İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN H_∞ KONTROL PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ
Bayram Barış KIZILSAÇ

Anabilim Dalı : Mühendislik Bilimleri

Programı : Sistem Analizi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ulviye BAŞER

OCAK 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN H_∞ KONTROL PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Bayram Barış KIZILSAÇ
(509012101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Ekim 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Ocak 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ulviye BAŞER (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Külmiz ÇEVİK(İTÜ)
Prof. Dr. Abbas AZİMLİ(YTÜ)
Doç. Dr. Ali ERCENGİZ(İTÜ)
Doç. Dr. Ayşe KARA(YTÜ)

OCAK 2009

ÖNSÖZ

Konuya ilgi duymamı sağlayan ve tez çalışmasının tüm aşamalarında benden yardımını ve bilgisini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Ulviye BAŞER'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2009 Bayram Barış KIZILSAÇ

Matematik Yüksek Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

LME **:**Lineer matris eşitsizliği
CCL **:**Bütünleyici lineerleştirme algoritması
İZ **:**Kare bir matrisin asal köşegenindeki elemanlarının toplamı
DİAG **:**Köşegen kare matris

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

LİNEER ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN H_∞ KONTROL PROBLEMLERİ

ÖZET

Bazı fiziksel ya da biyolojik kontrol problemlerinin matematiksel sistem gösterimleri sistemlerin geçmişteki durumlarına bağlıdır. Bu tip sistemler zaman gecikmeli sistemler olarak adlandırılırlar. Gecikme sistemlerin durumlarının zamana göre birinci türevinin üzerinde de bulunabilir. Bu tip sistemler gecikmeli sistemlerin genel formunu oluştururlar ve neutral sistemler olarak adlandırılırlar. Gecikme, incelenen sisteme göre sabit veya zaman değişkenli olabilir ve gecikmeli sistemler bir dinamik sistemler sınıfında incelenirler. Herhangi bir sistemde zaman gecikmesinin varlığı sistemde kararsızlık ve kötü performansa yol açabilir. Bu yüzden bu tip sistemlerin kararlılık ve performans analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır. Zaman gecikmeli sistemler birinci mertebe adi türevli diferansiyel denklemler sistemi ile ifade edilebilen sistemler ve birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi ile ifade edilebilen sistemler olmak üzere iki sınıfa ayrılmışlardır. Bu tez çalışmasında birinci sınıfa dahil zaman gecikmeli sistemler göz önüne alınmıştır.

Bu çalışmada, gecikmeli sistemleri kontrol girdisi vasıtası ile kararlı hale getirmek için, durum ve çıktı geri beslemeli kontrol problemleri ve durum ve çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemleri incelenmiştir. Gecikmeli sistemlerin durumları, kontrol girdileri veya çıktıları belirsiz parametreler içerdiğinde dayanıklı kontrol yöntemlerinin incelenmesi önem kazanmaktadır. Bu tip sistemler için de durum ve çıktı geri beslemeli dayanıklı kontrol problemleri ve durum ve çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemleri incelenmiştir.

Durum geri beslemeli kontrol problemi, sistemi kararlı hale getirmek için, sistemin durumu ve düzenleyici bir matris ile oluşturulan geri beslemenin, kontrol girdisi vasıtası ile sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi problemidir. Çıktı geri beslemeli kontrol problemi ise aynı işlemin sistemin ölçülen çıktısı ile gerçekleştirilmesidir. Durum ve çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemlerinde amaç, hem elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi hem de gürültü, dış etki vb. ve sistemin kontrol edilen çıktısı cinsinden verilen performans indeksini sıfırdan küçük bir gerçel sayıya eşit yapmaktır.

1990'lı yıllarda gecikmeli sistemler gecikmeden bağımsız ve gecikmeye bağımlı olarak sınıflandırılmıştır. Gecikmeden bağımsız durumda sistem gecikmenin tüm pozitif değerleri için kararlı, gecikmeye bağımlı durumda ise sistem gecikmenin bazı pozitif değerleri için kararlı, diğer değerleri için kararsızdır.

Bu tez çalışmasının 1. Bölümünde, lineer gecikmeli sistemlerin model gösterimleri tanıtılıp, asimptotik kararlılıkları için yeterli koşulları elde etmek için Lyapunov-Krasovskii Teoremi anlatılmıştır. Daha sonra literatür özeti verilerek, bu çalışmada yapılanların diğer çalışmalardan farkları ve katkıları anlatılmıştır.

2. ve 3. Bölümlerde sırasıyla, kontrol girdisi içermeyen lineer neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı ve dayanıklı kararlılığı incelenmiştir. 4. ve 5. Bölümlerde ise 2. ve 3. Bölümlerde verilen sistemleri kararlı hale getirmek için, sistemlerin durumları ve düzenleyici bir matris ile oluşturulan geri besleme kontrol kuralı bir kontrol girdisi vasıtası ile sistemlere uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sistemlerinin asimptotik kararlılığı incelenmiştir. 6. ve 7. Bölümlerde sırasıyla, 4. ve 5. Bölümlerde verilen sistemler için, durum geri beslemeli H_∞ kontrol ve durum geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemleri, 8., 9. ve 10. Bölümlerde ise 6. ve 7. Bölümlerde verilen sistemler için çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol ve çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemleri çözülmüştür.

Bu tez çalışmasının tüm bölümlerinde, sistemlerin asimptotik kararlılıkları için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemlerin durumlarındaki gecikmeye bağımlı ve durumlarının zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak lineer matris eşitsizlikleri cinsinden elde edilmiştir. Her bölümün sonunda elde edilen teorik sonuçlar örneklere uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler çizelge şeklinde verilmiştir.

H_∞ CONTROL PROBLEMS FOR LINEAR TIME DELAY SYSTEMS

SUMMARY

The mathematical system representations of some physical and biologic control problems depend also on the states of the systems in the past. Systems of this type are called as time delay systems. The delay may also be on the first time derivative of the states of the systems. These types of systems constitute the general form of the time delay systems and are named as neutral systems. The delay, depending on the system considered can be constant or time varying, and the time delay systems are investigated as a separate class of dynamical systems. The existence of the time delay in any system, can cause to instability and bad performance. This is the reason why the stability and the performance analyses of this type of systems became important both in the theoretical and the practical means. The time delay systems are separated to two classes as, systems that can be represented with, a system of first order ODE's and the system of first order PDE's. In this thesis the time delay systems belonging to the first class are investigated.

Aiming to stabilize the time delay systems with use of a control input, in this work, the state and the output feedback control problems and H_∞ control problems of the state and the output feedback types are investigated. When, the state of the time delay systems, the control inputs and the outputs incorporate uncertain parameters, the investigation of the robust control methods becomes important. In this type of systems, the state and the output feedback robust control problems and, the state and the output feedback robust H_∞ control problems are investigated.

The state feedback control problem is, to investigate the stability of the closed loop system, obtained with the purpose of making the system stable, applying a feedback to the system, by the use of a control input which is constructed with the state of the system and a regulating matrix. On the other hand, the output feedback control problem is to make the same process with the use of the measured output of the system. The purpose of the state and the output feedback H_∞ control problems is both to investigate the stability of the closed loop system obtained and to make the performance index that is given in terms of the controlled output of the system and the noise, external effects etc., equal to a real number that is less than zero.

In the years 1990's, the time delay systems are classified as independent of the delay and as depended to the delay. In the case of independent of the

delay, the system is stable for all positive values of the delay but for dependent to delay systems, the system is stable for only some positive values of the delay and unstable for the other values.

In Chapter 1 of this thesis, the model representations of the linear time delay systems are introduced and to obtain the sufficient conditions of the asymptotical stability, the Lyapunov-Krasovskii Theorem is presented. Then a literature summary is given and the differences of what are done in this thesis and the contributions are explained.

In Chapters 2 and 3, respectively the asymptotic stability and the robustness of the linear neutral systems that do not have a control input are investigated. In Chapters 4 and 5, the stability of the closed loop systems, obtained for to make the systems presented in Chapters 2 and 3 stable, by first constructing a feedback control rule with the state of the system and a regulating matrix and then applying to the systems by a control input, are investigated. In Chapters 6 and 7, the state feedback H_∞ control and the state feedback robust H_∞ control problems for the systems given respectively in Chapters 4 and 5, and in Chapters 8, 9 and 10, the output feedback H_∞ control and the output feedback robust H_∞ control problems for the systems given in Chapter 6 and 7, are solved.

In all chapters of this thesis, the sufficient conditions for the stability of the systems investigated are obtained as linear matrix inequalities by the Lyapunov-Krasovskii Theorem as dependent to the delay of the states of the systems but independent of the delay in the first time derivative of the states. At the ends of all the chapters, the theoretical results obtained are applied to example problems and the values obtained for the upper limit of the time delay are given in tables.

1. GİRİŞ

Fiziksel ya da biyolojik kontrol problemlerinin matematiksel sistem gösterimleri genellikle sistemlerin o andaki durumlarına bağlıdır. Fakat bazı kontrol sistemleri, sadece o andaki durumlarına değil geçmişteki durumlarına da bağlı olmaktadır. Bu tip sistemler zaman gecikmeli sistemler olarak adlandırılırlar. Gecikme incelenen sisteme göre sabit veya zaman değişkenli olabilir ve gecikmeli sistemler bir dinamik sistemler sınıfında incelenirler. Herhangi bir dinamik sistemde zaman gecikmesinin varlığı sistemde kararsızlık ve kötü performansa yol açabilir. Bu yüzden bu tip sistemlerin kararlılık ve performans analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır [1-3]. Zaman gecikmeli sistemler birinci mertebe adi türevli diferansiyel denklemler sistemi ile ifade edilebilen sistemler ve birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi ile ifade edilebilen sistemler olmak üzere iki sınıfa ayrılmışlardır. Bu tez çalışmasında birinci sınıfa dahil zaman gecikmeli sistemler incelenmiştir.

1.1 Notasyonlar

Matrisler büyük harflerle, vektörler ve skalerler ise küçük harflerle gösterilmiştir. $f(t)$ ile, t zaman değişkeninin skaler değerli fonksiyonu, $\dot{x}(t)$ ile de $x(t)$ vektör fonksiyonunun zamana göre birinci türevi gösterilmiştir. R^n ile n-boyutlu lineer vektör uzayı, $R^{n\times m}$ ile $n\times m$ boyutlu gerçel matrislerin kümesi, herhangi gerçel bir M matrisi için $M>0, \left(M<0\right)$ ile pozitif (negatif) belirlilik, $\lambda(.), \lambda_M(.), \lambda_m(.)$ ile sırasıyla (.)'in özdeğerleri kümesi, maksimum ve minimum özdeğerleri, $(.)^T$ ile tranzpoz alma işlemi gösterilmiştir. $2A^TB$ ile A^TB+B^TA ifade edilmiştir. Herhangi bir $\tau>0$ skaler sayısı için, $C_{\tau,n}=C([-\tau,0],R^n)$ ile $[-\tau,0]$ aralığını R^n'ye, $\|\phi\|=\sup_{n\in[-\tau,0]}|\phi(n)|$ olarak tanımlanmış $\|\phi\|$ normu ile götüren sürekli fonksiyonlar uzayı, R^n'de $[0,\infty)$ aralığında karesi integre edilebilir fonksiyonların uzayı ise $L_2^n[0,\infty)$ ile gösterilmiştir.

1.2 Zaman Gecikmeli Sistemler

Sistem, gecikme faktörü bir tane ise ve bu gecikme faktörü $d > 0$ ile gösterilmek üzere tek gecikmeli sistem, gecikme faktörünün sayısı birden fazla ise çok gecikmeli sistem olarak adlandırılır. Burada *d* gecikme faktörünün sabit veya zaman değişkenli olabileceği not edilmelidir. Sabit, tek gecikmeli ve kontrol girdisi içermeyen sisteme örnek olarak

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + A_d\, x(t-d) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \qquad \theta \in [-d,0] \end{aligned} \tag{1.1}$$

sistemi; sabit, çok gecikmeli ve kontrol girdisi içermeyen sisteme örnek olarak

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + \sum_{j=1}^{s} A_{dj}\, x(t-d_j) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \qquad \theta \in [-\tau,0] \\ \tau &= \max_{j\in[1,s]} d_j, \quad (t_0,\phi) \in R_+ \times C_{\tau,n} \end{aligned} \tag{1.2}$$

sistemi ve sabit, tek gecikmeli ve kontrol girdisi içeren sisteme ise

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + A_d\, x(t-d) + B\,u(t) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \qquad \theta \in [-d,0] \end{aligned} \tag{1.3}$$

sistemi örnek gösterilebilir [2]. Burada $x(t) \in R^n, u(t) \in R^r$ sırası ile sistemin durumunu ve kontrol girdisini gösteren vektör fonksiyonları, A, B, A_d ve A_{dj} 'ler ise uygun boyutlu sabit sistem matrisleridir.

1.3 Kararlılık ve Lyapunov-Krasovskii Teoremi

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi göz önüne alınsın:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.4}$$

x_e vektörü, $f(x_e) = 0$ ise, denge durumu olarak adlandırılır. Başka bir deyişle $\forall t \geq t_0$ iken, $x(t_0) = x_e$ için $x(t) = x_e$ oluyorsa, x_e vektörü denge durumudur. Lineer sistemlerde denge durumu sıfıra eşit olur. Lyapunov anlamında kararlılık bu tip denge noktalarına göre şu şekilde tanımlanır: "Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\| x(t_0) - x_e \| < \delta \Rightarrow \| x(t) - x_e \| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, sistemin denge durumu, her başlangıç koşulu için kararlıdır.” Ayrıca $t \to \infty$ iken $x(t) \to x_e$ oluyorsa denge durumu asimptotik kararlıdır denir.

Teorem (Lyapunov-Krasovskii): Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(t+\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Burada $x_t(t), t \geq t_0$, $x(.)$'ın, $[-\tau, 0]$ aralığına dönüşen $[t-\tau, t]$ aralığına kısıtlanmasını göstermektedir, öyle ki $x_t(\theta) = \phi(t+\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0]$, $\phi \in C_{n,\tau}$ şeklindedir. Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma : R_+ \to R_+$ şeklinde sürekli, azalmayan ve

$$\begin{aligned} &\alpha(r), \beta(r) > 0; \quad r \neq 0 \\ &\alpha(0) = 0, \beta(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

a. $\alpha(\| \phi(0) \|) \leq V(t, x) \leq \beta(\| \phi \|), \quad t \in R, x \in R^n$

b. $\dot{V}(t, \phi) \leq -\gamma(\| \phi(0) \|)$

koşullarını sağlayan $V : R \times C_{n,\tau} \to R$ şeklinde bir fonksiyonel varsa (1.5) sisteminin çözümü kararlıdır. Ayrıca $r > 0$ için $\gamma(r) > 0$ ise $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.

1.4 Tarihçe

1990’lı yıllarda gecikmeli sistemler gecikmeden bağımsız ve gecikmeye bağımlı olarak sınıflandırılmıştır. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeden bağımsız olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemlerin asimptotik kararlılığı [5]’de, sabit ve çok gecikmeli sistemlerin asimptotik kararlılığı ise [6,7]’de incelenmiştir. Gecikmeye bağımlı olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemlerin asimptotik kararlılığı [8-10]’da, zaman değişkenli ve çok gecikmeli sistemlerin asimptotik kararlılığı ise [11]’de incelenmiştir.

Gecikmeli sistemlerde, sistemin durumunun zamana göre birinci türevinin üzerinde de gecikme bulunabilir. Bu tip sistemler gecikmeli sistemlerin genel formunu oluştururlar ve neutral sistemler olarak adlandırılırlar. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeden bağımsız olarak, sabit ve tek gecikmeli neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı [5]'de, sabit ve çok gecikmeli neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı ise [6,7]'de incelenmiştir. Gecikmeye bağımlı olarak sabit ve tek gecikmeli neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı [12-14]'de, zaman değişkenli ve çok gecikmeli neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı ise [11]'de incelenmiştir.

Gecikmeli sistemleri, kontrol girdisi vasıtası ile kararlı hale getirmek için, durum ve çıktı geri beslemeli kontrol problemleri ve durum ve çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemleri incelenmiştir. Durum geri beslemeli kontrol problemi, sistemi kararlı hale getirmek için, sistemin durumu ve düzenleyici bir matris ile geri beslemenin oluşturulup, kontrol girdisi vasıtası ile sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi problemidir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemler için durum geri beslemeli kontrol problemi [14,15]'de, zaman değişkenli ve tek gecikmeli sistemler için durum geri beslemeli kontrol problemi ise [16]'da incelenmiştir.

Durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemi ise, dış etki, gürültü vb. ve kontrol edilen çıktıya sahip olan sistemi kararlı hale getirmek için, sistemin durumu ve bir düzenleyici matris ile geri beslemenin oluşturulup, kontrol girdisi vasıtası ile sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi ve gürültü, dış etki vb. ve sistemin kontrol edilen çıktısı cinsinden verilen performans indeksini sıfırdan küçük bir gerçel sayıya eşit yapma problemidir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemi sabit ve tek gecikmeli sistemler için [17,18]'de, zaman değişkenli ve tek gecikmeli sistemler için [19-21]'de incelenmiştir.

Çıktı geri beslemeli kontrol problemi, sistemi kararlı hale getirmek için, sistemin ölçülen çıktısı vasıtası ile dinamik bir çıktı geri beslemeli kontrol kuralı oluşturulup, sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi problemidir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemlerin dinamik çıktı geri beslemeli kontrol problemi [22-24]'de incelenmiştir.

Çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi ise, ölçülen çıktı ve düzenlenmiş çıktıya sahip olan sistemi kararlı hale getirmek için, sistemin ölçülen çıktısı vasıtası ile dinamik bir çıktı geri beslemeli kontrol kuralı oluşturulup, sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin kararlılığının incelenmesi ve gürültü, dış etki vb. ve sistemin düzenlenmiş çıktısı cinsinden verilen performans indeksini sıfırdan küçük bir gerçel sayıya eşit yapma problemidir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi sabit ve tek gecikmeli sistemler için [25,26]'da, sabit ve çok gecikmeli sistemler için [7,27]'de incelenmiştir. Ayrıca gecikme içermeyen sistemler için dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemlerinin çözümü için cebirsel çözüm yaklaşımları [28,29]'da verilmiştir.

Gecikmeli sistemlerin durumları, kontrol girdileri veya çıktıları belirsiz parametreler içerdiğinde dayanıklı kontrol yöntemlerinin incelenmesi önem kazanmıştır. Bu tip sistemlerin dayanıklı kararlılıkları Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemler için [30-32]'de, zaman değişkenli ve tek gecikmeli sistemler için ise [33-37]'de incelenmiştir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, belirsiz parametreler içeren sistemler için durum geri beslemeli dayanıklı kontrol problemi sabit ve tek gecikmeli sistemler için [5,14,15,38]'de, durum geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi ise sabit ve tek gecikmeli sistemler için [17,18,39]'da, zaman değişkenli ve tek gecikmeli sistemler için de [19-21,40,41]'de incelenmiştir.

Belirsiz parametreler içeren gecikmeli sistemler için dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı kontrol ve dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemleri de incelenmiştir. Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit ve tek gecikmeli sistemler için dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı kontrol problemi [42,43]'de, dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi ise sabit ve tek gecikmeli sistemler için [44,45]'de, zaman değişkenli ve tek gecikmeli sistemler için ise [46]'da incelenmiştir.

1.5 Tez Çalışmasının İçeriği

Bu tez çalışmasının tüm bölümlerinde durumları zaman değişkenli ve tek gecikmeye, durumlarının zamana göre birinci türevi ise sabit ve tek gecikmeye sahip lineer neutral sistemler incelenmiştir. Sadece 8. Bölümde gecikmeler sabit olarak ele alınmıştır. İncelenen sistemlerin asimptotik kararlılıkları için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemlerin durumlarındaki gecikmeye (durum gecikmelerine) bağımlı ve durumlarının birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak Lineer Matris Eşitsizlikleri (LME)'ler cinsinden elde edilmiştir. Bu tezde yapılan çalışmaların literatürdeki diğer çalışmalardan farkını ve onlara olan katkılarını açıklayabilmek için tarihçe bölümünde verilen çalışmalar hakkında aşağıda daha kapsamlı bilgi verilmiştir.

Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmelere sahip lineer neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar LME'ler cinsinden [8-10]'da, zaman değişkenli durum gecikmesine sahip lineer neutral sistemler içinde [11]'de elde edilmiştir. Fakat [11] çalışmasında sistemin durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin birden küçük bir sayıya eşit olma şartı vardır, yani gecikme fonksiyonu zamana göre yeterince hızlı değişen bir fonksiyon olarak seçilememektedir. Bu tez çalışmasının 2. Bölümünde, durum gecikmesi zaman değişkenli ve durumunun zamana göre birinci türevinin gecikmesi sabit olan lineer neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. [11] çalışmasında bulunan durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin birden küçük olma şartı ortadan kaldırılmıştır. Bölüm sonunda elde edilen sonuçlar sabit durum gecikmesi için bir örneğe uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

2. Bölümde verilen sistem belirsiz parametreler içerdiğinde, sistem için dayanıklı kararlılık koşullarının incelenmesi gerekmektedir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmeye sahip lineer sistemlerin dayanıklı kararlılığı için yeterli koşullar LME'ler cinsinden [30-32]'de, zaman değişkenli gecikmeye sahip lineer sistemler içinde [33-37]'de elde edilmiştir. [33,34] çalışmalarında sistemlerin durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin

birden küçük bir sayıya eşit olma şartı vardır, [35,37] çalışmalarında ise bu şart yoktur fakat sistemler neutral değildir. 3. Bölümde, 2. Bölümde verilen sistem belirsiz parametreler içerdiğinde, sistem için dayanıklı kararlılık koşulları yine Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Bu bölümde de durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin birden küçük olma şartı ortadan kaldırılmıştır. Bölüm sonunda elde edilen sonuçlar sabit durum gecikmesi için bir örneğe uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

4. Bölümde, 2. Bölümde verilen sistemi kararlı hale getirmek için, durum geri beslemeli kontrol kuralı sisteme uygulanarak, elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmelere sahip lineer neutral sistemler için durum geri beslemeli kontrol problemi [14,15]'de, zaman değişkenli gecikmeye sahip neutral olmayan lineer sistemler için ise [16]'da incelenmiştir. Fakat, bu çalışmada da durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin birden küçük olma şartı vardır. Bu bölümde yine bu şart ortadan kaldırılıp, bölüm sonunda elde edilen sonuçlar sabit ve zaman değişkenli durum gecikmesi için örneklere uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

5. Bölümde, 4. Bölümde verilen sistem belirsiz parametreler içerdiğinde, sistemi kararlı hale getirmek için yine Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız bir durum geri beslemeli dayanıklı kontrol problemi incelenmiştir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmelere sahip lineer neutral sistemler için durum geri beslemeli dayanıklı kontrol problemi [5,14,15,38]'de incelenmiştir. Yine bölüm sonunda elde edilen sonuçlar sabit ve zaman değişkenli durum gecikmesi için örneklere uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

6. Bölümde, 4. Bölümde verilen sisteme bir dış etki ve kontrol edilen çıktı eklenerek, durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Bu kontrol kuralı altında elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmeye sahip ve neutral olmayan lineer sistemler için durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemi [17,18]'de, zaman değişkenli gecikmeye sahip ve neutral olmayan lineer sistemler içinde [19-21]'de incelenmiştir. [21]'de gecikmenin zamana göre birinci türevinin birden küçük bir sayıya eşit olma şartı vardır, [19,20]'de bu şart yoktur. Bu bölümde yine bu şart ortadan kaldırılıp, bölüm sonunda elde edilen sonuçlar zaman değişkenli durum gecikmesi için bir örneğe uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler çizelge şeklinde verilmiştir.

7. Bölümde, 6. Bölümde verilen sistem belirsiz parametreler içerdiğinde, durum geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Yeterli koşullar yine Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmeye sahip ve neutral olmayan lineer sistemlerin durum geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi [17,18,39]'da, zaman değişkenli gecikmeye sahip lineer sistemler içinde [19-21,40,41]'de elde incelenmiştir. [21,41]'de gecikmenin zamana göre birinci türevinin birden küçük bir sayıya eşit olma şartı vardır ve sistemler neutral değildir, [40]'da sistem neutraldir fakat bu şart yine vardır, [19,20]'de bu şart yoktur fakat sistemler neutral değildir. Bu bölümde yine bu şart ortadan kaldırılıp, bölüm sonunda elde edilen sonuçlar zaman değişkenli durum gecikmesi için bir örneğe uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerler çizelge şeklinde verilmiştir.

8. Bölümde, 6. Bölümde verilen sisteme ölçülen çıktı dahil edilerek ve sistemin durum gecikmesi sabit alınarak, dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir [47]. Dinamik çıktı geri beslemeli kontrol kuralı altında elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar, yeni bir

Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak, sistemin durum gecikmesine ve durumunun birinci türevindeki gecikmeye bağımlı olarak LME'ler cinsinden elde edilmiştir. Elde edilen LME'lerin çözümünden kontrol kuralının parametrik ifadesi elde edilmiştir. Bu konuda literatürde Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmeye sahip lineer sistemlerin dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi [25-27]'de incelenmiştir. [25,26]'da verilen sistemler neutral değildir, [27] neutraldir fakat sistem matrislerinin üzerinde $D_{12}^T D_{12}$'nin singüler olmaması ve $B_1 D_{21}^T = 0$ olma şartı vardır. Bu bölümde bu şart ortadan kaldırılıp, elde edilen sonuçlar bir örneğe uygulanarak, gecikmelerin üst sınırı için elde edilen değerler çizelge şeklinde verilmiştir.

9. Bölümde, 8. Bölümde verilen sistemin durum gecikmesi zaman değişkenli olarak ele alınarak, dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir [48]. Bu kontrol altında elde edilen kapalı çevrim sistemi için [4]'de verilen Sınırlı Gerçel Lemma fikri genişletilmiş ve Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile, dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralının varlığı için yeterli koşullar, sistemin durum gecikmesine bağımlı, durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız, durum gecikmesinin zamana göre birinci türevi ve sistem matrisleri üzerinde herhangi bir şart olmaksızın, durum gecikmesinin zamana göre birinci türevi üzerindeki üst sınırı kaldıracak şekilde tanımlanan yeni bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli ile [49]'da verilen yöntem kullanılarak, ters kısıtlar içeren LME'ler cinsinden elde edilmiştir. Bu LME'leri çözmek için bir Lineerleştirme Algoritması kullanılmıştır. Burada elde edilen sonuçlar [26,49]'daki sonuçların genişletilmişleridirler. Bölüm sonunda elde edilen sonuçlar zaman değişkenli durum gecikmesi için örneklere uygulanarak, gecikmenin üst sınırı için elde edilen değerlerin [22,27]'den daha iyi olduğu gözlenmiştir.

10. Bölümde, 9. Bölümde verilen sistem belirsiz parametreler içerdiğinde, dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi incelenmiştir [50]. Dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol kuralının varlığı için yeterli koşullar, yine 9. Bölümde kullanılan yöntem ile, sistemin durum gecikmesine bağımlı, durumunun birinci türevindeki gecikmeden bağımsız, durum gecikmesinin zamana göre birinci türevi ve sistem matrisleri üzerinde herhangi bir şart olmaksızın ters kısıtlar içeren

LME’ler cinsinden elde edilmiştir. Bu bölümde Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli üzerinde gerekli değişiklikler yapılarak 9. Bölümde kullanılan model transformasyonu kullanılmamıştır. Bu konuda literatürde gecikmeye bağımlı olarak, sabit gecikmeye sahip neutral olmayan lineer sistemlerin dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi [44,45]’de, zaman değişkenli gecikmeye sahip neutral olmayan lineer sistemler için ise [46]’da incelenmiştir. Burada aynı problem zaman değişkenli gecikmeye sahip neutral sistemler için incelenip, elde edilen sonuçlar bir örneğe uygulanarak, durum gecikmesinin üst sınırlı için elde edilen değerlerin [48]’den daha iyi olduğu gözlenmiştir.

2. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLERİN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde durum gecikmesi zaman değişkenli ve durumunun zamana göre birinci türevinin gecikmesi sabit olan lineer neutral sistemlerin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizliği Matlab LMI Toolbox [51] paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için elde edilen sonuçların literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılması çizelge şeklinde verilmiştir.

Aşağıdaki *n*. mertebe zaman değişkenli lineer neutral sistem ele alınsın:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau,0], \quad (t_0,\phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Burada $x(t) \in R^n$ sistemin durumunu karakterize eden vektör fonksiyonu, A, E, A_1 sabit ve uygun boyutlu sistem matrisleri, $h(t)$ ise zaman değişkenli diferansiyellenebilir ve her $t \geq 0$ için

$$0 < h(t) \leq \bar{h} < \infty, \qquad \dot{h}(t) \leq \mu < \infty \qquad \textbf{(2.2)}$$

koşullarını sağlayan gerçel değerli gecikme fonksiyonu, d pozitif sabit gecikme ve $\tau = \max\{\bar{h}, d\}$ olmak üzere, $\phi(\cdot)$ $[-\tau,0]$ üzerinde verilmiş sürekli bir fonksiyondur. (2.1) sisteminin asimptotik kararlılığı için, $\mu : C[-\tau,0] \to R^n$, $\mu(x_t) = x(t) - Ex(t-d)$ şeklindeki operatör için aşağıdaki varsayım yazılmalıdır.

Varsayım 2.1 $\|\cdot\|$ herhangi bir matris normu göstermek üzere, $\|E\| < 1$ olmalıdır. Bu $\mu(x_t)$'nin asimptotik kararlılığı için yeterli koşuldur [1].

Schur Komplementi.

$A_1 = A_1^T$, $0 < A_2 = A_2^T$ olarak A_1, A_2, A_3 matrisleri verilsin o zaman

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_3^T \\ A_3 & -A_2 \end{bmatrix} < 0 \text{ veya } \begin{bmatrix} -A_2 & A_3 \\ A_3^T & A_1 \end{bmatrix} < 0$$

matris eşitsizlikleri $A_1 + A_3^T A_2^{-1} A_3 < 0$ matris eşitsizliğine denktir [4].

Lemma 2.1 Herhangi pozitif belirli sabit Θ matrisi, pozitif σ skaleri ve $w : [0, \sigma] \rightarrow R^m$ vektör fonksiyonu için

$$\sigma \int_0^\sigma w^T(s) \Theta w(s) ds \geq \left(\int_0^\sigma w(s)\, ds \right)^T \Theta \left(\int_0^\sigma w(s)\, ds \right) \tag{2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [22].

Teorem 2.1 $\bar{h} > 0, \mu$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$P > 0,\ Q > 0,\ R > 0,\ W > 0$$

matrisleri ve herhangi N_1, N_2 matrisleri varsa (2.1) sistemi gecikmeye bağımlı olarak asimptotik kararlıdır

$$\Omega = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h} N_1^T & \bar{h} A^T W & A^T R \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h} N_2^T & \bar{h} A_1^T W & A_1^T R \\ * & * & -R & 0 & \bar{h} E^T W & E^T R \\ * & * & * & -\bar{h} W & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h} W & 0 \\ * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0. \tag{2.4}$$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli aşağıdaki gibi verilsin:

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-h(t)}^{t} x^T(s) Q\, x(s) ds + \int_{-\bar{h}}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{t-d}^{t} \dot{x}^T(s) R\, \dot{x}(s) ds. \tag{2.5}$$

Burada $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$ ve $W = W^T > 0$'dır. Bu fonksiyonel

$$\lambda_m(P)\|x\|^2 \le V(x_t) \le \lambda_M(P)\|x\|^2 + \bar{h}\lambda_M(Q)\|x\|^2 + d\lambda_M(R)\|\dot{x}\|^2 + \frac{\bar{h}^2}{2}\lambda_M(W)\|\dot{x}\|^2$$

koşulunu sağladığı için, 1.Bölüm'de verilen Lyapunov-Krasovskii Teoremi'nin **i**.koşulunu sağlamaktadır. Bu fonksiyonelin zamana göre adi türevi

$$\dot{V}(x_t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - (1-\dot{h}(t))x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) + \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)$$
$$- \dot{x}^T(t-d)R\dot{x}(t-d) + \bar{h}\dot{x}^T(t)W\dot{x}(t) - \int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}^T(s)W\dot{x}(s)ds \tag{2.6}$$

şeklindedir. $0 < h(t) \le \bar{h}$ olduğu için

$$-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}^T(s)W\dot{x}(s)ds \le -\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^T(s)W\dot{x}(s)ds \tag{2.7}$$

yazılabilir. Sistem (2.1), Lemma 2.1, (2.7) eşitsizliği ve N_1, N_2 uygun boyutlu herhangi matrisler olmak üzere

$$2(x^T(t)N_1^T + x^T(t-h(t))N_2^T)(x(t) - x(t-h(t)) - \int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds) = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği kullanılarak

$$\dot{V}(x_t) \le 2x^T(t)P(Ax(t) + A_1x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d)) + x^T(t)Qx(t)$$
$$-(1-\mu)x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) - \dot{x}^T(t-d)R\dot{x}(t-d) - \frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^T(s)ds(\bar{h}W)\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds$$
$$+(Ax(t) + A_1x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d))^T(\bar{h}W + R)(Ax(t) + A_1x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d))$$
$$+2(x^T(t)N_1^T + x^T(t-h(t))N_2^T)(x(t) - x(t-h(t)) - \int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds) \tag{2.9}$$

elde edilebilir. Bu eşitsizlik sağ tarafındaki terimler düzenlenerek

$$\dot{V}(x_t) \le \eta^T(t)(\psi + \Gamma^T(\bar{h}W + R)\Gamma)\eta(t) \tag{2.10}$$

şeklinde vektör ve matris formunda yazılabilir. Burada

$$\eta^T(t) = \left[x^T(t),\, x^T(t-h(t)), \dot{x}^T(t-d), \frac{1}{\bar{h}} \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}^T(s)ds \right], \tag{2.11}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & A_1 & E & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

ve

$$\psi = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T \\ * & * & -R & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

şeklindedir. (2.10)'nun içindeki $\psi + \Gamma^T(\bar{h}W + R)\Gamma$ terimine Schur Komplementi [4] uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A^T & A^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^T & A_1^T \\ * & * & -R & 0 & \bar{h}E^T & E^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

(2.14)

eşitsizliğinin sağlandığı takdirde **ii**. koşulun da sağlanacağı görülür. Elde edilen bu eşitsizlik soldan ve sağdan

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

matrisi ile çarpılırsa (2.4) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.1 [14]. Durum gecikmesini sabit alarak (2.1) sistemi aşağıdaki matrisler ile ele alınsın:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Sistemin kararlılığı için mümkün olan durum gecikmesinin üst sınırı $\bar{h} > 0$ değerleri, c'nin çeşitli değerleri için Çizelge 2.1'de verilmiştir. Sistem, durum gecikmesi, çizelgede verilen $\bar{h} > 0$ değerlerinden küçük iken kararlı, büyük iken kararsızdır.

Çizelge 2.1: (2.16) sisteminin kararlılığı için c'nin çeşitli değerlerine karşı gelen $\bar{h} > 0$ değerleri.

c	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
[52]	4.47	3.49	2.06	1.14	0.54	0.13
[53]	4.35	4.33	4.10	3.62	2.73	0.99
[14]	4.47	4.35	4.13	3.67	2.87	1.41
Teorem 2.1	4.47	3.49	2.06	1.14	0.54	0.13

3. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLERİN DAYANIKLI KARARLILIĞI

Bu bölümde, 2. Bölümde verilen (2.1) sistemi belirsiz parametreler içerdiği durumda, sistemin dayanıklı kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizliği Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için elde edilen sonuçların literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılması çizelge şeklinde verilmiştir.

(2.1) sistemi aşağıdaki zaman değişkenli belirsizlikler ile ele alınsın:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\Delta}x(t) + A_{1\Delta}x(t-h(t)) + E_{\Delta}\dot{x}(t-d) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta\in[-\tau,0], \quad (t_0,\phi)\in R^{+}\times C_{\tau,n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada

$$A_{\Delta} = A + \Delta A(t), \quad A_{1\Delta} = A_1 + \Delta A_1(t), \quad E_{\Delta} = E + \Delta E(t) \tag{3.2}$$

şeklinde, belirsizlikler ise

$$\left[\, \Delta A(t)\ \Delta A_1(t)\ \Delta E(t) \,\right] = MF(t)\left[\, N_A\ \ N_h\ \ N_E \,\right] \tag{3.3}$$

şeklindedir. Burada M, N_A, N_h, N_E uygun boyutlu sabit matrisler, $F(t)$ ise gerçel değerli, bilinmeyen, zaman değişkenli ve

$$F(t)^T F(t) \le I \tag{3.4}$$

koşulunu sağlayan bir matristir.

Lemma 3.1 [15]. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı ve uygun boyutlu U ve V matrisleri için

$$UV + V^T U^T \le \varepsilon UU^T + \varepsilon^{-1} V^T V \tag{3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.1 $\bar{h} > 0, \varepsilon > 0, \mu$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$P > 0,\ Q > 0,\ R > 0, W > 0$$

matrisleri ve herhangi N_1, N_2 matrisleri varsa (3.1) sistemi gecikmeye bağımlı olarak asimptotik kararlıdır

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Theta & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A^T W & A^T R & \varepsilon N_A^T & PM \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^T W & A_1^T R & \varepsilon N_h^T & 0 \\ * & * & -R & 0 & \bar{h}E^T W & E^T R & \varepsilon N_E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & \bar{h}WM \\ * & * & * & * & * & -R & 0 & RM \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon \end{bmatrix} < 0$$

$$\Theta = PA + A^T P + Q + N_1 + N_1^T. \qquad \textbf{(3.6)}$$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli 2. Bölümdeki (2.5)'teki gibi verilip, Teorem 2.1'in ispatında izlenen yol izlenir ise

$$\begin{bmatrix} PA_\Delta + A_\Delta{}^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_{1\Delta} - N_1^T + N_2 & PE_\Delta & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A_\Delta^T & A_\Delta^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_{1\Delta}^T & A_{1\Delta}^T \\ * & * & -R & 0 & \bar{h}E_\Delta^T & E_\Delta^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir. Burada (3.3) göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{bmatrix}
PA+A^TP+Q+N_1+N_1^T & PA_1-N_1^T+N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A^TW & A^TR \\
* & -(1-\mu)Q-N_2-N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^TW & A_1^TR \\
* & * & -R & 0 & \bar{h}E^TW & E^TR \\
* & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & -R^{-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} PM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{h}M \\ M \end{bmatrix} F(t)\begin{bmatrix} N_A & N_h & N_E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_A^T \\ N_h^T \\ N_E^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F^T(t)\begin{bmatrix} M^TP & 0 & 0 & 0 & \bar{h}M^T & M^T \end{bmatrix} < 0
$$

elde edilir. Lemma 3.1 ve (3.4) kullanılarak da

$$
\begin{bmatrix}
PA+A^TP+Q+N_1+N_1^T & PA_1-N_1^T+N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A^TW & A^TR \\
* & -(1-\mu)Q-N_2-N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^TW & A_1^TR \\
* & * & -R & 0 & \bar{h}E^TW & E^TR \\
* & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & -R^{-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
+\varepsilon\begin{bmatrix} N_A^T \\ N_h^T \\ N_E^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A & N_h & N_E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}\begin{bmatrix} PM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{h}M \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^TP & 0 & 0 & 0 & \bar{h}M^T & M^T \end{bmatrix} < 0
$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik soldan ve sağdan (2.15) ile verilen matris ile çarpılarak, Schur Komplementi uygulanırsa (3.6) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1 [14]. Durum gecikmesini sabit alarak (3.1) sistemi aşağıdaki matrisler ile ele alınsın:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Sistemi kararlı yapan durum gecikmesinin üst sınırı olan $\bar{h}>0$ değerleri, c'nin çeşitli değerleri ve

$$M=I,\quad N_A=0.2\times I,\quad N_h=0.2\times I,\quad N_E=0$$

için Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1: (3.7) sisteminin dayanıklı kararlılığı için c'nin çeşitli değerlerine karşı gelen $\bar{h}>0$ değerleri.

c	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
[53]	1.77	1.63	1.48	1.33	1.16	0.98	0.79	0.59	0.37
[14]	2.43	2.33	2.24	2.14	2.03	1.91	1.78	1.65	1.5
Teorem 3.1	2.46	2.2	1.8	1.7	1.4	1.3	1.1	1.1	0.8

Çizelge 3.2'de de $c=0.1$ ve

$$M=I,\quad N_A=\alpha\times I,\quad N_h=\alpha\times I,\quad N_E=0$$

için durum gecikmesinin üst sınırı olan $\bar{h}>0$ değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.2: (3.7) sisteminin dayanıklı kararlılığı için α'nın çeşitli değerlerine karşı gelen $\bar{h}>0$ değerleri.

α	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
[53]	4.33	3.61	2.9	2.19	1.48	0.77
[14]	4.35	3.64	3.06	2.6	2.24	1.94
Teorem 3.1	3.4	2.9	2.5	2.2	1.9	1.7

4. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DURUM GERİ BESLEMELİ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 2. Bölümde verilmiş olan (2.1) sistemini kararlı hale getirmek için, bir kontrol girdisi vasıtası ile sisteme, sistemin durumu ve düzenleyici bir matris ile oluşturulan geri besleme kontrol kuralı uygulanarak, kapalı çevrim sistemi elde edilmiştir. Elde edilen sistemin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizliği Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için elde edilen sonuçların literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılması çizelge şeklinde verilmiştir.

Yeterli koşullar için elde edilen matris eşitsizliği içinde, düzenleyici matris ve diğer matris değişkenlerinin çarpımlarının olması yüzünden lineer olmayan terimler oluşmuştur. Bu eşitsizliğe denk bir LME elde etmek için, lineer olmayan matris eşitsizliği soldan ve sağdan matris değişkenlerinin terslerini içeren köşegen bir matris ile çarpılmıştır. Bu işlem, [16]'da yeterli koşulları LME cinsinden elde etmek için kullanılan ve çok fazla olan matris işlemlerini oldukça kısaltmış ve elde edilen nümerik sonuçların bu çalışmada elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu belirlenmiştir.

(2.1) ile verilen sistem bir kontrol girdisi eklenerek:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) + Bu(t) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.1)}$$

şeklinde ele alınsın. Burada $u(t) \in R^m$ sistemin kontrol girdisi, B ise uygun boyutlu sabit sistem matrisidir. (4.1) sistemini kararlı hale getirmek için

$$u(t) = Kx(t) \qquad \textbf{(4.2)}$$

şeklinde bir durum geri besleme kontrol kuralı tanımlansın. Burada K uygun boyutlu düzenleyici bir matristir. Bu kontrol kuralı (4.1) sistemine uygulanırsa

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) \tag{4.3}$$

kapalı çevrim sistemi elde edilir. Burada $A_k = A + BK$ 'dır.

Teorem 4.1 $\bar{h} > 0, \mu, \alpha_1, \alpha_2$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$X > 0,\ \tilde{Q} > 0,\ \tilde{R} > 0,\ \tilde{W} > 0$$

matrisleri ve herhangi Y matrisi varsa (4.1) sistemini kararlı hale getiren (4.2) formunda bir geri besleme kontrolü vardır

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Theta & A_1\tilde{Q} - \alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2 X & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & \bar{h}XA^T + \bar{h}Y^T B^T & XA^T + Y^T B^T & X \\ * & -(1-\mu)\tilde{Q} - 2\alpha_2\tilde{Q} & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4}$$

$$\Theta = AX + BY + XA^T + Y^T B^T + 2\alpha_1 X .$$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli 2. Bölümdeki (2.5)'teki gibi verilip, Teorem 2.1'in ispatında izlenen yol izlenir ise

$$\begin{bmatrix} PA_k + A_k^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A_k^T & A_k^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^T & A_1^T \\ * & * & -R & 0 & \bar{h}E^T & E^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikte $PA_k + A_k^T P$, R, R^{-1}, W ve W^{-1} terimleri lineer olmayan bir durum yaratmaktadır. Bu eşitsizliğe denk bir LME elde etmek için (4.5) eşitsizliği, $X = P^{-1}, \tilde{Q} = Q^{-1}, \tilde{R} = R^{-1}, \tilde{W} = W^{-1}$ ve $N_1 = \alpha_1 P,\ N_2 = \alpha_2 Q$ olmak üzere, soldan ve sağdan

$$\Phi = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{W} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.6)}$$

matrisi ile çarpılarak Schur Komplementi uygulanırsa

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_k X + X A_k^T + 2\alpha_1 X & A_1\tilde{Q} - \alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2 X & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & \bar{h}XA_k^T & XA_k^T & X \\ * & -(1-\mu)\tilde{Q} - 2\alpha_2\tilde{Q} & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0$$

(4.7)

elde edilir. Burada $A_k X = AX + BKX$ için $KX = Y$ olarak tanımlanırsa (4.4) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1 (4.1) sistemi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.25 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.8)}$$

matrisleri ile ele alınsın. Durum geri beslemeli kontrol ile sistemi kararlı hale getirmeyi mümkün kılan durum gecikmesinin üst sınırı $\bar{h} > 0$ ve türevinin üst sınırı μ değerleri, $\alpha_1 = 0.1,\ \alpha_2 = 2.5$ için Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Durum geri beslemesi ile (4.8) sistemini kararlı yapan $\bar{h} > 0$ ve μ değerleri.

$\bar{h}$	1.5	1	0.8	0.5
μ	3.7	4	4.2	4.5

Ayrıca $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$ için $\mu = 0, \bar{h} = 7$ ve $\mu = 0.8, \bar{h} = 7$ elde edilebilmektedir.

Örnek 4.2 [16]. (4.1) sistemi sabit durum gecikmesi ve $E = 0$ için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

matrisleri ile ele alınsın. $\alpha_1 = -0.101$, $\alpha_2 = 0.0089$ değerleri için Çizelge 4.2'deki değerler elde edilmiştir.

Çizelge 4.2: Durum geri beslemesi ile (4.9) sistemini kararlı yapan $\bar{h} > 0$ değerleri.

Yöntem	$\bar{h}$
[52]	1.408
[54]	1.510
[55]	3.2
[16]	6
Teorem 4.1	6.4

5. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DURUM GERİ BESLEMELİ DAYANIKLI KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 4. bölümde verilmiş olan (4.1) sistemi belirsiz parametreler içerdiği durumda, sistemi kararlı hale getirmek için bir kontrol girdisi vasıtası ile sisteme, sistemin durumu ve düzenleyici bir matris ile oluşturulan geri besleme kontrol kuralı uygulanmıştır. Elde edilen sistemin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizliği Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için elde edilen sonuçların literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılması çizelge şeklinde verilmiştir.

(4.1) sistemi aşağıdaki gibi zaman değişkenli belirsizlikler ile ele alınsın:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\Delta x(t) + A_{1\Delta} x(t-h(t)) + E_\Delta \dot{x}(t-d) + B_\Delta u(t) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada $B_\Delta = B + \Delta B(t)$ ve belirsizlikler ise

$$\left[\, \Delta A(t)\ \Delta A_1(t)\ \Delta E(t)\ \Delta B(t) \,\right] = MF(t)\left[\, N_A\ N_h\ N_E\ N_B \,\right] \tag{5.2}$$

şeklindedir. Burada N_B uygun boyutlu sabit matristir.

Teorem 5.1 $\bar{h} > 0, \varepsilon > 0, \mu, \alpha_1, \alpha_2$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$X > 0,\ \widetilde{Q} > 0,\ \widetilde{R} > 0,\ \widetilde{W} > 0$$

matrisleri ve herhangi Y matrisi varsa (5.1) sistemini kararlı hale getiren (4.2) formunda bir geri besleme kontrolü vardır

$$\Omega=\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2 & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & \bar{h}XA^T+\bar{h}Y^TB^T & XA^T+Y^TB^T & \psi_4 & M & X\\ * & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & \varepsilon\tilde{Q}N_h^T & 0 & 0\\ * & * & -\tilde{R} & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & \varepsilon\tilde{R}N_E^T & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & \bar{h}M & 0\\ * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 & M & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q}\end{bmatrix}<0 \qquad \textbf{(5.3)}$$

$\psi_1 = AX+BY+XA^T+Y^TB^T+2\alpha_1X,\quad \psi_2 = A_1\tilde{Q}-\alpha_1\tilde{Q}+\alpha_2X,$
$\psi_3 = -(1-\mu)\tilde{Q}-2\alpha_2\tilde{Q},\quad \psi_4 = \varepsilon XN_A^T+\varepsilon Y^TN_B^T.$

İspat. 4. Bölümde (4.2) ile verilen geri besleme kontrolü (5.1) sistemine uygulanırsa

$$\dot{x}(t) = A_{k\Delta}x(t)+A_{1\Delta}x(t-h(t))+E_\Delta\dot{x}(t-d) \qquad \textbf{(5.4)}$$

elde edilir. Burada

$$A_{k\Delta} = A+\Delta A(t)+(B+\Delta B(t))K \qquad \textbf{(5.5)}$$

şeklindedir. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli 2. Bölümdeki (2.5)'teki gibi verilip, Teorem 2.1'in ispatında izlenen yol izlenir ise

$$\begin{bmatrix}PA_{k\Delta}+A_{k\Delta}{}^TP+Q+N_1+N_1^T & PA_{1\Delta}-N_1^T+N_2 & PE_\Delta & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A_{k\Delta}^T & A_{k\Delta}^T\\ * & -(1-\mu)Q-N_2-N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_{1\Delta}^T & A_{1\Delta}^T\\ * & * & -R & 0 & \bar{h}E_\Delta^T & E_\Delta^T\\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0\\ * & * & * & * & * & -R^{-1}\end{bmatrix}<0 \qquad \textbf{(5.6)}$$

elde edilir. Buradan (5.2), Lemma 3.1 ve (3.4) eşitsizliği ile

$$
\begin{bmatrix}
PA_k + A_k^T P + Q + N_1 + N_1^T & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & \bar{h}A_k^T W & A_k^T R \\
* & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & \bar{h}A_1^T W & A_1^T R \\
* & * & -R & 0 & \bar{h}E^T W & E^T R \\
* & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & -R^{-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
+\varepsilon \begin{bmatrix} N_{A_k}^T \\ N_h^T \\ N_E^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_h & N_E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} PM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{h}M \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T P & 0 & 0 & 0 & \bar{h}M^T & M^T \end{bmatrix} < 0
$$

(5.7)

elde edilir. Burada $N_{A_k} = N_A + N_B K, \quad A_k = A + BK$ şeklindedir.

Elde edilen bu eşitsizlikte $PA_k + A_k^T P$, R , R^{-1} , W ve W^{-1} terimleri lineer olmayan bir durum yaratmaktadır. Lineer bir matris eşitsizliği elde etmek için (5.7) eşitsizliği, $X = P^{-1}, \widetilde{Q} = Q^{-1}, \widetilde{R} = R^{-1}, \widetilde{W} = W^{-1}$ ve $N_1 = \alpha_1 P, N_2 = \alpha_2 Q$ olmak üzere, soldan ve sağdan (4.6) ile verilen matris ile çarpılarak Schur Komplementi uygulanırsa

$$
\Omega = \begin{bmatrix}
\psi_1 & \psi_2 & E\widetilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\widetilde{W} & \bar{h}XA_k^T & XA_k^T & \varepsilon XN_{A_k}^T & M & X \\
* & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\widetilde{W} & \bar{h}\widetilde{Q}A_1^T & \widetilde{Q}A_1^T & \varepsilon\widetilde{Q}N_h^T & 0 & 0 \\
* & * & -\widetilde{R} & 0 & \bar{h}\widetilde{R}E^T & \widetilde{R}E^T & \varepsilon\widetilde{R}N_E^T & 0 & 0 \\
* & * & * & -\bar{h}\widetilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{h}\widetilde{W} & 0 & 0 & \bar{h}M & 0 \\
* & * & * & * & * & -\widetilde{R} & 0 & M & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\widetilde{Q}
\end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(5.8)}
$$

$\psi_1 = A_k X + XA_k^T + 2\alpha_1 X, \quad \psi_2 = A_1\widetilde{Q} - \alpha_1\widetilde{Q} + \alpha_2 X,$
$\psi_3 = -(1-\mu)\widetilde{Q} - 2\alpha_2\widetilde{Q}, \quad A_k = A + BK, \quad N_{A_k} = N_A + N_B K$

elde edilir. Burada 4. Bölümde yapıldığı gibi $KX = Y$ olarak tanımlanırsa (5.3) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.1 [14]. (5.1) sistemi sabit durum gecikmesi için

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix}-2 & -0.5\\ 0 & -1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\qquad E=0, \tag{5.9}$$

$$M=I,\quad N_A=\alpha\times I,\quad N_h=\alpha\times I,\quad N_E=0,\quad N_B=0 \tag{5.10}$$

matrisleri ile ele alınsın. Durum geri beslemeli dayanıklı kontrol ile sistemi kararlı hale getirmeyi mümkün kılan durum gecikmesinin üst sınırı $\bar{h}>0$ değerleri, $\alpha_1=0.1,\ \alpha_2=2.5$ için Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1: Durum geri beslemesi ile (5.9) sistemini dayanıklı kararlı yapan $\bar{h}>0$ değerleri.

α	0	0.2
[56]		0.45
[54]	0.58	
[14]	0.95	0.65
Teorem 5.1	0.6	0.54

Örnek 5.2 Şimdi de (5.1) sistemi

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix}0 & 0.2\\ 0.2 & 0\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

$$M=\begin{bmatrix}0\\ 0.2\end{bmatrix},\quad N_A=\begin{bmatrix}0.2 & 0\end{bmatrix},\quad N_h=\begin{bmatrix}1 & 0.3\end{bmatrix},\quad N_E=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\end{bmatrix},\quad N_B=0.5 \tag{5.12}$$

matrisleri ile ele alınsın. $\alpha_1=-0.11,\ \alpha_2=0.089$ için $\bar{h}>0$ ve μ değerleri Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2: Durum geri beslemesi ile (5.11) sistemini dayanıklı kararlı yapan $\bar{h}>0$ ve μ değerleri.

μ	0	1
$\bar{h}$	8.3	2.6

6. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DURUM GERİ BESLEMELİ H_∞ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 4. bölümdeki (4.1) sistemine bir dış etki ve kontrol edilen çıktı eklenerek, durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Bu kontrol altında elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizliği Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için performans indeksini sıfırdan küçük yapan en küçük γ sayısı için bulunan değerler çizelge şeklinde verilmiştir.

(4.1) ile verilen sistem bir dış etki ve kontrol edilen çıktı ile

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t) + C_d x(t-h(t)) \\ x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n} \end{aligned} \tag{6.1}$$

şeklinde ele alınsın. Burada $w(t) \in R^q$ sisteme uygulanan dış etki, $z(t) \in R^p$ kontrol edilen çıktı, B_1, B_2, D_1, D_2 ve C_d ise uygun boyutlu sistem matrisleridir. (4.2) ile verilen geri besleme kontrolü (6.1) sistemine uygulanırsa, kapalı çevrim sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_k x(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_k x(t) + D_1 w(t) + C_d x(t-h(t)) \end{aligned} \tag{6.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $A_k = A + BK,\ \ C_k = C + D_2 K$ 'dır. $\gamma > 0$ olmak üzere performans indeksi

$$J(w)=\int_0^{\infty}(z^T(t)z(t)-\gamma^2 w^T(t)w(t))\,dt \qquad \textbf{(6.3)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (6.1) sistemi için (4.2) kontrol kuralı aşağıdaki kurallar dahilinde durum geri beslemeli H_{∞} kontrolü olarak adlandırılır:

i. (6.2) kapalı çevrim sistemi asimptotik kararlıdır,

ii. Sıfırdan farklı her $w\in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w)<0$ dır.

Teorem 6.1 $\bar{h}>0,\gamma>0,\mu,\alpha_1,\alpha_2$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$X>0,\ \tilde{Q}>0,\ \tilde{R}>0,\ \tilde{W}>0$$

matrisleri ve herhangi Y matrisi varsa (6.1) sistemini kararlı hale getiren (4.2) formunda bir geri besleme kontrol kuralı vardır ve (6.3) ile verilen performans indeksi sıfırdan farklı her $w\in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w)<0$ olur

$$\Omega=\begin{bmatrix}
\psi_1 & \psi_2 & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & B_1 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & X\\
* & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & 0 & \tilde{Q}C_d^T & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & 0\\
* & * & -\tilde{R} & 0 & 0 & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & 0\\
* & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T & 0\\
* & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q}
\end{bmatrix}<0 \qquad \textbf{(6.4)}$$

$\psi_1=AX+BY+XA^T+Y^TB^T+2\alpha_1 X,\quad \psi_2=A_1\tilde{Q}-\alpha_1\tilde{Q}+\alpha_2 X,\quad \psi_3=-(1-\mu)\tilde{Q}-2\alpha_2\tilde{Q}$
$\psi_4=XC^T+Y^TD_2{}^T,\quad \psi_5=\bar{h}XA^T+\bar{h}Y^TB_2{}^T,\quad \psi_6=XA^T+Y^TB_2{}^T.$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli 2. Bölümdeki (2.5)'teki gibi verilsin. $H(x_t,w,t)$ Hamiltoniyeni göstermek üzere

$$H(x_t,w,t)=\dot{V}(x_t)+z^T(t)z(t)-\gamma^2 w^T(t)w(t)<0 \qquad \textbf{(6.5)}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir. (2.5) ile verilen fonksiyonelin zamana göre türevi, 2. Bölümde verilen Lemma 2.1, (2.7) ve (2.8) yardımı ile

$$H(x_t, w, t) \le \eta^T(t)(\psi + \Gamma^T(\bar{h}W + R)\Gamma)\eta(t) \tag{6.6}$$

elde edilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} \Theta & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & PB_1 + C_k^T D_1 \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 \\ * & * & * & * & -(\gamma^2 I - D_1^T D_1) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\Theta = PA_k + A_k^T P + Q + C_k^T C_k + N_1 + N_1^T,$$

$$\eta^T(t) = \left[\; x^T(t),\; x^T(t-h(t)), \dot{x}^T(t-d), \frac{1}{\bar{h}} \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}^T(s)ds,\; w^T(t) \;\right], \tag{6.8}$$

ve

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_k & A_1 & E & 0 & B_1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

şeklindedir. (6.6)'daki $\psi + \Gamma^T(\bar{h}W + R)\Gamma$ terimine Schur Komplementi uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} \Theta & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & PB_1 & C_k^T & \bar{h}A_k^T & A_k^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & 0 & C_d^T & \bar{h}A_1^T & A_1^T \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & \bar{h}E^T & E^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Theta = PA_k + A_k^T P + Q + N_1 + N_1^T \tag{6.10}$$

eşitsizliğinin sağlandığı takdirde (6.5) koşulunun sağlanacağı görülür. Bu eşitsizlik, $X = P^{-1}, \widetilde{Q} = Q^{-1}, \widetilde{R} = R^{-1}, \widetilde{W} = W^{-1}$ ve $N_1 = \alpha_1 P, N_2 = \alpha_2 Q$ olmak üzere, soldan ve sağdan

$$\Phi = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

matrisi ile çarpılarak Schur Komplementi uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & B_1 & XC_k^T & \bar{h}XA_k^T & XA_k^T & X \\ * & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & 0 & \tilde{Q}C_d^T & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 & 0 & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0 \tag{6.12}$$

$\psi_1 = A_k X + XA_k^T + 2\alpha_1 X,$

$\psi_2 = A_1\tilde{Q} - \alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2 X,$

$\psi_3 = -(1-\mu)\tilde{Q} - 2\alpha_2\tilde{Q}$

elde edilir. Burada Teorem 4.1'in ispatının sonunda olduğu gibi $KX = Y$ olarak tanımlanırsa (6.4) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 6.1 (6.1) sistemi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.25 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0.5, \quad D_2 = 0.25 \tag{6.13}$$

matrisleri ile ele alınsın. $\alpha_1 = 0.1,\ \alpha_2 = 2.5$ için $\bar{h} > 0, \gamma > 0$ ve μ değerleri Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1: (6.13) sistemini kararlı yapan durum gecikmesinin ve türevinin üst sınırı için bulunan en küçük $\gamma > 0$ değerleri.

$\bar{h}$	1.6	2
μ	1.5	0
γ	1.5	1.5

Aynı örnek $C_d = 0$ ve $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ için incelenirse sonuçlar Çizelge 6.2'deki gibi olur.

Çizelge 6.2: (6.13) sistemini kararlı yapan durum gecikmesinin ve türevinin üst sınırı için bulunan en küçük $\gamma > 0$ değerleri.

$\bar{h}$	1.7	2
μ	1.3	0
γ	1	1

7. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DURUM GERİ BESLEMELİ DAYANIKLI H_∞ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 6. Bölümde verilmiş olan (6.1) sistemi belirsiz parametreler içerdiği durumda, durum geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Bu kontrol altında elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME cinsinden elde edilmiştir. Yeterli koşullar elde edilirken (9.2) ile verilen model dönüşümü kullanılmamıştır. Elde edilen matris eşitsizlikleri Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için performans indeksini sıfırdan küçük yapan en küçük γ sayısı için bulunan değerler çizelge şeklinde verilmiştir. (6.1) sistemi aşağıdaki gibi zaman değişkenli belirsizlikler ile ele alınsın:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A_\Delta x(t) + A_{1\Delta} x(t-h(t)) + E_\Delta \dot{x}(t-d) + B_1 w(t) + B_{2\Delta} u(t) \\
&z(t) = Cx(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t) + C_d (t-h(t)) \\
&x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Burada

$$A_\Delta = A + \Delta A(t), \quad A_{1\Delta} = A_1 + \Delta A_1(t), \quad E_\Delta = E + \Delta E(t), \quad B_{2\Delta} = B_2 + \Delta B_2(t) \tag{7.2}$$

şeklinde, belirsizlikler ise

$$\left[\, \Delta A(t)\ \Delta A_1(t)\ \Delta E(t)\ \Delta B_2(t) \,\right] = MF(t)\left[\, N_A\ N_h\ N_E\ N_B \,\right] \tag{7.3}$$

formundadır.

Teorem 7.1 $\overline{h} > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0, \mu, \alpha_1, \alpha_2$ sayıları verilsin ve $\mu(x_t)$ kararlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$X > 0,\ \widetilde{Q} > 0,\ \widetilde{R} > 0,\ \widetilde{W} > 0$$

matrisleri ve herhangi Y matrisi varsa (7.1) sistemini kararlı hale getiren (4.2) formunda bir geri besleme kontrol kuralı vardır ve (6.3) ile verilen performans indeksi sıfırdan farklı her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w) < 0$ olur.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & B_1 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & M & X \\ * & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & 0 & \tilde{Q}C_d^T & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & \varepsilon\tilde{Q}N_h^T & 0 & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 & 0 & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & \varepsilon\tilde{R}N_E^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & \bar{h}M & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 & M & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0$$

$$\psi_1 = AX + BY + XA^T + Y^T B^T + 2\alpha_1 X, \quad \psi_2 = A_1\tilde{Q} - \alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2 X, \quad \psi_3 = -(1-\mu)\tilde{Q} - 2\alpha_2\tilde{Q}$$
$$\psi_4 = XC^T + Y^T D_2^T, \quad \psi_5 = \bar{h}XA^T + \bar{h}Y^T B_2^T, \quad \psi_6 = XA^T + Y^T B_2^T, \quad \psi_7 = \varepsilon XN_A^T + \varepsilon Y^T N_B^T$$

(7.4)

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli 2. Bölümdeki (2.5)'teki gibi verilsin. 4. bölümde (4.2) ile verilen geri besleme kontrolü (7.1) sistemine uygulanırsa, kapalı çevrim sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{k\Delta}x(t) + A_{1\Delta}x(t-h(t)) + E_\Delta\dot{x}(t-d) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_k x(t) + D_1 w(t) + C_d x(t-h(t)) \end{aligned} \quad \textbf{(7.5)}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$A_{k\Delta} = A + \Delta A(t) + (B + \Delta B(t))K \quad \textbf{(7.6)}$$

şeklindedir. Teorem 6.1'in ispatındaki yol ile

$$\begin{bmatrix} \Theta & PA_{1\Delta} - N_1^T + N_2 & PE_\Delta & -\bar{h}N_1^T & PB_1 & C_k^T & \bar{h}A_{k\Delta}^T & A_{k\Delta}^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & 0 & C_d^T & \bar{h}A_{1\Delta}^T & A_{1\Delta}^T \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & \bar{h}E_\Delta{}^T & E_\Delta{}^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Theta = PA_{k\Delta} + A_{k\Delta}^T P + Q + N_1 + N_1^T$$

(7.7)

elde edilir. Buradan (7.3), Lemma 3.1 ve (3.4) eşitsizliği ile

$$\begin{bmatrix} \Theta & PA_1 - N_1^T + N_2 & PE & -\bar{h}N_1^T & PB_1 & C_k^T & \bar{h}A_k^T & A_k^T \\ * & -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T & 0 & -\bar{h}N_2^T & 0 & C_d^T & \bar{h}A_1^T & A_1^T \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & \bar{h}E^T & E^T \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}W^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

(7.8)

$$+\varepsilon \begin{bmatrix} N_{A_k}^T \\ N_h^T \\ N_E^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_h & N_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} PM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{h}M \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{h}M^T & M^T \end{bmatrix}$$

$$\Theta = PA_k + A_k^T P + Q + N_1 + N_1^T$$

elde edilir. Burada $N_{A_k} = N_A + N_B K,\quad A_k = A + BK$ ve $C_k = C + D_2 K$ şeklindedir. Burada Teorem 6.1'in ispatında olduğu gibi (7.8) eşitsizliği soldan ve sağdan 6. Bölümde verilen (6.11) matrisi ile çarpılarak Schur Komplementi uygulanırsa

$$\Omega=\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2 & E\tilde{R} & -\bar{h}\alpha_1\tilde{W} & B_1 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & M & X\\ * & \psi_3 & 0 & -\bar{h}\alpha_2\tilde{W} & 0 & \tilde{Q}C_d^T & \bar{h}\tilde{Q}A_1^T & \tilde{Q}A_1^T & \varepsilon\tilde{Q}N_h^T & 0 & 0\\ * & * & -\tilde{R} & 0 & 0 & 0 & \bar{h}\tilde{R}E^T & \tilde{R}E^T & \varepsilon\tilde{R}N_E^T & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_1^T & \bar{h}B_1^T & B_1^T & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}\tilde{W} & 0 & 0 & \bar{h}M & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{R} & 0 & M & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q}\end{bmatrix}<0$$

$$\psi_1 = A_k X + XA_k^T + 2\alpha_1 X,\quad \psi_2 = A_1\tilde{Q} - \alpha_1\tilde{Q} + \alpha_2 X,\quad \psi_3 = -(1-\mu)\tilde{Q} - 2\alpha_2\tilde{Q}$$
$$\psi_4 = XC_k^T,\quad \psi_5 = \bar{h}XA_k^T,\quad \psi_6 = XA_k^T,\quad \psi_7 = \varepsilon XN_{A_k}^T$$

(7.9)

eşitsizliği elde edilir. Burada da $KX = Y$ olarak tanımlanırsa (7.4) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 7.1 (7.1) sistemi

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}-0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}0.36 & 0.25\\ -0.1 & 0.2\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}0.2 & 0\end{bmatrix},\quad C_d=\begin{bmatrix}0.3 & 0\end{bmatrix},\quad D_1=0.5,\quad D_2=0.25$$

(7.10)

$$M=\begin{bmatrix}0\\ 0.2\end{bmatrix},\quad N_A=\begin{bmatrix}0.2 & 0\end{bmatrix},\quad N_h=\begin{bmatrix}1 & 0.3\end{bmatrix},\quad N_E=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\end{bmatrix},\quad N_B=0.5$$

matrisleri ile ele alınsın. $\alpha_1 = 0.1,\ \alpha_2 = 2.5$ için $\bar{h} > 0, \gamma > 0$ ve μ değerleri Çizelge 7.1'de verilmiştir.

Çizelge 7.1: (7.10) sistemini dayanıklı kararlı yapan durum gecikmesinin ve türevinin üst sınırı için bulunan en küçük $\gamma > 0$ değerleri.

$\bar{h}$	1.8	2
μ	1.6	0
γ	1.3	1.4

8. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DİNAMİK ÇIKTI GERİ BESLEMELİ H_∞ KONTROL PROBLEMİ: SABİT DURUM GECİKMELİ HAL

Bu bölümde sabit gecikmelere sahip lineer neutral bir sistem için dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Sistemin ölçülen çıktısı ve düzenleyici bir matris ile tanımlanan dinamik kontrol kuralı sisteme uygulanarak, kapalı çevrim sistemi elde edilmiştir. Elde edilen kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar gecikmelere bağımlı olarak Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile LME'ler cinsinden elde edilmiştir. Elde edilen LME'lerin çözümünden kontrol kuralının parametrik ifadesi elde edilmiştir. Burada kullanılan yöntem ile [27]'deki sistem matrisleri üzerindeki $D_{12}^T D_{12}$'nin singüler olmaması ve $B_1 D_{21}^T = 0$ olma şartı ortadan kaldırılmıştır.

8.1 Problemin Sunuluşu

(6.1) ile verilen sistem ölçülen çıktı ile

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t-h) + E\,\dot{x}(t-d) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\
x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

şeklinde ele alınsın. Burada $y(t) \in R^l$ ölçülen çıktı, $z(t) \in R^p$ düzenlenmiş çıktı, $C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ ve D_{22} uygun boyutlu sistem matrisleridir. $\tau = \max\{h, d\}$ olmak üzere, $\phi(\cdot)$ $[-\tau, 0]$ üzerinde verilmiş sürekli bir fonksiyondur. Burada gecikmeye bağımlı durum

$$x(t-h) = x(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s)\,ds \tag{8.2}$$

şeklinde verilen bir model dönüşümü ile incelenmiştir [2]. Şimdi (8.1) sistemini kararlı hale getirmek için

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= K_{21}y(t) + K_{22}x_c(t) \\ u(t) &= K_{11}y(t) + K_{12}x_c(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(8.3)}$$

şeklinde bir dinamik çıktı geri besleme kontrol kuralı tanımlansın. Burada $x_c \in R^{n_c}$ kontrol durumu, $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$'ler ise uygun boyutlu düzenleyici matrislerdir. Bu kontrol kuralı ve (8.2) model dönüşümü (8.1) sistemine uygulanırsa kapalı çevrim sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \left(\overline{A} + \overline{A}_1 F\right)x_e(t) - \overline{A}_1 F \int_{t-h}^{t} \dot{x}_e(s)ds + \overline{E}F\,\dot{x}_e(t-d) + \overline{B}w(t) \\ z(t) &= \overline{C}x_e(t) + \overline{D}w(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(8.4)}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$x_e(t) = [x^T(t) \quad x_c^T(t)]^T \qquad \textbf{(8.5)}$$

ve kapalı çevrim sistem matrisleri

$$\overline{A} = \hat{A} + \hat{B}_2 K \hat{C}_2, \quad \overline{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 K \hat{D}_{21}, \quad \overline{C} = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} K \hat{C}_2, \quad \overline{D} = D_{11} + \hat{D}_{12} K \hat{D}_{21},$$

$$\overline{E} = [E \quad 0]^T, \quad \overline{A}_1 = [A_1 \quad 0]^T, \quad F = [I \quad 0],$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_1 = [C_1 \quad 0], \quad \hat{D}_{12} = [D_{12} \quad 0] \qquad \textbf{(8.6)}$$

şeklindedir.

Verilen bir $\gamma > 0$ sayısı için performans indeksi

$$J(w) = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t))\,dt \qquad \textbf{(8.7)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (8.1) sistemi için (8.3) kontrol kuralı aşağıdaki kurallar dahilinde çıktı geri beslemeli H_∞ kontrolü olarak adlandırılır:

i. (8.4) kapalı çevrim sistemi asimptotik kararlıdır,

ii. Sıfırdan farklı her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w) < 0$ dır.

Lemma 8.1 [22]. Verilen h>0, $\alpha_i > 0$ sayıları ve $E_i \in R^{n\times n}$ $(i = 1,2,3)$ matrisleri için $D(x_t): C_0 \to R^n$ olmak üzere

$$D(x_t) = x(t) + E_1 \int_{t-h}^{t} x(s)\,ds - E_2 x(t-d) + E_3 \int_{t-h}^{t} (s-t+h)\,x(s)\,ds \tag{8.8}$$

şeklinde verilen operatör, aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan simetrik $\Gamma > 0$ matrisi varsa, kararlı bir operatördür

$$\begin{bmatrix} E_2^T\Gamma E_2 - \alpha_1\Gamma & hE_2^T\Gamma E_1 & hE_2^T\Gamma E_3 \\ * & h^2E_1^T\Gamma E_1 - \alpha_2\Gamma & h^2E_1^T\Gamma E_3 \\ * & * & h^2E_3^T\Gamma E_3 - (3\alpha_3/h^2)\Gamma \end{bmatrix} < 0 \tag{8.9}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1.$

Şimdi (8.4) sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[D(x_{et}) \right] &= \overline{A}^* x_e(t) + \overline{B}w(t) \\ z(t) &= \overline{C}x_e(t) + \overline{D}w(t) \end{aligned} \tag{8.10}$$

şeklinde yazılsın. Burada

$$D(x_{et}) = \left[x_e(t) + \overline{A}_1 F \int_{t-h}^{t} x_e(s)\,ds - \overline{E}Fx_e(t-d) \right], \tag{8.11}$$

ve

$$\overline{A}^* = \overline{A} + \overline{A}_1 F \tag{8.12}$$

şeklindedir. (8.11) operatörünün kararlılığı için Lemma 8.1'den aşağıdaki Lemma elde edilebilir.

Lemma 8.2 [22]. (8.11) ile verilen operatör, verilen $\alpha_i > 0, \quad i = 1,2,3$ ve h>0 sayıları için aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan simetrik $\Gamma_1 > 0$ ve $\Gamma_2 > 0$ matrisleri varsa kararlı bir operatördür

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & hE^T\Gamma_1 A_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\alpha_1\Gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha_2\Gamma_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -(3\alpha_3/h^2)\Gamma_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -(3\alpha_3/h^2)\Gamma_2 \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(8.13)}$$

$$\Psi_1 = E^T\Gamma_1 E - \alpha_1\Gamma_1,$$
$$\Psi_2 = h^2 A_1^T\Gamma_1 A_1 - \alpha_2\Gamma_1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1.$$

İspat. Lemma 8.1'de $\Gamma = diag\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ olarak tanımlanırsa (8.13) elde edilir.

8.2 H $_\infty$ Kontrol Kuralı Tasarımı

Bu bölümde, (8.3) formunda çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralını elde etmek için algoritmik bir yöntem verilmiştir. Burada $K_{11} = 0$ alındığı not edilmelidir.

Teorem 8.1 (8.11) operatörü kararlı bir operatör olsun, yani Lemma 8.2 sağlansın. Bu durumda verilen $h > 0, d > 0, \beta_i > 0, i = 1,2,3,4$ ve $\gamma > 0$ sayıları için aşağıdaki simetrik LME'leri sağlayan uygun boyutlu, simetrik

$$S > 0, Y > 0, X > 0, W_i > 0, \quad i = 1,2,3,4$$

matrisleri ve herhangi A_h, B_h, C_h matrisleri varsa (8.1) sistemini gecikmelere bağımlı olarak kararlı hale getiren (8.3) formunda bir çıktı geri beslemeli H_∞ kontrolü vardır ve (8.7) ile verilen performans indeksi sıfır olmayan her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w)$<0 olur

$$
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
\Omega_1 & \beta_T Y & \Omega_2 & 0 & 0 & -A_h{}^T E & 0 & hA_h{}^T A_1 & 0 & 0 & 0 & B_1 & YC_1^T + C_h{}^T D_{12}^T \\
* & -\beta_T I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \Omega_3 & 0 & 0 & -(A^{*T} S + C_2^T B_h{}^T)E & 0 & h(A^{*T} S + C_2^T B_h{}^T)A_1 & 0 & 0 & 0 & SB_1 + B_h D_{21} & C_1^T \\
* & * & * & -\beta_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\beta_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E^T(SB_1 + B_h D_{21}) & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -h\beta_3 I & 0 & 0 & 0 & hA_1^T(SB_1 + B_h D_{21}) & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -hW_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -d\beta_4 I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -dW_4 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I
\end{array}\right] < 0
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= A^* Y + Y A^{*T} + B_2 C_h + C_h^T B_2^T + X, \\
\Omega_2 &= A^* + A_h^T + \beta_T Y, \\
\Omega_3 &= S A^* + A^{*T} S + B_h C_2 + C_2^T B_h^T + \beta_T I, \\
\beta_T &= \beta_1 + \beta_2 + h\beta_3 + d\beta_4,
\end{aligned}
\qquad \textbf{(8.14)}
$$

$$
\begin{bmatrix} Y & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0. \qquad \textbf{(8.15)}
$$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli aşağıdaki gibi verilsin:

$$
\begin{aligned}
V(x_t) = {} & D^T(x_{et})\overline{P}D(x_{et}) + \int_{t-h}^{t} x_e^T(s)\overline{Q}_1 x_e(s)\,ds + \int_{t-d}^{t} x_e^T(s)\overline{Q}_2 x_e(s)\,ds \\
& + \int_{t-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_2\, x_e(s)\,ds d\theta + \int_{t-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_1\, x_e(s)\,ds d\theta.
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

Burada $\overline{P}, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2$ pozitif belirli simetrik matrislerdir. $H(x_t, w, t)$ ile Hamiltoniyen gösterilmek üzere

$$
H(x_t, w, t) = \dot{V}(x_t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \tag{8.17}
$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir. (8.16) ile verilen fonksiyonelin zamana göre türevi

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) = {} & 2\dot{D}^T(x_{et})\overline{P}D(x_{et}) + x_e^T(t)\overline{Q}_1 x_e(t) - x_e^T(t-h)\overline{Q}_1 x_e(t-h) \\
& + x_e^T(t)\overline{Q}_2 x_e(t) - x_e^T(t-d)\overline{Q}_2 x_e(t-d) \\
& + d x_e^T(t)\overline{Z}_2 x_e(t) - \int_{t-d}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_2 x_e(s)\,ds \\
& + h x_e^T(t)\overline{Z}_1 x_e(t) - \int_{t-h}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_1 x_e(s)\,ds
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

şeklindedir. 2. Bölümde verilen Lemma 2.1 ile (8.18)'in sağ tarafındaki

$$
-\int_{t-d}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_2\, x_e(s)\,ds \ \text{ ve } -\int_{t-h}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_1\, x_e(s)\,ds
$$

terimleri için

$$
\begin{aligned}
-\int_{t-d}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_2\, x_e(s)\,ds &\le -\left(\frac{1}{d}\int_{t-d}^{t} x_e(s)\,ds\right)^T \left(d\,\overline{Z}_2\right)\left(\frac{1}{d}\int_{t-d}^{t} x_e(s)\,ds\right), \\
-\int_{t-h}^{t} x_e^T(s)\overline{Z}_1\, x_e(s)\,ds &\le -\left(\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} x_e(s)\,ds\right)^T \left(h\,\overline{Z}_1\right)\left(\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} x_e(s)\,ds\right)
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi (8.10), (8.11), (8.18) ve (8.19) ile

$$
\begin{aligned}
H(x_t,w,t) &\le 2\left[x_e^T(t)\overline{A}^{*T} + w^T(t)\overline{B}^T\right]\overline{P}\left[x_e(t)+\overline{A}_1 F\int_{t-h}^{t} x_e(s)ds - \overline{E}Fx(t-d)\right] \\
&+ x_e^T(t)\overline{Q}_1 x_e(t) + x_e^T(t)\overline{Q}_2 x_e(t) + h\,x_e^T(t)\,\overline{Z}_1 x_e(t) + d\,x_e^T(t)\,\overline{Z}_2 x_e(t) \\
&- x_e^T(t-h)\overline{Q}_1 x_e(t-h) - x_e^T(t-d)\overline{Q}_2 x_e(t-d) \\
&-\left(\frac{1}{d}\int_{t-d}^{t} x_e(s)ds\right)^T\left(d\,\overline{Z}_2\right)\left(\frac{1}{d}\int_{t-d}^{t} x_e(s)ds\right) \\
&-\left(\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} x_e(s)ds\right)^T\left(h\,\overline{Z}_1\right)\left(\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} x_e(s)ds\right) \\
&+ x_e^T(t)\overline{C}^T\overline{C}x_e(t) + 2x_e^T(t)\overline{C}^T\overline{D}w(t) - w^T(t)(\gamma^2 I - \overline{D}^T\overline{D})w(t) \\
&\equiv \xi^T(t)\,\Omega\,\xi(t)
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

eşitsizliği elde edilebilir. Burada

$$
\xi^T(t) = \left[\; x_e^T(t),\, x_e^T(t-h),\, x_e^T(t-d),\, \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} x_e^T(s)\,ds,\, \frac{1}{d}\int_{t-d}^{t} x_e^T(s)\,ds,\, w^T(t)\right] \tag{8.21}
$$

ve

$$
\Omega = \begin{bmatrix}
\Theta & 0 & -\overline{A}^{*T}\overline{P}\,\overline{E}F & h\overline{A}^{*T}\overline{P}\,\overline{A}_1 F & 0 & \overline{P}\,\overline{B} + \overline{C}^T\overline{D} \\
* & -\overline{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\overline{Q}_2 & 0 & 0 & -F^T\overline{E}^T\overline{P}\,\overline{B} \\
* & * & * & -h\overline{Z}_1 & 0 & hF^T\overline{A}_1^T\overline{P}\overline{B} \\
* & * & * & * & -d\overline{Z}_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\gamma^2 I + \overline{D}^T\overline{D}
\end{bmatrix}
$$

$$
\Theta = \overline{A}^{*T}\overline{P} + \overline{P}\,\overline{A}^{*} + \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + h\overline{Z}_1 + d\overline{Z}_2 + \overline{C}^T\overline{C} \tag{8.22}
$$

şeklindedir. Ω matrisinin içinde, $\overline{A}^{*T}, \overline{B}$ ve $\overline{C}$ 'ın içinde bulunan K_{12}, K_{21}, K_{22} düzenleyici matrislerinin $\overline{P} > 0$ matrisi ile çarpımları lineer olmayan bir durum yaratmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırıp düzenleyici matrisleri bir LME'nin çözümünden bulmak için $\overline{P} > 0$ matrisi

$$
\overline{P} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & U_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & M \\ M^T & U_2 \end{bmatrix} \tag{8.23}
$$

şeklinde parçalansın. Burada $S = S^T > 0, Y = Y^T > 0$ şeklinde, M ve N ise terslenebilir matrislerdir. $\overline{P}\,\overline{P}^{-1} = I$ olmasından

$$MN^T = I - YS \qquad \textbf{(8.24)}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi

$$F_1 = \begin{bmatrix} Y & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.25)}$$

matrisleri tanımlanırsa

$$F_1^T P F_1 = F_1^T F_2 = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \qquad \textbf{(8.26)}$$

elde edilir. Şimdi $\Omega < 0$ matris eşitsizliği soldan

$$T = diag\left\{ F_1^T, I, I, I, I, I \right\} \qquad \textbf{(8.27)}$$

matrisi ile sağdan da tranzpozu ile çarpılıp, $\beta_i > 0$ verilmiş sayılar ve $W_i = W_i^T > 0$ $(i = 1,2,3)$ şeklinde matrisler olmak üzere,

$$\overline{Q}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 I & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix}, \ \overline{Q}_2 = \begin{bmatrix} \beta_2 I & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}, \ \overline{Z}_1 = \begin{bmatrix} \beta_3 I & 0 \\ 0 & W_3 \end{bmatrix}, \ \overline{Z}_2 = \begin{bmatrix} \beta_4 I & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.28)}$$

şeklinde tanımlanarak, Schur Komplementi uygulanırsa

$$\begin{bmatrix}
\Omega_1 & \beta_T Y & \Omega_2 & 0 & 0 & \Omega_4 & 0 & \Omega_6 & 0 & 0 & 0 & B_1 & \Omega_{11} \\
* & -\beta_T I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \Omega_3 & 0 & 0 & \Omega_5 & 0 & \Omega_7 & 0 & 0 & 0 & \Omega_8 & C_1^T \\
* & * & * & -\beta_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\beta_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_9 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -h\beta_3 I & 0 & 0 & 0 & \Omega_{10} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -hW_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -d\beta_4 I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -dW_4 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(8.29)}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= A^*Y + YA^{*^T} + B_2 K_{12} M^T + (K_{12} M^T)^T B_2^T + M W_T M^T, \\
\Omega_2 &= A^* + (S A^*Y + S B_2 K_{12} M^T + N K_{21} C_2 Y + N K_{22} M^T)^T + \beta_T Y, \\
\Omega_3 &= S A^* + A^{*^T} S + N K_{21} C_2 + C_2^T (N K_{21})^T + \beta_T I, \\
\Omega_4 &= -(S A^*Y + S B_2 K_{12} M^T + N K_{21} C_2 Y + N K_{22} M^T)^T E, \\
\Omega_5 &= -(A^{*^T} S + C_2^T (N K_{21})^T) E, \\
\Omega_6 &= h(S A^*Y + S B_2 K_{12} M^T + N K_{21} C_2 Y + N K_{22} M^T)^T A_1, \\
\Omega_7 &= h(A^{*^T} S + C_2^T (N K_{21})^T) A_1, \\
\Omega_8 &= S B_1 + N K_{21} D_{21}, \\
\Omega_9 &= -E^T (S B_1 + N K_{21} D_{21}), \\
\Omega_{10} &= h A_1^T (S B_1 + N K_{21} D_{21}), \\
\Omega_{11} &= Y C_1^T + (K_{12} M^T)^T D_{12}^T, \\
W_T &= W_1 + W_2 + hW_3 + dW_4, \\
\beta_T &= \beta_1 + \beta_2 + h\beta_3 + d\beta_4 \\
A^* &= A + A_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
X &= M W_T M^T, \\
A_h &= S A^*Y + S B_2 C_h + B_h C_2 Y + N K_{22} M^T, \\
B_h &= N K_{21}, \\
C_h &= K_{12} M^T
\end{aligned} \qquad \textbf{(8.30)}$$

olarak tanımlanırsa (8.14) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

8.3 Algoritma ve Örnek

Bu bölümde (8.14) ve (8.15) eşitsizliklerinin çözümünden (8.3) formunda bir geri besleme kontrolü bulmak için algoritmik bir yöntem verilmiştir.

- (8.14) ve (8.15) eşitsizliklerini gerçekleştiren uygun bir

$$\{S,\ Y,\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4,\ X,\ A_h,\ B_h,\ C_h\}$$

  çözümü bul.

- Bulunan X ve $W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4$ çözümlerini kullanarak (8.30)'da tanımlanan

$$X = MW_T M^T, \quad W_T = W_1 + W_2 + hW_3 + dW_4$$

  ifadesinden M matrisini belirle.

- Bulunan Y, S ve M matrislerini kullanarak (8.24) eşitliği olan

$$MN^T = I - YS$$

  den N matrisini belirle.

- Bulunan M, N, S, Y, A_h, B_h ve C_h matrislerini kullanarak (8.30)'daki denklemleri K_{12}, K_{21} ve K_{22} düzenleyici matrisleri için çöz.

Şimdi (8.1) sistemi

$$E = \alpha * \begin{bmatrix} 0.36 & 0.25 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.31}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri ile ele alınsın. Burada $\alpha > 0$ şeklinde bir sayıdır. Bu örnekte amaç (8.31) sistemini kararlı hale getiren (8.3) formunda bir çıktı geri beslemeli H_∞ kontrolü bulmaktır. Lemma 8.2 ile, (8.11) ile verilen $D(x_{et})$ operatörünün kararlılığı $\alpha = 0.1$ için kontrol edilirse, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.25$ için,

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 11.99 & 0.19 \\ 0.19 & 11.67 \end{bmatrix} \tag{8.32}$$

uygun çözümü elde edilir ve operatörün kararlı olduğu gösterilir. Şimdi (8.31) sistemine Teorem 8.1 uygulanırsa, Çizelge 8.1'deki değerler elde edilir.

Çizelge 8.1: (8.31) sistemini α 'nın çeşitli değerleri için kararlı yapan $h>0, d>0$ ve $\gamma>0$ değerleri

α	β_1	β_2	β_3	β_4	h	d	γ
1	**30**	**30**	**30**	**30**	**0.7**	**0.7**	**12**
0.75	**30**	**30**	**30**	**30**	**0.8**	**0.8**	**0.55**
0.5	**30**	**30**	**30**	**30**	**1.7**	**1.7**	**0.55**
0.1	**30**	**30**	**30**	**30**	**2.5**	**2.5**	**0.55**

değerleri elde edilir. $\alpha=0.1$ değeri için (8.3) formunda kontrol kuralının düzenleyici matrisi

$$K=\begin{bmatrix} 0 & -9529.8 & 9416.2 \\ 0.5 & -579.2 & 569.9 \\ -0.5 & 577.5 & 571.1 \end{bmatrix} \tag{8.33}$$

şeklinde elde edilir. Burada $D(x_{et})$ operatörünün $\alpha=1, 0.75, 0.5$ değerleri içinde kararlılığının test edildiği not edilmelidir.

9. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DİNAMİK ÇIKTI GERİ BESLEMELİ H_∞ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 8. Bölümde ele alınan (8.1) sisteminin durum gecikmesi zaman değişkenli bir fonksiyon olarak ele alınarak, dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Kararlılık için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME'ler cinsinden elde edilmiştir. Bu bölümde kullanılan Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin yapısından dolayı, bu konuda yapılan çalışmalarda bulunan gecikmenin zamana göre türevinin birden küçük bir sayıya eşit olma şartı ortadan kaldırılmıştır. Ayrıca bir önceki bölümde $K_{11} = 0$ olma şartı ve [27]'deki sistem matrisleri üzerindeki şartlar kaldırılmıştır. Elde edilen matris eşitsizlikleri Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülerek, durum gecikmesinin üst sınırı için elde edilen sonuçların [22,27]'den daha iyi olduğu gözlenmiştir.

9.1 Problemin Sunuluşu

(8.1) ile verilen sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t-h(t)) + E\dot{x}(t-d) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\
x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-\tau,0], \quad (t_0,\phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}
\end{aligned} \tag{9.1}$$

şeklinde ele alınsın. $h(t)$ pozitif, zaman değişkenli, sınırlı ve $0 < h(t) \le \bar{h} < \infty$, $\dot{h}(t) \le \mu < \infty$ koşullarını sağlayan gecikme, $\tau = \max\{d, \bar{h}\}$, $\phi(\cdot)$ ise $[-\tau,0]$ aralığında sürekli olan verilmiş bir fonksiyondur. $D_{22} = 0$ alınmıştır ve D_{22}'nin bu seçiminin genelliği bozmayacağı not edilmelidir [57]. $\mu : C[-\tau,0] \to R^n$,

$\mu(x_t) = x(t) - Ex(t-d)$ şeklindeki operatör için aşağıdaki varsayım yazılmalıdır.

Varsayım 9.1 $\|\cdot\|$ herhangi bir matris normu göstermek üzere $\| E \| < 1$ olmalıdır. Bu $\mu(x_t)$'nin asimptotik kararlılığı için yeterli koşuldur [1]. Gecikmeye bağımlı durum

$$x(t-h(t)) = x(t) - \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}(s)ds \tag{9.2}$$

şeklinde verilen bir model dönüşümü ile incelenmiştir [2]. Şimdi (9.1) sistemini kararlı hale getirmek için

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= K_{21}y(t) + K_{22}x_c(t) \\ u(t) &= K_{11}y(t) + K_{12}x_c(t) \end{aligned} \tag{9.3}$$

şeklinde bir dinamik çıktı geri besleme kontrol kuralı tanımlansın. Burada $x_c \in R^{n_c}$ kontrol durumu, $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$'ler ise uygun boyutlu düzenleyici matrislerdir. Bu kontrol kuralı ve (9.2) model dönüşümü (9.1) sistemine uygulanırsa kapalı çevrim sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \widetilde{A}x_e(t) - \overline{A}_1 F \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}_e(s)ds + \overline{E}F\dot{x}_e(t-d) + \overline{B}w(t) \\ z(t) &= \overline{C}x_e(t) + \overline{D}w(t) \end{aligned} \tag{9.4}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$x_e(t) = [x^T(t) \quad x_c^T(t)]^T \tag{9.5}$$

ve kapalı çevrim sistem matrisleri

$$\overline{A} = \hat{A} + \hat{B}_2 K\hat{C}_2, \; \overline{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 K\hat{D}_{21}, \; \overline{C} = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12}K\hat{C}_2, \; \overline{D} = D_{11} + \hat{D}_{12}K\hat{D}_{21}, \; \widetilde{A} = \overline{A} + \overline{A}_1 F$$

$$\overline{E} = [E \;\; 0]^T, \quad \overline{A}_1 = [A_1 \;\; 0]^T, \quad F = [I \;\; 0]$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_1 = [C_1 \quad 0], \quad \hat{D}_{12} = [D_{12} \quad 0] \tag{9.6}$$

şeklindedir.

Verilen bir $\gamma > 0$ sayısı için performans indeksi

$$J(w) = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t))\,dt \qquad \textbf{(9.7)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (9.1) sistemi için (9.3) kontrol kuralı aşağıdaki kurallar dahilinde çıktı geri beslemeli H_∞ kontrolü olarak adlandırılır:

i. (9.4) kapalı çevrim sistemi asimptotik kararlıdır,

ii. Sıfırdan farklı her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w) < 0$ dır.

Lemma 9.1 Verilen uygun boyutlu simetrik Ω matrisi ve herhangi Γ ve $\sum$ matrisleri için

$$\Omega + \sum^T K\,\Gamma + \Gamma^T K^T \sum < 0 \qquad \textbf{(9.8)}$$

eşitsizliğinin *K* için çözülebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$N_\Gamma^T\,\Omega\,N_\Gamma < 0, \qquad N_\Sigma^T\,\Omega\,N_\Sigma < 0 \qquad \textbf{(9.9)}$$

olmasıdır. Burada N_Γ ve N_Σ matrisleri, kolonları Γ ve Σ matrislerinin sıfır uzayının tabanı olan matrislerdir. İspat için [49,58]'e bakılabilir.

9.2 Sınırlı Gerçel Lemma

$\gamma > 0,\ \bar{h} > 0$ ve μ sayıları verilsin. Aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan

$$\begin{aligned}&\bar{P}^T = \bar{P} > 0, \quad S^T = S > 0, \quad R^T = R > 0, \quad W^T = W > 0,\\ &Z^T = Z > 0, \quad Q^T = Q > 0, \ N\end{aligned}$$

matrisleri varsa (9.4) kapalı çevrim sistemi asimptotik karalıdır ve (9.7) ile verilen performans indeksi sıfır olmayan her $w \in L_2^q\left[0,\infty\right)$ için *J*(*w*)<0 olur.

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} \overline{\Theta} & -\bar{h}\overline{P}\overline{A}_1 & \overline{P}\overline{E} & -F^T N & -\bar{h}F^T N & \overline{P}\overline{B} & \overline{C}^T & \widetilde{A}^T F^T R_h \\ * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}\overline{A}_1^T F^T R_h \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{E}^T F^T R_h \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}(Z-\mu S) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & \overline{D}^T & \overline{B}^T F^T R_h \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_h \end{bmatrix} < 0$$

(9.10)

$$\overline{\Theta} = \overline{P}\,\overline{A} + \overline{A}^T\,\overline{P} + \overline{P}\,\overline{A}_1\,F + F^T\overline{A}_1^T\overline{P} + \overline{Q} + \overline{N} + \overline{N}^T,$$
$$\overline{Q} = F^T QF,$$
$$\overline{N} = F^T NF,$$
$$R_h = \bar{h}\,\left(\,S + Z + W\,\right) + R.$$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t) + V_5(x_t) \qquad \textbf{(9.11)}$$

şeklinde verilsin. Burada

$$\begin{aligned} & V_1(x_t) = x_e^T(t)\,\overline{P}\,x_e(t), \quad V_2(x_t) = \int_{t-\bar{h}}^{t} x_e^T(s)\,\overline{Q}x_e(s)\,ds, \\ & V_3(x_t) = \int_{t-\bar{h}}^{t} h(t)\,\dot{x}_e^T(s)\,\overline{S}\,\dot{x}_e(s)\,ds, \quad V_4(x_t) = \int_{-\bar{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}_e^T(s)\,(\overline{Z}+\overline{W})\,\dot{x}_e(s)\,ds\,d\theta, \\ & V_5(x_t) = \int_{t-d}^{t} \dot{x}_e^T\overline{R}\dot{x}_e(s)ds \\ & \overline{Q} = F^T QF,\ \overline{S} = F^T SF,\ \overline{Z} = F^T ZF,\ \overline{W} = F^T WF,\ \overline{R} = F^T RF, \\ & 0 < \overline{P}^T = \overline{P},\quad 0 < Z^T = Z,\quad 0 < S^T = S,\quad 0 < R^T = R,\quad 0 < Q^T = Q,\quad 0 < W^T = W \end{aligned} \qquad \textbf{(9.12)}$$

şeklindedir. $H(x_t, w, t)$ ile Hamiltoniyen gösterilmek üzere

$$H(x_t, w, t) = \dot{V}(x_t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \qquad \textbf{(9.13)}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir. (9.11) ile verilen fonksiyonelin zamana göre türevi

$$\dot{V}(x_t) = 2x_e^T(t)\overline{P}\dot{x}_e(t) + x_e^T(t)\overline{Q}x_e(t) - x_e^T(t-\overline{h})\overline{Q}x_e(t-\overline{h}) + \int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{h}(t)\dot{x}_e^T(s)\overline{S}\dot{x}_e(s)ds$$
$$+ h(t)\dot{x}_e^T(t)\overline{S}\dot{x}_e(t) - h(t)\dot{x}_e^T(t-\overline{h})\overline{S}\dot{x}_e(t-\overline{h}) + \overline{h}\dot{x}_e^T(t)(\overline{Z}+\overline{W})\dot{x}_e(t)$$
$$- \int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)(\overline{Z}+\overline{W})\dot{x}_e(s)ds + \dot{x}_e^T(t)\overline{R}\dot{x}_e(t) - \dot{x}_e^T(t-d)\overline{R}\dot{x}_e(t-d)$$

(9.14)

şeklindedir. $0 < h(t) \le \overline{h}$ olduğu için

$$-\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds < -\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds \qquad \textbf{(9.15)}$$

olduğu açıktır. (9.15) eşitsizliği, $0 < h(t) \le \overline{h}$, $\dot{h}(t) < \mu$ ve $h(t)\dot{x}_e^T(t-\overline{h})\overline{S}\dot{x}_e(t-\overline{h}) > 0$ olduğundan yararlanılarak

$$\dot{V}(x_t) \le 2x_e^T(t)\overline{P}\dot{x}_e(t) + x_e^T(t)\overline{Q}x_e(t) - x_e^T(t-\overline{h})\overline{Q}x_e(t-\overline{h})$$
$$- \int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)(\overline{Z}-\mu\overline{S})\dot{x}_e(s)ds + \dot{x}_e^T(t)(\overline{R}+\overline{h}(\overline{S}+\overline{Z}+\overline{W}))\dot{x}_e(t) \qquad \textbf{(9.16)}$$
$$- \int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds - \dot{x}_e^T(t-d)\overline{R}\dot{x}_e(t-d)$$

eşitsizliği yazılabilir. 2. Bölümde verilen Lemma 2.1 ile (9.16) eşitsizliğinin sağ tarafındaki

$$-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds \ \text{ ve } -\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)(\overline{Z}-\mu\overline{S})\dot{x}_e(s)ds$$

terimleri için

$$-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds \le -\left(\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e(s)ds\right)^T h(t)\overline{W}\left(\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e(s)ds\right),$$
$$-\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)(\overline{Z}-\mu\overline{S})\dot{x}_e(s)ds \le -\left(\frac{1}{\overline{h}}\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e(s)ds\right)^T \overline{h}(\overline{Z}-\mu\overline{S})\left(\frac{1}{\overline{h}}\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e(s)ds\right) \qquad \textbf{(9.17)}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (9.4), (9.16), (9.17),

$$2\,x_e^T(t)F^T N\left(x(t)-x(t-\bar{h})-\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}(s)\,ds\right)=0 \tag{9.18}$$

eşitliği ve $F\,x_e(t)=x(t)$ kullanılarak

$$H(x_t,w,t)=\dot{V}(x_t)+z^T(t)z(t)-\gamma^2 w^T(t)w(t)$$

için

$$\begin{aligned}
H \le\; & x_e^T(t)(\overline{\Theta}+\overline{C}^T\overline{C}+\widetilde{A}^T\overline{R}_h\widetilde{A})x_e(t)-2x_e^T(t)\bar{h}(\overline{P}\overline{A}_1-\widetilde{A}^T\overline{R}_h\overline{A}_1)\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right)\\
& -\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right)^T(\bar{h}W-\bar{h}^2\overline{A}_1^T\overline{R}_h\overline{A}_1)\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right)+2x_e^T(t)(\overline{P}\overline{E}+\widetilde{A}^T\overline{R}_h\overline{E})\dot{x}(t-d)\\
& -\dot{x}(t-d)^T(R+\overline{E}^T\overline{R}_h\overline{E})\dot{x}(t-d)-2x_e^T(t)F^T Nx(t-\bar{h})-x^T(t-\bar{h})Qx(t-\bar{h})\\
& -2x_e^T(t)\bar{h}F^T N\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}(s)ds\right)-\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}(s)ds\right)^T\bar{h}(Z-\mu S)\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}(s)ds\right)\\
& +2x_e^T(t)(\overline{P}\overline{B}+\overline{C}^T\overline{D}-\widetilde{A}^T\overline{R}_h\overline{B})w(t)-w^T(t)(\gamma^2 I-\overline{D}^T\overline{D}+\overline{B}^T\overline{R}_h\overline{B})w(t)\\
& -2\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right)^T\bar{h}\overline{A}_1^T\overline{R}_h\left(\overline{B}w(t)+\overline{E}\dot{x}_e(t-d)\right)+2\dot{x}(t-d)^T\,\overline{E}^T\overline{R}_h\overline{B}w(t)
\end{aligned} \tag{9.19}$$

elde edilir, burada $\overline{\Theta}$ (9.10)'da verildiği gibidir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı

$$\xi(s,t)=\left[x_e^T(t),\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right)^T,\ \dot{x}^T(t-d),\ x^T(t-\bar{h}),\left(\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-\bar{h}}^{t}\dot{x}(s)ds\right)^T,\ w^T(t)\right]^T \tag{9.20}$$

vektörü cinsinden matris biçiminde yazılabilir ve Schur Komplementi ile (9.10) eşitsizliği elde edilir.

9.3 H_∞ Kontrol Kuralı Tasarımı

Bu bölümde, (9.3) formunda çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralını elde etmek için algoritmik bir yöntem verilmiştir.

Teorem 9.1 $\gamma > 0,\ \bar{h} > 0,\ \mu$ sayıları ve simetrik $N^T = N > 0$ matrisi verilsin. Aşağıdaki simetrik LME'leri sağlayan

$$X^T = X > 0,\quad Y^T = Y > 0,\quad S^T = S > 0,\quad Z^T = Z > 0,\quad W^T = W > 0,$$
$$Q^T = Q > 0,\quad \widetilde{Q}^T = \widetilde{Q} > 0,\quad R_h^T = R_h > 0,\ \widetilde{R}_h^T = \widetilde{R}_h > 0$$

matrisleri varsa (9.1) sistemini gecikmeye bağımlı olarak asimptotik karalı hale getiren (9.3) formunda bir çıktı geri beslemeli H_∞ kontrolü vardır ve (9.7) ile verilen performans indeksi sıfır olmayan her $w \in L_2^q\left[0,\infty\right)$ için $J(w)$<0 olur

$$N_\Gamma^T \widetilde{\Omega} N_\Gamma < 0,\quad N_\Sigma^T \hat{\Omega} N_\Sigma < 0, \tag{9.21}$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0. \tag{9.22}$$

Burada

$$\widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Theta} & -\bar{h}XA_1 & XE & -N & -\bar{h}N & XB_1 & C_1^T & (A+A_1)^T R_h \\ * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}A_1^T R_h \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & E^T R_h \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}(Z-\mu S) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T R_h \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_h \end{bmatrix} < 0 \tag{9.23}$$

$\widetilde{\Theta} = X(A + A_1) + (A + A_1)^T X + Q + 2N,$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta} & -\bar{h}A_1 & E & -YN & -\bar{h}YN & B_1 & YC_1^T & Y(A+A_1)^T & Y & Y \\ * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}A_1^T & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & E^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}(Z-\mu S) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{R}_h & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{Q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}N^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Theta} = (A+A_1)Y + Y(A+A_1)^T, \qquad \textbf{(9.24)}$$

$$XY = I, \quad R_h\tilde{R}_h = I, \quad Q\tilde{Q} = I, \qquad \textbf{(9.25)}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(9.26)}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.27)}$$

şeklindedir. N_Γ ve N_Σ matrisleri ise, kolonları Γ ve Σ matrislerinin sıfır uzayının tabanı olan matrislerdir. Bu durumda (9.21) ve (9.22)'nin uygun bir

$$\left(X, Y, W, R_h, Q, Z, S, \tilde{R}_h, \tilde{Q} \right)$$

çözümüne karşı gelen K çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralının ifadesi

$$K = -\rho\hat{\Sigma}V\hat{\Gamma}^T(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-1} + D^{\frac{1}{2}}L(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(9.28)}$$

şeklindedir [49, 58]. Burada

$$\begin{aligned} V &= (\hat{\Sigma}^T\hat{\Sigma} - \frac{1}{\rho}\Omega)^{-1} > 0, \\ D &= I - \hat{\Sigma}(V - V\hat{\Gamma}^T(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-1}\hat{\Gamma}V)\hat{\Sigma}^T, \\ \hat{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_2^T\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{12}^T & \hat{B}_2^T F^T R_h \end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad \textbf{(9.29)}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Theta & -\bar{h}\bar{P}\bar{A}_1 & \bar{P}\bar{E} & -F^T N & -\bar{h}F^T N & \bar{P}\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T & (\hat{A}+\bar{A}_1 F)^T F^T R_h \\ * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}\bar{A}_1^T F^T R_h \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{E}^T F^T R_h \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}(Z-\mu S) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & \hat{B}_1^T F^T R_h \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_h \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \bar{P}(\hat{A}+\bar{A}_1 F) + (\hat{A}+\bar{A}_1 F)^T \bar{P} + \bar{Q} + 2\bar{N} \qquad \textbf{(9.30)}$$

şeklindedir. ρ ve L ise $\|L\| < \rho$ koşulunu sağlayan serbest sayı ve matristir.

İspat. Sınırlı Gerçel Lemma ile, $\bar{\Omega} < 0$ olduğu takdirde, (9.3) sistemi H_∞ kontrolü tanımlar. (9.6)'daki matrisler kullanılarak $\bar{\Omega} < 0$'ın

$$\Omega + \hat{\Sigma}^T K \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}^T K^T \hat{\Sigma} < 0 \qquad \textbf{(9.31)}$$

eşitsizliğine denk olduğu gösterilebilir. Burada Ω, $\hat{\Gamma}$ ve $\hat{\Sigma}$, (9.29) ve (9.30)'da verilen matrislerdir. Lemma 9.1 ile de (9.31) eşitsizliğinin

$$N_{\hat{\Gamma}}^T \Omega N_{\hat{\Gamma}} < 0, \qquad N_{\hat{\Sigma}}^T \Omega N_{\hat{\Sigma}} < 0 \qquad \textbf{(9.32)}$$

eşitsizliklerine denk olduğu gösterilebilir. Burada $N_{\hat{\Gamma}}$ ve $N_{\hat{\Sigma}}$, $\hat{\Gamma}$ ve $\hat{\Sigma}$ nın ortogonal tümleyenleridir. $\hat{\Gamma}$ matrisi

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.33)}$$

şeklinde olduğu için, $N_{\hat{\Gamma}}^T \Omega N_{\hat{\Gamma}} < 0$ eşitsizliği

$$N_\Gamma^T \tilde{\Omega} N_\Gamma < 0 \qquad \textbf{(9.34)}$$

formunda yazılabilir, burada $\tilde{\Omega}$ ve Γ matrisleri, (9.23) ve (9.26)' da verilmiştir. Şimdi

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{12}^T & \hat{B}_2^T F^T \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.35)}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} \overline{P} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & R_h \end{bmatrix} \tag{9.36}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\hat{\Sigma} = \Sigma_1 G, \;\; N_{\hat{\Sigma}} = G^{-1} N_{\Sigma_1}, \;\; \Omega = G \Omega_1 G$$

elde edilir ve $N_{\hat{\Sigma}}^T \, \Omega \, N_{\hat{\Sigma}} = N_{\Sigma_1}^T \, \Omega_1 \, N_{\Sigma_1}$ şeklinde olur. Σ_1 matrisi

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.37}$$

şeklinde olduğu için, $N_{\Sigma_1}^T \, \Omega_1 \, N_{\Sigma_1} < 0$ eşitsizliği

$$N_{\Sigma_2}^T \, \Omega_2 \, N_{\Sigma_2} < 0 \tag{9.38}$$

eşitsizliğine denktir. Burada

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T \end{bmatrix}, \tag{9.39}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} X & T_1 \\ T_1^T & V_1 \end{bmatrix}, \;\; \overline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & T_2 \\ T_2^T & V_2 \end{bmatrix} \tag{9.40}$$

ve

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \Theta' & -\overline{h}A_1 & E & -YN & -\overline{h}YN & B_1 & YC_1^T & Y(A+A_1)^T \\ * & -\overline{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{h}A_1^T \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & E^T \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\overline{h}(Z-\mu S) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_h^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Theta' = (A + A_1)Y + Y(A + A_1)^T + Y(Q + N + N^T)Y \tag{9.41}$$

şeklindedir. (9.40)'ta X ve Y pozitif belirli simetrik matrisler, T_1 ve T_2 ise terslenebilir matrislerdir. (9.41)'in içinde YN ve $Y(Q+N+N^T)Y$ terimleri lineer olmayan bir durum yaratmaktadırlar. (9.38)'e denk bir LME elde etmek için N matrisi önceden verilmiş pozitif belirli ve simetrik bir matris olmalıdır. Bu takdirde (9.24), Ω_2 matrisine Schur Komplementi uygulanarak elde edilir ve

$$N_\Sigma^T \hat{\Omega} N_\Sigma < 0 \quad \textbf{(9.42)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\overline{P}\,\overline{P}^{-1} = I$ olması $T_2 T_1^T = I - YX$ olduğunu gösterir ve (9.22) eşitsizliği elde edilir. Lemma 9.1'e göre (9.31)'i sağlayan K matrisi vardır ve bulunması [49,58]'de verilmiştir.

9.4 Algoritma ve Örnekler

(9.21) ve (9.22) eşitsizlikleri (9.25)'teki ters kısıtlar yüzünden konveks değillerdir. Bu yüzden [59]'da verilmiş olan Lineerleştirme Algoritması (CCL) kullanılmıştır.

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Q & I \\ I & \widetilde{Q} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R_h & I \\ I & \widetilde{R}_h \end{bmatrix} \geq 0 \quad \textbf{(9.43)}$$

Şeklinde eşitsizlikler ele alınsın ve

$$\left\{ X\,Y + Q\widetilde{Q} + R_h \widetilde{R}_h \right\} \quad \textbf{(9.44)}$$

matrisinin asal köşegeninin toplamının (iz) (9.21) ve (9.43)'ün çözümüne uygun olarak minimize edilmesi problemi göz önüne alınsın. Bu problemin çözümü 3n'e eşitse yani

$$iz\ \left\{ X\,Y + Q\widetilde{Q} + R_h \widetilde{R}_h \right\} = 3n \quad \textbf{(9.45)}$$

ise

$$XY = I, \quad R_h \widetilde{R}_h = I, \quad Q\widetilde{Q} = I \quad \textbf{(9.46)}$$

şeklinde olur. Bu problemin çözümü için aşağıdaki algoritma verilmiştir.

Algoritma.

- (9.21) ve (9.43) eşitsizliklerine uygun bir

$$\left\{X_0,\, Y_0,\, Q_0,\, \widetilde{Q}_0,\, R_{h0},\, \widetilde{R}_{h0},\; S_0,\, Z_0,\, W_0\right\}$$

çözümü bul ve $k=0$ olarak ata.

- Aşağıdaki problemi

$$minimize\ iz\ \left\{ X_k Y + Y_k X + Q_k \widetilde{Q} + \widetilde{Q}_k Q + R_{hk}\widetilde{R}_h + \widetilde{R}_{hk} R_h \right\}$$

(9.21) ve (9.43)'ün uygun çözümü olan

$$\left\{X,\, Y,\, Q,\, \widetilde{Q},\, R_h,\, \widetilde{R}_h,\; S,\, Z,\, W\right\}$$

için çöz.

- Durma kriteri sağlanırsa dur, aksi takdirde

$$k=k+1,\quad X_k = X,\quad Y_k = Y,\quad Q_k = Q,\quad \widetilde{Q}_k = \widetilde{Q},\quad R_{hk} = R_h,\quad \widetilde{R}_{hk} = \widetilde{R}_h$$

olarak ata ve 2. adıma dön.

Örnek 9.1 (9.1) sistemi için

$$E=\begin{bmatrix} 0.36 & 0.25 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.47}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri ele alınsın. $\overline{h}=3.7$, $\gamma=0.54$ ve $N=1.5*I$ alınırsa çıktı geri beslemesinin düzenleyici matrisi

$$K = \begin{bmatrix} -7.99 & -0.007 & 0.033 \\ -0.05 & -92.69 & -1.49 \\ 0.47 & -1.71 & -70.87 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.48)}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0, \quad D_{12} = 0.25$$

alınırsa [27]'de verilen $D_{12}^T D_{12}$ 'nin singüler olmaması ve $B_1 D_{21}^T = 0$ olma koşulları sağlanır ve [27]' de verilen yöntem ile $\gamma = 6$ ve $\overline{h} = 1$, Teorem 9.1 ile $\gamma = 4$ ve $\overline{h} = 1$ elde edilir.

Örnek 9.2 [22]'deki

$$E = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(9.49)}$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij} = 0, \quad i, j = 1,2.$$

örneği ele alınsın. [22]'deki yöntem ile $\overline{h} = 0.8$, Teorem 9.1 ile $\overline{h} = 1.5$ elde edilir.

10. LİNEER NEUTRAL SİSTEMLER İÇİN DİNAMİK ÇIKTI GERİ BESLEMELİ DAYANIKLI H_∞ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, 9. bölümde verilmiş olan (9.1) sistemi belirsiz parametreler içerdiği durumda, dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi incelenmiştir. Kararlılık için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile sistemin durum gecikmesine bağımlı ve durumunun zamana göre birinci türevindeki gecikmeden bağımsız olarak LME'ler cinsinden elde edilmiştir. Bu bölümde, 9. Bölümde (9.11) ile verilen Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli üzerinde uygun değişiklikler yapılarak, (9.2) ile verilen model dönüşümü ortadan kaldırılmıştır. Bölüm sonunda verilen örnekte sonuçların [48]'den daha iyi olduğu gözlenmiştir.

10.1 Problemin Sunuluşu

(9.1) ile verilen sistem belirsiz parametreler ile

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_\Delta\, x(t) + A_{1\Delta}\, x(t-h(t)) + E_\Delta \dot{x}(t-d) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\
x(t_0+\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_{\tau,n}
\end{aligned} \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$A_\Delta = A + \Delta A(t), \quad A_{1\Delta} = A_1 + \Delta A_1(t), \quad E_\Delta = E + \Delta E(t) \qquad \textbf{(10.2)}$$

şeklinde ele alınsın. Burada $\Delta A(t), \Delta E(t)$ ve $\Delta A_1(t)$ matrisleri

$$\left[\Delta A(t)\ \Delta A_1(t)\ \Delta E(t)\right] = MF(t)\left[N_A\ N_h\ N_E\right] \qquad \textbf{(10.3)}$$

şeklinde zaman değişkenli belirsiz parametrelerdir. M, N_A, N_h ve N_E uygun boyutlu sabit matrisler, $F(t)$ ise gerçel değerli, bilinmeyen, zaman değişkenli ve

$$F(t)^T F(t) \leq I \qquad \textbf{(10.4)}$$

koşulunu sağlayan bir matristir.

Şimdi (10.1) sistemini kararlı hale getirmek için (9.3) şeklinde bir dinamik çıktı geri besleme kontrol kuralı tanımlansın. Bu durumda kapalı çevrim sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \overline{A}_\Delta x_e(t) + \overline{A}_{1\Delta} F x_e(t-h(t)) + \overline{E}_\Delta F \dot{x}_e(t-d) + \overline{B} w(t) \\ z(t) &= \overline{C} x_e(t) + \overline{D} w(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(10.5)}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$x_e(t) = [x^T(t) \quad x_c^T(t)]^T,$$

$$\begin{aligned} &\overline{A}_\Delta = \hat{A} + \hat{M}F(t)\hat{N}_A + \hat{B}_2 K \hat{C}_2, \quad \overline{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 K \hat{D}_{21}, \\ &\overline{C} = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} K \hat{C}_2, \quad \overline{D} = D_{11} + \hat{D}_{12} K \hat{D}_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{E}_\Delta = \overline{E} + \hat{M}F(t)N_E, \quad \overline{A}_{1\Delta} = \overline{A}_1 + \hat{M}F(t)N_h, \quad \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \end{bmatrix}^T, \\ &\overline{E} = \begin{bmatrix} E^T & 0 \end{bmatrix}^T, \quad F = [I \ \ 0], \end{aligned}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix},$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M^T & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \hat{N}_A = \begin{bmatrix} N_A & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = [C_1 \quad 0], \quad \hat{D}_{12} = [D_{12} \quad 0] \qquad \textbf{(10.6)}$$

şeklindedir. Verilen bir $\gamma > 0$ sayısı için performans indeksi (9.7) deki gibi tanımlansın. Bu durumda (10.1) sistemi için (9.3) kontrol kuralı aşağıdaki kurallar dahilinde çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrolü olarak adlandırılır:

i. (10.5) kapalı çevrim sistemi asimptotik kararlıdır,

ii. Sıfırdan farklı her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w) < 0$ dır.

10.2 Sınırlı Gerçel Lemma

$\gamma > 0,\ \overline{h} > 0$ ve μ sayıları verilsin. Aşağıdaki simetrik LME'yi sağlayan

$$\overline{P}^T = \overline{P} > 0, W^T = W > 0, R^T = R > 0, Q^T = Q > 0, \ N_1^T = N_1 > 0 \ \text{ve} \ N_2^T = N_2 > 0$$

matrisleri varsa (10.5) kapalı çevrim sistemi asimptotik karalıdır ve (9.7) ile verilen performans indeksi sıfır olmayan her $w \in L_2^q\left[0,\infty\right)$ için $J(w)<0$ olur.

$$\overline{\Omega}_{\Delta}=\begin{bmatrix}\overline{\Theta} & \overline{P}\,\overline{A}_{1\Delta}-F^TN_1+F^TN_2^T & \overline{P}\,\overline{E}_{\Delta} & -\overline{h}F^TN_1 & \overline{P}\,\overline{B} & \overline{C}^T & \overline{A}_{\Delta}^TF^T\varphi \\ * & -(1-\mu)Q-N_2-N_2^T & 0 & -\overline{h}N_2 & 0 & 0 & \overline{A}_{1\Delta}^TF^T\varphi \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & \overline{E}_{\Delta}^TF^T\varphi \\ * & * & * & -\overline{h}W & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \overline{D}^T & \overline{B}^TF^T\varphi \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varphi\end{bmatrix}<0$$

(10.7)

$\overline{\Theta}=\overline{P}\,\overline{A}_{\Delta}+\overline{A}_{\Delta}^T\,\overline{P}+\overline{Q}+\overline{N}_1+\overline{N}_1^T,$

$\varphi=R+\overline{h}W,$

$\overline{\varphi}=F^T\varphi F,$

$\overline{N}_1=F^TN_1F.$

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(x_t)=x_e^T(t)\overline{P}x_e(t)+\int_{t-h(t)}^{t}x_e^T(s)\overline{Q}\,x_e(s)ds+\int_{-\overline{h}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}_e^T(s)\,\overline{W}\,\dot{x}_e(s)dsd\theta+\int_{t-d}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{R}\,\dot{x}_e(s)ds$$
$$\overline{Q}=F^TQF,\ \overline{W}=F^TWF,\ \overline{R}=F^TRF,$$
$$0<\overline{P}^T=\overline{P},\quad 0<R^T=R,\quad 0<Q^T=Q,\quad 0<W^T=W$$

(10.8)

şeklinde verilsin. $H(x_t,w,t)$ ile Hamiltoniyen gösterilmek üzere

$$H(x_t,w,t)=\dot{V}(x_t)+z^T(t)z(t)-\gamma^2w^T(t)w(t)<0 \qquad \textbf{(10.9)}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir. (10.8) ile verilen fonksiyonelin zamana göre türevi

$$\dot{V}(x_t)=2x_e^T(t)\overline{P}\dot{x}_e(t)+x_e^T(t)\overline{Q}x_e(t)-(1-\dot{h}(t))x_e^T(t-h(t))\overline{Q}x_e(t-h(t))+\dot{x}_e^T(t)\overline{R}\dot{x}_e(t)$$
$$-\dot{x}_e^T(t-d)\overline{R}\dot{x}_e(t-d)+\overline{h}\dot{x}_e^T(t)\overline{W}\dot{x}_e(t)-\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\dot{x}_e(s)ds \qquad \textbf{(10.10)}$$

şeklindedir. $0<h(t)\leq\overline{h}$ olduğu için

$$-\int_{t-\overline{h}}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\,\dot{x}_e(s)ds<-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}_e^T(s)\overline{W}\,\dot{x}_e(s)ds \qquad \textbf{(10.11)}$$

olduğu açıktır. (10.11) eşitsizliği, $0 < h(t) \le \bar{h}$, $\dot{h}(t) < \mu$, Lemma 2.1 ve (10.5) sistemi ile

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \le\ & 2x_e^T(t)\bar{P}(\bar{A}_\Delta x_e(t) + \bar{A}_{1\Delta} F x_e(t-h(t)) + \bar{E}_\Delta F \dot{x}_e(t-d) + \bar{B}w(t)) + x_e^T(t)\bar{Q}x_e(t) \\
& -(1-\mu)x_e^T(t-h(t))\bar{Q}x_e(t-h(t)) - \dot{x}_e^T(t-d)\bar{R}\dot{x}_e(t-d) \\
& -\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}_e^T(s)ds(\bar{h}\bar{W})\frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}_e(s)ds \\
& +(\bar{A}_\Delta x_e(t) + \bar{A}_{1\Delta} F x_e(t-h(t)) + \bar{E}_\Delta F \dot{x}_e(t-d) + \bar{B}w(t))^T(\bar{h}\bar{W} + \bar{R}) \\
& \times(\bar{A}_\Delta x_e(t) + \bar{A}_{1\Delta} F x_e(t-h(t)) + \bar{E}_\Delta F \dot{x}_e(t-d) + \bar{B}w(t))
\end{aligned} \tag{10.12}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına

$$2(x_e^T(t)F^T N_1 + x^T(t-h(t))N_2)(x(t) - x(t-h(t)) - \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}(s)ds) = 0 \tag{10.13}$$

eşitliği eklenerek ve $Fx_e(t) = x(t)$ olduğu göz önüne alınarak (10.9) eşitsizliği

$$\eta^T(t) = \left[\; x_e^T(t),\, x^T(t-h(t)), \dot{x}^T(t-d), \frac{1}{\bar{h}}\int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}^T(s)ds,\, w^T(t) \; \right] \tag{10.14}$$

vektörü cinsinden matris biçiminde yazılabilir ve Schur Komplementi ile (10.7) eşitsizliği elde edilir.

10.3 H$_\infty$ Kontrol Kuralı Tasarımı

Bu bölümde, (9.3) formunda çıktı geri beslemeli H$_\infty$ kontrol kuralını elde etmek için algoritmik bir yöntem verilmiştir.

Teorem 10.1 $\gamma > 0, \bar{h} > 0, \mu, \varepsilon > 0$ sayıları ve $N_1^T = N_1 > 0,\ N_2^T = N_2 > 0$ matrisleri verilsin. Aşağıdaki simetrik LME'leri sağlayan

$$X^T = X > 0, Y^T = Y > 0, W^T = W > 0, \varphi^T = \varphi > 0, \tilde{\varphi}^T = \tilde{\varphi} > 0, Q^T = Q > 0, \tilde{Q}^T = \tilde{Q} > 0$$

matrisleri varsa (10.1) sistemini gecikmeye bağımlı olarak asimptotik karalı hale getiren (9.3) formunda bir çıktı geri beslemeli H$_\infty$ kontrolü vardır ve (9.7) ile verilen performans indeksi sıfır olmayan her $w \in L_2^q[0,\infty)$ için $J(w)$<0 olur

$$N_\Gamma^T \widetilde{\Omega}_\Delta N_\Gamma < 0, \quad N_\Sigma^T \hat{\Omega}_\Delta N_\Sigma < 0, \tag{10.15}$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0. \tag{10.16}$$

Burada

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10.17}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10.18}$$

$$\widetilde{\Omega}_\Delta = \begin{bmatrix} \widetilde{\Theta}_1 & \widetilde{\Theta}_2 & XE & -\bar{h}N_1 & XB_1 & C_1^T & A^T\varphi & \varepsilon N_A^T & XM \\ * & \widetilde{\Theta}_3 & 0 & -\bar{h}N_2 & 0 & 0 & A_1^T\varphi & \varepsilon N_h^T & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & E^T\varphi & \varepsilon N_E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T\varphi & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varphi & 0 & \varphi M \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix}, \tag{10.19}$$

$\widetilde{\Theta}_1 = XA + A^T X + Q + N_1 + N_1^T$,
$\widetilde{\Theta}_2 = XA_1 - N_1 + N_2^T$,
$\widetilde{\Theta}_3 = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T$,

$$\hat{\Omega}_\Delta = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_1 & \hat{\Theta}_2 & E & -\bar{h}YN_1 & B_1 & YC_1^T & YA^T & \varepsilon YN_A^T & M & Y & Y \\ * & \hat{\Theta}_3 & 0 & -\bar{h}N_2 & 0 & 0 & A_1^T & \varepsilon N_h^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & E^T & \varepsilon N_E^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\widetilde{\varphi} & 0 & M & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\widetilde{Q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}N_1^{-1} \end{bmatrix}$$

(10.20)

$$\hat{\Theta}_1 = AY + YA^T,$$
$$\hat{\Theta}_2 = A_1 - YN_1 + YN_2^T,$$
$$\hat{\Theta}_3 = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T,$$

$$XY = I, \quad \varphi\tilde{\varphi} = I, \quad Q\tilde{Q} = I \tag{10.21}$$

şeklinde, N_Γ ve N_Σ matrisleri ise, kolonları Γ ve Σ matrislerinin sıfır uzayının tabanı olan matrislerdir. Bu durumda (10.15) ve (10.16)'nin uygun bir

$$X^T = X > 0, Y^T = Y > 0, W^T = W > 0, \varphi^T = \varphi > 0, \tilde{\varphi}^T = \tilde{\varphi} > 0, Q^T = Q > 0, \tilde{Q}^T = \tilde{Q} > 0$$

çözümüne karşı gelen K çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralının ifadesi

$$K = -\rho\hat{\Sigma}V\hat{\Gamma}^T(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-1} + S^{\frac{1}{2}}L(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-\frac{1}{2}} \tag{10.22}$$

şeklindedir [49,58]. Burada

$$\begin{aligned}
&V = (\hat{\Sigma}^T\hat{\Sigma} - \frac{1}{\rho}\Omega_\Delta)^{-1} > 0,\\
&S = I - \hat{\Sigma}(V - V\hat{\Gamma}^T(\hat{\Gamma}V\hat{\Gamma}^T)^{-1}\hat{\Gamma}V)\hat{\Sigma}^T,\\
&\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix}\hat{C}_2 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
&\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix}\hat{B}_2^T\overline{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{12}^T & \hat{B}_2^T F^T\varphi & 0 & 0\end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{10.23}$$

$$\Omega_\Delta = \begin{bmatrix}
\Theta_1 & \Theta_2 & \overline{P}\overline{E} & -\overline{h}F^T N_1 & \overline{P}\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T & \hat{A}^T F^T\varphi & \varepsilon\hat{N}_A^T & \overline{P}\hat{M}\\
* & \Theta_3 & 0 & -\overline{h}N_2 & 0 & 0 & \overline{A}_1^T F^T\varphi & \varepsilon N_h^T & 0\\
* & * & -R & 0 & 0 & 0 & \overline{E}^T F^T\varphi & \varepsilon N_E^T & 0\\
* & * & * & -\overline{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & \hat{B}_1^T F^T\varphi & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\varphi & 0 & \varphi F\hat{M}\\
* & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I
\end{bmatrix} \tag{10.24}$$

$$\Theta_1 = \overline{P}\hat{A} + \hat{A}^T\overline{P} + \overline{Q} + \overline{N}_1 + \overline{N}_1^T,$$
$$\Theta_2 = \overline{P}\,\overline{A}_1 - F^T N_1 + F^T N_2^T,$$
$$\Theta_3 = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T,$$

şeklindedir, ρ ve L ise $\|L\| < \rho$ koşulunu sağlayan serbest sayı ve matristir.

İspat. Sınırlı Gerçel Lemma ile, $\overline{\Omega}_{\Delta} < 0$ olduğu takdirde, (9.3) sistemi H_{∞} kontrolü tanımlar. (10.6)'daki matrisler kullanılarak $\overline{\Omega}_{\Delta} < 0$'ın

$$\psi + UV + V^T U^T + \alpha^T K \beta + \beta^T K^T \alpha < 0 \qquad \textbf{(10.25)}$$

eşitsizliğine denk olduğu gösterilebilir. Burada

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \overline{P}\overline{E} & -hF^T N_1 & \overline{P}\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T & \hat{A}^T F^T \varphi \\ * & \psi_3 & 0 & -\overline{h}N_2 & 0 & 0 & \overline{A}_1^T F^T \varphi \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & \overline{E}^T F^T \varphi \\ * & * & * & -\overline{h}W & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & \hat{B}_1^T F^T \varphi \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varphi \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(10.26)}$$

$$\psi_1 = \overline{P}\hat{A} + \hat{A}^T \overline{P} + \overline{Q} + \overline{N}_1 + \overline{N}_1^T,$$
$$\psi_2 = \overline{P}\,\overline{A}_1 - F^T N_1 + F^T N_2^T,$$
$$\psi_3 = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T,$$

$$\begin{aligned} U &= \left[\hat{M}^T \overline{P} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \hat{M}^T F^T \varphi\right]^T, \\ V &= F(t)\left[\hat{N}_A \quad N_h \quad N_E \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right], \end{aligned} \qquad \textbf{(10.27)}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta &= \left[\hat{C}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \hat{D}_{21} \quad 0 \quad 0\right], \\ \alpha &= \left[\hat{B}_2^T \overline{P} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \hat{D}_{12}^T \quad \hat{B}_2^T F^T \varphi\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(10.28)}$$

şeklindedir. (10.4) eşitsizliği, 3. bölümde verilen Lemma 3.1 ve Schur Komplementi ile (10.25) eşitsizliğinin

$$\Omega_{\Delta} + \hat{\Sigma}^T K \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}^T K^T \hat{\Sigma} < 0 \qquad \textbf{(10.29)}$$

eşitsizliğine denk olduğu gösterilebilir. Burada $\Omega_{\Delta}, \hat{\Gamma}$ ve $\hat{\Sigma}$, (10.23) ve (10.24)' te verilen matrislerdir. Lemma 9.1 ile de (10.29) eşitsizliğinin

$$N_{\hat{\Gamma}}^T \Omega N_{\hat{\Gamma}} < 0, \qquad N_{\hat{\Sigma}}^T \Omega N_{\hat{\Sigma}} < 0 \qquad \textbf{(10.30)}$$

eşitsizliklerine denk olduğu gösterilebilir. Burada $N_{\hat{\Gamma}}$ ve $N_{\hat{\Sigma}}$, $\hat{\Gamma}$ ve $\hat{\Sigma}$ nın ortogonal tümleyenleridir. $\hat{\Gamma}$ matrisi

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.31)}$$

şeklinde olduğu için, $N_{\hat{\Gamma}}^T \,\Omega\, N_{\hat{\Gamma}} < 0$ eşitsizliği

$$N_{\Gamma}^T \,\widetilde{\Omega}_{\Delta}\, N_{\Gamma} < 0 \quad \textbf{(10.32)}$$

formunda yazılabilir, burada $\widetilde{\Omega}_{\Delta}$ ve Γ matrisleri (10.19) ve (10.17)' de verilmiştir. Şimdi

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{12}^T & \hat{B}_2^T F^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.33)}$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} \overline{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.34)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\hat{\Sigma} = \Sigma_1 G, \quad N_{\hat{\Sigma}} = G^{-1} N_{\Sigma_1}, \quad \Omega_{\Delta} = G\,\Omega_1 G$$

elde edilir ve $N_{\hat{\Sigma}}^T \Omega_{\Delta} N_{\hat{\Sigma}} = N_{\Sigma_1}^T \Omega_1 N_{\Sigma_1}$ şeklinde olur. Σ_1 matrisi

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.35)}$$

şeklinde olduğu için, $N_{\Sigma_1}^T \,\Omega_1\, N_{\Sigma_1} < 0$ eşitsizliği

$$N_{\Sigma_2}^T \,\Omega_2\, N_{\Sigma_2} < 0 \quad \textbf{(10.36)}$$

eşitsizliğine denktir. Burada

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12}^T & B_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(10.37)}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} X & T_1 \\ T_1^T & V_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & T_2 \\ T_2^T & V_2 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(10.38)}$$

ve

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & E & -\bar{h}YN_1 & B_1 & YC_1^T & YA^T & \varepsilon YN_A^T & M \\ * & \Omega_3 & 0 & -\bar{h}N_2 & 0 & 0 & A_1^T & \varepsilon N_h^T & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & E^T & \varepsilon N_E^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^T & B_1^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tilde{\varphi} & 0 & M \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10.39)}$$

$\Omega_1 = AY + YA^T + Y(Q + N_1 + N_1^T)Y$
$\Omega_2 = A_1 - YN_1 + YN_2^T$
$\Omega_3 = -(1-\mu)Q - N_2 - N_2^T$

şeklindedir. (10.38)'de X ve Y pozitif belirli simetrik matrisler, T_1 ve T_2 ise terslenebilir matrislerdir. (10.39)'un içinde $-YN_1 + YN_2^T$ ve $Y(Q + N_1 + N_1^T)Y$ terimleri lineer olmayan bir durum yaratmaktadırlar. (10.39)'a denk bir LME elde etmek için N_1 ve N_2 matrisleri önceden verilmiş pozitif belirli ve simetrik matrisler olmalıdır. Bu takdirde (10.20), Ω_2 matrisine Schur Komplementi uygulanarak elde edilir ve

$$N_\Sigma^T \hat{\Omega}_\Delta N_\Sigma < 0 \qquad \textbf{(10.40)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\overline{P}\,\overline{P}^{-1} = I$ olması $T_2 T_1^T = I - YX$ olduğunu gösterir ve (10.16) eşitsizliği elde edilir. Lemma 9.1'e göre (10.29)'u sağlayan K matrisi vardır ve bulunması [49,58]'de verilmiştir. Burada (10.15) ve (10.16) eşitsizliklerinin 9. bölümde verilen algoritma ile çözüldüğü not edilmelidir.

Örnek 10.1 (10.1) sistemi için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.25 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{10.41}$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad N_A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_h = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad N_E = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

matrisleri ele alınsın.

$$\bar{h} = 3.7, \quad \varepsilon = 2.89, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 0.51$$

alınırsa çıktı geri beslemesinin düzenleyici matrisi

$$K = \begin{bmatrix} -7.98 & -0.12 & 0.2 \\ -0.14 & -94.9 & -2.05 \\ 0.83 & -2.1 & -80.5 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. [48]'de aynı örnek için, belirsizlikler içermediği durumda aynı $\bar{h}$ değeri için $\gamma = 0.54$ olarak bulunmuştu. Burada bu örnek için, belirsiz parametreler içermediği durumda aynı $\bar{h}$ değeri için $\gamma = 0.52$ değeri bulunabilmektedir.

11. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında durumlarının gecikmesi zaman değişkenli, durumlarının zamana göre birinci türevinin gecikmesi sabit olan lineer neutral sistemlerin asimptotik kararlılıkları Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile incelenmiştir. Kararlılık için yeterli koşullar LME'ler cinsinden elde edilip, Matlab LMI Toolbox paket programı ile çözülmüşlerdir.

İlk önce kontrol girdileri içermeyen sistemlerin asimptotik kararlılıkları ve dayanıklı kararlılıkları incelenmiş, daha sonra bu sistemleri kontrol girdileri vasıtaları ile kararlı hale getirmek için durum geri beslemeli kontrol ve durum geri beslemeli dayanıklı kontrol problemleri çözülmüştür. Bu problemlerde amaç, durum geri besleme kontrol kuralını sistemlere uygulayarak, elde edilen kapalı çevrim sistemlerinin asimptotik kararlılıkları için yeterli koşulları LME'ler cinsinden bulmak olmuştur. Ayrıca bu sistemler için durum geri beslemeli H_∞ kontrol ve dayanıklı H_∞ kontrol problemleri de çözülmüştür. Bu problemler de ise amaç, hem kapalı çevrim sistemlerinin kararlılıklarının incelenmesi hem de gürültü, dış etki vb. ve sistemin kontrol edilen çıktısı cinsinden verilen performans indeksini sıfırdan küçük bir gerçel sayıya eşit yapmak olmuştur. Daha sonraki bölümlerde ise bu sistemler için dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol ve dayanıklı H_∞ kontrol problemleri çözülmüştür.

Durum geri beslemeli kontrol ve H_∞ kontrol problemlerinin çözümü için yeterli koşullar olarak elde edilen matris eşitsizlikleri içinde, bazı matris değişkenleri ile beraber terslerinin de olması ve geri besleme düzenleyici matrisinin matris değişkeni ile çarpımının olması nedeni ile lineer olmayan terimler oluşmuştur. Geri besleme kontrol kuralını bir LME'nin çözümünden bulmak için, elde edilen matris eşitsizlikleri soldan ve sağdan, matris değişkenlerinin terslerinden oluşan diagonal, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris ile çarpılmıştır. Bu işlem özellikle durum geri beslemeli kontrol problemi konusunda önemli bir çalışma olan [16]'da benzer işlemler için yapılan matris işlemlerini oldukça kısaltmış ve elde edilen nümerik sonuçların bu çalışmada elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemi ilk önce durumundaki ve durumunun birinci türevindeki gecikmeler sabit olan lineer neutral bir sistem için incelenmiştir [47]. Kullanılan yöntem ile [27]'de verilen sistem matrisleri üzerindeki kısıtlar ortadan kaldırılmış, dinamik çıktı geri beslemeli kontrol kuralını LME'ler yardımı ile elde eden algoritmik bir yöntem verilmiştir. Daha sonra sistemin durumundaki gecikme zaman değişkenli alınarak aynı problem farklı bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli tanımlayarak, gecikmeli sistemler için elde edilmiş Sınırlı Gerçel Lemma'da tanımlanan matris eşitsizliğini, kontrol kuralında yer alan düzenleyici matrisleri içeren terimleri ayırarak, iki matrisin toplamı şeklinde yazarak çözülmüştür [48]. Bu yöntem ile dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol kuralını belirlemek için daha fazla LME elde edilmiştir. Fakat elde edilen bu LME'ler matris değişkenleri ile beraber terslerini de içerdiği için ters kısıtlar içeren matris eşitsizlikleri olarak elde edilmişlerdir. Bu eşitsizlikleri çözmek için [59]'da verilen CCL Algoritması kullanılmıştır. Burada elde edilen sonuçlar [26,49]'da elde edilen sonuçların genişletilmişleridir. Ayrıca, burada kullanılan yöntem ile de [27]'deki sistem matrisleri üzerindeki kısıtlar kaldırılıp, elde edilen nümerik sonuçların [22,27]'den daha iyi olduğu gözlenmiştir. Son olarak ise sisteme belirsiz parametreler eklenerek dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol problemi bir önceki bölümde kullanılan yöntem ile çözülüp, elde edilen nümerik sonuçların önceki bölümden daha iyi olduğu gözlenmiştir [50].

Bu tez çalışmasında incelenen tüm problemlerde, literatürdeki bir çok çalışmada bulunan durum gecikmesinin zamana göre birinci türevinin birden küçük bir sayıya eşit olma şartı ortadan kaldırılmıştır. Problemlerin çözümü için elde edilen LME'lerin negatif belirli ve simetrik olmaları gerekmektedir. Bu çalışmada elde edilen LME'lerin negatif belirli olmaları için köşegenleri üzerindeki tüm elemanlarının negatif olması gerekmektedir. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin yapısından dolayı, elde edilen LME'lerin köşegenlerinin üzerine, durum gecikmesinin zamana göre birinci türevini içeren $-Q(1-\mu)$ şeklinde bir terim gelmektedir. Burada Q pozitif belirli simetrik bir matris değişkeni olarak seçildiği için, μ sayısı birden küçük bir sayı olmalıdır. Bu kısıtı ortadan kaldırmak için, LME'leri elde etme aşamasında elde edilen eşitsizliklere sıfıra eşit olan, (2.8) ve (9.18) ile verilen bir terim eklenmiştir. Bu işlem sayesinde LME'lerde sorun çıkaran köşegenler üzerine serbest olarak seçilebilen matris değişkenlerinin gelmesi sağlanmış ve kısıt ortadan kaldırılmıştır. Örneğin 2. Bölüm'de elde edilen LME'nin 2. Satır ve 2. sütununda olan $-(1-\mu)Q-N_2-N_2^T$ terimi incelenirse, burada serbest seçilebilen N_2 matrisinin olması, birden büyük μ değerleri için de köşegeni negatif yapmayı mümkün kılmaktadır.

Dinamik çıktı geri beslemeli kontrol ve dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol problemlerinin, durum geri beslemeli kontrol ve durum geri beslemeli H_∞ kontrol problemlerine göre daha zor olduğu gözlenmiştir. Bunun sebebi ise çıktı geri beslemesi kullanıldığında elde edilen matris eşitsizliklerinin sayısının bir kat daha fazla, karmaşık ve daha fazla lineer olmayan terimler içermesidir. Literatürde durum geri beslemeli kontrol ve durum geri beslemeli H_∞ kontrol konusunda bir çok çalışma yapıldığı halde dinamik çıktı geri beslemeli kontrol ve dinamik çıktı geri beslemeli H_∞ kontrol konusunda çok fazla çalışma yapılmamıştır. Dinamik çıktı geri beslemesi sistemin ölçülebilen çıktıları ile tanımlandığı için pratikte uygulamalarda tercih edilmektedir. Bu yüzden bundan sonraki çalışmalarda, özellikle dinamik çıktı geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrol konusunda, sistemin kontrol girdisi de gecikme içerdiği durum incelenmelidir. Kontrol girdisi gecikmeli sistemler için durum geri beslemeli kontrol problemi konusunda çalışmalar yapılmıştır [16,60], fakat çıktı geri beslemeli kontrol konusunda yeterince çalışma yapılmamıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Hale, J. K., ve Lunel, S. M. V.,** 1991: *Introduction to Functional Differential Equations,* App. Math. Sciences, 99, Springer – Verlag, New York.

[2] **Mahmoud M, S.,** 2000: *Robust Control and Filtering for Time-delay Systems,* Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.

[3] **Niculescu, S. I., Verriest, E. I., Dugard, L., ve Dion, J. M.,** 1998: Stability of Linear Systems with Delayed State: A Guaded Tour, Grenoble, pp.31-38, France.

[4] **Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., ve Balakrishnan V.,** 1994: *Linear Matrix Inequalities System and Control Theory,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[5] **Mahmoud, M. S.,** 2000: Robust H_{∞} Control of Linear Neutral Systems. *Automatica,* Vol. **36,** pp. 757-764.

[6] **Lien, H. C., ve Chen, J. D.,** 2003: Discrete-Delay-Independent and Discrete-Delay-Dependent Criteria for a Class of Neutral Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,* Vol. **125,** pp.33-41.

[7] **Baser, U., 2003,** 2003: Output Feedback H_{∞} Control Problem for Linear Neutral Systems: Delay Dependent Case. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control,* Vol. **125,** pp. 177-185.

[8] **Yue, D., ve Han, Q. L.,** 2004: A Delay Dependent Stability Criterion of Neutral Systems and its Applications to a Partial Element Equivalent Circuit Model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* Vol. **51,** no.12, pp. 685-689.

[9] **Ivanescu, D., Niculescu, S. I., Dugard, L, Dion, J. M., ve Verriest, E. I.,** 2003: On Delay Dependent Stability for Linear Neutral Systems. *Automatica,* Vol. **39**, pp. 255-261.

[10] **Han, Q.,** 2005: A New Delay Dependent Stability Criterion for Linear Neutral Systems with Norm Bounded Uncertainties in all System Matrices. *International Journal of Systems* Science, Vol. **36**, no. 8, pp. 469-475.

[11] **Park, J. H.,** 2002: Stability Criterion for Neutral Differential Systems with Mixed Multiple Time-Varying Delay Arguments. *Mathematics and Computers in Simulation,* Vol. **59,** pp.401-412.

[12] **Yue, D. ,Won, S., ve Kwon, O.,** 2003: Delay Dependent Stability of Neutral Systems with Time Delay: an LMI Approach. *IEE Proc. Control Theory Appl.*,Vol. **150**, no. 1, pp. 23-27.

[13] **Han, Q. L., Yu, X., ve Gu, K.,** 2004: On Computing the Maximum Time Delay Bound for Stability of Linear Neutral Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **Vol. 49**, no. 12, pp. 2281-2285.

[14] **Wu, M., He, Y., ve She, J. H.,** 2004: New Delay Dependent Stability Criteria and Stabilizing Method for Neutral Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **49**, no. 12, pp. 2266-2270.

[15] **Xu, S., Lam, J., Yang, C., ve Verriest, E. I.,** 2003: An LMI Approach to Guaranteed Cost Control for Uncertain Linear Neutral Delay Systems. *Int. J. of. Robust and Nonlinear* Control, Vol. **13**, pp.35-53.

[16] **Zhang, X. M., Wu, M., She, J. H., ve He, Y**., 2005: Delay Dependent Stabilization of Linear Systems with Time-Varying State and Input Delays. *Automatica*, Vol. **41**, pp. 1405-1412.

[17] **Carlos, E. S., ve Li, X.,** 1999: Delay Dependent Robust H_∞ Control of Uncertain Linear State Delayed Systems. *Automatica*, Vol. **35**, pp. 1313-1321.

[18] **Lee, Y. S., Moon, Y. S., Kwon, W. H., ve Park, P. G.,** 2004: Delay Dependent Robust H_∞ Control for Uncertain Systems with a State Delay. *Automatica*, Vol. **40**, pp. 65-72.

[19] **Xu, S., Lam, J. ve Zou, Y.,** 2006: New Results on Delay Dependent Robust H_∞ Control for Systems with Time Varying Delays. *Automatica*, Vol. **42**, pp.343-348.

[20] **Jiang X., ve Han, L. Q.,** 2005: On H_∞ Control for Linear Systems with Interval Time Varying Delay. Automatica, Vol. **41**, pp. 2099-2016.

[21] **Lee, Y. S., Moon, Y. S., Kwon, W. H., ve Lee, K. H.,** 2001: Delay Dependent Robust H_∞ Control for Uncertain Systems with Time Varying State Delay. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, 4-7 December, pp.3208-3213.

[22] **Park, J. H.,** 2004: Design of a Dynamic Output Feedback Controller for a Class of Neutral Systems with Discrete and Distribured Delays. *IEE Proc. Control Theory and Appl.,* Vol. **151**, pp. 610-614.

[23] **Park, J. H.,** 2005: On Design of Dynamic Output Feedback Controller for GCS of Large Scale Systems with Delays in Interconnections: LMI Optimization Approach. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. **161**, pp .423-432.

[24] **Ivanescu, D., Dion, J. M., Dugard, L, ve Niculescu, S. I.,** 1999: Delay Effects and Dynamical Compensation for Time Delay Systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, pp. 1999-2004.

[25] **Choi, H. H., ve Chung M. J.,** 1996: Observer Based H_∞ Controller Design for State Delayed Linear Systems. *Automatica*, Vol. **32**, no. 7, pp. 1073-1075.

[26] **Choi, H. H., ve Chung, M. J.,** 1997: An LMI Approach to H_∞ Controller Design for Linear Time-delay Systems, *Automatica*, Vol. **33**, no. 4., pp.737-739.

[27] **Fridman, E., ve Shaked, U.,** 2002: A descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **47**, no. 2, pp.253-270.

[28] **Zhou, K., ve Khargonekar, P. P.,** 1988: An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization. *Systems and Control Letters*, Vol. **11**, pp. 85-91.

[29] **Sampei, M., Mita T., ve Nakamichi, M.,** 1990: An Algebraic Approach to H_∞ Output Feedback Control Problems. *Systems and Control Letters,*Vol. **14,** pp. 13-24.

[30] **He, Y., Wu, M., She, J. H., ve Liu, G. P.,** 2004: Delay Dependent Robust Criteria for Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays. *Systems and Control Letters*, Vol. **51**, pp. 57-65.

[31] **Xu, S., Lam, J., ve Zou, Y.,** 2005: Further Results on Delay Dependent Robust Stability Conditions of Uncertain Neutral Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. **15**, pp.233-246.

[32] **Kharitonov, V. L., ve Zhapko A. P.,** 2002: Lyapunov-Krasovskii Approach to the Robust Stability Analysis of Time Delay Systems, *Automatica*, Vol. **39**, pp.15-20.

[33] **Han, Q. L.,** 2004: On Robust Stability of Neutral Systems with Time Varying Discrete Delay and Norm Bounded Uncertainty. *Automatica*, Vol. **40**, pp. 1087-1092.

[34] **Wu, M., She, J. H., ve Liu, G. P.,** 2004: Delay Dependent Criteria for Robust Stability of Time Varying Delay Systems. *Automatica*, Vol. **40**, pp. 1435-1439.

[35] **Jiang X., ve Han, Q. L.,** 2006: Delay Dependent Robust Stability for Uncertain Linear Systems with Interval Time Varying Delay. *Automatica*, Vol. **42**, pp. 1059-1065.

[36] **Han, Q. L., Zhang, X. M., ve Gu, K.,** 2005: Further Results on Stability of Uncertain Linear Neutral Systems. *Automatica*, Vol. **41**, pp. 1209-1218.

[37] **Park, P., ve Ko, J. W.,** 2007: Stability and Robust Stability for Systems with a Time Varying Delay, *Automatica*, Vol. **43**, pp. 1855-1858.

[38] **Chen, W. H., ve Zheng, W. X.,** 2007: Delay Dependent Robust Stabilization for Uncertain Neutral Systems with Distributed Delays. *Automatica*, Vol. **43**, pp. 95-104.

[39] **Wu, J., Chen, T., ve Wang, L.,** 2006: Delay Dependent Robust Stability and H_∞ Control for Jump Linear Systems with Delays. *Systems and Control Letters*, Vol. **55**, pp. 939-948.

[40] **Nian, X., Huang, Z., ve Gui, W.,** 2005: Robust H_∞ Control of Linear Uncertain Neutral Type Systems with Time Varying Delay. Systems, *Proceedings of the Man and Cybernetics, 2005 IEEE International Conference on*, Hawaii, 10-12 October, pp. 1753-1758.

[41] **Palhares, R. M., Campos, C. D., Ekel, P. Y., Leles, M. C. R ve D'Angelo, M. F. S. V.,** 2005: Delay Dependent Robust H_∞ Control of Uncertain Linear Systems with Time Varying Delays. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. **50**, pp. 13-32.

[42] **Li, H., Niculescu S. I., Dugard, L., ve Dion J. M.,** 1998: Robust Guaranteed Cost Control of Uncertain Linear Time Delay Systems Using Dynamic Output Feedback. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. **45**, pp. 349-358.

[43] **Chen J. D.,** 2007: Robust Output Observer Based Control of Neutral Uncertain Systems with Discrete and Distributed Time Delays:LMI Optimization Approach. *Chaos Solutions and Fractals*, Vol. **34**, pp.1254-1264.

[44] **Suplin, V., ve Shaked, U.,** 2008: Robust H_∞ Output Feedback Control of Systems with Time Delay. *Systems and Control Letters*, Vol. **57**(3), pp. 193-199.

[45] **Chen J. D.,** 2007: Robust H_∞ Output Dynamic Observer Based Control of Uncertain Time Delay Systems. *Chaos Solutions and Fractals,* Vol. **31**, pp. 391-403.

[46] **Xu, S. ve Chen, T.,** 2004: Robust H_∞ Control for Uncertain Discrete Time Systems with Time Varying Delays via Exponential Output Feedback Controllers. *Systems and Control Letters,* Vol. **51**, pp. 171-183.

[47] **Kızılsaç, B.,** 2007: Dynamic Output Feedback H_∞ Control Problem for a Class of Linear Neutral Systems. *Proceedings of the 7th Workshop on Time Delay Systems*, Nantes, France, 17-19 September(CD-ROM).

[48] **Başer, U., ve Kızılsaç, B.,** 2007: Dynamic Output Feedback H_∞ Control Problem for Linear Neutral Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **52**, no. 6, pp.1113-1118.

[49] **Gahinet, P., ve Apkarian P.,** 1994: A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. *Int. J. of. Robust and Nonlinear Control*, Vol. **4**, pp. 421-448.

[50] **Kızılsaç, B., and Başer, U.,** 2008: Robust H_∞ Control for Neutral Systems Via Dynamic Output Feedback. *Proceedings of the International Conference on Control 2008 (UKACC),* Manchester, England, 2-4 September.(CD-Rom).

[51] **Moler, C.,** 1994: Matlab. A System for Doing Mathematics by Computer, MathWorks, Inc., Michigan, USA.

[52] **Fridman, E.,** 2003: Delay Dependent Stability and H_∞ Control: Constant and Time Varying Delays. *Int. J. Control*, Vol. **76**, no. 1, pp. 48-60.

[53] **Han, Q. L.,** 2002: Robust Stability of Uncertain Delay Differential Systems of Neutral Type. *Automatica,* Vol. **38**, pp. 719-723.

[54] **Fridman, E. ve Shaked, U.,** 2002: An Improvement Stabilization Method for Linear Time Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. **47**, no. 11, pp. 1931-1937.

[55] **Gao, H. J., ve Wang, C. H.,** 2003: Comments and Further Results on a Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **48**, no. 3, pp. 520-525.

[56] **Moon, Y. S., Park, P., Kwon, W. H., ve Lee, Y. S.,** 2001: Delay Dependent Robust Stabilization of Uncertain State Delayed Systems. *Int. J. Control*, Vol. **74**, no. 14, pp. 1447-1455.

[57] **Doyle, J. K. C., Glover, K., Khargonekar, P., ve Francis, B.,** 1989: State Space Solutions to Standart H_2 and H_∞ problems. *IEEE Transactions on Automatic Control,*Vol. **34**, pp. 831-847.

[58] **Iwasaki, T., ve Skelton, R. E.,** 1994: All Controllers for General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas. *Automatica,*Vol. **8**, pp. 1307-1317.

[59] **Ghaoui, L. E., Oustry, F., ve Aitrami, M**., 1997: A Cone Complementary Lineerization Algorithm for Static Output Feedback and Related Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control,*Vol. **42**, pp. 1171-1176.

[60] **Fridman, E., Dambrine, M., ve Yeganefar, N**., 2007: On Matrix Inequalities Approach to Input to State Stability. *Proceedings of the 7th Workshop on Time Delay Systems*, Nantes, France, 17-19 September(CD-ROM).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Bayram Barış KIZILSAÇ

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1974

Adres: İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Anabilim dalı**,** Maslak, Sarıyer, İstanbul

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi

Yüksek Lisans Üniversite : İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

- **Kızılsaç, B.,** 2005: Noktasal İzlemeli Kontrol Probleminin Optimal Kontrol Problemine İndirgenerek İncelenmesi, TOK Bildiriler Kitabı, İstanbul, Haziran 2005.
- **Başer, U., and Kızılsaç, B.,** 2007: Dynamic Output Feedback H_∞ Control Problem for Linear Neutral Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **52**, no. 6, pp.1113-1118.
- **Kızılsaç, B.,** 2007: Dynamic Output Feedback H_∞ Control Problem for a Class of Linear Neutral Systems. *Proceedings of the 7th Workshop on Time Delay Systems*, Nantes, France, 17-19 September(CD-ROM).
- **Kızılsaç, B., and Başer, U.,** 2008: Robust H_∞ Control for Neutral Systems Via Dynamic Output Feedback. *Proceedings of the International Conference on Control 2008 (UKACC),* Manchester, England, 2-4 September(CD-ROM).
- **Kızılsaç, B., ve Başer U.,** 2008: Lineer Neutral Bir Sistemin Dayanıklı Kararlılığı, TOK Bildiriler Kitabı, İstanbul, Kasım 2008.
- **Kızılsaç, B., ve Oruçoğlu K.,** 2008: Yerel Olmayan Koşullar İle Verilmiş Bir Optimal Kontrol Problemi, TOK Bildiriler Kitabı, İstanbul, Kasım 2008.