

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİLEME
VE BİR UYGULAMA**

DOKTORA TEZİ

Murat Engin ÜNAL

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Endüstri Mühendisliği Doktora Programı

MAYIS 2012

**KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİLEME
VE BİR UYGULAMA**

DOKTORA TEZİ

**Murat Engin ÜNAL
(507052113)**

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Endüstri Mühendisliği Doktora Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Elimhan N. MAHMUDOV

MAYIS 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 507052113 numaralı Doktora Öğrencisi **Murat Engin ÜNAL**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİLEME VE BİR UYGULAMA**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Elimhan N. MAHMUDOV**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : **Prof. Dr. M. Nahit SERARSLAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Füsun ÜLENGİN**
Doğuş Üniversitesi

Prof. Dr. Y. İlker TOPCU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ertuğrul KARSAK
Galatasaray Üniversitesi

Prof. Dr. Hamit AVCI
Haliç Üniversitesi

Y. Doç. Dr. C. Erhan BOZDAĞ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **1 Şubat 2012**

Savunma Tarihi : **4 Mayıs 2012**

Didem'e

ÖNSÖZ

Bu tez iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım, özel bir en iyi kontrol probleminin çözümünün sağlaması gereken ve keyfi bir çözümün, onu en iyi ilan etmemiz için yeterli olacak şartların tespit edilmesi ve dual problemle ilgilidir. Hangi şartlarda primal ve dual problemlerin en iyi değerlerinin aynı olduğu tespit edilmiştir. İkinci kısım ise tüm büyük şehirlerin en önemli sorunlarından biri olan trafik akışının en iyi şekilde düzenlenmesine ayrılmıştır. Karayollarına olan aşırı talep, özellikle büyük şehirlerde çevre ve hem yayaaların hem araç kullanıcılarının şehir hayatları açısından zorlayıcı hale gelebilmektedir. İstanbul’da bu, her kesim tarafından ciddi ve gündelik bir şekilde hissedilmektedir. Trafik akışına getirilecek en ufak fayda bile çok büyük önem arz etmektedir.

Bu tezin bu anlamda İstanbul’da yaşayan herkese faydası olmasını temenni ederim. Bu tezin ilk faydası ise yazarına, yani bana olmuştur. Ama İstanbul’daki yaşantımı kolaylaştırması anlamında değil, akademik hayatıma bir yön vermesi, beni gelecekte ihtiyaç duyacağım bir çok temel konuyu derinlemesine öğrenmeye zorlaması, hobi edinecek kadar ilgi duyduğum dinamik sistemleri gündemime sokması ve en önemlisi, iyi bir akademisyen olmak istiyorsam, çok daha fazla çalışmam gerektiğini farketmemi sağlaması anlamında.

İlk olarak, en iyileme ve dışbükey analiz problemleri konularında ufku açıyan, bu tezin de mimarı tez danışmanım sayın Prof. Dr. Elimhan N. Mahmudov’a ve bu tezin gelişiminde her türlü konuda bana destek olan tez eş danışmanım sayın Prof. Dr. M. Nahit Serarslan’a teşekkür ederim. Ayrıca izleme jürimde bulunarak katkılarını sunan hocalarım sayın Y. Doç. Dr. Erhan Bozdağ, Prof. Dr. Füsün Ülengin ve bir an önce eski sağlığına kavuşmasını dilediğim sayın Prof. Dr. Abbas Azimli’ye teşekkür ederim. Minho Üniversitesi’nde geçirdiğim 6 aylık süre boyunca bana elinden gelen yardımı yapan sayın José Telhada’ya da teşekkür ederim.

Bu sayfada teşekkür etmem gereken diğer kişi ve kurumlara gelirsek, öncelikle bana çalışmamda kullanabileceğim trafik verilerini almamda yardımcı olan İstanbul Trafik Kontrol Merkezi çalışanları ve özel olarak sayın Muhammet Salim Üçüncüoğlu’na ve tez projemi Bilimsel Araştırma Projeleri kapsamında maddi olarak destekleyen İstanbul Teknik Üniversitesi’ne, İTÜ tezleri için L^AT_EX şablonu hazırlayan Bilişim Enstitüsü araştırma görevlilerine teşekkür ederim. Bir tez çalışmasının yapılabilmesi için bazı verilerle maddi ve teknik destek gerekli olmakla birlikte elbette yeterli değildir.

Tez yazarının çalışma ortamının da yazarın yoğunlaşabilmesine olanak sağlaması gerekir. Bu ise fiziksel koşullardan daha da çok zihinsel koşullara bağlıdır. İşte bu koşulların oluşmasının sebebi olan herkese; başta sevgili oda arkadaşlarım Alp, Emre, Seda ve Çağatay’a; tezimi yazım sürecinde benim yükümü paylaşan veya öncesinde çalışma arkadaşım olmuş, sonrasında da çalışma arkadaşım olacağını umduğum, isimlerini sıralayamadığım için bana kızacak olan gelmiş geçmiş tüm bölüm araştırma

görevlilerine; biz araştırma görevlilerini bölümün geleceği olarak gören, emekli olanlar da dahil olmak üzere, tüm bölüm hocalarımıza; daha çok arkadaşlarım olarak gördüğüm bölüm personelimize; karşı kapı komşularım İşletme Mühendisliği bölümü sekreterlerine ve diğer kat komşularıma; her konuda her türlü yardımı güleryüzle yapmaya hazır tüm fakülte idari personeline; fakültedeki her iki kantin ve kırtasiye çalışanlarına ve bir de her türlü taşınma işimize de severek yardımcı olan fakülte temizlik işçilerine teşekkür ederim.

Son olarak da her zaman yanımda olduklarını bildiğim aileme ve benden her türlü desteğini, sabrını ve sevgisini esirgemeyen sevgili eşim Didem'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsınız.

Mayıs 2012

Murat Engin ÜNAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	viii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
SEMBOL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Problem Tanımı ve Doktora Tezi Amaçları.....	1
1.2 Kesikli ve Diferansiyel İçermelerde En İyi İyileme Literatürü	1
1.3 Araç Trafığı Problemleri.....	4
1.4 Anahat Araç Trafığı Akış Modelleme ve Kontrol Problemleri	4
1.4.1 Katılım düzenleyiciler	5
1.4.2 Bağlantı kontrolü	5
1.4.3 İlgili literatür.....	6
2. KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİ KONTROL.....	21
2.1 Temel Kavramlar	21
2.1.1 Dışbükey kümeler ve özellikleri.....	21
2.1.2 Dışbükey koniler ve özellikleri.....	24
2.1.3 Fonksiyonlar	26
2.1.4 Subgradyan, subdiferansiyel.....	28
2.1.5 Küme değerli fonksiyonlar	30
2.1.6 Dışbükey en küçükleme problemlerinde gerek şartlar	33
2.2 Dağıttık Parametrelili ve Kesikli Sistemlerde En İyi Kontrol	39
2.3 Sürekli Probleme Kesikli bir Yaklaşım Yapılması ve Yaklaşım Üzerinde En İyilenmesi.....	43
2.4 Sürekli (P_C) Problemi için Yeter Koşullar.....	47
2.4.1 Doğrusal kontrol	51
2.4.2 Sınırlı türevli kontrol	52
2.5 (P_C) Probleminin Dualine Dair	53
3. DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA	57
3.1 Kısıtsız En İyi İyileme	57
3.1.1 En iyilik koşulları	58
3.1.2 Gradyan yöntemler	59

3.1.3 BFGS güncellemesi	60
3.1.4 Armijo kuralı	61
3.1.5 Doğru en küçükleme - kübik enterpolasyon.....	61
3.2 Dışbükey Küme Üzerinde En İyileme.....	62
3.2.1 Dışbükey programlama için gerek yeter koşullar.....	63
3.2.2 Gradyan izdüşüm yöntemi.....	63
3.3 Kesikli En İyi Kontrol Problemi.....	64
4. TRAFİK MODELLERİ.....	69
4.1 Temel Kavramlar	69
4.1.1 Araç takip modelleri.....	70
4.2 Katılım Düzenleyici ve Değişken Hız Limitleri.....	72
4.3 METANET	74
4.3.1 Ağ yapısı.....	74
4.3.2 Model.....	75
4.3.3 Kısmi türevler.....	79
4.3.3.1 Durum değişkenlerine göre kısmi türevler	79
4.3.3.2 Kontrol değişkenlerine göre kısmi türevler	83
4.3.3.3 Amaç fonksiyonu bileşenlerinin kısmi türevleri.....	85
4.4 Bazı Küçük Örnekler	86
4.4.1 Değişken hız limiti	86
4.4.2 Katılım düzenleyici	87
4.5 İstanbul Fatih Sultan Mehmet (FSM) Köprüsü Modeli.....	92
4.5.1 Senaryoların oluşturulması.....	96
5. SONUÇLAR.....	123
5.1 Gelecek Çalışmalar.....	124
KAYNAKLAR.....	127
EKLER	139
EK A.....	141
ÖZGEÇMİŞ	146

KISALTMALAR

YEKF	: Yerel Eşlenik Küme değerli Fonksiyon
DÜY	: Dışbükey Üst Yaklaşım
OTF	: Ortak Talep Fonksiyonu
GTF	: Gecikmeli Talep Fonksiyonu
YT	: Yoğun talep
OT	: Orta talep
DT	: Düşük talep
UYZ	: Uzun Yoğun talep Zaman aralığı
KYZ	: Kısa Yoğun talep Zaman aralığı

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Araç Takip Modeli - Temel Diyagram Denklemi.	72
Çizelge 4.2 FSM yoluna giriş ve çıkışlar.	97
Çizelge 4.3 Bağlantı özellikleri.	97
Çizelge 4.4 Model parametreleri.	98
Çizelge 4.5 Katılımlara olan yoğun talepteki gecikmeler.	111
Çizelge 4.6 Senaryolarda elde edilen iyileştirme yüzdeleri.	120
Çizelge 4.7 Kontrol uygulanma mertebeleri.	121

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1	: KontROLSÜZ durumda ρ gelişimi eş yoğunluk çizgileri.....	88
Şekil 4.2	: Kontrol fonksiyonu.....	88
Şekil 4.3	: Kontrollü durumda ρ gelişimi eş yoğunluk çizgileri.....	89
Şekil 4.4	: ρ gelişimi 9000s.	89
Şekil 4.5	: Planlama ufkunun çözüme etkisi - (a), (b) 7000s; (c), (d) 9000s.	90
Şekil 4.6	: KontROLSÜZ durumda yoğunluğun geriye yayılımı.	91
Şekil 4.7	: Kontrollü durumda yoğunluğun zamanda ötelenmesi.	93
Şekil 4.8	: Kontrol fonksiyonu.	94
Şekil 4.9	: w gelişimi.	94
Şekil 4.10	: FSM Köprüsü Yolu.	95
Şekil 4.11	: FSM Köprüsü Yolu.	96
Şekil 4.12	: $\bar{s}$ 'in iyileştirme oranına etkisi.....	98
Şekil 4.13	: Senaryo 1 (OTF, UYZ, YT) için talep fonksiyonu.	99
Şekil 4.14	: Senaryo 1 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	100
Şekil 4.15	: Senaryo 1 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	101
Şekil 4.16	: Senaryo 2 için talep fonksiyonu.....	102
Şekil 4.17	: Senaryo 2 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	102
Şekil 4.18	: Senaryo 2 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	103
Şekil 4.19	: Senaryo 3 (OTF, UYZ, DT) için talep fonksiyonu.	103
Şekil 4.20	: Senaryo 3 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	104
Şekil 4.21	: Senaryo 3 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	105
Şekil 4.22	: Senaryo 4 (OTF, KYZ, YT) için talep fonksiyonu.	106
Şekil 4.23	: Senaryo 4 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	106
Şekil 4.24	: Senaryo 4 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	107
Şekil 4.25	: Senaryo 5 (OTF, KYZ, OT) için talep fonksiyonu.	107
Şekil 4.26	: Senaryo 5 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	108
Şekil 4.27	: Senaryo 5 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	109
Şekil 4.28	: Senaryo 6 (OTF, KYZ, DT) için talep fonksiyonu.	109
Şekil 4.29	: Senaryo 6 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	110
Şekil 4.30	: Senaryo 6 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	111
Şekil 4.31	: Senaryo 7 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	112
Şekil 4.32	: Senaryo 7 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	112
Şekil 4.33	: Senaryo 8 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	113
Şekil 4.34	: Senaryo 8 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	114
Şekil 4.35	: Senaryo 9 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	115
Şekil 4.36	: Senaryo 9 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	115

Şekil 4.37 :	Senaryo 10 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	116
Şekil 4.38 :	Senaryo 10 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	117
Şekil 4.39 :	Senaryo 11 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	118
Şekil 4.40 :	Senaryo 11 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	118
Şekil 4.41 :	Senaryo 12 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.....	119
Şekil 4.42 :	Senaryo 12 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.....	119
Şekil A.1 :	DOPCoz'deki bazı problem sınıfları.....	142
Şekil A.2 :	DOPCoz'deki tüm çözücü sınıfları.	143
Şekil A.3 :	DOPCoz'deki tüm problem sınıfları.	144

SEMBOL LİSTESİ

G	: Trafik ağı
D	: Ağdaki düğümler kümesi
A	: Ağdaki bağlantılar kümesi
k	: zaman adımını gösteren değişken
m	: bağlantı numarasını gösteren değişken
$nbag$	: bağlantı sayısını gösteren parametre
dba_m	: m bağlantısının baş düğümünü gösteren parametre
$dbku_m$	: m bağlantısının kuyruk düğümünü gösteren parametre
N_m	: m bağlantısının küçük bölüm sayısını gösteren parametre
λ_m	: m bağlantısının şerit sayısını gösteren parametre
L_m	: m bağlantısının uzunluğunu gösteren parametre
$b_m(k)$	: m bağlantısında k anında uygulanacak olan değişken hız limiti (kontrol değişkeni)
n	: düğüm numarasını gösteren değişken
kad_n	: n düğümüne giren katılımı gösteren parametre
I_n	: n düğümüne giren bağlantıların kümesini gösteren parametre
O_n	: n düğümünden çıkan bağlantıların kümesini gösteren parametre
td_n	: n düğümünün tipini gösteren parametre
i	: bağlantıların bölümünün numarasını gösteren değişken
ntb	: tüm ağdaki toplam bölüm sayısını gösteren parametre
o	: katılım numarasını gösteren değişken
nka	: katılım sayısını gösteren parametre
dka_o	: o katılımının katıldığı düğümü gösteren parametre
$r_o(k)$	: o katılımında uygulanacak olan katılım düzenleyici oranı (kontrol değişkeni)
$q_o(k)$	: o katılımından kontrollü olarak çıkacak olan akış
$\hat{q}_o(k)$	: o katılımından kontrolsüz durumda çıkacak olan akış
$\hat{q}_{o,1}(k)$	: o katılımından kuyruk uzunluğuna göre çıkabilecek akış miktarı
$\hat{q}_{o,2}(k)$	: o katılımından ana hattın yoğunluğuna göre çıkabilecek akış miktarı
q_o^*	: o katılımından boş trafik ve yeterli talep olduğunda çıkabilecek maksimum akış
$nkat$	: katılım sayısını gösteren parametre
$\rho_{m,i}(k)$	: m . bağlantıdaki i . yol parçasında k anında bir şeride düşen ortalama araç sayısı (yoğunluk) $(\frac{arac}{km \cdot serit})$
ρ_{max}	: tüm ağda oluşabilecek en yüksek yoğunluk seviyesi
$v_{m,i}(k)$	: m . bağlantıdaki i . yol parçasında k anındaki ortalama hız $(\frac{km}{h})$
$V(\rho_{m,i}(k))$	: m . bağlantıdaki i . yol parçasında k anındaki statik hız değeri

$q_{m,i}(k)$	: m . bağlantıdaki i . yol parçasından k anında geçen akış ($\frac{arac}{h}$)
$Q_n(k)$	: n . düğüme k anında giren toplam akış
$w_o(k)$	: o katılımında k anındaki kuyruk uzunluğu
τ, ν, κ	: ağ genelindeki ampirik parametreler
$v_{f,m}^*, v_{f,m}$	: m . bağlantıdaki sırasıyla serbest ve kontrollü hız limiti
$\rho_{cr,m}^*, \rho_{cr,m}$	: m . bağlantıdaki sırasıyla serbest ve kontrollü kritik yoğunluk değeri
α_m^*, α_m	: m . bağlantıdaki sırasıyla serbest ve kontrollü ampirik değer
A_m, E_m	: m . bağlantıdaki ampirik değerler
$w_o(k)$	: o katılımında k anındaki kuyruk uzunluğu

KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİLEME VE BİR UYGULAMA

ÖZET

Bu tez kapsamında kesikli ve diferansiyel içermelerde dağıtık sistemlerin en iyi kontrolü teorik ve pratik olarak incelenmiştir. Teorik kısımda nihai olarak diferansiyel problemin en iyilik koşulları gradyan formunda ve YEKF (Yerel Eşlenik Küme–değerli Fonksiyon) ile ıraksaklık operatörü aracılığıyla verilmiş, ve bazı duallik özellikleri incelenmiştir. Bunu yaparken önce kesikli problem için, kümelerin kesişiminde en iyilik koşullarından faydalanarak en iyilik koşulları verilmiştir. Daha sonra sürekli probleme bir kesikli yaklaşım problemi tanımlanmış ve bu problemin en iyilik koşulları gene YEKF cinsinden ifade edilmiştir. Bunu yaptıktan sonra limite geçilerek sürekli problem elde edilmiş ve en iyilik koşulları verilmiştir. Teorik kısımda son olarak sürekli problemin dualite özellikleri incelenmiştir.

Pratik olarak, en iyi çözümü bulmak için kullanılan algoritmalar açıklanmıştır. Önce kısıtsız ve türevlenebilir problemler için gerek yeter koşullar ve ardından bu problemleri çözmek için kullanılabilecek bazı gradyan yöntemler incelenmiştir. Bu gradyan yöntemlerde kullanılabilecek bazı adım büyüklüğü kuralları ve bu kurallardan “doğru en küçükleme”nde kullanılabilecek olan kübik enterpolasyon yöntemi açıklanmıştır. Daha sonra karar değişkenlerinin dışbükey bir kümeden seçilmesi kısıtı olduğu durumda gerek yeter şartların neler olacağı ifade edilmiş, bu problemi çözmek için kullanılabilecek bir yöntem olan gradyan izdüşüm tekniği anlatılmıştır. Son olarak en iyi kontrol problemlerini çözmek için bu gradyan yöntemler kullanılmak istendiğinde, amaç fonksiyonunun kontrol değişkenlerine göre gradyanının hesaplanması gerekeceğinden, bu gradyanı hesaplamak için bir yöntem verilmiştir.

Özel bir problem olarak da dağıtık bir sistem olan trafik akışı problemi incelenmiştir. Probleme ilgili bazı temel kavramlar verildikten sonra yaygın olarak kabul görmüş bir trafik modeli olan METANET modeli ve bu modele eklenen kontrol fonksiyonları anlatılmıştır. Modelin literatürde bahsi geçmeyen bazı eksiklikleri fark edilmiş ve bunlar düzeltilmiştir. Bunun yanı sıra trafik akışının en iyi kontrolünü sağlayacak çözümü bulmak için gradyan teknikler kullanıldığında ihtiyaç duyulacak olan bazı kısmi türevler verilmiştir. Trafik akışının kontrolünü sağlayan değişken hız limitleri ve katılım düzenleyicilerin kullanımlarının anlaşılması için bazı küçük örnekler verilmiştir.

Son olarak, İstanbul’daki Fatih Sultan Mehmet (FSM) köprüsünün geometrik özelliklerini taşıyan bir model hazırlanmış ve çeşitli talep senaryolarında kontrol uygulanması ve uygulanmaması durumları karşılaştırılmış, belli durumlarda, katılım düzenleyici ve değişken hız limitleri uygulanmasının faydalı olabileceği gösterilmiştir.

OPTIMIZATION ON DISCRETE AND DIFFERENTIAL INCLUSIONS AND AN APPLICATION

SUMMARY

This thesis includes the analysis of discrete and differential inclusions when used with distributed parameter systems in both theoretical and practical manner. In the theoretical part, we will be using a mathematical language as we will be stating different abstract optimization problems and the optimality conditions regarding them. Some basic concepts on convex analysis will also be given in the beginning of this theoretical part. We consider a system with distributed parameters, a traffic flow model; state an optimal control problem about it, discuss some methods to solve this problem, and finally report and discuss the solutions of several scenarios that are constructed based on the amplitude, duration, and initial time delay of the demand to the on-ramps.

In the theoretical part, ultimately the optimality conditions of the differential problem are given in gradient form and with use of the divergent operation and the locally adjoint mapping (LAM), and some properties of the dual problem are given. The required methodology to achieve these results is like the following. First, a discrete version of the differential problem is stated and optimality conditions for this problems are calculated. This task is achieved with passing to a higher dimensional space, so that the optimal control problem becomes a non-linear programming problem, the feasible solutions of which should be from an intersection of several sets. This way the optimality conditions for the discrete problem can be stated in terms of the locally adjoint mapping. While this result is central for our analysis, we want to have optimality conditions for a continuous problem. The next step makes us closer to our ultimate goal.

We then introduce a new discrete problem, which is an approximation to the continuous problem. Partial derivatives become difference operators, time and spatial steps become smaller and both end at 1 instead of T and L . Although the time and spatial steps are different length for the previous and this problem, this creates no problems since there is no information between two time steps for discrete problems. So we used the same results with the previous problem, in terms of a different LAM, but we find an equivalent expression in terms of desired LAM. Then we pass to limit and reach the desired results for continuous problem. The optimality conditions are in terms of divergent operator, LAM and in gradient form. Then we proved sufficiency of these conditions. Finally we investigate the duality relations of this problem.

Having all optimality conditions formulated, we should now explain the methods to solve the optimal control problem that we have stated. Since analytical solutions are not available for almost all complex real life problems, we can only solve discrete time systems. In order to solve discrete time optimal control problems, we have used a similar method to the one that we have used to formulate the necessary conditions

for optimality: we convert it to a nonlinear programming problem. A dissimilarity is that this time we do not regard the state variables as decision variables. This time the only type of variable is the control variables, because, the state variables are functions of control variables and initial and boundary conditions, so is the objective function value. Since we can only decide control variables, they are the only variables regarding an optimal solution to the problem. A solution usually required to fulfill certain constraints. One of the simplest constraints is box constraints, where control variables are restricted to be in an interval like $lb \leq u \leq ub$, where lb and ub are called lower and upper bounds. Such constraints form convex feasible sets of a very simple type. This simplicity is by means of the ease of finding the projection of a point on to the set. There are some algorithms that are exploiting this advantage, which are collectively called *gradient projection methods*.

As their name offers, gradient projection methods requires the gradient vector at each iteration. So we have to figure out how to evaluate the gradient of the objective function with respect to the control variables. The problem here is that the objective function is not expressed only in terms of control vectors but also in terms of some functions of control variables i.e. the state variables. We have to apply chain rule repetitively in order to overcome this issue. An expression called the *adjoint variables* facilitates the calculation of the gradient.

After all methods to solve an optimal control problem on a convex set are decided and explained, we then focus on the solution of an optimal control problem with distributed parameters. One such system is the traffic flow system. Density and speed evolution is not the same throughout the road. So they evolve in both time and spatial axis. That is why we have to divide the road into small pieces in order to model the progress of traffic condition throughout the time which makes this system distributed. What is the control problem regarding this system? Ramp metering is one of the ways to control mainstream traffic flow. It regulates the amount of traffic flow that is allowed to join the mainstream from an on-ramp, so that the mainstream flow stays below the capacity of the bottleneck and improve infrastructure utilization. There are a bunch of studies regarding ramp metering and some of them are looking for an optimal solution. Real life applications of this method are getting more and more widely used in the USA and European countries. Variable speed limits is another method to control main stream traffic flow control. This is a more direct way, it modifies speed limits on the mainstream. This allows reducing incoming flow to a bottleneck to the capacity of the bottleneck, and so improves the capacity usage of the infrastructure. This method also attracts a lot of attention in literature. Although the application of this type of control to real life is not as wide as ramp metering, it is also increasing. In this thesis both methods are used in order to control the traffic flow. Our purpose to control the traffic flow is to minimize the total waiting time during the planning horizon. The mathematical model that is used in this thesis is the METANET model together with the adapted control functions.

In order to optimize the traffic flow using one of the gradient projection methods, we have to formulate the partial derivatives of state and objective functions with respect to both control and state variables. Although the model is solved using gradient techniques before, the partial derivatives are not documented. All relevant partial derivatives are included in this thesis.

The benefits of the control options are demonstrated by some small examples. Then a first step to investigate the applicability of these methods to the Fatih Sultan Mehmet (FSM) bridge is taken. A model that represents the geometric properties of the motorway stretch starting from Küçükbakkalköy down to the exit to Seyrantepe, is constructed. Then the optimal control problem of traffic flow problems for this model and a set of different traffic demand functions are solved using gradient projection method. The results are promising and reveal the potential benefit of using such control measures in Istanbul.

1. GİRİŞ

1.1 Problem Tanımı ve Doktora Tezi Amaçları

Küme değerli fonksiyonlar, adi ve kısmi diferansiyel içermelerle birlikte, en iyi kontrol teorisinde gelişen bir çok problemi açıklamak için kullanılabilecek önemli araçlardır [1–18]. İktisadi dinamikler, klasik en iyi kontrol teorisi, hidrodinamik mühendisliği, titreşimler, ısı yayılımı vb. araştırma konuları böyle araştırmalara dönüştürülebilir [5, 7, 19–24]. Bu tipteki bazı kısmi diferansiyel içermeli en iyileme problemleri için dualite ilişkileri Mahmudov’un çalışmalarında verilmiştir [11–14, 25]. Bu tezde gradyan formundaki birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel içermelerin bir kare tanım kümesi üzerinde en iyilenmesi ele alınacaktır. Önce kesikli problem incelenecek, sonra sürekli probleme bir yaklaşım, bu kesikli problem temel alınarak incelenecektir. Sonra da burada formel limite geçilecek ve sürekli problem için yeter koşullar elde edilecektir. Daha sonra dual problem tanımlanacak ve primal ve dual problemlerin değerleri arasında önce zayıf sonra da güçlü dual ilişkiler kanıtlanacaktır. Daha sonra bir dağıtık sistem olan trafik akışı problemi incelenecek, kabul görmüş bir makroskopik model detaylı bir şekilde anlatılacaktır. Daha sonra bu model için basit örnek problemler incelenecek ve bu problemlerdeki en iyi kontrol sayısal olarak bulunacaktır. Son olarak ise İstanbul FSM Köprüsü’nün basit bir modeli ele alınacak ve bu model için katılımlara olan talepler anlamında farklı senaryolar oluşturulacaktır. Bu senaryolar için gradyan izdüşüm yöntemlerinden biri ile çözümler bulunacak ve bu çözümler yorumlanacaktır.

1.2 Kesikli ve Diferansiyel İçermelerde En İyileme Literatürü

Mordukhovich ve diğerlerinin makalesinde, eşitlik ve eşitsizlik son nokta kısıtlı olarak gecikmeli diferansiyel içermelerle ifade edilen en iyi kontrol problemlerini irdelenmiştir. En iyilik için gerek koşulları genişletilmiş Euler-Lagrange formatında

belirleyebilmek için kesikli yaklaşımlar ve varyasyonlar analiziyle sonsuz boyutta genelleştirilmiş diferansiyellemenin ileri teknikleri kullanılmıştır [26].

Wang makalesinde kesikli yaklaşımların, genel son nokta kısıtlarına tabi, nötr fonksiyonel-diferansiyel içermelere yakınsaklığını incelemiştir. Makalenin ilk kısmında Euler sonlu farklar yöntemi kullanılarak nötr fonksiyonel-diferansiyel içermelere kesikli yaklaşım oluşturulmuş ve kesikli yaklaşımın yakınsaklığı ispatlanmıştır. İkinci kısmında ise bir kesikli en iyileme problemi ailesi tanıtılmış ve bu ailenin en iyi çözümünün, asıl problemin en iyi çözümüne yakınsaklığı tartışılmıştır [27].

Mordukhovich ve Wang'ın makalesinde, Hale tipinde verilmiş otonom (özerk, müstakil) olmayan, kısıtlanmış nötr içermelerle yönetilen Bolza tipindeki fonksiyonel-diferansiyel sistemlerin en iyi kontrolü ile ilgilenmişlerdir. Genişletilmiş Euler-Lagrange ve Hamilton tiplerindeki problemlerde gerek koşulları çıkarabilmek için kesikli yaklaşımlar yöntemi geliştirilmiştir [28].

Minchenko ve Volosevich'in makalelerinde son nokta kısıtlarına tabi diferansiyel-fark içermelerinde en iyi kontrol problemiyle ilgilenilmiştir. İlk olarak bahsi geçen problemlerde değer fonksiyonunun genelleştirilmiş gradyanını tahmin etmek için bir method geliştirilmiştir. İkinci olarak bu tahminleri en iyilik için gerek koşulları elde etmede kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, düzgün olmayan fonksiyon ve kümeler için Clarke yapıları cinsinden ifade edilmiştir [29].

Cernea'nın makalesinde, dinamiği, rotaları kapalı bir kümede olmaya kısıtlanmış dışbükey olmayan diferansiyel-fark içermeleriyle verilen, Mayer en iyi kontrol problemi ile ilgilenilmiştir. En iyilik için gerek koşullar maksimum prensibi formunda elde edilmiştir [30].

Cernea'nın makalesinde, son nokta kısıtlarına tabi diferansiyel-fark içermeleri ile verilmiş en iyi kontrol problemiyle ilgilenildi. İkinci mertebe en iyilik koşullarına dair bir yaklaşım önerilmiştir [31].

Wang'ın makalesinde, nötr fonksiyonel diferansiyel içermelerde en iyileme problemine yapılan kesikli yaklaşımın yakınsaklığıyla ilgilenilmiştir. Euler sonlu farklar kullanarak kesikli yaklaşım oluşturulmuş ve yakınsaklığı ispatlanmıştır [27].

Abada ve diğ erlerinin makalesinde, ayrılabilir Banach uzaylarındaki, yoğun olmayan d rt c  yarı-linear fonksiyonel diferansiyel içermelerde integral ve ekstremal integral c z mlerin varlığı için yeter koşullar oluşturulmuştur [32].

Chraibi ve diğ erlerinin makalesinde, kesikli gecikmeli kontrollü dağıtık parametrelili sistemlerde tam kontrol edilebilirlik ve kuadratik maliyet kontrolü problemleri incelenmektedir. İki problemin ifadesi için de Hilbert tekillik metodu geliştirilmiştir [33].

Yerel ve yerel olmayan koşullu, ayrılabilir Banach uzaylarında, birinci mertebeden yarı doğrusal yoğun olarak tanımlanmış tepisel fonksiyonel diferansiyel içermeler için c z m n varlığı ve kontrol edilebilirliği kanıtlanmıştır [34].

Banach uzaylarındaki hızlı ve yavaş zaman değişkenli fonksiyonel diferansiyel içermeler için ortalama yöntemleri c alı ılmı tır. Yumuşak bir regülerlik varsayımları altında, periyodik ve ortalamanın olmadığı durumlar incelenmiştir. Periyodik sistemler için bilinen linear yaklaşım başarılı olmuştur. Daha g c l  regülerlik varsayımları yapıldığında Krrylov-Bogoliubov-Mitropolskii tipi sağ taraflar için yakla ıklık mertebeleri türetilmiştir [35].

Goursat-Darboux tipindeki dışbükey diferansiyel içermelerle açıklanan en iyi kontrol probleminin duali incelenmiş, yeter koşullar YEFK fonksiyonları kullanılarak yazılmıştır. Primal ve dual problemlerin arasındaki ilişki ifade edilmiştir [11].

Yarı-linear diferansiyel içermelerle açıklanan d rt l  Cauchy probleminin c z mlerinin kompakt olduğu kanıtlanmıştır. daha sonra bu sonuç kompakt olmayan tanım kümelerinde tanımlandığında c z mlerin varlığının temini için kullanılmıştır [36].

Otonom kesikli zamanlı kontrol sistemlerinde durum uzayı Banach uzayının bir dışbükey kompakt alt kümesi olduğu durumda, en iyi c z mlerin yapısı c kartılmı tır [37]. Bir başka c alı mada benzer sistemlerin ekonomi dinamiklerinde karşımıza c ıkan örnekleri için bu sefer yaklaşık c z mlerinin yapısı incelenmiştir [38].

Dağıtık ve kesikli zaman gecikmelerinin olduğu sistemlerin global  st l kararlılığı incelenmiş, bu sistemlerin kararlılığının garanti altına alınması için dağıtık

gecikmesine bağlı bir kriter önerilmiştir. Gecikme için kararlılığı bozmayacak bir st değer bulunmuş, sayısal analizlerle sonuçlar pekiştirilmiştir [39].

1.3 Araç Trafiği Problemleri

Trafik çok uzun süredir insanlık için önemli bir kavram olmuştur. Ancak son 50 senedir araç sayısındaki ve taşıma talebindeki artış sebebiyle, trafik sıkışıklığı önemli bir problem olarak karşımıza çıkmıştır. Trafik sıkışıklığı gecikmelere ve kaynak kaybına sebep olduğu gibi, yolun kapasitesini de azaltmakta ve sıkışıklığın katlanarak artmasına sebep olmaktadır. Avrupa komisyonunun 2010 yılı için hazırladığı Avrupa taşıma politikası raporunda, Avrupa birliğinin trafik sıkışıklığı yüzünden rekabetçi gücünü kaybedebileceği belirtilmiş ve trafik sıkışıklığının Avrupa Birliği'nin gayrisafi i hasılasının % 0.5'i miktarda kayba sebep olduğu, 2010 içinse bu kaybın %1'e çıkacağını ngrlmştir [40].

Enerji krizleri ve çevreci endişelerden dolayı, taşıma talebinin artışının sürekli altyapı artışı ile karşılanamayacağı ortaya çıkmış, ve var olan altyapıların en iyi şekilde kullanılması ihtiyaı doğmuştur. Taşıma alt yapısının verimli kullanımının ise akıllı trafik kontrol sistemlerinin tasarlanmasıyla ortaya çıkacağı grlmştir.

Trafik kontrolü konusundaki çalışmalar ışıklı ağlar, serbest (trafik ışığı anlamında) ağlar olarak iki alt alanda incelenebilir. Aşağıdaki bölümlerde bu alanlarla ilgili detaylar bulunmaktadır.

1.4 Anahat Araç Trafiği Akış Modelleme ve Kontrol Problemleri

Trafik sıkışıklığı pahalı altyapıların kapasitesini azaltarak en gerekli olduğu zamanda kullanılamaması sorununu doğurmaktadır. Serbest yollarda kullanılan kontrol araçları, katılım düzenleyici, bağlantı kontrolü ve yolcu bilgilendirme ve yönlendirme sistemleri gibi yöntemlerdir.

Bu yöntemler arasında katılım düzenleyiciler en etkin ve direk yoldur. Serbest yolların kontrolünde bu alanda birçok çalışma vardır.

1.4.1 Katılım düzenleyiciler

Doğru bir şekilde uygulanan katılım düzenleyici yöntemler birçok olumlu etkiye sahiptir. Bunlardan bazıları aşağıda listelenmiştir:

- Anayol üzerindeki sıkışıklığı engelleyerek anayol akışını artırır.
- Çıkışların ve yol değişimlerinin sıkışıklık sebebiyle kapanmasını engelleyerek hizmet verilen araç sayısını artırır.
- Paralel arterlerdeki artık kapasitenin kullanımını sağlar.
- Kazalara verimli bir şekilde cevap verilmesini sağlar.
- Sıkışıklığı kaldırarak ve emniyetli katılım sağlayarak trafik güvenliğini artırır.

Büyük ağlarda bu yöntemin kullanılması, önemli kazanımlar sağlayabilmektedir. Bu yöntemle kontrol, gene ışıklı sistemlerde olduğu gibi gerçek trafik durumunu göz önüne alan ve almayan sistemler olarak ve lineer olmayan dinamik sistem en iyileme olarak ele alınabilir.

1.4.2 Bağlantı kontrolü

Bağlantı kontrolü yol ağında iki komşu düğümü birbirine bağlayan yolun üzerinde bir takım kontroller aracıyla trafiği düzenlemeye çalışır. Bu kontrol araçları arasında aşağıdaki araçlar veya bunların bazı bileşimleri bulunabilir.

- Değişken hız sınırları,
- Göstergeli ve değişken mesaj işaretleri,
- Şerit kontrol araçları,
- Kaza ve sıkışıklık bildirimleri,
- Tersine çevrilebilir şeritler.

Bu araçların bazılarının gerçek hayatta kullanımları bulunmaktadır. Ancak hepsinin performanslarına dair sistematik bir çalışma ya da gerçekleştirilmiş matematiksel modeller fazla bulunmamaktadır. O yüzden bazıları sezgisel olarak kalmaktadırlar.

1.4.3 İlgili literatür

Serbest yollarda trafik akışının özelliklerini ölçme ve raporlamayla ilgili ilk çalışmalardan bir tanesi Greenshields'in çalışmasıdır. Bu çalışmada fotoğraf ile ölçme tekniklerinden bahsedilmiş, araçlar ortalama hızlarına göre sınıflandırılmış, yoğunluk ile hız arasındaki ilişkiler belirlenmeye çalışılmış ve en önemlisi bir yolun kapasitesinin hesaplanması ile ilgili tartışmalara verilmiştir. Trafik durumuyla ilgili bir çok göstergenin tanıtıldığı bu makale trafik modellemesi araştırmaları için önemli bir başlangıç noktası olmuştur [41].

Lighthill ve Whitham iki parça olarak sundukları makalelerinde kinematik dalga teorisinden faydalanarak şok dalgası kavramını açıklamaya çalışmıştır. Makalenin ilk parçasında bu tezle daha az ilgili olarak uzun ırmaklardaki taşkınların davranışlarını açıklamaya çalışmıştır. Bu bölümde dalgaların sadece kinematik değil dinamik özelliklerinin de kullanılması gerekmiştir. Ancak ikinci kısımda aynı modelle yoğun trafikte yaşanan şok dalgalarını açıklamaya çalışmıştır [42,43]. Bu makaleler, serbest yollardaki trafik akışı modellemesi çalışmaları için çok önemli bir dönüm noktasını oluşturmuştur. Bu makaleyi takiben bir çok model kurulmuş, kesikli hale getirilmiş, kontrol parametreleri eklenmiş ve daha değişik koşulları modelleyebilmesi burada kurulan modele eklemeler yapılmıştır.

Isaksen ve Payne makroskopik trafik modelleri kullanarak bir lineer en iyi kontrol formülasyonu geliştirmiştir. Burada kullanılan modellerin mertebesi arttıkça en iyi kontrolü bulma işinin işlem yükü artmaktadır. Buna çare olarak daha düşük mertebeden alt sistemlerden oluşan bir takım modelleri çözüp, asıl sistem için bir alt-eniyi çözüme ulaşılabilir. Böylece belli bir performans kaybına karşı, daha az işlem yükü ile çözüme ulaşılabilir. Buradaki kontrol katılım düzenleyiciler üzerinde uygulanmıştır ve bir kaza gibi olumsuz bir olay olduğunda bu durumdan kaynaklanan sıkışıklığı bertaraf etmek için kullanılmıştır [44].

Papageorgiou bir makalesinde makroskopik trafik modellerini genel olarak incelemiş, zayıf yönlerine değinmiş, kesikli hale getirme ve gerçekleştirme gibi konuların önemine değinmiştir [45].

Meng ve Khoo, katılım düzenleyicilerle trafiği düzenlemeye çalışırken, toplam bekleme süresinin baz alındığı modellerde bir haksızlık olduğunu belirtmiş ve bunun yerine bir gecikme indeksi tanımlamış ve bunların toplamını en küçüklemeye çalışmışlardır. Bunu yaparken değiştirilmiş hücre aktarma modelini kullanmış ve en iyileme problemini NSGA II adı verilen bir Genetik Algoritma uyarlamasını kullanarak çözmüşlerdir. Kurdukları modelde çelişen amaçlar olduğundan bir Pareto Analizi yapmışlar ve çok amaçlı programlama tekniklerini kullanmışlardır [46].

Papageorgiou ve arkadaşları bir çalışmalarında değişken yön tavsiyesi aracını kullanarak trafiği düzenlemeye çalışırken problem çözmenin ağırlığından kaynaklanan sıkıntıların üzerinden gelebilmek için bir ileri beslemeli bir yapay sinir ağı geliştirmişlerdir. Burada önce tarihsel veriler kullanılarak en iyi yönlendirmeler işlem yoğun doğrusal olmayan programlama teknikleri kullanılarak çözülmüş, daha sonra sistemin girdileri ve çıktıları arasındaki ilişki bir ileri beslemeli yapay sinir ağı aracılığıyla modellenmiştir. Bu sayede gerçek hayatta alınan verileri kullanarak en iyi yönlendirmeleri bulmak için gerçek zamanlı olarak çalıştırabilecek olan bu yapay sinir ağı kullanılmışı hedeflenmiştir. Bunun başarılı bir yöntem olduğu belirtilmiş ancak tüm trafik koşullarını temsil edecek bir örneklem oluşturmanın zorluğu, sadece belirli bir ağ için geçerli oluşu ve son olarak bazı örnekler için iyi sonuç vermediği gibi dezavantajlarını da listelemişlerdir [47].

Xu ve Xing bir çalışmalarında trafik kontrolünü bir öğrenme teması aracılığıyla yapmaya çalışmışlardır. Bunda dayanak aldıkları nokta ise hergün tekrarlanan trafik koşullarıdır. Bu kontrolü katılım düzenleyiciler yada hız kontrolü aracılığıyla yapabilmektedirler [48].

Windover ve Cassidy bir araştırmalarında bir darboğazın öncesindeki trafiğin gelişim özelliklerini incelemiştir. Bu inceleme sonucunda kuyruklarda oluşan dalgalanmaların tahmin edilebilir bir istatistiksel değişime sahip bir rassal yürüyüşe benzedikleri ortaya çıkmıştır. Dalgalanma hızı ile akış arasında bir ilişki gözlemlenmediğini raporlanmıştır. Ayrıca dalgaların dışa doğru çekilmediği yada ilerlemediği gözlemlenmiş, şokların ise sadece kuyruğun sonları ile kuyruk oluşmamış kısım arasında olduğu belirlenmiştir. Tüm bunların aslında tahmin edilen gözlemler olduğunu ancak daha önce hiç raporlanmadığını belirtmiş bu sonuçlara bağlı olarak

homojen serbest yol parçalarında gelişen trafiği modellemek için basit modellerin mümkün olabileceğini öne sürmüşlerdir [49].

Casidy ve arkadaşları bir çalışmalarında aşırı doymuş bir çıkış rampası civarındaki trafiği incelemiş ve iki temel gözlem yapmışlardır. Çıkış kuyrukları çıkış şeritlerinde kalsa dahi, bu kuyruğu gören ve aslında çıkmayacak olan sürücülerin yavaşladığı tespit edilmiş ayrıca bu kuyruk ne kadar uzun olursa çıkmayan araçların çıkış ertesi akışı da o kadar düşük olduğu gözlemlenmiştir. Bu gözlemler üzerine çıkış rampalarındaki kuyrukların engellenmesi durumunda (çıkışta yapılacak düzenlemelerle) anahat akışının iyileştiği sonucu da elde edilmiştir [50].

Muñoz ve Daganzo çalışmalarından birinde aşırı doymuş bir çıkış trafiği olan bir serbest yolun çıkış öncesindeki davranışlarını incelemişlerdir. Şu bulgularla karşılaşmışlardır. FIFO engeli: Çıkış trafiği öyle bir hal almıştır ki anayoldaki herkes sanki bir FIFO kuyruğuna girmiştir. Değişken kapasite: Çıkış akışı değişmediği halde çıkan araç sayısı değiştiği takdirde yol kapasitesi değişebilmektedir. FIFO olmayan sıkışıklık: Sürücüler varış noktası tercihlerine göre önceden şerit seçtikleri halde, iki farklı şerit rejimi oluşabilmektedir. Akış-yoğunluk saçılma diyagramlarının düzenliliği: rejim değişiklikleri ve farklı şerit rejimlerinin olduğu durumlar dışında tüm şeritler boyunca oluşan diyagramlar temel diyagrama benzemektedir [51].

Bertini ve Cassidy bir çalışmalarında yoğun bir katılım rampası civarında oluşan darboğazları incelemişlerdir. Bazı günlerde yolun daha gerisinden serbest kalan bir kuyruk olduğunda darboğazın aktif hale geldiğini tespit etmişlerdir. Böyle durumlarda dar boğaz her zaman katılımın 1 km kadar gerisinde oluşmuştur. Bu darboğazdan çıkış akışları ise daha geriden serbest bırakılmış bir kuyruk olsa dahi, sabit kalmaktadır ve ortalamada her gün gözlemlenebilmektedir. Yazarlar yapılan gözlemlerin, serbest trafik akışından yoğun duruma geçiş halinin anlaşılması açısından önem taşıdığını belirtmişlerdir [52]

Papageorgiou ve diğerleri bir karşılaştırma makalesinde çok şeritli serbest yol trafiği için bağımsız olarak geliştirilmiş dört deterministik makroskopik modelin birleştirici bir özetini yapmışlardır. Tüm modellerin trafik akışının üç temel prensibinden denge

denklemlerini, hacim yoğunluk ilişkilerini ve ortalama hız dinamiklerini türetebildiği gösterilmiştir [53].

Alvarez ve arkadaşları makalelerinde otomatikleştirilmiş otoyol sistemlerinde kontrolü incelemişlerdi. Bu makalede önerilen kontrol hız ve şerit değişimi kontrol sinyallerini kullanarak araç yoğunluğu ve akışını kararlılaştırmaya çalışmıştır [54].

Wie makalesinde, bir dinamik sistem en iyi trafik ataması modeli, çok kaynaklı ve çok hedefli sıkışmış genel ağlar için bir dışbükey kontrol problemi olarak ifade edildi. Önceki modellerin analitik ve hesaplama zorluklarına neden olan dışbükey olmamaları durumu ortadan kaldırıldı. İçbükey çıkış fonksiyonları trafik sıkışıklığının fiziksel sürecini temsil etmesi için korunmakla birlikte;ark trafik dinamik modeli anlık akış yayılmasını engellemek üzere iyileştirildi. En iyilik koşullarının ekonomik bir yorumu kullanımda olan tüm yolların gerçekleşen marjinal maliyetlerinin dengelenmesini gerektiren bir dinamik atama prensibi olarak verildi [55].

Sadek ve arkadaşları makalelerinde trafik yönlendirmesi ile ilgilenmişlerdir. Varolan yönlendirmelerin kısıtlamaları olduğunu belirtmiş, kullanıldığı takdirde durum temelli akıl yürütmenin bu kısıtlamaları aşabileceği belirtmişlerdir. Geçmişteki problemlerin çözümlerinin, yeni problemlerin çözümünde de kullanılabileceği fikri bu yönetime temel oluşturmuştur. Bunun mümkün olduğunu göstermek için Virjinya'daki Hampton Yollarında yöntemin bir prototipi denenmiştir. System için gerekli durumlar dinamik trafik ataması sezgiseli ile üretilmiş, ikinci bir veri seti kullanılarak sistemin performansı ölçülmüştür. Değerlendirme sonuçları makul ölçüdeki bir durum tabanı kullanıldığında sistemin gerçek zamanlı çalışabileceğini ve kaliteli sonuçlar üretebileceğini göstermiştir [56].

Hiramatsu ve arkadaşları makalelerinde trafik yoğunluğunun dinamik tahminine dayanarak katımdaki yoğunluğun en iyi kontrolünü bulmuşlardır. Problemi her bir katılım için anayol ve katılım yoğunluklarına bakarak en iyi içeri akışı bulmak olarak tanımlamışlardır. Katılım trafik yoğunluğunu karar değişkeni olarak almış ve kontrol problemini lineer olmayan bir problem olarak modellemişlerdir. Bu problemi çözmek için adaptif genetik algoritma kullanmışlardır. Genlerde verilen kısıtlar dahilindeki

akış oranlarını kullanmışlardır. Ayrıca genetik işlemler seri olarak değil paralel ve adaptif olarak çalıştırılmıştır.

Kachroo ve Özbay makalelerinde dinamik trafik yönlendirme problemini düzenli olmayan sıkışıklıklarda gerçek zamanlı noktasal yönlendirme olarak tanımlamış ve sonra da bir kullanıcı dengesine ulaşmak için zamanla değişebilen, gelen trafiği alternatif yollara ayırma oranlarının kullanıldığı bir geri beslemeli kontrol mekanizması kurmuştur. Bu modeli kanonik hale getirdiklerinde doğrusal olmayan durumlar ortadan kalkmış ve doğrusal modeller elde edilmiştir [57]

Hurdle ve Son makalelerinde Newell'in modelini üç değişik test ortamında sınamışlardır. Deneylerde modelin kuyruk uzunluklarının dinamiğini yoğun trafikli durumlarda başarılı bir şekilde açıklayabildiğini, ancak daha az trafiğin gözlemlendiği durumlarda bir takım sorunları olduğu; bununla beraber, seyahat sürelerini hafif sıkışık durumlarda bile başarılı bir şekilde öngörebildiği gösterilmiştir [58].

Papageorgiou ve arkadaşları, bir makalelerinde trafik sıkışıklığının önemini arzetmiş ve trafik kontrol stratejilerini geniş bir çerçevede gözden geçirmişlerdir [40].

Wang ve diğerleri makalelerinde gerçek zamanlı trafik verilerinden gerçek zamanlı bir trafik durumu tahmin edicisinin performansını raporlamışlardır. Yaklaşım olarak stokastik bir gerçek zaman makroskopik trafik akış modelini ve genişletilmiş Kalman filtrelemesini kullanmışlardır. Bundaki önemli yenilikçi yaklaşımlardan birisinin model parametreleri ile durum değişkenlerinin aynı anda tahmin edilmesini sağlamaları olduğunu ileri sürmüşler ve bunun sağladığı faydalardan bahsetmişlerdir [59].

Levinson ve Zhang makalelerinde, Minnesota eyaletinde bulunan ve ikiz şehirler olarak da bilinen Minneapolis ve St. Paul şehirlerinde kullanılan katılım düzenleyicilerin etkilerini araştırmışlardır. 8 hafta boyunca bu kontrolleri devre dışı bırakmışlar ve bu sayede etkilerini çeşitli açılardan inceleyebilmişler. Bu çalışma sonucunda katılım düzenleyicilerin daha çok uzun yolculuklarda olumlu etkiye sahip olduğu görülmüş, katılım bekleme süreleri göz önüne alındığında seyahat sürelerinin bazı durumlarda iyileşmediği gözlemlenmiştir. Seyahat sürelerinin değişkenliğindeki azalma ise uygulamanın bir başka faydası olarak gözlemlenmiştir [60]. Bu ikili bir

başka makalelerinde aynı yerde bu sefer katılım düzenleyicilerin darboğaz kapasitesine olan etkisini incelemiş ve darboğazı ya geciktirerek yada aktifleşmesini engelleyerek kapasiteyi arttırdığını tespit etmişlerdir [61].

Haj-Salem ve Papageorgiou bir makalelerinde katılım düzenleyiciler için benzer bir incelemeyi Paris'teki bir yol ağı üzerinde yapmışlar ve bunun bir çok açıdan (ara arterler, paralel yollar ve tüm ağ açısından) fayda sağladığını tespit etmişler [62].

Shen ve Zhang bir makalelerinde çok girişlerin olduğu çok şeritli bir serbest yolda sabah yoğunluğunu iyileştirmek için ekonomistlerin önerdiği ücretlendirme politikaları yerine bildik mühendislik yaklaşımlarının seyahat edenlerin çıkış zamanı tercihlerini etkileyerek sıkışıklığı dağıtabileceklerini belirtmişlerdir. Zaman bağımlı düzenleyiciler aracılığıyla kullanıcıların kanallara ayrılabilceği ve darboğaza farklı zamanlarda erişerek toplam maliyetleri azaltabileceklerini ileri sürmüşler ve bunun için pareto-iyileştirme stratejilerini uygulamışlardır. Katılımların öncelikleri, periyodik olarak değiştirildiğinde kullanıcılar arasında bir eşitlik de sağlanabileceği görülmüştür [63].

Cremer ve Papageorgiou bir makalelerinde önerdikleri bir makroskopik modelin serbest parametrelerini gerçek veriler kullanarak tahmin etmek için doğrusal olmayan programlama tekniklerini kullanmışlardır. Ayrıca modelin bu parametrelere olan duyarlılıklarını incelemişlerdir. Modelin deterministik olmasına ve rassal olayların trafik davranışında önemli bir etmen olmasına rağmen, modelin oldukça başarılı olduğunu gözlemlemişlerdir [64].

Messai ve arkadaşları bir makalelerinde trafik modellerinin parametre belirleme aşamasının öneminden bahsetmiş ve bunun için bir yapay sinir ağı modeli önermişlerdir [65].

Carlson ve arkadaşları bir makalelerinde serbest yol trafik ağlarında, trafik sıkışıklığı sorununu azaltmak için koordinasyonlu katılım düzenleyiciyle birlikte bağlantılar üzerinde hız kontrolünü de devreye alarak önemli ilerlemeler kaydetmişlerdir. Değişik senaryolarda modellerini katılım düzenleyicinin kullanıldığı ve kullanılmadığı durumları incelemiş ve her ikisinde de önemli kazanımlar elde ettiklerini belirtmişlerdir [66].

Zhang ve Recker bir serbest yol, bir yanyol ve serbest yola giriş çıkışların olduğu basit bir yol ağında, katılım düzenleyici uygulamanın faydalı olacağı durumları tespit etmeye çalışmışlardır. Belli koşullar gerçekleşmediğinde böyle bir yol yapısında katılım düzenleyicinin ters etkisi olabileceğini gözlemlemişlerdir [67].

Papageorgiou bir makalesinde, büyük ölçekli lineer olmayan sistemler için hat içi kontrol mekanizmalarının özelliklerini inceleyip çok aşamalı bir kontrol mekanizması önermiştir [68].

Bae ve diğerleri iki parçalı makalelerinin ilkinde serbest yol kolidorlarının, serbest yollar ve onlara paralel arterlerden oluştuğunu belirtmiş, literatürde ya serbest yollarda katılım düzenleyicilerin en iyi kontrolünün yada paralel arterlerde ışık sinyallerinin düzenlenmesinin incelendiğini belirtmiş, ikisinin birden ele alınması gerektiğini belirtmişlerdir. Araştırmalarında önce trafik tahmini yapmışlar, daha sonra kontrol parametrelerin bütünsel bir şekilde en iyi hale getirmişlerdir. Bunu yaparken deney tasarımı, yapay sinir ağları ve benzetimli tavlama yöntemlerini kullanmışlardır [69]. Aynı yazarlar makalenin ikinci parçasında araç dinamiklerini de göz önüne alarak bir en iyileme modeli oluşturmuşlardır [70].

Hernandez ve arkadaşları Barselona şehrinde uygulanan iki çok ajanlı trafik yönetim sistemini karşılaştırmış ve buradan yola çıkarak çok ajanlı trafik yönetim sistemlerinin uygulanabilirlik koşullarını incelemişlerdir [71].

Baykal-Gürsoy ve Özbay, makalelerinde kaza olmuş bir yoldaki trafik akışını, bir $M/M/c$ olarak modellemişlerdir. Sistemin denge konumunu incelemiş ve yoldaki araç sayısını ifade etmek için bir tema önermişlerdir. Sonuçları kullanarak kuyruk modellerinin bu gibi durumlarda seyahat süresini hesaplamak için uygun bir yöntem olabileceği sonucuna varmışlardır [72].

Shankar ve Mannering şerit ortalama hızları ve bunların değişimlerinin iç sebeplerini makroskopik boyutta incelemeye çalışmışlardır. Bunu başarabilmek için yapısal denklemler kullanmışlar ve çevresel, zamansal ve akış faktörleri göz önüne almışlardır [73].

Bellemans ve arkadaşları Belçika'daki bir otoyolda katılım düzenleyicinin etkisini araştırmışlardır. İki tip kontrol denemişlerdir. Birisi klasik ALINEA tabanlı kontrolü diğeri de model öngörücü tabanlı katılım düzenleyici kontrolü. Katılımlarda izin

verilen maximum araç sayısı kısıtları da modele dahil edilmiştir. ALINEA'da kuyruk uzunlukları kısıtlar nedeniyle bir salınım maruz kalmıştır. Diğer kontrolde ise bu salınım oluşmamış ve daha iyi bir performans sağlanmıştır, ancak ALINEA hesaplama karmaşıklığı bakımından daha hızlı çalışmaktadır. Bunun için performansından feragat etmek üzere diğer modelde bir takım basitleştirmeler kullanılmış ve uygulanmıştır [74].

Hegyi ve arkadaşları bütünleşik bir trafik akış kontrolü gerçekleştirmek için METANET modelini kullanmışlar ve bunun içine değişken (dinamik) hız sınırı olgusunu da yerleştirmişlerdir. Hız limitinin önemli performans etkileri olduğunu tespit etmişlerdir [75].

Colombo ve Groli trafikte yaşanan dur-kalk olaylarını en aza indirmek için standart olmayan bir varyasyonlar hesabı problemini ele almışlardır. Hiperbolik bir korunum kanunu sistemi verildiğinde, integral ölçüsünün korunum kanununun çözümünün uzay türevine bağlı bir integrasyon ölçüsü olan bir fonksiyonel integrali önermişlerdir. Başlangıç ve verildiği takdirde sınır koşulları olması durumunda bir varlık teoremi ispatlanmıştır [76].

Zhang ve arkadaşları makalelerinde trafiği açıklamak için kullanılan modellerin denklemlerinin doğrusal olmadıklarını ve fazlasıyla karmaşık olduklarını belirtmişler, bununla beraber bazı durumlarda bu modellerin her zaman gerçek verileri takip edemediklerinin tespit edildiğini, mikroskopik modellerin ise daha doğru ve detaylı bilgiler vermelerine rağmen, hesap karmaşıklıklarından ötürü, gerçek zamanlı uygulamalar için uygun olmadıklarını belirtmiş, gene de böyle modellerin uygulanmalarının akıllı araç-otoyol sistemlerinin böyle gerçekçi modellere ihtiyacı olduğunu hatırlatmışlardır. Bu ihtiyaca karşılık olarak 3 katmanlı ve ileri beslemeli bir yapay sinir ağı tasarlamışlar ve yapay sinir ağının yüksek mertebeli modeller için iyi sonuçlar verdiğini ifade etmişlerdir [77].

Jacob ve Abdulhai çalışmalarında trafik kontrolünün, idari birimler değişikçe farklı karar vericiler tarafından sağlanmasının yaratabileceği sorunlardan bahsetmiş, merkezi bir kontrolün bu sorunları aşabileceğini ifade etmişlerdir. Farklı coğrafi konumlardaki yolların merkezileştirilmesinin yanı sıra, trafik kontrol araçlarının

da (trafiğe duyarlı katılım düzenleyici ve değişken mesajlı yönlendiriciler) tek bir merkezden idare edilmesinin faydalarından bahsetmişlerdir. Akıllı taşıma sistemleri bunu amaçlamaktadırlar. Yazarlar makalelerinde böyle bir sistemde en iyi kontrol değerlerini bulabilmek için destekli öğrenme yöntemlerinden Q-öğrenme yöntemini kullanmışlardır. Toronto yakınlarında gerçekleştirilen bir benzetim çalışmasının sonuçlarının ümit verici olduğunu açıklamışlardır [78].

Darbha ve Rajagopal makalelerinde trafik akışıyla ilgili iki tip kararlılıktan söz etmişlerdir. Bunlardan biri konvoy kararlılığı diğeri ise trafik akış kararlılığıdır. İyi kararlılığı, araçların takip mesafelerinin kararlılığı ile ilgili bir konudur. Bir başka deyişle bir konvoydaki bir aracın hızı ve yeri bilgisini kullanarak konvoydaki diğer araçların hız ve yer bilgilerine belli bir hata içinde ulaşabiliyorsak konvooya kararlı bir konvoy diyebiliriz. Bu kararlılıktan bahsetmek için konvooya/konvoydan araç giriş çıkışı olmaması gereklidir. Trafik akış kararlılığı ise yalnızca takip mesafesinin otomatik ayarlandığı ve yoğunluk gelişiminin kararlı olduğu durumlarda sağlanabilir. Yazarlar bu bağımlılığın önemini arz etmiş ve bunun otomatik kontrollü araçlardaki kullanımına işaret etmişlerdir [79].

Herty ve diğerleri kısmi türevli diferansiyel denklemlerle verilmiş olan en iyi kontrol problemlerinin çözümünün işlem yoğunluğu ve hafıza ihtiyaçları açısından zor olduğunu, öyle ki bir ağ yapısı verildiği zaman bunu çözme yollarının konu dışında kaldıklarını ifade etmişlerdir. Makalelerinde yol ağlarının anlık en iyi kontrolü probleminin çözümünü incelemişler, en iyilik koşullarını belirtmişlerdir. Bir çözüm yöntemi önerip bunun bir kontrol olarak ve çalışma zamanı performansını incelemişlerdir [80].

Coifman makalesinde bir yolda kurulmuş olan algılayıcıların belli aralıklarla yerleştirildiğini, böylece arada oluşan sorunların algılanmasının olay yerinde olmayan algılayıcılar tarafından belirlenmesi gerektiği problemine değinmiş ve bunu başarmak için bir yöntem önermiştir. Trafik sıkışıklığını algılamak için yoğun bir çaba harcamaktansa, gevşek trafiği algılamak için basit bir yöntem uygulamıştır. Bu yöntemin mantığında tekil bir aracın ilerleyişinin tespit edilmesi yatmaktadır. Yazar, çalışmanın sonuçlarının trafik yönetimi açısından faydalı olduklarını belirtmiştir [81].

Coifman bir başka makalesinde bir bağlantı üzerindeki tahmini seyahat süresini tek bir algılayıcı aracılığıyla bulmaya çalışmıştır. Yapılan deneyler sonucunda yolda bir gecikme olmadığı sürece yapılan tahminlerin başarılı olduğunu raporlamıştır [82]. Bir başka çalışmasında ise bir şeritte iki algılayıcı arasındaki araç yoğunluğunu ve şeride giren net araç sayısını tahmini olarak bulabilmek için bir çalışma yapmıştır. Bunu başarmak için bir araç yeniden tanımlama yöntemi kullanmış ve diğer yöntemlerle de kullanılabileceğini göstermiştir [83].

Isaksen ve Payne, belli makroskopik modeller kullanarak en iyi kontrol çalışmaları yürüten erken makalelerden birini yazmışlardır [84].

Hu ve diğerleri makalelerinde makroskopik bir modeli baz alarak, katılım düzenleyici ve hız ayarlayıcıları (değişken hız limitleri) kullanarak kontrol edilen bir model için, yinelemeli bir öğrenme yöntemi önermişlerdir. Bu yöntemi kullanmanın, daha az model bilgisi ihtiyacı yaratması ve dış faktörleri reddetme becerisi kazandırması gibi iki temel faydası olduğunu iddia etmişler, bir takım benzetim çalışmalarıyla bunu tastiklemişlerdir [85].

Papageorgiou ve Kotsialos bir inceleme makalelerinde katılım düzenleyicilerin öneminden bahsetmiş, ilk sabit zamanlı uygulamalardan, modern doğrusal olmayan en iyi kontrol problemlerine kadar kabul görmüş yöntemlerin bir özetini vermiş ve büyük ölçekli bir problem üzerinde uygulama yaparak katılım düzenleyicilerin etkisini gözler önüne sermişlerdir [86].

Khoo bir çalışmasında katılım düzenleyici ve eşitlik indisinin bir arada eline alınabildiği bir doğrusal olmayan programlama modeli kurmuştur. Kullandığı trafik akış modeli ise değiştirilmiş hücre geçiş modelidir. Yapılan deneyler sonucunda başlangıç çözümünden daha iyi sonuçlar elde edilmiş ancak eşitlik indislerinin değerlerinin düşük oldukları gözlenmiştir. Aynı zamanda bu indislerin değerlerinin amaç fonksiyonunda uygun cezalar ile cezalandırıldığında daha iyi değerler elde edilebildiği de fark edilmiştir [87].

Kerner ve Konhauser belli bir yoğunluk eşiğini aşmış trafik akışında, keyfi bir şekilde sürati düşük ve yoğunluğu yüksek olan bölgeler, araç öbekleri, oluşabildiğinin gösterildiğini, bu bölgenin bazı parametrelere ve trafiğin başlangıçtaki durumuna

göre yol üzerinde ileriye veya geriye doğru kayabildiğini ifade etmişlerdir. Yaptıkları deneylerin sonucunda bu durağan öbeklerin kinematik davranışlarının ve şekillerinin elde edildiği belirtilmiştir. Bu bulguların "hayalet sıkışıklıklar" kavramını açıklayabileceği ileri sürülmüştür [88]. Kerner daha sonra trafik akışına ilişkin modelleri detaylı olarak incelemiş ve bir çok teoremin temelinde oturan temel diyagram kavramına eleştiriler getirmiş ve bu eleştirilere cevap veren üç fazlı bir trafik akış modeli önermiştir. Bu fazları serbest akış, senkronize akış ve geniş hareketli sıkışma olarak ifade etmiştir. Bu fazlardan senkronize akış fazında, temel diyagram kavramına ters olarak belli bir araç yoğunluğunda tek bir hız değerinin olmadığı, hızın bir aralık içerisinde dağıldığını öne sürmüştür [89]. Kerner bir başka çalışmasında da bu üç fazlı trafik akış modelindeki fazların karakteristiklerini detaylı bir şekilde tespit etmiş, bunların aralarındaki geçişlerin nasıl olduğunu araştırmış, ve üç fazlı modelin yolların kapasitesindeki değişkenliği anlamamıza nasıl yardımcı olabileceğini incelemiştir [90]. Daha sonra Klenov'la birlikte, tüm bu durumları gerçekleyebilmek için mikroskopik teoriden faydalanmıştır [91, 92]. Kerner'in bu trafik akış teorisi bir çok çalışmaya da yön vermiş ve kendisini trafik akış modellemesi konusunda önemli isimlerden birisi haline getirmiştir.

Davis makalesinde iki katılıma olan talebi, serbest yol trafik akışını iyileştirmek için, dağıtılması üzerine iki farklı düzen analiz etmiştir. Bunların ilkinde sürücüler ilk katılımdan katılmak ve serbest yoldan seyretmek yada daha aşağıdan katılıma kadar diğer yollardan ilerleyip oradan serbest yola katılmak arasında, kendilerine verilen seyahat süresi tahminlerine bakarak karar veriyorlar. Bu senaryoda katılımlardaki akış ve seyahat süreleri geri beslemedeki gecikme yüzünden düzensiz bir salınım yapmaktadır. Diğer düzende ise sürücü kararı devre dışı bırakılmıştır. Bir katılımın devamındaki sürat belli bir değerin altına düştüğünde sürücüler daha aşağıdaki katılıma gitmeye zorlanmaktadır. Eğer anayolun aşağısındaki sürat çok düşerse aşağı katılıma ayrılmaya izin verilmemektedir. Bu düzende salınımlar periyodik olmaktadır, ve diğer düzene göre daha iyi anayol akışı sağlamaktadır. Bu düzenlerin sınanması için Kerner ve Klenov'un stokastik üç faz teorisinin kullanıldığı benzetimler yapılmıştır [93].

Cassidy ve Windover çalışmalarında sürücülerin farklı karakterlerde olduğunu ve farklı takip mesafeleri kullandıklarını tespit etmiş ve bunun çeşitli trafik etmenleri nedeniyle

bozulduğunda bir süre sonra tekrar kendi mesafelerine döndüklerini belirtmiştir. Bu tespitlerin trafik modellerini geliştirmekte önem arz edebileceğini öne sürmüşlerdir [94].

Logi ve Ritchi'nin makalesinde, serbest yollar ve ona paralel arterlerde oluşan gündelik dışı sıkışmalarda bir kontrol planı seçebilmesi için trafik operasyon merkezindeki operatöre karar desteği sağlayan bilgi tabanlı ve gerçek zamanlı bir sistemi ele almışlardır. Bu sistemin tekil özelliği operatör ile iletişim halinde çalışmasıdır. Operatöre kontrol planı alternatiflerini ve bu önerilerin nedenlerini ve olası etkilerini operatöre sunar. Sistemin gerçekleşmesi, ve ardından benzetim aracılığıyla test edilmesi, trafik sıkışıklığını azalttığını göstermiştir [95].

Kim ve diğerleri makalelerinde seyahat süresi tahminlerinin sürücüler için trafik durumunu gösteren en doğal ölçülerden biri olduğunu belirtmiş, ancak bu tahminlerin genelde gerçeğe tam uyuşmadığından bahsetmiştir. Bu varyansın kaynağı olarak trafik yoğunluğunu ve hızlarının ölçüldüğü algaçların yerlerinin yanlış olmasından kaynaklandığını ileri sürmüş ve bu yerleri tespit edebilmek için genetik algoritma kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu yolla hatayı % 10 içerisinde tutabilmiş ve bunun diğer yöntemden daha iyi sonuç verdiğini belirtmişlerdir [96].

Payne ve diğerleri, belli kısıtları da göz önüne alan trafiğe duyarlı bir katılım düzenleyici algoritması önermişlerdir [97].

Chiang ve Juang bir konferans bildirilerinde trafik akış kontrolü için merkezi olmayan bir yapı önermişlerdir. Trafik ağını hücrelere bölmüşler ve kontrolü bu hücreler yerinde sağlamaya çalışmışlardır. Yapılan simülasyonlarla sistemlerinin başarısını göstermişlerdir [98].

Zhang ve diğerleri bir makalelerinde koordineli trafiğe duyarlı bir geri beslemeli lineer olmayan bir kontrol tasarlamışlardır. Bu lineer olmayan kontrolün hesabı için, yapay sinir ağları kullanılmıştır. Yapay sinir ağının parametrelerinin belirlenmesi için ise lineer olmayan programlama teknikleri kullanılmıştır. Yapılan simülasyonlar sonucu bu kontrolün, iyi bilinen lineer kuadratik kontrole kıyasla daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir [99].

Kotsialos ve diğerkleri bir çalışmalarında koordineli katılım düzenleyici, rota nerici ve otoyollar arası kontrolleri birleştiren tümleşik bir kontrol sistemi tasarlamışlardır. Bu sistemi bir en iyi kontrol modeli olarak yazmış ve bir olurlu yol algoritmasıyla çözmüşlerdir. Simulasyonlarla bu sistemin etkinliğı gösterilmiştir [100].

Ngoduy ve diğerkleri bir çalışmalarında adaptif seyir kontrolü gereçlerine sahip araçların seyrettiğı bir otoyolda trafik akışını modellemek için çok sınıflı ve gaz kinetik teorisine dayanan bir model önermişlerdir. Böylece yolun ilerisindeki sıkışıklığın uyarısını alan araçlardaki seyir kontrol sistemi, ani frennden kaçınmak için önceden hızın azaltılmasını sağlaması planlanmıştır. Yapılan hesaplamalarla böyle bir sisteme sahip araçların trafiğe katılım oranlarının yolun kapasitesine olan etkisi araştırılmıştır [101].

Banks makalesinde ardışık araçlar arasındaki srenin; yani, ndeki aracın arka tamponuyla, arkadaki aracın n tamponunun aynı noktadan geçmeleri arasındaki srenin mikroskopik ve makroskopik modeller arasındaki köprüye önemli deliller sağlayabileceğini belirtmiştir. Edindiğı gerçek verileri analiz ederek bu srenin yol üzerindeki değişimlerini incelemiş ve bu değişimleri açıklamanın zor olduğu, büyük olasılıkla farklı sürücü hareketleri yüzünden olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca ortama hız ile bu süre arasında bir ilişki bulunmadığını da ifade etmiştir [102].

Olszewski ve diğerkleri bir makalelerinde Singapur'daki bir yolda elde ettikleri kapsamlı verileri kullanarak bir trafik hız-akış modeli önermişlerdir [103].

Cassidy ve Mauch bir makalelerinde bir yolun homojen bir bölümünde bölüm üzerindeki akış ile bölümdeki araç birikimi arasında iyi tanımlanmış bir ilişki olduğunu belirtmişlerdir. Bir yol özelinde ortalama hızlar darboğaza yaklaştıkça artmıştır. Bu bulgu birinci mertebe hidrodinamik teorisinin yeterli olabileceğini ileri sürmüşlerdir [104].

Amini ve diğerkleri bir makalelerinde Tahran'daki bir yoldan alınan verileri kullanarak, önce bu veriler arasındaki ilişkileri belirlemişler ve iki-akışkan modelinin parametrelerini tahmin etmişlerdir [105].

Hou ve diğerkleri bir makalelerinde makroskopik olarak modellenmiş bir trafik akış kontrol problemine yinelemeli öğrenme kontrolü ile yaklaşmışlardır. Bu sistemin

başarısını gösterdikten sonra, yöntemi hata geri besleme ile birleştirerek daha gürbüz hale getirmiş ve sonuçları benzetimler aracılığıyla göstermişlerdir [106].

Günther ve diğerleri bir makalelerinde trafik akışıyla ilgili bir kinematik modeli derinlemesine incelemişlerdir. Bu modelde durağan dağılımlar açık olarak ifade edilebiliyor. Kinetik denklemden elde edilen trafik akış denkleminin çıkışı da verilmiştir. Modeli diğer makroskopik modellerle de kıyas etmişlerdir [107].

Ghods ve diğerleri makalelerinde koordinasyonlu ve tümleşik trafik kontrol modelleri için model öngürülü kontrolün önemli bir araç olduğu ancak büyük ağların gerçek zamanlı kontrolü için hesaplama yolunun olmadığını belirtmişlerdir. Bu makalelerinde bir dağıtık kontrollerin bulunduğu bir oyun teorisi yaklaşımı geliştirmişlerdir. Problemin doğası paralel çalışmaya izin verdiğinden büyük ölçekli problemlerde kullanılması mümkün olan bir yöntem olduğunu belirtmişlerdir [108].

2. KESİKLİ VE DİFERANSİYEL İÇERMELERDE EN İYİ KONTROL

Tezin bu bölümünde, uzun otoyolların modellenmesinde de kullanılabilecek olan çok değişkenli sistemlerin en iyi kontrolü incelenecektir. Önce bir takım tanımlamalar yapıp diferansiyel içirme problemi verilecektir. Diferansiyel içermeler için en iyi kontrol olmanın gerek koşullarını incelemek için önce kesikli sistemler için koşullar, ardından sürekli sisteme kesikli bir yaklaşım probleminin gerek koşulları ve son olarak da bu sistemi, formel limite götürerek sürekli sistemlerin gerek koşulları elde edilecektir. Hepsinden önce bir dışbükey analizle ve küme değerli fonksiyonlarla ilgili bir takım temel bilgiler verilecektir. Benzer çalışmalar Mahmudov'un makalelerinde yapılmıştır [109, 110]. Bu tezde yapılan çalışmalar bu makalelerdeki çalışmalardan, hem içirme ve gerek yeter şart ifadeleri açısından hem de dualite ile ilgili sonuçların verilmiş olması açısından önemli farklar içermektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Burada verilecek olan tanım ve kavramlar dışbükey analizin en temel bilgilerindendir ve bu tanımlar, teoremler ve burada verilmeyen kanıtlar [111–113] kaynaklarında bulunabilir.

$X = \mathbb{R}^n$ n -boyutlu reel vektör uzayını, $\mathbf{x}$ de onun elemanlarını gösterebilir. x^i, y^i sırası ile $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin i . bileşenleri olsunlar. Bu durumda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, bu vektörlerin iç çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanır ve gösterilir.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (2.1)$$

2.1.1 Dışbükey kümeler ve özellikleri

Tanım 2.1. (Dışbükey küme) Bir X vektör uzayının $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ noktalarını birleştiren doğru parçası $\{\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset X$ kümesi olarak tanımlanır. Bir $M \subset X$ kümesi, her $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ noktalarını birleştiren doğru parçalarını içeriyorsa, M bir dışbükey alt kümedir denir.

Önerme 2.1. I keyfi indisler kümesi olsun ve her $i \in I$ için M_i dışbükey olsun. Bu durumda $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ kümesi de dışbükeydir.

Tanım 2.2. X_1 ve X_2 , X vektör uzayının iki alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki kümeye X_1 ve X_2 alt uzaylarının cebirsel toplamı denir.

$$X_1 + X_2 = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \forall \mathbf{x}_1 \in X_1, \forall \mathbf{x}_2 \in X_2\} \subseteq X \quad (2.2)$$

Önerme 2.2. M_1 ve M_2 dışbükey ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ herhangi reel sayılar ise $c_1 M_1 + c_2 M_2$ kümesi de dışbükeydir.

Tanım 2.3. (Dışbükey Bileşim) Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ise, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i$ noktasına $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ noktalarının bir dışbükey bileşimi denir.

Önerme 2.3. Eğer M dışbükey bir küme ve $\mathbf{x}_i \in M$, $i = 1, \dots, m$ ise bu noktaların dışbükey bileşimleri de M kümesine aittir.

Tanım 2.4. (Dışbükey zarf) Herhangi bir $M \subset X$ kümesini kapsayan tüm dışbükey kümelerin kesişimine M kümesinin dışbükey zarfı denir ve $\text{co}M$ ile gösterilir.

Önerme 2.4. $\text{co}M$ kümesi M kümesine ait noktaların tüm dışbükey bileşimlerini içerir.

Teorem 2.1. (Caratheodory) X , $\mathbb{R}^n$ uzayını göstermek üzere, X uzayında $\text{co}M$ kümesinin herhangi bir noktası, M kümesine ait ve sayısı $n + 1$ 'den fazla olmayan noktaların dışbükey bileşimi olarak tanımlanabilir. Bir başka deyişle her bir $\mathbf{x} \in \text{co}M$ için öyle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in M$ noktaları bulunabilir ki $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ ve $r \leq n + 1$ 'dir.

Tanım 2.5. (Euclid uzaklığı) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gibi iki nokta arasındaki Euclid uzaklığı

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} \quad (2.3)$$

ile tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ uzayında Euclidyen birim küre

$$B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\} = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 1\} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Buna bağlı olarak aşağıdaki notasyonlar kullanılır:

1. $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $a + \varepsilon B = \{x : d(x, a) \leq \varepsilon\} = \{a + y : \|y\| \leq \varepsilon\}$
2. $M \in X$ için $M + \varepsilon B = \{x : \exists y \in M, d(x, y) \leq \varepsilon\} = \bigcup \{y + \varepsilon B : y \in M\}$

Tanım 2.6. (İç nokta, açık küme) $x + \varepsilon B \subseteq M$ şartını gerçekleyen bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x noktasına M kümesinin bir iç noktası denir. M kümesinin tüm iç noktalarının oluşturduğu küme $\text{int}M$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$\text{int}M = \{x : \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon B \subseteq M\} \quad (2.5)$$

Eğer M kümesi sadece iç noktalardan ibaretse, M kümesine açık küme denir.

Tanım 2.7. (Yığılma (limit) noktası, bir kümenin kapanışı, kapalı küme) Bir $M \subset X$ kümesi ve bir a noktasını ele alalım. Bu noktanın her civarı a 'dan farklı ve M kümesine ait en az bir nokta içeriyorsa, bir başka deyişle her $\varepsilon > 0$ için

$$((a + \varepsilon B) \cap (M \setminus \{a\})) \neq \emptyset \quad (2.6)$$

ise a noktası M kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. M kümesine tüm yığılma noktalarının eklenmesiyle oluşan kümeye M kümesinin kapanışı denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir. Aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$\overline{M} = \bigcap_{\varepsilon > 0} (M + \varepsilon B) \quad (2.7)$$

Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 2.8. (Afin zarf) $M \subset X$ ve $x_0 \in M$ olsun. $\text{Lin}M$ ile gösterilen küme, $M - x_0$ kümesini içeren tüm alt uzayların kesişimi olan kümedir. M kümesinin afin zarfı ise $\text{Aff}M = \text{Lin}M + x_0$ kümesidir.

Tanım 2.9. (İzafi iç nokta) M dışbükey ve $x \in M$ olsun. Eğer $x + (\text{Lin}M \cap \varepsilon B) \subseteq M$ ise, x noktasına M kümesinin izafi iç noktası denir. M kümesinin tüm izafi iç noktalarından oluşan küme $\text{ri}M$ ile gösterilir. Aşağıdaki formülle ifade edilebilir.

$$\text{ri}M = \{x \in \text{Aff}M : \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \cap \text{Aff}M \subset M\} \quad (2.8)$$

Tanım 2.10. (Dışbükey bir kümenin boyutu) Dışbükey bir M kümesi için $\text{Lin}M$ kümesinin boyutuna M kümesinin boyutu denir ve $\dim M$ ile gösterilir.

Dışbükey M kümesinin boyutu n olduğu durumda, $\text{Aff}M = \mathbb{R}^n$ olduğundan $\text{ri}M = \text{int}M$ olur. Genelde $A_1 \subset A_2$ ise $\text{int}A_1 \subseteq \text{int}A_2$ ve $\bar{A}_1 \subseteq \bar{A}_2$ ifadeleri doğrudur. Ancak $\text{ri}A_1 \subseteq \text{ri}A_2$ gerçekleşmeyebilir. Örneğin, düzlemde A_2 bir kare bölge, A_1 ise bu karenin kenarlarından biri ise $A_1 \subset A_2$ olduğu halde, $\text{ri}A_1 \cap \text{ri}A_2 = \emptyset$.

Önerme 2.5. Herhangi bir dışbükey $M \subset X$ için $\text{ri}\bar{M} = \text{ri}M$ dir.

Tanım 2.11. (Bir kümenin destek fonksiyonu) $W_M(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle, \mathbf{x} \in M\}$ fonksiyonuna M kümesinin destek fonksiyonu denir.

Teorem 2.2. (Ayırma Teoremi) M dışbükey küme ve $\mathbf{x}_0 \notin \bar{M}$ olsun. O zaman öyle $\mathbf{x}^*$ yönü ve $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \leq \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle - \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in M \quad (2.9)$$

Sonuç 2.1. M dışbükey küme ve $\mathbf{x}_0 \notin M$ olsun. O zaman öyle $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ yönü vardır ki, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \leq \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in M \quad (2.10)$$

Sonuç 2.2. Eğer M_1 ve M_2 kümeleri ayrıkça, öyle $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ vardır ki aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir.

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}^* \rangle \leq \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x}_1 \in M_1, \forall \mathbf{x}_2 \in M_2 \quad (2.11)$$

Teorem 2.3. M kümesi kapalı ve dışbükey olsun. Bu durumda $\mathbf{x} \in X$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasıdır.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \leq W_M(\mathbf{x}^*) \quad \forall \mathbf{x}^* \in X \quad (2.12)$$

2.1.2 Dışbükey koniler ve özellikleri

Tanım 2.12. (Dışbükey Koni) Dışbükey bir K kümesinde $\forall \mathbf{x} \in K$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda \mathbf{x} \in K$ oluyorsa, K kümesine dışbükey koni denir.

Tanım 2.13. (Dual Koni) Herhangi bir K dışbükey konisi için K^* dual konisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K^* = \{\mathbf{x}^* \in X^* : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in K\} \quad (2.13)$$

Önerme 2.6. Herhangi bir K konisi için K^* dual konisi kapalıdır.

Kanut. $\mathbf{x}_n^* \in K^*$ ve $\mathbf{x}_n^* \rightarrow \mathbf{x}_0^*$ olsun. O zaman

$$\langle \mathbf{x}_n^*, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in K \quad (2.14)$$

olduğundan, eşitsizlik durumu limitte de geçerli olur. Yani

$$\langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in K \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x}_0^* \in K^* \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu ise K^* kümesinin kapalı olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 2.7. K ve K^* konileri aynı dual konilere sahiptir. Yani $K^* = (\overline{K})^*$ dir.

Önerme 2.8. K kapalı bir koni olsun. Eğer her $\mathbf{x}^* \in K^*$ için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ ise $\mathbf{x} \in K$ dir.

Önerme 2.9. K konisi kapalı ise $K^{**} = K$ dir.

Önerme 2.10. K_1 ve K_2 dışbükey iki koni olsun. $K_1 + K_2$ de dışbükey konidir. Ayrıca $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$ dir.

Önerme 2.11. Kapalı K_1 ve K_2 dışbükey konileri için $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$ dir.

Teorem 2.4. $K_1, K_2, \dots, K_m$ dışbükey konileri verilsin.

$$\bigcap_{i=1}^m K_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*) \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}_i^* \in K_i^* \ i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^* = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Teorem 2.5. $K = \bigcap_{i=1}^m K_i$ olsun.

$$K_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^m \text{int } K_i \right) \neq \emptyset \Rightarrow K^* = \sum_{i=1}^m K_i^* \quad (2.18)$$

Teorem 2.6. $K = \bigcap_{i=1}^m K_i$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermelerden ikisinden yalnız ve yalnız biri geçerlidir.

1. $K^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$
2. $\exists (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*) \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}_i^* \in K_i^* \ i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^* = \mathbf{0}$

Tanım 2.14. (Konilerin Ayrılabilirliği) $\exists (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*) \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}_i^* \in K_i^*,$
 $i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^* = \mathbf{0}$ doğruysa $K_1, K_2, \dots, K_m$ konilerinin ayrılabilme özelliği vardır denir.

Teorem 2.7. M kümesi dışbükey ise $\text{con} M = \{\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1 \in M, \lambda > 0\}$ kümesi de dışbükey konidir ve $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1 \in \text{int} M, \lambda > 0$ ise $\mathbf{x} \in \text{int con} M$ dir.

Teorem 2.8. M_i $i = 1, \dots, k$, dışbükey ve $\mathbf{0} \in M_i, \forall i$ ise $\bigcap_{i=1}^k \text{con} M_i = \text{con} \bigcap_{i=1}^k M_i$ dir.

2.1.3 Fonksiyonlar

Tanım 2.15. (Fonksiyon, epigraf, tanım kümesi) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

1. $\text{dom } f = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) < +\infty\}$
2. $\text{epi } f = \{(\alpha, \mathbf{x}) : \alpha \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
3. $f(\mathbf{x}) = \inf_{\alpha} \{\alpha : (\alpha, \mathbf{x}) \in \text{epi } f\}$

Tanım 2.16. (Dışbükey Fonksiyon) $\text{epi } f$ dışbükey bir küme ise f fonksiyonuna dışbükey fonksiyon denir.

Tanım 2.17. Bir f fonksiyonu hiç $-\infty$ değerini almıyor ve özdeş olarak $+\infty$ 'a eşit değilse, bu fonksiyona has fonksiyon adı verilir.

Önerme 2.12. f has fonksiyonu ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizlik doğru ise dışbükeydir.

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{dom } f, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.19)$$

Önerme 2.13. f dışbükey fonksiyonu için $\text{dom } f$ kümesi dışbükeydir.

Önerme 2.14. I herhangi bir indisler kümesi ve $f_i, i \in I$ dışbükey fonksiyonlar olsun. Şu halde $f(\mathbf{x}) = \sup_i \{f_i(\mathbf{x}), i \in I\}$ fonksiyonu da dışbükeydir.

Teorem 2.9. f türevlenebilen bir fonksiyon olduğunda aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

1. f dışbükey bir fonksiyondur,
2. $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \geq \langle \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, f'(\mathbf{x}_1) \rangle, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{dom } f$
3. $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{p} \in \text{dom } f$ şartını sağladığı sürece $g(\alpha) = \langle \mathbf{p}, f'(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}) \rangle, \alpha$ 'nın azalmayan bir fonksiyonudur.

4. f ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyonsa f'' pozitif yarı belirli bir matristir. f'' çoğu zaman Hessian matrisi olarak da adlandırılır.

Teorem 2.10. f has dışbükey bir fonksiyon ise, $\text{ri dom } f$ kümesinde süreklidir.

Teorem 2.11. Aşağıdaki üç önerme eşdeğerdir.

1. f fonksiyonu kapalıdır, ($\text{epi } f$ kümesi kapalıdır),
2. Her α için seviye kümesi $C_\alpha = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ kapalıdır.
3. f fonksiyonu alttan yarı süreklidir.

Tanım 2.18. (Bir fonksiyonun eşleniği) Herhangi bir f fonksiyonu için

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle - f(\mathbf{x})\} \quad (2.20)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun eşleniği denir.

Önerme 2.15. Dual fonksiyon daima kapalı ve dışbükeydir.

Teorem 2.12. Has dışbükey ve kapalı f fonksiyonu için $f = f^{**}$ 'dir.

Tanım 2.19. (Pozitif homojen fonksiyon) $\lambda > 0$ için $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna pozitif homojen fonksiyon denir.

Açıktır ki, dışbükey homojen fonksiyonların epigrafı konidir.

Teorem 2.13. Kapalı ve dışbükey C^* kümesi için $f(\mathbf{x}) = W_{C^*}(\mathbf{x})$ ise bu fonksiyonun eşleniği aşağıdaki gibidir.

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \delta(\mathbf{x}^* | C^*) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x}^* \in C^* \\ +\infty & \mathbf{x}^* \notin C^* \end{cases} \quad (2.21)$$

Tanım 2.20. (Yönlü türev) Bir f fonksiyonun bir $\mathbf{x}$ noktasındaki $\mathbf{p}$ yönlü türevi aşağıdaki gibidir.

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{p}) - f(\mathbf{x})}{\lambda} \quad (2.22)$$

2.1.4 Subgradyan, subdiferansiyel

Türev, her türlü en iyileme problemi için önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Ancak ne yazık ki en iyileme problemlerinde karşılaştığımız problemlerin hepsi türevlenebilir problemler değildir. Türevlenemeyen fonksiyonlar için en iyilik gerek ve yeter şartları verebilmek için türev dışında ama onun bazı özelliklerini taşıyan farklı tanımlamalar yapmamız gerekir. Subgradyanve subdiferansiyelbu tip tanımlamalardır.

Tanım 2.21. (Subgradyan) f has ve dışbükey bir fonksiyon olsun. $\mathbf{x}_0 \in \text{dom } f$ noktasında $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \quad \forall \mathbf{x}$ ise $\mathbf{x}^*$ noktasına, f fonksiyonunun $\mathbf{x}_0$ noktasındaki subgradyanı denir.

Önerme 2.16. $\mathbf{x}^*$ vektörü ancak ve ancak $f'(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) \geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}^* \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in X$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonun $\mathbf{x}_0$ noktasındaki subgradyanı olur.

Tanım 2.22. (Subdiferansiyel) f fonksiyonunun bir $\mathbf{x}_0$ noktasındaki tüm subgradyanlarından oluşan kümeye f fonksiyonunun $\mathbf{x}_0$ noktasındaki subdiferansiyeli denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\partial f(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}^* : f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in X\} \quad (2.23)$$

Örneğin açıkça görülüyor ki, $f(x) = |x|$ için $\partial f(0) = [-1, 1]$ aralığıdır. Bunu aşağıda gösterelim.

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x}^*, x - 0 \rangle \leq f(x) - f(0) \quad \forall x\} \\ &= \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* x \leq |x| \quad \forall x\} \\ &= \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* x \leq x \quad \forall x \geq 0, \quad \mathbf{x}^* x \leq -x \quad \forall x \leq 0\} \\ &= \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* \leq 1, \quad \mathbf{x}^* \geq -1\} \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Teorem 2.14. $f'(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$, $\mathbf{p}$ nin kapalı bir fonksiyonu ise $\partial f(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$ ve $f'(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x}^*} \{\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}^* \rangle, \quad \mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}_0)\}$ dır.

Teorem 2.15. $\partial f(\mathbf{x})$ kümesi dışbükey ve kapalıdır. Eğer $\mathbf{x}_0$ noktasında f sürekli ise $\partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ ve sınırlıdır.

Teorem 2.16. Eğer $\mathbf{x}_0$ noktasında f türevlenebilir ise $\partial f(\mathbf{x}_0) = \{f'(\mathbf{x}_0)\}$ dır.

Teorem 2.17. f_0 dışbükey ve $\alpha > 0$ olsun. $f(\mathbf{x}) = \alpha f_0(\mathbf{x})$ fonksiyonu için $\partial f(\mathbf{x}_0) = \alpha \partial f_0(\mathbf{x}_0)$ gerçekleşir.

Teorem 2.18. (Moreau-Rockafellar) f_1, f_2 has ve dışbükey fonksiyonlar ve $\mathbf{x}_0 \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$ olsun. O halde $\partial[f_1(\mathbf{x}_0) + f_2(\mathbf{x}_0)] = \partial f_1(\mathbf{x}_0) + \partial f_2(\mathbf{x}_0)$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2.19. f dışbükey ve $\mathbf{x}_0 \in M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ noktasında sürekli olsun. Ayrıca $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) < 0\} \neq \emptyset$ olsun. Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$[\text{con}(M - \mathbf{x}_0)]^* = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & f(\mathbf{x}_0) < 0 \\ -\text{con } \partial f(\mathbf{x}_0) & f(\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Tanım 2.23. $M \subset X$ dışbükey olsun. Eğer $\mathbf{x} \in M$ noktasında

$$1. \mathbf{x} + \lambda \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varphi}(\lambda) \in M, \lambda \geq 0$$

$$2. \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\lambda) = \mathbf{0}$$

şartlarını sağlayan bir $\boldsymbol{\varphi}$ fonksiyonu bulunabilirse, $\bar{\mathbf{x}}$ vektörüne, M kümesinin $\mathbf{x}$ noktasındaki teğet yönü denir.

Tanım 2.24. (Teğet yönler konisi) $\mathbf{x} \in M$ noktasındaki tüm teğet yönlerden oluşan kümeye teğet yönler konisi denir ve $K_M(\mathbf{x})$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K_M(\mathbf{x}) = \left\{ \bar{\mathbf{x}} : \exists \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{x} + \lambda \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varphi}(\lambda) \in M, \lambda \geq 0, \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\lambda) = \mathbf{0} \right\} \quad (2.25)$$

Bu alt bölümde son olarak eşlenik fonksiyon ve subdiferansiyel arasında bir ilişki sağlayan teorem verilecektir.

Teorem 2.20. f dışbükey olsun. Bu durumda bir $\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x})$ şartını sağlayan $\mathbf{x}, \mathbf{x}^*$ noktaları için aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle. \quad (2.26)$$

Kanıt. Eşlenik fonksiyon tanımından şu yazılabilir.

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{z}} \{ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \} \quad (2.27)$$

$$f^*(\mathbf{x}^*) \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

Subdiferansiyel tanımından da şu yazılabilir.

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \quad (2.29)$$

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \quad (2.30)$$

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \quad (2.31)$$

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \geq \sup_{\mathbf{z}} \{ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \rangle - f(\mathbf{z}) \} \quad (2.32)$$

$$f^*(\mathbf{x}^*) \leq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}), \quad (2.33)$$

(2.28) ve (2.33) ifadeleri birleştirildiğinde aranan sonuç elde edilir. $\square$

2.1.5 Küme değerli fonksiyonlar

Tanım 2.25. (Küme değerli fonksiyon, grafik, tanım kümesi, norm) X ve Y sonlu boyutlu Euclid uzayları olsun. $Z = X \times Y$ verildiğinde $\mathbf{x} \in X$ ve $\mathbf{y} \in Y$ iken, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z$ olur. Bir $M \subset X$ ele alalım. Bu küme değerli bir fonksiyonu tanımlar ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\} \quad (2.34)$$

M , fonksiyonun grafiğini temsil eder.

$$\text{gph } \mathbf{F} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})\} \quad (2.35)$$

Bunlara bağlı olarak bir $\mathbf{F}$ küme değerli fonksiyonun tanım kümesi ve $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ kümesinin normu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{dom } \mathbf{F} = \{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \emptyset\} \quad (2.36)$$

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| = \sup_{\mathbf{y}} \{\|\mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})\} \quad (2.37)$$

Tanım 2.26. (Dışbükey fonksiyon) $\text{gph } \mathbf{F}$ dışbükey bir küme ise $\mathbf{F}$ küme değerli fonksiyonuna dışbükey küme değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.27. (Dışbükey değerli fonksiyon) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ kümesi her $\mathbf{x}$ için dışbükey bir küme ise $\mathbf{F}$ küme değerli fonksiyonuna dışbükey değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.28. (Kapalı küme değerli fonksiyon) $\text{gph } \mathbf{F}$ kapalı ise $\mathbf{F}$ küme değerli fonksiyonuna kapalı küme değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.29. (Sınırlı küme değerli fonksiyon) $\exists c : \|F(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$ ise $F(x)$ sınırlıdır.

Tanım 2.30. (Üstten ve alttan yarı sürekli fonksiyon) $0 \in Y$ 'nin her bir U civarı için $0 \in Y$ 'in öyle bir $F(x) \subseteq F(x_0) + U$ ($F(x_0) \subseteq F(x) + U$), $\forall x \in x_0 + V$ şartını sağlayan V civar varsa F 'ya üstten (alttan) yarı sürekli küme değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.31. (Sürekli küme değerli fonksiyon) Üstten ve alttan yarı sürekli F küme değerli fonksiyonuna sürekli küme değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.32. (Lipschitz şartı) Bir Ω kümesinde $\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq \|x_1 - x_2\|$ şartı sağlanıyorsa, F küme değerli fonksiyonuna L sabiti ile Lipschitz şartını sağlıyor denir. A ve B kümelerinde $\rho(A, B)$ Hausdorff uzaklık fonksiyonunu gösterir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{y_1 \in A} \inf_{y_2 \in B} \|y_1 - y_2\|, \sup_{y_2 \in B} \inf_{y_1 \in A} \|y_1 - y_2\| \right\} \quad (2.38)$$

Önerme 2.17. F küme değerli fonksiyonu dışbükey, kapalı ve bir $x_0 \in \text{dom } F$ noktasında $F(x_0)$ kümesi sınırlı olsun. Bu durumda F küme değerli fonksiyonu sınırlıdır.

Teorem 2.21. F fonksiyonu dışbükey, kapalı ve bir $x_0 \in \text{int dom } F$ noktasında $F(x_0)$ kümesi sınırlı olsun. Bu durumda F küme değerli fonksiyonu x_0 noktası civarında Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.33. Aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$H_F(x, y^*) = \sup_y \{ \langle y, y^* \rangle : y \in F(x) \} \quad (2.39)$$

$$\Omega_F(x^*, y^*) = \inf_{(x, y)} \{ \langle x, x^* \rangle - \langle y, y^* \rangle : (x, y) \in \text{gph } F \} \quad (2.40)$$

$F(x) = \emptyset$ ise $H_F(x, y^*) = +\infty$ olarak kabul edilir. Diğer bir yandan (2.39) ve (2.40) denklemlerinden aşağıdaki sonuca varılabilir.

$$\Omega_F(x^*, y^*) = \inf_x \{ \langle x, x^* \rangle - H_F(x, y^*) : x \in X \} \quad (2.41)$$

Buradan da Ω_F fonksiyonunun H_F fonksiyonunun eşleniği olduğu sonucu çıkar. Yani

$$\Omega_F(x^*, y^*) = -[H_F(\cdot, y^*)]^*(-x^*) \quad (2.42)$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 2.18. F dışbükey bir küme değerli fonksiyon olsun. $\lambda > 0$ ise

$$F(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \supseteq \lambda F(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)F(\mathbf{x}_2) \quad (2.43)$$

gerçeklenir. Ayrıca $H_F(\cdot, \mathbf{y}^*)$, dışbükey bir fonksiyondur.

Şimdi bir $\mathbf{z} = \text{gph } F$ noktasındaki $K_F(\mathbf{z})$ teğet yönler konisini inceleyelim.

$$K_F(\mathbf{z}) = \text{con}(\text{gph } F - \mathbf{z}) \quad (2.44)$$

Bu ifade bir başka şekilde yazılmak istenirse

$$K_F(\mathbf{z}) = \{\bar{\mathbf{z}} : \bar{\mathbf{z}} = \lambda(\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}), \lambda > 0, \mathbf{z}_0 \in \text{gph } F\} \quad (2.45)$$

ya da

$$K_F(\mathbf{z}) = \{\bar{\mathbf{z}} : \exists \lambda > 0, \mathbf{z} + \lambda \bar{\mathbf{z}} \in \text{gph } F\} \quad (2.46)$$

şeklinde yazılabilir. Bir diğer önemli küme de şu şekilde tanımlanır.

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \{\mathbf{y} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \rangle = H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)\} \quad (2.47)$$

Bu küme $F(\mathbf{x})$ kümesinde $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \rangle$ iç çarpımına supremumu veren $\mathbf{y}$ vektörlerinin kümesidir.

Tanım 2.34. (Yerel eşlenik küme değerli fonksiyon (YEKF)) $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olmak üzere, aşağıdaki küme değerli fonksiyona yerel eşlenik küme değerli fonksiyon denir.

$$F^*(\mathbf{y}^*; \mathbf{z}) = \{\mathbf{x}^* : (-\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in K_{\text{gph } F}^*(\mathbf{z})\} \quad (2.48)$$

Teorem 2.22. F dışbükey ise aşağıdaki ifade doğrudur.

$$F^*(\mathbf{y}^*; \mathbf{z}) = \begin{cases} \emptyset & \mathbf{y} \notin F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \\ \partial_{\mathbf{x}} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) & \mathbf{y} \in F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \end{cases} \quad (2.49)$$

Teorem 2.23. F küme değerli fonksiyonu dışbükey, kapalı ve sınırlı olsun. Buna bağlı olarak tanımlanan $F^*(\mathbf{y}^*; \mathbf{z})$ fonksiyonu $\{(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}) : \mathbf{y}^* \in Y^*, \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \in \text{int dom } F\}$ kümesinin tüm noktalarında üstten yarı süreklidir.

Önerme 2.19. Aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\mathbf{x}^* \in F^*(\mathbf{y}^*; \mathbf{z}) \iff \Omega_F(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle = H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad (2.50)$$

2.1.6 Dışbükey en küçükleme problemlerinde gerek şartlar

Şimdi, yukarıda ifade ettiğimiz kavramları, en iyileme problemlerinin gerek ve yeter şartlarını açıklamak için kullanalım. Önce kısıtsız en iyileme problemine bakalım. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir dışbükey fonksiyon olsun. Problemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{en küçükle} \quad & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.51)$$

Teorem 2.24. Bir $\tilde{\mathbf{x}}$ noktasının (2.51) probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakidir.

$$\mathbf{0} \in \partial f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (2.52)$$

Kanıt. $\tilde{\mathbf{x}}$, f fonksiyonuna en küçük değeri veren nokta ise

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\geq f(\tilde{\mathbf{x}}) \\ f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) &\geq \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \mathbf{0} &\in \partial f(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Aynı mantığı tersinden işleterek yeter şartı da elde edebiliriz. Kanıt tamamlanmıştır. $\square$

Şimdi buradan yola çıkarak bir M kümesinde en iyi olma için gerek ve yeter şartlara bakalım. Kısıtlı problemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{en küçükle} \quad & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in M \end{aligned} \quad (2.53)$$

Teorem 2.25. Bir $\tilde{\mathbf{x}}$ noktasının (2.53) probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakidir.

$$\partial f(\tilde{\mathbf{x}}) \cap K_M^*(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \emptyset \quad (2.54)$$

Kanıt. Bu teoremi kanıtlamak için (2.53) kısıtlı problemini (2.51) kısıtsız problem haline getireceğiz. Bunun için aşağıdaki karakteristik fonksiyonu tanımlayalım.

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in M \\ +\infty & \mathbf{x} \notin M \end{cases} \quad (2.55)$$

Şimdi bu fonksiyonun subdiferansiyeline bakalım.

$$\begin{aligned}
\partial \delta_M(\mathbf{x}_0) &= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \forall \mathbf{x}\} \\
&= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq f(\mathbf{x}) - \infty \quad \forall \mathbf{x}\} \quad \mathbf{x}_0 \notin M \\
&= \emptyset \\
\partial \delta_M(\mathbf{x}_0) &= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}\} \quad \mathbf{x}_0 \in M \\
&= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M, \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq +\infty \quad \forall \mathbf{x} \notin M\} \\
&= \{\mathbf{x}^* : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}^* \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M\} \\
&= \{\mathbf{x}^* : \langle \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^* \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in K_M(\mathbf{x}_0)\} \\
&= -K_M^*(\mathbf{x}_0)
\end{aligned}$$

Toparlarsak

$$\partial \delta_M(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} -K_M^*(\mathbf{x}_0) & \mathbf{x}_0 \in M \\ \emptyset & \mathbf{x}_0 \notin M \end{cases} \quad (2.56)$$

elde ederiz. Bu tanımlamaları kullanarak (2.53) problemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&\text{en küçük} \quad f(\mathbf{x}) + \delta_M(\mathbf{x}) \\
&\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \quad (2.57)$$

Böylece kısıtlı problemi kısıtsız hale çevirmiş olduk. Bu durumda Teorem 2.53'i kullanarak aşağıdakileri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &\in \partial (f(\tilde{\mathbf{x}}) + \delta_M(\tilde{\mathbf{x}})) \\
\mathbf{0} &\in \partial f(\tilde{\mathbf{x}}) + \partial \delta_M(\tilde{\mathbf{x}}) \\
\mathbf{0} &\in \partial f(\tilde{\mathbf{x}}) - K_M^*(\tilde{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

Bu son ifade ise kesişimin boş olmadığı anlamına gelir. Kanıt tamamlanmıştır. $\square$

Şimdi de m tane kümenin kesişiminde en iyilemeyi inceleyelim. Problemi yazalım. M_i , $i = 1, \dots, m$ dışbükey kümeler olsun. $M = \bigcap_{i=1}^m M_i$ olarak tanımlayalım. f fonksiyonu bir $\mathbf{x}_1 \in M$ noktasında sürekli olsun.

$$\begin{aligned}
&\text{en küçük} \quad f(\mathbf{x}) \\
&\mathbf{x} \in M = \bigcap_{i=1}^m M_i
\end{aligned} \quad (2.58)$$

Teorem 2.26. Bir $\tilde{\mathbf{x}}$ noktasının (2.58) probleminin çözümü olması için, f fonksiyonunun sürekli olduğu bir $\mathbf{x}_1 \in M$ noktasının varolduğu varsayımı altında, gerek koşul aşağıdakidir.

$$\begin{aligned} \exists (\lambda, \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*) \neq \mathbf{0} : \quad \lambda \in \{0, 1\}, \mathbf{x}^* \in \partial f(\tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_i^* \in K_{M_i}^*(\tilde{\mathbf{x}}), \\ \lambda \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^* \end{aligned} \quad (2.59)$$

Böylece ileriki bölümlerde kullanacağımız tanımlamaları tamamlamış oluyoruz. Şimdi dağıtık sistemleri inceleyemeye başlayabiliriz. Burada açıklanacak olan gerek ve yeter şartlar, bir makale olarak kabul edilmiş ve basılmıştır [114]. Burada kullanılacak küme değerli fonksiyonlar ufak farklılıklar içermektedir. Bunları burada tekrar verelim ve kesikli problemi incelemeye başlayalım.

$\mathbb{R}^n$ n boyutlu Öklit Uzayı, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir ikili ve $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ bunların skaler çarpımları olsun. Bir $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ küme değerli fonksiyonunun grafiği $\text{gph } \mathbf{F} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u})\}$, $\mathbb{R}^{3n}$ uzayının dışbükey bir alt kümesi ise, $\mathbf{F}$ dışbükeydir denir. Eğer $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, her $\mathbf{u} \in \text{dom } \mathbf{F} = \{\mathbf{u} : \mathbf{F}(\mathbf{u}) \neq \emptyset\}$ için dışbükeyse, dışbükey değerli denir. Eğer $\text{gph } \mathbf{F}$ kapalıysa, $\mathbf{F}$ kapalıdır denir. Bu bölümde aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır.

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) = \sup_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \{ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle : (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}) \}, \quad \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^* \in \mathbb{R}^n, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}; \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}) : \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle = H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)\}. \quad (2.61)$$

Eğer $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \emptyset$ ise, $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) = -\infty$ olur. Burada (2.60) Hamilton fonksiyonu, (2.61) da argmaksimum fonksiyonu olarak adlandırılır. $\text{ri } A$ kümesi $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin izafi içi olsun. Bu küme A kümesinin, kendi taşıyıcı altuzayına göre kendi iç noktalarından oluşur. A kümesinin bir $\mathbf{u}_0 \in A$ noktasındaki teğet yönler konisi $K_A(\mathbf{u}_0)$, her $\bar{\mathbf{u}} \in \text{ri } K_A(\mathbf{u}_0)$ için bir $K \subseteq K_A(\mathbf{u}_0)$ dışbükey konisi varsa ve orijin civarında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\boldsymbol{\psi}(\bar{\mathbf{u}})$ tanımlı ise, bir yerel çadırdır:

- 1) $\mathbf{u}_0 \in \text{ri } K$, $\text{Lin } K = \text{Lin } K_A(\mathbf{u}_0)$,
- 2) $\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{0}$, giderken, $\boldsymbol{\psi}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}$, $\|\bar{\mathbf{u}}\|^{-1} \mathbf{r}(\bar{\mathbf{u}}) \rightarrow \mathbf{0}$
- 3) Bazı $\varepsilon > 0$ için $\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\psi}(\bar{\mathbf{u}}) \in A$, $\bar{\mathbf{u}} \in K \cap S_\varepsilon(\mathbf{0})$. Burada $S_\varepsilon(\mathbf{0})$, orijin civarındaki ε yarıçapındaki toptur.

$A = \text{gph } \mathbf{F}$ olduğunda, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$ noktasındaki $K_{\text{gph } \mathbf{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teğet yönler konisi $K_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ olarak gösterilecektir.

Dışbükey bir $\mathbf{F}$ için, $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \text{gph } \mathbf{F}$ noktasındaki bu koni aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$K_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) = \{(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2) : \bar{\mathbf{u}} = \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0), \bar{\mathbf{v}}_1 = \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1^0), \quad (2.62)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \lambda(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^0), \lambda > 0, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F} \} \quad (2.63)$$

Tanım 2.35. (Dışbükey YEKF) $\mathbb{R}^{2n}$ 'den $\mathbb{R}^n$ 'e aşağıdaki gibi tanımlanmış bir küme değerli fonksiyon $\mathbf{F}^*$ 'a, dışbükey küme değerli fonksiyon $\mathbf{F}$ 'e $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)$ noktasındaki yerel eşlenik küme değerli fonksiyon (YEKF) denir. Burada $K_{\mathbf{F}}^*(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)$ konisi, $K_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)$ konisinin dual konisidir.

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)) = \{\mathbf{u}^* : (\mathbf{u}^*, -\mathbf{v}_1^*, -\mathbf{v}_2^*) \in K_{\mathbf{F}}^*(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)\} \quad (2.64)$$

Tanım 2.36. (Dışbükey olmayan YEKF) Aşağıdaki gibi tanımlanan bir küme değerli $\mathbf{F}^*$ fonksiyonuna, $\mathbf{F}$ fonksiyonuna, bir $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$ noktasındaki YEKF denir.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2)) &= \{\mathbf{u}^* : H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) - H(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \\ &\leq \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \rangle, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^{3n}\}, (\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2) \in \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Tanım 2.37. Bir $h(\cdot, \mathbf{x})$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \pm\infty$ fonksiyonuna sabit bir $\mathbf{u} \in \text{dom } g = \{\mathbf{u} : |g(\mathbf{u})| < +\infty\}$ noktasındaki bir dışbükey üst yaklaşım (DÜY) denir.

$$(1) \ h(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \geq \Phi(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$$

$$\Phi(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{r}(\cdot)} \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(\mathbf{u} + \lambda \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{r}(\lambda)) - g(\mathbf{u})}{\lambda}, \lambda^{-1} \mathbf{r}(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \downarrow 0. \quad (2.66)$$

Burada dıştaki supremum $\lambda \downarrow 0$ olduğunda $\lambda^{-1} \mathbf{r}(\lambda) \rightarrow 0$ şartını sağlayan tüm $\mathbf{r}(\cdot)$ fonksiyonları arasından alınmıştır.

$$(2) \ h(\cdot, \mathbf{x}) \text{ bir dışbükey kapalı pozitif homojen bir fonksiyon.}$$

Ayrıca, $\partial h(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n : h(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \geq \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^* \rangle, \bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n\}$ fonksiyonu, g 'nin $\mathbf{u}$ 'daki subdiferansiyeli olarak adlandırılır ve $\partial g(\mathbf{u})$ ile gösterilir. $\mathbf{x}$ 'te sürekli olan dışbükey fonksiyonlar için, bu tanım subdiferansiyelin bildiğimiz tanımı ile çakışır.

Önerme 2.20. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dışbükey çok değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) = \begin{cases} \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*), & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in F(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*), \\ \emptyset, & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \notin F(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*). \end{cases} \quad (2.67)$$

Kanıt. Önce $(\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \notin F(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ durumunda YEKF kümesinin boş olduğunu gösterelim. $\mathbf{z}^0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)$ olmak üzere, $F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{z}^0)$ kümesinin bir $\mathbf{u}^*$ diye bir elemanı olduğunu varsayalım. O zaman (2.64) YEKF tanımına göre

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^*, -\mathbf{v}_1^*, -\mathbf{v}_2^*) \in K_F(\mathbf{z}^0) \\ \Rightarrow \langle \bar{\mathbf{z}}, (\mathbf{u}^*, -\mathbf{v}_1^*, -\mathbf{v}_2^*) \rangle & \geq 0 \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in K_F(\mathbf{z}^0) \quad \dots (2.62) \text{ ve } (2.13) \\ \Rightarrow \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}^0, (\mathbf{u}^*, -\mathbf{v}_1^*, -\mathbf{v}_2^*) \rangle & \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \text{gph } F \quad \dots F \text{ dışbükey} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle - \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle - \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle & \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \text{gph } F \\ \Rightarrow \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle + \langle \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle & \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \text{gph } F \\ \Rightarrow \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle - H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) + \langle \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle & \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{dom } F \quad (2.68) \\ & \text{özel olarak } \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \text{ için} \\ \langle \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle & \geq H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \\ \Rightarrow (\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) & \in F(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad \dots (2.60) \text{ ve } (2.61) \end{aligned}$$

Böylece hipotez ile çeliştik. Demek ki $(\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \notin F(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ durumunda YEKF fonksiyonu $F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{z}^0) = \emptyset$ olmalı.

$(\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in F(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ olduğunda $F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{z}^0) = \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ olduğunu göstermek için önce ilk kümenin ikinci kümenin bir alt kümesi olduğunu, sonra da tersinin de doğru olduğunu göstermek gerekir.

Bir $\mathbf{u}^* \in F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$ için (2.68) denkleminde devam edilirse

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle - H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) + H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) & \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{dom } F \quad \dots (2.61) \\ \Rightarrow \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle & \geq H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) - H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad \forall \mathbf{u} \in \text{dom } F \end{aligned}$$

bu şart tüm X uzayına genellenebilir.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{u}^* & \in \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \\ \Rightarrow F^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{z}^0) & \subseteq \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Şimdi içermenin diğer yönünü kanıtlanacaktır.

Bir $\mathbf{u}^0$ noktasında $\mathbf{u}^* \in \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^0}$ verilsin. O zaman subdiferansiyel tanımından başlanarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle \geq H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) - H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad \dots (2.23) \text{ denklemi}$$

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \geq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad \dots (2.61) \text{ denklemi}$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle \geq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle - H(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$$

$(\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ için aşağıdaki yazılabilir

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle \geq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^* \rangle - \langle \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle - \langle \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle \geq \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^* \rangle \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^* \rangle + \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1^0, -\mathbf{v}_1^* \rangle + \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^0, -\mathbf{v}_2^* \rangle \geq 0 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{u}^*, -\mathbf{v}_1^*, -\mathbf{v}_2^*) \in K_{\mathbf{F}}^*(\mathbf{z}_0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^* \in \mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)) \quad (\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)) \supseteq \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (2.70)$$

(2.69) ve (2.70) denklemlerinden

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)) = \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (2.71)$$

Kanıt tamamlanmıştır. □

Tüm bu tanımlamaların ardından sürekli problemin ifadesi verilebilir.

$$\text{en küçük} \quad J(\mathbf{u}(\cdot, \cdot)) = \iint_R g(\mathbf{u}(t, x), t, x) \, dt \, dx + \int_0^1 g_0(\mathbf{u}(1, x), x) \, dx \quad (2.72)$$

$$\text{öyle ki} \quad \nabla \mathbf{u}(t, x) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}(t, x), t, x), \quad 0 < t \leq 1, \quad 0 \leq x < 1, \quad (2.73)$$

$$\text{ve} \quad \mathbf{u}(t, 1) = \boldsymbol{\alpha}(t), \quad \mathbf{u}(0, x) = \boldsymbol{\beta}(x), \quad \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\beta}(1), \quad (2.74)$$

$$R = [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.75)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right). \quad (2.76)$$

Burada $\mathbf{F}(\cdot, t, x) : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ dışbükey küme değerli fonksiyon, $g(\cdot, t, x)$ ve $g_0(\cdot, x)$ sürekli fonksiyonlar, $g : \mathbb{R}^n \times R \rightarrow \mathbb{R}^1$, $g_0 : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ve $\boldsymbol{\alpha}$ ve $\boldsymbol{\beta}$ mutlak sürekli fonksiyonlardır $\boldsymbol{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bu problemi P_C olarak adlandıralım.

Burada problem (2.73), (2.75) sınır koşul probleminin, (2.72) ifadesini en küçükleyen bir çözümünü bulmaktır. Burada kabul edilebilir bir çözüm olarak, hemen her yerde (2.73) içermesini sağlayan, mutlak sürekli ve toplanabilir birinci kısmi türevleri olan fonksiyonlar anlaşılmalıdır. Eğer $\mathbf{u}(\cdot, \cdot) \in L_1(R)$, $L_1(R)$ 'ye ait genelleştirilmiş türevlere sahipse, o zaman $\mathbf{u}(\cdot, x)$ ve $\mathbf{u}(t, \cdot)$, neredeyse tüm x ve t noktalarında sürekli dir.

Önümüzdeki bölümlerde önce kesikli sistemi, daha sonra sürekli sisteme kesikli yaklaşımı inceleyeceğiz.

2.2 Dağıtık Parametrel i ve Kesikli Sistemlerde En İyi Kontrol

Diferansiyel içermelerdeki en iyilik koşullarını elde etmek için önce kesikli içermelerdeki problem incelenecektir. Bu problem aşağıdaki gibi tanımlanabilir ve (P_D) ile gösterilecektir.

$$\text{en küçükle} \quad \sum_{\substack{t=1, \dots, T \\ x=0, \dots, L-1}} g_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x}) \quad (2.77)$$

$$\text{öyle ki} \quad (\mathbf{u}_{t+1,x}, \mathbf{u}_{t,x+1}) \in \mathbf{F}_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x}), \quad (2.78)$$

$$\text{ve} \quad \mathbf{u}_{t,L} = \boldsymbol{\alpha}_{tL}, \quad t \in H_1, \quad \mathbf{u}_{0,x} = \boldsymbol{\beta}_{0x}, \quad x \in L_0 \quad (2.79)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_{0L} = \boldsymbol{\beta}_{0L}).$$

Burada $H_1 = \{0, \dots, T-1\}$, $L_0 = \{0, \dots, L\}$, olmak üzere $g_{t,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ genişletilmiş reel sayılardan değer alan fonksiyonlar, $\mathbf{F}_{t,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ küme değerli bir fonksiyon ve $\boldsymbol{\alpha}_{tL}, \boldsymbol{\beta}_{0x}$ verilmiş sabit vektörlerdir.

$$\{\mathbf{u}_{t,x}\}_{(t,x) \in H \times L_0} = \{\mathbf{u}_{t,x} : (t,x) \in H \times L_0, (t,x) \neq (T,L)\}, \quad H = \{0, \dots, T\}$$

noktalar kümesi; eğer, içermeleri (2.78) ve sınır koşullarını (2.79) sağlıyorsa, (2.77) - (2.79) problemi için bir olurlu çözümdür denir.

$g_{t,x}$, $t = 1, \dots, T$, $x \in L_1$, $L_1 = \{0, \dots, L-1\}$ fonksiyonları ve $\mathbf{F}_{t,x}$ küme değerli fonksiyonları için aşağıdaki hipotezler varsayılır. Bu hipotezlerden ilki dışbükey olmayan problemlerin gerek şartlarını yazabilmek için gerekli varsayımları sıralar.

Hipotez 1. $(H_1)(P_D)$ probleminde; $\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}$ noktaları, en iyi $\{\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ çözümündeki noktalar olduğunda, $\mathbf{F}_{t,x}$, teğet yönler konisi $K_{\mathbf{F}_{t,x}}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1})$ 'yi yerel çadır yapacak şekilde olsun. Ayrıca $g_{t,x}$ fonksiyonlarının $\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}$ noktalarında, $\bar{\mathbf{u}}$ 'ya göre sürekli DÜY'lara $h_{t,x}(\bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x})$ sahip olsun.

Son ifade $\partial g_{t,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}) = \partial h_{t,x}(0, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x})$ subdiferansiyellerinin tanımlı olduğunu gösterir. Şimdi de dışbükey problemlerin tanımını yapalım ve bu tipteki problemlerin incelenebilmesi için gerekli hipotez aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Tanım 2.38. Bir (P_D) problemi, $\mathbf{F}_{t,x}$ dışbükey ve $g_{t,x}$ fonksiyonları has dışbükey ise, dışbükey bir problemidir.

Hipotez 2. (H2) Dışbükey bir (P_D) probleminde, bir olurlu çözüm $\{\mathbf{u}_{t,x}^0\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ için aşağıdaki iki koşuldan birisi sağlansın.

- (a) $(\mathbf{u}_{t,x}^0, \mathbf{u}_{t+1,x}^0, \mathbf{u}_{t,x+1}^0) \in \text{ri gph } \mathbf{F}_{t,x}, (t,x) \in H_1 \times L_1, \mathbf{u}_{t,x}^0 \in \text{ri dom } g_{t,x},$
 $(t,x) \in H_1 \times L_0$
- (b) $(\mathbf{u}_{t,x}^0, \mathbf{u}_{t,x+1}^0, \mathbf{u}_{t+1,x}^0) \in \text{int gph } \mathbf{F}_{t,x}, (t,x) \in H_1 \times L_1, (t,x) \neq (t_0, x_0) ((t_0, x_0) \text{ belirli bir ikili})$ ve $g_{t,x}, \mathbf{u}_{t,x}^0$ noktalarında sürekli.

Şimdi analizin başlangıç noktası sayılabilecek bir teorem verilecektir. Bu teoremle P_D problemi için gerek ve yeter koşullar ortaya konacaktır.

Teorem 2.27. $\mathbf{F}_{t,x}$ dışbükey bir küme değerli fonksiyon olsun ve $g_{t,x}$ fonksiyonları da, bazı $\{\mathbf{u}_{t,x}^0\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ olurlu çözümlerin noktalarında sürekli, dışbükey ve has fonksiyonlar olsun. Bu halde $\{\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ olurlu çözümünün, (P_D) probleminin en iyi çözümü olabilmesi için bir $\lambda = 0$ veya 1 sayısı ile hepsi sıfır olmayan $\{\mathbf{u}_{t,x}^*\}$ ve $\{\boldsymbol{\varphi}_{t,x}^*\}$ ve aşağıdaki şartları sağlayan vektörlerin bulunması gereklidir:

- (1) $\mathbf{u}_{t,x}^* + \boldsymbol{\varphi}_{t,x}^* \in \mathbf{F}_{t,x}^* \left(\mathbf{u}_{t+1,x}^*, \boldsymbol{\varphi}_{t,x+1}^*; (\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1}) \right) - \lambda \partial g_{t,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}),$
 $\partial g_{0,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{0,x}) \equiv \mathbf{0}, \quad (t,x) \in H_1 \times L_1,$
- (2) $-\mathbf{u}_{T,x}^* \in \lambda \partial g_{T,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{T,x}), \quad \boldsymbol{\varphi}_{t,0}^* = \mathbf{0}.$

Hipotez 2 (H2) varsayımı altında, yukarıdaki (1) ve (2) koşulları $\{\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ noktasının en iyi çözüm olması için aynı zamanda yeter koşul olur.

Kanıt. Teoremin ilk kısmının kanıtlanlamsı için en iyi kontrol problemi (2.77) - (2.79) probleminin, gerek koşulları bilinen kümelerin kesişimi üzerinde en iyileme problemine çevrilecektir. Bunun için önce Y ile gösterilen, $((T+1)(L+1)-1)n$

boyutunda bir uzaya ($\mathbf{w} = (\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_T) \in Y$; $\mathbf{u}_t = (\mathbf{u}_{t,0}, \dots, \mathbf{u}_{t,L})$) geçilecek ve bu uzayın alt kümeleri olan $M_{t,x} \subset Y$ kümeleri, ve bu uzaydan genişletilmiş reel sayılara tanımlanan $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanacaktır.

$$M_{t,x} = \{\mathbf{w} : (\mathbf{u}_{t+1,x}, \mathbf{u}_{t,x+1}) \in \mathbf{F}_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x})\} \quad \forall (t,x) \in H_1 \times L_1 \quad (2.80)$$

$$M_{0,x} = \{\mathbf{w} : \mathbf{u}_{0,x} = \beta_{0,x}\} \quad x \in L_1 \quad (2.81)$$

$$M_{t,L} = \{\mathbf{w} : \mathbf{u}_{t,L} = \alpha_{t,L}\} \quad t \in H_1 \quad (2.82)$$

$$G(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{t=1,\dots,T \\ x=0,\dots,L-1}} g_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x}) \quad (2.83)$$

Bu tanımlamalardan faydalananarak (2.77) - (2.79) problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{en küçük} \quad G(\mathbf{w}) \quad (2.84)$$

$$\text{öyle ki} \quad \mathbf{w} \in \bigcap_{(t,x) \in H \times L_0 \setminus \{(T,L)\}} M_{t,x} \quad (2.85)$$

Dikkat edilirse bu haliyle problem (2.58) problemi haline dönüşmüştür. O zaman Teorem 2.26 şartları gereği $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{u}}_{0,0}, \tilde{\mathbf{u}}_{0,1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{T,L-1})$ noktasının en iyi çözüm olması için aşağıdaki yazılabilir.

$$\exists (\lambda, \mathbf{w}^*, \mathbf{w}^*(0,0), \mathbf{w}^*(0,1), \dots, \mathbf{w}^*(T,L-1)) \neq \mathbf{0} : \quad \lambda \in \{0,1\},$$

$$\mathbf{w}^* \in \partial G(\tilde{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{w}^*(t,x)^* \in K_{M_{t,x}}^*(\tilde{\mathbf{w}}), \quad (2.86)$$

$$\lambda \mathbf{w}^* = \sum_{(t,x) \in H \times L_0 \setminus \{(T,L)\}} \mathbf{w}^*(t,x)$$

Şimdi $\mathbf{w}^* \in \partial G(\tilde{\mathbf{w}})$ ve $\mathbf{w}^*(t,x) \in K_{M_{t,x}}^*(\tilde{\mathbf{w}})$ ifadelerinin anlamları incelenmelidir. Önce ilk ifade irdelenecektir.

$$\mathbf{w}^* \in \partial G(\tilde{\mathbf{w}}) \quad (2.87)$$

$$\mathbf{w}^* \in \partial \left[\sum_{\substack{t=1,\dots,T \\ x=0,\dots,L-1}} g_{t,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}) \right] \quad (2.88)$$

$$\mathbf{w}^* \in \sum_{\substack{t=1,\dots,T \\ x=0,\dots,L-1}} \partial g_{t,x}(\tilde{\mathbf{w}}) \quad (2.89)$$

Burada $g_{t,x}(\mathbf{w}) = g_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x})$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonların subdiferansiyelleri (t,x) bileşenleri hariç tüm bileşenleri $\mathbf{0}$ olan, (t,x) bileşenleri ise $\partial g_{t,x}(\mathbf{u}_{t,x})$ kümesinden olan vektörlerdir. Buna göre aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\mathbf{u}_{t,x}^* \in \partial g_{t,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}) \quad t = 1, \dots, T; \quad x = 0, \dots, L-1 \quad (2.90)$$

Şimdi de ikinci ifade, yani $\mathbf{w}^*(t, x) \in K_{M_{t,x}}^*(\tilde{\mathbf{w}})$ ifadesi incelenecektir.

$$\mathbf{w}^*(t, x) \in \{\mathbf{w}^* : \langle \mathbf{w}^*, \tilde{\mathbf{w}} \rangle \geq 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in K_{M_{t,x}}(\tilde{\mathbf{w}})\} \quad (2.91)$$

$$\sum_{\bar{t}, \bar{x}} \langle \mathbf{u}_{\bar{t}, \bar{x}}^*(t, x), \bar{\mathbf{u}}_{\bar{t}, \bar{x}} \rangle \geq 0 \quad (2.92)$$

$M_{t,x}$ kümelerinin tanımına bakıldığında (t, x) indisi için $\mathbf{w} \in M_{t,x}$ vektörlerinde üç bileşen, $(t, x), (t+1, x), (t, x+1)$ bileşenleri dışında tüm bileşenlerin serbest olduğu görülür. Bu yüzden bu üç bileşen dışındaki bileşenlere denk gelen dual konideki vektörlerin bileşenleri sıfır vektör olmalıdırlar, yani,

$$\mathbf{u}_{\bar{t}, \bar{x}}^*(t, x) = \mathbf{0}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \notin \{(t, x), (t+1, x), (t, x+1)\}. \quad (2.93)$$

Bu üç bileşen için aşağıdaki yol izlenebilir.

$$\langle \mathbf{u}_{t,x}^*(t, x), \bar{\mathbf{u}}_{t,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{t+1,x}^*(t, x), \bar{\mathbf{u}}_{t+1,x} \rangle + \langle \mathbf{u}_{t,x+1}^*(t, x), \bar{\mathbf{u}}_{t,x+1} \rangle \geq 0 \quad (2.94)$$

$\tilde{\mathbf{w}} \in K_{M_{t,x}}(\tilde{\mathbf{w}})$ olduğundan

$$(\bar{\mathbf{u}}_{t,x}, \bar{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \bar{\mathbf{u}}_{t,x+1}) \in K_{\text{gph } F_{t,x}}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1}) \quad (2.95)$$

olmalıdır. Buradan aşağıdaki yazılabilir.

$$(\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x), \mathbf{u}_{t+1,x}^*(t, x), \mathbf{u}_{t,x+1}^*(t, x)) \in K_{\text{gph } F_{t,x}}^*(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1}) \quad (2.96)$$

Bu da aşağıdaki ile eşdeğerdir.

$$\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x) \in \mathbf{F}_{t,x}^*(-\mathbf{u}_{t+1,x}^*(t, x), -\mathbf{u}_{t,x+1}^*(t, x); (\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1})) \quad (2.97)$$

Şimdi tekrar (2.86) ifadesindeki eşitliği daha yakından inceleyelim. Eşitlik, her bir alt (t, x) bileşeni için ayrı ayrı yazılsın.

$$\lambda \mathbf{u}_{t,x}^* = \sum_{\bar{x}, \bar{t}} \mathbf{u}_{\bar{t}, \bar{x}}^*(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.98)$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamda sadece üç tane sıfırdan farklı terim vardır. Bunlar $(t, x), (t-1, x), (t, x-1)$ terimleridir. Buna göre yukarıdaki eşitlik tekrar yazılmak istenirse:

$$\lambda \mathbf{u}_{t,x}^* = \mathbf{u}_{t,x}^*(t, x) + \mathbf{u}_{t,x}^*(t-1, x) + \mathbf{u}_{t,x}^*(t, x-1) \quad (2.99)$$

Bu son ifadede indislerin sınır değerlerindeki durumlar göz önüne alınarak detaylı incelendiğinde teoremin sonuçlarına tam olarak varılabilir. $t = T$ için bir içirme

kuralı uygulanmayacağından $\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x)$ ve $\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x-1)$ terimleri bulunmayacaktır. $t = 0$ için amaç fonksiyonunda hiç bir terim bulunmadığından subdiferansiyelsıfır vektörden ibaret olur. $x = 0$ için ise $\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x-1)$ terimi bir anlam ifade etmemektedir, dolayısıyla sıfır vektör alınabilir. (2.97) ve (2.90) denklemleri ve

$$-\mathbf{u}_{t,x}^*(t-1, x) = \mathbf{u}_{t,x}^* \text{ ve } -\mathbf{u}_{t,x}^*(t, x-1) = \boldsymbol{\varphi}_{t,x}^* \quad (2.100)$$

dönüşümleri kullanılırsa teoremin gerektirdiği şartlara varılabilir.

- $$(1) \quad \mathbf{u}_{t,x}^* + \boldsymbol{\varphi}_{t,x}^* \in \mathbf{F}_{t,x}^* \left(\mathbf{u}_{t+1,x}^* \boldsymbol{\varphi}_{t,x+1}^*, (\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t+1,x}, \tilde{\mathbf{u}}_{t,x+1}) \right) - \lambda \boldsymbol{\partial} g_{t,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}),$$
- $$\boldsymbol{\partial} g_{0,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{0,x}) \equiv \mathbf{0}, \quad (t, x) \in H_1 \times L_1,$$
- $$(2) \quad -\mathbf{u}_{T,x}^* \in \lambda \boldsymbol{\partial} g_{T,x}(\tilde{\mathbf{u}}_{T,x}), \quad \boldsymbol{\varphi}_{t,0}^* = \mathbf{0}.$$

Teoremin diğer kısımlarının kanıtı burada verilmeyecektir. □

Şimdi teoremin dışbükey olmayan problem için analogunun ifadesi verilsin.

Teorem 2.28. (P_D) problemi için Hipotez 1 (H1) koşullarını varsayalım. O zaman $\{\tilde{\mathbf{u}}_{t,x}\}_{(t,x) \in H \times L_0}$ çözümünün bu dışbükey olmayan problemin en iyi çözümü olabilmesi için, bir $\lambda = 0$ veya 1 sayısı ve hepsi birden $\mathbf{0}$ olmayan ve Teorem 2.27'deki (1) ve (2) koşullarını sağlayan $\{\mathbf{u}_{t,x}^*\}, \{\boldsymbol{\varphi}_{t,x}^*\}$ vektörlerinin bulunması gereklidir.

Şimdi sürekli problemde istenilen sonuçlara gidecek olan ilk adım atılacak ve sürekli probleme yaklaşık bir kesikli problem alınıp, bu yaklaşık problemde gerek yeter koşullar incelenecektir.

2.3 Sürekli Probleme Kesikli bir Yaklaşım Yapılması ve Yaklaşım Üzerinde En İyi Lenmesi

Sürekli P_C problemine yaklaşım için fark türevleri kullanılacaktır. t - ve x - eksenleri için, R üzerindeki düzgün bir grid üzerindeki bir grid fonksiyonu

$\mathbf{u}_{t,x} = \mathbf{u}_{\delta h}(t, x)$ yardımıyla, sırasıyla δ ve h adım büyüklükleri seçilsin, ve A_1 ve A_2

fark operatörleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A_1 \mathbf{u}(t + \delta, x) = \frac{\mathbf{u}(t + \delta, x) - \mathbf{u}(t, x)}{\delta}; \quad (2.101)$$

$$A_2 \mathbf{u}(t, x + h) = \frac{\mathbf{u}(t, x + h) - \mathbf{u}(t, x)}{h} \quad (2.102)$$

$$t = 0, \dots, 1 - \delta, \quad x = 0, \dots, 1 - h. \quad (2.103)$$

Artık (P_C) modeli yerine kullanabileceğimiz model olan fark-sınır problemi, (P_A) yaklaşık modeli yazılabilir:

$$(P_A) \quad \text{en küçük} \quad J_{\delta h}(\mathbf{u}(\cdot, \cdot)) = \sum_{\substack{t=0, \dots, 1-\delta \\ x=h, \dots, 1-h}} \delta h g(\mathbf{u}(t, x), t, x) \\ + \sum_{x=0, \dots, 1-h} h g_0(\mathbf{u}(1, x), x) \quad (2.104)$$

$$\text{öyle ki} \quad (A_1 \mathbf{u}(t + \delta, x), A_2 \mathbf{u}(t, x + h)) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}(t, x), t, x), \quad (2.105)$$

$$\mathbf{u}(t, 1) = \boldsymbol{\alpha}(t), \quad \mathbf{u}(0, x) = \boldsymbol{\beta}(x)$$

$$t = 0, \dots, 1 - \delta, \quad x = 0, \dots, 1 - h$$

Şimdi (2.104) and (2.105) problemi, (P_D) formundaki bir probleme dönüştürülsün.

Önce $\delta = h$ alınsın ve yeni bir $\mathbf{Q}$ fonksiyonu tanımlansın.

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}, t, x) = \delta \mathbf{F}(\mathbf{u}, t, x) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (2.106)$$

Daha sonra da şu sınır değer problemi, (2.104) ve (2.105) problemi ile ilişkilendirilsin.

$$\begin{aligned} &\text{en küçük} \quad J_{\delta}(\mathbf{u}(\cdot, \cdot)), \\ &\text{öyle ki} \quad (\mathbf{u}(t + \delta, x), \mathbf{u}(t, x + \delta)) \in \mathbf{Q}(\mathbf{u}(t, x), t, x) \quad (2.107) \\ &\mathbf{u}(t, 1) = \boldsymbol{\alpha}(t), \quad \mathbf{u}(0, x) = \boldsymbol{\beta}(x) \end{aligned}$$

Teorem 2.27'e göre, bir $\{\tilde{\mathbf{u}}(t, x)\}, t = 0, \dots, 1 - \delta, x = 0, \dots, 1, (t, x) \neq (1, 1)$ çözümünün en iyi olması için, $\{\mathbf{u}^*(t, x)\}, \{\boldsymbol{\varphi}^*(t, x)\}$ ve bir $\lambda = \lambda_{\delta} \in \{0, 1\}$ sayısının aşağıdaki koşulları da sağlayacak şekilde var olması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t, x) + \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) &\in \mathbf{Q}^*(\mathbf{u}^*(t + \delta, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x + \delta), \\ &(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \tilde{\mathbf{u}}(t + \delta, x), \tilde{\mathbf{u}}(t, x + \delta)), t, x) \quad (2.108) \\ &- \lambda \delta^2 \partial g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(1, x) &\in \lambda \delta \partial g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x), \quad \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = 0, \\ t &= 0, \dots, 1 - \delta, \quad x = 0, \dots, 1 - h. \quad (2.109) \end{aligned}$$

Buradaki mesele (2.108) içermesindeki $\mathbf{Q}^*$ fonksiyonunu $\mathbf{F}^*$ cinsinden ifade etmektir.

Teorem 2.29. $K_{Q(\cdot, t, x)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \text{gph } Q(\cdot, t, x)$ teğet yönler konisi bir yerel çadır olsun. Öyleyse aşağıdaki içermeler eşittir:

- (1) $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2) \in K_{Q(\cdot, t, x)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$,
- (2) $\left(\bar{\mathbf{u}}, \frac{\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta}, \frac{\bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta}\right) \in K_{F(\cdot, t, x)}\left(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}}{\delta}, \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}}{\delta}\right)$

Kanıt. Yerel çadırın tanımına göre, öyle $\mathbf{r}_i(\bar{\mathbf{z}})$, $i = 1, 2$ ve $\mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}}), \bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2)$ fonksiyonları vardır ki $\mathbf{r}_i(\bar{\mathbf{z}})\|\bar{\mathbf{z}}\|^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$ and $\mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}})\|\bar{\mathbf{z}}\|^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$ şartlarının yanında, yeterince küçük $\bar{\mathbf{z}} \in K$, $K \subseteq \text{ri } K_{F(\cdot, t, x)}(\mathbf{z}), \mathbf{z} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ için aşağıdaki şartı da sağlarlar.

$$(\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{r}_1(\bar{\mathbf{z}}), \mathbf{v}_2 + \bar{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{r}_2(\bar{\mathbf{z}})) \in Q(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}}), t, x). \quad (2.110)$$

(2.106) denklemi göz önüne alındığında, aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\left(\frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}}{\delta} + \frac{\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta} + \frac{\mathbf{r}_1(\bar{\mathbf{z}}) - \mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}})}{\delta}, \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}}{\delta} + \frac{\bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta} + \frac{\mathbf{r}_2(\bar{\mathbf{z}}) - \mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}})}{\delta}\right) \in F(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{r}(\bar{\mathbf{z}}), t, x) \quad (2.111)$$

Bu, $K_{F(\cdot, t, x)}\left(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}}{\delta}, \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}}{\delta}\right)$ konisin $\text{gph } F(\cdot, t, x)$ kümesine bir yerel çadır olduğu ve aşağıdaki ifadeyi yazabileceğimiz anlamına gelir.

$$\left(\bar{\mathbf{u}}, \frac{\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta}, \frac{\bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{u}}}{\delta}\right) \in K_{F(\cdot, t, x)}\left(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}}{\delta}, \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}}{\delta}\right) \quad (2.112)$$

İzlenen adımlar ters yönde takip edilirse, (2.112) denkleminde aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2) \in K_{Q(\cdot, t, x)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (2.113)$$

Sonuç olarak, (2.112) ve (2.113) içermeleri eşitir. □

Teorem 2.30. Teorem 2.29'in şartlarının karşılandığını varsayalım. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (a) $\mathbf{u}^* \in Q^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), t, x)$,
- (b) $\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*}{\delta} \in F^*\left(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \left(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}}{\delta}, \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}}{\delta}\right), t, x\right)$.

Kanıt. Önce teoremin (a) $\Rightarrow$ (b) kısmı gösterilsin. YEKF tanımı gereği (a) koşulu

$$\langle \bar{u}, u^* \rangle - \langle \bar{v}_1, v_1^* \rangle - \langle \bar{v}_2, v_2^* \rangle \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) \in K_{\mathcal{Q}(\cdot, t, x)}(u, v_1, v_2) \quad (2.114)$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilsin.

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, p^* \rangle - \left\langle \frac{\bar{v}_1 - \bar{u}}{\delta}, v_1^* \right\rangle - \left\langle \frac{\bar{v}_2 - \bar{u}}{\delta}, v_2^* \right\rangle &\geq 0, \\ (p^*, v_1^*, v_2^*) &\in K_{F(\cdot, t, x)}^* \left(u, \frac{v_1 - u}{\delta}, \frac{v_2 - u}{\delta} \right) \end{aligned}$$

veya

$$\langle \bar{u}, \delta p^* + v_1^* + v_2^* \rangle - \langle \bar{v}_1, v_1^* \rangle - \langle \bar{v}_2, v_2^* \rangle \geq 0 \quad (2.115)$$

p^* belirlenebilir. (2.114) ile (2.115) karşılaştırıldığında, $u^* = \delta p^* + v_1^* + v_2^*$ sonucuna varılır. Buradan da (b) içermesinin doğruluğuna, yani (a) $\Rightarrow$ (b) olduğu çıkar. Benzer bir şekilde (b) $\Rightarrow$ (a) da kanıtlanabilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Burada dikkat edilmesi gereken iki husus bulunmaktadır. İlki teorem 2.30'in (b) şartında YEKF F^* fonksiyonunun ilk iki argümanına göre pozitif homojen bir fonksiyon olduğu hesaba katılmıştır. Bir diğeri ise, eğer F fonksiyonu dışbükey ise, o zaman Önerme 2.20'a göre, Teorem 2.29'deki içermelerin eşdeğerliği bir başka yolla, $\mathcal{Q}(u, t, x)$ ve $F(u, t, x)$ fonksiyonlarına destek fonksiyonunun subdiferansiyellerini hesaplamak yoluyla da gösterilebilir. Şimdi Teorem 2.30'e göre, (2.108) aşağıdakini gerektirir:

$$\begin{aligned} &\frac{u^*(t + \delta, x) + \varphi^*(t, x + \delta) - u^*(t, x) - \varphi^*(t, x)}{\delta} \\ &\in F^* \left(u^*(t + \delta, x), \varphi^*(t, x + \delta), \right. \\ &\quad \left. (\tilde{u}(t, x), A_1 \tilde{u}(t + \delta, x), A_2 \tilde{u}(t, x + \delta)), t, x \right) \\ &\quad - \lambda \delta \partial g(\tilde{u}(t, x), t, x), \quad t, x = 0, \dots, 1 - \delta, \end{aligned} \quad (2.116)$$

Yukarıda üzerinde durulan hususlar da dikkate alınarak ve $\frac{\varphi^*(t, x)}{\delta}$ ve $\frac{u^*(t, x)}{\delta}$ ifadeleri, sırasıyla tekrar $\varphi^*(t, x)$ ve $u^*(t, x)$ olarak gösterilecek olursa, (2.109) ve (2.116) denklemlerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} &-A_1 u^*(t + \delta, x) - A_2 \varphi^*(t, x + \delta) \\ &\in F^* (u^*(t + \delta, x), \varphi^*(t, x + \delta), A_1 \tilde{u}(t + \delta, x), A_2 \tilde{u}(t, x + \delta), t, x) \\ &\quad - \lambda \partial g(\tilde{u}(t, x), t, x) \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0} \quad -\mathbf{u}^*(1, x) \in \lambda \partial g_0(\mathbf{u}(1, x), x), \quad t, x = 0, \dots, 1 - \delta. \quad (2.118)$$

Son olarak şu teorem ispatlanacaktır.

Teorem 2.31. F fonksiyonunun dışbükey olduğunu ve g ve g_0 fonksiyonlarının x argümanına göre has dışbükey ve bazı $\{\mathbf{u}^0(t, x)\}$, $t, x = 0, \delta, \dots, 1$, $(t, x) \neq (1, 1)$ olurlu rotaları üzerindeki noktalarda sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Eğer $\{\tilde{\mathbf{u}}(t, x)\}$ rotası (P_A) problemi için bir en iyi çözüm ise, hepsi aynı anda sıfır olmayan ve (2.117) ve (2.118) koşullarını sağlayan $\lambda = \lambda_\delta \in \{0, 1\}$ sayısı ve $\{\mathbf{u}^*(t, x)\}$ ve $\{\boldsymbol{\varphi}^*(t, x)\}$ vektörlerinin varolması gerekir. Hipotez 2 (H2) altında, (2.117) ve (2.118) koşulları aynı zamanda $\{\tilde{\mathbf{u}}(t, x)\}$ çözümünün en iyi olması için yeter şartlardır.

Burada şuna dikkat etmek gerekir ki, Teorem 2.28'de olduğu gibi, dışbükey olmayan problem (2.104), (2.105) için (H1) Hipotez 1 altında (2.117) ve (2.118) ilişkileri en iyilik için gerek koşuldur.

2.4 Sürekli (P_C) Problemi için Yeter Koşullar

Bu bölümde, (P_C) sürekli probleminin en iyiliği için bir yeter koşul geliştirilecektir. $\lambda = 1$ olarak belirlenip, (2.117) ve (2.118) denklemlerinde δ sıfıra giderken formal limite geçildiğinde, aşağıdaki sonuca ulaşılır.

- (i) $-\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x) \in \mathbf{F}^*(\boldsymbol{\psi}(t, x), \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) - \partial g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x)$, hemen her yerde.

$$\boldsymbol{\psi}(t, x) = (\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x) = \frac{\partial \mathbf{u}^*(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)}{\partial x} \quad (2.119)$$

- (ii) $\boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0} \quad -\mathbf{u}^*(1, x) \in \partial g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x)$. Şimdi YEF $\mathbf{F}^*$ 'ın boş olmamasını sağlayacak koşullar formüle edilmelidir (bk. Önerme 2.20):

- (iii) hemen her yerde $\nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \in \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x), t, x)$

Teorem 2.32. $g(\mathbf{u}, t, x)$ ve $g_0(\mathbf{u}, x)$ fonksiyonlarının sürekli ve $\mathbf{u}$ argümanına göre dışbükey ve $\mathbf{F}(\cdot, (t, x))$ fonksiyonunun tüm (t, x) değerleri için dışbükey olduğu varsayılınsın. Bu durumda bir $\tilde{\mathbf{u}}(t, x)$ çözümünün en iyi olması için, (i)-(iii) şartlarını da sağlayan $\boldsymbol{\varphi}^*(t, x)$, ve $\mathbf{u}^*(t, x)$ çözümlerinin var olması yeterlidir.

Kanıt. Önerme 2.20'e göre

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), t, x) = \partial_u H(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, t, x), \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, t, x) \quad (2.120)$$

Diğer yandan, Moreau-Rockafellar teoremine göre [5, 10, 115], (i) şartından dolayı aşağıdakini yazılabilir.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x) &\in \partial_u [H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x) - g_1(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x)], \\ (t, x) &\in R, \quad g_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, t, x) \equiv g(\mathbf{u}, t, x). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Dolayısıyla, son ilişki şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x) - g(\mathbf{u}(t, x), t, x) - H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x) \\ + g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) \leq -\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle \end{aligned} \quad (2.122)$$

Sonuçta bu eşitsizlik aşağıdakini gerektirir:

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x)), \boldsymbol{\Psi}(t, x) \rangle - g(\mathbf{u}(t, x), t, x) + g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) \\ \leq -\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Bir takım dönüşümlerden sonra şu elde edilir:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}(t, x), t, x) - g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) &\geq \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \mathbf{u}^*(t, x) \rangle \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Phi}^*(t, x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Bunlara paralel olarak (ii) kısmındaki ikinci şarta göre

$$g_0(\mathbf{u}(1, x), x) - g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x) \geq -\langle \mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u}(1, x) - \tilde{\mathbf{u}}(1, x) \rangle \quad (2.125)$$

(2.124) ilişkisinin R tanım kümesi üzerinde, (2.125) ilişkisinin de $[0, 1]$ aralığı üzerinde integrali alınıp birbirine eklendiğinde ise şu sonuca varırız.

$$\begin{aligned} &\iint_R [g(\mathbf{u}(t, x), t, x) - g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x)] dt dx + \int_0^1 [g_0(\mathbf{u}(1, x), x) - g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x)] dx \\ &\geq \iint_R \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \mathbf{u}^*(t, x) \rangle dt dx + \iint_R \frac{\partial}{\partial x} \langle \boldsymbol{\Phi}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle dt dx \\ &\quad - \int_0^1 \langle \mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u}(1, x) - \tilde{\mathbf{u}}(1, x) \rangle dx \end{aligned} \quad (2.126)$$

$\mathbf{u}(\cdot, \cdot)$ ve $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$ çözümleri (P_C) problemi için olurludurlar, yani

$$\mathbf{u}(0, x) = \tilde{\mathbf{u}}(0, x) = \beta(x), \mathbf{u}(t, 1) = \tilde{\mathbf{u}}(t, 1) = \alpha(t) \quad (2.127)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu yüzden aşağıdaki kolayca yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \iint_R \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \mathbf{u}^*(t, x) \rangle dt dx \\ &= \int_0^1 \langle \mathbf{u}^*(1, x), \tilde{\mathbf{u}}(1, x) - \mathbf{u}(1, x) \rangle dx, - \int_0^1 \langle \mathbf{u}^*(0, x), \mathbf{u}(0, x) - \tilde{\mathbf{u}}(0, x) \rangle dx \\ &= \int_0^1 \langle \mathbf{u}^*(1, x), \tilde{\mathbf{u}}(1, x) - \mathbf{u}(1, x) \rangle dx \end{aligned} \quad (2.128)$$

ve

$$\begin{aligned} & \iint_R \frac{\partial}{\partial x} \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle dt dx \\ &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 1), \mathbf{u}(t, 1) - \tilde{\mathbf{u}}(t, 1) \rangle dt, - \int_0^1 \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0), \mathbf{u}(t, 0) - \tilde{\mathbf{u}}(t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0), \tilde{\mathbf{u}}(t, 0) - \mathbf{u}(t, 0) \rangle dt \end{aligned} \quad (2.129)$$

Ayrıca (ii) koşulu nedeniyle $\boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0}$ ve bu yüzden tüm olurlu çözümler $\mathbf{u}(t, x)$, $(t, x) \in R$ için

$$\int_0^1 \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0), \mathbf{u}(t, 0) - \tilde{\mathbf{u}}(t, 0) \rangle dt = 0. \quad (2.130)$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2.3. Teorem 2.32'in varsayımlarının yanı sıra, $\mathbf{F}(\cdot, t, x)$ fonksiyonunun kapalı olduğunu düşünülürse, Teorem 2.32'deki şart, Hamilton fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

(a) $-\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x) \in \partial_{\mathbf{u}} H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x), t, x) - \partial g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x)$ hemen her yerde

(b) $\nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \in \partial_{\mathbf{u}} H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x), t, x)$ hemen her yerde.

Kanıt. Önerme 2.20'e göre,

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), t, x) = \partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*, t, x), \quad (2.131)$$

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*, t, x), \quad \mathbf{v}^* = (\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*). \quad (2.132)$$

Diğer taraftan Grace'in makalesindeki Teorem 3.11'den de kolayca görülebileceği gibi [8], $\partial_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*, t, x) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*, t, x)$ eşitliği sağlanır. Bu yüzden (a),(b) şartları, Teorem 2.32'teki (i), (ii) şartlarına denktir. $\square$

Teorem 2.33. $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$, dışbükey olmayan (P_C) problemi için olurlu çözümler, $\{\mathbf{u}^*(\cdot, \cdot), \boldsymbol{\varphi}^*(\cdot, \cdot)\}$ aşağıdaki şartları sağlayan olurlu çözümler olsun.

- (i) $-\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \in \mathbf{F}^*(\boldsymbol{\Psi}(t, x), (\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, x)), t, x)$ hemen her yerde
- (ii) $g(\mathbf{u}, t, x) - g(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x) \geq \langle \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle, \forall \mathbf{u}$,
 $g_0(\mathbf{u}, x) - g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x)) \geq \langle -\mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(1, x) \rangle, \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = 0, \forall \mathbf{u}$
- (iii) $\langle \boldsymbol{\Psi}(t, x), \nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle = H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x)$

Bu durumda $\tilde{\mathbf{u}}(t, x)$ çözümü en iyidir.

Kanıt. Tanım 2.36 ve teoremin (i) şartı gereği aşağıdaki yazılabilir.

$$\begin{aligned} & H(\mathbf{u}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x) - H(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \boldsymbol{\Psi}(t, x), t, x) \\ & \leq -\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x) - \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.133)$$

(iii) şartını kullanılarak, bu eşitsizliğin aşağıdakini gerektirdiği görülür.

$$\langle \nabla(\mathbf{u}(t, x) - (\tilde{\mathbf{u}}(t, x))), \boldsymbol{\Psi}(t, x) \rangle \leq -\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}(t, x) - \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle. \quad (2.134)$$

Bir başka deyişle

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \mathbf{u}^*(t, x) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x), \mathbf{u}^*(t, x) \rangle \\ & \leq \langle \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) - \tilde{\mathbf{u}}(t, x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Sonra teoremin keyfi $\mathbf{u}(\cdot, \cdot)$ olurlu çözümü için verilen (ii) şartı kullanılarak, (2.124) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilebilir. Daha sonra Teorem 2.32 için izlenen yolun aynısı izlenerek $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$ çözümünün en iyi olduğu sonucuna varılır. $\square$

Bu alt bölümde iki örnek için gerek yeter koşullar incelenecektir.

2.4.1 Doğrusal kontrol

Aşağıdaki gibi bir problemi ele alalım.

$$\begin{aligned}
 &\text{en küçük} && J(\mathbf{u}(t, x)), \\
 &\text{öyle ki} && \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} = A_1 \mathbf{u}(t, x) + B_1 \mathbf{w}(t, x) \\
 & && \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial x} = A_2 \mathbf{u}(t, x) + B_2 \mathbf{w}(t, x), \quad \mathbf{w}(t, x) \in V \\
 & && \mathbf{u}(t, 1) = \boldsymbol{\alpha}(t), \quad \mathbf{u}(0, x) = \boldsymbol{\beta}(x)
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

Burada A_1 ve A_2 , $n \times n$ kare matrisler, B_1 ve B_2 , $n \times r$ matrisler, $V \subset R^r$ dışbükey kapalı bir küme, g ve g_0 ise $\mathbf{u}$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlardır. Burada öyle bir $\tilde{\mathbf{w}}(t, x) \in V$ kontrol parametresi bulunmalıdır ki, ona tekabül eden $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$ çözümü, $J(\mathbf{u}(\cdot, \cdot))$ değerini en küçüklesin. Bu durumda

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : \exists \mathbf{w} \in V, \mathbf{v}_1 = A_1 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 = A_2 \mathbf{u} + B_2 \mathbf{w}\} \tag{2.137}$$

Basit işlemlerle şu elde edilebilir:

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) = \begin{cases} (A_1^* \mathbf{v}_1^* + A_2^* \mathbf{v}_2^*), & -B_1^* \mathbf{v}_1^* - B_2^* \mathbf{v}_2^* \in K_V^*(\mathbf{w}), \\ \emptyset, & -B_1^* \mathbf{v}_1^* - B_2^* \mathbf{v}_2^* \notin K_V^*(\mathbf{w}) \end{cases} \tag{2.138}$$

Burada $\mathbf{v}_1 = A_1 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{w}$, $\mathbf{v}_2 = A_2 \mathbf{u} + B_2 \mathbf{w}$ olur. Daha sonra Teorem 2.32'yi kullanarak şu ilişkiler elde edilir:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x) = A_1^* \mathbf{u}^*(t, x) + A_2^* \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) - g'(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x), \tag{2.139}$$

$$\langle \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}(t, x), -B_1^* \mathbf{u}^*(t, x) - B_2^* \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in V \tag{2.140}$$

$$-\mathbf{u}^*(1, x) = g'_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x), \quad \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = 0 \tag{2.141}$$

(2.140) şu formda da yazılabilir.

$$\langle B \tilde{\mathbf{w}}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x) \rangle = \sup_{\mathbf{w} \in V} \langle B \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}(t, x) \rangle, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{2.142}$$

Bu sonuç, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Teorem 2.34. $\tilde{\mathbf{w}}(t, x)$ kontrolüne tekabül eden $\tilde{\mathbf{u}}(t, x)$ çözümü, (2.139), (2.141), (2.142) şartlarını sağlayan bir çözüm var ise $J(\mathbf{u}(\cdot, \cdot))$ değerini en küçükler.

2.4.2 Sınırlı türevli kontrol

Şimdi bir başka örnek ele alınacaktır.

$$\begin{aligned} \text{en küçükle} \quad & J(\mathbf{u}(t, x)) \\ \text{öyle ki} \quad & \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ & \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial x} = C\mathbf{u}(t, x) + \mathbf{w}_0(t, x), \quad \mathbf{w}_0(t, x) \in P \subset \mathbb{R}^n, \\ & \mathbf{u}(t, 1) = \boldsymbol{\alpha}_0(t), \quad \mathbf{u}(0, x) = \boldsymbol{\beta}_0(x), \end{aligned}$$

Burada Ω ve P kapalı dışbükey kümeler, C , $n \times n$ bir kare matris, g ve g_0 , $\mathbf{u}$ üzerinde sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Burada amaç, öyle bir $\tilde{\mathbf{w}}_0(t, x) \in P$ kontrol fonksiyonu bulmak ki, onunla ilişkili çözüm $J(\mathbf{u}(t, x))$ fonksiyonunu en küçüklesin.

Buna göre (2.72)-(2.75) problemine göre $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$, olmaktadır. Son ifadede $\mathbf{F}_1(\mathbf{u}) = \{\Omega : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$, ve $\mathbf{F}_2(\mathbf{u}) = C\mathbf{u}(t, x) + P$ olarak belirlenmiştir. Hamilton fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = H_{\mathbf{F}_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1^*) + H_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2^*), \quad \mathbf{v}^* = (\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (2.143)$$

Burada $H_{\mathbf{F}_i}$ ($i = 1, 2$) ile $\mathbf{F}_i$ kümelerinin Hamilton fonksiyonları ifade edilmektedir. Şimdi Önerme 2.20 ve Moreau-Rockafellar teoremine bağlı olarak (2.143) denkleminin aşağıdakini gerektirdiği söylenebilir.

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \mathbf{F}_1^*(\mathbf{v}_1^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)) + \mathbf{F}_2^*(\mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (2.144)$$

yani küme değerli fonksiyonların kartezyen çarpımı için ifade edilen YEKF, küme değerli fonksiyonlar için ifade edilen YEKF ların bir toplamıdır. Ancak,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^*(\mathbf{v}_1^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)) &= \begin{cases} \mathbf{0}, & -\mathbf{v}_1^* \in K_{\Omega}^*(\mathbf{v}_1), \\ \emptyset, & -\mathbf{v}_1^* \notin K_{\Omega}^*(\mathbf{v}_1) \end{cases} \\ \mathbf{F}_2^*(\mathbf{v}_2^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)) &= \begin{cases} C^*\mathbf{v}_2^*, & -\mathbf{v}_2^* \in K_P^*(\mathbf{w}_0), \\ \emptyset, & -\mathbf{v}_2^* \notin K_P^*(\mathbf{w}_0) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.145)$$

olduğundan şu yazılabilir:

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{v}^*, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = C^*\mathbf{v}_2^*; \quad \mathbf{v}_1^* \in K_{\Omega}^*(\mathbf{v}_1), \quad -\mathbf{v}_2^* \in K_P^*(\mathbf{w}_0) \quad (2.146)$$

Bu durumda Teorem 2.32’de verilen (i)-(iii) yeter koşulları, bu örnek için şu şartları verir.

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x) = C^* \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) - g'(\tilde{\mathbf{u}}(t, x), t, x), \quad (2.147)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{w}}_0(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) \rangle = \sup_{\mathbf{w}_0 \in P} \{ \langle \mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) \rangle \}, \quad (2.148)$$

$$-\mathbf{u}^*(1, x) = g'_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x), \quad \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0}. \quad (2.149)$$

2.5 (P_C) Probleminin Dualine Dair

Homojen sınır koşulları olan dışbükey (P_C) problemini ele alınsın. Buna göre

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\beta}(x) \equiv \mathbf{0}. \quad (2.150)$$

Aşağıdaki gibi bir gösterim olsun.

$$\begin{aligned} J_*(\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)) &= \iint_R [\Omega(\mathbf{u}^*(t, x) - \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x), t, x) \\ &\quad - g^*(\mathbf{u}^*(t, x), t, x)] dx dt - \int_0^1 g_0^*(-\mathbf{u}^*(1, x), x) dx \end{aligned} \quad (2.151)$$

Burada,

$$\Omega(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, t, x) = \inf \{ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}^* \rangle : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \operatorname{gph} \mathbf{F}(\cdot, t, x) \} \quad (2.152)$$

$$= \inf_{\mathbf{u}} \{ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle - H(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*, t, x) \}, \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{v}^* = (\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) \quad (2.153)$$

ve

$$g^*(\mathbf{u}^*, t, x) = \sup_{\mathbf{u}} \{ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle - g(\mathbf{u}, t, x) \} \quad (2.154)$$

$$g_0^*(\mathbf{u}^*, x) = \sup_{\mathbf{u}} \{ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \rangle - g_0(\mathbf{u}, x) \} \quad (2.155)$$

$\mathbb{R}^n$ ’de tanımlı, sırasıyla $g(\cdot, t, x)$ ve $g_0(\cdot, x)$ fonksiyonlarına eşlenik, kapalı dışbükey fonksiyonlar olsun. O zaman en büyüğü belirleme problemi

$$\begin{aligned} (P_{DL}) \quad & \text{en büyükle} \quad J_*(\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)), \\ & \mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x) \\ & \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0}, -\mathbf{u}^*(1, x) \in \partial g_0(\tilde{\mathbf{u}}(1, x), x) \end{aligned} \quad (2.156)$$

(P_C) problemine dual problem olarak adlandırılır.

Burada $\mathbf{u}^*(\cdot, \cdot)$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\cdot, \cdot)$ fonksiyonlarının $R = [0, 1] \times [0, 1]$ kümesinde mutlak sürekli oldukları varsayılmıştır.

Teorem 2.35. (P_C) ve dual (P_{DL}) problemlerine, sırasıyla tüm $\mathbf{u}(\cdot, \cdot)$ ve $\{\mathbf{u}^*(\cdot, \cdot), \boldsymbol{\varphi}^*(\cdot, \cdot)\}$ olurlu çözümleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$J(\mathbf{u}(t, x)) \geq J_*(\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)) \quad (2.157)$$

Kanıt. Ω ve eşlenik g^* , g_0^* fonksiyonları tanımlarına göre açıktır ki,

$$\begin{aligned} & \Omega(\mathbf{u}^*(t, x) - \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x), \boldsymbol{\psi}(t, x), t, x) \\ & \leq \langle \mathbf{u}^*(t, x) - \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x), \mathbf{u}(t, x) \rangle - \langle \boldsymbol{\psi}(t, x), \nabla \mathbf{u}(t, x) \rangle, \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} & g^*(\mathbf{u}^*(t, x), t, x) \geq \langle \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) \rangle - g(\mathbf{u}(t, x), t, x), \\ & g_0^*(-\mathbf{u}^*(1, x), x) \geq -\langle \mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u}(1, x) \rangle - g_0(\mathbf{u}(1, x), x) \end{aligned} \quad (2.159)$$

Diğer taraftan $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}(t, 1) = \mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{\varphi}^*(t, 0) = \mathbf{0}$ olduğundan, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \iint_R [\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t, x), \mathbf{u}(t, x) \rangle + \langle \boldsymbol{\psi}(t, x), \nabla \mathbf{u}(t, x) \rangle] dx dt \\ & = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, x), \mathbf{u}(t, x) \rangle \right] dx dt \\ & = \int_0^1 [\langle \mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u}(1, x) \rangle - \langle \mathbf{u}^*(0, x), \mathbf{u}(0, x) \rangle] dx \\ & \quad + \int_0^1 [\langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 1), \mathbf{u}(t, 1) \rangle - \langle \boldsymbol{\varphi}^*(t, 0), \mathbf{u}(t, 0) \rangle] dt \\ & = \int_0^1 \langle \mathbf{u}^*(1, x), \mathbf{u}(1, x) \rangle dx. \end{aligned}$$

O zaman (2.158) ve (2.159) denklemleri göz önüne alındığında

$$J_*(\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)) \leq J(\mathbf{u}(t, x)). \quad (2.160)$$

ifadesine ulaşılır. Bu, ıspatı sona erdirir. $\square$

Teorem 2.36. $u^*(t, x) \in \partial g(\tilde{u}(t, x), t, x)$, $-u^*(1, x) \in \partial g_0(\tilde{u}(1, x), x)$ olduğunu ve $\tilde{u}(\cdot, \cdot)$, $\{u^*(\cdot, \cdot), \varphi^*(\cdot, \cdot)\}$ fonksiyonlarının Teorem 2.32'in (i)-(iii) şartlarını sağladığını varsayalım. O zaman $\tilde{u}(\cdot, \cdot)$ and $\{u^*(\cdot, \cdot), \varphi^*(\cdot, \cdot)\}$ fonksiyonları, sırasıyla (P_C) ve dual (P_{DL}) problemlerin en iyi çözümleridir ve bu çözümlerdeki değerler eşittir.

Kanıt. Teorem 2.32'ye göre $\tilde{u}(\cdot, \cdot)$ problemi için bir çözümdür. $\{u^*(\cdot, \cdot), \varphi^*(\cdot, \cdot)\}$ fonksiyonlarının da (P_{DL}) 'nin bir çözümü olduğu ispatlansın. Herşeyden önce Tanım 2.35 YEKF tanımına göre Teorem 2.32 aşağıdaki anlama gelir:

$$\begin{aligned} \langle u^*(t, x) - \operatorname{div} \psi(t, x), u - \tilde{u}(t, x) \rangle - \langle \psi(t, x), v - \nabla \tilde{u}(t, x) \rangle &\geq 0, \\ \forall (u, v) \in \operatorname{gph} F(\cdot, t, x), v &= (v_1, v_2) \end{aligned} \quad (2.161)$$

Başka şekilde ifade etmek gerekirse

$$(u^*(t, x) - \operatorname{div} \psi(t, x), \psi(t, x)) \in \operatorname{dom} \Omega(\cdot, \cdot, t, x) \quad (2.162)$$

Burada,

$$\operatorname{dom} \Omega(\cdot, \cdot, t, x) = \{(u^*, -v^*) : \Omega(u^*, v^*, t, x) > -\infty\} \quad (2.163)$$

Hatta $\partial g(u, t, x) \subset \operatorname{dom} g_0^*(\cdot, t, x)$, $\partial g_0(u, x) \subset \operatorname{dom} g_0^*(\cdot, x)$ olduğu için aşağıdaki sağlanır.

$$u^*(t, x) \in \operatorname{dom} g^*(\cdot, t, x), \quad -u^*(1, x) \in \operatorname{dom} g_0^*(\cdot, x) \quad (2.164)$$

Bu yüzden de (2.162) ve (2.164) denklemlerinden yola çıkılırsa, $\{u^*(\cdot, \cdot), \varphi^*(\cdot, \cdot)\}$ fonksiyonlarının, (P_{DL}) probleminin olurlu bir çözümü olduğu sonucuna varılır. Bunun en iyi olduğunu gösterelim. Mahmudov'un makalesindeki Sonuc 2.2'ye göre u^* , ancak ve ancak $\Omega(u^*, v^*, t, x) = \langle u^*, u \rangle - H(u, v^*, t, x)$ şartı sağlandığında YEKF F^* 'nin bir elemanıdır [13]. Öyleyse Teorem 2.32'in (i) şartı

$$\begin{aligned} \Omega(u^*(t, x) - \operatorname{div} \psi(t, x), \psi(t, x), t, x) \\ = \langle u^*(t, x) - \operatorname{div} \psi(t, x), \tilde{u}(t, x) \rangle - H(\tilde{u}(t, x), \psi(t, x), t, x). \end{aligned} \quad (2.165)$$

olmasını gerektirir. (iii) şartından dolayı da

$$H(\tilde{u}(t, x), \psi(t, x), t, x) = \langle \nabla \tilde{u}(t, x), \psi(t, x) \rangle \quad (2.166)$$

ve teoremin şartından dolayı da

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}(t, x), u^*(t, x) \rangle - g(\tilde{u}(t, x), t, x) &= g^*(u^*(t, x), t, x), \\ -\langle \tilde{u}(1, x), u^*(1, x) \rangle - g_0(\tilde{u}(1, x), x) &= g_0^*(-u^*(1, x), x). \end{aligned} \quad (2.167)$$

yazılabilir. Teorem 2.35'deki (2.165)-(2.167) denklemlerinin ışığında

$$J(\tilde{\mathbf{u}}(t, x)) = J_*(\mathbf{u}^*(t, x), \boldsymbol{\varphi}^*(t, x)). \quad (2.168)$$

elde edilir. Kanıt tamamlanmıştır. $\square$

3. DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

Matematiksel modeller genel olarak bir X olurlu kararlar kümesi ve bir f maliyet fonksiyonu şeklinde ifade edilirler. Bu X kümesi verebileceğimiz kararların sınırlarını çizerken, f fonksiyonu da bir kararın ne kadar istenmediğinin ölçüsü olarak görülebilir. Biz öyle bir en iyi $\mathbf{x}^*$ kararı bulmak isteriz ki $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ şartı sağlansın, ya da bir başka deyişle, en az maliyetli kararı bulalım.

En iyileme problemlerini sınıflandırmak için kullanılabilecek en önemli kıstaslardan birisi X kısıtlar kümesi ile ilgilidir. Bu küme sürekli yada süreksiz bir yapıya sahip olabilir. Doğrusal olmayan programlama (DOP), ya maliyet fonksiyonunun ya da X kümesini oluşturan eşitlik veya eşitsizliklerin doğrusal olmadığı duruma verilen isimdir ve sürekli problemler sınıfına girer. Diğer bazı problemler, karma yapılara sahip olabilirler ancak DOP ile yakından ilişkilidirler.

Bu kısımda DOP sınıfına giren en temel problemleri kısaca anlatacak, bazı en iyilik durumları için gerek ve bazı durumlarda da yeter koşulları verecek ve bunların çözüm yollarından bahsedeceğiz. Burada özetlenen konuların detayları için şu kaynaklara bakılabilir [113, 116–118]. Bu problemlerden ilki kısıtsız en iyileme olarak adlandırılabilir. Bunun dışında dışbükey kümeler altında en iyileme ve eşitlik ve eşitsizlik kısıtları altında en iyileme olarak sayılabilir.

3.1 Kısıtsız En İyileme

Bu bölümde $X = \mathbb{R}^n$ olduğu durum incelenecektir. Öncelikle bazı tanımlar ve ardından, en iyilik koşulları türevlenebilir maliyet fonksiyonlu durum için verilecek ve türevlenebilir durumu çözecek algoritmalarından bahsedilecektir. Model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \text{en küçükle } & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tanım 3.1. (Kısıtsız Yerel En İyi Çözüm) Eğer bir $\mathbf{x}^*$ noktası için

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\} \quad (3.2)$$

şartını sağlayan bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı varsa $\mathbf{x}^*$ noktası f fonksiyonu için kısıtsız bir yerel en iyi noktadır.

Tanım 3.2. (Kısıtsız Küresel En İyi Çözüm) Eğer bir $\mathbf{x}^*$ noktası

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

şartını sağlıyorsa $\mathbf{x}^*$ noktası f fonksiyonu için kısıtsız bir küresel en iyi çözümdür.

Yukarıdaki yerel ve küresel çözümler için verilen tanımlardaki şartlar $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ dışındaki noktalar için kesin eşitsizlik şeklinde sağlanıyorsa $\mathbf{x}^*$ noktası kesin yerel veya küresel en iyi çözüm olarak adlandırılır. Aynı tanımlar f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ 'in bir X alt kümesi üzerinde tanımlandığı duruma da genişletilebilir.

3.1.1 En iyilik koşulları

Önerme 3.1. $\mathbf{x}^*, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kısıtsız yerel en iyi çözümü olsun ve f 'in $\mathbf{x}^*$ 'ı içeren açık bir S kümesi üzerinde sürekli türevlenebildiği varsayalım. Bu durumda

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Dahası eğer f fonksiyonu S kümesi üzerinde iki kere sürekli türevlenebiliyorsa $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ pozitif yarı belirli bir matris olmalıdır. Yani

$$\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

gerçeklenmelidir.

Önerme 3.2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey X kümesi üzerinde dışbükey bir fonksiyon olsun.

1. f 'in X kümesi üzerindeki yerel bir minimumu, aynı zamanda küresel bir minimumdur. Eğer f kesin dışbükeyse, o zaman f 'in yalnızca bir minimumu vardır.
2. Eğer X kümesi açıksa, o zaman $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ koşulu $\mathbf{x}^*$ 'ın f 'in X üzerinde küresel minimum olması için gerek ve aynı zamanda yeter koşuldur.

Önerme 3.3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ açık bir S kümesi üzerinde iki kere türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\mathbf{x}^* \in S$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) : \text{pozitif berilri.} \quad (3.6)$$

Bu durumda $\mathbf{x}^*$, f fonksiyonunun kesin kısıtsız yerel minimumudur. Özel olarak aşağıdaki şartı sağlayan reel $\gamma > 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları vardır:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\}. \quad (3.7)$$

3.1.2 Gradyan yöntemler

Önce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kısıtsız en küçüklenmesi problemi ele alınacaktır. Bu problemi çözen yöntemlerden bazıları *yinelenen azalma* olarak sınıflandırılabilir ve şu mantığa dayanır. Bir başlangıç $\mathbf{x}^0$ noktasından başlayıp her seferinde f fonksiyonunu azaltacak şekilde $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots$, noktaları üretirler. Yani

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

f 'i azaltacak olan noktaları bulmak için, yöntemde de adını veren fonksiyon gradyanı (∇f) kullanılır.

$\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ şartını sağlayan bir $\mathbf{x}$ noktası verilsin. Aşağıda verilen yarı doğru üzerindeki noktalar önem arz etmektedir.

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x} - \alpha \nabla f, \quad \forall \alpha \geq 0. \quad (3.9)$$

Birinci mertebe Taylor serisi açılımından şu elde edilir:

$$f(\mathbf{x}_\alpha) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}\|) \quad (3.10)$$

$$= f(\mathbf{x}) - \alpha \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + o(\alpha \|\nabla f(\mathbf{x})\|) \quad (3.11)$$

$$= f(\mathbf{x}) - \alpha \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + o(\alpha) \quad (3.12)$$

Küçük α değerleri için ikinci terim üçüncü terime baskın geleceğinden $f(\mathbf{x}_\alpha) \leq f(\mathbf{x})$ sonucuna varılır.

Bu fikir bir adım daha ileriye götürülürse, yön olarak az önceki gibi gradyanın ters yönü yerine, $\nabla f(\mathbf{x})$ ile geniş açı yapan bir $\mathbf{d}$ yönü alınabilir:

$$\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0 \quad (3.13)$$

olsun. Bu durumda gene $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}$ noktasında f fonksiyonu $\mathbf{x}$ noktasında aldığı değerden daha küçük bir değer alacaktır. Gradyan yöntemler işte böyle yeni noktalar bulmak üzere tasarlanmış yöntemlerdir. Birçok yöntem yeni noktayı aşağıdakine benzer bir denklem aracılığıyla bulur:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k D^k \nabla f(\mathbf{x}^k). \quad (3.14)$$

Burada D^k pozitif belirli bir matris, α^k ise pozitif bir reel sayıdır. Burada

$$\mathbf{d}^k = -D^k \nabla f(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

olarak seçildiğinden azalma koşulu da (yani gradyanla geniş aç yapma koşulu) aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\nabla f(\mathbf{x}^k)^T D^k \nabla f(\mathbf{x}^k) > 0. \quad (3.16)$$

Bu ifade D^k matrisi pozitif belirli olarak belirlendiğinden gerçekleşir.

D^k matrisi birim matris olarak seçilirse buna *en dik azaltma* yöntemi, hessian matrisinin tersi $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)^{-1}$ seçilirse *Newton* metodu denir. İlkinde yeni yönü hesaplamak hiç bir ek işlem gerektirmezken, ikincisi ciddi bir ikinci mertebeden kısmi türev hesabı ve denklem sistemi çözümü yükü oluşturur. Buna karşılık olarak ilkinin yakınsama özellikleri zayıfken, ikincisinde çok güçlüdür. Yani ilkinde adımlar daha hızlı ama daha çok sayıda atılır.

Her bir adımda D^k matrisini yinelemeye dayalı olarak bulmaya yönelik özel bir yöntemler bulunmaktadır. D^k 'nın bu şekilde bir önceki yinelemeden gelen bilgi kullanılarak güncellenmesine dayanan yöntemlere *Quasi-Newton* adı verilir. Bu yöntemlerde kullanılan güncellemeler sonunda D matrisi f fonksiyonunun Hessian matrisinin tersine yakınsar, Quasi-Newton adı da buradan gelmektedir.

3.1.3 BFGS güncellemesi

Her adımda hessian matrisini hesaplamak maliyetli olacağından, bu matris yerine her adımda bir önceki adımdan yola çıkarak yapılacak bir güncelleme, sonuca daha hızlı varılmasını sağlayabilir. Bu tip güncellemeler arasında en başarılı kabul edilenlerinden birisi Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno güncellemesidir [119–122] ve D^k matrisi

aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$D^{k+1} = D^k + \left(1 + \frac{\mathbf{q}^T D^k \mathbf{q}}{\mathbf{p}^T \mathbf{q}} \right) \frac{\mathbf{p} \mathbf{p}^T}{\mathbf{p}^T \mathbf{q}} - \frac{D^k \mathbf{q} \mathbf{p}^T + \mathbf{p} \mathbf{q}^T D^k}{\mathbf{p}^T \mathbf{q}} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{q} = \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (3.18)$$

Bu güncelleme $\mathbf{x}^{k+1}$, $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})^T \mathbf{d}^k - \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k > 0$ yada başka bir ifadeyle $\mathbf{q} \mathbf{p} > 0$ şartını sağlıyorsa, hem simetriyi hem de pozitif belirliliği korur. İkinci şart, doğru en küçükleme kullanıldığında $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{0}$ olacağından kendiliğinden sağlanır. Ancak Armijo kuralı uygulandığında bu şart sağlanmayabilir.

$\mathbf{d}$ yön vektörü azalma şartını sağlayacak şekilde gradyan vektörü ∇f ile ilişkili olarak bulunduktan sonra, bu yönde ne kadar ilerlenmesi gerektiği bulunmalıdır. Bunun için kullanılabilecek sabit adım uzunluğu ve azalan adım uzunluğu gibi basit yöntemler vardır. Bu yöntemler hiç bir ek fonksiyon veya gradyan hesaplaması gerektirmemekle birlikte fonksiyon değerindeki azalmayı garanti etmezler. Bunların yanında aşağıdaki görece daha karmaşık adım büyüklüğü bulma yöntemleri kullanılabilir.

3.1.4 Armijo kuralı

Armijo kuralı, yakınsamayı garanti edebilmek için, her adımda yeterli azalmayı sağlamak adına adım büyüklüğü için konulmuş bir şarttır. Bu kurala göre adım büyüklüğü $\beta^m s$ olmalıdır. Burada β, σ ve s , $0 < \beta < 1, 0 < \sigma < 1$ olacak şekilde sabit skalerler ve m aşağıdaki şartı sağlayan en küçük negatif olmayan tamsayıdır.

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^k + \beta^m s \mathbf{d}^k) \geq -\sigma \beta^m s \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \quad (3.19)$$

3.1.5 Doğru en küçükleme - kübik enterpolasyon

Bir yön verildiğinde adım büyüklüğü olarak, verilen yöndeki en küçük fonksiyon değerini veren noktaya varacak büyüklük seçilebilir. Bunu yapmak için altın oranlı arama ve kuadratik enterpolasyon gibi sadece fonksiyon değerine ihtiyaç duyan yöntemler kullanılabileceği gibi [123], kübik enterpolasyon gibi daha karmaşık ve türev bilgisi de gerektiren bir yöntem de kullanılabilir. Bu alt bölümde son bahsedilen yöntem anlatılacaktır.

Bir $\mathbf{x}^k$ noktasında $\nabla f(\mathbf{x}^k)\mathbf{d}^k < 0$ şartını sağlayan bir $\mathbf{d}^k$ yönü verilmiş olsun. Bu yöntemde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha^k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, şu alt problem çözülmeye çalışılır.

$$\text{en küçükle} \quad g(\alpha^k) = f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) \quad (3.20)$$

$$\alpha^k \geq 0 \quad (3.21)$$

Bu yöntem g fonksiyonunu bir kübik polinom ile temsil edilmesi fikrine dayanır. Bu g fonksiyonuna en küçük değeri veren α sayısı için bir aralık belirlenip, yeni noktalara (yaklaşık polinoma en küçük değeri veren nokta) ilerlenerek bu aralığın daraltılmasına çalışılır.

İlk önce g fonksiyonunun bir yerel en küçük noktasını içerdiğinden emin olduğumuz bir aralık bulunmalıdır. Böyle bir $(a, b]$ aralığı biliniyorsa, aralığın ucunda hesaplanan $g(a), g'(a), g(b)$ ve $g'(b)$ değerleri kullanılarak, g fonksiyonuna a ve b noktalarında teğet olarak değen kübik bir polinom bulunabilir. Bu polinoma en küçük değeri veren $\bar{\alpha}$ noktası yukarıdaki değerleri içeren kapalı bir formül kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$z = \frac{3(g(a) - g(b))}{b - a} + g'(a) + g'(b), \quad (3.22)$$

$$w = \sqrt{z^2 - g'(a)g'(b)}, \quad (3.23)$$

olmak üzere

$$\bar{\alpha} = b - \frac{g'(b) + w - z}{g'(b) - g'(a) + 2w}(b - a). \quad (3.24)$$

$\bar{\alpha} = b$ olduğunda durulur, g fonksiyonuna en küçük değeri veren nokta b noktasıdır. $g'(\bar{\alpha}) < 0$ ve $g(\bar{\alpha}) < g(a)$ ise bir sonraki adımda b değişmeden $a = \bar{\alpha}$ olarak alınır. $g'(\bar{\alpha}) \geq 0$ veya $g(\bar{\alpha}) \geq g(a)$ ise bir sonraki adımda a değişmeden $b = \bar{\alpha}$ olarak alınır. Algoritmayı sonlandırmak için $\bar{\alpha} = b$ olmasını beklemeden $b - a$ değeri gözlenebilir. Bu değer belli bir eşiğin altına düştüğünde algoritma sonlandırılabilir.

3.2 Dışbükey Küme Üzerinde En İyileme

Bu bölümde en iyileme probleminin çözümlerini tüm $\mathbb{R}^n$ kümesi yerine, onun dışbükey bir alt kümesinde arayacağız. Gerek ve yeter koşullar bu yeni duruma göre değişecek.

Önce problemi yazalım.

$$\begin{aligned} \text{en küçük} \quad & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{3.25}$$

Burada X , $\mathbb{R}^n$ kümesinin dışbükey bir alt kümesi, f fonksiyonu da X üzerinde sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur.

Trafik akışının en iyi kontrolü problemi de bu sınıfa girebilir. Tüm kontrol değişkenleri $[0, 1]$ aralığından değerler alabilmektedir. Bu tip kısıtlara kutu kısıtları da denir.

3.2.1 Dışbükey programlama için gerek yeter koşullar

Dışbükey programlamada f fonksiyonu da dışbükeydir. Bu durumda birinci mertebeden gerek şart aynı zamanda yeterşart da olur. Şimdi bu şartı verelim.

Önerme 3.4. Bir $\mathbf{x}^*$ noktası (3.25) probleminin en iyi çözümü ise aşağıdaki şart sağlanır.

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in X \tag{3.26}$$

Eğer f fonksiyonu dışbükey ise bu şartı sağlayan bir $\mathbf{x}^*$ noktası en iyi çözümdür.

Bu şartın 2.1.6 bölümündeki Teorem 2.25'deki şartın bir özel durumu olduğuna (türevlenebilir f fonksiyonu) olduğuna dikkat ediniz.

Dışbükey en küçükleme problemi için gerek ve yeter koşulları anlatıldığına göre bu problemi çözecek yöntemlerden birisi olan ve bu tezde de kullanılan *gradyan izdüşüm* metodu açıklanabilir.

3.2.2 Gradyan izdüşüm yöntemi

Bu yaklaşım bir çok alandan DOP problemleri için yaygın olarak kullanılmaktadır [124–129]. Burada da kısıtsız en iyileme problemlerine benzer bir yaklaşım bulunmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi, belli bir adım büyüklüğü kullanarak azaltan bir yön bulunup o yönde ilerleniyordu. Burada özel olarak *olurlu* bir yön seçilmektedir. Bu olurlu yön de, X kümesinin dışbükeyliğinden faydalanılarak, k adımı için $\tilde{\mathbf{x}}^k \in X$ olmak üzere $\tilde{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k$ şeklinde seçilebilir. Olurlu $\tilde{\mathbf{x}}^k$ noktası olarak da, gradyanın tersi yönünde atılan bir adımın X kümesi üzerine iz düşümü alınır. Burada anlatılanlar matematiksel olarak ifade edilmek istenirse, $\alpha^k > 0, s^k > 0$ ve $[\cdot]^+$ bir noktanın X

kümesi üzerine izdüşümü olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha^k(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k) \\ \bar{\mathbf{x}}^k &= [\mathbf{x}^k - s^k \nabla f(\mathbf{x}^k)]^+\end{aligned}\tag{3.27}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada adım büyüklüğüne etki eden iki farklı skaler (α^k, s^k) bulunmaktadır. Bunlardan birini sabitleyip diğerini serbest bırakarak, iki farklı Armijo benzeri adım büyüklüğü kuralı elde edilebilir. Bunlardan ilki s^k skalerini sabitleyip α^k sayısını da $[0, 1]$ aralığından seçerek *olurlu yön boyunca* Armijo kuralını uygulamaktır. $\beta \in (0, 1)$, ve $\sigma \in (0, 1)$ olmak üzere bu kuralın ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^k + \beta^m(\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k)) \geq -\sigma \beta^m \nabla f(\mathbf{x}^k)^T (\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}^k).\tag{3.28}$$

Burada m_k yukarıdaki denklemi sağlayan en küçük m negatif olmayan tam sayısı olmak üzere $\alpha^k = \beta^{m_k}$ olarak seçilir.

Diğer kural ise $\alpha^k = 1$ olarak sabitleyip, *izdüşüm yolu boyunca* Armijo kuralını uygulamaktır. Bu kuralı anlamak için önce izdüşüm yolu tanımlanmalıdır.

$$\mathbf{x}^k(s) = [\mathbf{x}^k - s \nabla f(\mathbf{x}^k)]^+\tag{3.29}$$

olmak üzere

$$\{\mathbf{x}^k(s) : s > 0\}\tag{3.30}$$

kümesi izdüşüm yolunu oluşturur. Bu yol üzerindeki armijo kuralı ise $\bar{s} > 0, \beta \in (0, 1)$ ve $\sigma \in (0, 1)$ olmak üzere şöyle verilebilir.

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^k(\beta^m \bar{s})) \geq -\sigma \nabla f(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^k(\beta^m \bar{s})).\tag{3.31}$$

Burada m_k yukarıdaki denklemi sağlayan en küçük m negatif olmayan tam sayısı olmak üzere $s^k = \beta^{m_k} \bar{s}$ olarak seçilir.

3.3 Kesikli En İyi Kontrol Problemi

Bu bölümde kesikli bir en iyi kontrol problemi için gradyanın nasıl hesaplanabileceği gösterilecektir. Konuyla ilgili detaylar için şu kaynaklara bakılabilir [116, 130]. Önce en iyi kontrol problemi tanımlanmalıdır. $g_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, ve $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times$

$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ türevlenebilir fonksiyonlar, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 0, \dots, N$ durum değişkenleri, ve $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ $i = 0, \dots, N-1$ kontrol değişkenleri, $N > 0$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\text{en küçük} \quad J(\mathbf{u}) = g_N(\mathbf{x}_N) + \sum_{i=0}^{N-1} g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \quad (3.32)$$

$$\text{öyle ki} \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$$

problemine kısıtsız kesikli zamanlı en iyi kontrol problemi denir. Burada amaç J fonksiyonuna en küçük değeri veren $\tilde{\mathbf{u}}_i$ $i = 0, \dots, N-1$ kontrol değişkenlerini ve buna karşılık gelen $\tilde{\mathbf{x}}_i = 1, \dots, N$ durum değişkenlerini bulmaktır. Bu problemi çözmek için gradyan tabanlı bir algoritma kullanmak istenirse J amaç fonksiyonunun gradyanının bulunması gerekmektedir. Bu ise aşıkardır çünkü $\mathbf{x}$ değişkeni bağımsız değildir.

Bu hesapta zincir kuralını dikkatli bir şekilde işletmek gerekmektedir. Dikkat edilmesi gereken diğer bir husus $\mathbf{u}_i$ kontrol değişkenlerinin sadece $\mathbf{x}_j$ $j > i$ durum değişkenlerini etkilediğidir. İlk olarak J fonksiyonunda, $\sum_{i=0}^{N-1} g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ toplamı terimlerin olmadığı, sadece son andaki durum değişkenine bir maliyet bindiren $g_N(\mathbf{x}_N)$ teriminin olduğu varsayalım. Bir sonraki adımda bunun genelliği bozmadığı gösterilecek ve toplamı terim için gradyanın hesabı da yapılacaktır. Bu sistemde başlangıç koşulu $\mathbf{x}^0$ verildiğinden, tüm $\mathbf{x}_i$ durum değişkenleri, $\mathbf{u}$ kontrol değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Buna göre $\phi_i : \mathbb{R}^{Nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere, şu yazılabilir.

$$\mathbf{x}_i = \phi_i(\mathbf{u}) \quad i = 1, \dots, N$$

Buradan yola çıkarak modeldeki $\mathbf{x}$ değişkenlerinin yerine bu fonksiyonun $\mathbf{u}$ noktasındaki değeri yazılarak, model aşağıdaki şekle sokulabilir.

$$\text{en küçük} \quad J(\mathbf{u}) = g_N(\phi_N(\mathbf{u}))$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Nm}$$

Problem, standart (3.1) kısıtsız en iyileme formatına dönüştüğüne göre, gradyan yazılabilir.

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} J(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_N(\mathbf{u}) \nabla_{g_N}(\phi_N(\mathbf{u})) \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.35)$$

Burada $\nabla_{\mathbf{u}_i}$ ile, $\nabla_{\mathbf{u}}$ gradyan vektör yada matrisinin, sadece $\mathbf{u}_i$ ile ilişkili olan satırları gösterilmektedir. Devam edilirse

$$\phi_j(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{j-1}(\phi_{j-1}(\mathbf{u}), \mathbf{u}_{j-1}) \quad (3.36)$$

olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_N(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_{N-1}(\mathbf{u}) \nabla_{\mathbf{x}_{N-1}} \mathbf{f}_{N-1} + \nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}_{N-1} \nabla_{\mathbf{u}_{N-1}} \mathbf{f}_{N-1} \quad (3.37)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada gösterim kolaylığı açısından, $\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathbf{f}_j$ ifadesi $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_j}}$ ifadesini; $\nabla_{\mathbf{u}_j} \mathbf{f}_j$ ifadesi ise $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_j}}$ ifadesini temsil etmektedir.

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ I & i = j \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_j(\mathbf{u}) = 0 \quad i \geq j \quad (3.39)$$

olduğuna dikkat edilirse (3.37) denklemini önce

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_N(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_{i+1}(\mathbf{u}) \nabla_{\mathbf{x}_{i+1}} \mathbf{f}_{i+1} \nabla_{\mathbf{x}_{i+2}} \mathbf{f}_{i+2} \cdots \nabla_{\mathbf{x}_{N-1}} \mathbf{f}_{N-1} \quad (3.40)$$

şeklinde, sonra

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \phi_N(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{f}_i \nabla_{\mathbf{x}_{i+1}} \mathbf{f}_{i+1} \nabla_{\mathbf{x}_{i+2}} \mathbf{f}_{i+2} \cdots \nabla_{\mathbf{x}_{N-1}} \mathbf{f}_{N-1} \quad (3.41)$$

şeklinde yazılır. Bir $\mathbf{p}$ eşlenik vektör tanımlaması yapılabilir:

$$\mathbf{p}_N = \nabla_{\mathbf{g}_N}(\phi_N(\mathbf{u})) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{p}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i \mathbf{p}_{i+1} \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.43)$$

(3.41), (3.42) ve (3.43) denklemlerini kullanılarak (3.35) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} J(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{f}_i \mathbf{p}_{i+1} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.44)$$

Şimdi de amaç fonksiyonunda $\sum_{i=0}^{N-1} g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ toplamı terimin de olduğu durumda türevi nasıl hesaplanacağı gösterilecektir. Burada şöyle bir yöntem izlenecektir. Her bir andaki durum değişkenlerine bir boyut daha eklenecektir.

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad i = 0, \dots, N \quad (3.45)$$

Burada $y_i \in \mathbb{R}$, ve $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ dir. Şimdi sistem, $\mathbf{z}_i$ ile ifade edilirse aşağıdaki probleme varılır.

$$J(\mathbf{u}) = k_N(\mathbf{z}_N) = g_N(\mathbf{x}_N) + y_N \quad (3.46)$$

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{h}_i(\mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \\ y_i + g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \end{bmatrix} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.47)$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Böylece amaç fonksiyonunda toplamli terim olan bir sistem, amaç fonksiyonunda toplamli terim olmayan bir sisteme dönüşmüş oldu. Aynı hesaplama tekniği kullanılarak $\nabla_{\mathbf{u}_i} J(\mathbf{u})$ ifadesine ulaşılabilir. Önce $\mathbf{q}$ eşlenik değişkenini hesaplayalım.

$$\mathbf{q}_N = \nabla k_N(\mathbf{z}_N) = \begin{bmatrix} \nabla g_N(\mathbf{x}_N) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{q}_i = \nabla_{\mathbf{z}_i} \mathbf{h}_i \mathbf{q}_{i+1} \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.50)$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i & \nabla_{\mathbf{x}_i} g_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{i+1} \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.51)$$

Bu durumda $\mathbf{q}_i$ hep aşağıdaki formdadır.

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.52)$$

$$\mathbf{p}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i \mathbf{p}_{i+1} + \nabla_{\mathbf{x}_i} g_i \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.53)$$

$$\mathbf{p}_N = \nabla g_N \quad (3.54)$$

(3.44) denklemi yeni sisteme uyarlandığında

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} J(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{h}_i \mathbf{q}_{i+1} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.55)$$

$$= [\nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{f}_i \quad \nabla_{\mathbf{u}_i} g_i] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.56)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} J(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{f}_i \mathbf{p}_{i+1} + \nabla_{\mathbf{u}_i} g_i \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.57)$$

sonucuna varılır. Böylece bir $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^{Nm}$ kontrol değişkeni için bir değer ve $\mathbf{x}^0$ başlangıç durumu verildiğinde, önce (3.34) ve (3.33) denklemleri ile tüm $i = 0, \dots, N$ anlarındaki durum değişkenlerinin değerleri tespit edilebilir, ardından (3.53), (3.54) ve (3.57) denklemlerini kullanarak gradyan vektör oluşturulabilir.

Doğrusal olmayan en iyi kontrol probleminin çözümünü bulmak için ihtiyaç duyduğumuz tüm teorik şartlar ve çözüm yöntemlerine bakıldığında göre, bu teze uygulama örneği olarak dahil edilen trafik akışının en iyi kontrolu problemine geçilebilir.

4. TRAFİK MODELLERİ

Tezin bu bölümünde, trafik problemlerini modellemek için kullanılan temel yaklaşımları ve literatürde geniş kabul görmüş bir makroskopik model olan METANET modelinin kontrol değişkenlerinin etkileri dahil edilmiş halinin detayları incelenecektir. Bu detaylar arasında, kurgulanan en iyi kontrol probleminin gradyan temelli yöntemler kullanılarak çözümü için gerekli olan, ancak daha önce yayımlanmamış kısmi türevlerin ifadeleri de bulunmaktadır.

Trafik akışının kontrolünü ve simülasyonunu sağlayan ALINEA ve METALINE yerel kontrol modelleri [46, 131], alternatif yol önerebilmek kullanılan denge modelleri [55–57, 132], kontrol için öğrenme teknikleri kullanan modeller [47, 48] ve diğer çeşitli modeller [63, 67–70] gibi modeller olmakla birlikte, METANET modeli hem literatürdeki yaygınlığı, hem koordineli ve bütünsel bir yaklaşım sergilediği için tercih edilmiştir.

4.1 Temel Kavramlar

Trafik problemlerini matematiksel olarak inceleyebilmek için bir takım temel kavramlara değinmemiz gerekmektedir. Bunun için kullanılacak ilk kavram zaman-mekan diyagramıdır. Bu diyagramda bir yol üzerindeki araçların belli bir anda bulundukları konumu görmek mümkündür. Bu diyagramdan yola çıkılarak yapılan hesaplamalar, bizi makroskopik modeller için kullanılan temel durum değişkenlerine götürecektir. Bu hesaplamalar ve analizler zaman veya mekan eksenlerinden birini sabitleyerek yapılabilir. Burada özetlenen kavramların detayları için şu kaynaklara bakılabilir [133–135].

Öncelikle bir yolun belli bir x noktasında $[0, T]$ zaman aralığı boyunca gözlemler yaptığımızı düşünelim. Bu noktadan kaç araç geçtiği $m(x)$, akış oranı $q(x) = \frac{m(x)}{T}$, ardışık olarak x noktasından geçen iki aracın geçişleri arasındaki süre $h_j(x)$ ve bu

sürelerin ortalamaları $\bar{h}(x)$ bu gözlemler sırasında elde edilebilir. Büyük T değerleri için $q(x) = \frac{1}{\bar{h}(x)}$ eşitliği sağlanır.

Şimdi de bir t anında $[0, L]$ uzunluğundaki bir yol parçasının resmine baktığımızı düşünelim. Bu resimden o anda yolda kaç araç olduğu $n(t)$, yolun yoğunluğu $k(t) = \frac{n(t)}{L}$, ardışık iki araç arasındaki mesafe $s_i(t)$, bu değerlerin ortalaması $\bar{s}(t)$ istatistikleri çıkarılabilir. Burada da benzer şekilde $k(t) = \frac{1}{\bar{s}(t)}$ ilişkisi çıkarılabilir.

Trafik durumunun dengede olduğu durumlardaki akış ve yoğunluk verilerini bir grafikte gösterebiliriz. Bu grafiğe *temel diyagram* adı verilir. Tüm makroskopik modeller bu iki parametre arasındaki ilişkinin bir fonksiyon ile gösterilebileceğini varsayar. Bu varsayımın geçersiz olduğuna dair bir çok gözlem bulunmaktadır [88–92]. Bazı araştırmacılar bu gerçeğin farkında olmakla birlikte, bu varsayım altında yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçların kullanılması halinde fayda sağlanabileceğini göstermişlerdir [45, 53, 66, 131, 136–142]. Bu temel diyagramların mikroskopik modellerle yakından ilişkisi vardır. Belli bir araç takip modeli, belli bir temel diyagrama denk gelir. Şimdi bu araç takip modelleri irdelenecektir.

4.1.1 Araç takip modelleri

Basit bir lineer modelde her bir araç bir önündeki araçla olan hız farkını azaltmaya çalışır. Buna dair modeli $\dot{x}$, x değişkeninin t 'ye göre türevini ifade etmek üzere aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\ddot{x}_i = a(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \quad i = 2, \dots, n \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_1 = v_1^0 \quad (4.2)$$

Burada x_i bir şerit boyunca ilerleyen araçlardan, baştan i . sırada bulunan aracın konumunu belirtir. $\dot{x}$ ve $\ddot{x}$ de sırası ile x 'in zamana göre birinci ve ikinci türevlerini gösterir. Yani bu uygulamada aracın hız ve ivmeyi verir. Yukarıdaki modeli aşağıdaki

gibi bir homojen lineer diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edebiliriz.

$$\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \\ a & -a & \ddots & \\ 0 & a & -a & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.5)$$

Burada n modellenen araç sayısını göstermektedir. Bu sistemin genel çözümü aşağıdaki teorem ile belirlenmiştir.

Teorem 4.1. Aşağıdaki gibi bir lineer diferansiyel sistem ve başlangıç koşulları verilmiş olsun.

$$\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}(0) = [v_1^0 \ v_2^0 \ \cdots \ v_n^0]^T \quad (4.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \\ a & -a & \ddots & \\ 0 & a & -a & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.8)$$

Bu durumda yukarıda verilen sistemin çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{v}(t) = v_1^0 \mathbf{1} + K [e^{-at} \ t e^{-at} \ t^2 e^{-at} \ \cdots \ t^{n-2} e^{-at}]^T \quad (4.9)$$

Burada K $n \times n - 1$ reel bir matris olup bileşenlerinin ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$K = [k_{ij}]_{n \times n-1} \quad k_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \leq j \text{ ise} \\ (v_{i-(j-1)}^0 - v_1^0) \frac{a^{j-1}}{(j-1)!} & \text{eğer } i > j \text{ ise} \end{cases} \quad (4.10)$$

Veya çözüm elemanlarını tek tek ifade etmek gerekirse, çözüm aşağıdaki gibidir.

$$v_1(t) = v_1^0 \quad v_i(t) = v_1^0 + e^{-at} \sum_{j=1}^{i-1} (v_{i-(j-1)}^0 - v_1^0) \frac{(at)^{j-1}}{(j-1)!} \quad i = 2, \dots, n \quad (4.11)$$

Çizelge 4.1: Araç Takip Modeli - Temel Diyagram Denklemi.

m	l	Temel diyagram denklemi
0	0	$q = q_{max} \left(1 - \frac{k}{k_{jam}} \right)$
1	0	$q = u_c k \ln \left(\frac{k_{jam}}{k} \right)^{0,5}$
1,5	0	$q = u_{max} k \left[1 - \left(\frac{k}{k_{jam}} \right)^{0,5} \right]$
2	0	$q = u_{max} \left(\frac{k}{k_{jam}} \right)$
2	1	$q = u_{max} k \exp \left(1 - \frac{k}{k_{jam}} \right)$
3	1	$q = u_{max} k \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_{jam}} \right)^2 \right]$

Bu lineer model basit ve kolay çözülebilmesine rağmen gerçekçi olmaktan çok uzaktır. Bunun yerine daha karışık lineer olmayan modeller önerilmiştir. Aşağıda lineer model de dahil olmak üzere bazı modeller temsil edebilen genel bir ifade bulunmaktadır.

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = a_0 \dot{x}_{n+1}^m(t+T) \frac{\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} \quad (4.12)$$

Bu ifadede bulunan T , sürücülerin ileriki durumu algılamakta yaşadıkları gecikmeyi temsil etmektedir. Bu değerin sıfır olduğu varsayıldığında, iki tarafın integralini alıp, denge koşullarını göz önüne aldığımızda bu modele denk gelen temel diyagram ifadesine varabiliriz. Farklı m, l parametreleri için bu modele denk gelen temel diyagram denklemleri Çizelge 4.1’de verilmiştir [133]. Bölüm 4.3’te incelenecek olan trafik modelinde de Çizelge 4.1’de son satırda verilene benzer bir temel diyagram varsayımı vardır. Modeldeki (4.20) statik hız denklemine bakıldığında fark edilebilir.

Şimdi bir serbest yol trafik ağındaki trafik akışının daha iyi düzenlenebilmesi için kullanılabilecek araçlar incelenecektir.

4.2 Katılım Düzenleyici ve Değişken Hız Limitleri

Bir trafik ağındaki akışı kontrol etmek için kullanılabilecek yöntemlerden ikisi, katılım düzenleyiciler ve değişken hız limitleridir. Bu iki kavramın uygulamaları, henüz ülkemizde bulunmamaktadır. Ancak tezin yazarı katılım düzenleyici sınıfına

girebilecek bazı uygulamalara rastlamıştır. Bunlardan birisi İstanbul Boğaziçi köprüsü Avrupa-Anadolu istikametindeki ana yola, Beşiktaş'tan katılan ve iki şeritli olan yolun katılım noktasına yaklaşıldığında tek şeride indirilmesidir. Bir diğeri ise geçmiş zamanlarda gözlemlenen ama son zamanlarda gözlemlenmeyen, Boğaziçi Köprüsü sabah trafiğinde bazı katılımların polis marifetiyle geçici olarak durdurulması ve ana yolun akıcılığının sağlanması uygulamasına da tanık olunmuştur. Bu kontrollere ihtiyaç duyulmasına sebep olan sıkışıklıkların bazı olumsuzluklar yaratmaktadır.

Yollar, araç trafiğine hizmet etmektedirler ve hizmet sunan herşey gibi bunların da bir kapasitesi vardır. Yolların, diğeri bir çok hizmet sunucudan farklı olarak, kapasiteleri hizmet ettikleri müşteri sayısından olumsuz olarak etkilenirler. Trafik akışı, belirli bir seviyenin üstüne çıkarsa, yol, normalde taşıyabileceğinden daha az trafik akışı taşır. Bu başlı başına trafiği olumsuz etkileyen bir pozitif çevrim yaratır. Belirli bir bölgedeki yoğunluk arttıkça, hız azalır, hız azaldıkça o bölgeden çıkış azalır, çıkış azaldıkça yoğunluk artar. Böylece trafik sıkışıklığı yol üzerinde geriye doğru kısa sürede yayılabilir. Ancak sıkışıklığın yarattığı tek sorun kapasite düşüşü değildir.

Bir darboğazda oluşan sıkışıklığın geriye doğru yayılması, bir çıkışa ulaşılmasını engelleme olasılığını da beraberinde getirir. Bu ise sistemden daha önce çıkması gereken bazı araçların, kendileriyle ilgili olmayan bir darboğazın yarattığı sıkışıklıktan ötürü, daha geç sistemi terk etmelerine yol açar. Bu iki etki trafik kapasitesinin aşılmasının toplam bekleme sürelerine olan olumsuz etkisini göstermektedir.

Katılım düzenleyiciler ve değişken hız limitleri temelde darboğazın hiç oluşmaması için çaba gösterirler. Katılım düzenleyiciler, bir katılımdan ana yola akan trafik akışını kontrol etmeye çalışırlar. Bunu yapmak için trafik ışıklarını kullanırlar. Katılım noktasına yaklaşan bir araç, katılım yolunun sonunda, yeşil ışığında sadece bir arabanın geçebildiği bir ışığa varır. Bu yeşil ışığın yanış sıklığını düzenleyerek, ana yola olan akış kontrol edilebilir. Ana yolda bir yoğunlaşma öngörülüyorsa, yeşil ışık daha seyrek yanarak, toplam akışı kapasitenin altında bırakmaya çabalar. Bu, söz konusu katılımda yol alan araçlar için olumsuz görünse de sistemin tamamı açısından olumlu bir sonuç verir. Akış kapasitenin altında kalır ve kapasite düşmez, toplam bekleme süreleri azalır. Ayrıca bu, daha gerideki çıkışların bloke olmasını engelleyerek

araçların bir an önce sistemden ayrılmasına olanak sağlar. Değişken hız limitleri de aynı amaca hizmet eder.

Değişken hız limitleri, ana yola yerleştirilen değiştirilebilir panolar aracılığıyla, üst hız limitinin normalde olanın altına indirilmesi ile gerçekleşir. Bu, ilk bakışta anlamsız gözükse de, bir darboğazın öncesinde uygulandığında, darboğaza ulaşan akışı düşüreceğinden, darboğazda oluşan sıkışıklığın olumsuz etkilerinden kurtulmamızı sağlar.

4.3 METANET

METANET trafik modelinin temellerinin kırk yıl öncesine dayandığı söylenebilir. Payne'nin [143] modelinden yola çıkmış ve sürekli olarak geliştirilmiştir. Son haliyle bir ağ üzerindeki trafiğin, katılım düzenleyici ve değişken hız limiti gibi kontrol fonksiyonlarını da göz önüne alarak, makroskopik olarak benzetimini yapabilmemize olanak sağlamaktadır [66]. Modelin denklemlerine geçmeden önce trafik ağını tanımlayalım.

4.3.1 Ağ yapısı

$G = (D, A)$ verilmiş yönlü bir ağ olsun. Ağdaki bağlantıları m , düğümleri n indisiyle gösterelim. $nbag$ ile bağlantı sayısını, $nkat$ ile katılım sayını gösterelim. Az sonra tanımlayacağımız, iki ögeyi birbirine bağlayan parametreleri isimlendirirken ilk önce sonuç ögesinin sonra girdi ögesinin kısaltmasını birleştirmeye özen gösterilmiştir. Mesela dba_m ile bağlantı başı ile düğümü bağladığımızdan ilk önce d sonra da ba şeklinde kısalttık. $dbku_m$ ile de m . bağlantının kuyruk düğümünü yani çıktığı düğümü gösterelim. Her bir bağlantıyı küçük bölümlere böldüğümüzden; N_m , m . bağlantıdaki bölüm sayısı olmak üzere, $i = 0, \dots, N_m - 1$ ile bu bölümleri gösterelim. o ile katılımları, kad_n ile n . düğüme giren katılımın indisini, dka_o ile de o . katılımın hangi düğümden girdiğini ifade edelim. k ile de zaman adımlarını ifade edelim. Bu ağda her bir n düğümüne en fazla iki bağlantı girebilir (çıkabilir). Bu bağlantılardan oluşan kümeleri I_n (O_n) ile gösterebiliriz. Ayrıca bir düğüm, birleşme, bölünme, katılım ve çıkış özelliklerinden en fazla birine sahip olabilir. Buna göre $td_n \in \{\text{Kök, Yaprak, Katılım, Çıkış, Birleşme, Ayrılma}\}$ ile, n . düğümün tipini belirtelim.

Burada Kök ile hiç bir bağlantının girmedığı bir düğümü, Yaprak ile hiçbir bağlantının çıkmadığı bir düğümü, Katılım ile bir katılım rampasının girdiği bir düğümü, Çıkış ile bir çıkış rampasının bulunduğu bir düğümü, Birleşme ile iki bağlantının birleştiği bir düğümü ve Ayrılma ile de bir bağlantının iki ayrı bağlantıya bölündüğü bir düğümü ifade etmek istiyoruz.

Ağ yapısını tanımladığımıza göre modeli oluşturan değişken ve denklemlere bakabiliriz.

4.3.2 Model

Makroskopik trafik modellerinde trafik durumu açıklayan en temel değişkenler, ρ ortalama yoğunluk ve v ortalama hızdır. ρ , bir yol üzerindeki araç sayısının mekansal ortalaması, v ise araç hızlarının harmonik ortalamasıdır. Bu iki değişken akış (q) denklemi üzerinden birbiriyle bağlantılıdır: $q = \rho v$. Bu değişkenlerin hesapları, diğer bazı ortalamalar ve ölçüm teknikleri ile ilgili geniş açıklamayı [133–135] kaynaklarında bulabilirsiniz.

METANET modelinde temel iki değişkenin yanı sıra, katılım kuyruklarında bekleyen araç sayısı w da durum değişkeni olarak alınmıştır. Buna göre her m bağlantısının her bir i bölümü için $\rho_{m,i}$ ($\frac{arac}{km \cdot serit}$) ve $v_{m,i}$ ($\frac{km}{h}$) durum değişkenlerinin yanı sıra, her bir katılım o için w_o ($arac$) durum değişkenleri bulunmaktadır. Tek bir bağlantıdaki akışı incelemiş olsaydık, sistemi zaman ve mekan olarak iki boyutta inceleyebilirdik, ancak w_o bunu yapmamızı engellemektedir. Bu yüzden sistem sadece zaman (k) boyutunda incelenecek, mekan boyutu, durum vektörünün farklı bileşenlerinde temsil edilecektir. Bu tezde, bir (k) anındaki durum vektörü, $ntb = \sum_{m \in A} N_m$ ağdaki toplam bölüm sayısı, nka ağdaki katılım sayısı olmak üzere, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{2 \cdot ntb + nka}$ aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\mathbf{x} = [\rho_{0,0} \quad v_{0,0} \quad \rho_{0,1} \quad v_{0,1} \quad \cdots \quad \rho_{nb-1, N_{nb-1}-1} \quad v_{nb-1, N_{nb-1}-1} \quad w_0 \quad \cdots \quad w_{nka-1}]^T \quad (4.13)$$

Burada nb ağdaki bağlantı sayısı, N_m ise m . bağlantıdaki bölme sayısıdır.

Kontrol değişkeni ise iki tiptir. İlk tip kontrol değişkeni b_m , m bağlantısındaki değişken hız limiti oranıdır. Bu yasal hız sınırının ne oranda aşağı çekileceğini kontrol etmemizi sağlar. Diğer tip kontrol değişkeni ise r_o , o katılımındaki katılım oranıdır. Bu değişken

katılımdan akacak olan akışın belli bir oranda salmamızı sağlar. Bu tezde, bir (k) anındaki kontrol vektörü $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{nb+nka}$ aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\mathbf{u} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{nb-1} r_0 \ r_1 \ \cdots \ r_{nka-1}]^T \quad (4.14)$$

Yoğunluk hesabı, basit bir şekilde net araç sayısının hesaplanmasından ibarettir.

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{L_m \lambda_m} (q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k)) \quad \forall m \in A, i = 0, \dots, N_m - 1 \quad (4.15)$$

$$q_{m,i}(k) = \rho_{m,i}(k) v_{m,i}(k) \lambda_m \quad (4.16)$$

Burada λ_m (*serit*), m . bağlantıdaki şerit sayısı, L_m (*km*) ise m . bağlantının uzunluğu, T (*h*) ise zaman adımının uzunluğudur. Dikkat edilirse $i = 0$ için (4.15) denklemi $q_{m,-1}$ değerine ihtiyaç duymaktadır. m bağlantısının kuyruk düğümü Kök tipindeyse, yani $td_{dku_m} = \text{Kök}$ ise, bu değerler sisteme her bir k anı için dışarıdan verilmelidir. Diğer taraftan, bu ifade, ağ içinde akışın bir veya iki bağlantıdan, diğer bir veya iki bağlantıya devam etmesini, sağlayan bir mekanizmadır. Bu mekanizmaya ilişkin denklemler aşağıdadır.

$$Q_n(k) = \sum_{\mu \in I_n} q_{\mu, N_\mu - 1}(k) + q_o \quad (4.17)$$

$$q_{m,-1}(k) = \beta_n^m(k) Q_n(k) \quad \forall m \in O_n \quad (4.18)$$

Burada Q_n, n . düğüme giren toplam akışı, β_n^m ise n . düğüme giren akışın ne oranda m . bağlantıya aktığını ifade eder. q_o , eğer $td_n = \text{Katılım}$ ise, n . bağlantıya katılan katılımdan gelen ($o = kad_n$) akışı gösterir. Bu değerın hesabı diğer katılım değişkenleriyle birlikte anlatılacaktır.

Hız güncellemesi ise daha karışıktır. Bu denklem hız değerini üç farklı referans noktasına çekmeye çalışır. Bunlardan birisi yoğunluğun bir fonksiyonu olan ve grafiği temel diyagram olarak adlandırılan statik $V(\rho_{m,i}(k))$ hız değeridir. Diğer bir önceki bölümdeki hız değeridir. Son olarak da bir ileri bölümdeki ile o bölümdeki yoğunluklar arasındaki farktan kaynaklanacak bir hız değeridir. Tüm bunlar birleştirildiğinde

aşağıdaki denklem elde edilir.

$$v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \frac{T}{\tau} \{V[\rho_{m,i}(k)] - v_{m,i}(k)\} \quad (4.19)$$

$$+ \frac{T}{L_m} (v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)) v_{m,i}(k) - \frac{vT}{\tau L_m} \frac{\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)}{\rho_{m,i}(k) + \kappa} \quad \forall m \in A, i = 0, \dots, N_m - 1$$

$$V(\rho_{m,i}(k)) = v_{f,m} e^{-\frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}} \right)^{\alpha_m}} \quad (4.20)$$

Burada τ (h) bir zaman sabiti, v ($\frac{km^2}{h}$) bir algılama katsayısı, κ ($\frac{arac}{km \cdot serit}$) ampirik bir sabittir. Bu parametreler tüm ağ için sabittir. $v_{f,m}$, m . bağlantıdaki serbest akış hızını, $\rho_{cr,m}$ ise m bağlantısındaki kritik yoğunluğu simgelemektedir. Serbest akış hızından kastedilen $\rho = 0$ olduğu durumdaki hızdır. Kritik yoğunluk ise yol akış kapasitesinin tam kullanıldığı durumdaki yoğunluktur. α_m, m bağlantısına ait bir parametredir. Bu üç parametre, değişken hız limitinin bir fonksiyonudur. Bunlara ilişkin fonksiyonlar aşağıda verilmiştir. Bu parametrelerin yıldızlı halleri, değişken hız kontrolü olmadığı, yani, bir kontrol değişkeni olan değişken hız limiti oranı, $b_m = 1$ olduğu durumdaki parametre değerlerini yansıtır.

$$v_{f,m}(b_m(k)) = v_{f,m}^* b_m(k) \quad (4.21)$$

$$\rho_{cr,m}(b_m(k)) = \rho_{cr,m}^* (1 + A_m(1 - b_m(k))) \quad (4.22)$$

$$\alpha_m(b_m(k)) = \alpha_m^* (E_m - (E_m - 1)b_m(k)) \quad (4.23)$$

Burada E_m ve A_m bağlantılara bağlı parametrelerdir. Yoğunluk denklemine benzer şekilde hız güncelleme denklemi (4.19), $i = 0$ için $v_{m,-1}$ değerine, $i = N_m - 1$ için de ρ_{m,N_m} değerine ihtiyaç duymaktadır. Eğer $td_{dku_m} = \text{Kök}$ ise $v_{m,-1}$; ya da, $td_{dba_m} = \text{Yaprak}$ ise ρ_{m,N_m} değerleri her bir k anı için sisteme dışarıdan verilmelidir. Diğer durumlarda ise bu değerler, sırasıyla bir önceki ya da bir sonraki bağlantı ile ilişki kurulmasına yaramaktadır. Bununla ilgili denklemler, n, m bağlantısının baş düğümü, yani $n = dba_m$ olmak üzere aşağıda verilmiştir.

$$v_{m,-1}(k) = \frac{\sum_{\mu \in I_n} v_{\mu, N_\mu - 1}(k) q_{\mu, N_\mu - 1}(k)}{\sum_{\mu \in I_n} q_{\mu, N_\mu - 1}(k)} \quad (4.24)$$

$$\rho_{m, N_m}(k) = \frac{\sum_{\mu \in O_n} \rho_{\mu, 0}^2(k)}{\sum_{\mu \in O_n} \rho_{\mu, 0}(k)} \quad (4.25)$$

Katılımlardaki durum bir kuyruk sistemi ile temsil edilmeye çalışılmıştır. Burada w_o, o katılımında beklemekte olan araç sayısını ifade eder. Bunun güncellenmesi de net araç sayısının hesabından ibarettir. Ancak burada zorluk, çıkan akış miktarının hesaplanmasındadır. Eğer katılımın önündeki yoğunluk belli bir yoğunluğun üzerindeyse, bunun olumsuz etkisini hesaba katabilmek için bir takım mekanizmalar geliştirilmiştir. Bu hesaplara dair fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$$w_o(k+1) = w_o(k) + T[d_o(k) - q_o(k)] \quad (4.26)$$

$$q_o(k) = r_o(k) \hat{q}_o(k) \quad (4.27)$$

$$\hat{q}_o = \min\{\hat{q}_{o,1}, \hat{q}_{o,2}\} \quad (4.28)$$

$$\hat{q}_{o,1} = d_o(k) + \frac{w_o(k)}{T} \quad (4.29)$$

$$\hat{q}_{o,2} = q_o^* \min\left\{1, \frac{\rho_{max} - \rho_{\mu,0}(k)}{\rho_{max} - \rho_{cr,\mu}}\right\} \quad (4.30)$$

Burada ρ_{max} tüm ağ üzerinde karşılaşılabilecek en büyük yoğunluk, μ katılımın önündeki bağlantının indisi, q_o^* , o katılımının bağlandığı bağlantı tamamen serbest ise ve yeterli talep var ise ana yola verebileceği en büyük akış miktarı, d_o ($\frac{arac}{h}$) ise o katılıma olan talep akışıdır. Bu denklemler aracılığıyla bir diğer kontrol değişkeni olan r_o , katılım oranı değişkenini de tanımış oluyoruz. Burada parametre, katılımdan normalde akacak olan akışın ne oranda akacağını kontrol etmemize yarayan değişkendir.

Böylece trafik sisteminin zamansal ve mekansal boyutta nasıl geliştiğini açıklayan modeli tanıtmış olduk. Bu trafiği kontrol etmemizdeki amacımız toplam bekleme ve seyahat süresini en küçükmek ise, bu amacımızı aşağıdaki $J : \mathbb{R}^{K_p(nb+nka)} \rightarrow \mathbb{R}$ gibi bir fonksiyonla ifade edebiliriz.

$$J(\mathbf{u}) = T \sum_{k=0}^{K_p-1} \sum_{m=0}^{nb-1} \sum_{i=0}^{N_m-1} \rho_{m,i}(k) L_m \lambda_m + T \sum_{k=0}^{K_p-1} \sum_{o=0}^{nka-1} w_o(k) \quad (4.31)$$

Burada K_p bizim planlama ufkuymuzdaki adım sayısıdır. Bu bölümde $n = 2nb + nka$ yani durum vektörü boyutu, $r = nb + nka$ yani kontrol vektörü boyutu olarak kullanacağız.

Eğer yukarıdaki (4.31) amaç fonksiyonunun en iyi değerini gradyan tabanlı yöntemler ile çözmek istiyorsak, $\nabla J : \mathbb{R}^{K_p r} \rightarrow \mathbb{R}^{K_p r}$ amaç fonksiyonu gradyanını hesaplamamız

gerekir. Bu hesaplara ilgili genel bir yöntem 3.3 bölümünde verilmiştir. Bu genel yönteme göre de durum geçiş fonksiyonlarının ve amaç fonksiyonunu oluşturan fonksiyonların, her k anı için, durum ve kontrol değişkenlerine göre kısmi türevlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bir sonraki bölümde bu kısmi türevleri yazacağız.

4.3.3 Kısmi türevler

Bu sistemin çözümünü bulmak için J fonksiyonunun, kontrol değişkenlerine göre gradyanını almamız gerekir. Bu gradyanını hesaplayabilmek için de durum değişkenlerini hesaplayan $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun, durum değişkenlerine ve kontrol değişkenlerine göre gradyanlarını hesaplamamız gerekir. Önce durum değişkenlerine göre kısmi türevleri, daha sonra da kontrol değişkenlerine göre kısmi türevleri inceleyelim. Son olarak da amaç fonksiyonunu oluşturan fonksiyonların kısmi türevlerini inceleyelim.

4.3.3.1 Durum değişkenlerine göre kısmi türevler

İlk olarak $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ matris değerli fonksiyonun bir k anındaki değerini, yani $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)}}$ sıfır olmayan elemanlarını inceleyelim. Bu matris, $\frac{\partial \rho_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2, i_2}(k)}$, $\frac{\partial \rho_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2, i_2}(k)}$, $\frac{\partial \rho_{m, i}(k+1)}{\partial w_o(k)}$, $\frac{\partial v_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2, i_2}(k)}$, $\frac{\partial v_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2, i_2}(k)}$, $\frac{\partial v_{m, i}(k+1)}{\partial w_o(k)}$, $\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial \rho_{m, i}(k)}$, $\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial \rho_{m, i}(k)}$, ve $\frac{\partial w_{o_1}(k+1)}{\partial w_{o_2}(k)}$ kısmi türevlerinden oluşur. Burada $(m_1, i_1), (m_2, i_2), (m, i)$ ikilileri tüm bağlantılar ve o bağlantıların tüm bileşenlerini, o, o_1, o_2 indisleri de tüm katılımları ifade eder. Bu türevler bazı noktalarda yoktur. Ancak pratikte bu türevsiz noktalarda, türev yerine sağdan veya soldan türevlerin alınması uygulamada olumsuz sonuçlara yol açmamıştır. Şimdi tüm bu kısmi türevleri belli indisler üzerinden inceleyelim.

Genel olarak $\frac{\partial \rho_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2, i_2}(k)}$ kısmi türevlerini düşündüğümüzde, farklı (m_1, i_1, m_2, i_2) dörtlüleri için farklı değerlerin karşımıza çıktığını görüyoruz. Şimdi bu durumları tek tek inceleyelim.

Bu indis dörtlüsü (m, i, m, i) şeklinde olursa, aşağıdaki iki durum söz konusu olur. $i > 0 \vee td_{dku_m} \neq \text{Katılım}$ olduğu durumda dikkate almamız gereken denklemler (4.15), (4.16) ve (4.18) denklemleridir ve kısmi türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial \rho_{m, i}(k+1)}{\partial \rho_{m, i}(k)} = 1 - \frac{T}{L_m} v_{m, i}(k) \quad i > 0 \text{ veya } td_{dku_m} \neq \text{Katılım} \quad (4.32)$$

$i = 0 \wedge td_{dku_m} = \text{Katılım}$ olduğu durumda ise, (4.15), (4.16) ve (4.18) denklemlerinin yanında (4.17), (4.27), (4.28) ve (4.30) denklemleri de devreye girmektedir, kısmi türevde aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial \rho_{m,0}(k+1)}{\partial \rho_{m,0}(k)} = 1 + \frac{T}{L_m \lambda_m} \left(r_o \frac{\partial \hat{q}_o(k)}{\partial \rho_{m,0}(k)} - v_{m,0}(k) \lambda_m \right) \quad td_{dku_m} = \text{Katılım} \quad (4.33)$$

Burada o, m bağlantısının başlangıç düğümüne bağlanan katılımın indisini göstermektedir, yani $o = kad_{dku_m}$. Bu türevde r_o değişkenin önünde $\beta_{dku_m}^m$ parametresi olduğu düşünülebilir ancak burada $td_{dku_m} = \text{Katılım}$ olduğundan bu parametre 1 değerini alır.

$$\frac{\partial \hat{q}_o(k)}{\partial \rho_{m,0}(k)} = \begin{cases} -\frac{q_o^*}{\rho_{max} - \rho_{cr,m}} & \frac{\rho_{max} - \rho_{m,0}(k)}{\rho_{max} - \rho_{cr,m}} < 1, \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.34)$$

İndis dörtlüsü $(m_1, 0, m_2 \in I_{dku_{m_1}}, N_{m_2} - 1)$ ve $td_{dku_{m_1}} \neq \text{Kök}$ olduğunda kısmi türev aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho_{m_1,0}(k+1)}{\partial \rho_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} = \frac{T}{L_{m_1} \lambda_{m_1}} \beta_{dku_{m_1}}^{m_1} v_{m_2,N_{m_2}-1}(k) \lambda_{m_2} \quad (4.35)$$

İndis dörtlüsü $(m, i > 0, m, i - 1)$ olduğunda kısmi türev aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho_{m,i}(k+1)}{\partial \rho_{m,i-1}(k)} = \frac{T}{L_m} v_{m,i-1}(k) \quad (4.36)$$

Yukarıda ele alınan durumlar dışındaki tüm durumlar için $\frac{\partial \rho_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevi sıfır değerini alır.

Şimdi $\frac{\partial \rho_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevlerini inceleyelim. Bir önceki türevler gibi (m_1, i_1, m_2, i_2) indis dörtlüleri bazında denklemleri sınıflandıralım. Oluşacak sınıflar da benzer olacaktır.

İndis dörtlüsü (m, i, m, i) olduğu durumdaki kısmi türev aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho_{m,i}(k+1)}{\partial v_{m,i}(k)} = -\frac{T}{L_m} \rho_{m,i}(k) \quad (4.37)$$

İndis dörtlüsü $(m_1, 0, m_2 \in I_{dku_{m_1}}, N_{m_2} - 1)$ ve $td_{dku_{m_1}} \neq \text{Kök}$ olduğu durumda kısmi türev aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho_{m_1,0}(k+1)}{\partial v_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} = \frac{T}{L_{m_1} \lambda_{m_1}} \beta_{dku_{m_1}}^{m_1} \rho_{m_2,N_{m_2}-1}(k) \lambda_{m_2} \quad (4.38)$$

İndis dörtlüsü $(m, i > 0, m, i - 1)$ olduğunda kısmi türev aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho_{m,i}(k+1)}{\partial v_{m,i-1}(k)} = \frac{T}{L_m} \rho_{m,i-1}(k) \quad (4.39)$$

Yukarıda ele alınan durumlar dışındaki tüm durumlar için $\frac{\partial \rho_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2, i_2}(k)}$ kısmi türevi sıfır değerini alır.

Şimdi $\frac{\partial \rho_{m, i}(k+1)}{\partial w_o(k)}$ kısmi türevini ele alalım. Bu türev tek (m, i, o) indis üçlüsü sınıfı için sıfırdan farklı bir değer alabilir. Bu $td_{dku_m} = \text{Giriş}$, $o = kad_{dku_m}$ ve $i = 0$ olduğu indis sınıfıdır. Bu durumdaki türev de aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \rho_{m, 0}(k+1)}{\partial w_{kad_{dku_m}}(k)} = \begin{cases} \frac{1}{L_m \lambda_m} \beta_{dku_m}^m r_o & \hat{q}_{o, 1} < \hat{q}_{o, 2} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.40)$$

Tüm $\rho_{m, i}$ güncelleme fonksiyonlarının tüm durum değişkenlerine göre türevlerini aldık ve ifadelerini yukarıda verdik. Böylece $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)}}$ matrisinin ilgili sütunlarını doldurabiliriz. Şimdi aynı matrisin bazı diğer sütunlarını dolduralım, $v_{m, i}$ güncelleme fonksiyonlarının tüm durum değişkenlerine göre kısmi türevlerini yazalım. Yukarıda kullandığımız yöntemi burada da kullanalım ve indis dörtlüleri sınıfları için türevleri inceleyelim.

İlk olarak $\frac{\partial v_{m_1, i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2, i_2}(k)}$ kısmi türevleri ile başlayalım. Gene (m_1, i_1, m_2, i_2) indis dörtlüsü sınıfları üzerinden ilerleyelim.

İndis dörtlüsü (m, i, m, i) tipinde olursa hesaba (4.19) ve (4.20) denklemleri giriyor ve türevler aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m, i}(k+1)}{\partial \rho_{m, i}(k)} = \frac{T}{\tau} \frac{\partial V}{\partial \rho_{m, i}(k)} - \frac{vT}{\tau L_m} \left(-\frac{1}{\rho_{m, i}(k) + \kappa} - \frac{\rho_{m, i+1}(k) - \rho_{m, i}(k)}{(\rho_{m, i}(k) + \kappa)^2} \right) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial V_{m, i}(k)}{\partial \rho_{m, i}(k)} = -\frac{1}{\rho_{cr, m}} \left(\frac{\rho_{m, i}(k)}{\rho_{cr, m}} \right)^{\alpha_m - 1} v_{f, m} e^{\left(\frac{\rho_{m, i}(k)}{\rho_{cr, m}} \right)^{\alpha_m}} \quad (4.42)$$

İndis dörtlüsü $(m, i < N_m - 1, m, i + 1)$ tipinde olursa türevler aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m, i}(k+1)}{\partial \rho_{m, i}(k)} = -\frac{vT}{\tau L_m} \frac{1}{\rho_{m, i}(k) + \kappa} \quad (4.43)$$

İndis dörtlüsü $(m_1, N_{m_1} - 1, m_2 \in O_{dbam_1}, 0)$ olduğu durumda (4.19) denkleminin yanında (4.25) denklemi de ekleniyor ve türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m_1, N_{m_1} - 1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2, 0}(k)} = -\frac{vT}{\tau L_m} \frac{1}{\rho_{m, i}(k) + \kappa} \frac{\partial \rho_{m_1, N_{m_1}}(k)}{\partial \rho_{m_2, 0}(k)} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \rho_{m_1, N_{m_1}}(k)}{\partial \rho_{m_2, 0}(k)} = \frac{2\rho_{m_2, 0}}{\sum_{\mu \in O_{dbam_1}} \rho_{\mu, 0}} - \frac{\sum_{\mu \in O_{dbam_1}} \rho_{\mu, 0}^2}{\left(\sum_{\mu \in O_{dbam_1}} \rho_{\mu, 0} \right)^2} \quad (4.45)$$

İndis dörtlüsü $(m_1, 0, m_2 \in I_{dku_{m_1}}, N_{m_2} - 1)$ formundaysa ve $td_{dku_{m_1}} \neq \text{Kök}$ ise (4.19) denkleminin yanında hesaba bu sefer (4.24) ve (4.16) denklemleri hesaba girer ve türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m_1,0}(k+1)}{\partial \rho_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} = \frac{T}{L_{m_1}} v_{m_1,0}(k) \frac{\partial v_{m_1,-1}(k)}{\partial \rho_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial v_{m_1,-1}(k)}{\partial \rho_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} = \frac{v_{m_2,N_{m_2}-1}^2 \lambda_{m_2}}{\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} q_{\mu,N_{\mu}-1}} - v_{m_2,N_{m_2}-1} \lambda_{m_2} \frac{\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} v_{\mu,N_{\mu}-1} q_{\mu,N_{\mu}-1}}{\left(\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} q_{\mu,N_{\mu}-1} \right)^2} \quad (4.47)$$

$\frac{\partial v_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial \rho_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevi yukarıda bahsedilen durumlar dışındaki tüm (m_1, i_1, m_2, i_2) indis dörtlüleri için sıfır değerini alır.

Şimdi $\frac{\partial v_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevlerine bakalım.

İndis dörtlüsü (m, i, m, i) olduğu durumda türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial v_{m,i}(k)} = 1 - \frac{T}{\tau} + \frac{T}{L_m} (v_{m,i-1}(k) - 2v_{m,i}(k)) \quad (4.48)$$

İndis dörtlüsü $(m, i > 0, m, i - 1)$ olduğu durumda türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial v_{m,i-1}(k)} = \frac{T}{L_m} v_{m,i}(k) \quad (4.49)$$

İndis dörtlüsü $(m_1, 0, m_2 \in I_{dku_{m_1}}, N_{m_2} - 1)$ olduğu durumda türev aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial v_{m_1,0}(k+1)}{\partial v_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} = \frac{T}{L_m} v_{m_1,i_1}(k) \frac{\partial v_{m_1,-1}(k)}{\partial v_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{m_1,-1}(k)}{\partial v_{m_2,N_{m_2}-1}(k)} &= \frac{2v_{m_2,i_2}(k) \rho_{m_2,i_2}(k) \lambda_{m_2}}{\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} q_{\mu,N_{\mu}-1}(k)} \\ &\quad - \rho_{m_2,i_2}(k) \lambda_{m_2} \frac{\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} v_{\mu,N_{\mu}-1}(k) q_{\mu,N_{\mu}-1}(k)}{\left(\sum_{\mu \in I_{dku_{m_1}}} q_{\mu,N_{\mu}-1}(k) \right)^2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$\frac{\partial v_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevleri yukarıda bahsedilmeyen diğer tüm durumlar için sıfır değerini alır.

$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial w_o(k)}$ kısmi türevleri ise her durumda sıfırdır.

$$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial w_o(k)} = 0 \quad (4.52)$$

$\frac{\partial v_{m_1,i_1}(k+1)}{\partial v_{m_2,i_2}(k)}$ kısmi türevlerini de yazdığımıza göre $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}$ matrisinin sütunlarından doldurmadığımız sadece w_o durum değişkenlerinin güncelleme fonksiyonlarının durum değişkenlerine göre kısmi türevleri kaldı. Bu son grup kısmi türevi de inceleyelim.

İlk önce $\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial \rho_{m,i}(k)}$ kısmi türevlerine bakalım. (o, m, i) indis üçlüsü $(o, m \in O_{dka_o}, 0)$ formatında olduğunda kısmi türev aşağıdaki gibidir. Diğer tüm durumlarda ise sıfırdır.

$$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial \rho_{m,0}(k)} = \begin{cases} Tr_o q_o^* \frac{1}{\rho_{max} - \rho_{cr,m}} & \hat{q}_{o,1} > \hat{q}_{o,2}, \frac{\rho_{max} - \rho_{m,0}}{\rho_{max} - \rho_{cr,m}} > 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.53)$$

$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial v_{m,i}(k)}$ kısmi türevlerinin hepsi istisnasız sıfırdır.

$$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial v_{m,i}(k)} = 0 \quad (4.54)$$

$\frac{\partial w_{o_1}(k+1)}{\partial w_{o_2}(k)}$ kısmi türevleri de ancak (o_1, o_2) indis ikisili (o, o) şeklinde olduğunda sıfırdan farklı bir değer almaktadır. Diğer tüm durumlarda bu kısmi türevler de sıfır değerini alır.

$$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial w_o(k)} = \begin{cases} 1 - r_o & \hat{q}_{o,1} < \hat{q}_{o,2}, \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.55)$$

Bu son kısmi türevleri de yazarak $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}$ matrisinin tüm sütunlarını hesaplayabilecek duruma geldik. Şimdi ∇J vektörünü bulmak için gerekli olan bir diğer kısmi türevler matris fonksiyonu olan $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times n}$ fonksiyonunun bir k anındaki değeri yani $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}$ matrisinin girdilerini hesaplamamız gerekir.

4.3.3.2 Kontrol değişkenlerine göre kısmi türevler

Bu bölümde $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}$ matrisinin elemanlarını hesaplayacağız. Bu elemanlar $\frac{\partial \rho_{m_1,i}(k+1)}{\partial b_{m_2}(k)}$, $\frac{\partial v_{m_1,i}(k+1)}{\partial b_{m_2}(k)}$, $\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial b_m(k)}$, $\frac{\partial \rho_{m,i}(k+1)}{\partial r_o(k)}$, $\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial r_o(k)}$ ve $\frac{\partial w_{o_1}(k+1)}{\partial r_{o_2}(k)}$ kısmi türevlerden oluşmaktadır. Şimdi sırayla bu kısmi türev fonksiyonlarını yazalım.

$\frac{\partial \rho_{m_1,i}(k+1)}{\partial b_{m_2}(k)}$ kısmi türevleri ile başlayalım. En karmaşık türevlerden birisi de budur. Bu türevi alabilmek için dikkat etmemiz gereken denklemler (4.15), (4.17), (4.18), (4.27), (4.28), (4.30) ve (4.22) denklemleridir. Bu kısmi türevi (m_1, i, m_2) indis üçlüsü sınıfları genelinde düşünersek, sadece $(m, 0, m)$ ve $td_{dku_m} = \text{Katılım olduğu durumda}$ sıfırdan

farklı bir değer alır. Diğer tüm indis üçlülere için bu türev sıfırdır. Bu türev aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{m,0}(k+1)}{\partial b_m(k)} &= \frac{T}{L_m \lambda_m} \frac{\partial q_{m,-1}(k)}{\partial b_m(k)} \\
\frac{\partial q_{m,-1}(k)}{\partial b_m(k)} &= \beta_{dku_m}^m \frac{\partial Q_{dku_m}(k)}{\partial b_m(k)} \\
\frac{\partial Q_{dku_m}(k)}{\partial b_m(k)} &= \frac{\partial q_o(k)}{\partial b_m(k)} \quad o = kad_{dku_m} \\
\frac{\partial q_o(k)}{\partial b_m(k)} &= r_o \frac{\partial \hat{q}_o(k)}{\partial b_m(k)}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{q}_o(k)}{\partial b_m(k)} &= \begin{cases} \frac{\partial \hat{q}_{o,2}(k)}{\partial b_m(k)} & \hat{q}_{o,2}(k) < \hat{q}_{o,1}(k) \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \\
\frac{\partial \hat{q}_{o,2}(k)}{\partial b_m(k)} &= \begin{cases} -q_o^* \frac{\rho_{max} - \rho_{m,0}(k)}{(\rho_{max} - \rho_{cr,m}(k))^2} \frac{\partial \rho_{cr,m}(k)}{\partial b_m(k)} & \frac{\rho_{max} - \rho_{m,0}}{\rho_{max} - \rho_{cr,m}} < 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \\
\frac{\partial \rho_{cr,m}(k)}{\partial b_m(k)} &= -\rho_{cr,m}^* A_m
\end{aligned}$$

Şimdi ise bu tezdeki tartışmasız en karmaşık ifadeye, hız denkleminin, değişken hız limiti oranına göre kısmi türevi $\frac{\partial v_{m,1,i}(k+1)}{\partial b_{m_2}(k)}$ ifadesine bakalım. Bu kısmi türev sadece (m, i, m) indis üçlüsü sınıf için sıfırdan farklı bir değer alır. Diğer tüm indis üçlülere için türev sıfırdır.

$$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial b_m(k)} = \frac{T}{\tau} \frac{\partial V_{m,i}(k)}{\partial b_m(k)} \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial V_{m,i}(k)}{\partial b_m(k)} = \frac{\partial v_{f,m}(k)}{\partial b_m(k)} e^{U(k)} + v_{f,m}(k) \frac{\partial U(k)}{\partial b_m(k)} e^{U(k)}$$

$$\text{Burada } U(k) = -\frac{1}{\alpha_m(k)} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}(k)} \right)^{\alpha_m(k)}$$

$$\frac{\partial U(k)}{\partial b_m(k)} = \frac{\partial \alpha_m(k)}{\partial b_m(k)} \frac{1}{\alpha_m(k)^2} Y(k) + \frac{\partial Y(k)}{\partial b_m(k)} \frac{-1}{\alpha_m(k)}$$

$$\text{Burada } Y(k) = \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}(k)} \right)^{\alpha_m(k)}$$

$$\frac{\partial Y(k)}{\partial b_m(k)} = \frac{\partial \alpha_m(k)}{\partial b_m(k)} Y \ln \frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}(k)} - \alpha_m(k) \frac{\partial \rho_{cr,m}(k)}{\partial b_m(k)} \frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}(k)^2} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}(k)} \right)^{\alpha_m(k)-1}$$

$$\frac{\partial v_{f,m}(k)}{\partial b_m(k)} = v_{f,m}^*$$

$$\frac{\partial \alpha_m(k)}{\partial b_m(k)} = -\alpha_m^*(E_m - 1)$$

Şimdi sırada $\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial b_m(k)}$ kısmi türevi var. Bu türev ancak $dka_o = dku_m$ olduğu durumda sıfırdan farklıdır. Bu türev aşağıda verilmiştir. Diğer tüm durumlarda kısmi türev sıfırdır.

$$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial b_m(k)} = -T \frac{\partial q_o(k)}{\partial b_m(k)} \quad (4.58)$$

Şimdi $\frac{\partial \rho_{m,i}(k+1)}{\partial r_o(k)}$ kısmi türevine bakalım. Bu türev ancak $dka_o = dku_m$ ve $i = 0$ olduğu durumda sıfırdan farklıdır. Bu türev aşağıda verilmiştir. Diğer tüm durumlarda kısmi türev sıfırdır.

$$\frac{\partial \rho_{m,0}(k+1)}{\partial r_o(k)} = \frac{T}{L_m \lambda_m} \hat{q}_o(k) \quad (4.59)$$

$\frac{\partial v_{m,i}(k+1)}{\partial r_o(k)}$ kısmi türevi tüm (m, i, o) indis üçlülere için sıfıra eşittir.

$$\frac{\partial v_{m,0}(k+1)}{\partial r_o(k)} = 0 \quad (4.60)$$

Son olarak da $\frac{\partial w_{o_1}(k+1)}{\partial r_{o_2}(k)}$ kısmi türevleri vardır. Bu türevler de ancak $o_1 = o_2 = o$ olduğu durumda sıfırdan farklıdır. Diğer tüm durumlarda sıfırdır.

$$\frac{\partial w_o(k+1)}{\partial r_o(k)} = -T \hat{q}_o(k) \quad (4.61)$$

Bu son kısmi türevle $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)}}$ matrisinin tüm sütunlarını doldurmuş oluyoruz. Son olarak amaç fonksiyonundaki fonksiyonların gradyanlarını da yazmamız gerekiyor. Bir sonraki bölümde bunları yazacağız.

4.3.3.3 Amaç fonksiyonu bileşenlerinin kısmi türevleri

METANET modelinden bahsederken (4.31) amaç fonksiyonunu yazmıştık. Burada k zaman indisi üzerinden yapılan toplamaları birleştirirsek, toplam içinde kalan ifadeyi $g_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$g_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \sum_{m=0}^{nb-1} \sum_{i=0}^{N_m-1} T \rho_{m,i}(k) L_m \lambda_m + \sum_{o=0}^{nka-1} T w_o(k) \quad (4.62)$$

Bu fonksiyona k diye bir zaman indisi vermiş, ve argümanlarının arasına $\mathbf{u}(k)$ kontrol değişkenlerini koymuş da olsak, bu fonksiyonlar ikisine de doğrudan bağlı değildir. Bunu en iyi kontrol probleminin genel çerçevesine uyması için yazdık.

$\nabla J(\mathbf{u})$ vektörünü hesaplayabilmemiz için $\nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)}}$ ve $\nabla_{\mathbf{u}} g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)}}$ vektörlerini hesaplamamız gerekir. Bunlardan ikincisi bir önceki paragrafta bahsettiğimiz gibi sıfırdır. Bu bölümde ilkinin fonksiyonları vereceğiz.

$\nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}$ vektörü $\frac{\partial g}{\partial \rho_{m,i}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial v_{m,i}}$ ve $\frac{\partial g_k}{\partial w_o}$ elemanlarından oluşur. Aşağıda bu kısmi türevlerin ifadeleri bulunmaktadır.

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_{m,i}} = TL_m \lambda_m \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_{m,i}} = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_o} = T \quad (4.65)$$

Şimdi trafik akışının değişken hız limitleri ve katılım düzenleyicileri kullanılarak nasıl iyileştirilebileceğini göstermek için bazı küçük örnekler vereceğiz.

4.4 Bazı Küçük Örnekler

Şimdi, değişken hız limiti ve katılım düzenleyicilerin, Bölüm 4.2’de anlatılan faydalarını örnekler üzerinde göstermeye çalışalım.

4.4.1 Değişken hız limiti

İlk olarak sadece değişken hız limitinin nasıl bir faydasının olabileceğini gösterelim. Bunun için bir şerit azalması senaryosu düşünelim. Üç şeritli bir yol, iki şerite düştüğünde bir darboğaz oluşur, geniş yoldaki hız düşer ve sıkışıklık zamanla geriye doğru yayılır. Bu ise daha önce anlatıldığı gibi bir kapasite düşüşüne sebep olur. Değişken hız limitleri, geniş yoldaki hız limitini düşürerek gelen akışı ilerideki yol kapasitesine yaklaştırmaya çalışır. Bu sayede sıkışıklık daha kısa olur ve hızlı akar [66].

Önce daha da basit bir örnekten başlayalım. İlki üç şeritli ikincisi iki şeritli olmak üzere, birbirine bağlı iki ayrı yol olsun. Bu yola olan talep ikinci yolun kapasitesinden biraz yüksek olsun. Bu durumda ikinci yoldaki yoğunluk giderek artacaktır. Şekil 4.1 grafiğinde değişken hız limiti uygulanmadığında ikinci yoldaki yoğunluğun kritik yoğunluk 50’ye yükseldiğini ve geçtiğini gözlemleyebiliriz. Şekil 4.2’te bulunan değişken hız limiti kontrolünün zaman içindeki değişimi verilmiştir. Değişken hız limiti kontrolü uygulandığında birinci yoldaki hız üstten sınırlandırılmış, ve bu sayede ikinci yoldaki yoğunluğun kritik seviyeye erken çıkması engellenmiştir. İkinci yoldaki yoğunluk gelişimi Şekil 4.3’te gözlemlenebilir. Burada planlama ufkunun

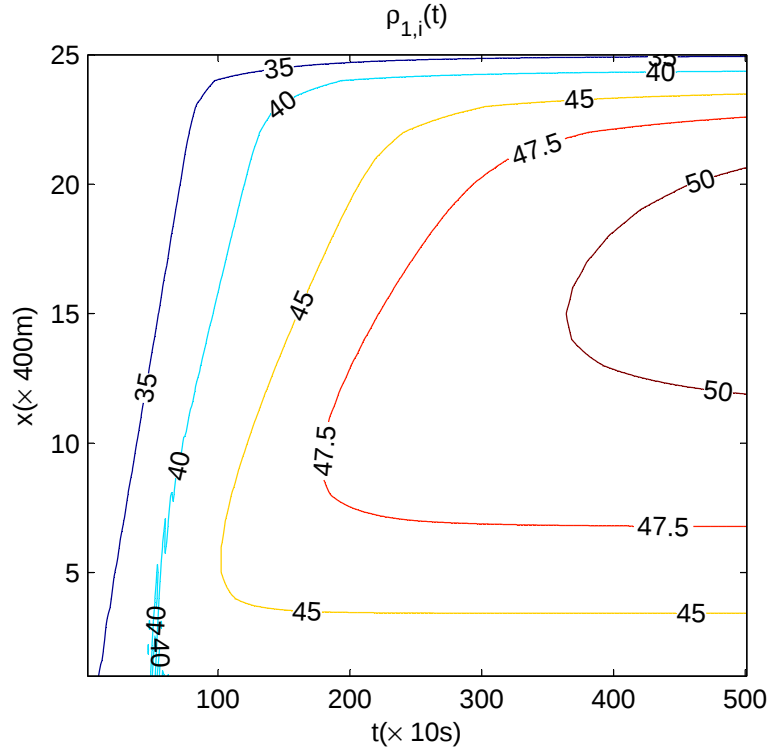
sonlarına doğru hız kontrolünün ortadan kalktığı görülmektedir. Bu sıkışıklığı sona attıktan sonra sıkışmanın veya sıkışmamanın amaç fonksiyonuna etkisi olmamasından kaynaklanmaktadır. Baş kısımda görülen dalgalanma ise sıkışıklığın yeni yeni başladığı anlara denk geldiği gözlemlenebilir. İkinci bağlantıda ise hiç bir hız limiti ile karşılaşılması, trafiğin bir an önce rahatlatılmasına fayda sağladığından beklenen bir durumdur. Bu durumda hız kontrolünün yoğunluğu zaman ekseninde öteye taşıdığı yargısına varabiliriz. O zaman aynı koşullarda planlama ufkunu daha öteye taşıdığımızda ne olduğuna bakmak öğretici olacaktır. Şekil 4.4 grafiğinde 9000s boyunca hiç kontrol uygulanmadığı durumda karşılaştığımız ρ gelişimini görebiliriz. Şekil 4.5(a) ve Şekil 4.5(b) grafiklerinde planlama ufkunun 7000s alınması, Şekil 4.5(c) ve Şekil 4.5(d) grafiklerinde ise planlama ufkunun 9000s alınması durumunda oluşan en iyi kontrol fonksiyonları ve yoğunluk gelişimlerinin grafikleri verilmiştir. Görüldüğü gibi her üç planlama ufkunda da oldukça benzer, sanki t eksenı boyunca birbirinin ölçeklenmiş kontrol fonksiyonları elde edilmiştir. Hepsinde de yoğunluğun kritik yoğunluğun üzerine çıkması geciktirilmeye çalışılmıştır.

Şimdi de katılım düzenleyicinin hız kontrolü ile birlikte kullanıldığındaki etkisini gösterecek bir örneği inceleyelim.

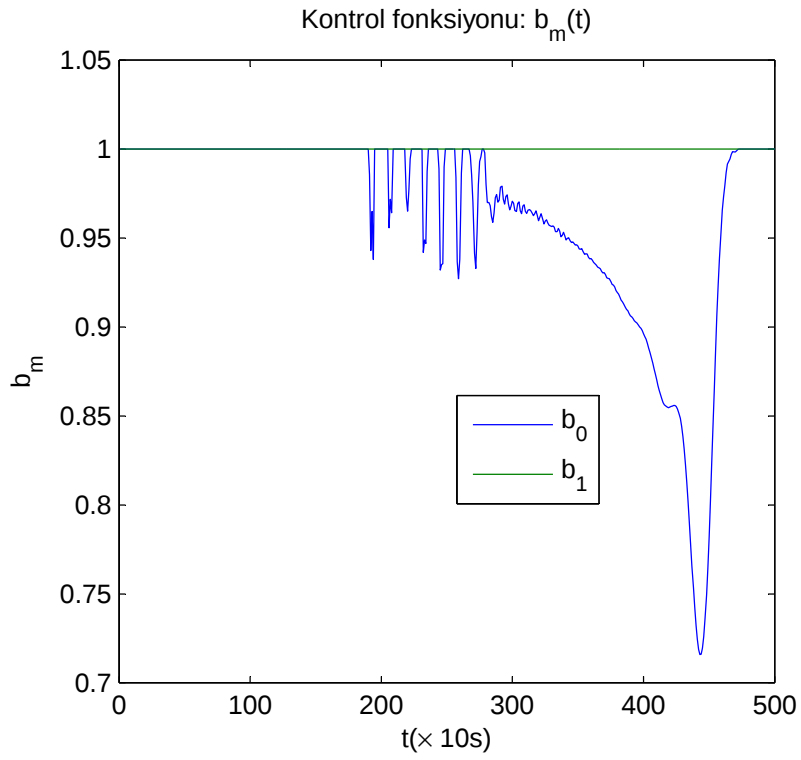
4.4.2 Katılım düzenleyici

Bunu da basit bir örnek üzerinde gözlemleyelim. Birbirine özdeş iki farklı bağlantı ve bunlardan ikincisine bir katılım olsun. Burada birinci yoldan ve katılımdan gelen akışların toplamı kapasiteyi geçtiği takdirde yoğunluk hızla artacaktır ve bir öncekine benzer durumlar ortaya çıkabilecektir, ancak burada yoğunluk artışının sebebi şerit daralması değil bir katılım olması durumudur.

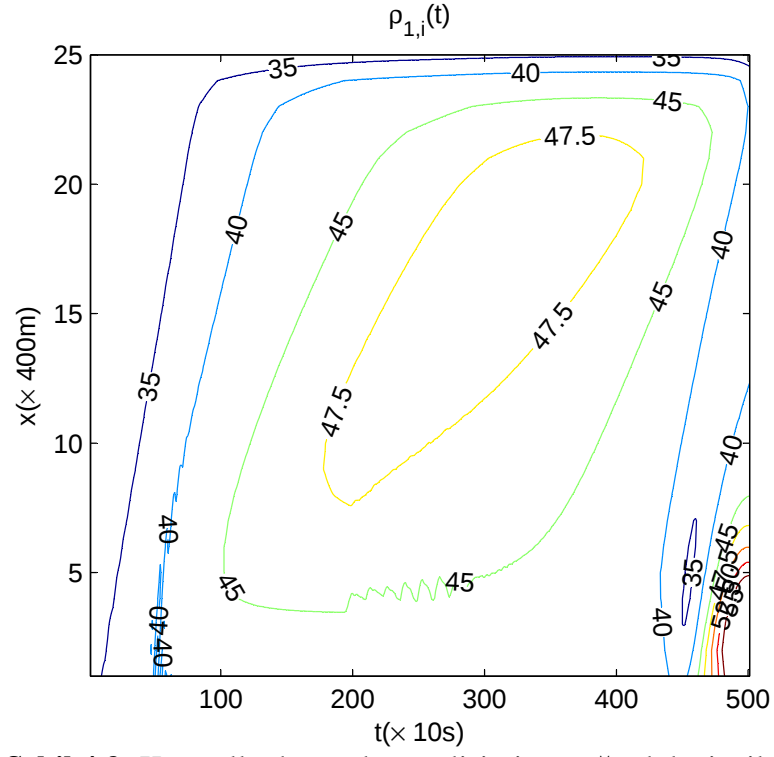
Şekil 4.6(a) eş yoğunluk grafiğinde kontrol olmadığında iki bağlantının birleşme noktası civarında zaman içinde oluşan yoğunluğu ve bu yoğunluğun mekan olarak nasıl geriye doğru yayıldığı açık olarak görülmektedir. Trafik yoğunluğunun geriye doğru yayılması, bir çoğumuzun günlük hayatta yaşadığı gibi, yoğunluğun yayıldığı bölgede bulunan çıkışların kısmen kullanışsız hale gelmesine sebep olmaktadır. Bu da amaç fonksiyonu toplam bekleme süresi olduğunda kapasite düşmesinin yanında ikinci bir etmen olarak karşımıza çıkar.



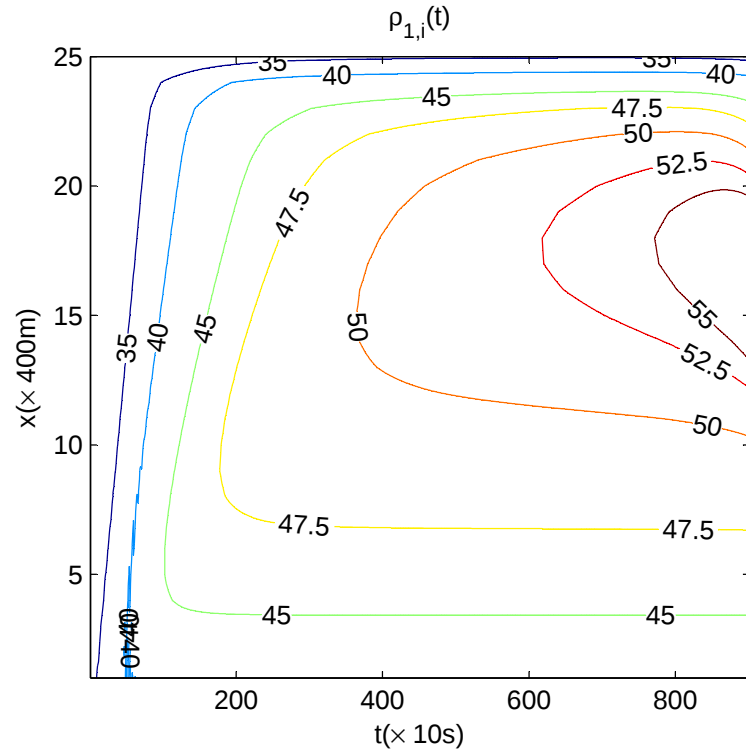
Şekil 4.1: Kontrolsüz durumda ρ gelişimi eş yoğunluk çizgileri.



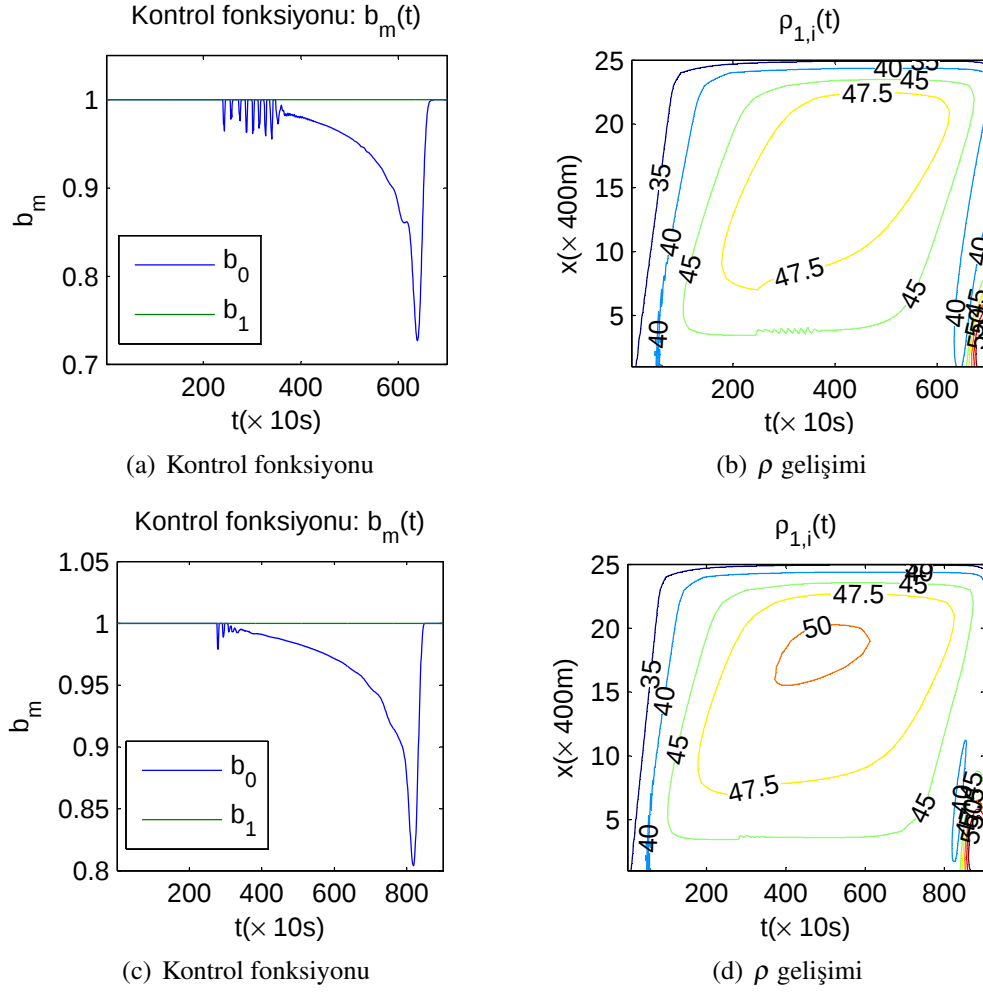
Şekil 4.2: Kontrol fonksiyonu.



Şekil 4.3: Kontrollü durumda ρ gelişimi eş yoğunluk çizgileri.

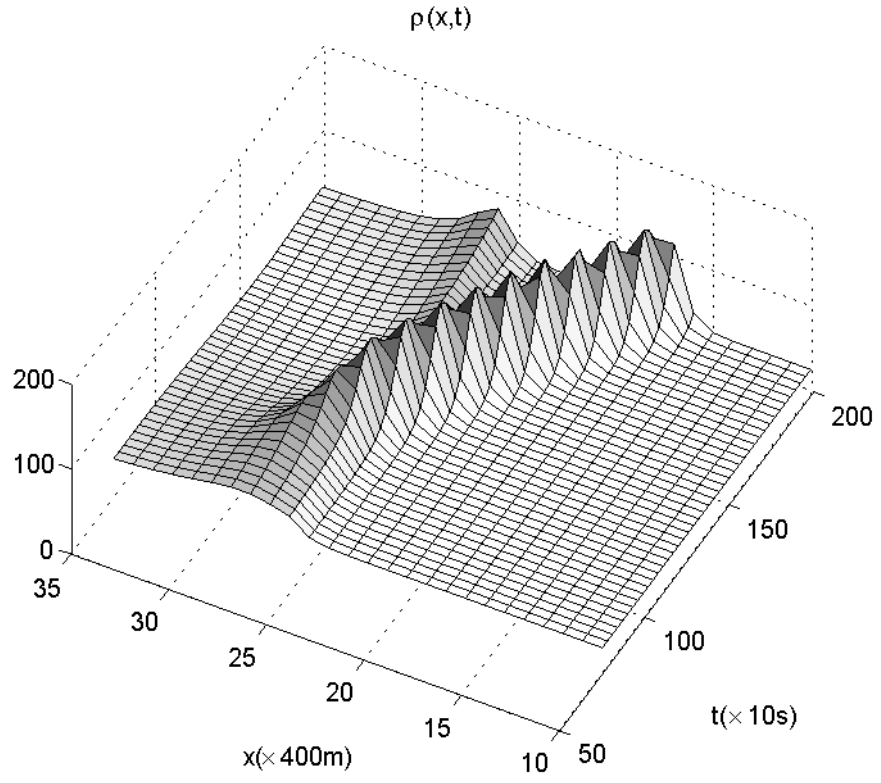


Şekil 4.4: ρ gelişimi 9000s.

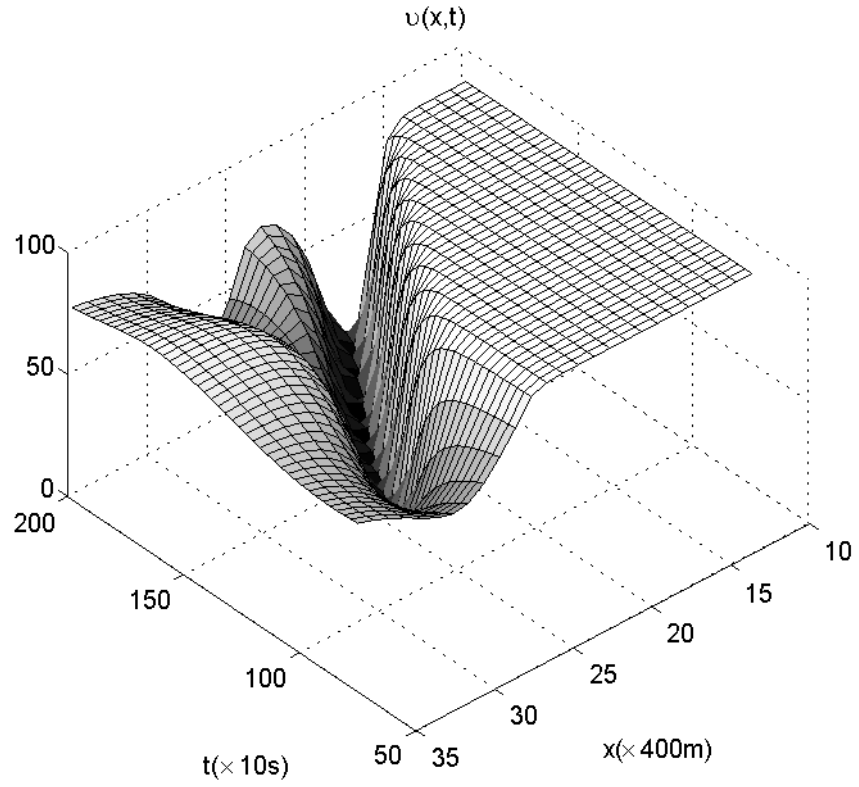


Şekil 4.5: Planlama ufkunun çözüme etkisi - (a), (b) 7000s; (c), (d) 9000s.

Trafik yoğunluğunun geriye doğru gelişimi şu şekilde özetlenebilir. Önce ikinci yola giren toplam akış, yolun kapasitesini aşar, bu durumda yoğunluk önce yavaş yavaş, kritik yoğunluk geçildiğinde ise hızla artar. Bu yoğunluk artışının iki etkisi vardır. İlk olarak mekansal olarak gerideki bölümdeki hız (4.19) hız güncelleme denklemindeki son terim sebebiyle azalır. Bu da o bölümden çıkan araç sayısını azaltacağından yoğunluğu arttırır. Bu mekanizma bu şekilde arkaya doğru devam eder. İkinci etki ise artık fazlasıyla artan ve ρ_{max} en büyük yoğunluğa yaklaşan yoğunluk, katılımdan gelen akışı (4.30), (4.29), (4.28) ve (4.27) denklemleri aracılığıyla kendiliğinden kısıtlar. Bu da ikinci yola giren toplam akışı azaltır ve hızı tekrar arttırır. Bu hız artışı da aynı ilk etkideki gibi geriye doğru yayılır. Hız gelişimini Şekil 4.6(b) grafiğinde görebiliriz. Bu problem için bir kontrol, yani yollar için değişken hız limitleri ve katılım için katılım oranı, bulup bu kontrolü uygulamaya koyduğumuzda bunun etkisi benzer şekilde



(a) ρ gelişimi



(b) ρ gelişimi

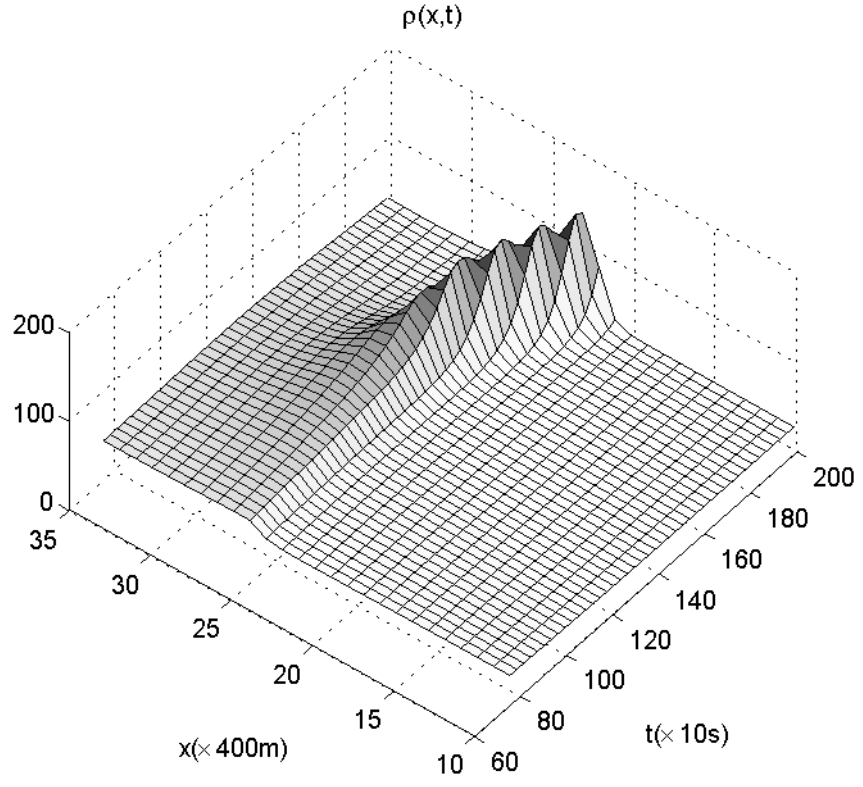
Şekil 4.6: Kontrolsüz durumda yoğunluğun geriye yayılımı.

yollardaki yoğunluğu ileriye doğru itmekte, kuyruktakileri ise bekletmektedir. İlk bakışta yollardaki yoğunluğu ileriye itmenin faydası olmayacağı düşünölebilir ancak günlük trafik koşullarında, yoğunluğu sadece belli bir saat aralığında yoğun, bunlar dışında ise o kadar yoğun olmadığı gözlemlenebileceğinden, yoğunluğu zamanda ileri itmenin faydası anlaşılacaktır.

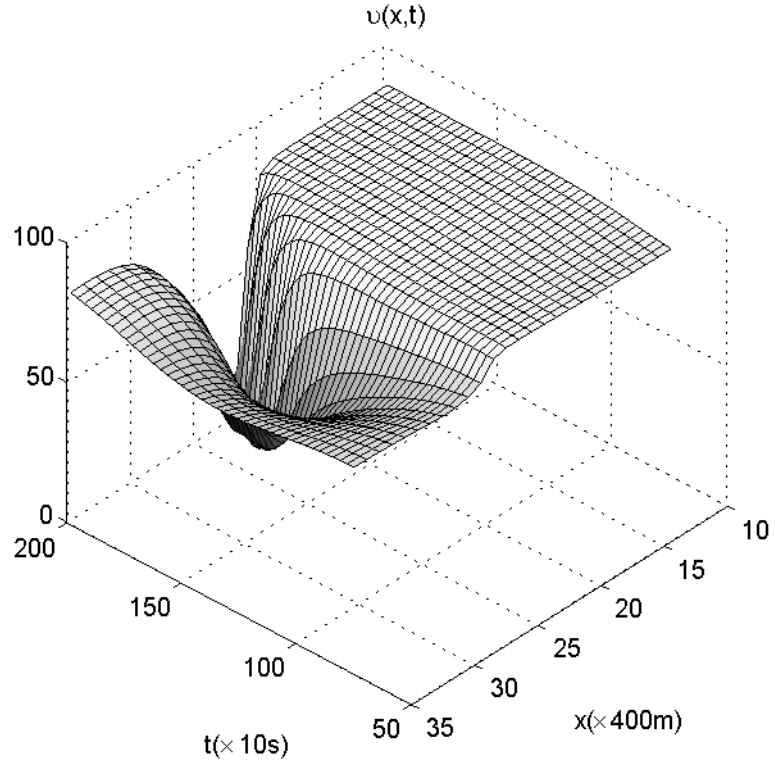
Şekil 4.7(a) ve Şekil 4.7(b) grafiklerinde, aynı probleme, Şekil 4.8 grafiğinde gösterilen kontroller uygulandığında, sırasıyla ρ ve ν gelişimlerini görebiliriz. Şekil 4.9 grafiğinde ise kontrollü ve kontrolsüz durumda katılımdaki kuyruk uzunluğunun gelişimini görebiliriz.

4.5 İstanbul Fatih Sultan Mehmet (FSM) Köprüsü Modeli

İstanbul boğazını geçen köprüler günümüzde ciddi trafik sıkışıklıklarının yaşandığı yerlerdir. Yerleşim yeri Asya yakasından iş yerleri Avrupa yakasına sabahları ve tersi yönde akşamları önemli yoğunluklar yaşanmaktadır. Sıkışıklıkların yol kapasitesini nasıl olumsuz etkilediğini açıklamış ve küçük örneklerle göstermiştik. Bu kapasite daralması yeni köprülerin yapılması ihtiyacını doğurmaktadır [144]. Yeni köprülerin yapılması, trafik talebini karşılamakla birlikte şehircilik anlamında tartışmalı bir konudur. Bu köprülerin kapasitelerinin etkin bir şekilde kullanılması, köprülerin olumsuz etkilerini en aza indirmek açısından önem arz etmektedir. Buna rağmen boğaz geçişlerinin etkinleştirilmesine yönelik akademik çalışmalar henüz yaygınlaşmamıştır. Şahin ve Akyıldız, Boğaziçi Köprüsü'ndeki gişeleri incelemiştir [145]. Çetiner ve diğerleri makalelerinde İstanbul Büyükşehir Belediyesine bağlı Trafik Kontrol Merkezinden aldıkları trafik yoğunluk verilerini kullanarak, trafik talep tahmini yapmışlardır [146]. Demiral ve Celikoğlu Boğaz geçişleri için bir geribesleme kontrolü olan ALINEA metodunu kullanmışlardır [147]. Trafik yoğunluğunun ve hızların otomatik ölçölmesi konusunda bazı çalışmalar bulunmaktadır [148, 149]. Köprüler için değişken hız limitlerinin ve katılım düzenleyicilerin bütünsel olarak en iyilenmesine dayanan bir sistem kullanılmamıştır. Bu bölümde böyle bir çalışmanın ilk ayağı olabilecek bir yapı kurulacaktır.

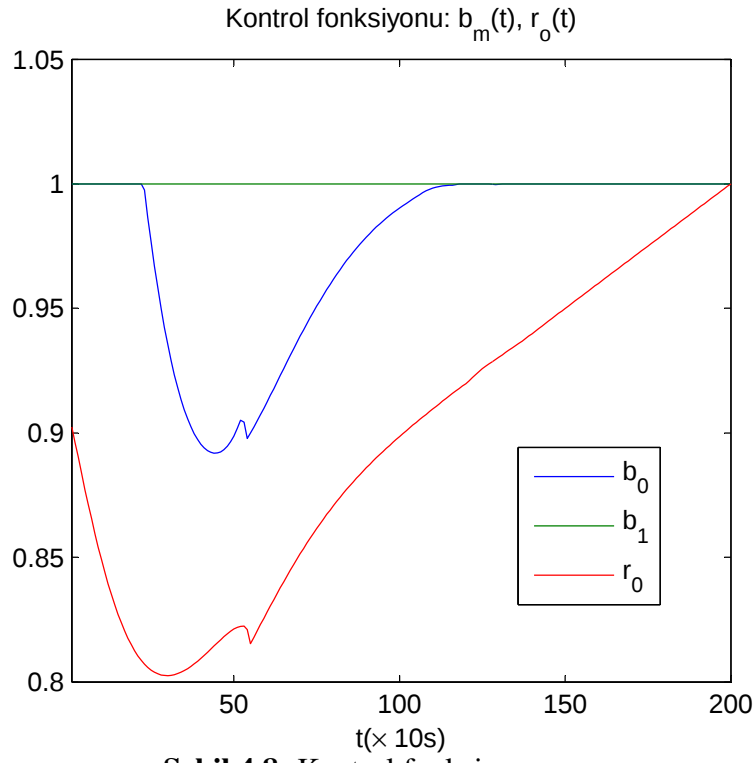


(a) ρ gelişimi

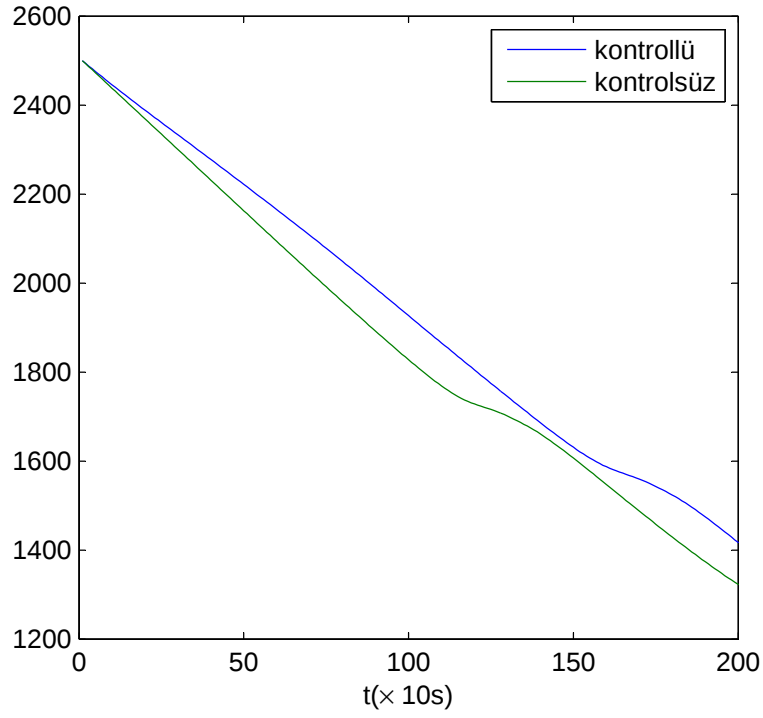


(b) v gelişimi

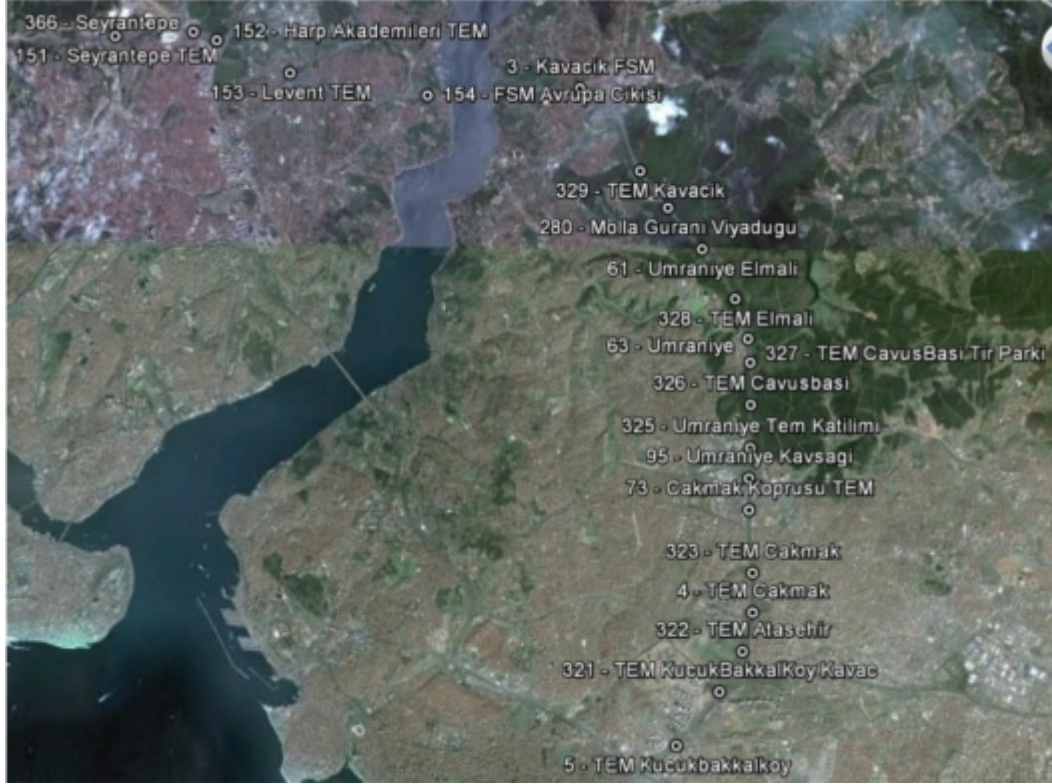
Şekil 4.7: Kontrollü durumda yoğunluğun zamanda ötelenmesi.



Şekil 4.8: Kontrol fonksiyonu.



Şekil 4.9: w gelişimi.

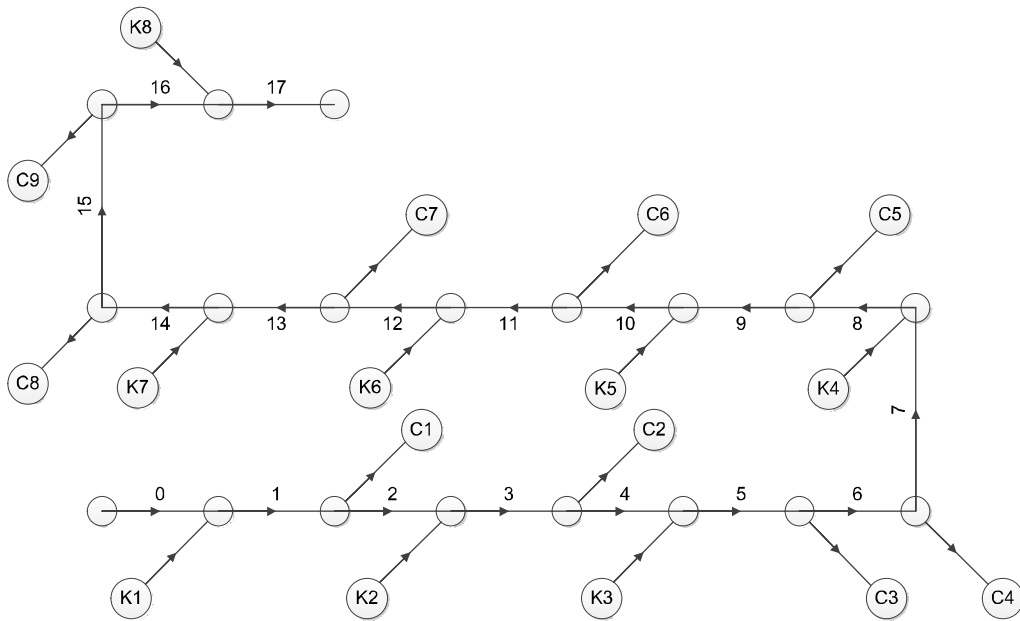


Şekil 4.10: FSM Köprüsü Yolu.

Bu tez kapsamında FSM köprüsünün Anadolu yakasından Avrupa yakasına geçiş yönü incelenecektir. Şekil 4.10’de bu güzergahta yerleştirilmiş olan algılayıcıların yerleri işaretlenmiştir.

Şekil 4.11’de ise bu güzergâhtaki katılım ve çıkışlar arasında kalan yol parçaları ayrı birer bağlantı olarak alındığında ortaya çıkan temsili ağ yapısı verilmiştir. Okların üzerindeki sayılar bağlantının numarasını göstermektedir. Buradaki çıkış ve girişler Çizelge 4.2’de verilmiştir.

Bağlantıların uzunlukları ve şerit sayıları da Çizelge 4.3’de verilmiştir. Bölüm 4.3.2’de açıklanan ve modelde bağlantıya özgü olan bir takım parametreler bu çalışmada tüm bağlantılar için sabit alınmıştır. Bu parametre değerleri ile birlikte, tüm ağda sabit olan bazı başka parametre değerleri, Çizelge 4.4’de verilmiştir. Bu örnekte 1200 adımlık yani 3 saat 20 dakikalık planlama ufku kabul edildiğinde değişik senaryolar için en iyi kontrolü bulmaya çalışacağız. Bu senaryoları katılımlara olan talepler temelinde hazırlayacağız. Bunu yapmadan önce senaryolardan bir tanesi için, Bölüm 3.2.2’de açıklanan, izdüşüm yolu üzerinde armijo kuralı için kullanılan



$\bar{s}$ parametresinin elde edilen en iyi çözüme olan etkisini gözlemleyelim. Bunun için yapılan ilk gözlem, algoritmada atılın her adım için $\bar{s} = 0,022$ mertebesine gelene kadar $\bar{s}$ değerinin küçültüldüğüdür. Bu gözleme dayanarak $\bar{s} \in [0,0215 \ 0,0225]$ değerleri arasında 100 farklı değer için en iyileme algoritması çalıştırılmıştır. Elde edilen iyileştirme oranları Şekil 4.12 grafiğinde gösterilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi bu parametrenin algoritmanın yakınsadığı çözüme olan etkisi öngörülebilir bir yapıya sahip değildir. Bu da farklı değerlerin deneme yanılma yöntemiyle denenmesinin ya da alternatif yöntemler kullanılmasının gerektiğini önermektedir. Bu tezde farklı değerlerin denenmesi yöntemi benimsenmiştir.

4.5.1 Senaryoların oluşturulması

Farklı talep senaryoları oluşturulması aşikâr bir iş değildir. Trafik ağının farklı noktalarında, farklı miktarlarda ve farklı zamanlarda talep oluşabilir. Bu yüzden senaryoları şu başlıklar altında oluşturmak daha uygun olacaktır.

- Ortak talep fonksiyonu (OTF): yoğun talebin, tüm katılımlarda aynı anda başlaması,

Çizelge 4.2: FSM yoluna giriş ve çıkışlar.

Katılım		Çıkış	
K1	Küçükbakkalköy	Ç1	Anadolu Otoyolu
K2	Çamlıca Bağlantı Yolu	Ç2	Çamlıca Bağlantı Yolu
K3	Anadolu Otoyolu	Ç3	Şile
K4	Ümraniye + Şile	Ç4	Ümraniye
K5	Anadolu Kavağı	Ç5	Kavacık
K6	Kavacık	Ç6	Anadolu Kavağı
K7	Baltalimanı Armutlu	Ç7	Baltalimanı
K8	Seyrantepe	Ç8	Levent
		Ç9	Seyrantepe

- Gecikmeli ortak talep fonksiyonu (GTF): yoğun talebin, incelenen yolun sonuna daha yakın katılımlarda daha geç başlaması,

Zaman aralıklarının uzunluğunu da iki başlık altında inceleyebiliriz.

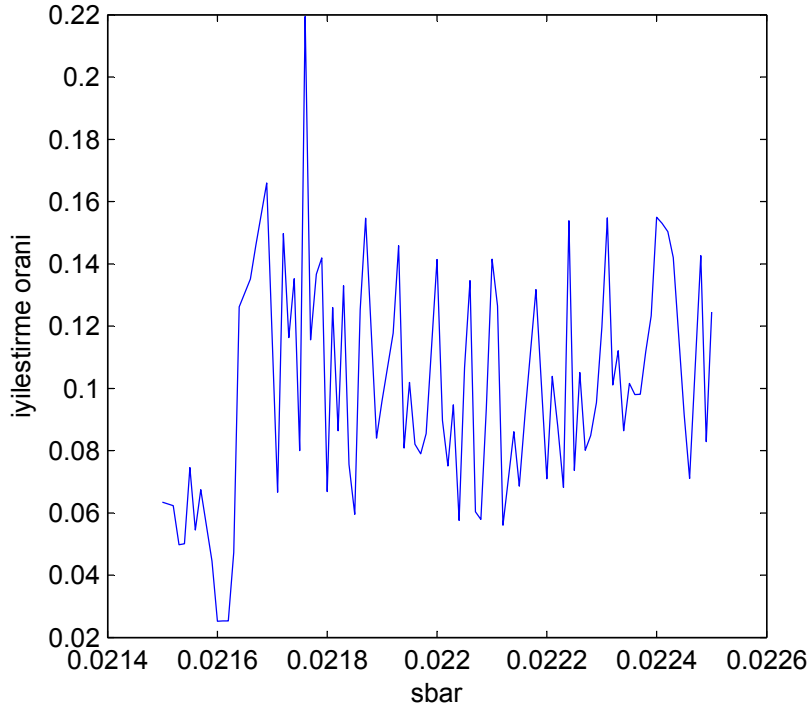
- Uzun yoğun zaman aralığı (UYZ): yoğunluk yaşanan zaman aralıklarının uzun olması,
- Kısa yoğun zaman aralığı (KYZ): yoğunluk yaşanan zaman aralıklarının kısa olması.

Bu başlıklar altında oluşturacağımız senaryolar ise talep yoğunluğu bazında olacaktır.

- Yoğun talep (YT),
- Orta yoğun talep (OT),
- Yoğun olmayan, düşük talep (DT).

Çizelge 4.3: Bağlantı özellikleri.

Bağlantılar									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Uzunluk (km)	0,4	0,5	0,6	0,2	0,9	2,5	0,4	0,8	0,8
Şerit Sayısı	3	4	3	4	4	4	4	4	4
Bağlantılar									
	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Uzunluk (km)	0,8	4,5	0,9	3,7	0,6	0,3	2,5	0,9	10
Şerit Sayısı	4	4	4	4	4	4	4	4	4



Şekil 4.12: $\bar{s}$ in iyileştirme oranına etkisi.

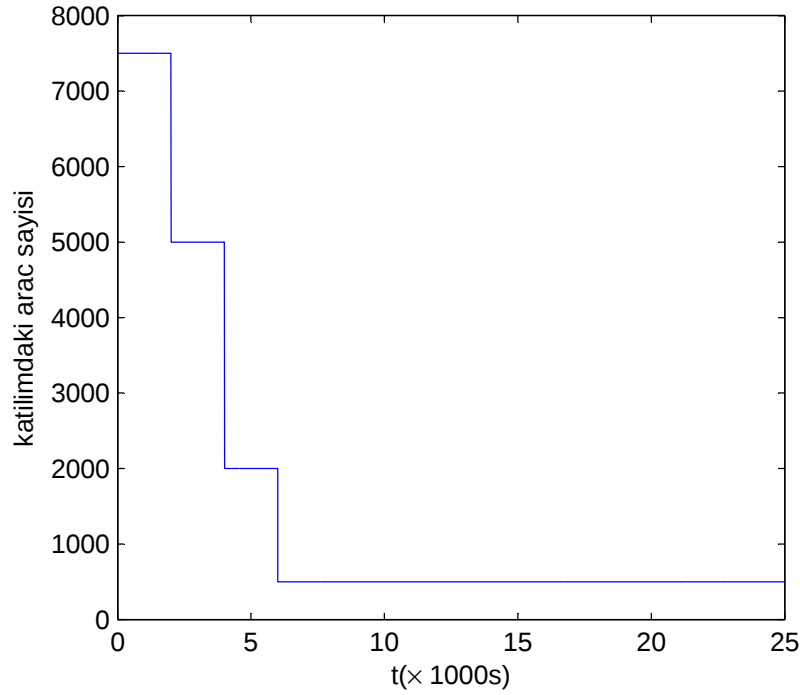
İlk senaryoda (OTF, UYZ, YT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.13 grafiğinde verilmiştir.

Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.14(a) ve 4.14(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.15(a) ve 4.15(b) grafiklerinde verilmiştir.

Önce serbest ρ gelişim grafiğine bakalım. Tüm katılımlardan sonra yoğunluklar gözlemlenmektedir. Katılımlara olan talebin en yoğun olduğu dönem sadece 2000s sürmüştür, 17. yoldaki yoğunluğun 6000s civarına kadar, 1. yoldaki yoğunluğun ise 22000s civarına kadar sürdüğü gözlemlenmektedir. 17. yoldaki yoğunluğun küçük

Çizelge 4.4: Model parametreleri.

Bağlantıya özel parametreler		Ağ genelindeki parametreler	
α_m^*	2,3	$T(s)$	10
$\rho_{cr,m}^* (\frac{narac}{km \cdot serit})$	50	$\tau(s)$	30
$v_{f,m}^* (\frac{km}{h})$	100	$\kappa (\frac{narac}{km \cdot serit})$	20
E_m	1,8	$v (\frac{km^2}{h})$	20
A_m	0,6	ρ_{maks}	200

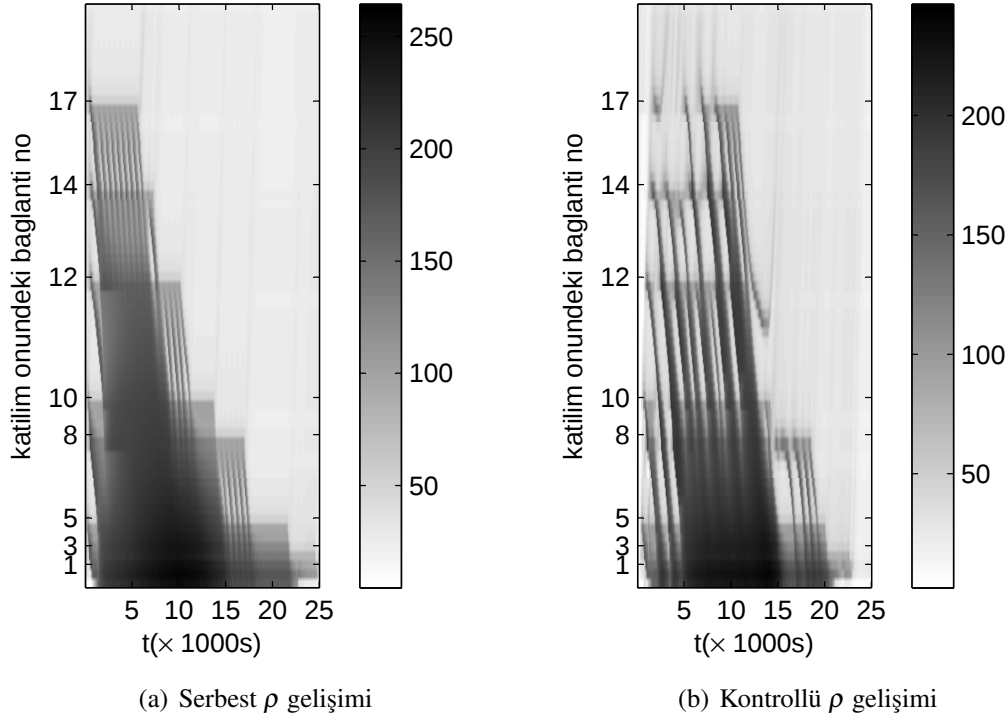


Şekil 4.13: Senaryo 1 (OTF, UYZ, YT) için talep fonksiyonu.

örneklerde de gözlemlendiği gibi geriye doğru yayıldığını görebiliriz. Geriye doğru yayılan bu yoğunluk önceki katılıma kadar ulaştığında, bu katılımdan gelen talebin yarattığı yoğunlukla birleşmekte ve toplam yoğunluk daha da artmakta dolayısıyla yoğunluğun çözülmesi de daha uzun sürmektedir. Grafikte tabana doğru yayılarak artan koyulaşmanın sebebi budur. Bu ayrıca serbest w gelişim grafiğindeki farklı boyutlardaki tepeciklerin de açıklamasıdır.

Serbest hal grafiğinde değişik boyutlarda tepecikler olarak tabir edebileceğimiz eğriler bulunmaktadır. Bunlardan en küçüğü son katılıma ait kuyruk uzunluğunu belirtir. Yolum baş taraflarına doğru yaklaştıkça, tepeceğin büyüdüğünü gözlemleriz. Bunun sebebi yukarıda açıklanan durumdur. Yoğunluk yolun sonundan başına doğru artarak yayılmaktadır. Yoğunluk arttıkça katılımlardan ana yola akış, küçük örneklerde de gösterildiği gibi, gerçekleşmemektedir. Bu ise kuyruk uzunluğunun artmasına yol açmaktadır. Ana yoldaki yoğunluk miktarı ve süresi arttıkça katılımdaki kuyruk uzunluğu da artmaktadır. Kuyruk uzunluğu, ancak ana yoldaki yoğunluk belli bir yoğunluğun altına düştükten sonra tekrar azalmaya başlar.

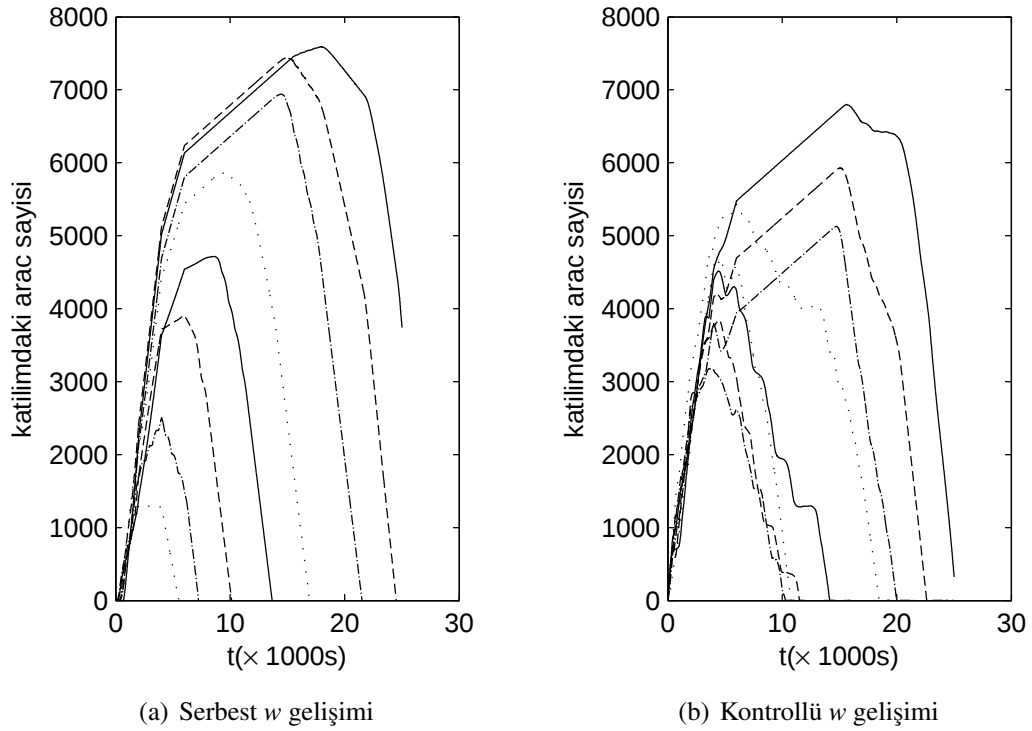
Serbest ve kontrollü ρ gelişimi karşılaştırıldığında farkedilebilecek ilk önemli değişiklik koyuluk skalasında kendini göstermektedir. Bu skalaların en büyük



Şekil 4.14: Senaryo 1 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

değerlerinden kontrollü durumda en büyük sıkışmanın azaldığını gözlemleyebiliriz. Bunun yanı sıra, 17 numaralı bağlantı civarında, serbest durumda gözlemlenen yoğunluğun, kontrollü durumda gerçekleşmediğidir. Buna sebep olan şey ise bu yolun öncesindeki katılımdan gelen akışın katılım düzenleyici marifetiyle engellenmesidir. Benzer durum azalan bir etkiyle daha önceki katılımlarda da kendini göstermektedir. Bu, tahmin edilebileceği gibi, söz konusu katılımlardaki kuyruk uzunluğu grafiğindeki küçük tepeciklerin büyümesine, büyük tepeciklerin küçülmesine, yani sonlardaki katılımlardakilerin daha uzun süre beklemesine, daha baştakiler içinse bekleme sürelerinin kısalmasına yol açmıştır. Dikkat edilirse, kontrollü durumdaki kuyruk uzunluklarının en uzun hali, kontrolsüz duruma göre daha kısadır. Son katılımlardaki sürücülerin lehine gelişen bu durum, daha önce Bölüm 4.2’de anlatıldığı gibi, sistem lehine sonuçlar yaratmıştır. Bu senaryo için bu yarar, toplam bekleme süresini 0,10 oranında azaltmak olarak sayısallaştırılmıştır.

Senaryo 1 için açıklanan temel gözlemler, diğer senaryolar için de geçerlidir. Bundan sonraki senaryolarda, grafikler için, Senaryo 1’deki gibi genel trafik akış prensiplerini değil, o senaryoya has özellikler tartışılacaktır.



Şekil 4.15: Senaryo 1 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

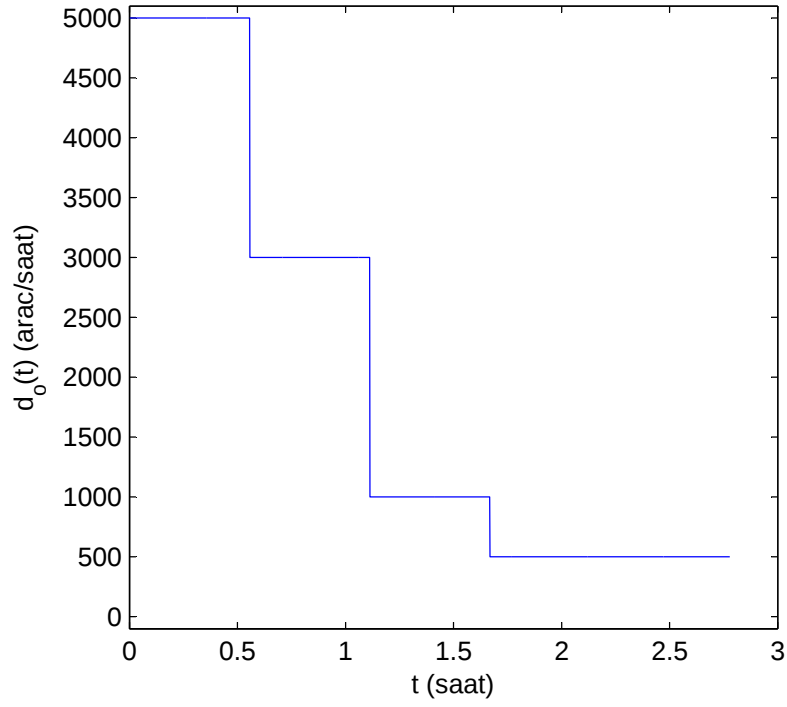
İkinci senaryoda (OTF, UYZ, OT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.16 grafiğinde verilmiştir.

Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.17(a) ve 4.17(b) yoğunluk grafiklerinde verilmiştir. Benzer şekilde kuyruk uzunluğu gelişimleri de Şekil 4.18(a) ve 4.18(b) grafiklerinde verilmiştir.

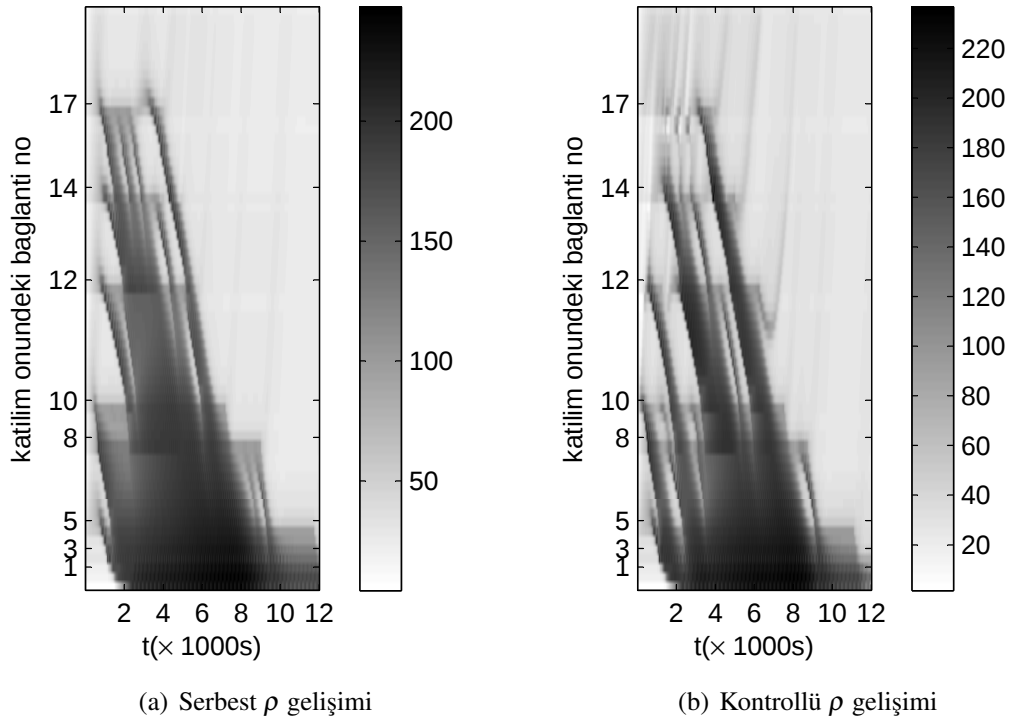
Bu grafikler incelendiğinde de ilk senaryodakine benzer şekilde özellikle yolun sonuna yakın katılımlara olan talebin, ana yola hemen verilmesinin önüne geçilmiş olduğu gözlemlenebilir. Elde edilen kuyruk uzunluğu grafikleri de ilk senaryoya benzemektedir. Ancak bu senaryoda elde edilen iyileşme 0.06 oranındadır.

Üçüncü senaryoda (OTF, UYZ, DT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.19 grafiğinde verilmiştir.

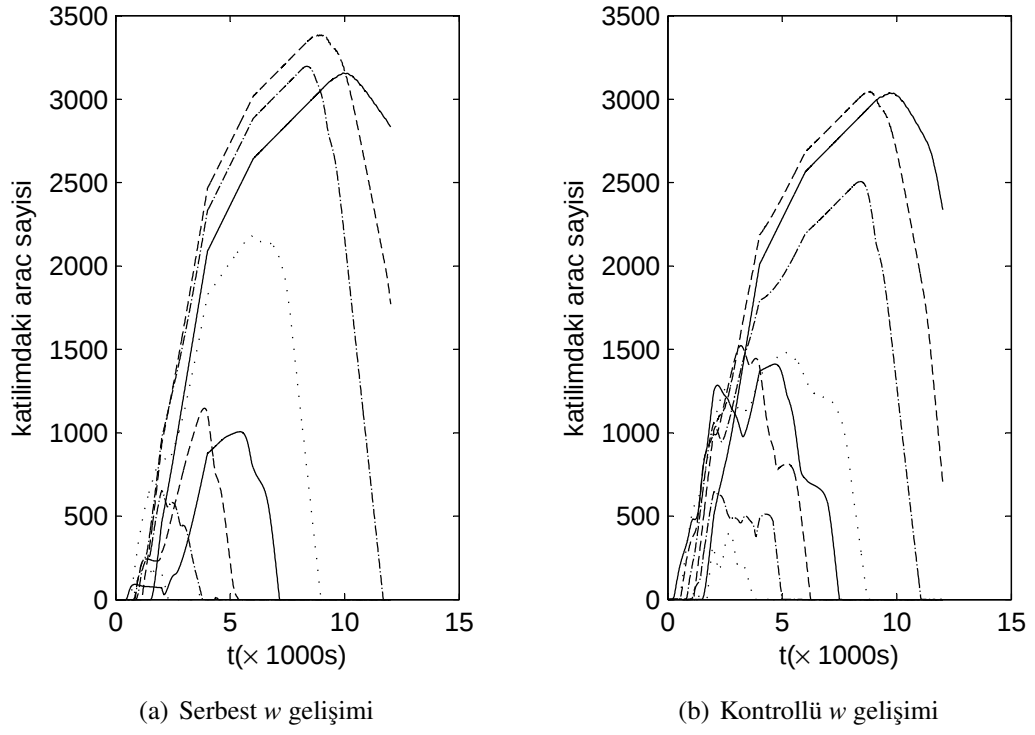
Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.20(a) ve 4.20(b) yoğunluk



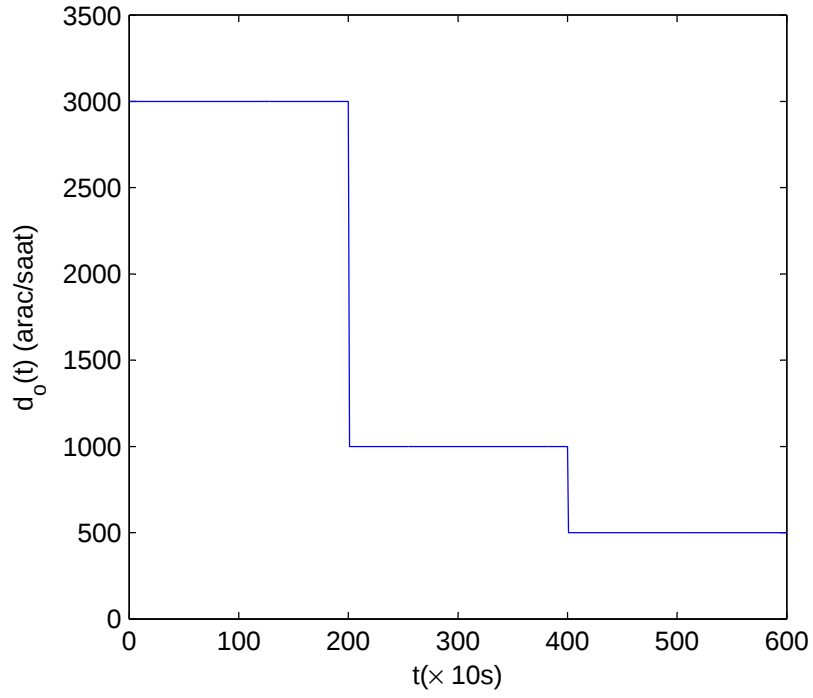
Şekil 4.16: Senaryo 2 için talep fonksiyonu.



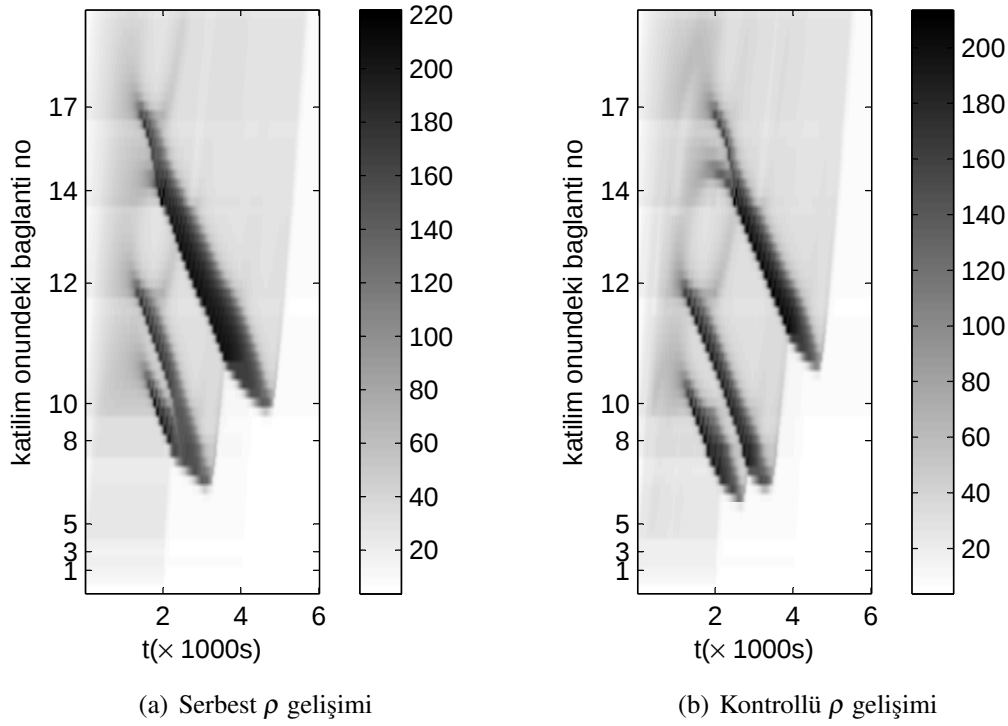
Şekil 4.17: Senaryo 2 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.18: Senaryo 2 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.



Şekil 4.19: Senaryo 3 (OTF, UYZ, DT) için talep fonksiyonu.

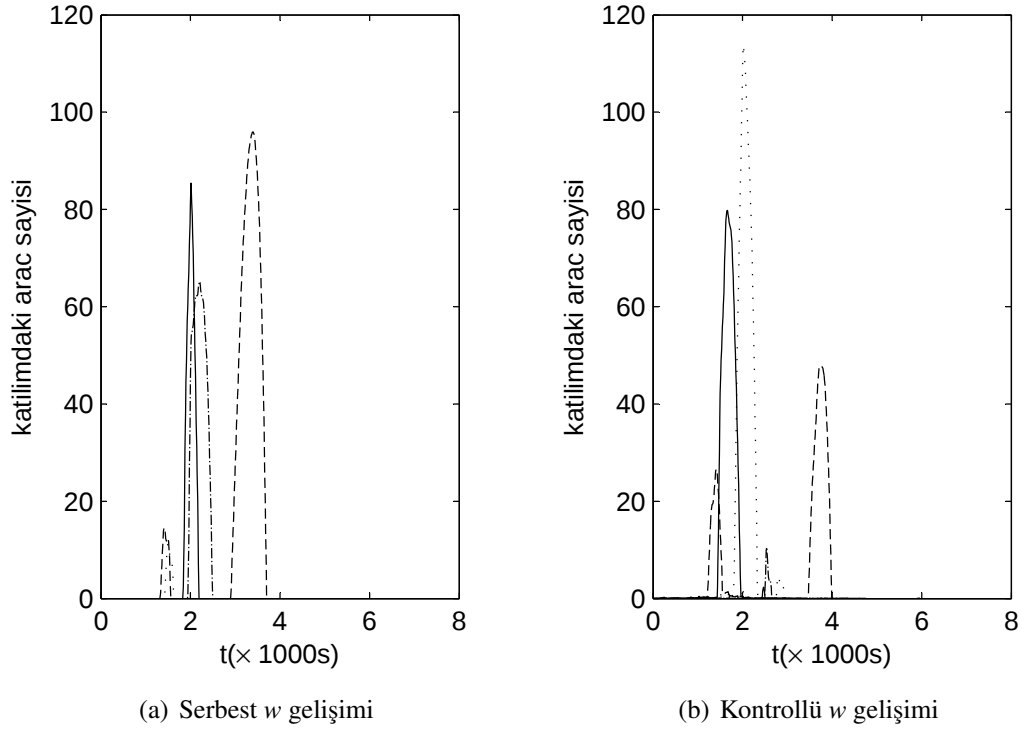


Şekil 4.20: Senaryo 3 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.21(a) ve 4.21(b) grafiklerinde verilmiştir.

Bu grafiklerden anlaşılacağı gibi, düşük yoğunluklu talepten dolayı, yoğunluk bundan önceki iki senaryoya göre daha geç ortaya çıkmıştır. Serbest ρ gelişimi grafiğinde son dört katılımin yoğunluklarının ikişerli şekilde üstüste çakıştığı gözlemlenebilir. Kontrollü hale bakıldığında ise kontrolün bu yoğunlukları çakışmalarından kurtarmaya çalıştığını, bunlardan biri için başarılı olurken diğeri için olamadığını gözlemleyebiliriz. En yüksek yoğunluk, gene bu sıkışıklıkları çakıştırmama çabası sayesinde daha biraz daha düşürülmüştür. Burada kuyruk uzunluğunun kısalığından, ve zaman olarak başlarda katılımlarda kuyruk oluşmamasından kontrol oransal olarak daha çok değişken hız limitleri aracılığıyla gerçekleşmiştir. w grafiklerinin her ikisinde de kuyruğun artmasına denk gelen zamanlar, o katılımin önündeki yoldaki yoğunluğun arttığı zamanlara denk gelmiştir. Yani oluşan kuyruklar, katılım düzenleyici marifeti değil, katılım dinamiğinin kendisinden kaynaklanmaktadır.

Bu senaryo için kontrol uygulanması, toplam bekleme süresini 0,05 oranında azaltmıştır.



Şekil 4.21: Senaryo 3 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

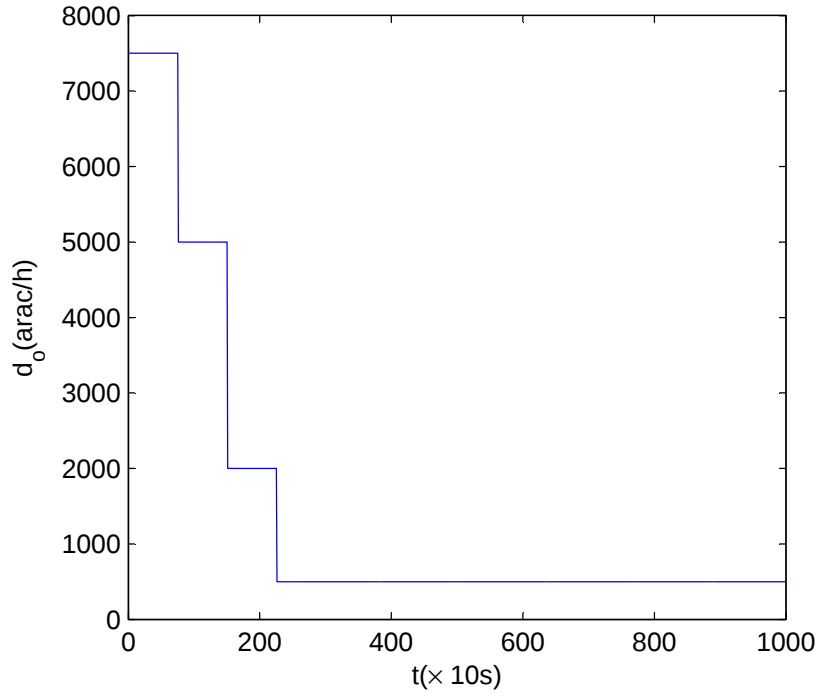
Dördüncü senaryoda (OTF, KYZ, YT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.22 grafiğinde verilmiştir.

Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.23(a) ve 4.23(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.24(a) ve 4.24(b) grafiklerinde verilmiştir.

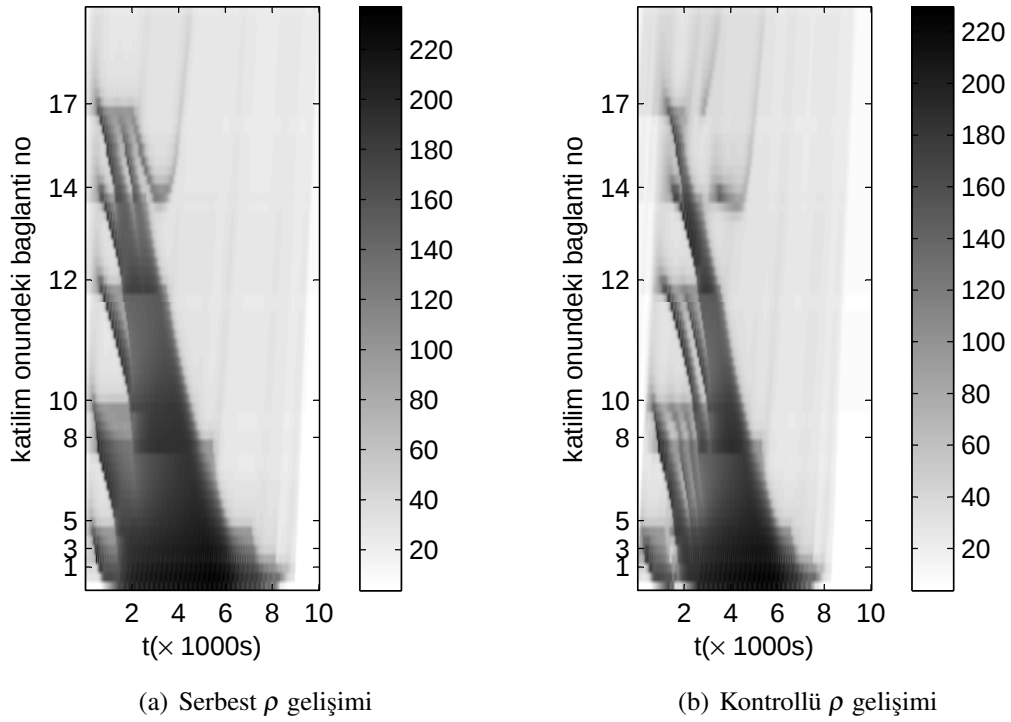
Bu grafikler incelendiğinde oluşan durumun Senaryo 1 ve 2 ile hemen hemen aynı olduğunu gözlemleyebiliriz. Bu senaryo için iyileştirme oranı 0,10 olarak gerçekleşmiştir.

Beşinci senaryoda (OTF, KYZ, OT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.25 grafiğinde verilmiştir.

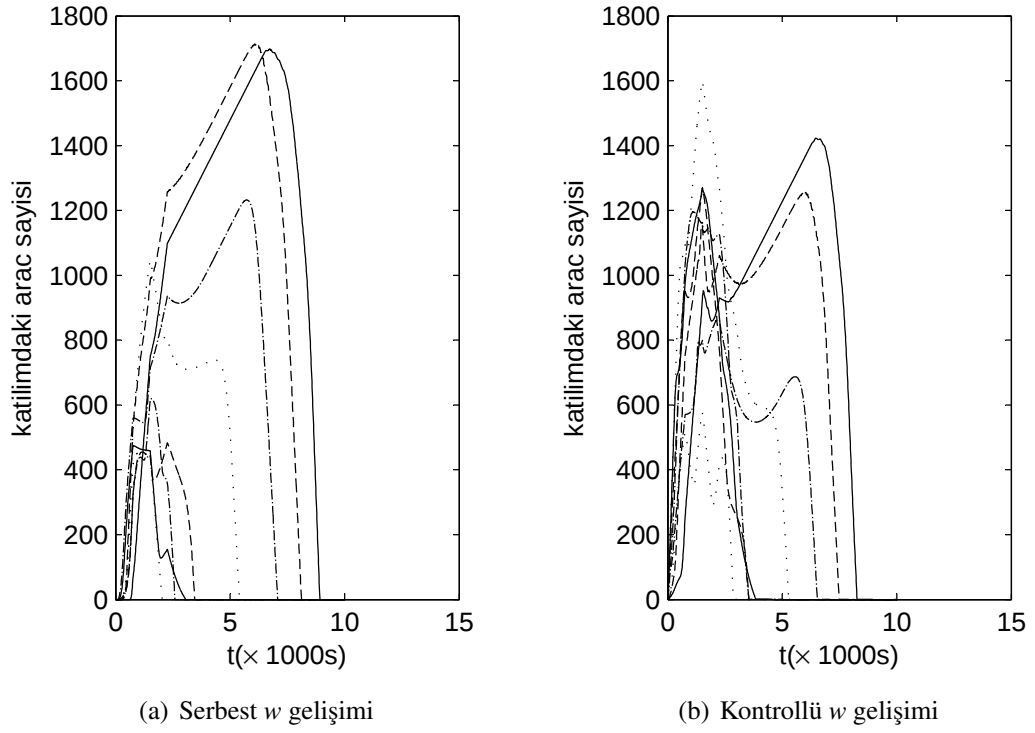
Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.26(a) ve 4.26(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.27(a) ve 4.27(b) grafiklerinde verilmiştir.



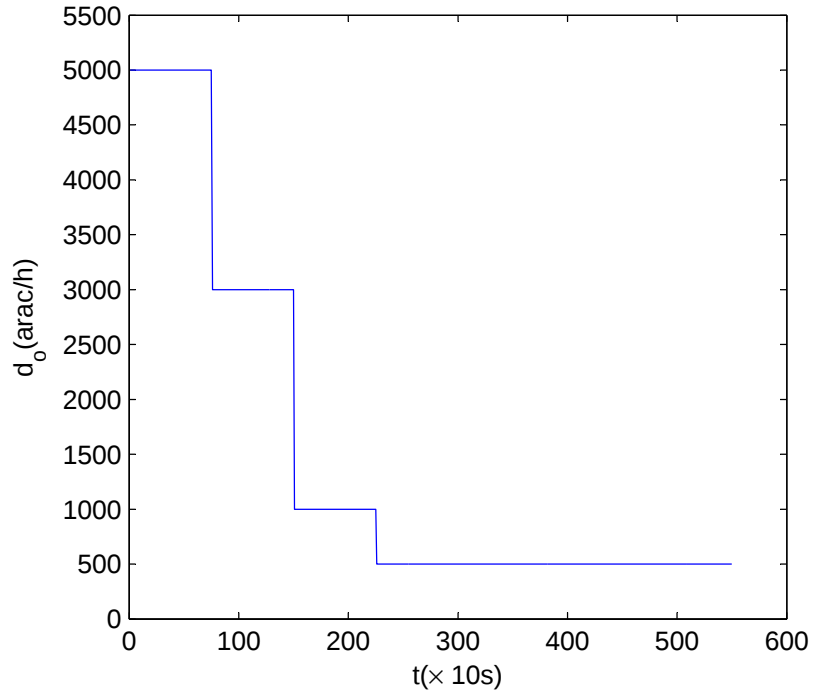
Şekil 4.22: Senaryo 4 (OTF, KYZ, YT) için talep fonksiyonu.



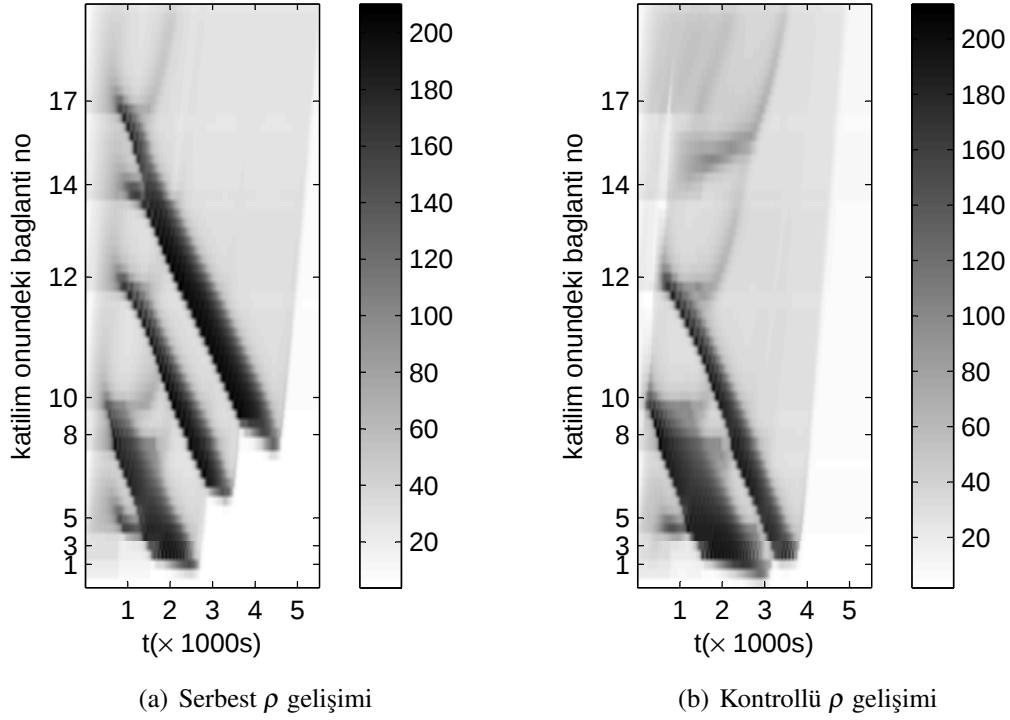
Şekil 4.23: Senaryo 4 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.24: Senaryo 4 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.



Şekil 4.25: Senaryo 5 (OTF, KYZ, OT) için talep fonksiyonu.



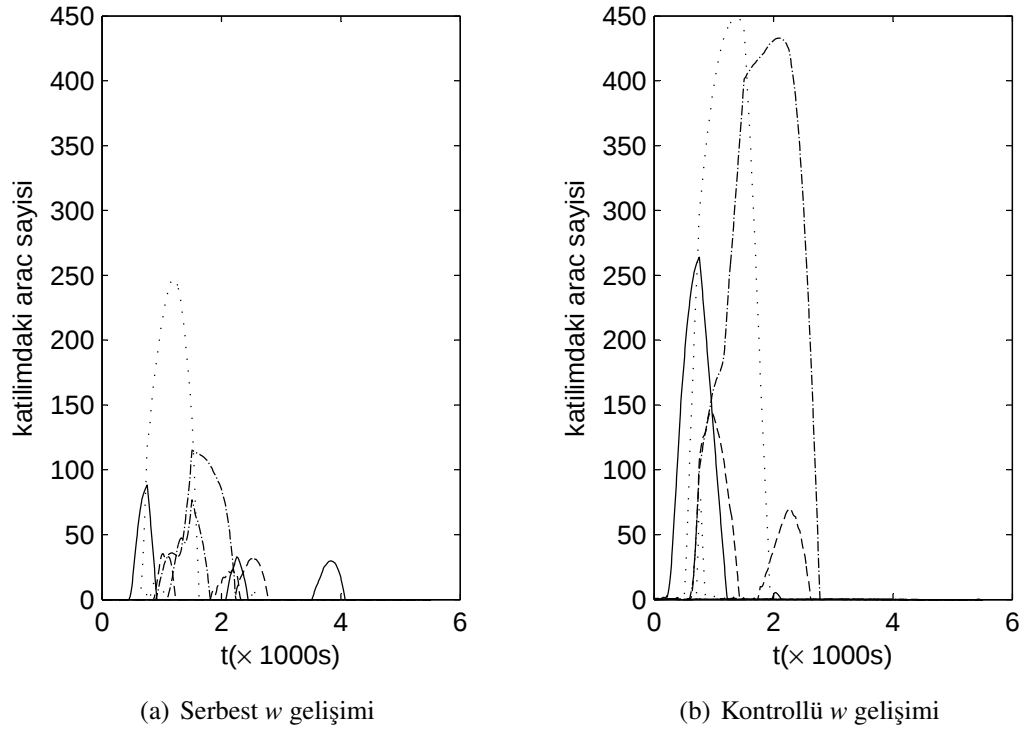
Şekil 4.26: Senaryo 5 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

Bu grafikler incelendiğinde kontrolsüz durumda mekansal olarak yol sonuna en yakın yerde oluşan sıkışıklığın tamamen önlendiğini gözlemleyebiliriz. Ancak bu katılımlardaki kuyruk uzunluğunun artması bedeliyle başarılmıştır. Sonuç olarak toplam iyileştirme 0,10 oranında gerçekleşmiştir.

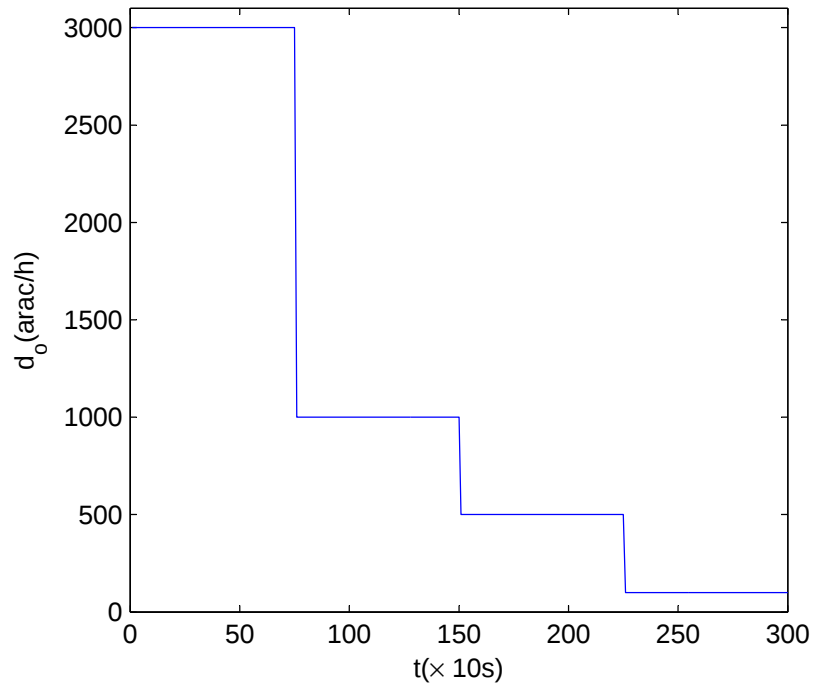
Altıncı senaryoda (OTF, KYZ, DT) durumunu inceleyelim. Talep fonksiyonu Şekil 4.28 grafiğinde verilmiştir.

Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.29(a) ve 4.29(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.30(a) ve 4.30(b) grafiklerinde verilmiştir.

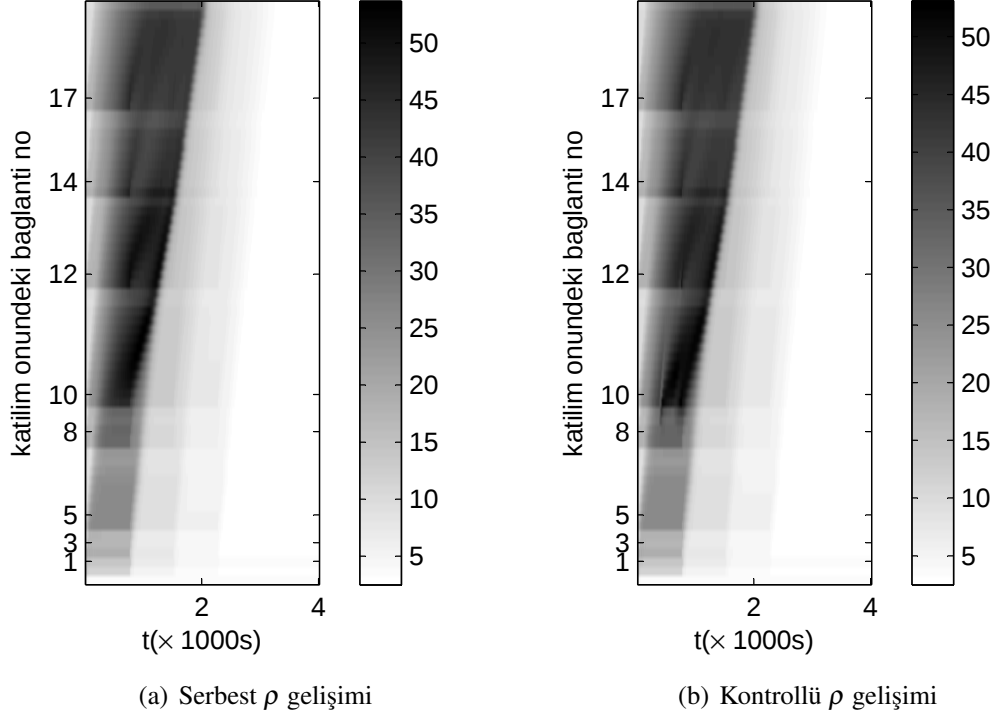
Bu grafikler incelendiğinde özellikle kontrol uygulamanın kayda değer bir değişiklik getirmediğini gözlemleyebiliriz. Kontrol uygulanmadığı durumda bile yoğunluk 50 seviyesinin üzerine çıkmadığı için DOPCoz sistemde kayda değer bir fayda sağlayabilecek bir çözüm bulamamıştır. Bulduğu kontrol $1,9 \cdot 10^{-4}$ lük bir oranda iyileştirme kaydetmiştir. Bu kontrol katılım düzenleyici şeklinde olmuştur. Bunu



Şekil 4.27: Senaryo 5 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.



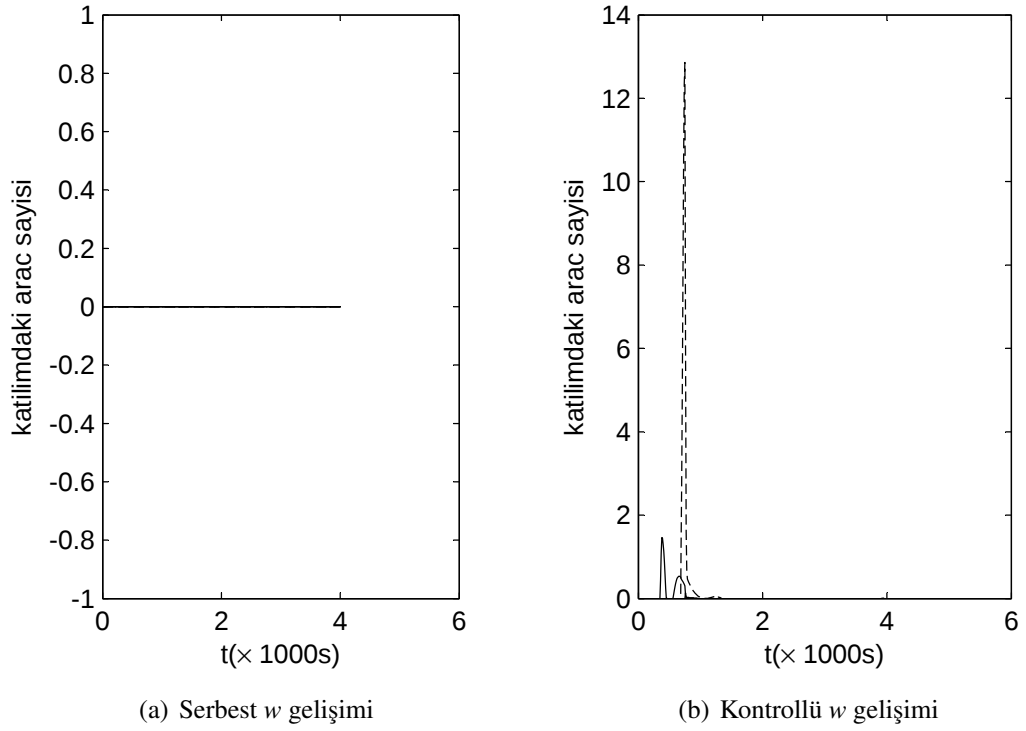
Şekil 4.28: Senaryo 6 (OTF, KYZ, DT) için talep fonksiyonu.



Şekil 4.29: Senaryo 6 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

serbest ve kontrollü w gelişim grafiklerini karşılaştırarak gözlemleyebiliriz. Serbest halde, yol yoğunluğu, katılımlara gelen tüm talebi içinde sindirebilecek kadar azdır. Bu yüzden hiç kuyruk oluşmamıştır. Ancak kontrol olduğu durumda, bazı katılımlarda, katılımın kısıtlanması gereği bir miktar kuyruk oluşmuştur.

Buraya kadar incelediğimiz altı senaryoda tüm katılımlarda oluşan talep, tek bir fonksiyon tarafından belirtilebilmekteydi. Şimdi bu durumu bir miktar gevşetelim. Kullanıcıların, belli bir saatte yolun sonundaki hedefte bulunmak istediklerini düşünürsek, sabah mesai saatinde işte olmak gibi, son noktaya yakın kullanıcıların daha geç saatlerde çıkması beklenebilir. Buna göre her senaryoda, daha önce incelenen benzer senaryodaki ile aynı yapıdaki talep fonksiyonları kullanılacaktır, ancak bu sefer, ilk önce en uzaktaki katılımda yoğun talep oluşacak, daha sonra da sırayla yolun sonuna gittikçe yoğunluğun başlangıç noktası zamanda ileriye doğru kaydırılacaktır. Bu kaymanın ne kadar olacağına şu şekilde karar verilmiştir. Serbest hız limitinde seyir halinde olan bir araç, belli bir katılımdan diğerine ne kadar sürede giderse, iki katılıma olan yoğun talebin başlangıç anı o uzak katılım için o kadar gecikmeli gerçekleşecektir. Buna göre incelenen senaryoların hepsinde, serbest hız limitinin $100km/h$ olduğu da



Şekil 4.30: Senaryo 6 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

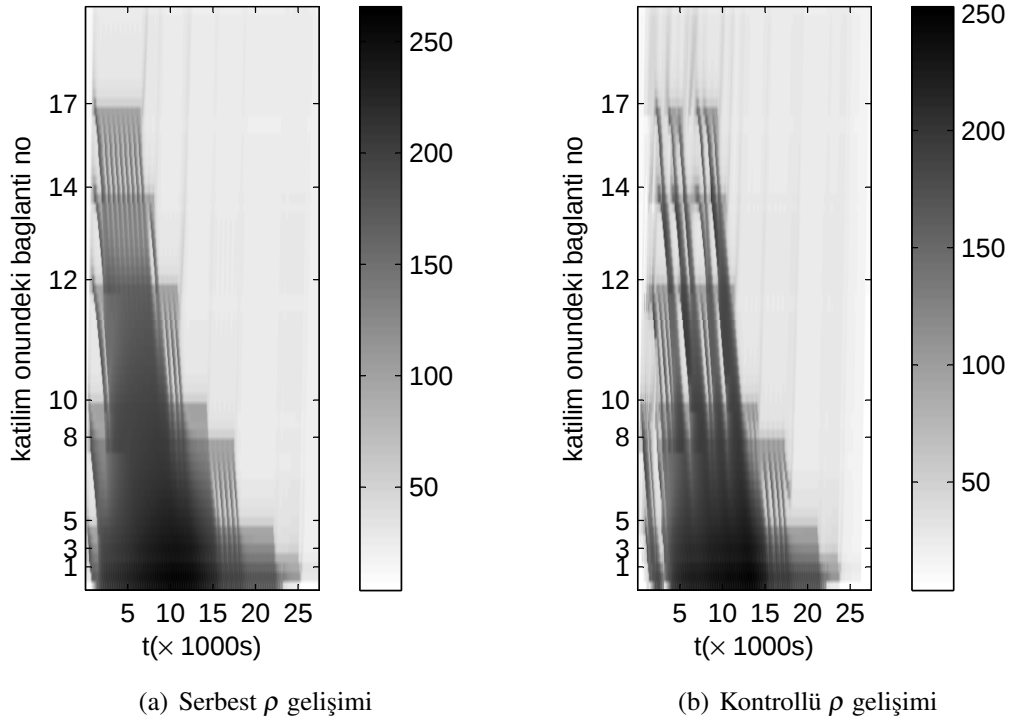
göz önüne alınarak, katılımlara olan yoğun talebin başlangıç anlarının gecikmelerinin ilk katılıma göreli değerleri Tablo 4.5’de verilmiştir. Talepler bu gecikmeler dışında tamamen aynı olacağından yeni senaryolarda talep fonksiyonlarının grafikleri verilmeyecektir.

Çizelge 4.5: Katılımlara olan yoğun talepteki gecikmeler.

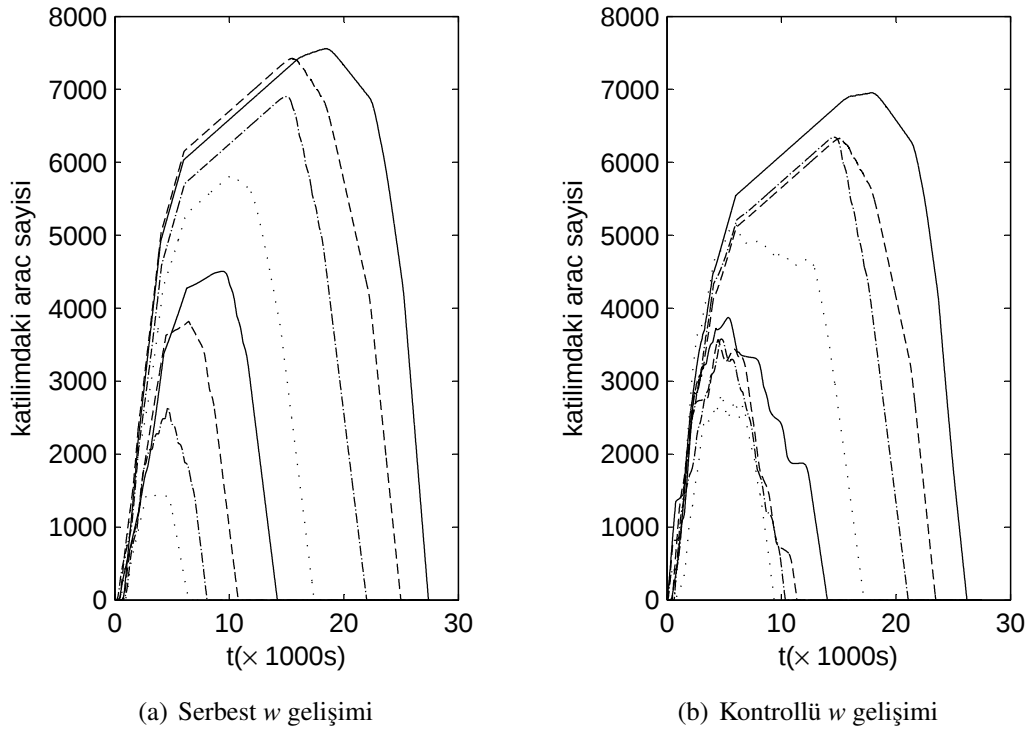
	Katılım no							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Gecikme ($\times 10s$)	0	4	8	21	27	46	62	75

Yedinci senaryoda (GTF, UYZ, YT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.31(a) ve 4.31(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.32(a) ve 4.32(b) grafiklerinde verilmiştir.

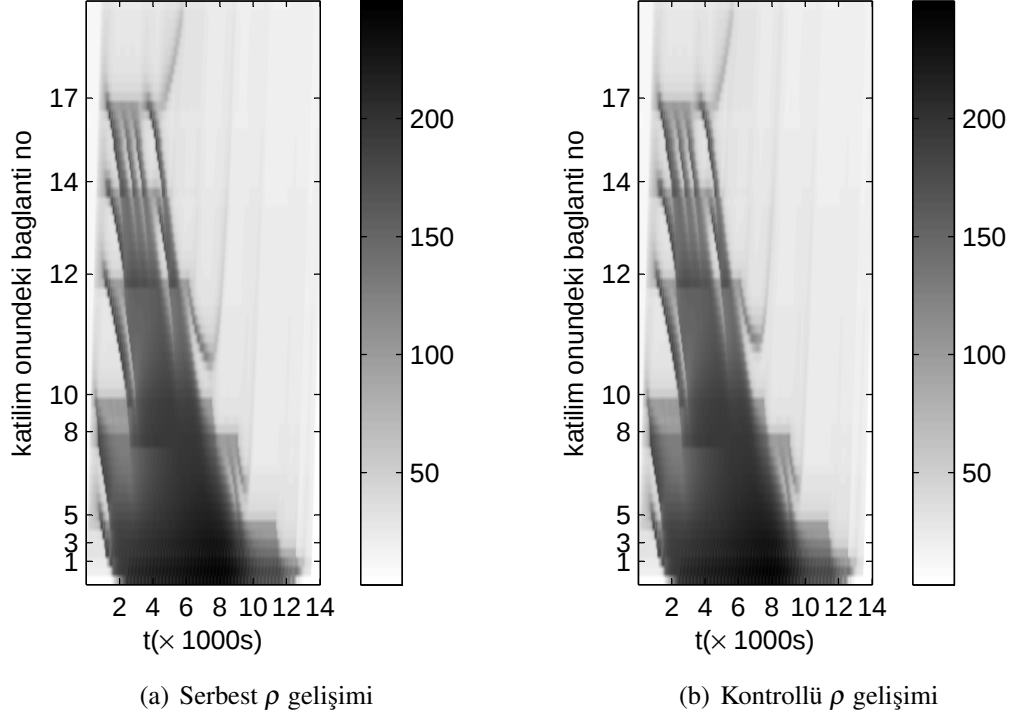
Bu grafikler incelendiğinde ilk iki senaryoda karşılaşılan durumların benzerleri ile karşılaşmaktayız. Özellikle yolun sonundaki yoğunluğun azaltılmasına çabalanmış ve karşılığı alınmıştır. Yol sonuna yakın katılımlardaki kuyruklar uzamış, uzak katılımdaki kuyruklar kısalmıştır. Sonuçta 0.09 oranında bir iyileştirme kaydedilmiştir.



Şekil 4.31: Senaryo 7 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.32: Senaryo 7 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.



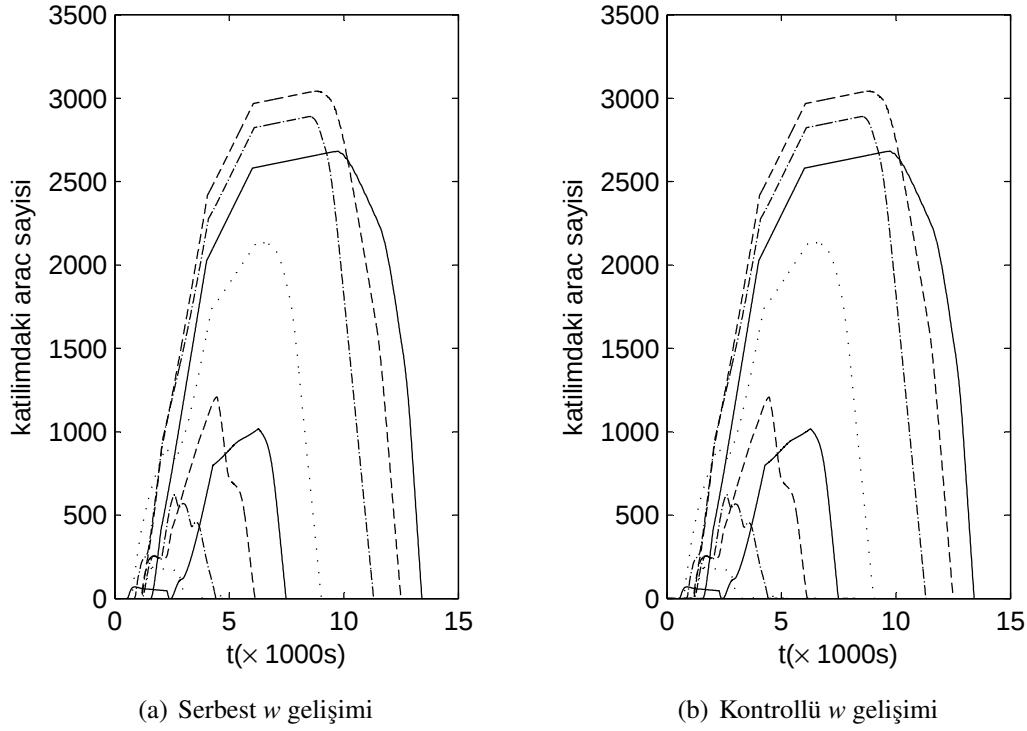
Şekil 4.33: Senaryo 8 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

Sekizinci senaryoda (GTF, UYZ, OT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.33(a) ve 4.33(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.34(a) ve 4.34(b) grafiklerinde verilmiştir.

Bu grafikler incelendiğinde DOPCoz'ün sistemde kayda değer bir iyileştirme gerçekleştiremediği görülmektedir. Bu senaryoda da iyileştirme yapılabileceği beklenirken, karşılaşılan bu durumun çözücü performansından kaynaklandığı düşüncesini öne çıkartmaktadır. Türevsiz noktaların varlığı bu sonuçlara yol açmış olabilir. Bu durum daha yakından inceleme gerektirmektedir. Bu inceleme bu tezde yapılmamıştır.

Dokuzuncu senaryoda (GTF, UYZ, DT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.35(a) ve 4.35(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.36(a) ve 4.36(b) grafiklerinde verilmiştir.

Yoğunluk gelişim grafikleri incelendiğinde sadece yakından bakıldığında farkedilebilecek bir takım farklılıklar bulunmaktadır. Yoğunluk, zaman ekseninde biraz daha uzağa kaymıştır. Bu küçük farklılık 0.01 oranında bir iyileştirmeye ve



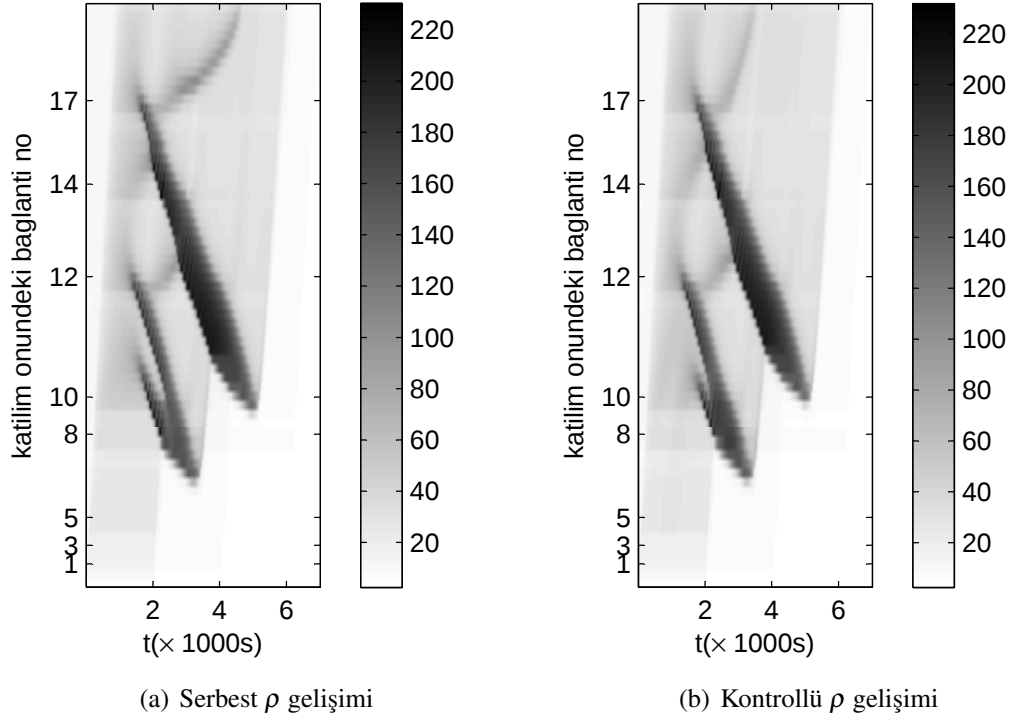
Şekil 4.34: Senaryo 8 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

kuyruk uzunluklarının kısalmasıyla sonuçlanmıştır. Kuyruk uzunluklarını kısalmasını w gelişim grafiklerinde de gözlemlenebilir.

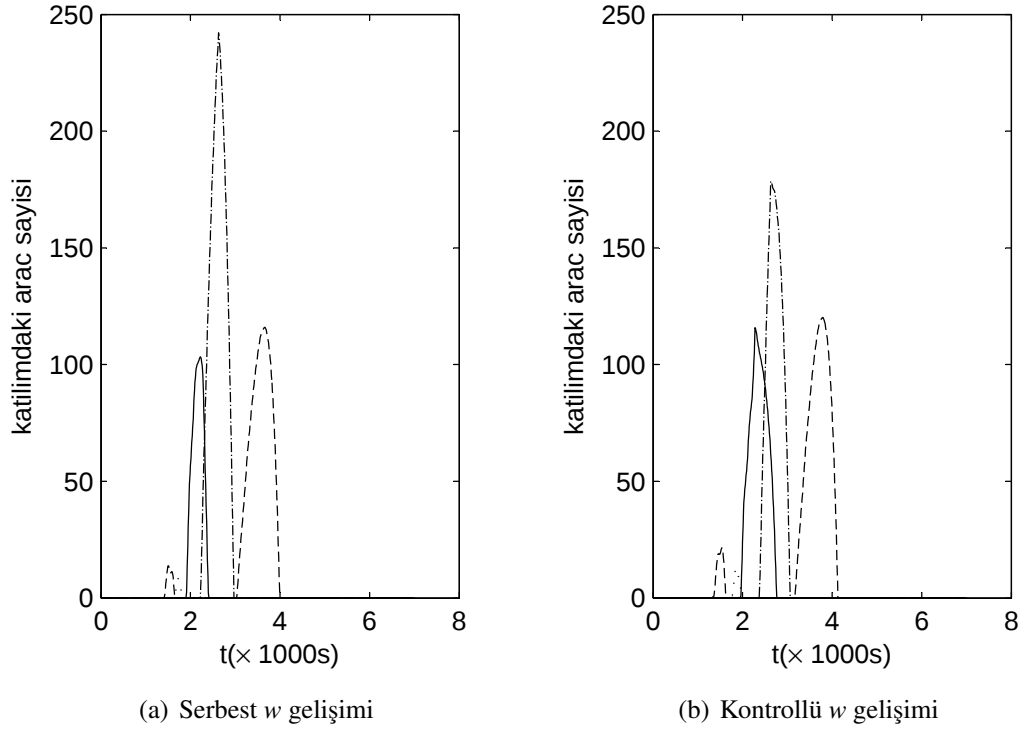
Onuncu senaryoda (GTF, KYZ, YT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.37(a) ve 4.37(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.38(a) ve 4.38(b) grafiklerinde verilmiştir.

Bu senaryo ile ilgili belirtilmesi gerek ilk şey, en çarpıcı sonuçların bu senaryoda gerçekleşmiş olmasıdır. Başka hiç bir senaryoda ρ gelişim grafiklerinde bu kadar değişiklik elde edilmemiştir. Bu grafiklere baktığımızda, yoğunlukların zamanda daha öteye ve azaltılarak atıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Yolun başındaki yoğunluk da diğer senaryodakilere göre çok daha önce dağılmıştır.

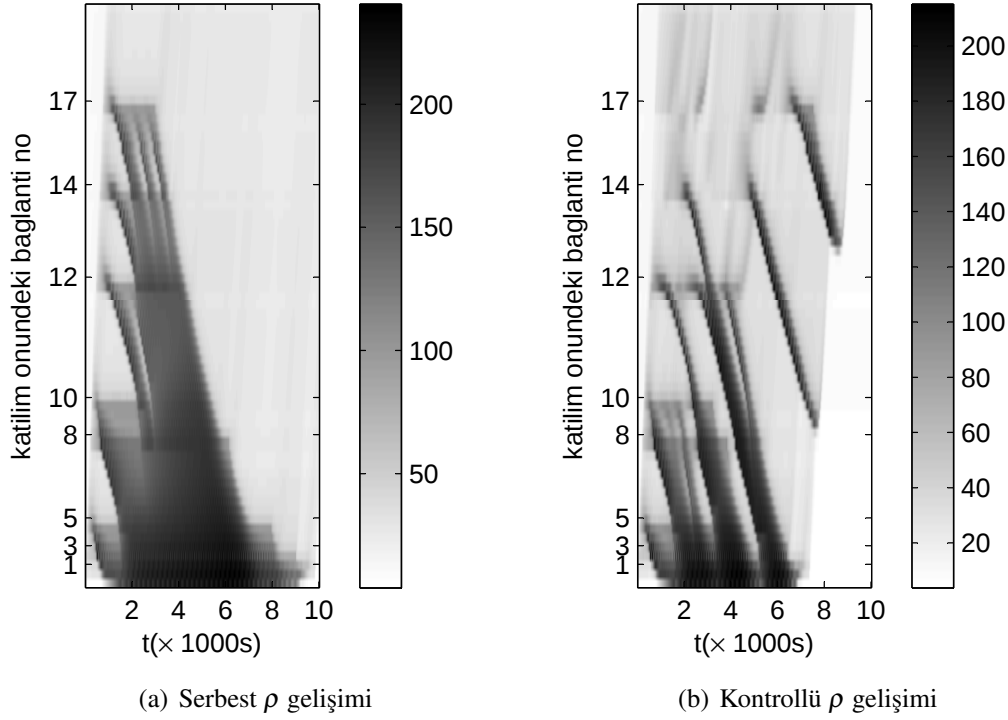
Trafik yoğunluğunun zaman ekseninde daha homojen bir şekilde yayılması, en büyük yoğunluğun değerini azaltacağından zaten istenen bir durumdur. Yüksek yoğunluk yaşanan diğer senaryolarda da böyle bir çözüm bulunabilse daha iyi sonuçlar alınacağı tahmin edilebilir. Ancak bu çözümün çözücü tarafından bu senaryoda



Şekil 4.35: Senaryo 9 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.36: Senaryo 9 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

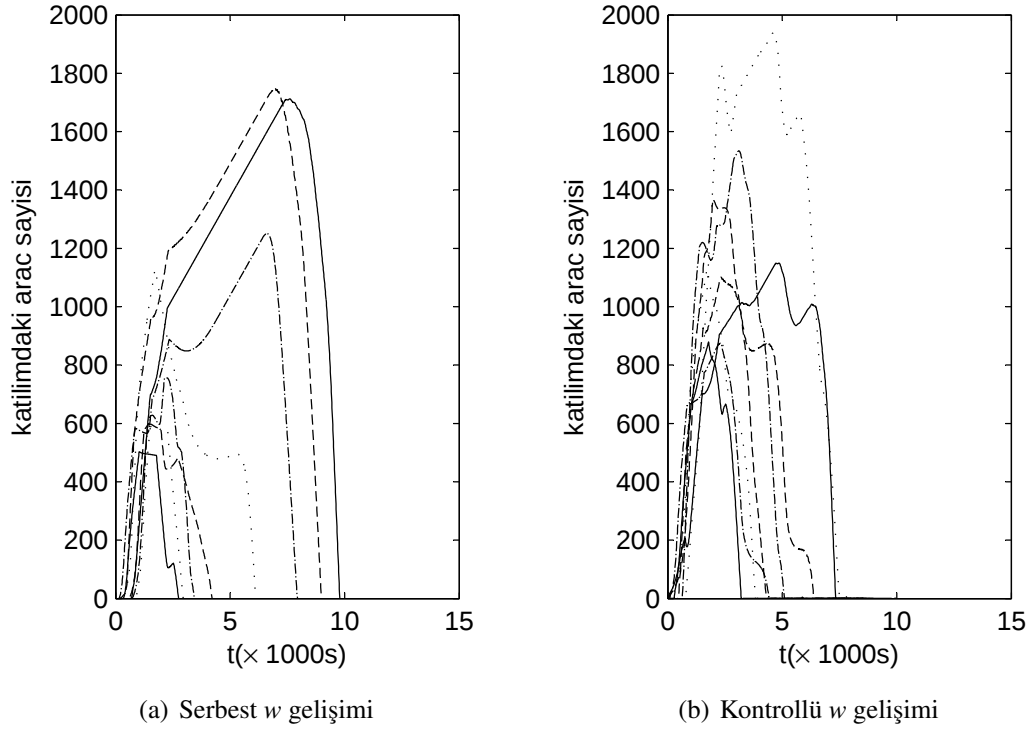


Şekil 4.37: Senaryo 10 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.

keşfedilebilmesi de tesadüf değildir. Bu senaryoda yoğun talep kısa süreli ve yüksektir, ayrıca bu talepler yol ekseninde üstüste çakışacak şekilde gecikmeli olarak tezahür etmektedir. Tüm bu etmenler, küçük yoğunluk kaydırmalarıyla önemli kazanımlar elde edilebilmesine olanak sağlamıştır. Bu kazanım 0.18 oranında gerçekleştirmiştir.

Bu kazanımı sağlayabilmek için sıkı katılım düzenleyici kontrolü uygulanması gerekmiştir. Bu en çok son katılımda hissedilmiştir. Serbest halde en küçük olan son katılım kuyruk uzunluğu tepeciği, kontrollü durumda en büyük tepecik haline gelmiş, hatta serbest halde, ilk katılımların karşılaştığı tepeciği bile geçmiştir. Bu ise, sistem en iyi durumuna erişmenin, kullanıcıların bireysel durumlarında bu kadar büyük olumsuz farklılıklara yol açması kabul edilebilir midir sorusunu akıllara getirmektedir. Bu tip sorunların önüne geçmek için eşitlik indeksleri olarak adlandırılacak teknikler kullanılabilir. Ancak bu tezde bu çalışma yapılmamıştır.

On birinci senaryoda (GTF, KYZ, OT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.39(a) ve 4.39(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.40(a) ve 4.40(b) grafiklerinde verilmiştir.

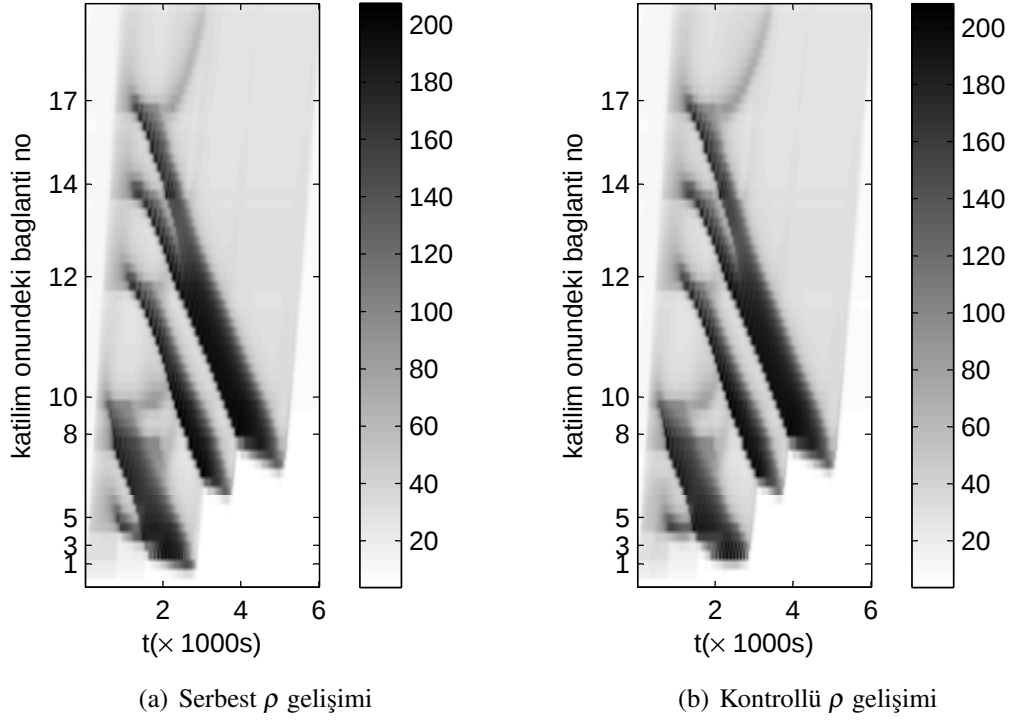


Şekil 4.38: Senaryo 10 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

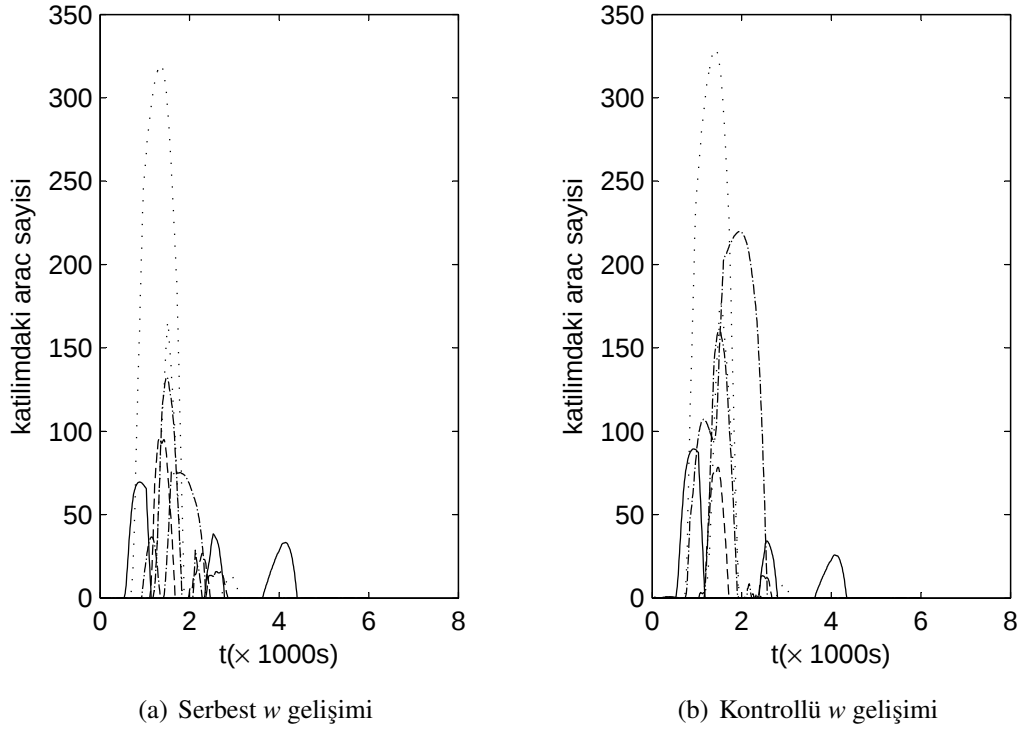
Bu grafikler incelendiğinde cozcunun Senaryo 8’de olduğu gibi, aslında iyi bir çözüm olması beklenmesine rağmen anlamlı bir iyileştirme bulamamıştır. Bu iki senaryoda da talep seviyesinin orta seviye olması düşündürücüdür. Ancak tezin yazarı buna bir açıklama getirememiştir.

On ikinci senaryoda (GTF, KYZ, DT) durumunu inceleyelim. Bu senaryo için kontrolsüz ve DOPCoz kullanılarak elde edilen kontrol uygulandığında gerçekleşen yoğunluk gelişimleri Şekil 4.41(a) ve 4.41(b) yoğunluk grafiklerinde, ilgili kuyruk uzunluğu gelişimi grafikleri ise 4.42(a) ve 4.42(b) grafiklerinde verilmiştir.

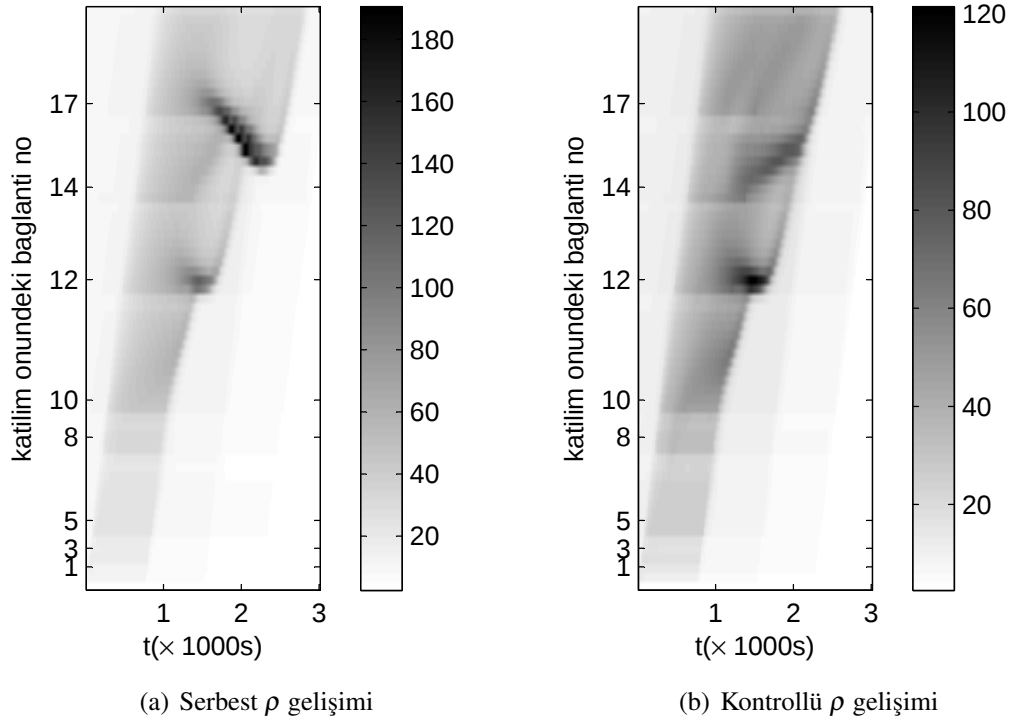
Bu grafikler incelendiğinde kontrolsüz durumda yolun ve zamanın sonlarına doğru oluşan yoğunluğun, kontrollü durumda tamamen ortadan kaldırıldığı ve en büyük yoğunluğun ciddi oranda azaldığını görüyoruz. w grafiklerinden bunun daha önceki benzer senaryolarda olduğu gibi katılım düzenleyici yerine değişken hız limitleri aracılığıyla başarıldığını görebiliriz. Bu senaryo için 0.05 oranında bir kazanım elde edilmiştir.



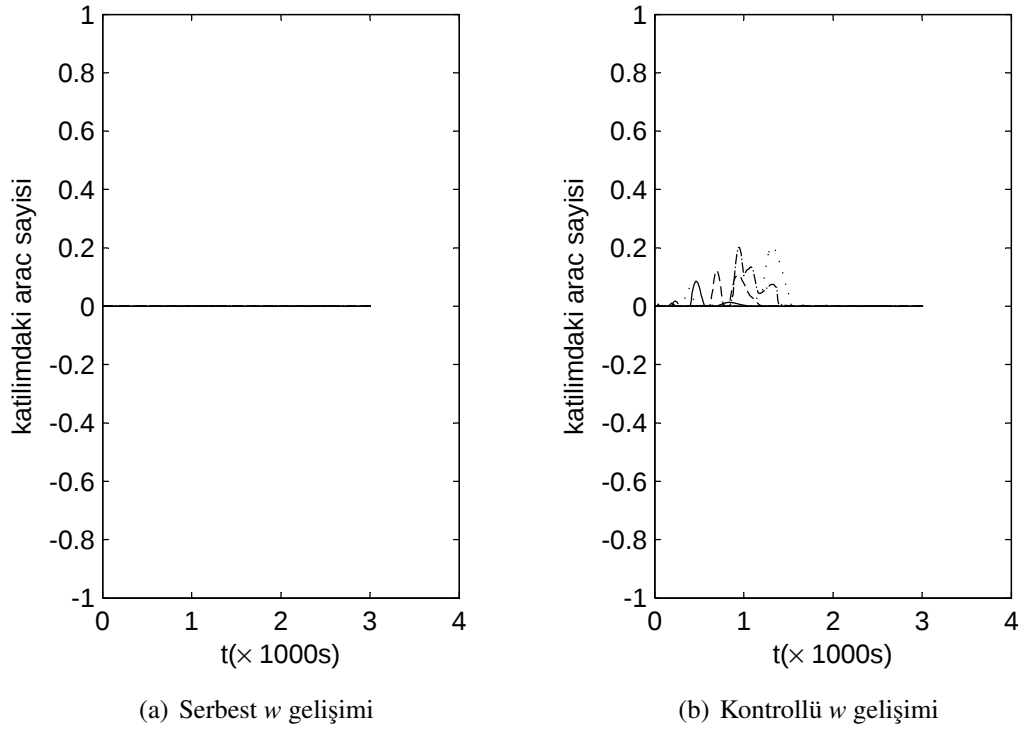
Şekil 4.39: Senaryo 11 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.40: Senaryo 11 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.



Şekil 4.41: Senaryo 12 için serbest ve kontrollü durumlardaki ρ gelişimi.



Şekil 4.42: Senaryo 12 için serbest ve kontrollü durumlardaki w gelişimi.

Senaryoları tek tek inceledikten sonra, bunlardan alınan sonuçlara topluca bakmak da faydalı olacaktır. Çizelge 4.6’de her bir senaryo için elde edilen iyileştirme oranları toplu halde verilmiştir. Burada yoğunluk oluşan durumlarda genel olarak bir iyileşme sağlanmıştır. Sadece senaryo 8 ve 11’de sebebi tam anlaşılamayan bir şekilde DOPCoz programı, işe yarar bir çözüm bulamamıştır. Talep yoğunluğu yüksek olduğunda iyileştirmenin de daha çok olacağı beklenebilir. Eğer taleplerin zamanlaması veya miktarları, yollardaki trafiği belli bir eşiğin üzerine çıkarmıyorsa, bu kontrolleri uygulamanın bir faydası olmayacağı, DOPCoz tarafından da tastiklenmiştir. Senaryoları incelerken belirtildiği gibi, bazı durumlarda katılım düzenleyiciler bazı

Çizelge 4.6: Senaryolarda elde edilen iyileştirme yüzdeleri.

Senaryo No	Gecikme var mı?	Yoğunluk süresi	Talep miktarı	İyileştirme oranı
1	Yok	Uzun	Yüksek	10%
2	Yok	Uzun	Orta	6%
3	Yok	Uzun	Düşük	5%
4	Yok	Kısa	Yüksek	10%
5	Yok	Kısa	Orta	10%
6	Yok	Kısa	Düşük	0%
7	Var	Uzun	Yüksek	9%
8	Var	Uzun	Orta	0%
9	Var	Uzun	Düşük	1%
10	Var	Kısa	Yüksek	18%
11	Var	Kısa	Orta	0%
12	Var	Kısa	Düşük	5%

durumlarda ise değişken hız limitlerinin daha baskın bir şekilde kullanıldığı fark edilmiştir. Bunu ölçebilmek için, bu kontrollerin, kontrol olmadıgındaki değerleri olan 1’den uzaklarını içeren $nkat \times T$, $nbag \times T$ ve bu ikisinin bileşiminden oluşan $(nkat + nbag) \times T$ boyutundaki matrislerin normunu kullanabiliriz. Çizelge 4.7’te senaryolar ve bu normlar bulunmaktadır. Bir A matrisinin normu, A matrisinin tekil değerlerinden en büyüğü, yani $A^T A$ matrisinin en büyük özdeğerinin karekökü olarak alınmıştır. Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir konu, senaryolar için planlama ufuklarının farklı alınmasından kaynaklanabilecek farklar olabileceğidir. Bunun önüne geçmek için bahsi geçen normlar hesaplandıktan sonra, T_s s senaryosunun planlama ufku olmak üzere, $100/T_s$ ile çarpılmış, böylece 100 zaman adımı başına düşen kontrol büyüklüğü elde edilmiştir. Çizelge 4.7’de bu değerler görülebilir. Bu çizelgede

Çizelge 4.7: Kontrol uygulanma mertebeleri.

Senaryo No	Gecikme var mı?	Yoğunluk süresi	Talep miktarı	$\ 1 - b\ $	$\ 1 - r\ $ (1/1000s)	$\ 1 - (b, r)\ $
1	Yok	Uzun	Yüksek	0,39	1,13	1,17
2	Yok	Uzun	Orta	0,81	1,06	1,29
3	Yok	Uzun	Düşük	0,41	0,18	0,41
4	Yok	Kısa	Yüksek	0,52	1,38	1,45
5	Yok	Kısa	Orta	0,99	0,69	1,07
6	Yok	Kısa	Düşük	0,43	0,37	0,50
7	Var	Uzun	Yüksek	0,53	0,84	0,96
8	Var	Uzun	Orta	0,00	0,00	0,00
9	Var	Uzun	Düşük	0,30	0,05	0,30
10	Var	Kısa	Yüksek	0,67	2,33	2,40
11	Var	Kısa	Orta	0,42	0,25	0,43
12	Var	Kısa	Düşük	0,69	0,04	0,69

görülebileceği gibi genel olarak trafik talebi yüksek olunca uygulanan kontrollerin toplam mertebeleri de daha yüksek olmaktadır. Talep ne kadar yüksekse, darboğaza gelen akışı kapasitenin altında tutmak da o kadar çaba gerektirmektedir.

Bunun yanında talebin yüksek ve orta seviyede olduğu durumlarda katılım düzenleyicinin daha etkin olduğu gözlemlenebilir. Düşük talepli durumlarda ise değişken hız limiti daha etkin şekilde kullanılmıştır. Katılım düzenleyiciler, katılım kuyruğundaki araçları oldukları yerde bekletmektedir. Eğer değişken hız limitleriyle bir şeyler yapılabilecekse katılımda bekletmektense hızı düşürülmüş olarak da olsa ilerlemeleri daha avantajlı olabilir.

En yüksek başarı elde edilen 10. senaryo ile aynı talep yapısının gecikmesiz hali olan 4. senaryoyu karşılaştırdığımızda, değişken hız limitlerindeki küçük artışa karşılık, katılım düzenleyici neredeyse ikiye katlanmıştır. Bunda yoğun talep gecikmelerinin, talep yoğunluğu dönemlerinin zaman ve mekan açısından çakışacağı şekilde ayarlanmış olmasının etkisi olabilir. DOPCoz programı çakışmaları önlemek için katılıma gelen talep belli bir süre daha geciktirilmeye çalışmıştır.

5. SONUÇLAR

Bu tezde dağıtık sistemler incelenmiştir. Önce böyle sistemlerin en iyi kontrolü probleminin kesikli hali, kesikli içermeler aracılığıyla verildiğinde dışbükey ve dışbükey olmayan haller için gerek koşullar incelenmiştir. Bunu yapabilmek için en iyi kontrol problemi, daha büyük boyutlu bir uzaya geçerek, kümelerin kesişimi altında en iyileme problemine dönüştürülmüş, ve bu problem için gerek koşullardan yola çıkarak YEKF cinsinden bir ifadeye ulaşılmıştır. Daha sonra tüm zaman adımları $[0, 1]$ aralığına sıkıştırılacak şekilde ölçeklenmiş ve fark operatörleri aracılığıyla kısmi türevlere bir yaklaşım sağlanmıştır. Problemin bu hali için gerek koşullar aynı YEKF ile ifade edilmiş, daha sonra limite geçilerek fark operatorleri kısmi türevlere dönüştürülmüş, ıraksaklık (divergent) operatörü yardımıyla sürekli problem için gerek koşul gradyan formunda elde edilmiştir. Bunlar daha sonra iki örnek aracılığıyla açıklanmıştır. Son olarak sürekli problem için dual ilişkiler ortaya konmuştur. Burada yukarıdaki gibi özetlenen çalışmalardan yerel eşlenik küme değerli fonksiyonların, dağıtık parametrelili, kesikli ve diferansiyel sistemlerin en iyi kontrolü problemi için gerek ve yeter şartları ortaya koymakta önemli ve kullanışlı bir araç olduğu sonucuna varılmıştır.

Bunun üzerine, dağıtık bir sistem olan trafik akışının en iyi kontrolü problemi incelenmiştir. Bu amaçla yaygın olarak kullanılan METANET adlı model açıklanmış, üzerinde bazı değişiklikler yapılarak daha kullanışlı hale getirilmiştir. Trafik akışının kontrolünü ve simülasyonunu sağlayan ALINEA ve METALINE yerel kontrol modelleri [46,131], alternatif yol önerebilmek kullanılan denge modelleri [55–57,132], kontrol için öğrenme teknikleri kullanan modeller [47,48] ve diğer çeşitli modeller [63, 67–70] gibi modeller olmakla birlikte , METANET modeli hem literatürdeki yaygınlığı, hem koordineli ve bütünsel bir yaklaşım sergilediği için tercih edilmiştir. Bu modeli önce küçük örnekler üzerinde daha sonra FSM köprüsünün modeli üzerinde, Avrupa ve Amerika’da giderek daha yaygın olarak kullanılan katılım düzenleyici ve

değişken hız limitleri kontrollerinin potansiyel faydaları farklı senaryolar için sayısal olarak gösterilmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda önerilen yöntemin, İstanbul için büyük bir sorun haline gelen trafik sıkışıklığının görece olarak daha katlanılır hale getirilmesinde önemli katkıları olabileceği gösterilmiştir. Senaryolardan bazılarında beklenen performans elde edilememiştir. Bu durumun çözücü programın yerel çukurlara takılmasıyla ilgili olabileceği belirtilmiş, derinlemesine analizi daha sonraki araştırmalara bırakılmıştır.

Bu incelemeler sırasında, önerilen yöntemin eksik kaldığı noktalar olduğu tespit edilmiş, bir sonraki bölümde bahsedilecek, yeni araştırma soruları olabilecek konular tespit edilmiştir.

5.1 Gelecek Çalışmalar

Elde edilen çözümler ciddi salınımlar içermektedir. Halbuki bu tip kontrollerin belli bir tutarlılığının olması önemlidir. Amaç fonksiyonuna bu salınımları cezalandıracak bazı terimler eklenebilir. Ayrıca bazı senaryolarda karşılaşılan sonlara doğru olan katılımların uzun süre bekletilmesi kabul edilebilir bir durum değildir. Bu dengesizlikleri engellemek için bazı eşitlik indeksleri kullanılmalıdır.

Ardışık olan bazı yollar oldukça kısadır. Bunların her biri için ayrı hız limiti tanımlamak uygun olmayabilir. Böyle ve başka sebeplerle aynı hız limitlerine sahip olması gereken yollar tespit edilmeli ve bunlar için ortak hız limiti kullanılmalıdır.

Talep tahminleri üzerinden çalışmanın olumsuz yanları bilinmektedir. Tahminlerin yanlış çıkması sonucunda sistemin nasıl etkilendiği araştırılmalı ve rassallıkları göz önüne alacak sistemler araştırılmalıdır.

Makroskopik modellerin açıklayıcılıkları ve kolaylıkları kabul edilmekle birlikte, ciddi sorunları olduğu da bilinmektedir. İncelenen sistemler için daha detaylı araştırmalar yapılabilmesi için mikroskopik modeller de gözden geçirilmeli ve araştırmalar buraya doğru da yönlendirilmelidir.

Trafik modelinde yapılabilecek iyileştirmelerin yanı sıra, daha ileri tekniklerin kullanımına da ihtiyaç bulunmaktadır. Yapılan deneylerde bazı senaryolar için iyi bir çözüm olabileceği öngörüsüne rağmen, kullanılan yöntem kayda değer bir

çözüme yakınsayamamıştır. Buna modeldeki türevsiz noktaların varlığı ve çeşitli başlangıç noktalarının kullanılmamasından kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Buna bağlı olarak türevsiz noktaların civarında, fonksiyonlara türevlenebilir yaklaşımlar kullanılabilir. Bunun ardından, farklı başlangıç noktaları ve çözücü parametreleri değerlerinin sistematik bir şekilde denenebilmesi için genetik algoritma gibi yöntemler kullanılabilir.

Bir diğer konu bazı senaryoların çözümünde yakınsamanın çok yavaş olduğu gözlemlenmiştir. Bu ikinci mertebeye yöntemlerin mesela, ölçeklenmiş gradyan iz düşüm yöntemlerinin kullanımını önermektedir. Bu, iterasyonlar sırasında gerçekleşen salınımları azaltacak, ve çözüm hızına olumlu katkı sağlayacaktır. Ancak bu yöntemler ikinci mertebeden türevleri de gerektirmektedir. Bu tip yöntemlerin en iyi kontroldeki uygulamaları bazı avantajları beraberinde getirmektedir. Bu yöntemlerin incelenip, uygulanmasının olumlu sonuçlara ulaşması beklenmektedir.

4.3.3 Kısmi türevler bölümünde de görülebileceği gibi, hesaplanan Jakobiyen matrislerinin çok önemli bir kısmı sıfırlardan oluşmaktadır. Bu durumda bu matrisleri tam olarak tutan yöntemler hem çözülebilecek problemin büyüklüğünü sınırlar hem de aynı büyüklükteki bir problemi daha uzun sürede çözer. Buna bağlı olarak, hangi sıkıştırılmış matris formunun trafik problemi için uygun olacağının araştırılıp, gerekirse değişkenlerin yerleri değiştirilerek, sıfır olmayan terimleri bir birine en yakın hale getirip, seçilen sıkıştırılmış formda temsil etmek çözüm süreleri anlamında olumlu sonuçlar doğuracaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Amann, H. ve Quittner, P.** (1998). Elliptic boundary value problems involving measures: existence, regularity, and multiplicity. *Adv. Differential Equations*, 3(6), 753–813.
- [2] **Aubin, J. P. ve Cellina, A.** (1984). *Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer.
- [3] **Aubin, J. P. ve Da Prato, G.** (1990). Stochastic viability and invariance. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 17(4), 595–613.
- [4] **Clarke, F., Ledyaev, Y. ve Radulescu, M.** (1997). Approximate invariance and differential inclusions in hilbert spaces. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 3, 493–518.
- [5] **Demiyanov, V. F. ve Vasiliev, L. V.** (1986). *Nondifferentiable Optimization*. Springer.
- [6] **Diamond, P. ve Opoitsev, V.** (2001). Stability of a class of differential inclusions. *Dynamics and Control*, 11, 229–242.
- [7] **Ekeland, I. ve Temam, R.** (1987). *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM.
- [8] **Grace, S. R., Agarwal, R. P. ve O'Regan, D.** (2009). A selection of oscillation criteria for second-order differential inclusions. *Applied Mathematics Letters*, 22(2), 153 – 158.
- [9] **Ha, T. X. D.** (2005). Some variants of the ekeland variational principle for a set-valued map. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 124, 187–206.
- [10] **Ioffe, A. D. ve Tikhomirov, V. M.** (1979). *Theory of extremal problems*. North-Holland Pub. Co.
- [11] **Mahmudov, E. N.** (2005). On duality in problems of optimal control described by convex differential inclusions of goursat-darboux type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 307(2), 628 – 640.
- [12] **Mahmudov, E. N.** (2005). The optimality principle for discrete and first order partial differential inclusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308(2), 605 – 619.

- [13] **Mahmudov, E. N.** (2006). Necessary and sufficient conditions for discrete and differential inclusions of elliptic type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2), 768 – 789.
- [14] **Mahmudov, E. N.** (2007). Locally adjoint mappings and optimization of the first boundary value problem for hyperbolic type discrete and differential inclusions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(10), 2966 – 2981.
- [15] **Mordukhovich, B. S.** (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation: I - Basic theory, II - Applications*. Springer.
- [16] **Orpel, A.** (2002). On solutions of the dirichlet problem for a class of partial differential inclusions with superlinear nonlinearities. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 23, 367–381(15).
- [17] **Papageorgiou, N. S.** (1992). Existence of solutions for hyperbolic differential inclusions in banach spaces. *Archivum mathematicum*, 28, 205–213.
- [18] **Tikhonov, A. N. ve Samarskiĭ, A. A.** (1990). *Equations of mathematical physics*. Dover Publications.
- [19] **Butkovskii, A.** (1965). *Theory of optimal control by systems with distributed parameters*. Nauka, Moscow.
- [20] **Cernea, A.** (2001). Some second-order necessary conditions for nonconvex hyperbolic differential inclusion problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 253(2), 616 – 639.
- [21] **Fornasini, E. ve Marchesini, G.** (1978). Doubly-indexed dynamical systems: State-space models and structural properties. *Theory of Computing Systems*, 12, 59–72.
- [22] **Kaczorek, T.** (1985). *Two-dimensional linear systems*. Springer.
- [23] **Lions, P. L.** (1983). Optimal control of diffusion processes and hamilton-jacobi-bellman equations part 2 : viscosity solutions and uniqueness. *Communications in Partial Differential Equations*, 8, 1229 – 1276.
- [24] **Makarov, V. ve Rubinov, A.** (1977). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibria*. Springer-Verlag.
- [25] **Mahmudov, E. N.** (2008). Sufficient conditions for optimality for differential inclusions of parabolic type and duality. *Journal of Global Optimization*, 41, 31–42.
- [26] **Mordukhovich, B. S., Wang, D. ve Wang, L.** (2009). Optimal control of delay-differential inclusions with functional endpoint constraints in infinite dimensions. *Nonlinear Analysis*, 71(12), e2740–e2749.

- [27] **Lianwen, W.** (2005). Convergence of discrete approximations to optimization problems of neutral functional-differential inclusions. *Applied Mathematics and Computation*, 165(2), 375 – 391.
- [28] **Mordukhovich, B. S. ve Wang, L.** (2005). Optimal control of nonautonomous functional-differential inclusions of neutral type. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 63(5-7), 840 – 846.
- [29] **Minchenko, L. I. ve Volosevich, A. A.** (2003). Value function and necessary conditions in optimal control problems for differential-difference inclusions. *Nonlinear Anal.*, 53, 407–424.
- [30] **Cernea, A. ve Georgescu, C.** (2007). Necessary optimality conditions for differential-difference inclusions with state constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(1), 43 – 53.
- [31] **Cernea, A.** (2005). Second-order necessary conditions for differential-difference inclusion problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 62(6), 963–974.
- [32] **Abada, N., Benchohra, M. ve Hammouche, H.** (2009). Existence and controllability results for nondensely defined impulsive semilinear functional differential inclusions. *Journal of Differential Equations*, 246(10), 3834 – 3863.
- [33] **Chraïbi, L., Karakchou, J., Ouansafi, A. ve Rachik, M.** (2000). Exact controllability and optimal control for distributed systems with a discrete delayed control. *Journal of the Franklin Institute*, 337(5), 499 – 514.
- [34] **Abada, N., Benchohra, M. ve Hammouche, H.** (2008). Existence and controllability results for impulsive partial functional differential inclusions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(9), 2892 – 2909.
- [35] **Donchev, T. ve Grammel, G.** (2005). Averaging of functional differential inclusions in banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(2), 402 – 416.
- [36] **Cardinali, T. ve Rubbioni, P.** (2008). Impulsive semilinear differential inclusions: Topological structure of the solution set and solutions on non-compact domains. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(1), 73 – 84.
- [37] **Zaslavski, A. J.** (2007). Structure of optimal solutions for discrete-time convex control systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 8(2), 539 – 562.
- [38] **Zaslavski, A. J.** (2007). Turnpike results for discrete-time optimal control systems arising in economic dynamics. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(7), 2024 – 2049.

- [39] **Yeong-Jeu ve Sun** (2007). Stability criterion for a class of descriptor systems with discrete and distributed time delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(3), 986 – 993.
- [40] **Papageorgiou, M., Diakaki, C., Dinopoulou, V., Kotsialos, A. ve Wang, Y.** (2003). Review of road traffic control strategies. *Proceedings of the IEEE.*, 91(12), 2043–2067.
- [41] **Greenshields, B. D., Bibbins, J., Channing, W. ve Miller, H.** (1935). A Study of Traffic Capacity cilt 14 Highway Research Board, National Research Council, Washington s.448–477.
- [42] **Lighthill, M. J. ve Whitham, G. B.** (1955). On Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178), 281–316.
- [43] **Lighthill, M. J. ve Whitham, G. B.** (1955). On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178), 317–345.
- [44] **Isaksen, L. ve Payne, H.** (1973). Suboptimal control of linear systems by augmentation with application to freeway traffic regulation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 18(3), 210 – 219.
- [45] **Papageorgiou, M.** (1998). Some remarks on macroscopic traffic flow modelling. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(5), 323 – 329.
- [46] **Meng, Q. ve Khoo, H. L.** (2010). A pareto-optimization approach for a fair ramp metering. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 18(4), 489 – 506.
- [47] **Papageorgiou, M., Messmer, A., Azema, J. ve Drewanz, D.** (1995). A neural network approach to freeway network traffic control. *Control Engineering Practice*, 3(12), 1719 – 1726.
- [48] **Xu, J. X. ve Xing, Y.** (2005). A learning approach for freeway traffic control, Control and Automation, 2005. ICCA '05. International Conference on cilt 2 s.887 – 892.
- [49] **Windover, J. R. ve Cassidy, M. J.** (2001). Some observed details of freeway traffic evolution. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 35(10), 881 – 894.
- [50] **Cassidy, M. J., Anani, S. B. ve Haigwood, J. M.** (2002). Study of freeway traffic near an off-ramp. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 36(6), 563 – 572.
- [51] **Muñoz, J. C. ve Daganzo, C. F.** (2002). The bottleneck mechanism of a freeway diverge. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 36(6), 483 – 505.

- [52] **Bertini, R. L. ve Cassidy, M. J.** (2002). Some observed queue discharge features at a freeway bottleneck downstream of a merge. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 36(8), 683 – 697.
- [53] **Papageorgiou, M., Posch, B. ve Schmidt, G.** (1983). Comparison of macroscopic models for control of freeway traffic. *Transportation Research Part B: Methodological*, 17(2), 107 – 116.
- [54] **Alvarez, L., Horowitz, R. ve Toy, C. V.** (2003). Multi-destination traffic flow control in automated highway systems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 11(1), 1 – 28.
- [55] **Wie, B. W.** (1998). A convex control model of dynamic system-optimal traffic assignment. *Control Engineering Practice*, 6, 745–753.
- [56] **Sadek, A. W., Smith, B. L. ve Demetsky, M. J.** (2001). A prototype case-based reasoning system for real-time freeway traffic routing. *Transportation Research Part C*, 9, 353–380.
- [57] **Kachroo, P. ve Özbay, K.** (1998). Solution to the user equilibrium dynamic traffic routing problem using feedback linearization. *Transportation Research Part B: Methodological*, 32(5), 343 – 360.
- [58] **Hurdle, V. F. ve Son, B.** (2000). Road test of a freeway model. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 34(7), 537 – 564.
- [59] **Wang, Y., Papageorgiou, M. ve Messmer, A.** (2008). Real-time freeway traffic state estimation based on extended kalman filter: Adaptive capabilities and real data testing. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 42(10), 1340 – 1358.
- [60] **Levinson, D. ve Zhang, L.** (2006). Ramp meters on trial: Evidence from the twin cities metering holiday. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 40(10), 810 – 828.
- [61] **Zhang, L. ve Levinson, D.** (2010). Ramp metering and freeway bottleneck capacity. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 44(4), 218 – 235.
- [62] **Haj-Salem, H. ve Papageorgiou, M.** (1995). Ramp metering impact on urban corridor traffic: Field results. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 29(4), 303 – 319.
- [63] **Shen, W. ve Zhang, H.** (2010). Pareto-improving ramp metering strategies for reducing congestion in the morning commute. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 44(9), 676 – 696.
- [64] **Cremer, M. ve Papageorgiou, M.** (1981). Parameter identification for a traffic flow model. *Automatica*, 17(6), 837 – 843.

- [65] **Messai, N., Thomas, P., Lefebvre, D. ve Moudni, A. E.** (2002). Optimal neural networks architectures for the flow density relationships of traffic models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 60(3-5), 401 – 409.
- [66] **Carlson, R. C., Papamichail, I., Papageorgiou, M. ve Messmer, A.** (2010). Optimal mainstream traffic flow control of large-scale motorway networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 18(2), 193 – 212.
- [67] **Zhang, H. ve Recker, W.** (1999). On optimal freeway ramp control policies for congested traffic corridors. *Transportation Research Part B: Methodological*, 33(6), 417 – 436.
- [68] **Papageorgiou, M.** (1984). Multilayer control system design applied to freeway traffic. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 29(6), 482 – 490.
- [69] **Bae, C. H., Cho, K. Y., Koo, T. Y., Ji, S. H. ve Suh, M. W.** (2009). Multi-agent based traffic simulation and integrated control of freeway corridors: Part 1 simulation and control model. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, 1365–1373.
- [70] **Bae, C. H., Cho, K. Y., Ji, S. H., Kim, B. Y. ve Suh, M. W.** (2009). Multi-agent based traffic simulation and integrated control of freeway corridors: Part 2 integrated control optimization. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, 1374–1382.
- [71] **Hernández, J. Z., Ossowski, S. ve García-Serrano, A.** (2002). Multiagent architectures for intelligent traffic management systems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 10(5-6), 473 – 506.
- [72] **Baykal-Gürsoy, M., Xiao, W. ve Ozbay, K.** (2009). Modeling traffic flow interrupted by incidents. *European Journal of Operational Research*, 195(1), 127 – 138.
- [73] **Shankar, V. ve Mannering, F.** (1998). Modeling the endogeneity of lane-mean speeds and lane-speed deviations: a structural equations approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(5), 311 – 322.
- [74] **Bellemans, T., Schutter, B. D. ve Moor, B. D.** (2006). Model predictive control for ramp metering of motorway traffic: A case study. *Control Engineering Practice*, 14(7), 757 – 767.
- [75] **Hegyi, A., Schutter, B. D. ve Hellendoorn, H.** (2005). Model predictive control for optimal coordination of ramp metering and variable speed limits. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 13(3), 185 – 209.
- [76] **Colombo, R. ve Groli, A.** (2004). Minimising stop and go waves to optimise traffic flow. *Applied Mathematics Letters*, 17(6), 697 – 701.

- [77] **Zhang, H., Ritchie, S. G. ve Lo, Z. P.** (1997). Macroscopic modeling of freeway traffic using an artificial neural network. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1588, 110 – 119.
- [78] **Jacob, C. ve Abdulhai, B.** (2010). Machine learning for multi-jurisdictional optimal traffic corridor control. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 44(2), 53 – 64.
- [79] **Darbha, S. ve Rajagopal, K.** (1999). Intelligent cruise control systems and traffic flow stability. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 7(6), 329 – 352.
- [80] **Herty, M., Kirchner, C. ve Klar, A.** (2007). Instantaneous control for traffic flow. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30(2), 153–169.
- [81] **Coifman, B.** (2003). Identifying the onset of congestion rapidly with existing traffic detectors. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 37(3), 277 – 291.
- [82] **Coifman, B.** (2002). Estimating travel times and vehicle trajectories on freeways using dual loop detectors. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 36(4), 351 – 364.
- [83] **Coifman, B.** (2003). Estimating density and lane inflow on a freeway segment. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 37(8), 689 – 701.
- [84] **Isaksen, L. ve Payne, H.** (1973). Freeway traffic surveillance and control. *Proceedings of the IEEE*, 61(5), 526 – 536.
- [85] **Hou, Z., Xu, J. X. ve Zhong, H.** (2007). Freeway traffic control using iterative learning control-based ramp metering and speed signaling. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 56(2), 466 –477.
- [86] **Papageorgiou, M. ve Kotsialos, A.** (2002). Freeway ramp metering: an overview. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 3(4), 271 – 281.
- [87] **Khoo, H. L.** (2011). Dynamic penalty function approach for ramp metering with equity constraints. *Journal of King Saud University - Science*, 23(3), 273 – 279 special Issue on Advances in Transportation Science.
- [88] **Kerner, B. S. ve Konhäuser, P.** (1993). Cluster effect in initially homogeneous traffic flow. *Phys. Rev. E*, 48, R2335–R2338.
- [89] **Kerner, B. S.** (1998). Experimental features of self-organization in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 3797–3800.
- [90] **Kerner, B. S.** (2004). Three-phase traffic theory and highway capacity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 333(0), 379 – 440.
- [91] **Kerner, B. S.** (2002). Empirical macroscopic features of spatial-temporal traffic patterns at highway bottlenecks. *Phys. Rev. E*, 65, 046138.

- [92] **Kerner, B. S. ve Klenov, S. L.** (2003). Microscopic theory of spatial-temporal congested traffic patterns at highway bottlenecks. *Phys. Rev. E*, 68, 036130.
- [93] **Davis, L.** (2008). Driver choice compared to controlled diversion for a freeway double on-ramp in the framework of three-phase traffic theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(25), 6395 – 6410.
- [94] **Cassidy, M. J. ve Windover, J. R.** (1998). Driver memory: Motorist selection and retention of individualized headways in highway traffic. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(2), 129 – 137.
- [95] **Logi, F. ve Ritchie, S. G.** (2001). Development and evaluation of a knowledge-based system for traffic congestion management and control. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 9(6), 433 – 459.
- [96] **Kim, J., Park, B. B., Lee, J. ve Won, J.** (2011). Determining optimal sensor locations in freeway using genetic algorithm-based optimization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 24(2), 318 – 324.
- [97] **Payne, H. J., Thompson, W. A. ve Isaksen, L.** (1973). Design of a traffic-responsive control system for a los angeles freeway. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 3(3), 213 – 224.
- [98] **Chiang, Y. H. ve Juang, J. C.** (2006). Decentralized control of freeway traffic flow with neighboring cellular information, Systems, Man and Cybernetics, 2006. SMC '06. IEEE International Conference on cilt 3 s.2547 – 2552.
- [99] **Zhang, H., Ritchie, S. G. ve Jayakrishnan, R.** (2001). Coordinated traffic-responsive ramp control via nonlinear state feedback. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 9(5), 337 – 352.
- [100] **Kotsialos, A., Papageorgiou, M., Mangeas, M. ve Haj-Salem, H.** (2002). Coordinated and integrated control of motorway networks via non-linear optimal control. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 10(1), 65–84.
- [101] **Ngoduy, D., Hoogendoorn, S. ve Liu, R.** (2009). Continuum modeling of cooperative traffic flow dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(13), 2705 – 2716.
- [102] **Banks, J. H.** (2003). Average time gaps in congested freeway flow. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 37(6), 539 – 554.
- [103] **Olszewski, P., Fan, H. S. L. ve Tan, Y. W.** (1995). Area-wide traffic speed-flow model for the singapore cbd. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 29(4), 273 – 281.
- [104] **Cassidy, M. J. ve Mauch, M.** (2001). An observed traffic pattern in long freeway queues. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 35(2), 143 – 156.

- [105] **Amini, B., Shahi, J. ve Ardekani, S. A.** (1998). An observational study of the network-level traffic variables. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(4), 271 – 278.
- [106] **Hou, Z., Xu, J. X. ve Yan, J.** (2008). An iterative learning approach for density control of freeway traffic flow via ramp metering. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 16(1), 71 – 97.
- [107] **Günther, M., Klar, A., Materne, T. ve Wegener, R.** (2002). An explicitly solvable kinetic model for vehicular traffic and associated macroscopic equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(5-6), 591 – 606.
- [108] **Ghods, A., Fu, L. ve Rahimi-Kian, A.** (2010). An efficient optimization approach to real-time coordinated and integrated freeway traffic control. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 11(4), 873 – 884.
- [109] **Mahmudov, E.** (1990). Optimization of discrete inclusions with distributed parameters. *Optimization*, 21(2), 197–207.
- [110] **Mahmudov, E.** (2005). The optimality principle for discrete and first order partial differential inclusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308(2), 605 – 619.
- [111] **Rockafellar, R.** (1997). *Convex analysis*. Princeton University Press.
- [112] **Bertsekas, D. P., Nedić, A. ve Özdağlar, A. E.** (2003). *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific.
- [113] **Mahmudov, E. N.** (2011). *Approximation and Optimization of Discrete and Differential Inclusions*. Elsevier Science Ltd.
- [114] **Mahmudov, E. N. ve Ünal, M. E.** (2012). Optimal control of discrete and differential inclusions with distributed parameters in gradient form. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 18(1), 83–101.
- [115] **Pshenichnyi, B. N.** (1980). *Convex analysis and extremal problems*. Nauka.
- [116] **Bertsekas, D. P.** (1999). *Nonlinear Programming*. Athena Scientific 2. sürüm.
- [117] **Bazaraa, M. S. ve Shetty, C. M.** (1979). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York.
- [118] **Bertsekas, D. P.** (2000). *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific 2. sürüm.
- [119] **Broyden, C. G.** (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1), 76–90.
- [120] **Fletcher, R.** (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, 13(3), 317–322.

- [121] **Goldfarb, D.** (1970). A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means. *Mathematics of Computation*, 24(109), 23–26.
- [122] **Shanno, D. F.** (1970). Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. *Mathematics of Computation*, 24(111), 647–656.
- [123] **Gaviano, M. ve Abaffy, J.** (1986). Line search by curve fitting in minimization algorithms. *Numerische Mathematik*, 50, 321–335.
- [124] **van den Berg, E. ve Friedlander, M. P.** (2011). Sparse optimization with least-squares constraints. *SIAM J. Optimization*, 21(4), 1201–1229.
- [125] **Hager, W. W., Phan, D. T. ve Zhang, H.** (2011). Gradient-based methods for sparse recovery. *SIAM J. Imaging Sciences*, 4(1), 146–165.
- [126] **Kim, D., Sra, S. ve Dhillon, I. S.** (2010). Tackling box-constrained optimization via a new projected quasi-newton approach. *SIAM J. Scientific Computing*, 32(6), 3548–3563.
- [127] **Liu, W., Yang, D., Yuan, L. ve Ma, C.** (2010). Finite Element Approximations of an Optimal Control Problem with Integral State Constraint. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(3), 1163–1185.
- [128] **Fiori, S.** (2011). Solving minimal-distance problems over the manifold of real-symplectic matrices. *SIAM J. Matrix Analysis Applications*, 32(3), 938–968.
- [129] **Dostál, Z. ve Kucera, R.** (2010). An optimal algorithm for minimization of quadratic functions with bounded spectrum subject to separable convex inequality and linear equality constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 20(6), 2913–2938.
- [130] **Betts, J.** (2001). *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [131] **Kotsialos, A. ve Papageorgiou, M.** (2004). Motorway network traffic control systems. *European Journal of Operational Research*, 152(2), 321 – 333.
- [132] **Antoniou, C., Ben-Akiva, M. ve Koutsopoulos, H.** (2007). Nonlinear kalman filtering algorithms for on-line calibration of dynamic traffic assignment models. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 8(4), 661 –670.
- [133] **Chabini, I. ve Odoni, A.** (2002) Transportation flow systems M.I.T. OpenCourseWare.
- [134] **Gartner, N. H., Messer, C. J. ve Rathi, A.** (1997). Monograph on traffic flow theory Teknik Rapor U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration.

- [135] **Maerivoet, S.** (2006). Modelling traffic on motorways: State-of-the-art, numerical data analysis, and dynamic traffic assignment *Doktora Tezi* Katholieke Universiteit Leuven.
- [136] **Dinopoulou, V., Diakaki, C. ve Papageorgiou, M.** (2006). Applications of the urban traffic control strategy tuc. *European Journal of Operational Research*, 175(3), 1652 – 1665.
- [137] **Wang, Y., Papageorgiou, M., Messmer, A., Coppola, P., Tzimitsi, A. ve Nuzzolo, A.** (2009). An adaptive freeway traffic state estimator. *Automatica*, 45(1), 10 – 24.
- [138] **Baños, J. C. M., Papageorgiou, M. ve Schäffner, C.** (1993). Integrated optimal flow control in traffic networks. *European Journal of Operational Research*, 71(2), 317 – 323.
- [139] **Papageorgiou, M., Blosseville, J. M. ve Hadj-Salem, H.** (1990). Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of boulevard peripherique in paris: Part i: Modelling. *Transportation Research Part A: General*, 24(5), 345 – 359.
- [140] **Papageorgiou, M.** (1995). An integrated control approach for traffic corridors. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 3(1), 19 – 30.
- [141] **Papageorgiou, M.** (1990). Dynamic modeling, assignment, and route guidance in traffic networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 24(6), 471 – 495.
- [142] **Papamichail, I., Kotsialos, A., Margonis, I. ve Papageorgiou, M.** (2010). Coordinated ramp metering for freeway networks - a model-predictive hierarchical control approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 18(3), 311 – 331.
- [143] **Payne, H.** (1971). Simulation Councils Proceedings cilt 1 bölüm Models of Freeway Traffic and Control Simulation Council s.51–61.
- [144] **Caliskan, N.** (2006). A decision support approach for the evaluation of transport investment alternatives. *European Journal of Operational Research*, 175(3), 1696 – 1704.
- [145] **Sahin, I. ve Akyildiz, G.** (2005). Bosphorus Bridge toll plaza in Istanbul, Turkey - Upstream and downstream traffic features, *Intelligent Transportation Systems And Vehicle-Highway Automation 2005* 1910 s.99–107.
- [146] **Çetiner, B. G., Sari, M. ve Borat, O.** (2010). A neural network based traffic-flow prediction model. *Mathematical and Computational Applications*, 15(2).
- [147] **Demiral, C. ve Celikoglu, H. B.** (2011). Application of alinea ramp control algorithm to freeway traffic flow on approaches to bosphorus strait crossing bridges. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 20(0), 364 – 371.

- [148] **Bas, E., Tekalp, M. ve Salman, F.** (2007). Automatic vehicle counting from video for traffic flow analysis, Intelligent Vehicles Symposium, 2007 IEEE s.392 –397.
- [149] **Yildirim, U. ve Cataltepe, Z.** (2008). Short time traffic speed prediction using data from a number of different sensor locations, Computer and Information Sciences, 2008. ISCIS '08. 23rd International Symposium on s.1 –6.
- [150] **Lawson, C. L., Hanson, R. J., Kincaid, D. R. ve Krogh, F. T.** (1979). Basic linear algebra subprograms for fortran usage. *ACM Trans. Math. Softw.*, 5, 308–323.
- [151] **Dongarra, J. J., Du Croz, J., Hammarling, S. ve Hanson, R. J.** (1988). An extended set of fortran basic linear algebra subprograms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 14, 1–17.
- [152] **Dongarra, J. J., Du Croz, J., Hammarling, S. ve Hanson, R. J.** (1988). Algorithm 656: an extended set of basic linear algebra subprograms: model implementation and test programs. *ACM Trans. Math. Softw.*, 14, 18–32.
- [153] **Dongarra, J. J., Du Croz, J., Hammarling, S. ve Duff, I. S.** (1990). A set of level 3 basic linear algebra subprograms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 16, 1–17.
- [154] **Dongarra, J. J., Cruz, J. D., Hammerling, S. ve Duff, I. S.** (1990). Algorithm 679: A set of level 3 basic linear algebra subprograms: model implementation and test programs. *ACM Trans. Math. Softw.*, 16, 18–28.
- [155] **Blackford, L. S., Demmel, J., Dongarra, J., Duff, I., Hammarling, S., Henry, G., Heroux, M., Kaufman, L., Lumsdaine, A., Petit, A., Pozo, R., Remington, K. ve Whaley, R. C.** (2002). An updated set of basic linear algebra subprograms (blas). *ACM Trans. Math. Softw.*, 28, 135–151.
- [156] **Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A. ve Sorensen, D.** (1999). *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA 3. sürüm.

EKLER

EK A : DOPCoz Yazılımı

EK A

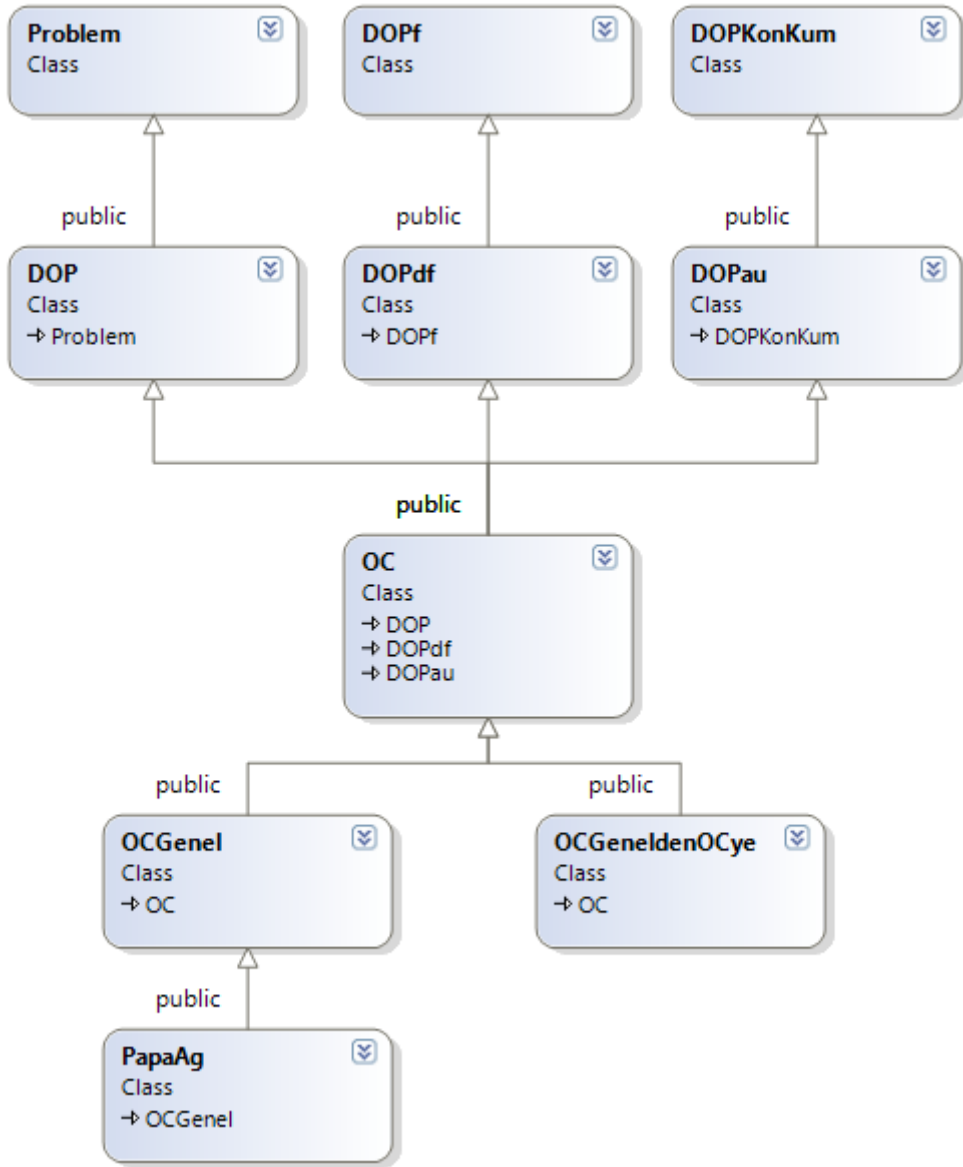
DOPCoz doğrusal olmayan programlama problemlerini çözmek amacıyla yazılmaya başlanmış ve gelişmeye devam eden bir yazılımdır. DOPCoz C++ programlama dili ile, nesne tabanlı programlama teknikleri kullanılarak yazılmıştır. Lineer cebire ait alt rutinler için BLAS ve LAPACK paketlerinin AMD şirketi tarafından uygulanmış şekli olan ve serbest olarak dağıtılan ACML kütüphanesi kullanılmıştır. BLAS rutinleri ile ilgili [150–155] referanslarına, LAPACK ile ilgili olarak ise [156] referansına bakılabilir. Bunun dışında DOPCoz kapsamında yazılan kodların tümü tezin yazarına aittir. Bu tezde kullanılan tüm kodlara <http://web.itu.edu.tr/unalm/kod.zip> bağlantısından erişilebilir.

Program kodlanırken bir problem - çözücü çerçevesi kullanılmıştır. En temel iki sınıf *DOP* ve *DOPCozucu* sınıflarıdır. Bunlardan ilki her türlü problem soyut sınıfının veya bazı problemlerin, ikincisi ise her türlü çözücü sınıfın yani çözüm algoritmalarını metotlarında barındıran sınıfların doğrudan türetildiği sınıflardır. İlki problemler için, ikincisi ise çözücüler için bir takım temel metot ve değişkenlere sahiptirler. Önce problem sınıflarından bahsedelim.

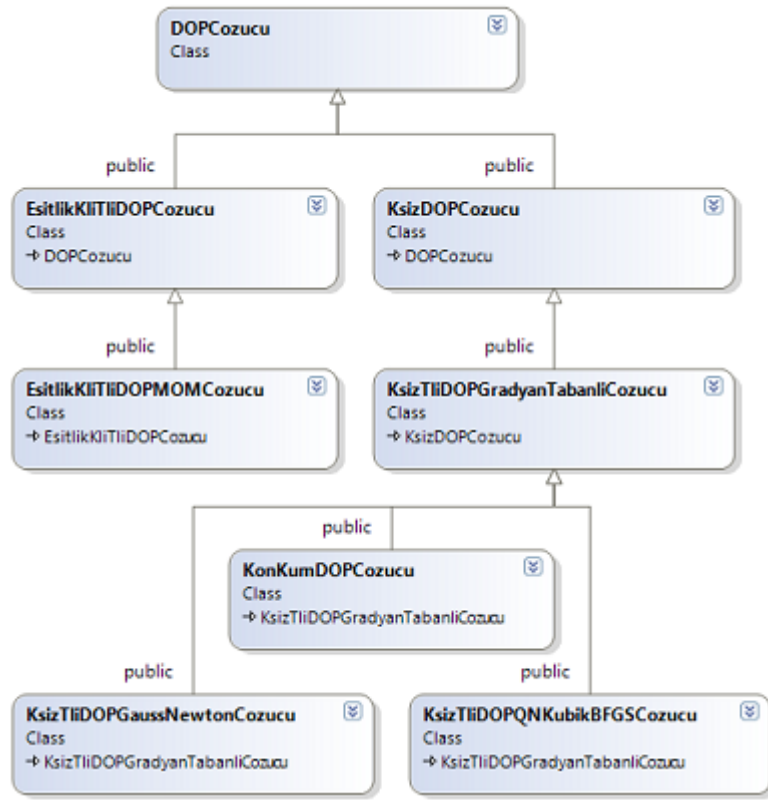
Problemler amaç fonksiyonlarını *DOPf*, bunun gradyan ve hessianlarını ise sırasıyla *DOPdf* ve *DOPddf* soyut sınıflarının metotları aracılığıyla sağlar. Eşitlik kısıtları *DOPh*, eşitsizlik kısıtları da *DOPg* sınıflarıyla uygulanır. Bunlar için gradyan matrisi ve tekil kısıtları için hessian matrisleri benzer şekilde *DOPdh*, *DOPddh*, *DOPdg*, ve *DOPddg* sınıfları aracılığıyla sağlanır.

Tek değişkenli (mesela zaman) en iyi kontrol problemlerini temsil etmesi için bir *OC* sınıfı yaratılmıştır. Bu da soyut bir sınıftır. Bir en iyi kontrol problemini DOPCoz kullanarak çözmek için, *OC* sınıfından bir sınıf türetilip, durum güncelleme fonksiyonlarını, tüm maliyet fonksiyonlarını ve bunların durum ve kontrol değişkenlerine göre kısmi türev fonksiyonlarını uygulamak yeterli olacaktır. *OC* sınıfı, bu fonksiyonları kullanarak, önce zamanda ileriye doğru giderek sistemin tüm anlardaki durum değişkenlerini ve toplam maliyeti bulabilir, gerektiği zaman ise 3.3 bölümünde anlatılan yöntemle dayanarak yani zamanda geriye doğru giderek, gradyan vektörünü bulma becerisine sahiptir. Bu teze konu olan trafik probleminin en iyi kontrolü bu sınıftan türetilen *PapaAg* sınıfı aracılığı ile temsil edilmiştir.

Şekil A.1’de trafik problemi ile ilgili sınıfların ilişkileri, Şekil A.2’de ise DOPCoz programı altındaki çözücü sınıfları belirtilmiştir. *PapaAg* sınıfı genel bir trafik ağının davranışını, detayları 4.3 bölümünde anlatılan METANET modeli kullanılarak açıklamak için gerekli tüm detayları içeren bir sınıftır. Her türlü ağ bilgisi, düğüm sayısı, bağlantı sayısı, düğüm ve bağlantıların ilişkileri; bağlantıların parametreleri, bölüm sayısı, α , v_f , ρ_{cr} ; ağ parametreleri ρ_{max} , τ , κ , v , β gibi parametreler, katılımlar ve bunların parametreleri Q , d ; başlangıç ve bağlantılar için sınır koşulu sayılabilecek değerler ve çıkışlar bir veri dosyasından belli bir düzen içinde okunur. Tüm rutinlerde hafıza tasarrufu ve BLAS-Lapack kütüphanelerinin gerektirmesi sebeplerinden,



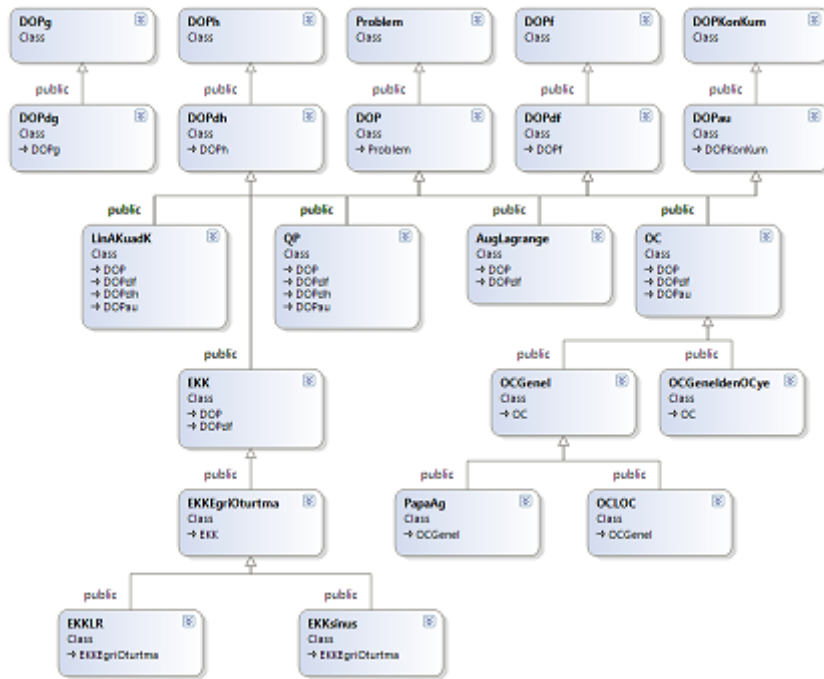
Şekil A.1: DOPCoz'deki bazı problem sınıfları.



Şekil A.2: DOPCoz'deki tüm çözücü sınıfları.

matrisler *önce sütun* prensibine göre düzenlenerek bir vektör halinde saklanmaktadır. İndisleme işlemlerini kolaylaştırma için bir çok yardımcı fonksiyon yazılmıştır.

DOPCoz programında sadece trafik problemi değil başka problemler de çözülebilmektedir. Bunlar arasındaki ilişkiler Şekil A.3'da verilmiştir.



Şekil A.3: DOPCoz'deki tüm problem sınıfları.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Murat Engin Ünal

Doğum Yeri ve Tarihi: Ankara 22/01/1981

Adres: Rıdvanpaşa Sok. No:26/19 34730 Göztepe-İstanbul

E-Posta: unalm@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü

Y. Lisans: Boğaziçi Üniversitesi Sistem ve Kontrol Mühendisliği

Doktora: İstanbul Teknik Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü

Mesleki Deneyim: 2005'ten beri İTÜ Endüstri Mühendisliğinde Araştırma Görevlisi

Akademik İlgi Alanları: Kesikli ve diferansiyel içermelerde en iyileme, Trafik problemleri, Dışbükey programlama, Lineer olmayan programlama

Bilgisayar dilleri: C/C++, C#, Matlab

Katıldığı Eğitim: Combinatorial at Work (ADM III), Berlin Technical University, Faculty II, Institute for Math, 17 Eylül - 8 Ekim 2009

Yayın Listesi:

Uluslararası Makaleler:

- Mahmudov, E. N. ve **Ünal, M. E.** (2012): Optimal Control of Discrete and Differential Inclusions with Distributed Parameters in Gradient Form. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 18(1), 83-101.
- Yucel, G., Bayraktaroglu, A.E. ve **Ünal, M.E.** (2009): A fuzzy cognitive map approach for analysis of electronic consumer products in terms of usability among different age groups. *International Journal of Mobile Learning and Organisation*, 3(3), 322-335.
- Çevikcan, E., Durmuşoğlu, M.B. ve **Ünal, M.E.** (2007): A team-oriented design methodology for mixed model assembly systems. *Computers & Industrial Engineering*, 56(2), 576-599.

Uluslararası Bildiriler:

- Mahmudov, E. N. ve **Ünal, M. E.**, (2011): Optimization of First Order Partial Differential Inclusions in Gradient Form, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 6-8 Temmuz, Londra
- **Ünal, M. E.** ve Mahmudov, E. N., (2010): Use of genetic algorithm to find a good control of İstanbul traffic modelled with METANET, *Proceedings of 5th Americas International Conference on Production Research*, 21-23 Temmuz, Bogotá.
- Durmuşoğlu, M. B., **Ünal, M. E.** ve Didari, S. (2005): Design of team oriented mixed model assembly systems, *Proceedings of 35th International Conference of Computers and Industrial Engineering*, 19-22 Haziran, İstanbul