

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tezimi hazırlamamda bana yardımcı olan sayın Prof. Dr. Metin Gürgöze'ye ve desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Şubat, 2006

Serkan Zeren

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEORİ	3
2.1. Birleşik Sistemin Frekans Denkleminin Elde Edilmesi	4
2.1.1. Sistemin Hareket Denklemleri	4
2.1.2. Sınır ve Geçiş Şartları	6
2.1.3. Sınır Değer Probleminin Çözümü	7
2.2. Birleşik Sistemin Özel Hali İçin Frekans Denklemi	10
2.3. Temel Frekans İçin Dunkerley Tabanlı Yaklaşık Bir Formül	13
3. SAYISAL SONUÇLAR	17
4. SONUÇLAR	25
KAYNAKLAR	26
EKLER	28
ÖZGEÇMİŞ	53

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Şekil 2.1'deki sistemin boyutsuz $\bar{\beta}_1$ temel frekans parametreleri....	18
Tablo 3.2. $\bar{m}_{21}=0$ haline göre bağıl hatalar.....	20
Tablo 3.3. Şekil 2.4'deki sistemin boyutsuz $\bar{\beta}_1$ temel frekans parametreleri ve bağıl hata değerleri.....	22
Tablo D.1. (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi.....	40
Tablo D.2. (2.48)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi.....	48

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : İki sürekli sistemden oluşan birleşik sistem.....	3
Şekil 2.2 : Geçiş şartı (2.18)'in açıklanması.....	7
Şekil 2.3 : $\overline{m}_{21} \rightarrow 0$ limit durumunda oluşan basitleşmiş sistem.....	10
Şekil 2.4 : $M \rightarrow \infty$ limit halinde oluşan sistem.....	11
Şekil 2.5 : (2.45)'te verilen geçiş şartının grafiksel yorumu.....	12
Şekil 2.6 : Birleşik sistem için düşünülen üç alt sistem.....	14
Şekil 2.7 : Birleşik sistemin özel hali için söz konusu olan iki alt sistem....	16
Şekil 3.1 : Çeşitli yay ve kütle parametreleri için bağıl hata yüzeyleri.....	21
Şekil 3.2 : Birleşik sistemin ilk 4 mod şekli.....	23
Şekil 3.3 : Birleşik sistemin özel halinin ilk 4 mod şekli.....	24

SEMBOL LİSTESİ

$C_1, \dots, C_{10}, Z_1$	: İntegrasyon sabitleri
x_1, x_2, x_3	: Konum koordinatları
$w_{1,3}(x_1, t)$	: Kirişin eğilme yer değiştirmeleri
$w_2(x_2, t)$	: Çubuğun eksenel yer değiştirmesi
$W_{1,3}(x_1)$	: Kirişe ait genlik fonksiyonları
$W_2(x_2)$	: Çubuğa ait genlik fonksiyonu
$E_1 I_1$	: Kirişin eğilme rijitliği
$E_2 A_2$	: Çubuğun eksenel rijitliği
m_1	: Kirişin birim boyunun kütlesi
m_2	: Çubuğun birim boyunun kütlesi
L_1	: Kirişin boyu
L_2	: Çubuğun boyu
α_k	: Çubuğun yay katsayısının kiriş yay katsayısına oranı
α_M	: Çubuğun ucundaki kütlenin kirişin kütlesine oranı
$\overline{m}_{21}$	: Çubuğun kütlesinin kirişin kütlesine oranı
η	: Çubuk-kiriş bağlantı yerinin konumu
$\overline{\beta}$	: Boyutsuz frekans parametresi
$\overline{\beta}_1$	: Boyutsuz temel frekans parametresi
$\overline{\beta}_{11, \dots, 33}$	: Alt sistemlerin boyutsuz frekans parametreleri
ω	: Birleşik sistemin öz frekansı
ω_1	: Birleşik sistemin yaklaşık temel frekansı
$\omega_{11, \dots, 33}$	: Alt sistemlerin temel frekansları
T	: Sistemin toplam kinetik enerjisi
V	: Sistemin toplam potansiyel enerjisi

İKİ SÜREKLİ SİSTEMDEN OLUŞAN BİR BİRLEŞİK SİSTEMİN DİNAMİK İNCELENMESİ

ÖZET

Elastik sistemlerin dinamik incelenmesi yapılırken, ele alınan mekanik sistemler, üzerlerinde bir veya daha fazla sayıda kütle-yay sistemi taşıyan ve çeşitli desteklenme şartlarına maruz Bernoulli-Euler çubuğu şeklinde modellenebilir. Literatür incelendiğinde, bu konuda çok sayıda yayının yapıldığı görülmektedir. Fakat yapılan bu çalışmaların çoğunda helisel yay sistemlerinin kütlelerinin göz önüne alınmadığı bir gerçektir. Literatürde helisel yayın kütlelerinin hesaba katılmasının, içinde yer aldığı karmaşık bir sistemin doğal frekansları üzerinde etkilerinin incelenmediği görülmüştür.

Bu boşluğu doldurmak yönünde bir ilk adım olmak üzere, Gürgöze'nin 2005 yılında yaptığı çalışmada ankastre olarak mesnetlenmiş ve ucunda kütle-yay sistemi taşıyan bir Bernoulli-Euler çubuğunun öz frekansları incelenmiştir. Bu çalışmanın önemi, helisel yayın boyuna titreşen bir çubuk şeklinde modellenmesi suretiyle, karmaşık bir sistemde yayın kütlelerinin sistemin öz frekanslarının sayısal değerleri üzerine olan etkisinin araştırılmış olmasıdır.

Yapılmış olan bu incelemenin ışığında, bu çalışmada eğilme titreşimleri yapan basit mesnetlemiş bir Bernoulli-Euler kirişi ve bunun üzerinde helisel yay-kütle sistemini gerçekçi bir şekilde temsil etmek üzere, boyuna titreşen çubuk-kütleden oluşan bir birleşik sistemin frekans denklemi elde edilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla birleşik sistemin hareket denklemleri Hamilton Prensibi yardımıyla formüle edilmiştir. Elde edilen frekans denklemi daha sonra çeşitli boyutsuz kütle ve yay parametreleri için çözülmüştür. Bulunan sonuçların, yayın kütleli kabul edildiği sistemin sonuçlarıyla karşılaştırılması neticesinde bazı fiziksel parametre değerleri için öz frekansların sayısal değerlerinde ciddi hataların olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca bu sonuçlar, Dunkerley Metoduyla bulunan yaklaşık değerler ve sonlu elemanlar yöntemiyle bulunan sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Birleşik sistemin boyuna titreşen çubuğun

ucundaki kütlenin sonsuza götürülmesi limit halinde oluşan özel sistem için de sayısal değerlendirmeler yapılmıştır.

Elde edilen öz frekansların sayısal değerlerinin karşılaştırılması ve yorumlanmasıyla, fiziksel parametrelerin bazı değer takımları için helisel yayın kütlesinin göz önüne alınması gereğinin önemi bir kez daha ortaya konmuştur.

DYNAMIC INVESTIGATION OF A COMBINED SYSTEM CONSISTING OF TWO CONTINUOUS SYSTEMS

SUMMARY

When elastic systems are investigated dynamically, these mechanical systems may be modeled as Bernoulli-Euler beams to which one or several helical spring-mass systems are attached. After the literature is reviewed, it can be seen that some of a great number of studies on this subject are published. However, it is a fact that the mass of the helical springs is not taken into account in these works. The effects of the massless spring assumption on the numerical values of the eigenfrequencies in more complicated combined systems had not been investigated in the literature.

As a first step to cover this gap, in the article published by Gürgöze in 2005, the frequency equation of a classical combined system is derived consisting of a cantilevered beam to the tip of which is attached a helical spring-mass system. The importance of this study is the investigation in the effects of the mass of the helical springs on eigenfrequencies of complicated combined systems by modeling the helical spring as a longitudinally vibrating elastic rod.

Taking above mentioned publication as a guide, the present study deals with the determination of the frequency equation of a Bernoulli-Euler beam simply supported at both ends, to which is attached in-span a longitudinally vibrating elastic rod with a tip mass, representing a helical spring-mass system with mass of the helical spring considered. For this purpose, the equations of motion of the system are obtained by the use of Hamilton's Principle. The frequency equations are then numerically solved for various combinations of the physical parameters. Comparison of the numerical results with the massless spring case reveals the fact that neglecting the mass causes considerable errors for some combinations of the physical parameters. In addition, the results are compared with finite element (FE) solutions and Dunkerley estimations. Further, numerical evolution of the reduced system resulting for the tip mass going to infinity is done as well.

Interpretation and comparison of the obtained numerical results of eigenfrequencies reveals once more the importance of the consideration of the mass of the helical spring for some combinations of the physical parameters.

1 GİRİŞ

Makina, inşaat ve uçak mühendisliğinin birçok uygulamalarında sıklıkla karşımıza çıkan motorlar, titreşim yutucuları gibi sistemlerin, üzerlerine bir veya daha fazla helisel yay-kütle sistemleri eklenmiş Bernoulli-Euler çubukları şeklinde modellenebildiği bilinmektedir. Bu konu çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş ve birçok yayın yapılmıştır. Bunlardan bazıları şu şekilde verilebilir:

1. Gürgöze yaptığı çalışmada [1] serbest ucunda, bir kütle ve buna bağlı olan yay-kütle sistemi taşıyan ankastre bir çubuğun frekans denkleminin çıkarılması problemi ile ilgilenmiştir.
2. Q. S. Li ve arkadaşlarının yaptığı çalışmada [2] üzerinde çeşitli sayıda tek ve iki serbest dereceli kütle-yay taşıyan ve kesit alanı değişken olan Bernoulli-Euler çubuğunun çeşitli desteklenme konfigürasyonlarında serbest eğilme titreşimlerinin incelenmesi için etkili bir analitik metot sunulmuştur.
3. Wu, 2002 yılında gerçekleştirdiği çalışmada [3] üzerinde birden fazla iki serbestlik dereceli kütle-yay sistemi taşıyan çubukların serbest titreşimleri probleminin çözümüne alternatif bir yaklaşım getirmiştir.
4. Chen ve Wu tarafından yayınlanan çalışma [4], birden fazla kütle-yay sistemi taşıyan kesit alanı değişken bir çubuktan oluşan sistemin doğal frekanslarının ve bunlara ait mod şekillerinin tam olarak bulunması ile ilgilidir.
5. Wu ve Whittaker, 1999 yılında yaptıkları incelemede [5] ankastre bir çubuk ve bunun üzerinde iki serbestlik dereceli birden çok yay-kütle sistemi içeren sistemin doğal frekansları ve bunlara ait mod şekillerinin bulunması amacıyla analitik-sayısal yöntemleri birleştiren bir metot geliştirmeye çalışmışlardır.
6. Gürgöze yaptığı diğer bir çalışmada [6] ankastre mesnetlenmiş, ucunda kütle taşıyan bir Bernoulli-Euler çubuğu (ilk sistem) ve bunun üzerinde yer alan yay kütle sistemi (ikincil sistem) için öz frekansların çıkarılması ve bunların duyarlılığı üzerinde çalışmıştır.

Bu çalışmalarda dikkati çeken husus, helisel yayın kütlelerinin herhangi bir şekilde hesaba katılmamış olmasıdır. Diğer taraftan Rayleigh, bir yay-kütle sisteminde yayın kütlelerinin üçte birinin uçtaki kütleyle eklenmesi suretiyle tabii frekans hesabında yay kütlelerinin yaklaşık olarak dikkate alınmasının sağlanacağını göstermiştir. Ancak yukarıda sözü edilen çalışmalarda olduğu üzere literatürde, daha karmaşık birleşik titreşim sistemlerinde kütsüz yay kabulünün öz frekansların sayısal değerleri üzerindeki etkisi somut olarak incelenmemiştir. Bu boşluğu kapatmak yolunda bir ilk adım olarak Gürgöze tarafından yapılan çalışmada [7] ankastre bir Bernoulli-Euler çubuğu ve bunun serbest ucunda yer alan kütle-yay sisteminden oluşan klasik birleşik sistemin frekans denklemi çıkarılmıştır. Söz konusu çalışmada getirilen yenilik, helisel yayın boyuna titreşen elastik bir çubuk olarak modellenmiş olmasıdır. [8] Elde edilen frekans denklemi, çeşitli boyutsuz kütle ve yay parametreleri için çözülmüştür. Sonuçların kütsüz yay hali için karşılaştırılması, kütlelerin ihmal edilmesinin bazı parametre kombinasyonları için ciddi hatalara yol açtığını açıkça göstermiştir.

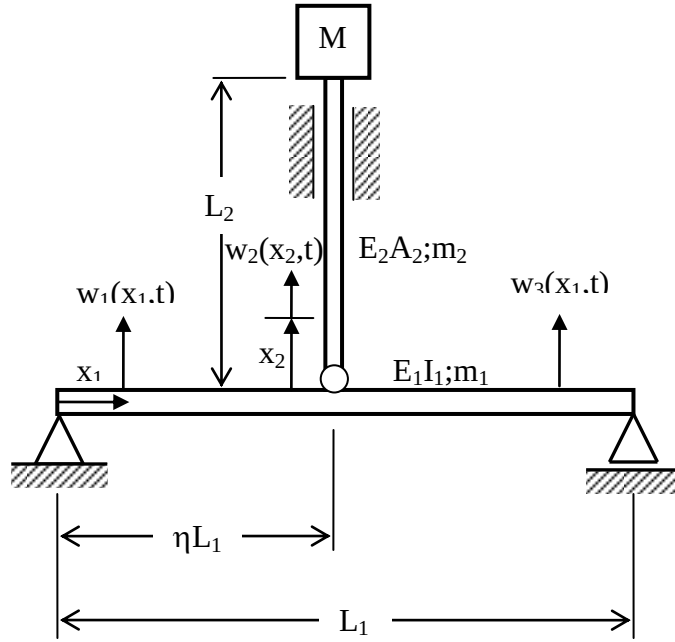
Yukarıdaki çalışmanın ışığında, bu tez çalışmasında, her iki ucu basit mesnetlenmiş bir Bernoulli-Euler çubuğu ve bunun üzerinde, helisel yayın kütlelerini göz önüne almaya yarayan boyuna titreşen elastik çubuk ve ucundaki kütlelerden oluşan birleşik sistemin frekans denkleminin tam olarak belirlenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Buradaki ana amaç, bazı parametre kombinasyonları için helisel yayın kütlelerinin göz önüne alınmasının öneminin bir kez daha altını çizmektir. Diğer taraftan titreşim alanında çalışan mühendislere, örneğin yapısal bir eleman ve buna elastik olarak bağlanmış bir motordan oluşan sistemin basit bir modeli olarak düşünülebilecek olan bu birleşik sistemin kesin frekans denklemini vermek de, bu çalışmanın önde gelen amaçlarından biridir.

Buna ek olarak, boyuna titreşen çubuğun serbest ucunun sabitlenmesiyle ortaya çıkan ve incelenen sistemin bir özel halini oluşturan sistem için de frekans denklemi çıkarılmıştır.

Yukarıdaki sistemler için elde edilen sayısal sonuçlar, kütsüz yay halinde elde edilenlerle karşılaştırılmalarının yanında, sonlu elemanlar (FE) yöntemi çözümünden ve Dunkerley Metoduyla bulunan yaklaşık sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Bazı parametre kombinasyonlarında helisel yayın kütlelerinin hesaba katılmamasının ciddi hatalara yol açtığı görülmüştür.

2. TEORİ

Bu çalışmada incelenecek olan problem, Şekil 2.1’de gösterilen mekanik titreşim sisteminin serbest titreşim problemidir. Sistem, basit mesnetlenmiş enine titreşen Bernoulli-Euler kirişi ve bunun üzerinde, ucunda M kütlesi bulunan boyuna titreşen bir elastik çubuktan oluşmuştur. Ucunda kütle olan eksenel titreşen çubuk, geleneksel kütle-helisel yay sistemine karşı gelmektedir. İki sürekli sistemden oluşan bu birleşik sistemin kağıt düzlemi üzerinde titreştiği kabul edilmektedir.



Şekil 2. 1: İki sürekli sistemden oluşan birleşik sistem

Sistemin fiziksel parametreleri şunlardır: L_1 , m_1 ve E_1I_1 , sırasıyla enine titreşen kirişin boyunu, birim uzunluğunun kütlesini ve eğilme rijitliğini göstermektedir. Benzer şekilde L_2 , m_2 ve E_2A_2 , boyuna titreşen çubuğun boyunu, birim uzunluğunun kütlesini ve eksenel rijitliğini temsil etmektedir. Çubuğun kirişe bağlandığı noktanın yeri ise sol mesnetten itibaren ηL_1 mesafesi ile ifade edilmiştir.

2.1 Birleşik Sistemin Frekans Denkleminin Elde Edilmesi

Frekans denklemini elde etmek için önce hareket denklemlerinin elde edilmesine ihtiyaç vardır. Hareket denklemleriyle birlikte sınır ve geçiş şartları bir sınır değer problemi oluşturur. Sınır değer probleminin çözülmesiyle birleşik sistemin frekans denklemini elde edilir.

2.1.1 Sistemin Hareket Denklemleri

Sistemin üç ayrı elastik bölgeden oluştuğu düşünülebilir. Kiriş ve çubuğun bağlantı noktasının solunda ve sağında yer alan eğilme yer değiştirmeleri sırasıyla $w_1(x_1, t)$ ve $w_3(x_1, t)$ ile gösterilmiştir. Boyuna titreşen çubuğun eksenel yer değiştirmesi ise $w_2(x_2, t)$ ile ifade edilmiştir. Çubuğun kirişe bağlandığı nokta, $x_2=0$ noktasına denk gelmektedir. Bu durumda $w_2(x_2, t)$ yer değiştirmesi, gerçekte çubuğun aslında kendisi de hareketli olan $x_2=0$ noktasına göre göreceli bir yer değiştirmedir. Diğer taraftan, $w_1(x_1, t)$, $w_2(x_2, t)$ ve $w_3(x_1, t)$ yer değiştirmelerinin küçük olduğu varsayımı yapılmıştır.

Sistemin hareket denklemini elde etmek için Hamilton Prensiplerinden yararlanılmıştır:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - V) dt = 0 . \quad (2.1)$$

Buradaki T ve V sırasıyla sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini ifade etmektedir. Sistemin toplam kinetik enerjisinin dört bileşenden oluştuğu görülmektedir:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 . \quad (2.2)$$

Bu dört enerji bileşeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \int_0^{\eta L_1} \dot{w}_1^2(x_1, t) dx_1 , \quad (2.3)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 \int_{\eta L_1}^{L_1} \dot{w}_3^2(x_1, t) dx_1 , \quad (2.4)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_2 \int_0^{L_2} [\dot{w}_2(x_2, t) + \dot{w}_1(\eta L_1, t)]^2 dx_2 , \quad (2.5)$$

$$T_4 = \frac{1}{2} M [\dot{w}_1(\eta L_1, t) + \dot{w}_2(L_2, t)]^2 . \quad (2.6)$$

Enine titreşen kirişin sol kısmının kinetik enerjisi T_1 olarak formüle edilmiştir. T_2 de sağ taraftaki parçanın kinetik enerjisini göstermektedir. Eksenel titreşim yapan çubuğun kinetik enerjisi T_3 ile verilmiştir. M kütesinin sahip olduğu kinetik enerji ise T_4 ile gösterilmiştir.

Potansiyel enerji de ikisi eğilmeye diğeri de eksenel yer değiştirmeye karşı gelmek üzere, üç kısımdan oluşmaktadır:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 . \quad (2.7)$$

Enine titreşen kirişin sol kısmının potansiyel enerjisi V_1 ile gösterilmiştir:

$$V_1 = \frac{1}{2} E_1 I_1 \int_0^{\eta L_1} w_1''^2(x_1, t) dx_1 . \quad (2.8)$$

Benzer şekilde kirişin sağ kısmının potansiyel enerjisi V_2 aşağıdaki gibi formüle edilmiştir:

$$V_2 = \frac{1}{2} E_1 I_1 \int_{\eta L_1}^{L_1} w_3''^2(x_1, t) dx_1 . \quad (2.9)$$

Son olarak da boyuna titreşen çubuğun sahip olduğu potansiyel enerjisi V_3 şöyle ifade edilebilir:

$$V_3 = \frac{1}{2} E_2 A_2 \int_0^{L_2} w_2'^2(x_2, t) dx_2 . \quad (2.10)$$

Kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinde kullanılan nokta ve çizgiler sırasıyla t zamanına ve yer koordinatları x_1 ve x_2 'ye göre kısmi türevleri göstermektedir.

Yukarıdaki (2.2-2.6) ve (2.8-2.10) ifadeleri (2.1)'de yerine koyulup, Ek C'de verilmiş olan varyasyon hesapları gerçekleştirildiğinde, kirişin iki kısmı ve boyuna titreşen çubuk için aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir:

$$E_1 I_1 w_1^{iv}(x_1, t) + m_1 \ddot{w}_1(x_1, t) = 0 , \quad (2.11)$$

$$E_2 A_2 w_2''(x_2, t) - m_2 \ddot{w}_2(x_2, t) = m_2 \ddot{w}_1(\eta L_1, t) , \quad (2.12)$$

$$E_1 I_1 w_3^{iv}(x_1, t) + m_1 \ddot{w}_3(x_1, t) = 0 . \quad (2.13)$$

2.1.2 Sınır ve Geçiş Şartları

Bilindiği üzere, Hamilton prensibi yardımıyla sistemin sınır şartları ve geçiş şartları da rahatlıkla elde edilebilmektedir. Ek C’de verilen varyasyonel hesaplardaki tek katlı integral ifadeleri sistemin sınır ve geçiş şartlarını verir. Sistemde etkin olan sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$$w_1(0, t) = 0, \quad (2.14)$$

$$w_3(L_1, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$E_1 I_1 w_1''(0, t) = 0, \quad (2.16)$$

$$E_1 I_1 w_3''(L_1, t) = 0 \quad (2.17)$$

Diğer taraftan sistemin geçiş şartları da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_0^{L_2} m_2 [w_2(x_2, t) + w_1(\eta L_1, t)] dx_2 + M [w_1(\eta L_1, t) + w_2(L_2, t)] - E_1 I_1 [w_1'''(\eta L_1, t) - w_3'''(\eta L_1, t)] = 0 \quad (2.18)$$

$$w_2(0, t) = 0, \quad (2.19)$$

$$M [w_1(\eta L_1, t) + w_2(L_2, t)] + E_2 A_2 w_2'(L_2, t) = 0 \quad (2.20)$$

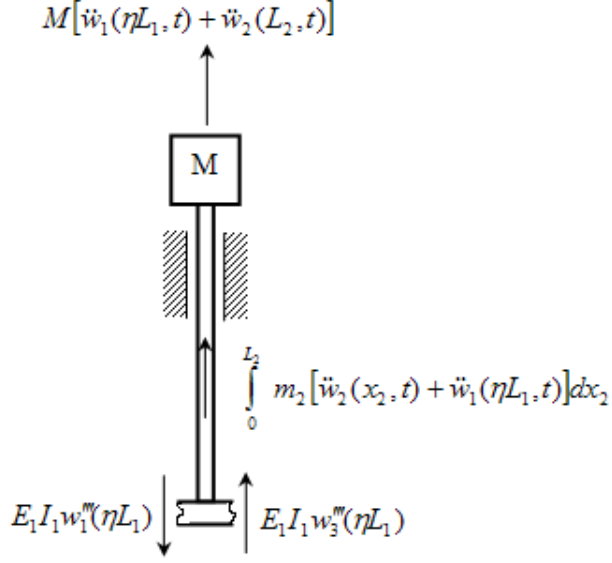
$$w_1(\eta L_1, t) = w_3(\eta L_1, t), \quad (2.21)$$

$$w_1'(\eta L_1, t) = w_3'(\eta L_1, t), \quad (2.22)$$

$$w_1''(\eta L_1, t) = w_3''(\eta L_1, t). \quad (2.23)$$

Buradaki nokta ve çizgiler, yukarda da belirtildiği üzere, sırasıyla t zamanına ve konum koordinatları x_1 ve x_2 ’ye göre kısmi türevleri göstermektedir.

Boyuna titreşen çubuk için (2.18) verilen geçiş şartının ifade ettiği $x_1 = \eta L_1$ noktasındaki kuvvet dengesi Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2: Geçiş şartı (2.18)'in açıklanması

2.1.3 Sınır Değer Probleminin Çözümü

Kısmi türevli diferansiyel denklemler (2.11-2.13)'in çözümü için değişkenlerin ayrılması klasik yöntemi uygulanmıştır. Bunun için çözüm kabulü olarak aşağıdaki varsayım göz önüne alınmıştır:

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \cos \omega t, \quad i = 1, 2, 3 \quad x_3 = x_1 \quad (2.24)$$

Buradaki $W_i(x_i)$ kiriş kısımlarına ve çubuğa ait genlik fonksiyonlarını ve ω ise birleşik sistemin bilinmeyen öz frekansını göstermektedir.

Çözüm kabulleri olan (2.24) ifadeleri (2.11-2.13)'te verilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerde yerine koyulduğunda, aşağıdaki adi diferansiyel denklemler elde edilir:

$$W_1^{IV}(x_1) - \beta^4 W_1(x_1) = 0, \quad (2.25)$$

$$W_2''(x_2) + \gamma^2 W_2(x_2) = -\gamma^2 W_1(\eta L_1), \quad (2.26)$$

$$W_3^{IV}(x_1) - \beta^4 W_3(x_1) = 0. \quad (2.27)$$

Burada

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m_1}{E_1 I_1}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2 m_2}{E_2 A_2} \quad (2.28)$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

Yukarıda (2.24)'de verilen çözüm kabulleri (2.14-2.17) sınır şartlarını

$$W_1(0) = 0, \quad (2.29)$$

$$W_1''(0) = 0, \quad (2.30)$$

$$W_3(L_1) = 0, \quad (2.31)$$

$$W_3''(L_1) = 0 \quad (2.32)$$

şu şekline getirirken, geçiş şartlarını ise

$$m_2 \omega^2 \int_0^{L_2} [W_2(x_2) + W_1(\eta L_1)] dx_2 - M \omega^2 [W_1(\eta L_1) + W_2(L_2)] + E_1 I_1 [W_1'''(\eta L_1) - W_3'''(\eta L_1)] = 0 \quad (2.33)$$

$$W_2(0) = 0, \quad (2.34)$$

$$-M \omega^2 [W_1(\eta L_1) + W_2(L_2)] + E_2 A_2 W_2'(L_2) = 0, \quad (2.35)$$

$$W_1(\eta L_1) = W_3(\eta L_1), \quad (2.36)$$

$$W_1'(\eta L_1) = W_3'(\eta L_1), \quad (2.37)$$

$$W_1''(\eta L_1) = W_3''(\eta L_1) \quad (2.38)$$

şekline dönüştürür. Burada $W_i(x_i)$ üzerindeki çizgiler konum koordinatları x_i 'lere göre alınmış düz türevleri göstermektedir.

Adi diferansiyel denklemler (2.25-2.27)'in genel çözümleri basitçe

$$W_1(x_1) = C_1 \sin \beta x_1 + C_2 \cos \beta x_1 + C_3 \sinh \beta x_1 + C_4 \cosh \beta x_1, \quad (2.39)$$

$$W_2(x_2) = C_5 \sin \gamma x_2 + C_6 \cos \gamma x_2 - W_1(\eta L_1), \quad (2.40)$$

$$W_3(x_1) = C_7 \sin \beta x_1 + C_8 \cos \beta x_1 + C_9 \sinh \beta x_1 + C_{10} \cosh \beta x_1 \quad (2.41)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $C_1, \dots, C_{10}$, bilinmeyen 10 adet integral sabiti olup (2.29-2.38)'de verilen şartlar yardımıyla bulunabilirler.

Yukarıdaki (2.39-2.41)'de yer alan adi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin , sınır şartları (2.29-2.32)'de ve (2.33-2.38)'deki geçiş şartlarında yerlerine koyulmasıyla 10 adet bilinmeyen $C_1, \dots, C_{10}$ integral sabitinin tayini için, 10 adet denklemden oluşan bir homojen denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının bayağı olmayan bir çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gereklidir. Sonuçta bu homojen denklem takımı sayesinde elde edilen katsayılar matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle, Şekil 2.1'de görülen birleşik sistemin frekans denklemi aşağıdaki gibi 10x10'lık bir determinant yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \frac{1}{\alpha_{22} \bar{\beta}} (1 - \cos \gamma L_2) + \alpha_M \bar{\beta} \sin \gamma L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} \bar{\beta}^2 \sin \gamma L_2 - \cos \gamma L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sin \bar{\beta} & \cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{\alpha_{22} \bar{\beta}} \sin \gamma L_2 + \alpha_M \bar{\beta} \cos \gamma L_2 & \cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \alpha_{11} \bar{\beta}^2 \cos \gamma L_2 + \sin \gamma L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

Yukarıdaki karakteristik denklemde kullanılan kısaltmalar şunlardır:

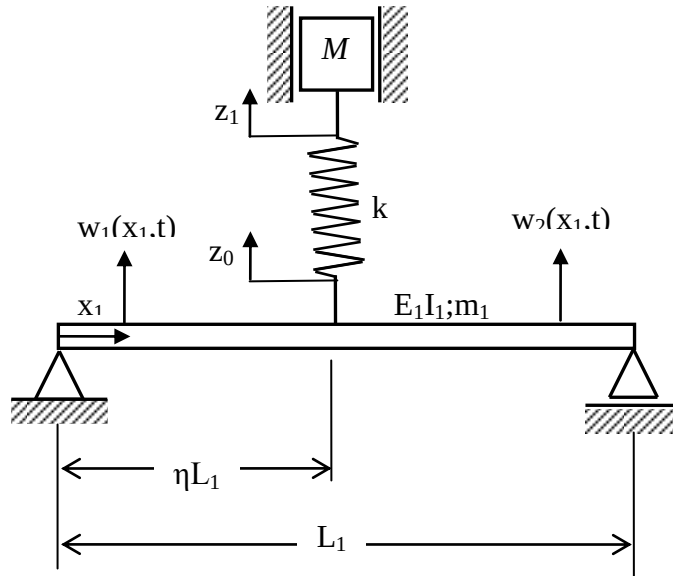
$$\bar{\beta} = \beta L_1, \quad \bar{m}_{21} = \frac{m_2 L_2}{m_1 L_1}, \quad \alpha_k = \frac{E_2 A_2 / L_2}{48 E_1 I_1 / L_1^3}, \quad \alpha_M = \frac{M}{m_1 L_1},$$

$$\gamma L_2 = \bar{\beta}^2 \sqrt{\bar{m}_{21} / 48 \alpha_k}, \quad \alpha_{11} = \frac{\alpha_M}{\sqrt{48 \alpha_k \bar{m}_{21}}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{48 \alpha_k \bar{m}_{21}}}, \quad (2.43)$$

Buradaki kısaltmaların bazıları, sayısal hesaplamalarda kullanılacak olan boyutsuz yay ve kütle parametreleridir. Çubuğun kütesinin kirişin kütesine oranı $\bar{m}_{21}$, çubuğun yay sabitinin kirişin yay sabitine oranı α_k , çubuğun ucunda bulunan kütleinin kirişin kütesine oranı α_M ile gösterilmiştir. $\bar{\beta}$ ve γL_2 boyutsuz frekans parametreleri iken α_{11} ve α_{22} ise hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla oluşturulan kısaltmalardır.

Transandantal denklem (2.42)'nin boyutsuz frekans parametresi $\bar{\beta}$ 'ye göre çözülmesi ve bulunan sonuçların (2.28)'de verilen ifadede yerine konularak Şekil 2.1'de gösterilen sistemin öz frekansları olan ω değerlerine ulaşılabilir.

Şekil 2.1'deki genel sistemin frekans denklemi elde edildikten sonra, sayısal sonuçların elde edilmesi ve bu sonuçların Şekil 2.1'de gösterilen mekanik sistemin limit durumları halinde oluşan sistemlerinkiyle karşılaştırılması akla gelmektedir. $\bar{m}_{21}$ 'in çubuk kütesinin kirişin kütesine oranı olduğunu göz önüne alındığında, $\bar{m}_{21} \rightarrow 0$ limit halinin, Şekil 2.3'de gösterilen basitleşmiş sisteme karşılık geldiği görülür.



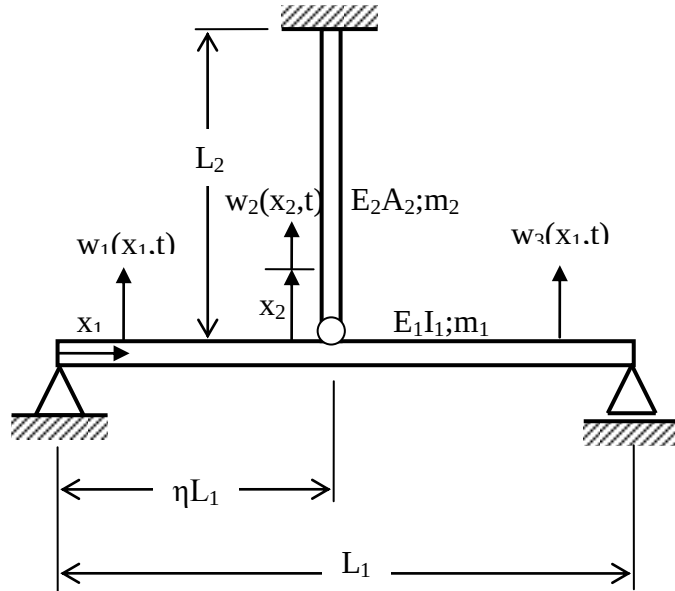
Şekil 2.3: $\bar{m}_{21} \rightarrow 0$ limit durumunda oluşan basitleşmiş sistem

Ancak bu sistemin frekans denkleminin, beklenildiği gibi , (2.42) denkleminde $\bar{m}_{21} \rightarrow 0$ limitini alarak elde etmenin mümkün olmadığı görülmüştür. Çalışmanın bütünlüğünü bozmamak için bu basitleşmiş sistemin frekans denklemi Ek A'da türetilmiştir.

2.2 Birleşik Sistemin Özel Hali İçin Frekans Denklemi

Daha önce üzerinde çalışılan sistemde, $M \rightarrow \infty$ limit hali, Şekil 2.4'de gösterilen sisteme karşılık gelmektedir. M kütlelerinin çok büyük değerleri için çubuğun serbest ucunun, sabit mesnetmiş gibi davranacağı açıktır. Bu bölümde bu sistemin frekans denklemi elde edilecektir.

Bu sistemin frekans denklemini, Şekil 2.1 gösterilen sistemin frekans denkleminde $M \rightarrow \infty$ koyarak elde etmek mümkün olmamaktadır.



Şekil 2.4: $M \rightarrow \infty$ limit halinde oluşan sistem

Bu sistemin frekans denklemini türetmek için daha önceki sınır ve geçiş şartları (2.14-2.23)'de, (2.18) ve (2.20) şartlarının sırasıyla aşağıdaki ifadelerle değiştirilmesi gereklidir:

$$m_2 \int_0^{L_2} [w_2(x_2, t) + w_1(\eta L_1, t)] dx_2 - E_1 I_1 [w_1'''(\eta L_1, t) - w_3'''(\eta L_1, t)] - E_2 A_2 w_2'(L_2, t) = 0 \quad (2.44)$$

$$w_2(L_2, t) + w_1(\eta L_1, t) = 0 \quad (2.45)$$

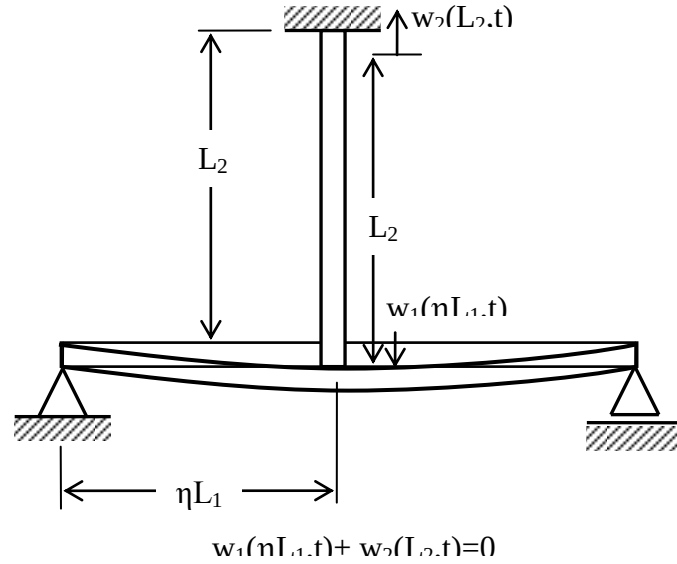
Yukarıda (2.45)'de verilen geçiş şartı $x_2=L_2$ 'de w_2 yer değiştirmesiyle $x_1=\eta L_1$ 'de w_1 yer değiştirmesinin toplamının sıfır olduğunu belirtmektedir. Bu şartın daha iyi anlaşılması için Şekil 2.5'te grafiksel yorumu verilmiştir.

Diğer sınır ve geçiş şartları değişmeden aynen kalır. (2.24)'de verilen çözüm kabulünün yeni şartlara uygulanması halinde,

$$m_2 \omega^2 \int_0^{L_2} [W_2(x_2) + W_1(\eta L_1)] dx_2 + E_1 I_1 [W_1''(\eta L_1) - W_3''(\eta L_1)] + E_2 A_2 W_2'(L_2) = 0, \quad (2.46)$$

$$W_2(L_2) + W_1(\eta L_1) = 0 \quad (2.47)$$

ifadeleri elde edilir.



Şekil 2.5: (2.45)'te verilen geçiş şartının grafiksel yorumu

(2.39-2.41)'deki genlik fonksiyonlarının ifadelerinin sınır ve geçiş şartlarında yerlerine yerleştirilmesi, C_1 - C_{10} gibi toplam 10 adet bilinmeyen integral sabitine karşılık 10 adet denklemden oluşan homojen bir denklem takımına götürür. Katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle frekans denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \frac{1}{\bar{\beta} \alpha_{22}} (1 - \cos \gamma L_2) + \frac{48 \alpha_k \gamma L_2}{\bar{\beta}^3} \cos \gamma L_2 \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin \gamma L_2 \\
\sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & 0 \\
\cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & 0 \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin \bar{\beta} & \cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} \\
\frac{1}{\bar{\beta} \alpha_{22}} \sin \gamma L_2 - \frac{48 \alpha_k \gamma L_2}{\bar{\beta}^3} \sin \gamma L_2 & \cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cos \gamma L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & \\
0 & -\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & \\
0 & \sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta &
\end{vmatrix} = 0 \quad (2.48)$$

Bundan sonraki bölümde, transandantal yapıda olan frekans denklemi (2.42)'in sayısal çözümlerinde kullanılacak başlangıç değerlerinin bulunabilmesi ve diğer taraftan da elde edilen sonuçların mukayese edilebilmesi bakımından Şekil 2.1'deki sistemin temel frekansı için yaklaşık bir formül türetilenektir.

2.3 Temel Frekans İçin Dunkerley Tabanlı Yaklaşık Bir Formül

Dunkerley yöntemi çerçevesinde, Şekil 2.1'deki mekanik sistem, Şekil 2.6'da gösterilen üç alt sistemin toplamı olarak düşünülebilir. Şekil 2.6a'da gösterilen sadece basit mesnetlenmiş kirişten oluşan sistemin temel frekansı ω_{11} 'in aşağıdaki gibi yazılabileceği açıktır:

$$\omega_{11} = \bar{\beta}_{11}^2 \sqrt{\frac{E_1 I_1}{m_1 L_1^4}}, \quad \bar{\beta}_{11} = \pi \quad (2.49)$$

Laura ve diğerlerinin [9]'daki çalışmasında geçen daha genel bir ifadenin kullanılmasıyla, Şekil 2.6b'de gösterilen ikinci alt sistemin temel frekansının bulunacağı frekans denkleminin

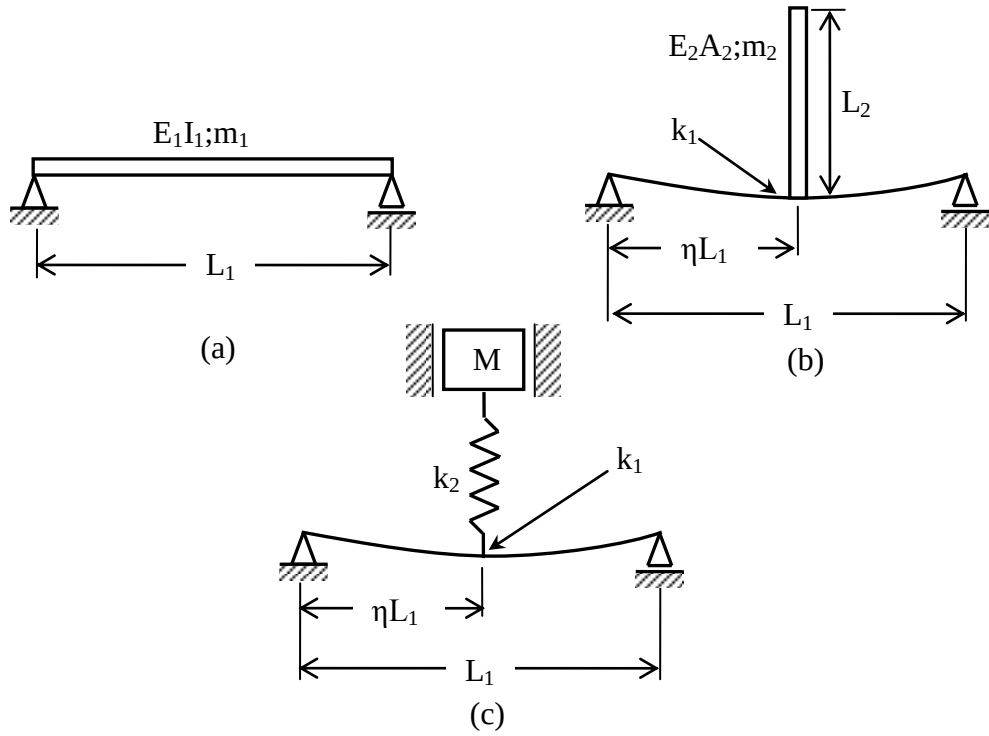
$$\tan \bar{\beta}_{22} - \frac{1}{16 \alpha_k \bar{\beta}_{22} \eta^2 (1 - \eta)^2} = 0 \quad (2.50)$$

şeklinde olacağı gösterilebilir.

Bu transandantal denklem, frekans parametresi $\bar{\beta}_{22}$ 'ye göre çözüldüğünde, ikinci alt sistemin temel frekansı basitçe

$$\omega_{22} = \bar{\beta}_{22} \sqrt{\frac{E_2 A_2}{m_2 L_2^2}} \quad (2.51)$$

şeklinde bulunabilir.



Şekil 2.6: Birleşik sistem için düşünülen üç alt sistem

Şekil 2.6c'de gösterilen üçüncü alt sistemin temel frekansı şöyle ifade edilebilir:

$$\omega_{33} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{M(k_1 + k_2)}} \quad (2.52)$$

Bu formülde aşağıdaki yay sabiti tanımları kullanılmıştır:

$$k_1 = \frac{3E_1 I_1}{\eta^2 (1 - \eta)^2 L_1^3}, \quad (2.53)$$

$$k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2}. \quad (2.54)$$

Dunkerley metoduna göre Şekil 2.1'deki sistemin temel frekansı ω_1 için

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} \quad (2.55)$$

yaklaşık ifadesi kullanılabilir.

(2.49), (2.51) ve (2.52)'de bulunan temel frekanslar, (2.55)'e yerleştirilip gerekli düzenlemeler yapılırsa Şekil 2.1'deki sistemin temel frekansı için

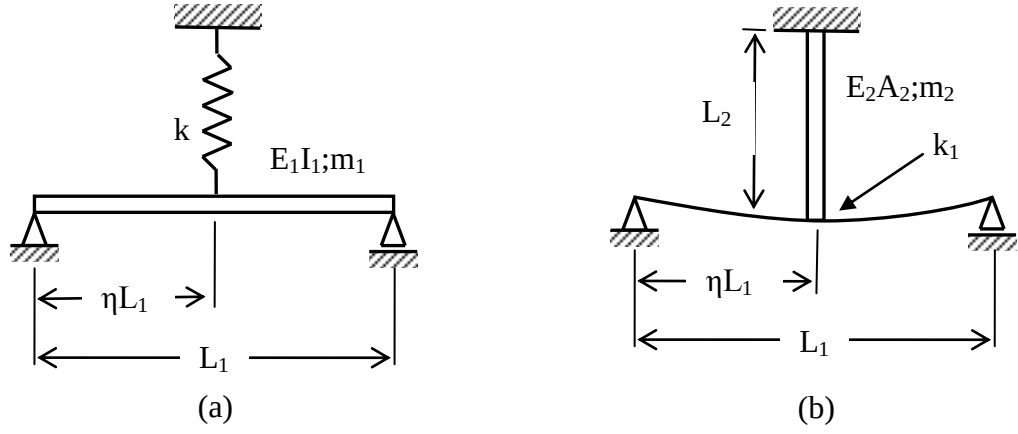
$$\omega_1 = \frac{\bar{\beta}_{11}^2}{\sqrt{1 + \frac{\bar{\beta}_{11}^4}{\bar{\beta}_{22}^2} \cdot \frac{\bar{m}_{21}}{48\alpha_k} + \alpha_M \bar{\beta}_{11}^4 \left(\frac{1}{48\alpha_k} + \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{3} \right)}} \omega_0 \quad (2.56)$$

yaklaşık ifadesi elde edilir. Burada kullanılan ω_0 kısaltması aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\omega_0^2 = \frac{E_1 I_1}{m_1 L_1^4}. \quad (2.57)$$

Dikkat edileceği üzere $\bar{\beta}_{22}$ değerleri, (2.50) denkleminin çeşitli η ve α_k değerleri için bulunmuş ilk köklerini temsil etmektedir.

Şekil 2.4'de gösterilen sistem için de Dunkerley metodunun temel alındığı yaklaşık değer veren bir formül çıkarılması akla uygun gelebilir. Bu amaçla bu mekanik sistem Şekil 2.7'de gösterildiği gibi iki alt sistemin toplamı olarak düşünülebilir. Fakat bu iki alt sistemin temel frekansının, analitik bir formda yazılması mümkün değildir. Onun yerine, ilk alt sistemin temel frekansı, 8x8'lik bir determinantın sıfıra eşitlenmesiyle bulunan denklemin sayısal çözümüyle elde edilebilir. Bu iki alt sistemde Dunkerley metodunun alışılmış anlamda uygulanmasının söz konusu olmadığı görülmektedir. Bu yüzden, bu iki alt sistemin frekans denklemleri Ek B'de çıkarılmıştır. Böylece bu alanda çalışan araştırmacıların ve mühendislerin bu denklemlerden yararlanması amaçlanmıştır. Diğer yandan Dunkerley formülünün dolaylı yoldan kullanılmasıyla bulunan sayısal değerler, Şekil 2.4'deki sistemin (2.48) verilen frekans denkleminin sayısal çözümünde başlangıç değerleri olarak kullanılmıştır.



Şekil 2.7 : Birleşik sistemin özel hali için söz konusu olan iki alt sistem.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölüm, önceki bölümde çıkarılan frekans denklemlerinin sayısal sonuçlarının bulunmasına ve değerlendirilmesine ayrılmıştır. $\overline{m}_{21} = 0$ alınmasının, eksenel titreşen çubuk şeklinde modellenin helisel yayın kütlelerinin ihmal edildiği duruma karşılık geldiği hatırlandığında, Şekil 2.2’de verilen sistemin frekans denkleminde bulunan sonuçların helisel yayın kütlelerinin göz önüne alındığı sistemin sonuçlarıyla karşılaştırılmasının akla gelmesi doğaldır.

Şekil 2.1’de gösterilen titreşim sisteminin, boyutsuz temel frekans parametresi $\overline{\beta}_1$ için, sistemin boyutsuz kütle ve yay parametrelerini temsil eden α_M , $\overline{m}_{21}$ ve α_k ’nın çeşitli değer takımları için elde edilen sayısal değerleri Tablo 1’de verilmiştir. Ele alınan sistemde boyuna titreşen çubuğun, kirişe tam orta noktasında bağlandığı yani $\eta=0.5$ seçildiği kabul edilmiştir.

Tablo 3.1’deki her hücre içersinde üç adet sayısal sonucun yer aldığı görülmektedir. “P” ile gösterilmiş olan ilk sıradaki değerler, (2.42)’de verilen frekans denkleminin $\overline{m}_{21} \rightarrow 0$ limit hali için çözümünden elde edilmiştir. Bu sonuçlar, Şekil 2.2’de gösterilen sistemin (A.29)’da verilen frekans denkleminde bulunan sonuçlarla tamamen aynıdır. “F” ile gösterilmiş olan ikinci sıradaki değerler, FINES [11] adlı sonlu elemanlar paketiyle bulunmuş olan sonuçlardır. Nihayet, en sonda yer alan ve “D” ile gösterilen değerler ise Dunkerley metoduyla yaklaşık formül (2.56)’dan elde edilmiş olan yaklaşık sonuçlardır.

Bütün sayısal hesaplamalar MATLAB programı yardımıyla gerçekleştirilmiş olup program listeleri Ek E’de verilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen çözümler için, boyuna titreşen çubuk ve eğilme kirişinin her biri 10 adet elemana ayrılmıştır. Eğilme titreşimleri yapan kiriş, FINES eleman kütüphanesinde yer alan iki boyutlu ve iki düğümlü kiriş elemanı olan 2BEM02 elemanı ile modellenmiştir. Boyuna titreşen elastik çubuğun modellenmesi ise iki boyutlu ve iki düğümlü çubuk elemanı 2BAR02 elemanı kullanılarak yapılmıştır.

Tablo 3.1: Şekil 2.1’deki sistemin boyutsuz $\bar{\beta}_1$ temel frekans parametreleri

α_M	$\bar{m}_{21}$		α_k							
			0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
0.5	0	P	2.304807	2.464754	2.523090	2.552556	2.570202	2.581918	2.605164	2.622368
		F	2.304808	2.464756	2.523092	2.552558	2.570204	2.581921	2.605166	2.622370
		D	2.215370	2.381290	2.452823	2.492946	2.518671	2.536582	2.574414	2.604735
	0.01	P	2.299620	2.458815	2.516891	2.546237	2.563815	2.575489	2.598656	2.615808
		F	2.299621	2.458816	2.516893	2.546239	2.563817	2.575491	2.598658	2.615811
		D	2.210602	2.375932	2.447165	2.487105	2.512706	2.530528	2.568165	2.598320
	0.1	P	2.254997	2.408078	2.464083	2.492474	2.509521	2.520861	2.543419	2.560169
		F	2.255002	2.408082	2.464087	2.492478	2.509524	2.520865	2.543422	2.560171
		D	2.169873	2.330265	2.399002	2.437426	2.462007	2.479096	2.515119	2.543915
1	0	P	1.970968	2.143717	2.215896	2.255032	2.279459	2.296118	2.330261	2.356506
		F	1.970969	2.143718	2.215897	2.255033	2.279460	2.296119	2.330262	2.356507
		D	1.925386	2.094787	2.171328	2.215370	2.244068	2.264275	2.307603	2.343000
	0.01	P	1.968651	2.140823	2.212706	2.251669	2.275984	2.292565	2.326543	2.352658
		F	1.968652	2.140824	2.212707	2.251670	2.275985	2.292566	2.326544	2.352659
		D	1.923017	2.091958	2.168245	2.212125	2.240712	2.260837	2.303979	2.339214
	0.1	P	1.948259	2.115502	2.184894	2.222403	2.245778	2.261705	2.294315	2.319357
		F	1.948261	2.115503	2.184895	2.222405	2.245780	2.261706	2.294316	2.319358
		D	1.902326	2.067328	2.141448	2.183954	2.211590	2.231019	2.272591	2.306461
1.5	0	P	1.790122	1.958421	2.032281	2.073575	2.099871	2.118056	2.156012	2.185862
		F	1.790122	1.958422	2.032282	2.073576	2.099872	2.118056	2.156013	2.185863
		D	1.760861	1.925386	2.001207	2.045329	2.074290	2.094787	2.139047	2.175538
	0.01	P	1.788705	1.956604	2.030237	2.071388	2.097586	2.115700	2.153503	2.183224
		F	1.788705	1.956605	2.030237	2.071389	2.097587	2.115701	2.153504	2.183225
		D	1.759343	1.923529	1.999155	2.043150	2.072023	2.094721	2.136564	2.172922
	0.1	P	1.776138	1.940556	2.012229	2.052153	2.077519	2.095034	2.131526	2.160160
		F	1.776139	1.940557	2.012230	2.052154	2.077520	2.095035	2.131527	2.160161
		D	1.745974	1.907205	1.981147	2.024051	2.052161	2.072028	2.114849	2.150067
2	0	P	1.670013	1.832352	1.905377	1.946881	1.973611	1.992245	2.031574	2.062949
		F	1.670014	1.832352	1.905377	1.946882	1.973612	1.992246	2.031575	2.062950
		D	1.648932	1.807931	1.882007	1.925386	1.953980	1.974277	2.018282	2.054758
	0.01	P	1.669018	1.831059	1.903907	1.945296	1.971945	1.990521	2.029716	2.060978
		F	1.669018	1.831060	1.903908	1.945297	1.971946	1.990521	2.029717	2.060978
		D	1.647839	1.806574	1.880497	1.923775	1.952297	1.972541	2.016425	2.052791
	0.1	P	1.660155	1.819590	1.890895	1.931283	1.957236	1.975302	2.013352	2.043632
		F	1.660156	1.819591	1.890896	1.931284	1.957237	1.975302	2.013353	2.043633
		D	1.638161	1.794589	1.867170	1.909570	1.937473	1.957256	2.000080	2.035501
2.5	0	P	1.581695	1.738471	1.810043	1.851138	1.877794	1.896474	1.936190	1.968184
		F	1.581695	1.738471	1.810043	1.851138	1.877794	1.896474	1.936190	1.968185
		D	1.565439	1.719343	1.791542	1.833994	1.862052	1.882007	1.925386	1.961469
	0.01	P	1.580938	1.737482	1.808912	1.849912	1.876501	1.895131	1.934733	1.966627
		F	1.580939	1.737483	1.808912	1.849913	1.876501	1.895132	1.934734	1.966628
		D	1.564595	1.718287	1.790361	1.832731	1.860729	1.880640	1.923918	1.959909
	0.1	P	1.574193	1.728686	1.798866	1.839038	1.865042	1.883239	1.921852	1.952880
		F	1.574194	1.728687	1.798867	1.839039	1.865043	1.883240	1.921853	1.952880
		D	1.557106	1.708930	1.779904	1.821547	1.849032	1.868559	1.910950	1.946144

Tablo 3.1: Şekil 2.1’deki sistemin boyutsuz $\bar{\beta}_1$ temel frekans parametreleri (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$		α_k							
			0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
3	0	P	1.512662	1.664519	1.734528	1.775003	1.801387	1.819945	1.859604	1.891777
		F	1.512663	1.664519	1.734528	1.775004	1.801388	1.819945	1.859605	1.891778
		D	1.499554	1.648932	1.719343	1.760861	1.788352	1.807931	1.850572	1.886128
	0.01	P	1.512059	1.663726	1.733617	1.774013	1.800340	1.818855	1.858416	1.890501
		F	1.512059	1.663727	1.733618	1.774014	1.800341	1.818856	1.858417	1.890502
		D	1.498874	1.648076	1.718381	1.759829	1.787271	1.806813	1.849368	1.884846
	0.1	P	1.506667	1.656661	1.725513	1.765210	1.791038	1.809181	1.847882	1.879203
		F	1.506668	1.656661	1.725513	1.765211	1.791039	1.809181	1.847883	1.879203
		D	1.492819	1.640464	1.709845	1.750679	1.777685	1.796900	1.838698	1.873493
5	0	P	1.333816	1.471095	1.535627	1.573463	1.598380	1.616040	1.654204	1.685641
		F	1.333816	1.471095	1.535628	1.573464	1.598380	1.616041	1.654204	1.685642
		D	1.326716	1.462473	1.527102	1.565439	1.590925	1.609128	1.648932	1.682300
	0.01	P	1.333496	1.470671	1.535136	1.572926	1.597808	1.615443	1.653545	1.684926
		F	1.333496	1.470671	1.535137	1.572926	1.597809	1.615443	1.653546	1.684927
		D	1.326347	1.462002	1.526570	1.564865	1.590322	1.608503	1.648255	1.681575
	0.1	P	1.330628	1.466876	1.530745	1.568122	1.592704	1.610110	1.647673	1.678558
		F	1.330628	1.466876	1.530745	1.568122	1.592704	1.610111	1.647674	1.678559
		D	1.323050	1.457803	1.521825	1.559754	1.584949	1.602932	1.642223	1.675124
10	0	P	1.123153	1.240869	1.297010	1.330280	1.352363	1.368112	1.402451	1.431100
		F	1.123154	1.240870	1.297011	1.330280	1.352364	1.368112	1.402452	1.431101
		D	1.120111	1.237115	1.293256	1.326716	1.349033	1.365009	1.400057	1.429566
	0.01	P	1.123018	1.240689	1.296801	1.330049	1.352117	1.367853	1.402164	1.430786
		F	1.123019	1.240690	1.296801	1.330049	1.352118	1.367854	1.402165	1.430786
		D	1.119953	1.236911	1.293024	1.326466	1.348768	1.364734	1.399758	1.429245
	0.1	P	1.121806	1.239074	1.294920	1.327980	1.349909	1.365539	1.399592	1.427970
		F	1.121806	1.239075	1.294920	1.327980	1.349910	1.365539	1.399592	1.427970
		D	1.118533	1.235085	1.290948	1.324220	1.346401	1.362274	1.397082	1.426370

Beklenildiği gibi, her hücrenin üçüncü sırasında verilmiş Dunkerley esaslı yaklaşık değerler ilk sıradaki değerlerden küçüktür. Gerçekten de Dunkerley metoduyla bulunan değerlerin, gerçek değerlerden her zaman daha ufak olduğu bilinmektedir. Bu değerler, hücrelerin ilk sıralarında verilen ve (2.42) denkleminin sayısal çözümleri için çok uygun başlangıç değerleri oluştururlar. Doğaldır ki, $\bar{m}_{21} = 0.01$ için bulunan değerler, $\bar{m}_{21} = 0$ alınan kütlesiz yay hali için bulunan değerlerden daha küçüktür. Bunun nedeni, bu sonuçların yay kütlesinin göz önüne alındığı duruma karşılık gelmesidir. Diğer yandan $\bar{m}_{21} = 0.1$ için bulunan değerler, $\bar{m}_{21} = 0.01$ alınması sonucunda bulunan değerlerden daha küçüktür, çünkü helisel yayın kütlesi 10 kez artırılmıştır.

“P” ile gösterilen değerlerin, kütleli yay haline yani , $\overline{m}_{21} = 0$ haline karşı gelen ilk satırdaki değerlere göre bağıl hataları, Tablo 3.1’i daha da karmaşık bir hale getirmemek için Tablo 3.2’de ayrı olarak verilmiştir.

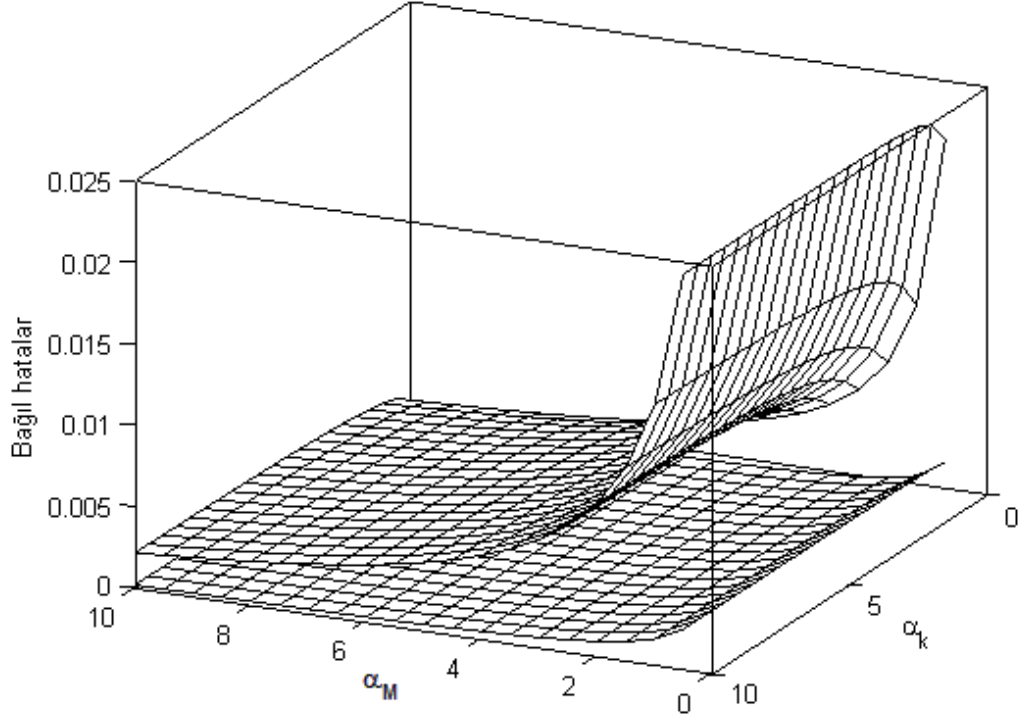
Tablo 3.2: $\overline{m}_{21} = 0$ haline göre bağıl hatalar

	α_k							
α_M	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
0.5	0.002251 0.021611	0.002410 0.022995	0.002457 0.023387	0.002476 0.023538	0.002485 0.023609	0.002490 0.023648	0.002498 0.023701	0.002502 0.023719
1	0.001176 0.011522	0.001350 0.013162	0.001440 0.013991	0.001491 0.014469	0.001524 0.014776	0.001547 0.014987	0.001596 0.015426	0.001633 0.015764
1.5	0.000792 0.007812	0.000928 0.009122	0.001006 0.009867	0.001055 0.010331	0.001088 0.010644	0.001112 0.010869	0.001164 0.011357	0.001207 0.011758
2	0.000596 0.005903	0.000706 0.006965	0.000772 0.007601	0.000814 0.008012	0.000844 0.008297	0.000865 0.008504	0.000915 0.008969	0.000955 0.009364
2.5	0.000479 0.004743	0.000569 0.005629	0.000625 0.006175	0.000662 0.006537	0.000689 0.006791	0.000708 0.006979	0.000753 0.007405	0.000791 0.007776
3	0.000399 0.003963	0.000476 0.004721	0.000525 0.005197	0.000558 0.005517	0.000581 0.005745	0.000599 0.005914	0.000639 0.006303	0.000674 0.006647
5	0.000240 0.002390	0.000288 0.002868	0.000320 0.003179	0.000341 0.003394	0.000358 0.003551	0.000369 0.003669	0.000398 0.003948	0.000424 0.004202
10	0.000120 0.001199	0.000145 0.001447	0.000161 0.001611	0.000174 0.001729	0.000182 0.001815	0.000189 0.001881	0.000205 0.002039	0.000219 0.002187

Tablo 3.2’nin herhangi bir hücrenin ilk satırında yer alan değerler $\overline{m}_{21} = 0.01$ alınması durumuna karşı gelirken, ikinci satırdakiler ise $\overline{m}_{21} = 0.1$ haline karşı gelmektedir. $\overline{m}_{21} = 0.1$ alındığı zaman oluşan hata değerleri $\overline{m}_{21} = 0.01$ olduğunda bulunan sonuçlardan yaklaşık olarak 10 kat daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca Tablo 3.2, aynı bir sütun boyunca aşağıya inildiğinde yani, α_k sabit tutulup α_M büyütüldüğünde, hataların küçüleceği gerçeğini açıkça ortaya koymaktadır. Bunun tam tersi olarak α_M sabit tutulup α_k büyütülürse, bu kez hatalar büyümektedir.

Tablo 3.2’nin incelenmesiyle özellikle küçük α_M ve büyük α_k bölgelerinde Şekil 2.1’de aksel titreşen çubuk şeklinde modellenen helisel yayın, kütlelerinin ihmal edilmesinin büyük hatalara yol açacağı sonucuna ulaşılabilir. Şekil 3.1 yukarda sözü edilmiş olan bağıl hataları görsel olarak sunarak, α_M ve α_k ’nın bu hatalar üzerindeki etkisinin daha iyi ortaya konulmasına yardımcı olabilir. Bu çerçeveden olarak Şekil 3.1’de, çeşitli kütle parametresi α_M ve yay parametresi α_k değerleri için bağıl hata yüzeyleri çizilmiştir. Altındaki yüzey $\overline{m}_{21} = 0.01$ değeri için çizilirken üsteki yüzey $\overline{m}_{21} = 0.1$ haline karşı gelmektedir. Bu yüzeyler, $\overline{m}_{21}$ ve bağıl hata arasında yaklaşık

olarak lineer bir ilişki olduğunu ortaya koymaktadır. Şekil 3.1'den de görüleceği üzere, küçük α_M ve büyük α_k bölgelerinde hataların ciddi sayılabilecek değerlere ulaşmaktadır.



Şekil 3 1: Çeşitli yay ve kütle parametreleri için bağıl hata yüzeyleri

İkinci bir sayısal uygulama olarak da Şekil 2.4'te gösterilen sistemin temel frekans parametresi $\bar{\beta}_1$ değerleri, çeşitli yay parametresi α_k 'lar ve $\eta=0.5$ için Tablo 3.3'de verilmiştir. İlk sıradaki değerler $\bar{m}_{21} = 0$ için (B.27) denkleminde elde edilmiştir. Sonraki iki değer sırasıyla $\bar{m}_{21} = 0.01$ ve 0.1 için (2.48)'de verilen denklemin $\bar{\beta}_1$ 'e göre ilk köklerin elde edilmesiyle bulunan sonuçlardır. Bu iki değer üzerinde, bunların $\bar{m}_{21} = 0$ durumuna göre hesaplanmış olan bağıl hataları, bir miktar sağa kaydırılmış olarak verilmiştir. Geri kalan üç değer sırasıyla $\bar{m}_{21} = 0, 0.01$ ve 0.1 için FINES paketiyle bulunmuş sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlardır. FINES sonuçlarının (B.27) denkleminde bulunanlardan bir miktar büyük olması akla yatkındır. Daha öncekilere benzer olarak, $\bar{m}_{21} = 0.1$ için hesaplanmış olan hatalar $\bar{m}_{21} = 0.01$ için bulunanlardan yaklaşık olarak 10 kat daha büyüktür.

Tablo 3.3'den açıkça görüleceği üzere, helisel yayın kütlesi, frekans parametrelerinin sayısal sonuçlarını bazı parametre bölgelerinde hayli etkilemektedir. Helisel yayın

kütlesinin göz önüne alınması, beklenildiği gibi daha küçük frekans parametresi değerlerine yol açmaktadır.

Tablo 3.3: Şekil 2.4’deki sistemin boyutsuz $\bar{\beta}_1$ temel frekans parametreleri ve bağlı hata değerleri

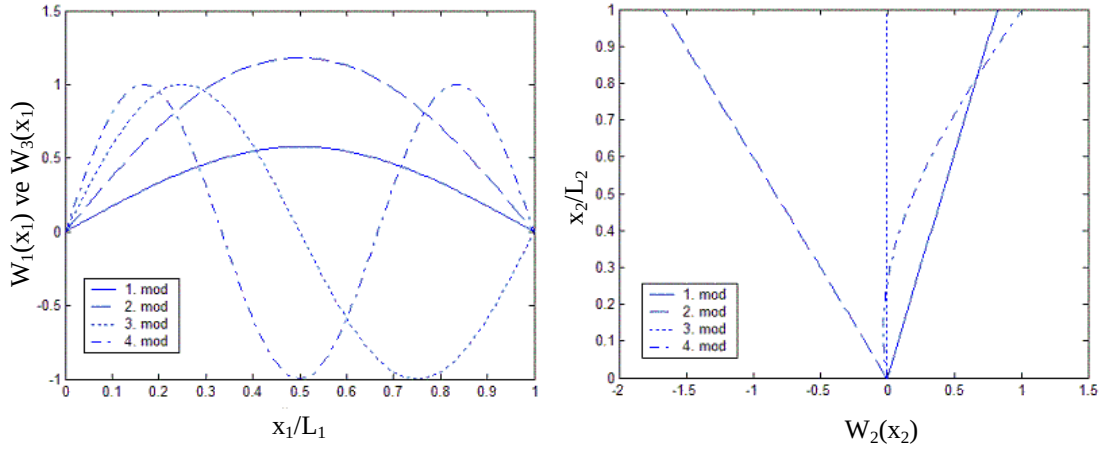
α_k							
0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
3.470452	3.722474	3.928871	4.104587	4.258048	4.394514	4.827545	5.513735
0.001642	0.001616	0.001592	0.001568	0.001544	0.001521	0.001430	0.001218
3.464752	3.716457	3.922617	4.098152	4.251472	4.387831	4.820643	5.507019
0.016407	0.015975	0.015687	0.015435	0.015198	0.014969	0.014098	0.012092
3.413511	3.663008	3.867240	4.041234	4.193334	4.328731	4.759488	5.447061
3.470470	3.722499	3.928905	4.104629	4.258097	4.394571	4.827636	5.513912
3.464770	3.716482	3.922650	4.098193	4.251520	4.387887	4.820733	5.507194
3.413553	3.663049	3.867284	4.041284	4.193391	4.328794	4.759580	5.447229

Tablo 3.3 şu gerçeği göstermektedir ki, helisel yayın kütlesinin ihmalinden kaynaklanan hatalar α_k ’nın büyümesi halinde azalmaktadır. Bunun ise, Tablo 3.2’de görülen duruma zıt bir eğilim ortaya koyduğu açıktır.

Buraya kadar yapılan tüm sayısal uygulamalarda (2.42) ve (2.48)’de verilen transandantal denklemlerinin ilk kökleri bulunmuştur. Bulunan bu değerler $\bar{\beta}_1$ boyutsuz temel frekans parametresinin değerleridir. Tezde metnin bütünlüğü bozmamak açısından Ek D’de yer alan Tablo D.1 ve Tablo D.2’de sırasıyla Şekil 2.1 ve Şekil 2.4’deki birleşik sistemlerin ilk 5 boyutsuz frekans parametresi $\bar{\beta}$ değerleri, çeşitli boyutsuz yay ve kütle parametresi kombinasyonları için bir araya toplanmıştır. Bu değerler (2.28)’de verilen ifadede yerine konarak sistemlerin ilk 5 doğal frekans değerleri kolayca bulunabilir. Bu tablolardaki sayısal değerlerin bu ve benzer konularda çalışan mühendis ve konstrüktörlere yararlı olacağı umulmaktadır.

Tablo D.1 ve Tablo D.2’de verilen $\bar{\beta}$ değerleri, ait oldukları (2.42) ve (2.48)’de verilen transandantal denklemlerde yerlerine konularak (2.39-2.41)’de ifadeleri verilen genlik fonksiyonlarının bilinmeyen C_1 - C_{10} katsayıları elde edilebilir. Böylece konum koordinatları x_1 ve x_2 ’nin çeşitli değerleri için genlik fonksiyonlarının alacağı değerler bulunabilir. Bu sonuçlar kullanılarak sistemlerin mod şekilleri çizilebilir. Şekil 3.2’de $\eta=0.5$, $\alpha_k=0.5$, $\alpha_M=0.5$ ve $\bar{m}_{21} = 0.01$ boyutsuz parametre değerleri için Şekil 2.1’de verilen birleşik sistemin ilk 4 mod şekli çizilmiştir. Sol taraftaki grafikte yatay eksen x_1/L_1 boyutsuz pozisyon koordinatlarına karşı dikey eksen de eğilme

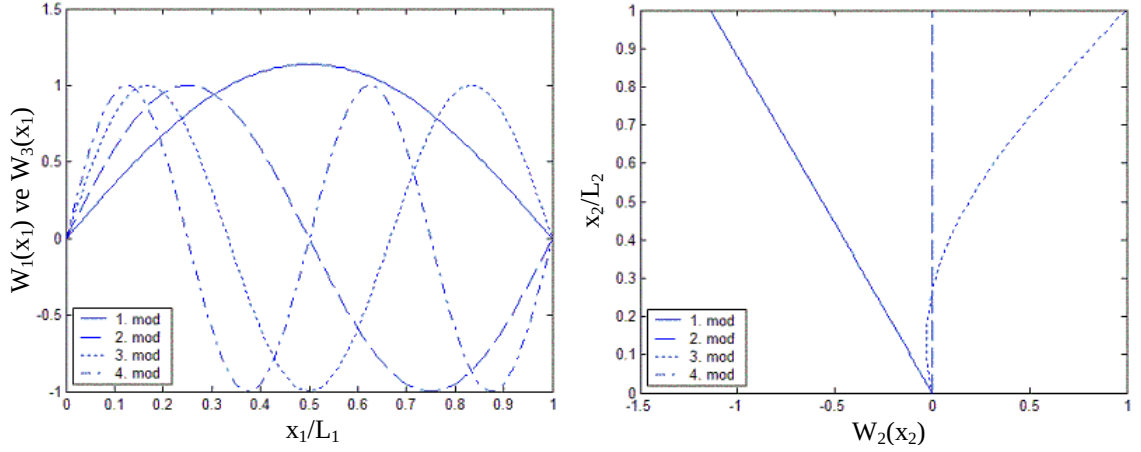
titreşimleri yapan kirişin $W_1(x_1)$ ve $W_3(x_3)$ genlik fonksiyonlarının alacağı değerler gösterilmiştir. Sağda yer alan grafikte ise dikey ekseninde x_2/L_2 boyutsuz pozisyon koordinatları değerleri için yatay ekseninde de eksenel titreşim yapan çubuğun $W_2(x_2)$ genlik fonksiyonlarının değişimi çizilmiştir.



Şekil 3.2: Birleşik sistemin ilk 4 mod şekli

Yukarıda verilen mod şekilleri arasında en ilgi çekici durum 3. modda meydana gelmektedir. Mod şekilleri çizilirken $\eta=0.5$ alındığı için $x_1/L_1=0.5$ noktası çubuk-kiriş bağlantı noktasının konumunu vermektedir. Şekil 3.2’de soldaki grafik incelenecek olursa, eğilme titreşimi yapan çubuğun $x_1/L_1=0.5$ konumunda, bir düğüm noktası olduğu görülmektedir. Bu noktaya bağlı olan çubuk da, bu noktanın düğüm noktası olmasından dolayı hareketsiz kalmaktadır.

1. ve 2. modda çubuğun yaptığı titreşimler de incelemeye değerdir. 1. modda kirişin yaptığı harekete uygun olarak, boyuna titreşen çubuk, kirişin yaptığı yer değiştirmelerle aynı yönde yer değiştirmeler yapmaktadır. 2. mod şeklinde ise kirişin yaptığı yer değiştirmeler 1. moda benzerken, boyuna titreşen çubuğun yer değiştirmeleri bu kez kirişin yaptığı yer değiştirmelere göre zıt yöndedir. Şekil 3.3’de $\eta=0.5$, $\alpha_k=0.5$, ve $\overline{m}_{21} = 0.01$ boyutsuz parametre değerleri için Şekil 2.4’de verilen birleşik sistemin ilk 4 mod şekline yer verilmiştir. Şekil 3.2’ye benzer şekilde sol taraftaki grafikte yatay ekseninde x_1/L_1 boyutsuz pozisyon koordinatlarına karşı dikey eksen de eğilme titreşimleri yapan kirişin $W_1(x_1)$ ve $W_3(x_3)$ genlik fonksiyonlarının alacağı değerler gösterilmiştir. Sağda yer alan grafikte ise dikey ekseninde x_2/L_2 boyutsuz pozisyon koordinatları değerleri için yatay ekseninde de eksenel titreşim yapan çubuğun $W_2(x_2)$ genlik fonksiyonlarının değişimi çizilmiştir.



Şekil 3. 3: Birleşik sistemin özel halinin ilk 4 mod şekli

Şekil 3.3'ün incelenmesi (2.45)'de verilen geçiş şartını bir kere daha ortaya koymaktadır. Her mod için kirişin $x_1=\eta L_1$ noktasında yaptığı yer değiştirmeye boyuna titreşen çubuğun $x_2=L_2$ 'de yaptığı yer değiştirmelerin toplamı sıfır olmaktadır. Bunun yanında 2. ve 4. modlarda, kiriş üzerinde çubuk ve kirişin bağlandığı konumda bir düğüm noktası oluşmaktadır. Bu yüzden iki modda boyuna titreşmesi gereken çubuk hareketsiz kalmaktadır. Bu iki mod şekli, boyuna titreşen çubuğun yer değiştirmeleri gösteren sağdaki grafikte birbirleriyle çakışmıştır.

4. SONUÇLAR

Teknik literatürde, günlük hayatta karşılaşılan birçok gerçek sistemin, üzerinde helisel yay-kütle sistemleri olan ve çeşitli şekillerde desteklenmiş olan Bernoulli-Euler çubuğu şeklinde modellendiğine şahit olunmaktadır. Ancak bu uygulamalarda genelde, helisel yayın kütesinin ihmal edildiği görülmektedir.

Bu çalışmada incelenen sistem, basit mesnetlenmiş bir eğilme çubuğu ile bunun üzerine eklenmiş bir helisel yay ve kütlelen oluşmaktadır. Helisel yayın kütesinin hesaba katılması amacıyla helisel yay, boyuna titreşen elastik bir çubuk olarak modellenmiştir. Çalışmanın ana amacı, yukarda sözü edilen iki sürekli sistemden oluşan birleşik sistemin frekans denkleminin çıkarılmasıdır. Buna ek olarak boyuna titreşen çubuğun ucundaki kütlelen sonsuz büyüklükte alınmasıyla oluşan indirgenmiş sistemin frekans denklemi de türetilmiştir.

Elde edilen frekans denklemleri, fiziksel parametrelerin çeşitli kombinasyonları için sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal sonuçların kütesiz yay hali ile karşılaştırılması, kütlelen ihmal edilmesinin fiziksel parametrelerin bazı kombinasyonlarında kayda değer hatalara yol açtığını açıkça göstermiştir Bunun sonucu olarak, birleşik sistemin öz frekanslarının daha gerçekçi elde edilmesi bakımından helisel yayın kütesinin göz önüne almasının gerekliliği ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] **Gürgöze M.**, 1996. On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, **190**, 149-162.
- [2] **Qiao H., Li Q. S. and Li G. O.**, 2002. Vibratory characteristic of non-uniform Euler-Bernoulli beams carrying an arbitrary number of spring-mass systems, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, 725-743.
- [3] **Wu J. J.**, 2002. Alternative approach for free vibration of beams carrying a number of two-degree of freedom spring-mass systems, *Journal of Structural Engineering*, **128**, 1604-1616.
- [4] **Chen D. W. and Wu J. S.**, 2002. The exact solutions for the natural frequencies and mode shapes of non-uniform beams with multiple spring-mass systems. *Journal of Sound and Vibration*, **255**, 299-232.
- [5] **Wu, J. J. and Whittaker A. R. ,** 1999. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-degree spring-mass systems, *Journal of Sound and Vibration*, **227**(12), 361-381.
- [6] **Gürgöze M.**, 1996. On the eigenfrequencies of cantilevered beams carrying a tip mass and spring-mass in-span, *International Journal of Mechanical Sciences*, **38**(12), 1295-1306.
- [7] **Gürgöze M.**, 2005. On the eigenfrequencies of a cantilever beam carrying a tip spring-mass system with mass of the helical spring considered, *Journal of Sound and Vibration*, **282**, 1221-1230.
- [8] **James, M. L., Smith, G. M., Wolford, J. C. And Whaley, P. W.**, 1994. Vibration of Mechanical and Structural Systems, HarperCollins College Publishers, New York.

- [9] **Laura, P. A. A., Reyes J. A. and Rossi R. E.**, 1974. Analysis of a cable-like system suddenly stopped at one end, *Journal of Sound and Vibration*, **37**, 195-204.
- [10] **Şanlıtürk, K. Y.**, FINES: Finite Element for Structures, Versiyon 2004, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye.

EKLER

EK A

Şekil 2.3’de gösterilen sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^{\eta L} \dot{w}_1^2(x, t) dx + \frac{1}{2} m \int_{\eta L}^L \dot{w}_2^2(x, t) dx + \frac{1}{2} M \dot{z}_1^2 \quad (A.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada karmaşıklığı önlemek amacıyla x_1 , m_1 ve L_1 için kullanılan 1 indisine yer verilmemiştir. Sistemin potansiyel enerjisi de şu şekilde elde edilir:

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^{\eta L} w_1''^2(x, t) dx + \frac{1}{2} EI \int_{\eta L}^L w_2''^2(x, t) dx + \frac{1}{2} k(z_1 - z_0)^2. \quad (A.2)$$

Burada $E_1 I_1$ için kullanılan 1 indisi çıkarılmış olup, $z_0 = w_1(\eta L, t)$ olduğu unutulmamalıdır.

(A.1) ve (A.2) ifadeleri (2.1) eşitliğinde yerine konulur ve gerekli varyasyonel hesaplar gerçekleştirilirse, eğilme titreşimleri yapan kirişin iki kısmı için hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$EI w_i^{iv}(x, t) + m \ddot{w}_i(x, t) = 0 \quad (i=1,2). \quad (A.3-4)$$

Sınır ve geçiş şartları da şu şekilde oluşur:

$$w_1(0, t) = 0, \quad (A.5)$$

$$w_2(L, t) = 0, \quad (A.6)$$

$$w_1''(0, t) = 0, \quad (A.7)$$

$$w_2''(L, t) = 0, \quad (A.8)$$

$$M \ddot{z}_1 + k[z_1 - w_1(\eta L, t)] = 0, \quad (A.9)$$

$$w_1(\eta L, t) = w_2(\eta L, t), \quad (A.10)$$

$$w_1'(\eta L, t) = w_2'(\eta L, t), \quad (A.11)$$

$$w_1''(\eta L, t) = w_2''(\eta L, t), \quad (A.12)$$

$$k[Z_1 - w_1(\eta L, t)] + EI[w_1'''(\eta L, t) - w_2'''(\eta L, t)] = 0 . \quad (A.13)$$

Kısmı türevli diferansiyel denklemler (A.3-4)'ün çözümlerinde, değişkenlerin ayrılması klasik metodu kullanılarak aşağıdaki çözüm kabulleri göz önüne alınmıştır:

$$w_i(x, t) = W_i(x) \cos \omega t , \quad (i = 1, 2) , \quad z_1 = Z_1 \cos \omega t . \quad (A.14)$$

Çözüm kabulleri (A.14) ifadesinin (A.3-4)'te yerlerine konulmasıyla

$$W_i^{iv}(x) - \beta^4 W_i(x) = 0 , \quad (i=1,2) \quad (A.15-16)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir.

Burada aşağıdaki kısaltma kullanılmıştır:

$$\beta^4 = \frac{m\omega^2}{EI} . \quad (A.17)$$

Kısmı türevli diferansiyel denklemlerin çözüm kabulleri (A.14) , sınır ve geçiş şartları (A.5-13)'ü, $W_i(x)$ ($i = 1, 2$) ve Z_1 için aşağıdaki hale getirir:

$$W_1(0) = 0 , \quad (A.18)$$

$$W_2(L) = 0 , \quad (A.19)$$

$$W_1''(0) = 0 , \quad (A.20)$$

$$W_2''(L) = 0 , \quad (A.21)$$

$$-M\omega^2 Z_1 + k[Z_1 - W_1(\eta L)] = 0 , \quad (A.22)$$

$$W_1(\eta L) = W_2(\eta L) , \quad (A.23)$$

$$W_1'(\eta L) = W_2'(\eta L) , \quad (A.24)$$

$$W_1''(\eta L) = W_2''(\eta L) , \quad (A.25)$$

$$k[Z_1 - W_1(\eta L)] + EI[W_1'''(\eta L) - W_2'''(\eta L)] = 0 . \quad (A.26)$$

Adi diferansiyel denklemler (A.15) ve (A.16)'nın genel çözümleri olan

$$W_1(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x , \quad (A.27)$$

$$W_2(x) = C_5 \sin \beta x + C_6 \cos \beta x + C_7 \sinh \beta x + C_8 \cosh \beta x \quad (A.28)$$

ifadeleri, (A.18-26)'daki şartlarda yerlerine konulursa C_1 - C_8 ve Z_1 olmak üzere toplam 9 tane bilinmeyen katsayının belirlenmesi için 9 homojen denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilir. Katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki frekans denklemi elde edilir:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin \bar{\beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \bar{\beta} \\
\sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & 0 \\
\sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta \\
\cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta \\
-\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} & 0 & 0 \\
-\cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 + \frac{\alpha_M}{\alpha_k} \bar{\beta}^4 & 0 \\
-\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 \\
\sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 \\
\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & 0 & 0 \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & \alpha_M \bar{\beta} & 0
\end{vmatrix} = 0 \quad (A.29)$$

Bu frekans denkleminde kullanılan boyutsuz parametreler aşağıdaki gibidir:

$$\bar{\beta} = \beta L, \quad \bar{\alpha}_k = \frac{k}{\frac{48 EI}{L^3}}, \quad \alpha_M = \frac{M}{mL}. \quad (A.30)$$

$\bar{\beta}$ parametresi boyutsuz öz frekans değerlerini, $\bar{\alpha}_k$ yayın katsayısının kirişin yay katsayısına oranını, α_M ise de yayın ucundaki kütlenin kirişin kütlesine oranını temsil etmektedir.

Şekil 2.3’de gösterilen sistemin ω ile gösterilen öz frekansları, frekans denklemi (A.29)’un kökleri olan $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametrelerinin (A.17) ifadesinde yerlerine konulmasıyla rahatlıkla bulunabilir.

EK B

Bu bölümde Şekil 2.7a'da gösterilen sistemin frekans denklemi türetilmiştir. Sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^{\eta L} \dot{w}_1^2(x, t) dx + \frac{1}{2} m \int_{\eta L}^L \dot{w}_2^2(x, t) dx \quad (B.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada basitliği sağlamak amacıyla x_1 , m_1 ve L_1 için kullanılan 1 indisi kullanılmamıştır. Sistemin potansiyel enerjisi de aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^{\eta L} w_1''^2(x, t) dx + \frac{1}{2} EI \int_{\eta L}^L w_2''^2(x, t) dx + \frac{1}{2} k z_0^2. \quad (B.2)$$

Burada ifadenin sadeliği için kirişin rijitliğini temsil eden $E_1 I_1$ 'de kullanılan 1 indisi atılmıştır. Bunun yanında, z_0 yerine $w_1(\eta L_1, t)$ yazılabileceği unutulmamalıdır.

Kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri (B.1) ve (B.2), (2.1) eşitliğinde yerlerine konulur ve gerekli varyasyon hesapları gerçekleştirilirse, eğilme titreşimleri yapan kirişin iki kısmı için hareket denklemlerini temsil eden kısmı türevli diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$EI w_i^{iv}(x, t) + m \ddot{w}_i(x, t) = 0, \quad (i=1,2) \quad (B.3-B.4)$$

Sınır ve geçiş şartları ise şöyledir:

$$w_1(0, t) = 0, \quad (B.5)$$

$$w_2(L, t) = 0, \quad (B.6)$$

$$w_1''(0, t) = 0, \quad (B.7)$$

$$w_2''(L, t) = 0, \quad (B.8)$$

$$w_1(\eta L, t) = w_2(\eta L, t), \quad (B.9)$$

$$w_1'(\eta L, t) = w_2'(\eta L, t), \quad (B.10)$$

$$w_1''(\eta L, t) = w_2''(\eta L, t), \quad (B.11)$$

$$-k w_1(\eta L, t) + EI [w_1'''(\eta L, t) - w_2'''(\eta L, t)] = 0. \quad (B.12)$$

Kısmı türevli diferansiyel denklemler (B.3) ve (B.4)'ün çözümünde değişkenlerin ayrılması klasik metodu kullanılarak aşağıdaki çözüm kabulü yapılmıştır:

$$w_i(x, t) = W_i(x) \cos \omega t \quad (i = 1, 2) . \quad (B.13)$$

Çözüm kabulü (B.13) ifadesinin (B.3) ve (B.4)'de yerine konulmasıyla

$$W_i^{iv}(x) - \beta^4 W_i(x) = 0 , \quad (i=1,2) \quad (B.14-B.15)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir.

Burada kullanılan kısaltma

$$\beta^4 = \frac{m \omega^2}{EI} \quad (B.16)$$

şeklindedir.

Çözüm kabulü (B.13)'ün sınır ve geçiş şartları (B.5-12)'de yerine konulmasıyla $W_i(x)$ ($i = 1, 2$) için aşağıdaki sınır ve geçiş şartlarına ulaşılır:

$$W_1(0) = 0 , \quad (B.17)$$

$$W_2(L) = 0 , \quad (B.18)$$

$$W_1''(0) = 0 , \quad (B.19)$$

$$W_2''(L) = 0 , \quad (B.20)$$

$$W_1(\eta L) = W_2(\eta L) , \quad (B.21)$$

$$W_1'(\eta L) = W_2'(\eta L) , \quad (B.22)$$

$$W_1''(\eta L) = W_2''(\eta L) , \quad (B.23)$$

$$-kW_1(\eta L) + EI[W_1''(\eta L) - W_2'''(\eta L)] = 0 . \quad (B.24)$$

Adi diferansiyel denklemler (B.14) ve (B.15)'in genel çözümleri ise aşağıdaki gibidir:

$$W_1(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x , \quad (B.25)$$

$$W_2(x) = C_5 \sin \beta x + C_6 \cos \beta x + C_7 \sinh \beta x + C_8 \cosh \beta x \quad (B.26)$$

Yukarıdaki çözümlerin (B.17-24)'deki şartlarda yerlerine konulmasıyla, C_1 - C_8 olmak üzere toplam 8 tane bilinmeyen katsayının bulunmasını sağlayan 8 homojen denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilir. Katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle frekans denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta \\
\cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta \\
-\cos \bar{\beta} \eta - \frac{48 \alpha_k}{\bar{\beta}^3} \sin \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta - \frac{48 \alpha_k}{\bar{\beta}^3} \cos \bar{\beta} \eta & \cosh \bar{\beta} \eta - \frac{48 \alpha_k}{\bar{\beta}^3} \sinh \bar{\beta} \eta & \sinh \bar{\beta} \eta - \frac{48 \alpha_k}{\bar{\beta}^3} \cosh \bar{\beta} \eta
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin \bar{\beta} & \cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} \\
-\sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & \sinh \bar{\beta} & \cosh \bar{\beta} \\
-\sin \bar{\beta} \eta & -\cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta \\
-\cos \bar{\beta} \eta & \sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta \\
\sin \bar{\beta} \eta & \cos \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta \\
\cos \bar{\beta} \eta & -\sin \bar{\beta} \eta & -\cosh \bar{\beta} \eta & -\sinh \bar{\beta} \eta
\end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Bu frekans denkleminde kullanılan boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\bar{\beta} = \beta L, \quad \alpha_k = \frac{k}{\frac{48 EI}{L^3}}. \quad (B.28)$$

$\bar{\beta}$ parametresi boyutsuz öz frekans değerlerini, $\bar{\alpha}_k$ yayın katsayısının kirişin yay katsayısına oranını temsil etmektedir.

Şekil 2.7a'da gösterilen sistemin ω ile ifade edilen öz frekansları (B.16) ifadesi yardımıyla, frekans denklemi (B.27)'nin kökleri olan $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametrelerinden, bulunabilir.

Şekil 2.7b'de yer alan sistemin frekans denklemi [9]'da verilen genel formülden yararlanarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tan \bar{\beta}_{22} + 16 \alpha_k \eta^2 (1 - \eta)^2 \bar{\beta}_{22} = 0. \quad (B.29)$$

Bu denklemde kullanılan kısaltmalar şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{\beta}_{22} = \beta_{22} L_2, \quad \alpha_k = \frac{E_2 A_2 / L_2}{48 E_1 I_1 / L_1^3}. \quad (B.30)$$

Mekanik sistemin boyutsuz frekans parametresi $\bar{\beta}_{22}$ ile ifade edilirken, α_k ise boyuna titreşen çubuğun yay sabitinin eğilme kirişinin yay sabitine oranını göstermektedir. Bu sistemin ω ile gösterilen öz frekansları, (B.30)'da verilen transandantal denklemin kökleri olan $\bar{\beta}_{22}$ değerlerinin (B.31)'de yerine konulmasıyla kolayca elde edilebilir:

$$\bar{\beta}_{22}^2 = \frac{\omega^2 m_2 L_2}{E_2 A_2}. \quad (B.31)$$

EK C

Bu Ek’de, Bölüm 2.1.1’de Hamilton Prensibi yardımıyla sistemin hareket denklemlerine ulaşmak üzere yapılan ve o bölümde yer verilmemiş olan varyasyonel ara işlemler detaylı bir biçimde verilmiştir. Bu işlemlerin takibini kolaylaştırmak amacıyla Hamilton Prensibinin ifadesinin sol tarafı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$I := \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 .$$

Burada T sistemin toplam kinetik enerjisini ifade ederken V ise sistemin sahip olduğu toplam potansiyel enerjiyi göstermektedir. Kısaltmak için kullanılmış olan I ifadesinin 4 tanesi kinetik enerjiden, 3 tanesi potansiyel enerjiden kaynaklanan 7 adet terimi bulunmaktadır:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 - I_6 - I_7 = 0 .$$

Bu terimler tek tek incelenirse, ilk terim aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I_1 = \delta \int_{t_0}^{t_1} T_1 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \int_0^{\eta L_1} \dot{\mathbf{x}}_1^2(x_1, t) dx_1 \right) dt .$$

Varyasyonun integral içine alınmasıyla

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(x_1, t) \delta \dot{\mathbf{x}}_1(x_1, t) dx_1 dt$$

terimine ulaşılır. Burada noktalar t zamanına göre kısmi türevi göstermektedir. I_1 , terimi zamana göre kısmi integrasyona tabi tutulursa

$$I_1 = \int_0^{\eta L_1} m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) \Big|_{t_0}^{t_1} dx_1 - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) dx_1 dt$$

elde edilir.

Varyasyon kurallarına göre $\delta w_1(x_1, t_0) = 0$ ve $\delta w_1(x_1, t_1) = 0$ olduğu için yukarıdaki ifadede soldaki terim sıfırlanır ve I_1 aşağıdaki hale gelir:

$$I_1 = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) dx_1 dt .$$

İkinci terim I_2 şu şekildedir:

$$I_2 = \delta \int_{t_0}^{t_1} T_2 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m_1 \int_{\eta L_1}^{L_1} \dot{w}_3^2(x_1, t) dx_1 \right) dt$$

Varyasyonun integral içine alınmasıyla I_2 şöyle ifade edilebilir:

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} m_1 \dot{w}_3(x_1, t) \delta \dot{w}_3(x_1, t) dx_1 dt .$$

Yukarıdaki ifadeye zamana göre kısmi integrasyon uygulanırsa:

$$I_2 = \int_{\eta L_1}^{L_1} m_1 \dot{w}_3(x_1, t) \delta w_3(x_1, t) \Big|_{t_0}^{t_1} dx_1 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} m_1 \dot{w}_3(x_1, t) \delta w_3(x_1, t) dx_1 dt$$

elde edilir w_3 fonksiyonun varyasyonu t_0 ve t_1 'de sıfır olduğu için I_2 'nin ilk terimi sıfır olur ve I_2 şöyle yazılabilir:

$$I_2 = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} m_1 \dot{w}_3(x_1, t) \delta w_3(x_1, t) dx_1 dt$$

Toplam kinetik enerjinin üçüncü elemanını içeren I_3 terimine, zamana göre kısmi integrasyon uygulanırsa ve fonksiyonların varyasyonlarının $t=t_0$ ve $t=t_1$ için sıfır olduğu göz önüne alınırsa I_3 ,

$$I_3 = \delta \int_{t_0}^{t_1} T_3 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m_2 \int_0^{L_2} [\dot{w}_2(x_2, t) + \dot{w}_1(\eta L_1, t)]^2 dx_2 dt$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} m_2 [(\dot{w}_2(x_2, t) + \dot{w}_1(\eta L_1, t)) \delta \dot{w}_2(x_2, t) + (\dot{w}_2(x_2, t) + \dot{w}_1(\eta L_1, t)) \delta \dot{w}_1(\eta L_1, t)] dx_2 dt$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} m_2 [(-\dot{w}_2(x_2, t) - \dot{w}_1(\eta L_1, t)) \delta w_2(x_2, t) + (-\dot{w}_2(x_2, t) - \dot{w}_1(\eta L_1, t)) \delta w_1(\eta L_1, t)] dx_2 dt$$

şeklinde ifade edilir.

Yukarıdaki işlemlerin benzer şekilde I_4 için uygulanmasıyla da aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$I_4 = \delta \int_{t_0}^{t_1} T_4 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} M [\dot{w}_1(\eta L_1, t) + \dot{w}_2(L_2, t)]^2 dt ,$$

$$I_4 = \int_{t_0}^{t_1} M[(w_1(\eta L_1, t) + w_2(L_2, t))\delta w_1(\eta L_1, t) + (w_1(\eta L_1, t) + w_2(L_2, t))\delta w_2(L_2, t)]dt$$

$$I_4 = \int_{t_0}^{t_1} M[(-w_1(\eta L_1, t) - w_2(L_2, t))\delta w_1(\eta L_1, t) + (-w_1(\eta L_1, t) - w_2(L_2, t))\delta w_2(L_2, t)]dt$$

I_5 terimi çubuğun sol kısmının potansiyel enerjisini içermektedir:

$$I_5 = \delta \int_{t_0}^{t_1} V_1 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} E_1 I_1 \int_0^{\eta L_1} w_1''^2(x_1, t) dx_1 \right) dt .$$

Varyasyonun, integral içersine alınmasıyla aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$I_5 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} E_1 I_1 w_1''(x_1, t) \delta w_1''(x_1, t) dx_1 dt .$$

Yukarıdaki ifadeye x_1 'e göre kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I_5 = \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1''(x_1, t) \delta w_1'(x_1, t) \Big|_0^{\eta L_1} dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} E_1 I_1 w_1'''(x_1, t) \delta w_1'(x_1, t) dx_1 dt$$

şeklinde yazılabilir.

I_5 ifadesinin ikinci terimi, tekrar x_1 'e göre kısmi integrasyona tabi tutulursa

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} E_1 I_1 w_1'''(x_1, t) \delta w_1'(x_1, t) dx_1 dt &= \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1'''(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) \Big|_0^{\eta L_1} dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} E_1 I_1 w_1^{IV}(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) dx_1 dt \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece I_5 için

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1''(\eta L_1, t) \delta w_1'(\eta L_1, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1''(0, t) \delta w_1'(0, t) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1'''(\eta L_1, t) \delta w_1(\eta L_1, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1'''(0, t) \delta w_1(0, t) dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} E_1 I_1 w_1^{IV}(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) dx_1 dt \end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

Benzer şekilde I_5 ile aynı yapıda olan I_6 için de aşağıdaki düzenlemeler yapılabilir:

$$I_6 = \delta \int_{t_0}^{t_1} V_2 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} E_1 I_1 \int_{\eta L_1}^{L_1} w_3''^2(x_1, t) dx_1 \right) dt$$

$$I_6 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} E_1 I_1 w_{31}''(x_1, t) \delta w_3''(x_1, t) dx_1 dt$$

$$I_6 = \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3''(x_1, t) \delta w_3'(x_1, t) \Big|_{\eta L_1}^{L_1} dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} E_1 I_1 w_3'''(x_1, t) \delta w_3'(x_1, t) dx_1 dt$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} E_1 I_1 w_3'''(x_1, t) \delta w_3'(x_1, t) dx_1 dt &= \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3'''(x_1, t) \delta w_1(x_1, t) \Big|_{\eta L_1}^{L_1} dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} E_1 I_1 w_3^{IV}(x_1, t) \delta w_3(x_1, t) dx_1 dt . \end{aligned}$$

Bu işlemler sonucunda I_6 aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3''(L_1, t) \delta w_3'(L_1, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3''(\eta L_1, t) \delta w_3'(\eta L_1, t) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3'''(L_1, t) \delta w_1(L_1, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3'''(\eta L_1, t) \delta w_1(\eta L_1, t) dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} E_1 I_1 w_3^{IV}(x_1, t) \delta w_3(x_1, t) dx_1 dt . \end{aligned}$$

Boyuna titreşen çubuğun potansiyel enerjisini içeren I_7 terimi şöyle yazılabilir:

$$I_7 = \delta \int_{t_0}^{t_1} V_3 dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} E_2 A_2 \int_0^{L_2} w_2'^2(x_2, t) dx_2 \right) dt .$$

Varyasyonun integral içersine alınmasıyla aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$I_7 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} E_2 A_2 w_2'(x_2, t) \delta w_2'(x_2, t) dx_2 dt .$$

Yukarıdaki ifade x_2 'e göre kısmi integrasyona tabi tutulursa, I_7 şu hale gelmektedir:

$$I_7 = \int_{t_0}^{t_1} E_2 A_2 w_2'(x_2, t) \delta w_2(x_2, t) \Big|_0^{L_2} dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} E_2 A_2 w_2''(x_2, t) \delta w_2(x_2, t) dx_2 dt .$$

Nihayet I_7 için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_7 = \int_{t_0}^{t_1} E_2 A_2 w_2'(L_2, t) \delta w_2(L_2, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} E_2 A_2 w_2'(0, t) \delta w_2(0, t) dt \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} E_2 A_2 w_2''(x_2, t) \delta w_2(x_2, t) dx_2 dt .$$

Yukarıdaki elde edilmiş I_1 - I_7 ara sonuçlarının $\delta w_1(\eta L_1, t) = \delta w_3(\eta L_1, t)$ ve $\delta w_1'(\eta L_1, t) = \delta w_3'(\eta L_1, t)$ şartları göz önünde tutularak, bir araya toplanması ve düzenlenmesiyle I için aşağıdaki nihai ifadeye gelinir:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\eta L_1} [-m_1 \ddot{w}_1(x_1, t) - E_1 I_1 w_1^{IV}(x_1, t)] \delta w_1(x_1, t) dx_1 dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_2} [-m_2 \ddot{w}_2(x_2, t) - m_2 \ddot{w}_1(\eta L_1, t) + E_2 A_2 w_2''(x_2, t)] \delta w_2(x_2, t) dx_2 dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\eta L_1}^{L_1} [-m_1 \ddot{w}_3(x_1, t) - E_1 I_1 w_3^{IV}(x_1, t)] \delta w_3(x_1, t) dx_1 dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} [- \int_0^{L_2} (m_2 \ddot{w}_2(x_2, t) + m_2 \ddot{w}_1(\eta L_1, t)) dx_2 - M(\ddot{w}_1(\eta L_1, t) + \ddot{w}_2(L_2, t)) \\ + E_1 I_1 (w_1'''(\eta L_1, t) - w_3'''(\eta L_1, t))] \delta w_1(\eta L_1, t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} [-M \ddot{w}_1(\eta L_1, t) - M \ddot{w}_2(L_2, t) - E_2 A_2 w_2'(L_2, t)] \delta w_2(L_2, t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3'''(L_1, t) \delta w_3(L_1, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1'''(0, t) \delta w_1(0, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_3''(L_1, t) \delta w_3'(L_1, t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} E_1 I_1 w_1''(0, t) \delta w_1'(0, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} [-E_1 I_1 w_1''(\eta L_1, t) + E_1 I_1 w_3''(\eta L_1, t)] \delta w_1'(\eta L_1, t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} E_2 A_2 w_2'(0, t) \delta w_2(0, t) dt$$

Hamilton Prensibine göre I ifadesinin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Fonksiyonlarının varyasyonları keyfi olarak seçilebileceğinden burada yer alan çift katlı integrallerin parantez içersindeki ifadelerinin sıfıra eşitlenmesiyle kirışin iki parçası ve boyuna titreşen çubuğun hareket denklemlerini temsil eden kısmı türevli diferansiyel denklemler elde edilebilir. İfadenin kalanını oluşturan tek katlı integrallerin tek tek sıfıra eşitlenmesi sonucu sisteme etkileyen sınır ve geçiş şartları kolayca bulunabilir.

EK D

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
0.5	0	2.304807	2.464755	2.523091	2.552557	2.570202	2.581919	2.605164	2.622369
		3.581252	3.975135	4.289468	4.547502	4.766234	4.956234	5.536640	6.283185
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.402139
		9.439237	9.453944	9.468901	9.484105	9.499557	9.515254	9.580459	9.759129
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	2.299621	2.458815	2.516892	2.546237	2.563816	2.575490	2.598657	2.615809
		3.577459	3.971616	4.285927	4.543889	4.762547	4.952482	5.532731	6.283185
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.398205
		9.418735	9.436245	9.451858	9.467321	9.482889	9.498636	9.563797	9.742076
		12.439022	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	2.254998	2.408078	2.464083	2.492474	2.509521	2.520862	2.543419	2.560169
		3.543810	3.940385	4.254444	4.511728	4.729705	4.919050	5.497869	6.283185
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.363213
		7.079231	8.324804	8.944256	9.161674	9.244353	9.290180	9.393850	9.586785
		9.330718	9.512482	9.814837	10.308491	10.813117	11.271544	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
1	0	1.970969	2.143718	2.215896	2.255032	2.279460	2.296119	2.330262	2.356506
		3.521554	3.843340	4.107222	4.328840	4.519660	4.687256	5.207551	6.002814
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439193	9.453767	9.468499	9.483386	9.498426	9.513615	9.575812	9.740114
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.968651	2.140823	2.212707	2.251670	2.275985	2.292565	2.326544	2.352659
		3.516970	3.839085	4.103117	4.324816	4.515690	4.683328	5.203787	5.999591
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418585	9.435933	9.451278	9.466379	9.481488	9.496681	9.558645	9.722071
		12.432863	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.948260	2.115502	2.184894	2.222404	2.245779	2.261705	2.294315	2.319358
		3.476290	3.801674	4.067066	4.289456	4.480762	4.648734	5.170471	5.970769
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.047005	8.288891	8.917461	9.146056	9.232660	9.279584	9.380962	9.556235
		9.328012	9.508594	9.797258	10.275928	10.773271	11.227528	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
1.5	0	1.790122	1.958422	2.032282	2.073576	2.099872	2.118056	2.156013	2.185862
		3.503558	3.801457	4.046663	4.253952	4.433425	4.591743	5.086664	5.851236
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439178	9.453708	9.468367	9.483150	9.498056	9.513082	9.574320	9.734179
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.788705	1.956605	2.030237	2.071388	2.097587	2.115701	2.153503	2.183224
		3.498625	3.796707	4.042006	4.249349	4.428862	4.587216	5.082296	5.847454
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418536	9.435829	9.451086	9.466068	9.481028	9.496041	9.556983	9.715800
		12.430806	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.776138	1.940557	2.012230	2.052154	2.077520	2.095035	2.131527	2.160161
		3.454715	3.754909	4.001135	4.208983	4.388839	4.547483	5.043825	5.813840
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.036082	8.276680	8.908159	9.140587	9.228595	9.275930	9.376615	9.546270
		9.327092	9.507319	9.791523	10.265074	10.759878	11.212688	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
2	0	1.670014	1.832352	1.905377	1.946882	1.973611	1.992246	2.031574	2.062950
		3.494922	3.781063	4.016690	4.216418	4.389796	4.543073	5.024015	5.771368
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439171	9.453679	9.468301	9.483033	9.497873	9.512817	9.573585	9.731282
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.669018	1.831060	1.903908	1.945297	1.971946	1.990521	2.029717	2.060978
		3.489805	3.776027	4.011691	4.211440	4.384834	4.538129	5.019190	5.767104
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418511	9.435777	9.450991	9.465913	9.480800	9.495724	9.556163	9.712735
		12.429777	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.660155	1.819591	1.890896	1.931284	1.957237	1.975302	2.013353	2.043633
		3.444155	3.731643	3.967775	4.167747	4.341292	4.494735	4.976729	5.729269
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.030588	8.270529	8.903439	9.137801	9.226530	9.274079	9.374432	9.541330
		9.326629	9.506685	9.788680	10.259649	10.753163	11.205238	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

		α_k							
α_M	$\bar{m}_{21}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
2.5	0	1.581695	1.738471	1.810043	1.851138	1.877794	1.896474	1.936190	1.968184
		3.489856	3.769023	3.998846	4.193921	4.363507	4.513624	4.985726	5.722057
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439166	9.453662	9.468261	9.482963	9.497763	9.512660	9.573147	9.729567
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.580939	1.737483	1.808912	1.849912	1.876501	1.895132	1.934734	1.966628
		3.484626	3.763804	3.993622	4.188689	4.358271	4.508391	4.980573	5.717431
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418496	9.435746	9.450933	9.465821	9.480663	9.495534	9.555674	9.710918
		12.429159	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.574193	1.728687	1.798867	1.839038	1.865042	1.883240	1.921852	1.952880
		3.437899	3.717754	3.947683	4.142735	4.312295	4.462430	4.935213	5.676383
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.027280	8.266825	8.900584	9.136113	9.225280	9.272960	9.373119	9.538380
		9.326350	9.506306	9.786983	10.256395	10.749127	11.200759	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
3	0	1.512663	1.664519	1.734528	1.775004	1.801388	1.819945	1.859605	1.891777
		3.486527	3.761081	3.987018	4.178944	4.345947	4.493903	4.959912	5.688585
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439163	9.453650	9.468235	9.482916	9.497690	9.512555	9.572856	9.728432
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.512059	1.663727	1.733618	1.774014	1.800341	1.818856	1.858417	1.890502
		3.481220	3.755737	3.981636	4.173533	4.340515	4.488460	4.954517	5.683684
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418486	9.435725	9.450895	9.465759	9.480572	9.495408	9.555349	9.709716
		12.428748	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.506668	1.656661	1.725513	1.765210	1.791039	1.809181	1.847883	1.879203
		3.433762	3.708531	3.934270	4.125962	4.292781	4.440630	4.907002	5.640187
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.025071	8.264349	8.898672	9.134981	9.224443	9.272212	9.372243	9.536420
		9.326164	9.506054	9.785854	10.254226	10.746435	11.197769	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

		α_k							
α_M	$\bar{m}_{21}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
5	0	1.333816	1.471095	1.535628	1.573464	1.598380	1.616041	1.654204	1.685642
		3.479983	3.745413	3.963545	4.149075	4.310783	4.454277	4.907609	5.620167
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439158	9.453627	9.468183	9.482823	9.497545	9.512345	9.572277	9.726185
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.333496	1.470671	1.535137	1.572926	1.597809	1.615443	1.653546	1.684927
		3.474521	3.739808	3.957831	4.143279	4.304926	4.448377	4.901671	5.614632
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418466	9.435684	9.450819	9.465636	9.480390	9.495156	9.554702	9.707333
		12.427924	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.330628	1.466876	1.530745	1.568122	1.592704	1.610111	1.647674	1.678559
		3.425573	3.690193	3.907428	4.092215	4.253349	4.396424	4.849289	5.565434
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.020641	8.259384	8.894825	9.132699	9.222757	9.270707	9.370487	9.532513
		9.325790	9.505551	9.783605	10.249890	10.741044	11.191779	12.566371	12.566371

Tablo D.1: (2.42)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi (devamı)

α_M	$\bar{m}_{21}$	α_k							
		0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
10	0	1.123154	1.240869	1.297011	1.330280	1.352364	1.368112	1.402452	1.431101
		3.475176	3.733857	3.946122	4.126775	4.284402	4.424433	4.867810	5.567531
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.439153	9.453609	9.468144	9.482753	9.497436	9.512189	9.571846	9.724518
		12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.01	1.123019	1.240689	1.296801	1.330049	1.352118	1.367854	1.402165	1.430786
		3.469595	3.728048	3.940143	4.120667	4.278198	4.418155	4.861413	5.561442
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		9.418451	9.435653	9.450762	9.465544	9.480254	9.494968	9.554220	9.705565
		12.427306	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	0.1	1.121806	1.239075	1.294920	1.327981	1.349910	1.365539	1.399592	1.427970
		3.419508	3.676547	3.887313	4.066766	4.223458	4.362772	4.804871	5.507215
		6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
		7.017309	8.255647	8.891919	9.130973	9.221484	9.269571	9.369167	9.529595
		9.325509	9.505175	9.781926	10.246639	10.736996	11.187279	12.566371	12.566371

Tablo D.2 : (2.48)'de verilen transandantal denklemin $\eta=0.5$ için ilk beş $\bar{\beta}$ boyutsuz frekans parametresi

	α_k							
$\bar{m}_{21}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5	10
0	3.470453	3.722475	3.928872	4.104588	4.258048	4.394515	4.827545	5.513736
	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
	9.439149	9.453592	9.468104	9.482684	9.497328	9.512033	9.571418	9.722867
	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	15.711062	15.714167	15.717278	15.720395	15.723518	15.726646	15.739219	15.771056
0.01	3.464752	3.716458	3.922618	4.098152	4.251473	4.387831	4.820643	5.507020
	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
	9.418436	9.435622	9.450705	9.465452	9.480119	9.494780	9.553740	9.703812
	12.426688	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371
	12.566371	14.728932	15.613906	15.666544	15.680461	15.688239	15.706894	15.741251
0.1	3.413511	3.663009	3.867241	4.041235	4.193335	4.328732	4.759488	5.447062
	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185	6.283185
	7.013970	8.251900	8.888997	9.129235	9.220202	9.268429	9.367846	9.526689
	9.325226	9.504800	9.780252	10.243389	10.732944	11.182772	12.566371	12.566371
	9.997579	11.793522	12.566371	12.566371	12.566371	12.566371	12.593324	14.587057

EK E

Program 1: Şekil 2.1'deki sistemin katsayılar matrisinin determinantını hesaplar.

```
function F=m220det(B,ak,m21,am)

% am => boyutsuz kütle parametresi    M/m1L1
% ak => boyutsuz yay parametresi      (E2*A2/L2)/(48*E1*I1/L1^3)
% m21 => boyutsuz kütle parametresi   m2L2/mL1
% n   => giriş ile cubuğun bağlantı noktası
% B   => boyutsuz frekans parametresi
% YL2 =>
% a11 => yardımcı parametreler
% a22 =>

a11=am/sqrt(48*ak*m21);
a22=1/sqrt(48*ak*m21);
YL2=B^2*sqrt(m21/(48*ak));
n=0.5;

A(1,1)=0; A(2,1:6)=0;
A(1,2)=1; A(2,7)=sin(B);
A(1,3)=1; A(2,8)=cos(B);
A(1,4:10)=0; A(2,9)=sinh(B); A(2,10)=cosh(B);

A(3,1)=0; A(4,1:6)=0;
A(3,2)=-1; A(4,7)=-sin(B);
A(3,3)=0; A(4,8)=-cos(B);
A(4,4)=1; A(4,9)=sinh(B);
A(5,5:10)=0; A(4,10)=cosh(B);

A(5,1)=-cos(B*n);
A(5,2)=sin(B*n);
A(5,3)=cosh(B*n);
A(5,4)=sinh(B*n);
A(5,5)=1/(a22*B)*(1-cos(YL2))+am*B*sin(YL2);
A(5,6)=1/(a22*B)*sin(YL2)+am*B*cos(YL2);
A(5,7)=cos(B*n);
A(5,8)=-sin(B*n);
A(5,9)=-cosh(B*n);
A(5,10)=-sinh(B*n);

A(6,1)=-sin(B*n); A(7,1:4)=0;
A(6,2)=-cos(B*n); A(7,5)=a11*B^2*sin(YL2)-cos(YL2);
A(6,3)=-sinh(B*n); A(7,6)=a11*B^2*cos(YL2)+sin(YL2);
A(6,4)=-cosh(B*n); A(7,7:10)=0;
A(6,5)=0;
A(6,6)=1;
A(6,7:10)=0;

A(8,1)=sin(B*n); A(9,1)=cos(B*n);
A(8,2)=cos(B*n); A(9,2)=-sin(B*n);
```

```

A(8,3)=sinh(B*n); A(9,3)=cosh(B*n);
A(8,4)=cosh(B*n); A(9,4)=sinh(B*n);
A(8,5:6)=0; A(9,5:6)=0;
A(8,7)=-sin(B*n); A(9,7)=-cos(B*n);
A(8,8)=-cos(B*n); A(9,8)=sin(B*n);
A(8,9)=-sinh(B*n); A(9,9)=-cosh(B*n);
A(8,10)=-cosh(B*n); A(9,10)=-sinh(B*n);

```

```

A(10,1)=-sin(B*n);
A(10,2)=-cos(B*n);
A(10,3)=sinh(B*n);
A(10,4)=cosh(B*n);
A(10,5:6)=0;
A(10,7)=sin(B*n);
A(10,8)=cos(B*n);
A(10,9)=-sinh(B*n);
A(10,10)=-cosh(B*n);

```

```

F=det(A);

```

Program 2: Şekil 2.3'teki sistemin katsayılar matrisinin determinantını hesaplar

```

function F=m230det(B,ak,m21)

```

```

% ak  => boyutsuz yay parametresi (E2*A2/L2)/(48*E1*I1/L1^3)
% m21 => boyutsuz kütle parametresi m2L2/mL1
% n   => giriş ile cubuğun bağlantı noktası
% B   => boyutsuz frekans parametresi
% YL2 => yardımcı parametreler
% a22 => yardımcı parametreler

```

```

n=0.5;
a22=1/sqrt(48*ak*m21);
YL2=B^2*sqrt(m21/(48*ak));

```

```

A(1,1)=0; A(2,1:6)=0;
A(1,2)=1; A(2,7)=sin(B);
A(1,3)=0; A(2,8)=cos(B);
A(1,4)=1; A(2,9)=sinh(B);
A(1,5:10)=0; A(2,10)=cosh(B);

```

```

A(3,1)=0; A(4,1:6)=0;
A(3,2)=-1; A(4,7)=-sin(B);
A(3,3)=0; A(4,8)=-cos(B);
A(3,4)=1; A(4,9)=sinh(B);
A(3,5:10)=0; A(4,10)=cosh(B);

```

```

A(5,1)=-cos(B*n);
A(5,2)=sin(B*n);
A(5,3)=cosh(B*n);
A(5,4)=sinh(B*n);
A(5,5)=1/(a22*B)*(1-cos(YL2))+48*ak*YL2/B^3*cos(YL2);

```

```

A(5,6)=1/(a22*B)*sin(YL2)-48*ak*YL2/B^3*sin(YL2);
A(5,7)=cos(B*n);
A(5,8)=-sin(B*n);
A(5,9)=-cosh(B*n);
A(5,10)=-sinh(B*n);

```

```

A(6,1)=-sin(B*n); A(7,1:4)=0;
A(6,2)=-cos(B*n); A(7,5)=sin(YL2);

A(6,3)=-sinh(B*n); A(7,6)=cos(YL2);
A(6,4)=-cosh(B*n); A(7,7:10)=0;
A(6,5)=0;
A(6,6)=1;
A(6,7:10)=0;

A(8,1)=sin(B*n); A(9,1)=cos(B*n);
A(8,2)=cos(B*n); A(9,2)=-sin(B*n);
A(8,3)=sinh(B*n); A(9,3)=cosh(B*n);
A(8,4)=cosh(B*n); A(9,4)=sinh(B*n);
A(8,5:6)=0; A(9,5:6)=0;
A(8,7)=-sin(B*n); A(9,7)=-cos(B*n);
A(8,8)=-cos(B*n); A(9,8)=sin(B*n);
A(8,9)=-sinh(B*n); A(9,9)=-cosh(B*n);
A(8,10)=-cosh(B*n); A(9,10)=-sinh(B*n);

A(10,1)=-sin(B*n);
A(10,2)=-cos(B*n);
A(10,3)=sinh(B*n);
A(10,4)=cosh(B*n);
A(10,5:6)=0;
A(10,7)=sin(B*n);
A(10,8)=cos(B*n);
A(10,9)=-sinh(B*n);
A(10,10)=-cosh(B*n);

F=det(A);

```

Program 3: Boyutsuz yay ve kütle parametrelerinin çeşitli değerleri için Şekil 2.1'deki sistemin boyutsuz frekans parametresi $\bar{\beta}$ değerlerini hesaplar

```

% m21f boyutsuz kütle parametrelerinin değerleri
% akf boyutsuz yay parametrelerinin değerleri
% amf boyutsuz kütle parametrelerinin değerleri
% x1 aranan boyutsuz frekans parametresi değeri

m21f=[10e-20;0.01;0.1];
akf=[0.5;1;1.5;2;2.5;3;5;10];

amf=[0.5;1;1.5;2;2.5;3;5;10];
x1=0.1;
x2=5;
dx=0.01;
ndigit=5;
for i_am=1:size(amf)
for i_m21=1:size(m21f)
for i_ak=1:size(akf)
for i=1:ndigit
T_temp=m220det(x1,akf(i_ak),m21f(i_m21),amf(i_am));
s_temp=sign(T_temp);
for j=x1:dx:x2
T=m220det(j,akf(i_ak),m21f(i_m21),amf(i_am));
s=sign(T);
if ( s_temp ~= s )

```

52

ÖZGEÇMİŞ

26.04.1979 tarihinde Yalova’da doğdu. İlköğretimini Saffet Çam İlkokulu’nda tamamladı. 1990 senesinde girdiği Yalova Lisesi’nde ortaokul ve lise öğretimini bitirdi. 1997 yılında İ.T.Ü Makina Fakültesi’ne girdi ve 2003 yılında mezun oldu. 2003 yılında İ. T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Anabilim Dalı’na bağlı Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustiği Programı’nda yüksek lisansa başladı. Halen yüksek lisansını devam ettirmektedir.