivalent to (L^2, L^∞, H^2).

BÖLÜM 1 GİRİŞ

Bu çalışmada Abstract Toeplitz Operatörler sınıfının bazı özellikleri incelenmiştir.

Toeplitz operatörlerinin integral denklemlerden Wiener-Hopf denklemlerine, analitik fonksiyonların yakınsaklık teorisine kadar matematiğin bir çok dalıyla ilişkisi vardır. Bundan dolayı Toeplitz Operatörlerinin operatörler teorisinde önemi büyüktür.

Son zamanlarda Toeplitz operatörler teorisi farklı yönlerde gelişmektedir. Örneğin, bu teori yüksek boyutlu , çok bağlantılı bölgelerde tanımlanıp inceleniyor [1]. Ayrıca, bu teori Bergman uzayında ve onun genelleştirilmiş hallerinde de inceleniyor [2],[3],[4]. Bunlardan başka bir yön var ki, burada Abstract Toeplitz operatörleri incelenir.

Abstract Toeplitz operatörler sınıfı ilk defa R.G.Douglas ve C.Pearcy tarafında "Spektral Theory of Generalized Toeplitz Operators" isimli makalede [5] tanımlanmıştır. Bu sınıf, iyice incelenmiş olan Klasik Toeplitz operatörler sınıfınıda içermektedir.

Bu makalenin esas düşüncesi, ondan ibarettir ki, Klasik Toeplitz operatörlerine dair neticelerin bir çoğu (spektral teorisi) M.F.Riesz Teoreminin yardımıyla elde edilebilir.

Bu çalışma, dört bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, kısaca çalışmanın içeriğinden bahis edilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın genelinde kullanılan kavram ve bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Abstract Toeplitz operatörleri tanımlanmış, örnekler verilmiş ve incelenmiştir. Ayrıca spektral teorisi de incelenmiştir.

H, ayrılabilir olması gerekmeyen, sonsuz boyutlu Hilbert uzayı ve R, H üzerinde tanımlı operatörlerin maksimal abelyen von Neumann cebri olsun. $K \subset H$ sıfırdan farklı kapalı bir alt uzay olsun.

Tanım 1.1: Eğer $\forall f \in K$, $f \neq 0$, $L \in R$ ve $Lf = 0$ iken $L = 0$ oluyorsa K'ya R için zayıf Riesz alt uzay denir.

Tanım 1.2: Eğer hem K hem $K^{\perp}$ R için zayıf Riesz alt uzay ise K'ye Riesz alt uzay denir.

(H, R, K) üçlüsüne Riesz sistem denir.

$P : H \to K$ bir izdüşüm operatörü olsun.

Tanım 1.3: $\forall L \in R$'ye H'de Abstract Laurent Operatörü denir.

Tanım 1.4: K'den K'ye giden PL, $L \in R$ şeklinde tanımlanan operatöre Abstract Toeplitz Operatörü denir, T_L ile gösterilir ve $T_L : K \to K$, $\forall f \in K$, $T_L f = PLf$.

GT ile (H, R, K) Riesz sisteminde Abstract Toeplitz operatörler sınıfını gösterelim.

Bazı yardımcı teoremler, Lemma 3.2 ve sonuçları ispatlandıktan sonra Teorem 3.6 ispatlanmıştır.

Teorem 1.1: (H, R, K) Riesz sistem ve L Abstract Laurent operatörü olsun. Bu takdirde $\sigma(L) \subset \pi(T_L) \subset \sigma(T_L)$ 'dir.

Burada $\sigma(L)$, L operatörünün spektrumunu, $\pi(T_L)$ ise T_L operatörünün aproksimatif spektrumunu göstermektedir.

Şimdi Önerme 3.8 ve Sonuç 3.11'i verelim.

Önerme 1.2: $L \in R$ skalerden farklı Abstract Laurent operatörü ise L ve T_L'nin birlikte özdeğerleri yoktur.

Sonuç 1.3: Tek kompakt Abstract Toeplitz operatörü 0'dır.

Bu bölümde Abstract Toeplitz operatörünün ne zaman izometri olduğu da incelenmiştir.

$L \in R$ Abstract Laurent operatörü ve T_L Abstract Toeplitz operatörü olsun. $LK \subset K$ ise L ve T_L 'ye analitik,

$LK^{\perp} \subset K^{\perp}$ ise L ve T_L 'ye ko-analitik denir.

Teorem 1.4: T_L Abstract Toeplitz operatörünün izometri olması için gerekli ve yeterli koşul L Abstract Laurent operatörünün analitik üniter olmasıdır.

Abstract Topelitz operatörleri Banach cebrinin genel teorisi bakımından da incelenmiştir.

Lemma 1.5: Keyfi Riesz sistemle üretilmiş analitik Abstract Toeplitz operatörler ailesi operatör normu altında değişmeli yarı basit Banach cebiridir.

$\mathcal{AGT}$ ile analitik Abstract Toeplitz operatörler cebirini gösterelim.

Lemma 1.6: $\forall T_L \in \mathcal{AGT}$ için

$$\sigma(T_L) = \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$$

Ve bu bölümün sonunda Gelfand teorisi yardımıyla Teorem 3.13 ispatlanmıştır.

Teorem 1.7: Her analitik T_L Abstract Toeplitz operatörünün spektrumu irtibatlıdır.

Dördüncü bölümde, Riesz sistemlerden oluşan kümede denklik tanımı verilmiştir.

Tanım 1.5: (H, R, K) ve (H_1, R_1, K_1) Riesz sistemlerine denk denir, eğer öyle $\phi : H \rightarrow H_1$ izomorfizmi var ki $\phi(K) = K_1$, $\phi R \phi^{-1} = R_1$ olsun.

Önerme 1.8: Eğer (H, R, K) ve (H_1, R_1, K_1) Riesz sistemleri denk ise GT ve GT_1 uzayları izometrik izomorftur ve bu izomorfluk $FT_L = T_{\phi L \phi^{-1}}$ şeklindedir.

$F \subset N$ sonlu bir alt küme olsun(burada N Doğal sayılar kümesidir) ve $F = \{k_1 < k_2 < .. < k_n\}$ şeklindedir. M_F , $\{e^{in\theta} : n \in N/F\}$'yı içeren en küçük kapalı lineer uzay olsun ve $M_F = \vee\{e^{in\theta} : n \in N/F\}$ şeklinde gösterelim. $R_{F(n)} = (L^2, L^\infty, M_{F(n)})$ Riesz sistemini gösterelim.

Lemma 1.9: $(H, R, M_{F(n)})$ Riesz sistemli hermityen Abstract Toeplitz operatörünün sıfır uzayının boyutu en fazla n'dir ve öyle hermityen Abstract Toeplitz operatörü var ki sıfır uzayının boyutu n'dir.

Lemma 1.9 yardımıyla aşağıdaki teorem ispatlanmıştır, yani sonsuz sayıda denk olmayan Riesz sistemler vardır.

Teorem 1.10: m ve n farklı iki pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde $R_{F(n)}$ ile $R_{F(m)}$ Riesz sistemleri denk değildir. Ayrıca $R_{F(n)}$'lerin hiçbirisi (L^2, L^∞, H^2) Riesz sistemine denk değildir.

BÖLÜM 2 GEREKLİ KAVRAM VE BİLGİLER

Çalışmanın başka kaynaklardan bağımsız olarak okunabilmesi için aşağıdaki bilgileri verelim.

$\mathbf{L^2(X,\nu)}$: ν sonlu ölçü olmak üzere, Lebesque'e göre ölçülebilen ve karesi ν ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonlar uzayı.
$T = \{z \in C : |z| = 1\}$ Komplex düzlemde birim çemberi ve μ birim çemberin Borel kümeleri üzerinde normalleştirilmiş Lebesque ölçüsünü(yay uzunluğunun genişletilmesi) göstermek üzere;
$\mathbf{L^2(T,\mu)}$: Birim çemberde Lebesque'e göre öçülebilen ve karesi μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonlar uzayı.

$L^2(T,\mu)$ 'de ortonormal baz :

$$e_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \; n = 0, \pm 1, ..$$

şeklinde tanımlanır.

$L^2(T,\mu)$ 'de iç çarpım :

$$\forall f, g \in L^2(T,\mu), \quad (f,g) = \int_T f.\bar{g} d\mu$$

şeklinde tanımlanır.

H^2 sınıfı

$$H^2 = \{f \in L^2(T,\mu) : \int_T f.\bar{e}_n d\mu = 0, \; \forall n < 0\}$$

$$H^2 = \{f \in L^2(T,\mu) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f.e_n d\theta = 0, \; \forall n \ge 0\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu sınıfı oluşturan fonksiyonlara analitik fonksiyonlar denir. Bu sınıfa ise Hardy uzayı denir. Açıktır ki H^2 bir Hilbert uzayıdır.

$L^{\infty}(T,\mu)$: Birim çemberdeki kompleks değerli ve esaslı sınırlı fonksiyonlar uzayı.
Bu uzayda norm : $||f||_{\infty} = inf\{c > 0 : \quad \mu(x \in T :| f(x) |> c) = 0\}$ şeklindedir.

$\mathcal{R}$, C üzerinde vektör uzayı olsun, ve $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ve aşağıdaki şartları sağlayan $(x,y) \rightarrow xy$ işlemini tanımlayalım.

1) $x(yz) = (xy)z, \ \forall x, y, z \in \mathcal{R}$;
2) $x(y+z) = xy + xz$ ve $(x+y)z = xz + yz, \ \forall x, y, z \in \mathcal{R}$;
3) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \ \forall x, y, \in \mathcal{R}$ ve $\lambda \in C$.

Bu işleme çarpım denir. $\mathcal{R}$ vektör uzayında çarpım işlemi de tanımlıysa $\mathcal{R}$'ye cebir denir.

Eğer $xy = yx$ şartını sağlıyorsa $\mathcal{R}$'ye değişmeli cebir denir. $\mathcal{R}$'de sıfırdan farklı $1 \in \mathcal{R}$, $\forall x \in \mathcal{R}$, $1x = x1 = x$ şartını sağlıyan eleman varsa 1'e birim eleman $\mathcal{R}$'ye birimli cebir denir.

$M \subset \mathcal{R}$ alt uzay olsun. Eğer M, elemanlarının ikili çarpımlarını içeriyorsa yani $x, y \in M$ için $xy \in M$ ise M'ye alt cebir denir.

Eğer $\mathcal{R}$ Banach uzayı ve burada tanımlı norm $\forall x, y \in \mathcal{R}$, $||xy|| \leq ||x||||y||$ şartını sağlıyorsa $\mathcal{R}$ cebirine Banach cebiri denir.

Eğer $\mathcal{R}$ birim elemanlı Banach cebri ise 1 birim elemanı için $||1|| = 1$ olmalıdır.

$\mathcal{R}$ cebir ve $M \subset \mathcal{R}$ alt uzay olsun. Eğer $\forall x \in \mathcal{R}$, $\forall a \in M$ için $ax, xa \in M$ ise M'ye iki taraflı ideal denir.

Eğer $M \subset \mathcal{R}$, $M \neq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}$'de M'yi içeren başka ideal yoksa M'ye maksimal ideal denir.

$B(H)$ ile H Hilbert uzayında tanımlı lineer, sınırlı operatörler kümesini gösterelim.

Açıktır ki $B(H)$ operator çarpımına göre bir Banach cebirdir.

$A \in B(H)$ olsun. Eğer öyle bir $B \in B(H)$ operatörü var ve $AB = BA = I$ ise A operatörüne tersinir, $B \in B(H)$ 'a da A'nın tersi denir. Bir $A \in B(H)$ operatörünün spekturumu

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C; \quad (A - \lambda I)'\text{nın tersi mevcut değil}\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\pi(A) &= \{\lambda \in C; \quad (A - \lambda I) \quad \text{alttan sınırlı değil}\} \\ &= \{\lambda \in C; \quad \{x_n\} \subset H, \ ||x_n|| = 1, \ ||Ax_n - \lambda x_n|| \to 0\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan noktalar kümesine A'nın Aproksimatif spektrumu denir.

Bir operatörün spektral yarıçapı

$$r(A) = sup\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma(A)\}$$

şeklinde tanımlanır.

$A \in B(H)$ olsun. A^* ile gösterilen ve $(Af, g) = (f, A^*g)$, $\forall f, g \in H$ şartını sağlayan operatöre A operatörünün eşi(adjointi) denir.

$A \in B(H)$, $A = A^*$ ise A operatörüne hermityen(self-adjoint), $A^* = A^{-1}$ ise A operatörüne üniter, $A^2 = A$ ise A operatörüne idempotent, $AA^* = A^*A$ ise A operatörüne normal denir.

$A \in B(H)$ olsun. $\forall f, g \in H$ için $(Af, Ag) = (f, g)$ oluyorsa A operatörüne izometrik denir.

$K \subset H$ kapalı alt uzayı olmak üzere $P : H \to K$ operatör olsun. Eğer P operatörü $P = P^2 = P^*$ şartlarını sağlıyorsa P'ye ortogonal izdüşüm operatörü denir. Bundan sonra bu operatöre sadece izdüşüm operatörü diyeceğiz.

$A, B \in B(H)$ ve $A = A^*$, $B = B^*$ olsun. $A \geq B$ olması $(Af, f) \geq (Bf, f)$, $f \in H$ anlamındadır.

P, Q iki izdüşüm operatörü olsun. $P \geq Q \Rightarrow PH \supseteq QH$ şeklindedir.

Teorem 2.1: A normal operatör ise $||A|| = r(A)$ ‘dır [6].

Teorem 2.2: A normal operatör ve $Ax = \lambda x$ ise $A^*x = \overline{\lambda}x$ ‘dir [6].

Teorem 2.3: (Normal operatörler için spektral tasvir teoremi) A normal operatör ve $p(.,.)$ iki değişkenli polinom ise

$$\sigma(p(A, A^*)) = \{p(z, \overline{z}) : z \in \sigma(A)\}$$

dır [6].

Tanım 2.1: $A \in B(H_1)$, $B \in B(H_2)$ olsun. A ve B üniter olarak denktir denir, eğer öyle $U : H_1 \rightarrow H_2$ izometrik izomorfizm operatörü var ki $UAU^{-1} = B$ olsun.

Tanım 2.2: $\varphi \in L^{\infty}(X, \mu)$ için

$$M_{\varphi} f = \varphi . f, \ \forall f \in L^2(X, \mu)$$

şeklinde tanımlanan operatöre çarpım operatörü denir.

Teorem 2.4: (Spektral teoremin 1.formu) H Hilbert uzayında A normal operatör ise öyle (X, μ) sonlu ölçü uzayı ve $\varphi \in L^{\infty}(X, \mu)$ fonksiyonu vardır ki A operatörü ve $L^2(X, \mu)$ ‘de M_{φ} operatörü üniter olarak denktir [6].

Tanım 2.3: K kompakt bir küme ve Σ, K’nin borel kümelerini göstermek üzere $E : \Sigma \rightarrow B(H)$ tasviri

1) $E(\phi) = 0$.
2) $\forall \Delta \in \Sigma$ için $E(\Delta) = P_{\Delta}$, $P_{\Delta} = P_{\Delta}^2 = P_{\Delta}^*$.
3) $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$ için $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = P_{\Delta_1} P_{\Delta_2}$.
4) $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$ ve $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$ için $E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P_{\Delta_1} + P_{\Delta_2}$.

şartlarını sağlıyorsa E’ye spektral ölçü denir.

Bundan başka, eğer $\forall f, g \in H$, $(E(\Delta)f, g)$ kompleks değerli bir ölçü ise yani Σ’da tanımlanmış σ-toplamsal fonksiyon ise E’ye birim ayrılış denir.

Teorem 2.5: A normal operatör ise $\sigma(A)$ ’da tek bir E birim ayrılışı vardır öyle ki $A = \int \lambda dE_{\lambda}$ [6].

Teorem 2.6: (Fuglede teoremi) $A = \int \lambda dE_\lambda$ ve $B \in B(H)$ öyle ki $AB = BA$ ise her Δ Borel kümesi için $B, E(\Delta)$ ile değişmelidir [6].

Bir A operatörünün görüntü kümesini $Ran(A)$ ‘ile gösterelim.

Teorem 2.7: $A \in B(H)$ normal operatör ise A’nın spektrumu yalnız aproksimatif spektrumdan oluşur yani $\pi(A) = \sigma(A)$.

İspat: Önce $\pi(A) \subset \sigma(A)$ olduğunu görelim: $\lambda \notin \sigma(A)$ ise $(A - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur.$\forall f \in H$ için

$$\begin{aligned} ||f|| &= ||(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)f|| \\ &\leq ||(A-\lambda I)^{-1}||\ ||(A-\lambda I)f|| \end{aligned}$$

$||(A - \lambda I)f|| \geq a||f||$, $a = \frac{1}{||(A-\lambda I)^{-1}||}$ $(A - \lambda I)$ alttan sınırlıdır yani $\lambda \notin \pi(A)$

Şimdi ise $\sigma(A) \subset \pi(A)$ olduğunu görelim.
$\lambda \notin \pi(A)$ olsun. $\exists\ \varepsilon > 0$, $||Ag - \lambda g|| \geq \varepsilon||g||$, $\forall g \in H$ için. A normal olduğundan $(A-\lambda I)$‘da normaldir. $(A-\lambda I)^* = A^* - \lambda^* I$ ‘dır. $(A-\lambda I)$ için sağlanan eşitsizlik $A^* - \lambda^* I$ içinde sağlanır. $||(A^* - \lambda^* I)g|| \geq \varepsilon||g||$

Şimdi $(A-\lambda I)$ ‘nın tersinin mevcut olduğunu görmek için $(A-\lambda I)$ ‘nın görüntü kümesinin H‘da yoğun olduğunu gösterelim.

$g \perp Ran(A - \lambda I)$ ise $0 = ((A - \lambda I)f, g) = (f, (A^* - \lambda^* I)g)$, $\forall f \in H$ için $(A^* - \lambda^* I)g = 0$ olmalıdır. $||A^* g - \lambda^* I g|| \geq \varepsilon||g||$ olması için $g = 0$ olmalıdı, yani $\lambda \notin \sigma(A)$.

$B(H)$‘da çok sayıda topoloji verilebilir. Biz burada şu topolojilerle ilgileneceğiz:Zayıf topoloji, Kuvvetli topoloji.

B(H)‘da zayıf topolojinin bazı

$$\{U(A, f_1, f_2, .., f_k, g_1, g_2, .., g_k; \epsilon)\}_{A\in B(H), f_n, g_n \in H, \epsilon>0}$$

$$= \{B \in B(H) : |((A - B)f_n, g_n)| < \epsilon\}$$

şeklindeki kümelerden oluşur.

Burada $\{A_n\} \subset B(H)$ operatörler dizisinin bir $A \in B(H)$ operatörüne yakınsaması

$$\lim_{n \to \infty} |((A_n - A)f, g)| = 0, \ \forall f, g \in H$$

şeklindedir. $B(H)$ 'da kuvvetli topolojinin bazı

$$\{V(A, f_1, f_2, .., f_k; \epsilon)\}_{A \in B(H), f_n \in H, \epsilon > 0}$$

$$= \{B \in B(H) : ||(A - B)f_k|| < \epsilon\}$$

şeklindeki kümelerden oluşur. Burada $\{A_n\} \subset B(H)$ operatörler dizisinin $A \in B(H)$ operatörüne yakınsaması

$$\lim_{n \to \infty} ||A_n f - Af|| = 0, \forall f \in H$$

şeklindedir.

Tanım 2.4: $R \subset B(H)$ bir alt cebir ve $A \in R$ iken $A^* \in R$ ise R 'ye self-adjoint cebir denir.

Tanım 2.5: Hilbert uzayında tanımlı operatörlerin zayıf kapalı bir alt cebiri olan, birimi içeren self-adjoint cebire Von Neumann Cebri denir.

Tanım 2.6: S ile H'de tanımlı operatörler ailesini gösterelim. S'i içeren bütün Von Neumann cebirlerinin arakesitine S ile üretilen Von Neumann cebir denir.

Teorem 2.8: R Von Neumann cebri ise içerdiği izdüşüm operatörlerinin kümesiyle üretilir [6].

Tanım 2.7: Başka hiçbir abelyen Von Neumann cebir tarafından içerilmeyen abelyen Von Neumann cebire maksimal abelyen self-adjoint cebir(masa) denir.

Teorem 2.9: R masa ise (X, μ) sonlu ölçü uzayı vardır öyleki R ve L^∞ üniter olarak denktir [6].

$\mathcal{R}$ birim elemanlı değişmeli cebir olsun. $M_{\mathcal{R}}$ ile $\mathcal{R} \to C$ tanımlı sıfırdan farklı homomorfizmler ailesini gösterelim. Bu homomorfizmlere $\mathcal{R}$'de karakter denir. $\mathcal{R}^*$ ile $\mathcal{R}$'de sürekli lineer fonksiyoneller uzayını gösterelim.

$M_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}^*$ kapalı alt cümle ve $\forall\varphi \in M_{\mathcal{R}}$ için $\|\varphi\| = 1$'dir. Banach-Alaoğlu Teoreminden [7] dolayı $M_{\mathcal{R}}$, zayıf* topolojisine göre tanımlanan relatif topolojide kompakttır. $\mathcal{R}$'nin maksimal idealler kümesi ile $M_{\mathcal{R}}$ arasında bire-bir tasvir vardır. $\forall\varphi \in M_{\mathcal{R}}$, $Ker\varphi \subset \mathcal{R}$ bir maksimal idealdir. Her $I_{max} \subset \mathcal{R}$'ye $\mathcal{R} \to C$ bir homomorfizm karşı gelir(Gelfand-Mazur Teoreminden dolayı [7]. Buna göre $M_{\mathcal{R}}$'ye tanımlanmış topolojide $\mathcal{R}$'nin maksimal idealler uzayı denir.

Teorem 2.10: $\mathcal{R}$ birim elemanlı, değişmeli Banach cebir ise $\mathcal{R}$'nin maksimal ideal uzayı $M_{\mathcal{R}}$ kompakt Hausdorff uzaydır ve $a \in \mathcal{R}$ için $\sigma(a) \equiv \{h(a) : h \in M_{\mathcal{R}}\}$[7].

Tanım 2.8: Kabul edelim ki $\mathcal{R}$ birim elemanlı, değişmeli Banach cebri olsun. $\Gamma : \mathcal{R} \to C(M_{\mathcal{R}})$ giden ve $\Gamma(a) = \hat{a}$, burada $\hat{a}(h) = h(a)$, tasvirine Gelfand tasviri denir.

Teorem 2.11: $\mathcal{R}$ değişmeli, birim elemanlı Banach cebri, $M_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ 'nin maksimal ideal uzayı ve $a \in \mathcal{R}$ olsun. Bu takdirde a'nın Gelfand tasviri $\hat{a}$, $C(M_{\mathcal{R}})$ 'ye aittir. $a \to \hat{a}$ tasviri $\mathcal{R}$'den $C(M_{\mathcal{R}})$'ye sürekli bir homomorfizmdir ve normu 1'dir [7].

BÖLÜM 3 ABSTRACT TOEPLITZ OPERATÖRLERİ

$L^2(T,\mu)$ Hilbert uzayıdır. $H^2(T,\mu) \subset L^2(T,\mu)$ 'nin kapalı bir alt uzayı olduğu için Hilbert uzayıdır.

$\varphi \in L^\infty(T,\mu)$ olsun. $\forall f \in L^2(T,\mu)$ için

$$L_\varphi f = \varphi . f$$

şeklinde tanımlanan operatöre Laurent operatörü denir.

$P : L^2 \to H^2$ izdüşüm operatörü olsun. $\forall \varphi \in L^\infty(T,\mu)$,

$$T_\varphi f = P L_\varphi f = P(\varphi . f) \quad f \in H^2(T,\mu)$$

şeklinde tanımlanan operatöre Toeplitz operatörü denir.

T_φ Toeplitz operatörüne φ (veya $\overline{\varphi}$)'nin analitik olmasına göre analitik(veya koanalitik) Toeplitz operatörü denir.

Toeplitz operatörlerinin aşağıdaki özellikleri vardır:
a) $\sigma(T_\varphi) \supset \sigma(L_\varphi)$ ve $\sigma(L_\varphi) \subset \pi(T_\varphi)$ dir [8].
b) $L_\varphi \to T_\varphi$ tanımlanan tasvir 1-1, lineerdir. Adjointi, spektral radüsü ve normu korur [9].
c) L_φ skalerden farklı Laurent operatörü olsun. Bu takdirde T_φ *ve* L_φ operatörlerinin birlikte özdeğerleri yoktur [9].
d) Tek kompakt Toeplitz operatörü sıfırdır [10].
e) Hem analitik hem koanalitik olan Laurent operatörü sadece skalerlerdir. (Toeplitz operatörünün ve analitik, ko-analitik Toeplitz operatörünün tanımından elde edilir)
f) Her T_φ Topelitz operatörünün spektrumu irtibatlıdır.
g)Hiçbir hermityen Toeplitz operatörünün özdeğeri yoktur [10].

Burada verilen Toeplitz operatörleriyle ilgili bilgiler [8] veya [11] kaynaklardan elde edilebilir.

H^2 uzayına ait bazı bilgiler gerekecektir. Bunlardan en önemlisi F.M.-Riesz teoremidir.

Teorem 3.1:(F.M.Riesz) Eğer $f \in H^2$ ve $\mu(\{z \in T : f(z) = 0\}) > 0$ ise $f = 0$ dır. (Burada μ, T'de adi Lebesque ölçüsüdür.)[10].

H^2 uzayına ait bilgiler [1] kaynaktan elde edilebilir.

Şimdi $(L^2(T,\mu), L^\infty(T,\mu), H^2(T,\mu))$ üçlüsüne bakalım. $L^\infty(T,\mu)$, $L^2(T,\mu)$ 'de m.a.s.a.'dır.([10], s.124) $H^2(T,\mu)$, $L^2(T,\mu)$ 'nin bir alt uzayıdır. Bu şartlar altında $f \in H^2(T,\mu)$, $f \neq 0$ ve $\varphi \in L^\infty(T,\mu)$, $\varphi.f = 0$ ise $\varphi = 0$ olduğunu göstermeye çalışalım. $f \neq 0$ ise F.M.Riesz teoremine göre hemen hemen her yerde sıfırdan farklıdır. $\varphi.f = 0$ şartlı fonksiyonu hemen hemen her yerde sıfır olmasıdır. Eğer φ hemen hemen her yerde sıfır değilse öyle $M \subset T$ pozitif ölçülü kümesi vardır ki $\varphi|_M \neq 0$ 'dır. Buradan $\varphi.f|_M \neq 0$ elde edilir. Bu ise $\varphi.f = 0$ 'a çelişkidir. O halde $\varphi = 0$ olmalıdır.

Buna göre aşağıda verilen tanımlar doğal olarak gözükür.

H, ayrılabilir olması gerekmeyen, sonsuz boyutlu Hilbert uzayı ve R, H üzerinde tanımlı operatörlerin maksimal abelyen von Neumann cebri olsun. $K \subset H$ sıfırdan farklı kapalı bir alt uzay olsun.

Tanım 3.1: Eğer $\forall f \in K$, $f \neq 0$, $L \in R$ ve $Lf = 0$ iken $L = 0$ oluyorsa K'ya R için zayıf Riesz alt uzay denir.

Bu tanım şuna denktir: $f \in K$ ve $f \neq 0$ ise Rf lineer manifoldu H içinde yoğundur.

Gerçekten, $0 \neq f \in K$, $L \in R$, $Lf = 0$ iken $L = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \neq f \in K$ iken $[Rf] = H$ olmasıdır.
$P_f : H \to [Rf]$ olsun. Şimdi $P_f = I$ olduğunu gösterelim:
$P_f \in R \Rightarrow I - P_f \in R$ olacaktır. Buradan $(I - P_f)f = 0$. K R için zayıf Riesz alt uzay olduğundan $I - P_f = 0$ 'dır. Böylece $P_f = I$ elde edilir.

$Lf = 0$ olsun. $L = 0$ olduğunu gösterelim:
$Lf = 0 \Rightarrow L_1 Lf = LL_1 f = 0, \quad L_1 \in R$ olmak üzere. Buradan
$LRf = 0 \Rightarrow [LRf] = 0 \Rightarrow LH = 0 \Rightarrow L = 0$ elde edilir.

Tanım 3.2: Eğer hem K hem $K^{\perp}$ R için zayıf Riesz alt uzay ise K'ye Riesz alt uzay denir.

Böylece elde edilen (H, R, K) üçlüsüne Riesz sistem denir.

$P : H \rightarrow K$ ile bir izdüşüm operatörünü gösterelim.

Tanım 3.3: $\forall L \in R$'ye H'de Abstract Laurent Operatörü denir.

Tanım 3.4: K'den K'ye giden $PL, \ L \in R$ şeklinde tanımlanan operatöre Abstract Toeplitz Operatörü denir ve $T_L : K \rightarrow K, \quad \forall f \in K$,
$T_L f = PLf$.

Şimdi (L^2, L^∞, H^2) üçlüsünün Riesz sistem oluşturduğunu gösterelim. Bunun için H^2 ve $(H^2)^{\perp}$'in L^∞ için zayıf Riesz alt uzay olduğunu göstermeliyiz. H^2'nın zayıf Riesz alt uzay olduğunu yukarda gösterdik. Şimdi ise $(H^2)^{\perp}$'nın zayıf Riesz alt uzay olduğunu benzer yolla gösterelim.

$\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, L^2 'de ortonormal baz oluşturur. H^2, $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$ 'yı içeren en küçük lineer alt uzaydır.

$f \in (H^2)^{\perp}$ olsun. $f = \sum\limits_{n<0} c_n e^{in\theta}$ şeklinde yazılabilir.
$\overline{f} = \sum\limits_{n<0} c_n e^{-in\theta}$, $\overline{f} \in H^2$ 'dir. $\varphi . f = 0$ idi, $\overline{\varphi . f} = 0$ 'dır, $\overline{\varphi} . \overline{f} = 0 \Rightarrow$
$\overline{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ olmalıdır. Buradan $(H^2)^{\perp}$ zayıf Riesz alt uzaydır.

Böylece (L^2, L^∞, H^2)'nin Riesz sistem oluşturduğunu göstermiş olduk.

Burada (L^2, L^∞, H^2) üçlüsüne Klasik Riesz sistem denir. Bu üçlü alınarak elde edilen Toeplitz operatörüne Klasik Topelitz operatörü denir. (L^2, L^∞, H^2) üçlüsünün Riesz sistem oluşturması F.M.Riesz teoreminden elde edilir.

Buna göre yukarda tanımlanan sistem Riesz sistem olarak adlandırılır. Aşağıda örnekler verildikten sonra Abstract Toeplitz Operatörlerinin Klasik Toeplitz Operatörlerinin daha önce verilen özelliklerini sağladığı gösterilecektir.

Örnek1:$(L^2(T,\mu), L^\infty(T,\mu), H^2(T,\mu))$'nün Riesz sistem oluşturur. Gerçekten bunun için, $H^2 \subset L^2$ ve $(H^2)^\perp \subset L^2$ 'in L^∞ için zayıf Riesz alt uzay oluşturduğunu daha önce gösterdik.

Örnek2: Birinci örnekte K uzayımızı değiştirelim. Kabul edelim ki $F \subset N$ sonlu bir alt küme olsun(burada N doğal sayılar kümesidir) ve $F = \{k_1 < k_2 < .. < k_n\}$ şeklindedir. M_F , $\{e^{in\theta} : n \in N/F\}$'yı içeren en küçük kapalı lineer uzay olsun ve $M_F = \vee\{e^{in\theta} : n \in N/F\}$ şeklinde gösterelim. $M_F \subset H^2$ 'nin bir alt kümesidir.

Şimdi M_F 'in zayıf Riesz alt uzay olduğunu gösterelim.
Açıktır ki $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$ şeklinde yazabiliriz.
Bu durumda$L^2 = M_F \oplus (H^{2n}) \oplus (H^2)^\perp$ olacaktır, burada $H^{2n} = \vee\{e^{in\theta},\ n \in F\}$. $f \in M_F \subset H^2$, H^2 L^∞ için zayıf Riesz alt uzay olduğundan M_F'de L^∞ için zayıf Riesz alt uzaydır.

Şimdi ise $(M_F)^\perp$ 'in L^∞ için zayıf Riesz alt uzay olduğunu gösterelim. Eğer $f \in (M_F)^\perp$ ise $f = f_1 + f_2$ şeklinde yazılabilir, $f_1 \in H^{2n}, f_2 \in (H^2)^\perp$ olmak üzere. $f_1 = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{k_p} e^{ik_p\theta}$

Kabul edelim ki $\varphi.f = \varphi.(f_1 + f_2) = 0$ (1)

$$f = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{k_p} e^{ik_p\theta} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ik\theta}$$

(1) eşitliğinin her iki tarafını $e^{-i(k_n+1)\theta}$ ile çarpalım, bu durumda

$$e^{-i(k_n+1)\theta}\varphi.f = 0$$

$$\begin{aligned} e^{-i(k_n+1)\theta}\varphi.f &= \varphi.(e^{-i(k_n+1)\theta} f) \\ &= \varphi.(\sum_{p=1}^{n} \alpha_{k_p} e^{-i(k_n+1-k_p)\theta} + \sum_{p=-1}^{-\infty} c_p e^{-i(k_n+1-p)\theta}) = 0 \\ &= \varphi.\hat{f} \end{aligned}$$

Burada $\hat{f} = (\sum_{p=1}^{n} \alpha_{k_p} e^{-i(k_n+1-k_p)\theta} + \sum_{p=-1}^{-\infty} c_p e^{-i(k_n+1-p)\theta})$ ve $f \neq 0$ olduğundan $\hat{f} \neq 0$ 'dır. Görüldüğü gibi
$\hat{f} \in (H^2)^{\perp}$ dir.$(H^2)^{\perp}$ L^{∞} için zayıf Riesz alt uzay olduğundan $\varphi = 0$ ‘dır.
Böylece (L^2, L^{∞}, M_F) üçlüsü Riesz Sistem oluşturur.

M, H ‘da lineer bir manifold olmak üzere M‘nin kapanışını $[M]$ ile gösterelim.

Aşağıda kullanılmak üzere (H, R, K) keyfi bir Riesz sistem olsun.

Lemma 3.2: $L \in R$ ve$[LH] \neq H$ ise $[LH] = [LK] = [LK^{\perp}]$ dır.

İspat: Eğer $K \subset H$ ise $[LK] \subset [LH]$ olduğu açıktır. Şimdi ise
$[LK] \supset [LH]$ olduğunu göstermeye çalışalım.
$f \in [LH]$, $f \perp [LK]$ olsun ve $E : H \rightarrow [LH]$ izdüşüm operatörüdür. Buna göre $ELf = Lf$ 'dir.
$L : H \rightarrow H$ olmak üzere $H = [LH] \oplus KerL$ şeklinde yazılabileceğini gösterelim.
$H = KerL \oplus (KerL)^{\perp}$ şeklinde yazılır. Bunun için önce $KerL = (RanL^*)^{\perp}$ şeklinde olduğunu gösterelim.
$\forall h \in KerL$ ve $\forall g \in H$ $(Lh, g) = (h, L^*g) = 0$ olduğundan dolayı $KerL \subset (RanL^*)^{\perp}$.
$h \perp RanL^*$ ve$g \in H$ ise $(Lh, g) = (h, L^*g) = 0$ olduğundan dolayı $(RanL^*)^{\perp} \subset KerL$.

$KerL = KerL^*$, yani $Lx = 0 \Leftrightarrow L^*x = 0$ olduğunu gösterelim:
$(Lx, Lx) = (x, L^*Lx) = (x, LL^*x) = (L^*x, L^*x) = 0 \Rightarrow L^*x = 0$
$(L^*x, L^*x) = (x, LL^*x) = (x, L^*Lx) = (Lx, Lx) = 0 \Rightarrow Lx = 0$
Burada L operatörünün normal olduğunu kullandık.

$KerL = (RanL^*)^{\perp}$ $\Rightarrow KerL^* = (RanL)^{\perp}$ $(KerL^*)^{\perp} = ((RanL)^{\perp})^{\perp}$
$(KerL^*)^{\perp} = [RanL] = [LH]$, burada $L = L^{**}$ ve $((RanL)^{\perp})^{\perp} = [RanL]$ olduğunu kullandık.

Böylece $H = [LH] \oplus KerL$ şeklinde yazılabileceğini gördük.

Buna göre keyfi $f_1 \in H$ olduğunda $f_1 = f + g$ şeklinde yazılabilir öyle ki $f \in [LH], g \in KerL$ olmak üzere. Buna göre
$Lf_1 = Lf + Lg = Lf,\ ELf_1 = ELf = Lf,$
$Ef_1 = Ef + Eg = Ef = f,\ LEf_1 = LEf = Lf$
Buradan $EL = LE$ elde edilir. $E \in R$ 'dir.

$L \in R,\ f \in [LH]$ ise $Ef \in [LH]$ 'dır. $(I-E)f = f - Ef = f - f = 0$.
$\forall k \in K$ için $(L^*f, k) = (f, Lk) = 0 \Rightarrow L^*f \in K^{\perp}$ olacaktır.
$(I-E)f = 0,\ L^*(I-E)f = (I-E)L^*f = 0$ 'dır. $(I-E) \neq 0$ ve $K^{\perp}$ L^{∞} için zayıf Riesz alt uzay olduğundan $L^*f = 0$ olmalıdır. Buradan $f \in KerL^* = KerL$ olur ve $f \in [LH]$ 'dır. $H = [LH] \oplus KerL$ şeklinde yazıldığından dolayı $f = 0$ olmalıdır. $f \perp [LH]$.

Böylece $[LH] = [LK]$ olduğunu göstermiş olduk. Aynı işlemler $K^{\perp}$ içinde yapılırsa $[LH] = [LK] = [LK^{\perp}]$ elde edilir. Buradan aşağıdaki sonuç alınır.

Sonuç 3.3: (H, R, K) üçlüsünün Riesz sistem oluşturması için gerekli ve yeterli koşul $EH = [EK] = [EK^{\perp}],\ \forall E \in R,\ E = E^* = E^2,\ E < I$ olmasıdır.

İspat: Gerek koşul Lemma 3.2'den elde edilir. Yeter koşulu gösterelim:
$Ef = 0$ ve $E \neq 0$ olsun. $E \in R$ olduğundan $(I-E) \in R$ 'dir ve $(I-E)$ izdüşüm operatörüdür ve
$(I-E)H = [(I-E)K] = [(I-E)K^{\perp}]$ eşitliğini sağlar.
$f \in K$ olduğunda $(I-E)f = If - Ef = f \Rightarrow (I-E)f \in K$ 'dir.

$\forall h \in H$ için $(f, Eh) = (Ef, h) = 0 \Rightarrow f \in (EH)^{\perp} = (I-E)H$
Bu takdirde $\exists\{f_n\} \subset K^{\perp}$ vardır ki $(I-E)f_n \to f$.
$((I-E)f_n, f)) = (f_n, (I-E)f) = (f_n, f) = 0,$ öte yandan
$((I-E)f_n, f) \to (f, f) \Rightarrow (f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ 'dır. Buna göre eğer $Pf = f,\ Ef = 0,\ f = 0$ elde edilir. Buradan $E \geq P$ olmalıdır. Gerçekten olmadığını varsayalım, $E < P$ olsun.
$PH \supset EH,\ (PH)^{\perp} \subset (EH)^{\perp},\ \ H = PH \oplus (PH)^{\perp},\ \ H = EH \oplus (EH)^{\perp}$
$\exists f \in PH,\ \ f \notin EH \Rightarrow f \in (EH)^{\perp}$ bu takdirde $f \neq 0$ iken $Ef = 0$ ' dır.

$P \leq E$ ise

$$\begin{aligned} EH &= [EK^{\perp}] = [EP^{\perp}H] = [E(I-P)H] \\ &= [EH - EPH] = [EH - PH] = [(E-P)H] \end{aligned}$$

Öte yandan $EH = [EK] = [EPH] = [PH] = [K] = K$. P izdüşüm operatörü olduğundan $[PH] = PH$ ve K kapalı alt uzay olduğundan $[K] = K$ 'dır.

Buradan $K = (E-P)H$ elde edilir. $\forall h \in H$ için $f = (E-P)h = Eh - Ph = Eh - h_1, \; h_1 \in K$.
$Eh = f + h_1 \;\in K, \quad E = P$ 'dir. Buradan $K = 0$ elde edilir. Çelişki, o halde $E = 0$ olmalıdır.

Önerme 3.4: $0 \neq L \in R$ ve $[LH] \neq H$ ise $[PLK] = K$ 'dir.

İspat: $[PLK] \subset K$ olduğu açıktır. Lemma 3.2 den $[PLK] = [PLH]$ elde edilir. Şimdi $K \subset [PLH]$ olduğunu gösterelim. $k \in K, \; k \perp [PLH]$ olsun. $\forall h \in H$ için $(L^*k, h) = (L^*Pk, h) = (Pk, Lh) = (k, PLh) = 0$ olması için $L^*k = 0$ olmalıdır. $L \neq 0$ olduğundan $L^* \neq 0$ 'dır. K zayıf Riesz alt uzay olduğundan $k = 0$ olmalıdır. Buradan $K = [PLH] = [PLK]$ elde edilir.

Önerme 3.5: Eğer R maksimal abelyen Von Neumann cebir ise 0'dan farklı minimal izdüşüm operatörü içermez. Hem K hem $K^{\perp}$ sonsuz boyutludur.

İspat: Kabul edelim ki E, R 'nin minimal izdüşüm operatörü olsun. Bu takdirde E, H 'yi bir boyutlu alt uzayına tasvir eder. Lemma 3.2'den $EH = EK = EK^{\perp}$ 'dir. E bir boyutlu olduğundan EH 'ında boyutu birdir.

$EH = EK \oplus EK^{\perp}$ 'dir. $dim(EK) = 1$ ise $dim(EK^{\perp}) = 0$ olmalıdır ki $dim(EH) = 1$ olsun. Bu ise olamaz. O halde R minimal izdüşüm içermez.

K ve $K^{\perp}$ 'nun sonsuz boyutlu olması $EH = EK = EK^{\perp}$ eşitliğinden elde edilir.

L ile Abstract Laurent operatörünü, T_L ile Abstract Toeplitz operatörünü gösterelim.

Teorem 3.6: (H, R, K) Riesz sistem ve L Abstract Laurent operatörü olsun. Bu takdirde $\sigma(L) \subset \pi(T_L) \subset \sigma(T_L)$ 'dir.

İspat: $T_{L-\lambda I_H} = P(L - \lambda I_H) = PL - \lambda PI_H = T_L - \lambda I_K$ ‘dır.
Burada şunu göstermek yeterlidir: $0 \in \sigma(L) \Rightarrow 0 \in \pi(T_L)$ ‘dir. $L = 0$ için istenilen açıktır.
$L \neq 0$ olsun. $0 \in \sigma(L)$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için L‘nin E spektral izdüşümünü seçebilirim, öyle ki $E \in R$, $0 < E < I_H$ ve $\|EL\| < \varepsilon$ ’dur.
(L normal operatör olduğundan $\sigma(L) = \pi(L)$ ’dır. $0 \in \sigma(L)$ ise $\|f_n\| = 1$, $\|Lf_n\| \to 0 (n \to \infty)$ veya $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $\|Lf_n\| < \varepsilon$.
Seçilmiş bir n için $E_\lambda = \{\lambda f_n\}$. $E : H \to E_\lambda$, $\|LEf_n\| < \varepsilon$, $Ef_n = f_n$, $\|Lf_n\| \to 0$.)
R minimal izdüşüm operatörü içermediğinden, $I > F > I - E$ olacak şekilde $\exists\ F \in R$ izdüşüm operatörü mevcuttur.
$f \in H$, $\|f\| = 1$ ve $FEf = Ef = f$ şartını sağlayan birim vektör olsun.
Lemma 3.2‘den $[FK] = FH$ ‘dir. $\exists\{k_n\} \subset K$, $\|Fk_n - Ff\| \to 0$.

Şimdi $\{\|k_n\|\}$ dizisi sınırlı olsun.

$$\begin{aligned}\|T_L k_n\| = \|PLk_n\| \le \|Lk_n\| &= \|LFk_n - LFf + LFf + L(I - F)k_n\| \\ &\le \|L\|\|Fk_n - Ff\| + \|LEf\| + \|LE(I - F)k_n\| \\ &\le \|L\|\|Fk_n - Ff\| + \varepsilon + \varepsilon\|k_n\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|k_n\| \ge \|Fk_n\| &= \|Ff - F(f - k_n)\| \\ &\ge \|Ff\| - \|F(f - k_n)\| = 1 - \|Ff - Fk_n\|\end{aligned}$$

yeterince büyük n‘ler için $\|Ff - Fk_n\| \to 0$,dır.
$\|T_L k_n\| \le 3\varepsilon\|k_n\|$, buradan $\|T_L k_n\| \to 0$ ’dır. $0 \in \pi(T_L)$ elde edilir.

Şimdi ise $\{\|k_n\|\}$ dizisi sınırsız olsun. $\|k_{n_{t+1}} - k_{n_t}\| > 1$ olacak şekilde $\{k_{n_t}\}$ alt dizisini seçebiliriz.

$h_t = \frac{k_{n_{t+1}} - k_{n_t}}{\|k_{n_{t+1}} - k_{n_t}\|}$ olsun.

$$\begin{aligned}\|T_L h_t\| \le \|Lh_t\| &= \|LEh_t + L(I - E)h_t\| \\ &\le \|LE\|\|h_t\| + \|L(I - E)Fh_t\| \\ &\le \varepsilon + \|L\|\|Fh_t\| \\ &\le \varepsilon + \|L\|\|Fk_{n_{t+1}} - Fk_{n_t}\|\end{aligned}$$

Yeterince büyük t‘ler için $\|Fk_{n_{t+1}} - Fk_{n_t}\| \to 0$ ‘dır.
$\|T_L h_t\| < 2\varepsilon$ olur. Dolayısıyla $0 \in \pi(T_L)$ ‘dir.

(H, R, K) Riesz sistem olsun. GT ile bütün Abstract Toeplitz operatörler kümesini gösterelim. Açıktır ki GT, $B(K)$'nın kapalı alt uzayıdır. Dolayısıyla Banach uzayıdır.

Toeplitz operatörünün tanımından dolayı $\psi : R \to GT$ tasviri vardır ve $\psi(L) = T_L$ şeklindedir.

Önerme 3.7: ψ tasviri lineerdir, bire-birdir,izometrik izomorftur ve adjointi korur, yani $\psi(L^*) = T_L^*$ 'dır.

İspat: $\psi(L_1 + L_2) = T_{L_1+L_2} = P(L_1 + L_2) = PL_1 + PL_2 = T_{L_1} + T_{L_2} = \psi(L_1) + \psi(L_2)$, yani tasvir lineerdir.
$\forall f \in K$, $\|\psi(L)f\| = \|T_L f\| = \|PLf\| \leq \|Lf\| \Rightarrow \|\psi(L)\| \leq \|L\|$, $\|\psi\| \leq 1$ (1)
$\sigma(L) \subset \sigma(T_L)$ olduğundan $r(L) \leq r(T_L)$ 'dir. $\|L\| = r(L) \leq r(T_L) \leq \|T_L\| = \|\psi(L)\|$ yani $\|L\| \leq \|\psi(L)\|$, $\|\psi\| \geq 1$. (2)
(1) ve (2) 'den $\|\psi\| = 1$ 'dir. Buradan bire-bir olduğu görülür. Diğer taraftan ψ tasviri üzerinedir. Bire-bir olduğundan izometrik izomorftur. $f, g \in K$ olsun.

$$\begin{aligned}(\psi(L)f, g) &= (T_L f, g) = (PLf, g) = (Lf, g) = (f, L^*g) = (Pf, L^*g) \\ &= (f, PL^*g) = (f, T_{L^*}g) = (f, \psi(L^*)g)\end{aligned}$$

Öte yandan $(\psi(L)f, g) = (f, \psi(L)^*g)$ 'dir. $\psi(L)^* = \psi(L^*)$ 'dır yani adjointi korur.

Önerme 3.8: $L \in R$ skalerden farklı Abstract Laurent operatörü ise L ve T_L'nin birlikte özdeğerleri yoktur.

İspat: L skalerden farklı Abstract Laurent operatörü olsun.
0, $L \neq \lambda I_H$ için özdeğer iken 0'ın T_L için özdeğer olmadığını gösterelim. E, L için spektral izdüşüm operatörü olsun $E \in R$ öyle ki $0 < E < I_H$ ve $EL = 0$. Bu şekilde spektral izdüşüm operatörü seçmek mümkündür, $E_f = \{\lambda f\}$ bir boyutlu alt uzay ve $E : H \to E_f$ şeklinde tanımlanmak üzere.
$T_L k = 0$ olacak şekilde $k \in K$ elemanını alalım. Bu takdirde $PLk = 0$ 'dır. Buradan $Lk \in K^\perp$ elde edilir. $ELk = 0$, $K^\perp$ zayıf Riesz alt uzay olduğundan $E \neq 0$ iken $Lk = 0$ olmalıdır. $k \in K$ ve K zayıf Riesz alt

uzay olduğundan $L \neq 0$ iken $k = 0$ olmalıdır. $T_L k = 0$ eşitliği $k = 0$ için sağlandığından 0, T_L için özdeğer değildir. $\sigma(T_L) \supset \sigma(L)$ olduğundan 0, L için de özdeğer olamaz.

Tanım 3.5: $A \in B(H)$ olsun. A operatörü H'de keyfi sınırlı kümeyi H'de kapanışı kompakt kümeye götürüyorsa A operatörüne kompakt operatör denir.

Kompakt operatörlerle ilgili iki lemmayı hatırlatalım.

Lemma 3.9: A kompakt bir operatör, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \in \sigma(A)$ ise λ, A operatörü için özdeğerdir [7].

Lemma 3.10: A kompakt bir operatör ve $\{\lambda_n\}$'ler A'nın özdeğerler dizisi ise $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ 'dır [7].

Sonuç 3.11: Tek kompakt Abstract Toeplitz operatörü 0'dır.

İspat: T_L kompakt operatör ve $T_L \neq 0$ olsun. Buradan $L \neq 0$ 'dır. L normal operatör olduğundan $\sigma(L)$ 'nin sıfırdan farklı en az bir λ elemanı vardır. Teorem 3.6'dan $\sigma(L) \subset \sigma(T_L)$ 'dir. O halde $\lambda \in \sigma(T_L)$ olacaktır. T_L kompakt operatör ve $0 \neq \lambda \in \sigma(T_L)$ olduğundan Lemma 3.9'a göre λ T_L için özdeğerdir. Bu ise Önerme 3.8'e göre olamaz. O halde $T_L = 0$ olmalıdır.

Tanım 3.6: $L \in R$ Abstract Laurent operatörü ve T_L Abstract Toeplitz operatörü olsun. $LK \subset K$ ise L ve T_L 'ye analitik,
$LK^{\perp} \subset K^{\perp}$ ise L ve T_L 'ye ko-analitik denir.

L Abstract Laurent operatörünün analitik olması için gerekli ve yeterli koşul L^*'ın ko-analitik olmasıdır. Gerçekten, $\forall f \in K$, $\forall g \in K^{\perp}$, eğer L analitik ise yani $LK \subset K$ ise $(Lf, g) = 0$ diğer taraftan ise $(f, L^*g) = 0$ Buradan $L^*g \in K^{\perp}$ yani $LK^{\perp} \subset K^{\perp}$.

Lemma 3.12: L skalerden farklı Abstract Laurent operatörü ve Q, $0 < Q < I_H$ ve $P \leq Q$ (veya $Q \leq P$) şartlarını sağlayan izdüşüm operatörü ise $LQ \neq QL$ 'dir.

İspat: $P \leq Q$ halini ele alalım. $LQ = QL$ olduğunu varsayalım. E, L için spektral izdüşüm operatörü olsun, $0 < E < I_H$ şartını sağlasın. $E \in R$ 'dir.
Kabul edelim ki $M = QH$ olsun. $P \leq Q$ olduğundan $PH \subset QH$ 'dır. Buradan $K \subset M$ elde edilir.
$LQ = QL$ olduğundan $EQ = QE$ 'dir (Teorem 2.6'dan).
$M \supset QEH = EQH = EM, \quad EM \subset M,$
Lemma 3.2'den $EH = [EK] \subset [EM] \subset M$ 'dir.
$E \in R$ ise $(I-E) \in R$ olacaktır.
$M \supset Q(I-E)H = (I-E)QH = (I-E)M, \quad (I-E)M \subset M,$
Lemma 3.2'den $(I-E)H = [(I-E)K] \subset [(I-E)M] \subset M$ 'dir.
$EH \subset M$ ve $(I-E)H \subset M$ olduğundan $H = M$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde $LQ \neq QL$ olmalıdır.

Sonuç 3.13: Hem analitik hem ko-analitik olan L Abstract Laurent operatörü sadece skalerlerdir.

İspat: L analitik ise $LK \subset K$, L ko-analitik ise $LK^{\perp} \subset K^{\perp}$ olacaktır.
Şimdi $LK \subset K \Rightarrow PLP = LP$ olduğunu gösterelim.
$h \in H \Rightarrow Ph \in K \Rightarrow LPh \in K \Rightarrow P(LPh) = LPh$ 'dır. Buradan $PLP = LP$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
L(I-P) &= L - LP \\
&= (I-P)(L-LP) = L - LP - PL + PLP = L - PL
\end{aligned}
$$

$L - LP = L - PL \Rightarrow PL = LP$ elde edilir. Lemma 3.12'den $L = \lambda I$ formunda olmalıdır.

Teorem 3.14: T_L Abstract Toeplitz operatörünün izometri olması için gerekli ve yeterli koşul L Abstract Laurent operatörünün analitik üniter olmasıdır.

İspat: Önce yeter şartı gösterelim: L analitik üniter yani $LK \subset K$ ve $LL^* = L^*L = I$ olsun.
$\forall f, g \in K$ için

$$
\begin{aligned}
(T_L f, T_L g) &= (PLf, PLg) = (PLPf, PLPg) = (LPf, LPg) \\
&= (f, LL^* g) = (f, Ig) = (f, g)
\end{aligned}
$$

Buradan T_L 'nin izometri olduğu görülür.

Şimdi ise gerek şartı gösterelim: T_L izometri operatörü olsun. $f \in K$ için
$(T_L f, T_L f) = \|T_L f\|^2 = \|f\|^2$ ise buradan $\|T_L\| = 1$ elde edilir. Önerme 3.7'den $\|T_L\| = \|L\|$, yani $\|L\| = 1$ 'dir.
$\forall k \in K$ için $\|Lk\| \leq \|L\|\|k\| = \|k\| = \|T_L k\| = \|PLk\| \leq \|Lk\|$
Buradan $\|PLk\| = \|Lk\| = \|k\| \Rightarrow PLk = Lk$ elde edilir. P, K üzerinde izdüşüm operatörü olduğundan dolayı $Lk \in K$ olacaktır, yani $LK \subset K$, L analitiktir.
L üniter olmasın. Bu takdirde $E \neq 0$ ve $\|EL\| < 1$ olacak şekilde E spektral izdüşüm operatörü seçilebilir.
$0 \neq k \in K$ ise

$$\begin{aligned}\|k\|^2 = \|Lk\|^2 = \|LEk + (I-E)Lk\|^2 = \|LEk\|^2 + \|(I-E)Lk\|^2 \\ \leq \|LE\|^2\|Ek\|^2 + \|L\|^2\|(I-E)k\|^2 < \|Ek\|^2 + \|(I-E)k\|^2 = \|k\|\end{aligned}$$

Buradan çelişki alınır. O halde L analitik üniter olmalıdır.

Tanım 3.7: $A \in B(H)$ olsun. Eğer $\sigma(A) = \{0\}$ ise A elemanına quazinilpotent denir.

Tanım 3.8: $\mathcal{R}$ cebir olsun. $Rad\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{R} : (I - AB)^{-1} \in \mathcal{R}, \quad \forall B \in \mathcal{R}$ için
mevcut$\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\mathcal{R}$ cebirinin Radikali denir.

Tanım 3.9: $\mathcal{R}$ cebir olsun. $Rad\mathcal{R} = \{0\}$ ise $\mathcal{R}$ cebrine yarı basit cebir denir.

Lemma 3.15: Keyfi Riesz sistemle üretilmiş analitik Abstract Toeplitz operatörler ailesi operatör normu altında değişmeli yarı basit Banach cebiridir.

İspat: $\mathcal{AGT}$ ile analitik Abstract Toeplitz operatörler ailesini gösterelim. $T_{L_1}, T_{L_2} \in \mathcal{AGT}$, $T_{L_1}T_{L_2} = PL_1PL_2 = PL_1L_2 = T_{L_1L_2} \in \mathcal{AGT}$ ise $\mathcal{AGT}$ değişmeli bir cebirdir. $\{T_{L_n}\}$, K üzerinde yakınsak analitik Abstract Topelitz operatörler dizisi olsun. Bu takdirde $\{T_{L_n}\}$ üniform operatör topolojide Cauchy dizisidir. $L \rightarrow T_L$ tasviri normu koruduğu için $\{L_n\}$'de Cauchy dizisi olacaktır. Böylece $\{L_n\}$ üniform operatör topolojiye göre $L \in R$ analitik operatörüne yakınsayacaktır. Böylece $\mathcal{AGT}$ değişmeli Banach cebridir. Değişmeli Banach cebrinin radikali yoktur. Çünkü L normal olduğundan $\|L\| = r(L)$ 'dir. $L \neq 0$ olduğundan $\sigma(L) \neq \{0\}$ 'dır. $\sigma(L) \subset \sigma(T_L)$ olduğundan $\sigma(T_L) \neq \{0\}$ 'dır. Buradan $\mathcal{AGT}$ değişmeli yarı basit Banach cebridir.

Lemma 3.16: $\forall T_L \in \mathcal{AGT}$ için

$$\sigma(T_L) = \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$$

İspat: $T_L \in \mathcal{AGT}$ elemanının $\mathcal{AGT}$ cebirine göre spektrumunu $\sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ ile gösterelim.

Şimdi $\sigma(T_L) \supset \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ olduğunu gösterelim. $0 \notin \sigma(T_L)$ olsun. Kabul edelim ki T_L $B(K)$ 'de terslenebilir olsun. Önce $(T_L)^{-1} = T_{L^{-1}}$ ve L^{-1} 'in analitik olduğunu gösterelim. $T_L \in \mathcal{AGT}$ ve $\exists T_L^{-1}$ ise $(T_L)^{-1} = T_{L^{-1}}$ 'dir.Bu takdirde L'de $B(H)$'de terslenebilir olacaktır. O halde $L^{-1} \in R$ 'dir. Gerçekten $k \in K$ için
$T_{L^{-1}} T_L k = T_{L^{-1}} PLk = T_{L^{-1}} PLPk = T_{L^{-1}} LPk = PL^{-1}Lk = Pk = k$ elde edilir. Çünkü L analitik olduğundan $PLP = LP$ 'dir. Buradan $T_{L^{-1}}$, T_L'nin soldan tersidir. Böylece K için $LPL^{-1}k = PLPL^{-1}k = T_L T_{L^{-1}} k = k$ elde edilir.
$LPL^{-1}k = k \Rightarrow L^{-1}LPL^{-1}k = L^{-1}k \Rightarrow PL^{-1}k = L^{-1}k$, $L^{-1}k \in K$ yani L^{-1} analitiktir.
O halde $0 \notin \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ 'dir.
$\psi : R \to GT$, $\psi(I) = I_K$ olduğundan $\sigma(T_L) = \sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ elde edilir.

Teorem 3.17:(Silov Teoremi) Kabul edelimki $\mathcal{R}$ birim elemanlı,değişmeli Banach cebridir. Eğer $\mathcal{R}$'nin maksimal ideal uzayı irtibatlı değilse $\mathcal{R}$ 'nin 0 ve I'dan başka idempotent elemanı vardır [12].

Teorem 3.18: Her analitik T_L Abstract Toeplitz operatörünün spektrumu irtibatlıdır.

İspat: Lemma 3.16'dan $T_L \in \mathcal{AGT}$ Banach cebrinin elemanının spektrumunun irtibatlı olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü irtibatlılık süreklilik altında invaryanttır.

Gelfand tasvir teoreminden T_L 'ye $\mathcal{AGT}$'nın maksimal ideal uzayı üzerinde tanımlı, kompleks değerli, sürekli bir fonksiyon gibi bakılabilir ve bu fonksiyonun görünüşü $\sigma_{\mathcal{AGT}}(T_L)$ 'dır. Buna göre $\mathcal{AGT}$'nın maksimal ideal uzayının irtibatlı olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini varsayalım, $\mathcal{AGT}$ cebrinin maksimal ideal uzayı irtibatlı olmasın. Silov Teoremine göre $\mathcal{AGT}$ '-nin 0 ve I'dan farklı idempotent elemanı olmalıdır. Kabul edelim ki $E = T_{L_1} \in \mathcal{AGT}$ idempotent analitik operatör olsun, yani $T_{L_1}T_{L_1} = T_{L_1} \Rightarrow T_{{L_1}^2} = T_{L_1} \Rightarrow L_1 = L_1^2$ elde edilir. Abstract Laurent operatörü izdüşüm operatörü olmak zorundadır, çünkü L operatörü idempotent olduğundan spektrumu reeldir, L normal ve spektrumu reel olduğundan L operatörü hermityendir. Sonuç 3.13'den hermityen analitik Abstract Laurent operatörü skalerlerdir, çünkü L operatörü hermityen olduğundan hem analitik hem ko-analitiktir.

$L^2 = L \Rightarrow L^2 - L = 0 \Rightarrow L(L - I_H) = 0 \Rightarrow L = 0,\ L = I_H$ olmalıdır.

Buradan $\mathcal{AGT}$ 0 ve I'dan başka idempotent içermediğinden maksimal ideal uzayı irtibatlıdır.

BÖLÜM 4 DENK OLMAYAN RİESZ SİSTEMLER

Bu bölümde Riesz sistemlerin denkliği ile ilgili tanımlar verilecektir. Daha sonra ise denk olmayan Riesz sistemler anlatılacaktır.

Tanım 4.1: (H, R, K) ve (H_1, R_1, K_1) Riesz sistemlerine denk denir, eğer öyle $\phi : H \to H_1$ izomorfizmi var ki $\phi(K) = K_1$, $\phi R \phi^{-1} = R_1$ olsun.

GT, (H, R, K)'da Abstract Topelitz operatörler sınıfını, GT_1, (H_1, R_1, K_1)'da Abstract Topelitz operatörler sınıfını göstersin.

Önerme 4.1: Eğer (H, R, K) ve (H_1, R_1, K_1) Riesz sistemleri denk ise GT ve GT_1 uzayları izometrik izomorftur ve bu izomorfluk $FT_L = T_{\phi L \phi^{-1}}$ şeklindedir.

İspat: Gerçekten $F : GT \to GT_1$ 'dir ve F lineerdir:
$T_{L_1}, T_{L_2} \in GT$ olsun.

$$\begin{aligned} F(T_{L_1} + T_{L_2}) &= T_{\phi(L_1+L_2)\phi^{-1}} = T_{\phi L_1 \phi^{-1} + \phi L_2 \phi^{-1}} \\ &= T_{\phi L_1 \phi^{-1}} + T_{\phi L_2 \phi^{-1}} \\ &= FT_{L_1} + FT_{L_2} \end{aligned}$$

F bire-birdir:
$T_{L_1}, T_{L_2} \in GT$ olsun. $FT_{L_1} = FT_{L_2} \Rightarrow FT_{L_1} - FT_{L_2} = 0 \Rightarrow F(T_{L_1} - T_{L_2}) = T_{\phi(L_1 - L_2)\phi^{-1}} = 0 \Rightarrow T_0 = 0 \Rightarrow \phi(L_1 - L_2)\phi^{-1} = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$.
F üzerinedir:
$T_{L'} \in GT'$ için $\exists L \in R$ vardır ki $\phi L \phi^{-1} = L'$ 'dır, çünkü ϕ tasviri üzerinedir. $FT_L = T_{\phi L \phi^{-1}} = T_{L'}$ 'dır.
F izometriktir:
$\|FT_L\| = \|T_{\phi L \phi^{-1}}\| = \|\phi L \phi^{-1}\| = \|L\| = \|T_L\|$

Şimdi ayrılabilir Hilbert uzayları üzerinde denk olmayan Riesz sistemler olduğunu gösterelim.

Bölüm 3, Örnek 1'deki (L^2, L^∞, H^2)'yı alalım ve aşağıdaki notasyon Bölüm 3, Örnek 2'dendir.
$P : H \rightarrow K$ izdüşüm operatörü olsun. $\forall n$ için $F(n) = \{1, 3, .., (2n-3), (2n-1)\}$ şeklinde olsun. $M_{F(n)} = \vee\{e^{in\theta} : n \in N/F(n)\}$ 'dır. $Q_n : H \rightarrow M_{F(n)}$ izdüşüm olsun. $R_{F(n)} = (L^2, L^\infty, M_{F(n)})$ Riesz sistemi olduğu daha önceki bölümde gösterilmiştir. Eğer $L \in R$ ise L ve $R_{F(n)}$'e bağlı olarak Abstract Toeplitz operatörü

$$Q_n L|_{M_{F(n)}} = Q_n PL|_{M_{F(n)}}$$

şeklindedir.

Her hermityen Klasik Toeplitz operatörünün özdeğeri olmadığından dolayı hermityen Toeplitz operatörünün sıfır uzayı trivialdir yani $KerT_L = \{0\}$ '-dır. Buna göre $L \in R$ ve $L = L^*$ ise PL, $M_{F(n)}$'i bire-bir olarak tasvir eder, çünkü $M_{F(n)} \subset K$'dır.

Kabul edelim ki $f \in M_{F(n)}$ ve $Q_n Lf = Q_n PLf = 0$ olsun. Bu takdirde $PLf \in (P - Q_n)H$'dır, gerçekten
$Q_n PLf = Q_n Lf = 0 \Rightarrow PLf = (P^2 L - Q_n PL)f = (P - Q_n)PLf \subset (P - Q_n)H$ Buradan $(P - Q_n)H \subset H$ olduğundan $(P - Q_n)H$, H'nın n boyutlu alt uzayıdır. Şimdi ise $(P - Q_n)$'in izdüşüm operatörü olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}(P - Q_n)^2 &= P^2 - PQ_n - Q_n P + Q_n^2 \\ &= P - Q_n - Q_n + Q_n = P - Q_n\end{aligned}$$

buradan $(P - Q_n)$ idempotenttir,
$(P - Q_n)^* = P^* - Q_n^* = P - Q_n$. Buradan $(P - Q_n)$ hermityendir.

$(P - Q_n) : H \rightarrow H^{2n}$, $H^{2n} = \vee\{e^{in\theta}, n \in F(n)\}$ olmak üzere. Görüldüğü gibi H^{2n}, n boyutlu lineer alt uzaydır.

Lemma 4.2: $(H, R, M_{F(n)})$ Riesz sistemli hermityen Abstract Toeplitz operatörünün sıfır uzayının boyutu en fazla n'dir ve öyle hermityen Abstract Toeplitz operatörü vardır ki sıfır uzayının boyutu n'dir.

İspat: Kabul edelim ki L hermityen $f \in M_{F(n)}$ ve $Q_n PLf = Q_n Lf = 0$ olsun. $f \in Ker(Q_n L) \Rightarrow PLf \in (P - Q_n)H$ 'dır. $(P - Q_n)H \subset H$'nın n boyutlu alt uzayıdır. $Ker(Q_n L) \subset (P - Q_n)H$ 'dır.

Burada keyfi hermityen Abstract Toeplitz operatörü için sıfır uzayı n boyutludan fazla değildir. Şimdi ise gösterelim ki öyle hermityen Abstract Toeplitz operatörü var ki sıfır uzayının boyutu n'dir.

Bu durumda $R = L^{\infty}(T,\mu)$ olduğundan dolayı $\varphi(z) = z + z^{-1}$ reel değerli bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun çarpım operatörünü L ile gösterelim, L'ye karşı gelen Abstract Toeplitz operatörü Q_nL ile gösterelim ve bu operatör hermityen, sıfır uzayının boyutu n'dir. Gerçekten $f_k(z) = z^k$, $k = 0, 2, ..., (2n-2)$, $F(n)$ 'nin elemanı olmadığından $(Q_nL)f_k(z) = 0$. Dolayısıyla $f_k(z) \in Ker(Q_nL)$, $k = 0, 2, ..., (2n-2)$ ve $f_k(z)$ n tane lineer bağımsız eleman olduğu için sıfır uzayının boyutu n'dir.

Teorem 4.3: m ve n farklı iki pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde $R_{F(n)}$ ile $R_{F(m)}$ Riesz sistemleri denk değildir. Ayrıca $R_{F(n)}$ $(n > 0)$'lerin hiçbirisi Örnek 1'deki (H, R, K)'ya denk değildir.

İspat: Kabul edelim ki $m < n$ olsun. $M_{F(n)} = \vee\{e^{in\theta} : \ n \in N/F(n)\}$ ve $M_{F(m)} = \vee\{e^{in\theta} : \ m \in N/F(m)\}$ olsun. $R_{F(n)} = (H, R, M_{F(n)})$ ve $R_{F(m)} = (H, R, M_{F(m)})$ şeklinde gösterilsin. $R_{F(n)}$ ve $R_{F(m)}$ Riesz sistemlerinin denk olması için öyle bir $\phi : H \rightarrow H$ izomorfizmi olmalıdır ki $\phi R \phi^{-1} = R$ ve $\phi(M_{F(n)}) = M_{F(m)}$.

Şimdi eğer $T_L = Q_nL$ Lemma 4.2'deki hermityen operatör ise yani $L = L^*$ ise $T_L \in R(R_{F(n)}$ 'e göre) $dim(KerT_L) = n$ olsun. ϕ tasviri bire-bir olduğundan $dim(KerT_{L_1}) = n$ olmalıdır. Burada $T_{\phi L \phi^{-1}} = TL$ ve $T_{L_1} \in R(R_{F(m)}$ 'e göre)'dır. Fakat $dim(KerT_{L_1}) \leq m$ olmalıdır(lemma 4.2). $m < n$ olduğundan böyle bir izomorfizm olamaz. O halde $R_{F(m)}$ ve $R_{F(n)}$ denk değildir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Abstract Toeplitz operatörler sınıfı tanımlanmış ve Abstract Toeplitz operatörlerinin özellikleri araştırılmıştır. Bunun için Riesz sistemler ve Riesz sistemler kümesinde denklik tanımlanmıştır. Daha çok spektral özellikleri incelenmiştir. Sonunda gösterilmiştir ki sonsuz sayıda denk olmayan Riesz sistemler vardır.

Bu çalışmayı, aşağıda verilen şekilde devam ettirmek mümkündür.

1) Abstract Toeplitz operatörlere başka örnekler bulmak ve bu örneklerdeki Topelitz operatörlerle üretilmiş bazı cebirleri araştırmak.

2) Abstract Toeplitz operatörlerin, Abstract Toeplitz operatörlerle üretilmiş C^* cebirleri araştırarak bu Abstract Toeplitz operatörlerin özelliklerini incelemek. Örneğin, ne zaman bu Abstract Toeplitz operatörler Fredholm operatörlerdir. Bunun için Von Neumann cebirlerinde Fredholm operatörler teorisini incelemek gerekir.

KAYNAKLAR

[1] DOUGLAS, R.G., Banach Algebras Techniques in the Theory of Toeplitz Operators, Regional Coference Series in Mathematics, (1972).

[2] AXLER, S.,CONWAY, J.B., MCDONALD, G., Toeplitz Operators on Bergman Spaces, Can. J. Math., Vol XXXIV, No.2, 466-483, (1982).

[3] ZHENG, D., Hankel Operators and Toeplitz Operators on the Bergman Spaces, Journal of Functional Analysis 83, 98-120, (1989).

[4] ZHU, K., Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, (1990).

[5] DOUGLAS, R.G., PEARCY, C., Spectral Theory of Generalized Toeplitz Operators, Pres. to the Society, 433-444, (1965).

[6] RADJAVI, H., ROSENTHAL, P.,Invariant Subspaces, Spiringer Verlag, (1973).

[7] CONWAY, J.B., A Course in Functional Analysis, second Ed., Springer Verlag, (1985).

[8] DOUGLAS, R.G., Banach Algebras Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, (1972).

[9] BROWN, A.,HALMOS, P.R., Algebraic Properties of Toeplitz Operators, Jornal Für Reineve Angew, Math.213, 89-102,(1961).

[10] HALMOS, P.R., A Hilbert Space Problem Book, second Ed., Springer Verlag, (1982).

[11] HALMOS, P.R., Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, (1965).

[12] HARTMAN, P.,WINTNER, A., The Spectra of Toeplitz's Matrices, Amer. J. Math. 76, 867-882, (1954)

ÖZGEÇMİŞ

Ocak 1971'de Muş'da doğdu. Haydarpaşa Teknik Lisesi Makine Bölümünde orta öğrenimini tamamladı. 1988 yılında İ.T.Ü. Matematik Mühendisliği Bölümüne başladı. 1992 yılında lisans eğitimini tamamladı ve yüksek lisans programına başladı. Ocak 1995 yılından itibaren Matematik Bölümünde araştırma görevliliğine devam etmektedir.