

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR HELİKOPTERİN YER REZONANSININ İNCELENMESİ
VE YER REZONANSINA KARŞI TASARIMI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kenan GÜRSES**

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustiği

HAZİRAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR HELİKOPTERİN YER REZONANSININ İNCELENMESİ
VE YER REZONANSINA KARŞI TASARIMI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kenan GÜRSES
(503061406)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05 05 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 05 06 2009

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Kenan Y. ŞANLITÜRK (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. H. Temel BELEK (İTÜ)
Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU (İTÜ)**

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Öncelikle, her daim yanımda olan anneme, babama ve biricik kardeşime sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Rotam’da çalışmama olanak sağlayan ve tez çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, benden desteğini hiç esirgemeyen, tez danışmanım sayın hocam Prof. Dr. Kenan Yüce Şanlıtürk’e en içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tezime veriler sağlayan çalışma arkadaşlarım M. Suat Kay ve Hasan Körük’e, Rotam’daki değerli çalışma arkadaşlarıma, hocalarıma, teknisyen arkadaşlara ve sevgili arkadaşlarım Ufuk Uzundağ ve Ali T. Kuzu’ya teşekkür ederim.

Haziran 2009

Kenan Gürses

Makina Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Helikopter Biçimleri.....	2
1.2 Helikopter Rotorları	4
1.3 Helikopterlerde Görülen Kararlılık Problemleri	6
1.4 Problemin Tanımı.....	7
1.5 Tezin Amacı	8
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	9
2.1 Yer Rezonansı Kazaları.....	9
2.2 Literatürdeki Yer Rezonansı Çalışmaları	13
3. TEORİK MODELLER	19
3.1 Dönen Sistemler ve Campbell Diyagramı.....	19
3.1.1 Kritik hızlar	19
3.1.2 Kararsızlık bölgeleri.....	20
3.1.3 Campbell diyagramının teorik ve deneysel olarak elde edilmesi	21
3.2 Düzlem-içi Yumuşak ve Düzlem-içi Sert Rotorlar	24
3.3 Yataksız Bir Rotorun Mafsallı Bir Rotor Olarak Modellenmesi	25
3.4 Üç Serbestlik Dereceli Yer Rezonansı Modeli	28
3.4.1 Sönümsüz model	29
3.4.1.1 Hareket denklemlerinin elde edilmesi.....	30
3.4.1.2 Hareket denklemlerinin elde edilmesi.....	40
3.4.2 Sönümlü model	42
3.4.2.1 Hareket denklemlerinin elde edilmesi.....	43
3.4.2.2 Özdeğer analizi	49
3.4.2.3 Serbest titreşim zaman cevabı.....	50
3.4.2.4 Serbest titreşim zaman cevabından Coleman diyagramının elde edilmesi.....	52
3.4.2.5 KSFD ile Coleman diyagramının elde edilmesi	52
3.4.2.6 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında elde edilmesi.....	53
3.4.2.7 Gerekli sönümün belirlenmesi	55
3.5 Dört Serbestlik Dereceli Basit Yer Rezonansı Modeli.....	58
3.5.1 Hareket denklemlerinin elde edilmesi.....	59
3.5.2 Özdeğer analizi	64
3.5.3 Serbest titreşim zaman cevabı.....	65

3.5.4 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında elde edilmesi.....	66
3.5.5 Gerekli sönümün belirlenmesi	68
4. SAYISAL MODELLER	71
4.1 Üç Serbestlik Dereceli Yer Rezonansı Modeli.....	71
4.1.1 Özdeğer analizi.....	74
4.1.2 Serbest titreşim zaman cevabı	78
4.1.3 Serbest titreşim zaman cevabından Coleman diyagramının elde edilmesi	84
4.1.4 Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde KSFD yöntemiyle Coleman diyagramının elde edilmesi.....	86
4.1.5 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında incelenmesi.....	94
4.1.6 Gerekli Minimum Sönümün Belirlenmesi	96
5. İTÜ-HTH HELİKOPTERİNİN MODELLENMESİ, ANALİZİ VE YER REZONANSINA KARŞI TASARLANMASI	101
5.1 İTÜ-HTH Helikopterin Tanıtılması	101
5.1.1 İTÜ-HTH gövde sistemi.....	101
5.1.1.1 İTÜ-HTH’ın deneysel modal analizi	103
5.1.1.2 Yer rezonansı modeli için eşdeğer gövde parametrelerinin elde edilmesi.....	103
5.1.2 İTÜ-HTH rotor sistemi.....	105
5.2 İTÜ-HTH Yer Rezonansı Modeli.....	110
5.2.1 İTÜ-HTH’ın yer rezonansı analizleri	110
5.2.2 Minimum sönüm gereksinimi	115
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	119
6.1 Genel Değerlendirme.....	119
6.2 İleride Yapılacak Çalışmalar	120
KAYNAKLAR.....	123
EKLER.....	127

KISALTMALAR

ROTAM	: Rotorlu Hava Araçları Tasarım ve Mükemmeliyet Merkezi
CDT	: Controlled Departure Time
NACA	: National Advisory Committee for Aeronautics
NASA	: National Aeronautics and Space Administration
P	: 1/rev
KSFD	: Kısa-Sürelî Fourier Dönüşümü
ADD	: Adi Diferansiyel Denklem
İTÜ	: İstanbul Teknik Üniversitesi
HTH	: Hafif Ticari Helikopter
LCH	: Light Commercial Helicopter
SE	: Sonlu Elemanlar
HFD	: Hızlı Fourier Dönüşümü

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modeline ait sayısal veriler [15]......	72
Çizelge 4.2 : Üç serbestlik dereceli modelin farklı dönme hızlarındaki kompleks özdeğerleri	75
Çizelge 5.1 : Deneysel olarak elde edilen doğal frekanslar [51].	103
Çizelge 5.2 : İTÜ-HTH için, farklı toplam kütle değerlerine karşılık gelen eşdeğer kütleler.....	105
Çizelge 5.3 : İTÜ-HTH palinin kütle dağılımı	107
Çizelge 5.4 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer pal özellikleri	108
Çizelge 5.5 : Dört serbestlik dereceli deneysel İTÜ-HTH yer rezonansı modeline ait sayısal veriler.....	110

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Belli başlı helikopter biçimleri: a) Tek Ana rotorlu – iki palli helikopter, b) Tek Ana rotorlu helikopter, c) Ardışık rotorlu helikopter [3].	2
Şekil 1.2 : Rotor dizilişleri: a) tek ana rotor dizilişi, b) ardışık rotor dizilişi, c) eş eksenli rotor dizilişi, d) yan yana rotor dizilişi ve e) birbiri içine geçen rotor dizilişi [1].	3
Şekil 1.3 : Tek ana rotorlu bir helikopterin ana bileşenleri [5].	4
Şekil 1.4 : Tipik bir mafsallı rotor göbeği ve palı [6].	4
Şekil 1.5 : Tipik bir menteşesiz rotor göbeği ve palı [6].	5
Şekil 1.6 : Yataksız rotor göbeği örneği [54].	6
Şekil 2.1 : TH-55 Osage, Hughes 269A'nın askeri versiyonu [10].	9
Şekil 2.2 : TH-55'in yer rezonansına maruz kaldıktan sonraki hali [11].	10
Şekil 2.3 : Sikorsky H04S 3G helikopteri [10].	11
Şekil 2.4 : Seasprite helikopteri [12].	11
Şekil 2.5 : Sikorsky S58B helikopteri [13].	12
Şekil 2.6 : Westland Wessex helikopterinin yer rezonansından sonraki hali [15].	13
Şekil 2.7 : Coleman ve Feingold tarafından kurulan ilk yer rezonansı modeli [16].	14
Şekil 3.1 : Bir rotorun Ardarda (Cascaded) diyagramı [30].	23
Şekil 3.2 : Uniform esnek bir palin düzlem-içi modlarını temsil eden Campbell diyagramı.	24
Şekil 3.3 : Düzlem-içi yumuşak menteşesiz bir rotorun pal frekans diyagramı [3].	25
Şekil 3.4 : Burulma yaylı ve eşdeğer mafsallı mesafeli rijit pal modeli [40].	27
Şekil 3.5 : Eşdeğer mafsallı mesafesi hesabı.	28
Şekil 3.6 : Helikopter gövdesinin üstten görünüşü ve gövde serbestlik derecesi.	29
Şekil 3.7 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin yandan ve üstten görünüşü.	30
Şekil 3.8 : k'ncı palin azimuth açısı ve serbestlik derecesi.	35
Şekil 3.9 : Rotorun müşterek modu.	37
Şekil 3.10 : Rotorun diferansiyel modu.	37
Şekil 3.11 : Rotorun ilerleyen ileri-geri titreşim modu.	38
Şekil 3.12 : Rotorun gerileyen ileri-geri titreşim modu.	38
Şekil 3.13 : Farklı rotor tiplerinin gerileyen ileri-geri titreşim modu karakteristikleri.	39
Şekil 3.14 : Farklı rotor tiplerinin, gerileyen ileri-geri titreşim modu (tahrik) frekansı ile gövde modu frekansı arasındaki ilişki.	39
Şekil 3.15 : Yer rezonansı modelinde katılık matrisinin pozitif belirli olmamasının fiziksel açıklaması.	42
Şekil 3.16 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin yandan ve üstten görünüşü.	42
Şekil 3.17 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde kullanılan düzlem-içi rijit pal modeli.	43
Şekil 3.18 : Sistem matrisi [A]'nın katsayıları metin formatında.	55
Şekil 3.19 : Minimum sönüm gereksinimi için kararlılık sınırı grafiği.	56
Şekil 3.20 : Sönüm gereksiniminin ileri-geri titreşim modu frekansına bağlı değişimi. [35].	57

Şekil 3.21 : Helikopter gövdesinin üstten görünüşü ve gövde serbestlik dereceleri.	58
Şekil 3.22 : Dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin üstten görünüşü.	59
Şekil 3.23 : Dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde kullanılan düzlem-içi rijit pal modeli.	59
Şekil 3.24 : Sistem matrisi $[A]$ 'nın katsayıları metin formatında.	67
Şekil 4.1 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modeli.	71
Şekil 4.2 : Rijit palin ileri-geri titreşim modu frekans diyagramı.	73
Şekil 4.3 : Rijit palin sabit ve dönen eksen takımlarına göre ileri-geri titreşim modu frekansları.	73
Şekil 4.4 : Üç serbestlik dereceli sistemin Coleman diyagramı.	74
Şekil 4.5 : Üç serbestlik dereceli sistemin azalım hızı diyagramı.	75
Şekil 4.6 : Üç serbestlik dereceli sistemin bağırsız Coleman diyagramı.	76
Şekil 4.7 : Üç serbestlik dereceli sistemin bağlı/bağırsız Coleman diyagramı.	77
Şekil 4.8 : Gövde serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.	78
Şekil 4.9 : ζ_c serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.	79
Şekil 4.10 : ζ_s serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.	79
Şekil 4.11 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $x(t=0)=\zeta_c(t=0)=\zeta_s(t=0)=0.5m$	80
Şekil 4.12 : Kompleks düzlem üzerinde sistem modları ve kararlılık durumları [48]. ..	80
Şekil 4.13 : Kararsız bölgede ($\Omega=32[\text{rad/s}]$) çalışan sistemin kompleks düzlem üzerindeki özdeğerleri.	81
Şekil 4.14 : Gövde serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı	82
Şekil 4.15 : ζ_c serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı	82
Şekil 4.16 : ζ_s serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.	83
Şekil 4.17 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $x(t=0)=\zeta_c(t=0)=\zeta_s(t=0)=0.5m$	83
Şekil 4.18 : Kararlı bölgede ($\Omega=22[\text{rad/s}]$) çalışan sistemin kompleks düzlem üzerindeki özdeğerleri.	84
Şekil 4.19 : Ardarda tarzdaki Coleman diyagramı	85
Şekil 4.20 : Ardarda tarzdaki üç boyutlu Coleman diyagramı	85
Şekil 4.21 : Özdeğer analizi ve zaman cevabı yöntemleriyle oluşturulan Coleman diyagramlarının karşılaştırılması.	86
Şekil 4.22 : Rotor hızının ($\Omega(t)=5t [\text{rad/s}]$) benzetim süresi boyunca değişimi	87
Şekil 4.23 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $\Omega(t=0,...,20) = 5t [\text{rad/s}]$	87
Şekil 4.24 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t [\text{rad/s}]$	88
Şekil 4.25 : ζ_c serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t [\text{rad/s}]$	88
Şekil 4.26 : ζ_s serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t [\text{rad/s}]$	89
Şekil 4.27 : Durağan olmayan zaman sinyali ($X_{ns}(t) = x(t) + \zeta_c(t) + \zeta_s(t)$)	89
Şekil 4.28 : KSFD yöntemiyle elde edilen Coleman diyagramı ($\Omega(t=0,...,20) = 5t [\text{rad/s}]$).	90
Şekil 4.29 : KSFD ve özdeğer yöntemleriyle elde edilen Coleman diyagramlarının karşılaştırılması.	90
Şekil 4.30 : Rotor hızının ($\Omega(t)=2t [\text{rad/s}]$) benzetim süresi boyunca değişimi.	91
Şekil 4.31 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $\Omega(t=0,...,50) = 2t [\text{rad/s}]$	91
Şekil 4.32 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t [\text{rad/s}]$	92
Şekil 4.33 : ζ_c serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t [\text{rad/s}]$	92
Şekil 4.34 : ζ_s serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t [\text{rad/s}]$	93
Şekil 4.35 : Sistemin, farklı hızlanma eğrilerine göre kararsızlık bölgesi içinde geçirdiği süreler.	93
Şekil 4.36 : KSFD yöntemiyle elde edilen Coleman diyagramı ($\Omega(t=0,...,50) = 2t [\text{rad/s}]$).	94

Şekil 4.37 : Her bir palin $\Omega=32$ [rad/s]'de dönen eksen takımındaki zaman cevapları: a) $\zeta_1(t)$, b) $\zeta_2(t)$, c) $\zeta_3(t)$, d) $\zeta_4(t)$	95
Şekil 4.38 : Rotor kütle merkezinin kararsız bir rotor hızındaki yörüngesi.	96
Şekil 4.39 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı grafiği için minimum sönüm gereksinimi.	96
Şekil 4.40 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı grafiği için boyutsuz minimum sönüm gereksinimi grafiği	97
Şekil 4.41 : Minimum sönüm gereksinimi eğrisinin palin ileri-geri titreşim modu frekansına bağlı olarak değişimi.	98
Şekil 4.42 : Sönümlü modelin Coleman diyagramı	99
Şekil 4.43 : Sönümlü modelin azalım hızı diyagramı.....	99
Şekil 4.44 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı.	100
Şekil 5.1 : İTÜ-HTH SE modeli	101
Şekil 5.2 : Kuyruk konisi kesidi a) teorik, b) deneysel modeli [51].	102
Şekil 5.3 : İTÜ-HTH deneysel modeli [51].	102
Şekil 5.4 : Rotor göbeğine x doğrultusunda F_x kuvvetinin uygulanması.	104
Şekil 5.5 : Rotor göbeğine y doğrultusunda F_y kuvvetinin uygulanması.	104
Şekil 5.6 : İTÜ-HTH pali	106
Şekil 5.7 : İTÜ-HTH pali esnek giriş parçası: a) yan görünüş, b) üst görünüş, c) alt kısımlar.	106
Şekil 5.8 : İTÜ-HTH pali, temel ileri-geri titreşim modu frekans diyagramı (Abaqus analizi ile elde edilmiştir).	107
Şekil 5.9 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer ileri-geri titreşim modu yay katsayısının rotor hızına bağlı değişimi.	108
Şekil 5.10 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer ileri-geri titreşim modu yay katsayısının rotor hızına bağlı değişimi.	109
Şekil 5.11 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 391[kg].	111
Şekil 5.12 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 391[kg].	111
Şekil 5.13 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 1000[kg].	112
Şekil 5.14 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 1000[kg].	113
Şekil 5.15 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 1500[kg].	113
Şekil 5.16 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 1500[kg].	114
Şekil 5.17 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 2000[kg].	115
Şekil 5.18 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 2000[kg].	115
Şekil 5.19 : Toplam kütle = 391[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı.....	116
Şekil 5.20 : Toplam kütle = 1000[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı.....	116
Şekil 5.21 : Toplam kütle = 1500[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı.....	117
Şekil 5.22 : Toplam kütle = 2000[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı.....	117
Şekil 5.23 : İTÜ-HTH min. sönüm gereksinimi, toplam kütle = 1500[kg].	118
Şekil 5.24 : İTÜ-HTH min. sönüm gereksinimi, toplam kütle = 2000[kg].	118
Şekil A.3.1 : Durağan olmayan sinyal, $x(t)=\sin(\omega(t).t)$	131
Şekil A.3.2 : Bir $x(t)$ fonksiyonun KSFD yöntemine göre pencerenmesi [53].	132
Şekil A.3.3 : KSFD'de frekans-zaman çözünürlüğü kavramı	133
Şekil A.3.4 : KSFD'nin işleyişi	134
Şekil A.3.5 : Örnek konuşma sinyalinin spektrogramı.....	134
Şekil A.4.1 : Hidrolik damper	135
Şekil A.4.2 : Hidrolik damperin eksenel yönde tahrik edildiği frekans değeri.	136
Şekil A.4.3 : Viskoz sönümlü ideal bir sistemin tek bir histeresis eğrisi.	136
Şekil A.4.4 : Örnek bir tahrik sinyalinin, a) zaman, b) frekans içeriği.....	137
Şekil A.4.5 : Örnek bir çıktı sinyalinin, a) zaman, b) frekans içeriği.....	137

Şekil A.4.6 : Örnek bir deneyin histeresiz eğrileri.	138
Şekil A.4.7 : Eşdeğer sönüm katsayısı.	138
Şekil A.4.8 : Eşdeğer sönüm katsayısı, ($X_0 = 5[\text{mm}]$).	139
Şekil A.4.9 : Eşdeğer sönüm katsayısı, ($X_0 = 10[\text{mm}]$).	139

SEMBOL LİSTESİ

b	: Toplam pal adedi
c_x	: Gövdenin x doğrultusundaki sönüm katsayısı
c_y	: Gövdenin y doğrultusundaki sönüm katsayısı
c_ζ	: İleri-geri titreşim mafsallı sönüm katsayısı
$[C]$	: Sönüm matrisi
D	: Enerji sönüm fonksiyonu
e	: Eşdeğer mafsallı mesafesi
$[G]$	: Jirokopik matris
$[H]$	: Dönence (circulatory) matrisi
I, I_ζ	: Palin ileri-geri titreşim mafsallı göre kütleli eylemsizlik momenti
I^*	: Palin kütle merkezine göre kütleli eylemsizlik momenti
j	: Kompleks sayı
k	: Pal indisi
k_ζ	: İleri-geri titreşim modu eşdeğer burulma yay katsayısı
$[K]$	: Direngenlik (katılık) matrisi
L	: Lagrange fonksiyonu
m	: Palin birim uzunluğunun kütlesi
m_b	: Palin kütlesi
m_B	: Gövdenin kütlesi
M	: Sistemin toplam kütlesi ($= m_B + bm_b$)
m_x	: Gövdenin x doğrultusundaki (<i>yuvatlanma modu</i>) eşdeğer kütlesi
m_y	: Gövdenin y doğrultusundaki (<i>yunuslama modu</i>) eşdeğer kütlesi
M_x	: Gövdenin x doğrultusundaki toplam eşdeğer kütlesi ($= m_x + bm_b$)
M_y	: Gövdenin y doğrultusundaki toplam eşdeğer kütlesi ($= m_y + bm_b$)
$[M]$	: Kütle matrisi
N	: Toplam serbestlik derecesi
P	: 1/devir
r	: Palin kütle merkezi ile ileri-geri titreşim mafsallı arasındaki mesafe
$\vec{r}_b$	: Palin kütle merkezinin sabit eksen takımına göre konum vektörü
S, S_ζ	: Palin ileri-geri titreşim modunun ilk kütleli eylemsizlik momenti

T	: Toplam kinetik enerji
T_t	: Öteleme kinetik enerji
T_r	: Dönme kinetik enerji
V	: Potansiyel enerjisi
x	: Gövdenin x doğrultusundaki serbestlik derecesi
y	: Gövdenin y doğrultusundaki serbestlik derecesi
λ_i	: i 'nci moda karşılık gelen kompleks özdeğer
α_i	: i 'nci kompleks özdeğerin reel kısmı
β_i	: i 'nci kompleks özdeğerin sanal kısmı
ω_i	: i 'nci modun sönümsüz doğal frekansı
Ω	: Rotor dönme hızı
ν_ζ	: Palin ileri-geri titreşim modunun <i>boyutsuz</i> doğal frekansı [1/rev]
σ_ζ	: Palin ileri-geri titreşim modunun <i>boyutlu</i> doğal frekansı [rad/s]
ζ_k	: k 'nci palin ileri-geri titreşim hareketinin serbestlik derecesi (dönen eksen takımına göre)
ζ_i	: i 'nci modun sönüm oranı ($= \alpha_i/\omega_i$)
ψ_k	: k 'inci palin azimut açısı
Ψ_k	: ($= \psi_k + \zeta_k$)
$\zeta_0, \zeta_c, \zeta_s, \zeta_d$	: Tüm rotorun hareketini sabit eksen takımına göre tanımlamakta kullanılan serbestlik dereceleri (modlar)
ζ_0	: Rotorun müşterek modu
ζ_c	: Rotoru kütle merkezinin x doğrultusundaki hareketini veren döngüsel modu
ζ_s	: Rotoru kütle merkezinin y doğrultusundaki hareketini veren döngüsel modu
ζ_d	: Rotorun tepkisiz modu
ζ_x	: Gövdenin yuvarlanma modu boyutsuz sönüm oranı ($=c_x/(2\sqrt{(k_x M)})$)
ζ_ζ	: Palin ileri-geri titreşim modu boyutsuz sönüm oranı ($=c_\zeta/(2\sqrt{(k_\zeta I)})$)
$\{b_1^k \ b_2^k \ b_3^k\}^T$	: Pale bağlı dönen eksen takımı
$\{\underline{N}_1 \ \underline{N}_2 \ \underline{N}_3\}^T$	: Yere bağlı sabit eksen takımı
$(\)'$	: $d(\)/dt$
$(\)^*$	: $d(\)/d\psi$

BİR HELİKOPTERİN YER REZONANSININ İNCELENMESİ VE YER REZONANSINA KARŞI TASARIMI

ÖZET

Bu tez kapsamında, bir helikopterin yer rezonansı kararsızlığının incelenmesi ve yer rezonansına karşı tasarımı ele alınmıştır. Yer rezonansı, helikopter kızıakları üzerinde yerde dururken rotorun düzlem-içi ileri-geri titreşim modunun, gövdenin yuvarlanma ve yunuslama moduyla bağlanması sonucu meydana gelen mekanik kökenli bir dinamik kararsızlık halidir. Başka bir ifadeyle, rotor kütle merkezinin gövdenin temel modlarını tahrik etmesiyle ortaya çıkan ve karşılıklı olarak her iki sistemin ataletsel etkileşimi sonucu oluşan kendini besleyen titreşimlerdir.

Yer rezonansı, üç ve dört serbestlik dereceli iki tip matematik model kurularak incelenmiştir. Öncelikle, ele alınan sistemlerin hareket denklemleri çıkartılmış, ardından da lineerleştirilmiştir. Bu aşamada sistemin hareket denklemleri periyodik katsayılıdır. Periyodik katsayılı olan hareket denklemleri Fourier koordinat dönüşümünden faydalanılarak sabit katsayılı hale dönüştürülmüş; böylelikle sistemin özdeğer analiziyle incelenebilmesine olanak sağlanmıştır. Hareket denklemlerinin özdeğer analizi yapılarak Coleman (Campbell) diyagramı oluşturulmuş ve yer rezonansının meydana geldiği rotor çalışma bölgeleri elde edilmiştir. Bunun yanında, yer rezonansını tespit etmede önemli bir araç olan Campbell diyagramının farklı yöntemlerle de elde edilebileceği gösterilmiştir. Campbell diyagramını elde etmek için özdeğer analizinden ayrı olarak iki metod daha kullanılmaktadır. Bunlardan ilki, sistemin serbest titreşim zaman cevabının Fourier dönüşümünü esas almaktadır. Diğer taraftan, ikinci metod, rotorun hızlandırılması esnasında elde edilen zaman cevabı verisinden yararlanmaktadır. Bu durumda, durağan olmayan zaman cevabı verisine kısa-sürelili Fourier dönüşümü uygulanmaktadır.

Yer rezonansı kararsızlığını gidermede kullanılan yaklaşımın temelini sisteme yeterli seviyede sönüm sağlanması teşkil etmektedir. Başka bir ifadeyle, gövde moduna ve rotorun ileri-geri titreşim moduna karşılık gelen sönüm oranlarının çarpımı kritik bir değerin üzerinde olması halinde yer rezonansı sorunu ortadan kaldırılabilir. Bu kriter İTÜ-HTH'a uygulanmış ve gerekli sönüm oranları belirlenmiştir. Elde edilen bu sönüm oranlarının gerçekte uygulanabilirliği ise üzerinde çalışılması gereken bir konudur.

GROUND RESONANCE ANALYSIS OF A HELICOPTER AND DESIGN AGAINST GROUND RESONANCE

SUMMARY

In this thesis, the ground resonance instability of a helicopter is analyzed and designed to eliminate its occurrence. Ground resonance is a dynamical instability which appears as a result of the coalescence of lead-lag mode of the rotor with the pitch and roll mode of the fuselage when the helicopter stands on its own landing gear on the ground. In other words, having excited by the rotor center of mass, the fundamental fuselage modes inertially coupled with the rotor in-plane modes and this gives rise to the self-excited oscillations.

Basically, the ground resonance phenomena is analyzed by setting up three and four degrees of freedom mathematical models. Firstly, the equations of motion of the systems are obtained by utilizing the Lagrange equations and then these equations are linearized. In this stage, the equations of motion have periodic coefficients even though they are linear. By using Fourier coordinate transformation, periodic coefficients are eliminated from equations of motion. This leads to constant coefficient which permits the use of standard eigenvalue analysis. Having done the eigenvalue analysis, Coleman –also known as Campbell– diagram is obtained. Inspection of such diagrams reveals the rotor speed ranges where the ground resonance may occur. Moreover, other methods for obtaining Coleman diagram was developed in order to detect the occurrence of ground resonance. Apart from eigenvalue analysis, two more methods are used for obtaining Campbell diagram. One of these method is based on Fourier transform of the free vibration time response of the system. The second method, on the other hand, is utilizing the data obtained during the run-up of the rotor. In this case, short-time Fourier Transform is applied to the nonstationary time domain data.

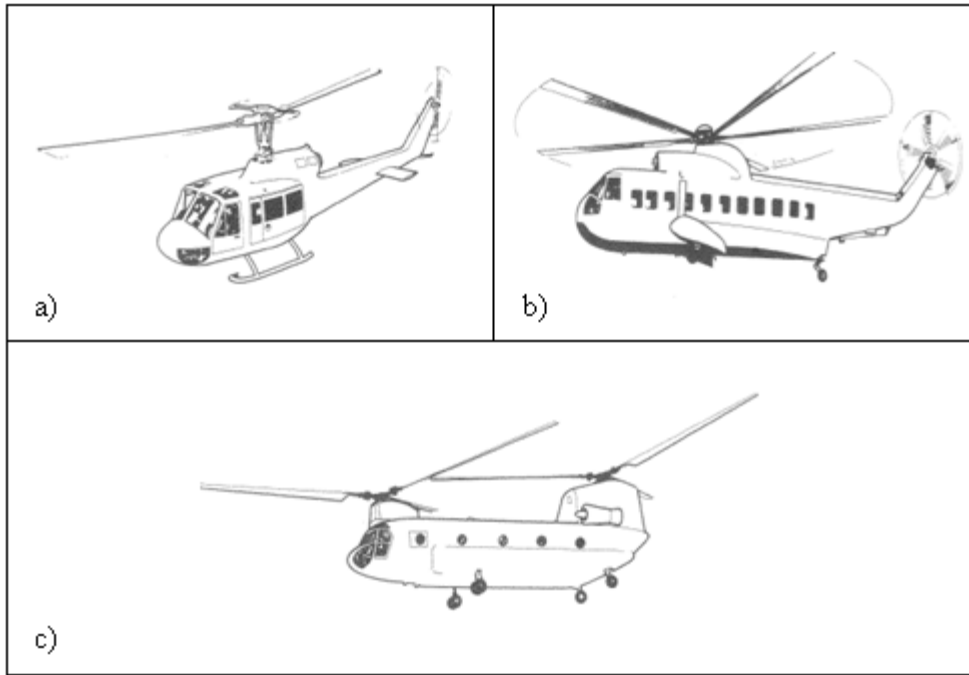
The approach for the elimination of ground resonance instability is based on providing sufficient level of damping to the system. In other words, the product of the damping levels associated with the fuselage mode and the lead-lag mode of the rotor should be greater than a critical value in order to avoid ground resonance problem. This criterion is applied for İTÜ-LCH and the required damping levels are identified. Realisation of the suggested levels of damping in practice is still a task to be done.

1. GİRİŞ

Günümüzde helikopterlerin kullanım alanları askeri ve sivil amaçlı olmak üzere ikiye ayrılabilir. Sivil havacılıkta yolcu taşıma, ağır yük taşıma ve yaralı taşıma, denizde ve karada kurtarma, yangın söndürme, polis devriyesi gibi birçok farklı alanda hizmet vermektedirler. Askeri bakımdan ise, savaş bölgesinden yaralıların kurtarılması, savaş teçhizatı taşınması, istihbarat toplanması ve belli hedeflere saldırı düzenlenmesi gibi çok çeşitli amaçlara hizmet etmektedirler. Helikopter, taşıma, itki ve kontrol kuvvetlerini oluşturmak için döner kanatlarını (rotor) kullanan bir hava aracı olarak tanımlanmaktadır [1]. Helikopter, rotor tarafından helikopterin ağırlığına eş bir taşıma kuvveti sağlandığı takdirde havada askı konumunda kalabilmektedir. Bu bakımdan, daha basit bir tanımla, helikopter için rotor veya rotorlarını kullanarak havada askıda kalabilen hava aracıdır da denilebilir [1]. Helikopterin çalışma prensibi, esasında rotor düzleminin açısının değiştirilmesiyle helikopterin uçuşunu sürdürebilmesi için gerekli olan momentlerin ve kuvvetlerin sağlanmasına dayanmaktadır. Rotor düzleminin ileriye ve geriye hareket ettirilmesi yunuslama kontrolünü, sağa ve sola hareket ettirilmesi ise yuvarlanma kontrolünü sağlamaktadır. Bir helikopter bu sayede, dikey kalkış/iniş, havada askıda kalma, ileri veya geriye doğru uçuş, tırmanma uçuşu, alçalma uçuşu ve birçok manevra gerçekleştirebilmektedir. Hiç kuşkusuz, bu sayılan kabiliyetlerden havada askıda kalabilme yeteneği helikopteri sabit kanatlı hava araçlarından (uçak) ayrı bir yere koymaktadır. Helikopterler ilk başta göründüklerinden çok daha karmaşıktırlar. Karmaşıklığın ana kökeni aerodinamik etkilerden ileri gelmektedir. Örneğin, rotordan geçen hava akımını tam ve yeterli olarak tanımlanması halen yapılan onca çalışmaya rağmen büyük zorluklar içermektedir. Bunun yanında, helikopterler mekanik açıdan da oldukça karmaşık bir yapı sergilemektedirler: Uzun ve narin paller, burulma, eğilme, yukarı-aşağı kanat çırpma ve kendilerini rotora bağlayan mafsallar etrafında ileri-geri (lead-lag) salınım hareketi yapmaktadırlar [1].

1.1 Helikopter Biçimleri

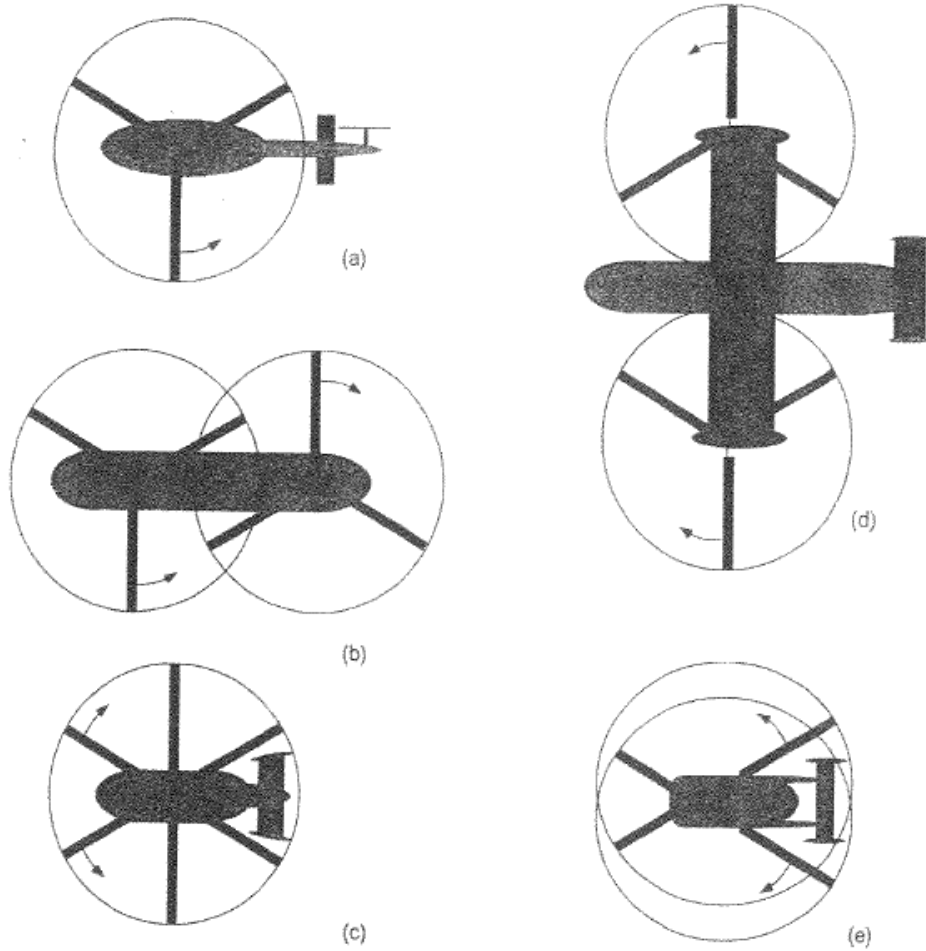
Günümüzde en çok kullanılan belli başlı helikopter görüşleri Şekil 1.1’de verilmiştir. Şekil 1.1(a) ve (b)’de görülen tek ana rotorlu (TAR) helikopterler, en çok tercih edilen helikopter biçimleridir. TAR’larda taşıma tek bir ana rotordan karşılanmaktadır. Ana rotorun karşı torku ise kuyruk bölgesinde yer alan kuyruk karşı tork sistemi tarafından karşılanır. Askı performansı ve düşük hızlardaki manevra kabiliyeti ile kararlı yapıları avantajlarıdır [2].



Şekil 1.1 : Belli başlı helikopter biçimleri: a) Tek Ana rotorlu – iki palli helikopter, b) Tek Ana rotorlu helikopter, c) Ardışık rotorlu helikopter [3].

Ardışık rotorlu (AR) helikopterler (Şekil 1.1c), tek ana rotorlu helikopterlerden sonra en çok kullanılan helikopter biçimleridir. Ardarda sıralanmış iki ana rotordan oluşur. AR’lerde motor gücünün tamamının taşıma için kullanılması mümkündür zira ters istikamette dönen rotorlar karşı torka ihtiyaç duymazlar. Böylece motor gücünün %10 – 20’sinin karşı torka harcanması gerekmez. Bu yüzden AR’ler ağır nakliye için tercih edilirler. Ağırlık merkezinin müsaade edilebilir değişim aralığı fazla olduğundan, harici yük taşıma kabiliyetleri yüksektir. Çift rotoru olduğundan göreceli olarak TAR’lere göre daha küçük rotarlara sahip olabilir. AR’ler rotorlarının konumları nedeniyle büyük ve ağırdırlar [2,4].

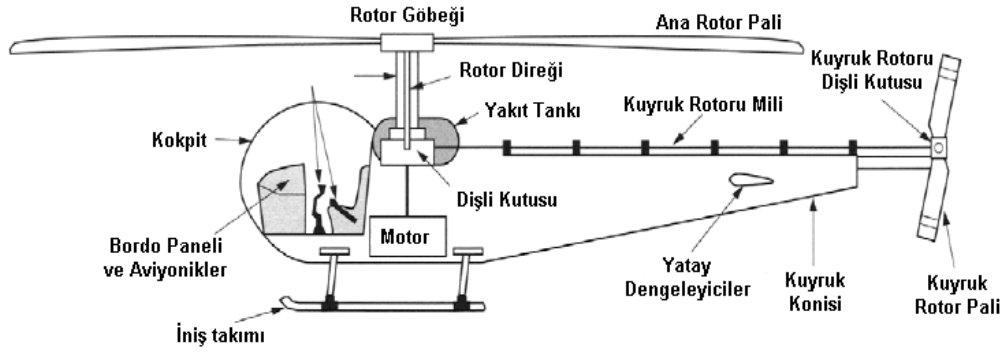
Şekil 1.2’de rotorlar, helikopter üzerindeki dağılım ve dizilişlerine göre gösterilmişlerdir. Burada, a) tek ana rotor (conventional) dizilişini, b) ardışık (tandem) rotor dizilişini, c) eş eksenli (coaxial) rotor dizilişini, d) yan yana (side-by-side twin) rotor dizilişini ve e) birbirini içine geçen (intermeshing) rotor dizilişini göstermektedir.



Şekil 1.2 : Rotor dizilişleri: a) tek ana rotor dizilişi, b) ardışık rotor dizilişi, c) eş eksenli rotor dizilişi, d) yan yana rotor dizilişi ve e) birbirini içine geçen rotor dizilişi [1].

Helikopterler daimi uçuş esnasında dinamik dengede durumunda olmalıdırlar, diğer bir ifadeyle, helikopter üzerine etkiyen net kuvvet ve momentlerin toplamı sıfır olmalıdır. Bu nedenle, ana rotorun oluşturduğu tepki torku bir şekilde dengelenmelidir. Bu bakımdan, tork dengelenmesi için seçilecek yöntem rotor dağılımını ve dizilişini etkileyen en önemli faktördür.

Helikopter bir çok sayıda alt sistem ve parçadan oluşmaktadır. Şekil 1.3'te TAR tipi bir helikopterin ana bileşenleri gösterilmektedir. Helikopteri oluşturan ana sistemler; ana ve kuyruk rotorları, gövde, motor, aktarma organları, yakıt sistemi, iniş takımı, kontrol mekanizması, gösterge ve aviyonikler, hidrolik ve elektrik güç sistemleridir.

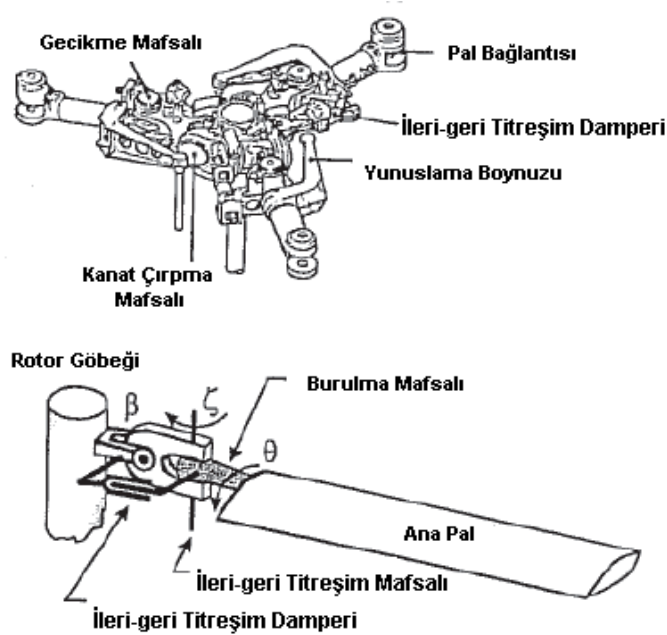


Şekil 1.3 : Tek ana rotorlu bir helikopterin ana bileşenleri [5].

1.2 Helikopter Rotorları

Helikopter rotorları genellikle iki veya daha fazla palanın eşit aralıklarla merkezi bir göbek etrafına yerleştirilmesiyle oluşmaktadır. Pallerin göbek etrafına bağlanma şekillerine göre de rotorlar aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler:

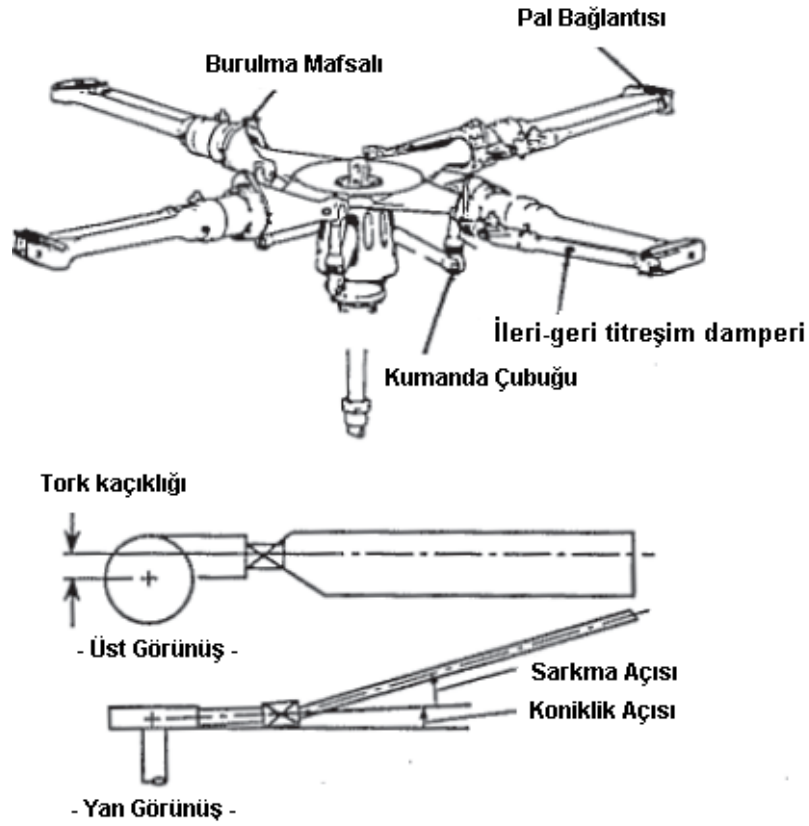
a) Mafsallı rotor: Şekil 1.4'te görüldüğü üzere, palalar göbeğe kanat çırpma (flap), ileri-geri titreşim (lead-lag) ve burulma (feathering) mafsalları vasıtasıyla bağlanmışlardır.



Şekil 1.4 : Tipik bir mafsallı rotor göbeği ve pali [6].

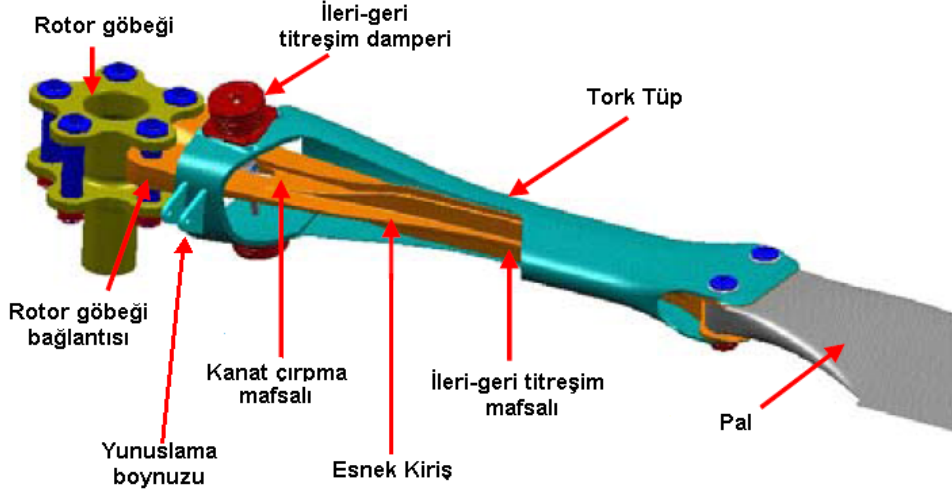
b) Tahterevalli (teetering) rotor: Bu rotor tipi iki palalı rotorlarda görülmekte ve iki pala simetrik/yekpare olarak üretilip tek bir kanat çırpma mafsalı ile ana rotor miline bağlanmaktadır.

c) Menteşesiz rotor: Paller göbeğe burulma mafsalı hariç, kanat çırpma ve ileri-geri titreşim mafsalı olmadan ankastre olarak Şekil 1.5'teki gibi bağlanmışlardır. Kanat çırpma ve ileri-geri yöndeki titreşim hareketini elastik olarak esneyerek gerçekleştirirler. Menteşesiz rotor, aynı zamanda, rijit rotor olarak da adlandırılmaktadır.



Şekil 1.5 : Tipik bir menteşesiz rotor göbeği ve palı [6].

d) Yataksız rotor: Paller göbeğe menteşesiz rotordan farklı olarak, burulma mafsalı olmadan, elastik burulma yapacak şekilde bağlanmışlardır (Şekil 1.6). Sonuçta, rotor tipleri arasındaki ana fark, kanat çırpma ve ileri-geri titreşim mafsallarının varlığı veya yokluğu, ve pallerin kök etrafında rijit dönme veya yapısal eğilme hareketini gerçekleştirebilmeleriyle belirlenir [3].



Şekil 1.6 : Yataksız rotor göbeği örneği [54].

1.3 Helikopterlerde Görülen Kararlılık Problemleri

Helikopterlerde görülen aeroelastisite kaynaklı problemler, kararlılık ve cevap (response) problemleri olmak üzere iki kısma ayrılırlar. Aeroelastik kararlılık problemleri kendi içinde; yalıtılmış pal problemleri, yalıtılmış rotor problemleri ve bağlı rotor-gövde kararsızlıkları (coupled rotor-fuselage instabilities) şeklinde sınıflandırılabilirler.

Yalıtılmış pal problemleri, sadece tek bir pali etkilerler. Başka bir ifadeyle, tek bir palin diğer pallerle, rotorla ve gövdeyle arasındaki bağlaşımı (coupling) içermezler. Bu amaçla, bir rotor sistemi onu temsilen tek bir pal ile modellenirse bu kararsızlıklar gözlemlenebilir.

Yalıtılmış rotor problemleri ise, pallerin kendi aralarındaki bağlaşımını içermekte fakat rotorun gövde ile arasındaki bağlaşımını içermemektedir. Paller arasındaki bu bağlaşım iki yolla sağlanabilir. İlk durumda, pallerin birbirine göre bağıl hareketini sönümleme amaçlı kullanılan sönüm elemanının varlığı sayesinde (interblade connections); ikinci durumda ise, daimi olmayan (unsteady) aerodinamik etkiler sayesinde paller arası bağlaşım sağlanabilir. Bu sanki-daimi aerodinamik etkinin sebebi ise, her bir palin girdabı saçması (shed vorticity) ve bu nedenle arkadan gelen palin, daha önceki palin iz bölgesinin (wake) içinden geçmesidir [7].

Bağılı rotor-gövde kararsızlıklarına (coupled rotor-fuselage instabilities) örnek verilebilecek iki ana kararsızlık hali yer rezonansı ve hava rezonansıdır. Temel olarak bu iki kararsızlık, rotor kütle merkezi hareketinin gövdenin hareketini tahrik

etmesi ve gövde hareketinin de rotor kütle merkezi hareketini tahrik etmesiyle oluşmaktadır. Başka bir deyişle, tüm sistemin kendi kendini tahrik (self-excited) etmesi şeklinde ortaya çıkarlar.

Aeroelastik cevap problemleri de, en az aeroelastik kararlılık problemleri kadar önemlidirler. Örneğin, bir hava aracı belirli bir uçuş rejiminde veya zarfında kararsızlığa sahip ise bu hava aracı uçuşa uygun değildir. Bununla birlikte, bir helikopter kararlılık açısından uçuşa müsait olabilir; fakat, helikoptere etkileyen dinamik yükler nedeniyle örneğin paller her yüz uçuş saatinde bir yenileriyle değiştirilmek zorunda kalınıyorsa bu durum kabul edilemez. Bu nedenle bir helikopter tasarım açısından ele alınırsa, aeroelastik açıdan kararlı olması yetmez aynı zamanda aeroelastik cevabında kabul edilebilir seviyelerde olması gerekmektedir [7].

1.4 Problemin Tanımı

Yer rezonansı, dönen ana rotor sistemi ile duran gövde sistemi hareketinin, birbirine bağlanması ile meydana gelen bir tür kararsızlık halidir ve bu tezin ana temasını oluşturmaktadır. Yer rezonansı için, pallerin ileri-geri yöndeki titreşim hareketi ile rotor göbeğinin düzlem içi hareketinin birbiriyle etkileşmesi sonucu oluşan dinamik kararsızlık halidir de denilebilir. Palin ileri-geri yöndeki titreşim hareketinin frekansı (özellikle sabit eksen takımına göre ifade edildiğinde düşük değerdeki frekans bileşeni) ile rotor-göbek sistemini destekleyen gövde yapısının doğal frekansının çakışması yer rezonansına neden olur [3]. Fakat, yer rezonansı tabiri içinde “rezonans” sözcüğünü barındırdığından bazen yanlış anlaşılmalara yola açabilmektedir. Gerçekte, bu olgunun klasik anlamda rezonans kavramı ile birebir ilgisi olmayıp, tam anlamıyla bir mekanik kararsızlık halidir. Bununla birlikte, yer rezonansı tabiri çoğunlukla, artiküle rotorlu helikopterlerde, helikopterin iniş takımları üzerinde yerle temas halindeykenki kritik modda yaptığı salınım hareketine atfedilmektedir [3]. Ayrıca, yer rezonansı sadece helikopterlerde karşılaşılan bir olgu değildir. Genel olarak, elastik bir destek üzerine oturtulmuş dönen rotorlarda da karşılaşılabilecek bir sorundur [7].

Palin ileri-geri titreşim hareketi frekansı rotorun dönme hızına bağlı olduğundan, bu tip kararsızlıklar rotor için belli başlı kritik hız aralıklarında oluşurlar. Genellikle, düzlem-içi yumuşak (soft in-plane) rotorlarda, dönme hızının bir fonksiyonu olan

palin ileri-geri titreşim hareketi frekansı, rotorun dönme hızına karşılık gelen frekans değerinin altındaysa, kendini-besleyen kararsızlık durumunun gözlenmesi kuvvetle muhtemeldir.

Coleman-Feingold yer rezonansı gibi titreşimleri “kendini besleyen titreşimler” grubunda ele almışlardır. Bu tip titreşimlerin ortak özelliği sistemin enerji alabileceği bir dış enerji kaynağının varlığı ve sistemin bu kaynaktan enerji alış düzeninin bizzat kendi titreşimlerince belirleniyor olmasıdır. Yani bu sistemlerde titreşim, bir sonucu olduğu titreşim enerjisinin sisteme girişinin nedenidir de. Bu tür titreşimlere kendini besleyen titreşimler adının verilmesi de bundandır [8]. Havacılık alanında, bu tip titreşimler için verilebilecek en iyi iki örnekten birisi uçak kanatlarında görülen “flutter” problemi, diğeri ise yer rezonansı problemidir. Kanat flutter probleminde, titreşimlerin oluşması için gerekli enerji aerodinamik kuvvetlerden elde edilir. Diğer taraftan yer rezonansı probleminde, enerji ana rotorun dönme hareketinden elde edilir [9].

Gerçekten de yer rezonansını modelleyen hareket denklemleri incelendiğinde, hareket denklemlerinin sağ tarafındaki tahrik kuvveti terimlerinin olmadığı görülmektedir. Başka bir ifadeyle, mekanik sistemin hareketini besleyen değişken tahrik kuvveti, hareketin kendisi tarafından oluşturulur ve kontrol edilir. Bu nedenle hareket durduğu anda onun oluşturduğu değişken tahrik kuvveti de yok olur.

1.5 Tezin Amacı

Bu çalışmanın ana amacı, literatürde yer rezonansının modellenmesine yönelik çalışmaları incelemek, bu çalışmalarda kullanılan matematiksel modelleri irdelemek, bu modellerin avantaj ve dezavantajlarını ortaya koymak, literatürde önerilen yer rezonansı modellerini Rotam’da tasarlanmakta olan helikoptere uyarlamak, bu modelleri kullanarak analizler gerçekleştirmek, tasarlanan helikopterin yer rezonansına karşı davranışını incelemek, bu analizlerin sonuçlarına göre helikopterin yer rezonansına maruz kalmaması için gövde ve pallerde olması gereken sönüm miktarını tahmin etmek, sönüm uygulamaları için önerilerde bulunmaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1 Yer Rezonansı Kazaları

1950'lerin ortalarında helikopterlerde ortaya çıkan yer rezonansı probleminin çözümü için, –helikopter geliştirme konusunda öncü olan Sikorsky şirketi tarafından– meydana gelen felaketlerle ilgili veriler kısa sürede toplanmış ve sorunun giderilmesi için gerekli çalışmalar başlatılmıştır. Sikorsky şirketi, rotor pallerindeki ileri-geri titreşim mafsallarının, gövdenin (pylon) elastik direngenliğinin, iniş takımlarındaki elastik elemanların, lastiklerin (pneumatic tyres) ve sistemdeki şok sönümleyicilerinin (shock struts) yapısal bir bütün olarak çalışıp, helikopteri, ana rotor devri frekansına yakın bir doğal frekansa sahip kıldığını tespit etmiştir. Mühendisler –korkusuz bir pilot ile yaptıkları denemelerde– rezonans durumuna giren bir helikopterin, pilotun kolektifi (collective) arttırarak iniş takımlarının zemin ile temasını kesmesi durumunda tehlikenin geçici olarak da olsa giderilebileceğini göstermişlerdir. Kalıcı çözüm önerisi olarak ise, sistemin doğal frekansının düşürülmesini ve sisteme sönüm eklenmesini önermişlerdir. Şekil 2.1'de TH-55 helikopterinin yer rezonansına maruz kalmadan önceki hali görülmektedir.



Şekil 2.1 : TH-55 Osage, Hughes 269A'nın askeri versiyonu [10].

Şekil 2.2’de TH-55 helikopterinin, Şekil 2.1’dekine çok benzer bir versiyonunun yer rezonansına maruz kaldıktan sonraki hali görülmektedir. Bu kaza, Mart 1967’de, Texas’taki Amerikan ordusuna ait olan Fort Wolters havacılık okulunda gerçekleşmiştir [10].



Şekil 2.2 : TH-55’in yer rezonansına maruz kaldıktan sonraki hali [11].

Şekil 2.1’de görülen helikoptere benzer bir helikopter olan Hughes 269A helikopterinde –Ağustos 1996 tarihinde– yer rezonansı sorunu görülmüştür. Kaza tutanaklarında bu durumdan şöyle bahsedilmektedir: Yaklaşık olarak 1425 CDT (Controlled Departure Time) kontrollü uçuş saati sonunda, ana rotor sisteminin bakımının (üç adet ileri-geri titreşim damperinin yenilenmesi) ardından yapılan bakım test uçuşunda, pilot helikopteri askı konumuna getirdiğinde aniden ana rotorda şiddetli titreşimler meydana gelmiş ve acil inişi takiben yer rezonansı gerçekleşmiştir. Bu kazada pilot hafif şekilde yolcu ise, ciddi şekilde yaralanmıştır [10].

Başka bir yer rezonansı vakasına, Birleşik Devletler donanmasından emekli komutan J. E. Waldron tarafından Şekil 2.3’te görülen Sikorsky H04S 3G helikopteri ile Antarktika’da yapılan uçuşlarda karşılaşılmıştır. Komutan Waldron başlarından geçen olayla ilgili şunları belirtmiştir: Buzlu zemin üzerinden yapılan normal bir

kalkışın ardından gerçekleştirilen inişte, pilotun önce sol tekeri yerle temas ettirmesi sonucu, helikopter şiddetli bir şekilde sarsılmaya başlamış ve acilen havalanılması suretiyle yer rezonansının tüm helikopteri parçalamasının önüne geçilmiştir [10].



Şekil 2.3 : Sikorsky H04S 3G helikopteri [10].

Seasprite helikopterinin (Şekil 2.4) başına gelen yer rezonansını incelemekle görevli tahkik heyeti raporunun basın duyurusunda (6 Aralık 2004), kaza hakkında bilgiler verilmiştir. Kaza, 22 Mayıs 2004'te Umman körfezinde rutin devriye görevini yapmakta olan HMNZS Te Mana fırkateyninin güvertesinde gerçekleşmiştir. Açıklamada, çeşitli bakımları yapılan Seasprite helikopterinin, yerde iken çalıştırılıp çalışma koşulları kontrol edilmesi gerekmiştir. Bunun için, helikopter zincir halatlarla (chain lashings) iki tanesi motor kaplamasının (engine nacelle) hemen altından olacak şekilde gemi güvertesine bağlanmıştır.



Şekil 2.4 : Seasprite helikopteri [12].

Test için önce motorlardan biri çalıştırılmış ardından da rotora güç verilmiştir. Rotorun dönmeye başlamasıyla, pilot normalin üzerinde büyük genlikli titreşimlerin geliştiğini farketmiş ve yer rezonansının oluşmaya başladığını farkettiğinde güç akışını tamamen kesmiştir. Buna rağmen, helikopterin sancak tarafındaki halat

bağlantı noktasının ayrılmasıyla yine sancak tarafındaki kapı ve cam ve de iniş takımlarının her iki yanına alt gövdenin dış kabuklarında (skin) katlanmalar şeklinde hasarlar meydana gelmiştir. Tamir için gerekli tutarın ise NZ\$ 1.5-3.0 milyon civarında olduğu tahmin edilmiştir. Tahkik heyetinin değerlendirmesinde, konuyla ilgili tavsiyelerde bulunulmuş ve bu tavsiyelerin çoğuna donanma ve hava kuvvetleri içindeki ilgili kuruluşlarca zaten dikkate alındığı ifade edilmiştir. Bunun dışında, teknik mürettebatı ve hava mürettebatını eğitmekte kullanılan yayınlarda-dokümantasyonlarda zincir halatlarının bağlanma prosedürlerinde iyileştirmeler yapılması gerektiği vurgulanmıştır [10].

Başka bir yer rezonansı vakasında Ocak 1969'da Queensland-Gladstone havaalanında (Avustralya) gerçekleşmiştir. Raporda kazadan hakkında; Sikorsky S58B tipi bir helikopter (Şekil 2.5) oniki yolcuyla havalanmış, üç metre kadar yükseldikten sonra, motorda meydana gelen güç kaybına bağlı olarak pilot dengesiz bir iniş yapmak zorunda kalmasıyla yer rezonansı başlamıştır. Pilot helikopteri tekrar havalandırmaya çalışsa da bu girişimi motordaki güç kaybından dolayı sonuçsuz kalmıştır. Yer rezonansı ilerledikçe gövde sola savrulmuş ve pilot rotor freni yapmıştır. Ana rotor pallerinin yere çarpmasıyla iniş takımı da hasara uğramış helikopterin ön kısmı 180 dereceden fazla dönerek ancak durabilmiştir. Pilot motorun kapatıldığından emin olduktan sonra sağ kokpit camından, helikopterden ayrılmış; yolcular ise, kabin görevlisi eşliğinde ana kabin kapısından tahliye edilmişlerdir. Yolcuların tahliyesi esnasında, gövdenin ön-alt kısmında yere sızmakta olan yakıtın alev almasıyla bir yolcu ciddi şekilde, iki yolcu da hafif şekilde yaralanmıştır. Çıkan yangında helikopter ciddi şekilde hasara uğradığından, enkazdan kazanın nedeni hakkında detaylı bilgi edinilememiştir.



Şekil 2.5 : Sikorsky S58B helikopteri [13].

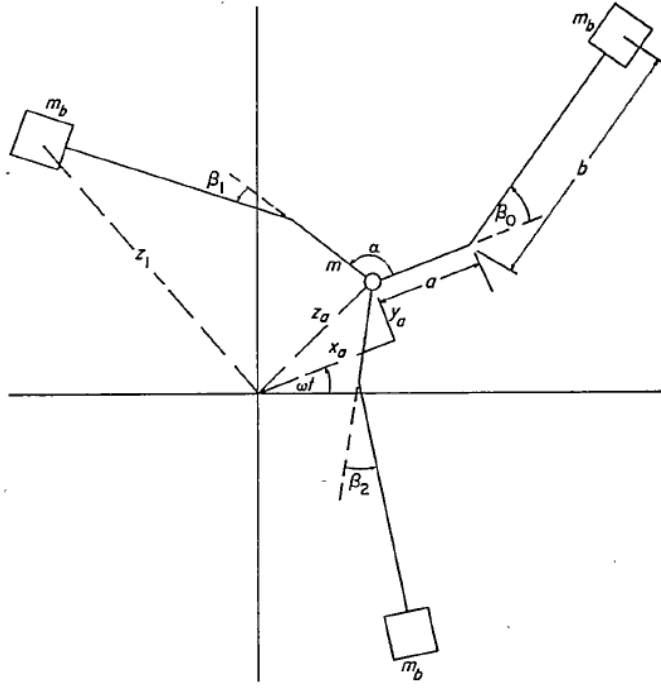
Kazanın muhtemel nedeni olarak ise, düşük irtifada meydana gelen güç kaybına bağlı olarak helikopterde yer rezonansı sorunu görülmüştür [14]. Şekil 2.6’da Westland Wessex helikopteri ise, başına gelen yer rezonansı sonrasında ciddi hasara uğramış halde görülmektedir.



Şekil 2.6 : Westland Wessex helikopterinin yer rezonansından sonraki hali [15].

2.2 Literatürdeki Yer Rezonansı Çalışmaları

II. Dünya savaşının başlarında, askeri amaçlı olarak tasarlanan bazı helikopterlerin yer testleri esnasında rotor kararsızlığından kaynaklanan ve helikopterin yapısal bütünlüğünü tehlikeye atabilecek şiddetli titreşimler gözlemlenmiştir. İlk başlarda, bu kararsızlık durumu rotor-pal çırpınma (flutter) kararsızlığına bağlanmış fakat daha sonra yapılan dikkatli incelemeler, bu durumun şimdiye kadar görülmemiş bir olgudan –rotorun dönme enerjisinin pallerin titreşim enerjisine dönüşmesi– kaynaklandığı anlaşılmıştır [16]. Bu durum özellikle helikopter yerde iken ve yere yakınen gerçekleştiğinden bu duruma yer rezonansı ismi verilmiştir. Bu sorunu araştırmak ve soruna çare bulmak için NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) görevlendirilmiştir. 1942-47 yılları arasındaki süre zarfında, menteşeli rotor pallerinin kendini besleyen kararsızlığının teorisi Robert P. Coleman ve Arnold M. Feingold tarafından Langley havacılık laboratuvarında geliştirilmiştir. Tarihte, konuyla ilgili ilk teorik çalışmalar Coleman ve Feingold tarafından ortaya konmuştur. Şekil 2.7’de Coleman ve Feingold’ un yer rezonansını analiz etmek için kurdukları matematik model gösterilmektedir.



Şekil 2.7 : Coleman ve Feingold tarafından kurulan ilk yer rezonansı modeli [16].

Bu modelde, helikopter rotor düzleminde basitleştirilmiş bir mekanik sistem olarak temsil edilmektedir. Coleman ve Feingold bu modeli kurarlarken, yer rezonansını inceleyebilmek için gerekli ve yeterli bir basitlikte bir model oluşturmayı amaçlamışlar. Bu amaçla da, bazı kabuller ve basitleştirmeler yaparak, eşdeğer parametreler tanımlayarak yola çıkmışlardır. Öncelikle, rotordaki k 'nci palin kütle merkezinin konumunu (Şekil 2.7) sabit bir eksen takımına göre yazabilmek için kompleks düzlem üzerinde kompleks genelleştirilmiş koordinatları (kompleks serbestlik dereceleri) üstel gösterimle tanımlamışlardır. Ardından, bu ifadenin zamana göre türevini alıp kompleks genelleştirilmiş hızlara geçerek k 'nci palin öteleme ve dönme kinetik enerjilerini ulaşımlardır. Benzer işlemler, gövdenin kinetik ve potansiyel enerjisi, palin potansiyel enerjisi ve de sistemin sönüm enerjisi fonksiyonu yazılırken yapılmıştır. Daha sonra, bu kinetik, potansiyel ve sönüm enerjisi ifadelerinin kompleks eşlenikleri genelleştirilmiş koordinatlara ve genelleştirilmiş hızlara göre türevleri alınarak sistemin hareket denklemleri Lagrange denklemleri yöntemiyle elde edilmiştir. Sistemin hareketini veren denklem takımı da, pallerin konumu sabit eksen takımına göre yazıldığından periyodik değil, sabit katsayılı diferansiyel denklem takımı olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle ileride değinilecek olan Fourier koordinat dönüşümünün hareket denklemlerine uygulanmasına gerek kalmamıştır. Son olarak, elde edilen hareket denklemleri

özdeğer problemi çerçevesinde ele alınıp sistemin boyutsuz rotor hızına bağlı özdeğerleri ve diğer parametreler arasındaki ilişkiler faydalı grafiklerle ifade edilmiştir. Coleman ve Feingold' un yapmış olduğu, yer rezonansı hakkındaki bu ilk çalışma, bu konuda çalışma yapacak araştırmacılar için bir mihenk taşı niteliğindedir.

Geliştirilen bu teoride, soruna ait önemli parametreler tanımlanmış ve bu tip bir kararsızlığı ortadan kaldırmak için tasarım aşamasında alınabilecek önlemler hakkında öneriler sunulmuştur. Orjinal sonuçlar, NACA tarafından üç ayrı raporda yayınlanmıştır. Bu üç rapor, rotorların mekanik kararsızlığı konusunda ilk önemli yayınlar olarak kabul edilmiş olup temel referans malzemesi olma özelliğini günümüzde de sürdürmektedir. Zaman içinde bazı düzeltmeler eklenip, üç rapor üç bölümden oluşan tek bir cilt (Report-1351) altında 1957 yılında yayınlanmıştır [16].

Deutsch, iki ana durum için analitik çalışmalar yapmıştır [17]. Birinci durumda, iki yönde (x ve y) izotropik olarak yataklanmış eşdeğer rotor göbeği kütesine herbirinin ileri-geri titreşim mafsalı olan b -adet rijit pal ekleyerek bir model oluşturmuştur. İkinci durumda ise, birinci durumdan farklı olarak sadece efektif rotor göbeği kütlesi tek serbestlik derecesine sahip olacak şekilde kısıtlayarak ayrı bir model oluşturmuştur. Deutsch, rotor göbeğine ve palin hareketine viskoz sönüm ekleyerek sönümlü modeller de kurmuştur. Deutsch, öncelikle incelediği modelin $(b+2)$ bağlı periyodik katsayılı hareket denklemlerini elde etmiş, sonra bunları uygun bir dönüşümle dört adet bağlı sabit katsayılı diferansiyel denklem takımına dönüştürmüş ve eksponansiyel çözüm kabulüyle modelin sabit katsayılar determinatını, (karakteristik determinant) ardından da frekans denkleminin (karakteristik denklem) ulaşmış olup frekans denkleminin reel ve imajiner terimlerinden iki adet cebrik denklem elde etmiştir. Deutsch, bu reel ve sanal denklemi aynı grafik üzerine çizdirerek, sönüm ile kararsızlık arasındaki ilişkilere işaret etmiştir. Buradan hareketle, palin sönümü ile gövdenin sönümünü bir arada içeren yaklaşık analitik ifadeler çıkartılmıştır. Deutsch'un çalışmasında değindiği önemli bir nokta da şudur: helikopterlerin çoğunluğunda, ana rotor mili ve gövde oldukça rijit bir sistem oluştururlar. Bundan dolayı, rotor göbeği bağlantısından (rotordan gövdeye) tahrik edilebilecek frekanslar da oldukça düşük olacaktır. Helikopter iniş takımları üzerinde dururken iniş takımının modları veya ana rotor milinin dengesizlikten dolayı oluşan ilgili kritik hızlarındaki modları bunlara örnek teşkil etmektedir. Bu nedenle de, yer rezonansının görüldüğü rotor kararsızlık bölgelerini yok etmek için, ileri-geri titreşim

mafsalına ve iniş takımına uygun sönüm değerleri seçilmelidir ve bu seçim için her iki sönüm degerinin çarpımı minimum bir değerden büyük olmalıdır ($sönüm_{gövde} \cdot sönüm_{pal} > \text{minimum değer}$).

Horvay, Deutsch'un kararlılık kriterine benzer bir kararlılık kriteri çıkarmış ve aynı zamanda kendini besleyen titreşimlerin analizine girmeden, helikopterin yerdeykenki titreşimlerini incelemiştir [18]. Horvay'ın çalışmasında, ele aldığı helikopter modelinin doğal frekans ve mod şekillerini bulmuş, ve rezonans durumunda oluşacak genlikleri tahmin etmiştir.

Howarth ve Jones, kararsızlık bölgesini yok etmede kullanılan sönümlerin çarpımı kriterinin, gerçekte ölçülen değerle düşük bir uyum içerisinde olduğunu bulmuşlardır [19].

Leone iki-palli ve pal kökü rotor göbeğine ankastre bağlı bir rotor modeli oluşturarak yer rezonansı sorununu tetkik etmiştir [20]. Bu çalışmada palleri Coleman'ın aksine esnek şekil değişimine müsaade edecek şekilde modelleyerek Feingold'un bulduğu çözüm ile karşılaştırmıştır. Leone, palin ileri-geri titreşim hareketi yönündeki serbest (free) ve bağısız (uncoupled) mod şekilleri ve doğal frekansları kullanılarak Coleman parametrelerinin (Λ_1, Λ_2 ve Λ_3) uygun bir şekilde tanımlanması durumunda, Feingold'un çözümünün geçerlilik kazandığı sonucuna varmıştır.

Howarth ve Jones'ın bulduğu sonuçlar Hooper'ı rotor ve gövde sönümünün etkisi üzerinde inceleme yapmaya itmiştir [21]. Hooper kendine başlangıç noktası olarak Coleman'ın hareket denklemlerini almış ve buradan hareketle, Coleman'ın kararlılık kriteri sağlansa da, sistemde kararsızlığın oluşabileceğini göstermiştir. Hooper sönümlerin çarpımı kriterine ($sönüm_{gövde} \cdot sönüm_{pal}$) ek yaparak, sönümlerin oranının da ($sönüm_{gövde} / sönüm_{pal}$) kararlılığı sağlamada rol oynadıkları sonucuna varmıştır.

Gabel ve Capurso, Coleman'ın hareket denklemlerinden yola çıkmışlar ve Coleman'ın elde ettiği karakteristik denklemden sistemin kararlılığını tayin etmek için Routh kararlılık kriterini kullanmışlardır [22]. Yaptıkları çalışmada dikey ve yatay eksenlerinde gövde ve pal sönümünün kombinasyonlarını içeren diyagramlar hazırlamışlardır. Bu diyagramları kullanarak, Deutsch'un kararlılık kriterinin, kararsızlık bölgesini yok etmek için gerekli toplam sönüm miktarını gerekenin altında bir değerde tahmin ettiği sonucuna varmışlardır.

Price [23] ilk çalışmasında Coleman'ın kararlılık kriterini incelemiş ve grafiksel açıdan, reel denklem eğrisi kararsızlık merkezinden geçtiği halde kararsızlık bölgesinin kaybolmadığını göstermiştir. Daha sonra, Price kararlılık sınırlarını (rotor hızı, ζ_{pal}) düzleminde elde etmek için doğrudan bir yöntem geliştirmiş ve Deutsch'un kriterinin kararlılığı sağlamada yetersiz kaldığını ancak, $\zeta_{gövde}$ ve ζ_{pal} değerlerinin uygun seçilmesi halinde yeterli olabileceğini göstermiştir. Price [24] diğer bir çalışmasında, kararlılık sınırlarını keyfi ζ_{pal} değerleri ve diğer sistem parametreleri için (rotor hızı, $\zeta_{gövde}$) düzlemi üzerinde çizebilmek için yeni bir yöntem geliştirmiştir.

Donham, Cardinale ve Sachs, düzlem içi yumuşak (soft in-plane, rigid rotor) rijit bir rotor üzerinde yaptığı çalışmada, helikopterlerde kararlılık aralığını iyileştirmenin iki yoluna dikkat çekmiştir [25]. Bunlardan ilki, ileri-geri titreşim damperinin sönüm oranını artırılması veya rotor sisteminde mekanik bir bağlantı vasıtasıyla aerodinamik sönümün artırılması; ikincisi ise, helikopter gövdesinin doğal frekanslarının rotorun tahrik frekanslarından yeterince uzakta konumlandırılması şeklindedir.

King [26], Mil ve arkadaşları [27] tek serbestlik dereceli gövde modeli ile işe başlayarak kararlılık kriterini çıkarmışlar daha sonra gövdenin serbestlik derecesi dört olana dek aynı durumu incelemişlerdir. Buna karşılık, Mil ve arkadaşları yer rezonansı modelini tek serbestlik derecesine indirgeyerek modelleyebilmek için çalışmışlardır.

Coleman'ın kullandığı düzlemsel yer rezonansı modelindeki iki serbestlik dereceli gövde modeli bazı yazarlar tarafından karmaşık bulunmuş ve daha da basitleştirilmiştir. Done, gövdeyi tek serbestlik derecesi ile modelleyerek toplam üç serbestlik dereceli bir yer rezonansı modeli oluşturmuştur [28]. Done bununla yetinmeyip, *bi-normal koordinatlardan*[†] faydalananarak sistemi iki serbestlik derecesine indirgemıştır. Bu basitleştirmeler konunun anlaşılması açısından bir

[†] Lineer mekanik bir sistemin ikinci mertebeden olan hareket denklemi:

$[M]_{n \times n} \{\ddot{x}\} + [K]_{n \times n} \{x\} = \{0\}_{n \times 1}$, birinci mertebeye indirgendiğinde, $[P]_{2n \times 2n} \{\dot{z}\} + [Q]_{2n \times 2n} \{z\} = \{0\}_{2n \times 1}$ olsun. Bu durumda, sistemin modal matrisi $[V]$, Matlab'te $[V, D] = eig(Q, P)$ komutuyla elde edilip, $\{q\} = [V] \{z\}$ işlemleriyle, $\{q\}$ *bi-normal koordinatları* [56] elde edilir.

bakıma iyi olmakla beraber elde edilen sonuçlar bakımından ise tatmin edici değildir.

Hammond, izotropik olmayan rotor destek sistemi ve dönel simetriye sahip olmayan rotorlarda (en az bir palin yapısal özellikleri diğer pallerden farklı veya paller rotor üzerinde eşit aralıklarla konumlandırılmadıysa) yer rezonansını incelemiştir [29]. Yaptığı çalışmada, pallerden birinin sönüm damperi işlevsiz kaldığı (rotordaki dönel simetrinin bozulması) takdirde, bu durumun yer rezonansına olan etkisini Floquet teorisini kullanarak araştırmıştır. Bu çalışma aynı zamanda Floquet teorisinin yapısal asimetri içeren bağlı rotor-gövde problemlerine uygulanabilirliğini ele alan ilk makale olma özelliğini de taşımaktadır. Hammond'un çalışmasında mekanik kararsızlıkları belirlenmesi için Floquet teorisinin kullanılmasının temel nedeni, rotorun çeşitli sebeplerden dolayı –ki burada bu artiküle bir rotorun gecikme damperlerinden birinin işlevsiz kalması halinde ortaya çıkıyor– dönel simetri özelliğini kaybetmesinden dolayı rotorun hareket denklemlerindeki periyodik katsayılar, gerekli dönüşümlerle sabit katsayılı hale getirilememesindendir.

Johnson, ikisi rotor göbeğinin düzlem içindeki hareketini, diğer ikise de rijit palli rotorun kütle merkezinin düzlem içindeki hareketini tanımlayan toplam dört serbestlik dereceli düzlemsel bir yer rezonansı modeli oluşturmuş ve bu modelin denklem takımını farklı durumlar için detaylı olarak incelemiştir [3]. Nahas'ın oluşturduğu yer rezonansı modelinde helikopter gövdesi rijit ve altı serbeslik derecesini haizdir, aynı zamanda iniş takımı da üç doğrultuda lineer elastik yaylar ve damperlerle temsil edilmektedir. Rotor modeli ise Coleman'ın çalışmasındaki gibi rijit pallidir.

3. TEORİK MODELLER

3.1 Dönen Sistemler ve Campbell Diyagramı

Rotor dinamiği sahasında çalışanların aşına olduğu Campbell diyagramı, özellikle dönel makinaların tasarım öncesi ve sonrası, titreşim problemleri ve bunlara bağlı sorunlarla uğraşan mühendislerin sıkça başvurduğu bir tanı/inceleme aracıdır. Literatürde Campbell diyagramı için farklı adlandırmalara rastlamak mümkündür: “Fan plot/chart”, “Spoke diagram”, “Southwell diagram”, “Coleman plot”, “interference diagram” bunlardan bazılarıdır. Rotor dinamiği analizlerin genellikle ilk yapılan sistemin kritik hızlarının belirlenmesidir.

3.1.1 Kritik hızlar

Kritik hızlar, dönen sistemin doğal frekanslarının rotorun dönme hızı ile çakıştığı hızlardır. Dönen sistemin (rotor) doğal frekansları rotor hızına bağlı olarak değişmekte, duran sistemin (stator) frekansları ise, genellikle sabit kalmaktadırlar. İşte bu rotor sisteminin doğal frekanslarının rotor hızı ile çakıştığı bölgelerde kritik hızlar ortaya çıkmaktadır.

Rotorlar sıklıkla zamana bağlı olarak değişen tahrik kuvvetlerine/momentlerine maruz kalırlar [30]. Örneğin rotor üzerindeki dengesiz kütlelerin oluşturduğu dengesizlik; rotoru, rotorun dönme hızına eş bir Ω açısal frekansındaki harmonik bir kuvvetle tahrik eder. Dengesizliğin yarattığı bu senkron tahrik, rotora bağlı ve rotorla birlikte dönen bir vektöre benzetilebilir. Bu bağlamda, rotoru tahrik eden tahrik kuvvetinin frekansı yada bu tahrik frekansının harmonik bileşenleri (tamsayı katları), rotorun dönme hızıyla ilişkilendirilerek Campbell diyagramı üzerine gösterilmektedir. Böylelikle, sistemin kendi frekanslarıyla, sistemin üzerine etkiyen tahrik kuvvetlerinin frekansları arasındaki çakışma noktaları yani sistemin kritik hızları olmaya aday rotor devirleri, Campbell diyagramı yardımıyla tespit edilmektedir. Campbell diyagramı üzerindeki her kesişme noktası aynı oranda tehlike yaratmamaktadır [30]. Eğer tahrik kuvvetinin frekansı kesiştiği modun doğal frekansından tamamen ayırık (uncoupled) ise bu ilgili devirde herhangi bir rezonans

gözlemlenmez. Örneğin, bir rotora etkiyen tahrik torkunun frekansı rotorun eğilme frekanslarından biriyle kesişiyor olsun. Eğer, bu frekanstaki burulma ve eğilme modları birbirinden tamamen ayrık (uncoupled) ise bu frekansta bir rezonans gözlemlenmesi beklenemez [30]. Bununla birlikte sistem öyle kritik hız değerlerine sahip olabilir ki, bu hızların yakınında çalışması halinde bile kalıcı hasarlar meydana gelebilmektedir.

Bazı durumlarda kritik hız kavramı ile doğal frekans kavramı karıştırılmaktadır. Örneğin, bir rotor sisteminin eğilme titreşimlerini ifade eden herhangi bir modu veya modları Campbell diyagramında yatay eksene paralel olacak şekilde uzanıyorsa, bu titreşim modları dönme hızından bağımsızdır, başka bir ifadeyle, $\omega=1\Omega$ çizgisi üzerindeki kritik hızların sayısal değerleri, rotor duruyorken ki ($\Omega=0$) doğal frekans değerleriyle örtüşmektedir. Aslında iki kavram birbirinden tamamen farklı olmakla birlikte meydana gelen karışıklık bu duruma atfedilmektedir [30].

Özetle, Campbell diyagramı sayesinde, incelenen lineer rotor sisteminin muhtemel kritik hız ve rezonans bölgeleri tespit edilmektedir.

3.1.2 Kararsızlık bölgeleri

Yapılarında rotor barındıran çok serbestlik dereceli mekanik sistemlerin, rotorun bazı çalışma hızı aralıklarında kararsız davranış sergilediği bilinmektedir. Rotor-stator sistemini kararsızlığa sevk eden bu hız aralığı bölgelerindeki rotor devir hızları ile bu sistemin kritik hızları birbirleriyle karıştırılmamalıdır. Burada kararlılık/kararsızlık tanımı için *karakteristik üstel metodu*[§] (characteristic exponent method) [31] temel alınmıştır. Bu yöntem, ele alınan lineer rotor sistemin ilgili sabit dönme hızı değerinde kararlı olabilmesi için sistemin hesaplanan bütün kompleks özdeğerlerinin reel kısmının sıfırdan küçük olması gerektiğini söylemektedir. Literatürde farklı isimler altında, çok yaygın olarak kullanılan bu kararlılık tanımı, aynı zamanda sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin kararlılığını belirlemede akla gelen ilk yöntemidir. Lineer sistemler için yapılan bu teorik kararsızlık tanımının fiziksel karşılığı için ise: sistemin kompleks özdeğerlerinden en az biri reel kısmının pozitif

[§] $\{\dot{x}\} = [A]\{x\}$ lineer diferansiyel denklem takımıyla tanımlanan bir sistemin kararlılığını belirlemede, sistem matrisi $[A]$ 'nın kompleks özdeğerlerinin reel kısmının baz alındığı metod.

olması durumunda, sistemin zaman cevabı zamanla üstel olarak artan bir davranış sergileyecektir denilebilir [32].

Kendini sistemin genelleştirilmiş kooordinatlarının (serbestlik derecelerinin) zaman cevabında üstel bir artış olarak gösteren bu kararsızlık hali, belli bir rotor hızı aralığında etkili olmaktadır. Tekrar etmek gerekirse, yukarıda bahsi geçen sistemin kararsızlık bölgeleriyle (hız aralığıyla), sistemin kritik hızları kesinlikle birbirinden farklı olgulardır. Kritik hızlar, rotorun doğal frekansları ile rotor üzerine etkiyen tahrik kuvvet(ler)inin frekansları arasında cereyan eden bir rezonans halidir; buna mukabil, kararsızlık bölgeleri ise tamamen “kendini besleyen” titreşimlere has bir özelliktir [30]. Kendini besleyen sistemler, kararsızlığı doğuracak sistem parametreleri biraraya geldiklerinde aniden genliği zamanla üstel olarak artan salınım hareketi yapmak suretiyle kendilerini belli etmektedirler. Gerçekte olması beklenen durum ise –lineer yaklaşımla modellenen titreşim sistemlerinin aksine– sistemin serbest titreşim hareketinin frekansı genliğin bir fonksiyonu olacağından, genlikteki artış belli bir değere ulaşıp burada bir limit çevrim davranışı göstermesidir [33].

Kendini besleyen titreşimlerde, sistemin üzerine etkiyen kuvvetler hareketin kendisi tarafından yaratılır ve kontrol edilir, öyle ki hareket aniden kesilirse tahrik kuvvetleri de yok olurlar [33]. Bu nedenle, kendini besleyen sistemler herhangi bir dış tahrik kuvvetinin frekansından bağımsız olarak, kendi doğal frekanslarında titreşim hareketi yaparlar [33]. Kendini besleyen titreşimlerin ortaya çıktığı bu kararsızlık bölgeleri de kritik hızlarda olduğu gibi Campbell diyagramı üzerinden gözlemlenebilmektedir.

3.1.3 Campbell diyagramının teorik ve deneysel olarak elde edilmesi

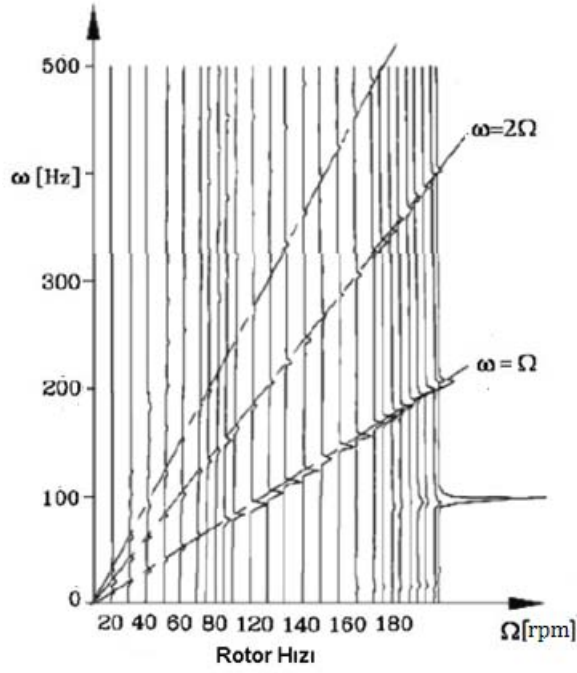
Genellikle uzayda bir eksen etrafında dönen bir rotor ihtiva eden çok serbestlik dereceli mekanik sistemlerin özdeğerleri, rotorun dönme hızına bağlı olarak değişmektedirler. Sistemin özdeğerlerinin rotorun dönme hızına olan bu bağımlılığı Campbell diyagramı ile gösterilebilmektedir. Başka bir deyişle, sistemin hareket denklemlerinin dönme hızını açık olarak barındırması halinde, içinde rotor bulunan bu çok serbestlik dereceli sistemin özdeğerleri de dönme hızına bağlı olmak durumundadırlar. Campbell diyagramı teorik olarak oluşturulabileceği gibi, deneysel yöntemler kullanılarak da oluşturulabilmektedir. Genellikle, teorik yöntemde izlenen yol; sistemin denge konumu etrafındaki lineerleştirilmiş hareket denklemlerinin standart formda ifade edilmesi ve ardından sabit bir dönme hızı değeri için sistemin

kompleks özdeğerleri bulunarak, bunların sanal kısımlarının diyagramın dikey eksenine çizdirilmesi ve bu işlemin rotorun dönme hızını esas alan bir döngü içinde defalarca tekrar edilmesi şeklindedir. Nasıl ki lineer olmayan bir sistemin özdeğerlerini incelemek anlamlı değilse, benzer şekilde, lineer olmayan bir sistemin de Campbell diyagramını teorik olarak elde etmek mümkün değildir. Bunun için, lineer olmayan sistemlerin lineer sistemlerden farklı olarak birden fazla denge konumuna sahip olabileceği de hatırlanarak [34], öncelikle sistemin denge konumları bulunmalı, ardından ilgili denge konumu etrafında hareket denklemleri lineerleştirilmelidir.

Campbell diyagramının deneysel olarak elde edilmesi teorik yöntemden oldukça farklıdır. Bunun için sistemin üzerine yerleştirilen bir sensörden alınacak zaman cevabının, sistemin hızlanma (run-up) veya yavaşlama (coast-down) verisini içermesi yani rotor sabit bir dönme hızında dönmekte iken alınan zaman cevabı değil, bunun aksine rotorun sıfırdan belli bir dönme hızına ulaşınca kadarki geçen zaman dilimindeki ilgili noktanın zaman cevabı elde edilmelidir. Elde edilen bu zaman verisi KSFD (Kısa Süreli Fourier Dönüşümü) yöntemiyle veya daha sofistike yöntemlerle işlenerek Campbell diyagramından farklı olarak z-ekseninde genlik, x- ve y-eksenlerinde sırasıyla rotor dönme hızı, (bir takometre ile ölçülen) ve sistemin frekanslarını içeren üç boyutlu Şelale (Waterfall) diyagramı elde edilir. Şelale diyagramı için Campbell diyagramının daha genel halidir de denilebilir. Özellikle yaygın olan bir diğer yöntem ise, bir sensörden alınan ivme veya yer değiştirme sinyalinin spektrumunun önceden belirlenen bir dönme hızı vektörünün her bir değeri için hesaplanması ve ardarda (cascaded) gelecek şekilde bir grafik üzerinde çizdirilmesidir (Şekil 3.1) [30].

Aslında, Ardarda ve Şelale diyagramları birbirinden farklı iki diyagramı temsil etmektedirler. Birincisinde, spektra her bir ayrı Ω hız değeri için elde edilmektedir; ikincisinde ise, spektralar zamana bağlı olarak elde edildiklerinden, sistemin zaman içinde değişen dinamik davranışı elde edilmektedir [30].

Ayrıca, ele alınan çok serbestlik dereceli sistemin hareket denklemlerinin teorik incelenmesinde, Campbell diyagramına ilave olarak, genellikle sistemin belli bir dönme hızındaki modal sönümü hakkında bilgi veren azalım hızı (decay rate) diyagramı da elde edilmektedir.



Şekil 3.1 : Bir rotorun Ardarda (Cascaded) diyagramı [30].

Özetle, analitik olarak incelenmek istenen N serbestlik dereceli sabit hızda dönmekte olan lineer bir sistemin kompleks eşlenik özdeğerleri:

$$\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

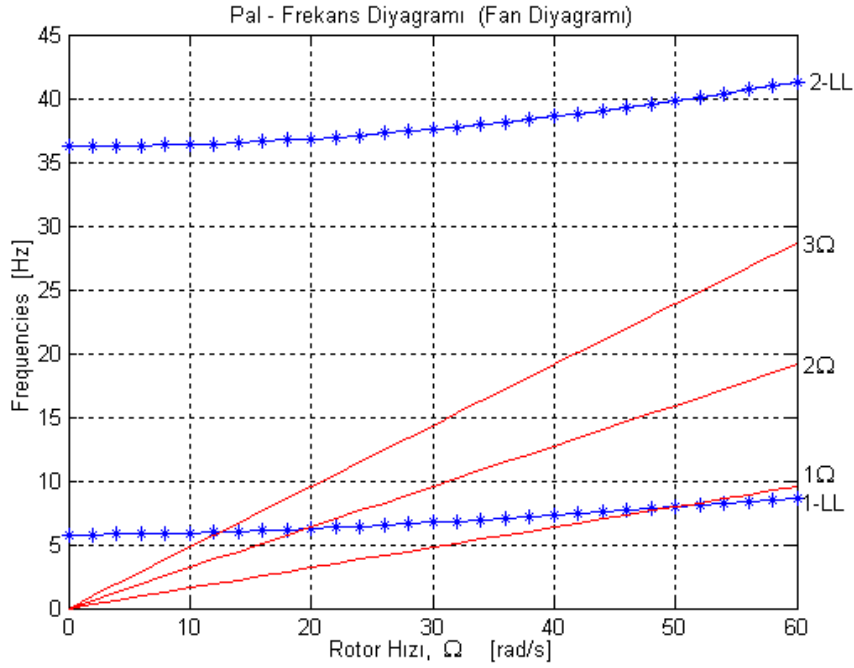
veya diğer bir gösterimle,

$$\lambda_i = -\zeta_i \omega_i \pm j \left(\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

olarak yazılabilirler. Bu kompleks özdeğer ifadesinin sanal kısmı (eigenfrequency, modal frequency) rotor hızı Ω 'nın bir fonksiyonu olarak çizdirilmesiyle Campbell diyagramı teorik olarak elde edilmiş olur. Benzer şekilde, kompleks özdeğer ifadesinin reel kısmı α_i 'nin rotor hızı Ω 'nın bir fonksiyonu olarak çizdirilmesiyle azalım hızı diyagramı veya $\zeta_i = \alpha_i / \omega_i = (c/c_{cr.})_i$ bağıntısı kullanılarak modal sönüm diyagramı elde edilmektedir. Azalım hızı diyagramı incelenmekte olan sistemin ilgili hız değerinde hem kararlılık durumu hem de modal sönümü hakkında bilgi vermektedirler.

3.2 Düzlem-içi Yumuşak ve Düzlem-içi Sert Rotorlar

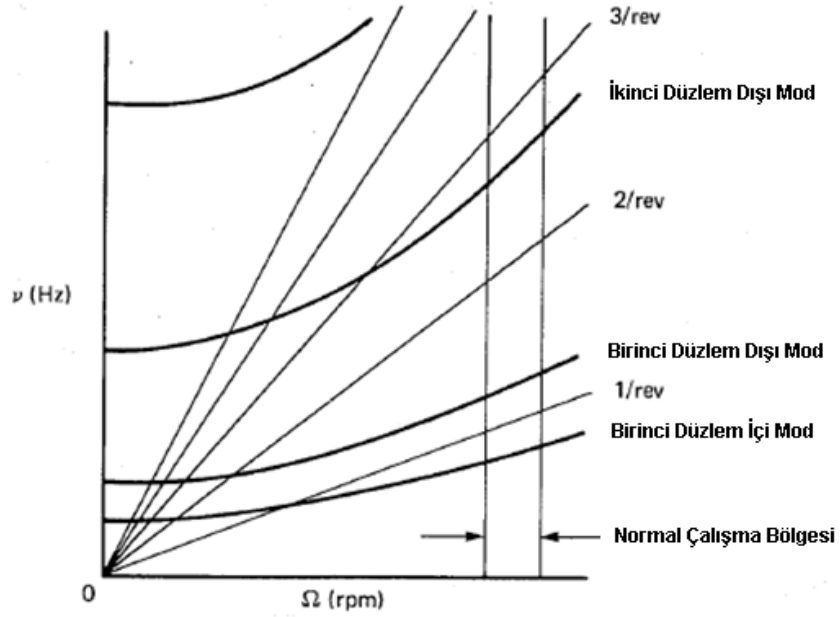
Bir palin dönme hızına bağlı olarak değişen doğal frekansları teorik olarak sonlu elemanlar metodu vasıtasıyla elde edilip Campbell veya buna eş bir diyagram üzerinde gösterilebilir. Şekil 3.2’de kökten ankastre olarak bağlı, sadece düzlem içinde eğilme hareketi yapabilen ve uniform Euler-Bernoulli kiriş elemanlarıyla modellenmiş bir palin havasız ortamdaki Campbell diyagramı verilmiştir.



Şekil 3.2 : Uniform esnek bir palin düzlem-içi modlarını temsil eden Campbell diyagramı.

Genellikle mafsallı rotorlar tasarlanırken ileri-geri titreşim modu frekansları $\nu_\zeta = 0.2, \dots, 0.3P$ ($1P = 1/\text{rev}$) olacak şekilde tasarlanırlar. Burada ν_ζ , palin ileri-geri titreşim modunun –rotorun dönme hızına bağlı olarak değişen– doğal frekansıdır ve rotorun nominal çalışma hızıyla boyutsuzlaştırılarak verilmektedir. Menteşesiz rotorlarla daha yüksek bir ileri-geri titreşim modu frekansı elde edilebilir. Bununla birlikte, tasarımda ileri-geri titreşim modu frekansı $1.0P$ ’ye çok yakın olacak şekilde –örneğin $0.9, \dots, 1.1P$ – seçilmemelidir. Aksi halde, aerodinamik yüklerin ilk harmoniği ve Coriolis yükleri pallere artarak etkilemekte ve bu durum da palin yorulma mukavemetini olumsuz yönde etkilemektedir [35]. İleri-geri titreşim modu frekanslarına göre menteşesiz rotorlar iki kategoriye ayrılmaktadırlar: düzlem-içi yumuşak rotorlar –ileri-geri titreşim modu frekansı $1.0P$ ’nin altında olanlar (tipik

olarak $\nu_{\zeta} = 0.65, \dots, 0.8P$ – ve düzlem-içi sert rotorlar –ileri-geri titreşim modu frekansı $1.0P$ ’nin olanlar (tipik olarak $\nu_{\zeta} = 1.4, \dots, 1.6P$)– [3]. Şekil 3.3’te düzlem-içi yumuşak bir rotora örnek verilmiştir. Burada, normal çalışma bölgesi sınırları içinde, temel ileri-geri titreşim modu frekansının $1.0P$ den küçük olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 3.3 : Düzlem-içi yumuşak menteşesiz bir rotorun pal frekans diyagramı [3].

Düzlem-içi yumuşak rotorları, düzlem-içi sert rotorlardan ayıran bir diğer özellik, düzlem-içi yumuşak rotorların yer rezonansına yatkın olmalarıdır. Bunun nedenine *Fourier Koordinat Dönüşümünü* izleyen bölümde yer verilecektir. Düzlem-içi sert rotorlar, ileri uçuş esnasında düzlem içinde koriolis ve asimetrik sürüklenme yüklerinden dolayı oluşan düzlem içindeki dengelenmemiş kuvvetleri gövdeye aktarmaya yatkındırlar. Bu nedenle bu tip rotorlar –bu dengesiz kuvvetlerin gövdeye daha az iletilmesi için– rotor direği (mast) veya rotor milinde belli bir esnekliğe ihtiyaç duyarlar. Düzlem-içi yumuşak rotorlarda ise böyle bir gereklilik yoktur.

3.3 Yataksız Bir Rotorun Mafsallı Bir Rotor Olarak Modellenmesi

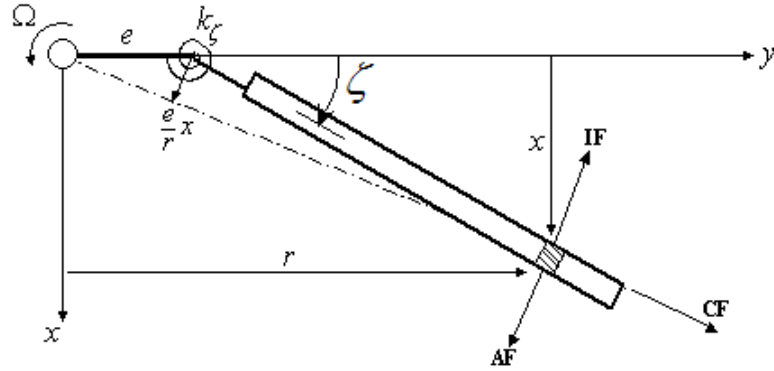
Yataksız (bearingless) rotor olarak adlandırılan rotorlar, palin kök kısmında bulunan ve burulma/eğilme yönünden nispeten esnek bir kiriş (flexbeam) parçanın kontrol sistemi tarafından tork tüp vasıtasıyla burulması suretiyle palin yunuslama açısının

değiştirilmesi ilkesine göre çalışmaktadırlar. Her ne kadar kökten sabitlenmiş (hub-fixed) menteşesiz rotor palı hareketinin aeroelastik kararlılık karakteristiği makul derecede iyi anlaşılmış olsa da aynı durum yataksız (bearingless) rotorlar için söz konusu değildir. Bunun ötesinde, menteşesiz ve yataksız rotorların yer ve hava rezonansına karşı tasarlanması hala tasarımda zorluklar çıkarmaktadır [36]. Günümüzde halen bazı menteşesiz rotorlu helikopterlerde, yer ve hava rezonansının neden olacağı kararsızlıklardan kaçınmak için ileri-geri titreşim damperleri kullanılmaktadır. Bunun nedeni ise, menteşesiz ve yataksız rotorların mekanik basitlikten yoksun olmasından dolayı analitik modeller kurularak incelenebilmeleri ancak belirli kabuller yapılması halinde olanaklı olmasındandır. Bu yüzden menteşesiz ve yataksız rotor modellerinin analitik açıdan incelenebilmesi için palin eşdeğer mafsallı mesafesi (equivalent hinge offset), eşdeğer yay sabiti, eşdeğer sönüm sabiti ve rijit pal kavramları kullanılmaktadır. Menteşesiz ve yataksız rotorları birer mafsallı rotormuş gibi ele almak için yapılan bu tür yaklaşımların dezavantajı ise, menteşesiz ve yataksız rotorların ayrı bir analize tabi tutularak palin elastik şekil değiştirmesinden, esnek kiriş parçasının ve palin açısal ötelemelerinden ileri gelen aeroelastik bağlaşımların (aeroelastic couplings) tanımlanmasını gerektirmesidir [36]. Bu çalışmada aeroelastik bağlaşımlar ihmal edilecektir. Ayrıca, menteşesiz ve yataksız rotorları analitik açıdan incelenebilir kılmak için yapılan bu tarz yaklaşımlar, bu tip rotorları tüm çalışma koşullarını kapsayacak şekilde güvenilir olarak modelleyemezler. Örneğin, rotor yüksek itki kuvveti altındayken esnek kiriş aşırı derecede burulabilir. Diğer yandan, düşük itki kuvveti altındayken burulmamış olabilir [36].

Aerodinamik yüklerin özellikle yataksız ve menteşesiz rotorların yer rezonansı sorununda önemli rol oynadıklarına dair kanıtlar vardır [37]. Yapılan deneyler, mafsallı rotora sahip helikopterlerde meydana gelen yer rezonansı sorununun aerodinamik yüklerden bağımsız olduğunu göstermekte ve bu nedenle, palin kanat çırpma hareketi göz ardı edilmektedir [38]. Bu tarzda bir modellemede, gerçekte esnek olan pal rijit olarak kabul edilmekte buna mukabil palin elastik şekil değişiminden ileri gelen potansiyel enerji de –ileri-geri titreşim mafsallına yerleştirilen– eşdeğer bir burulma yay katsayısı ile modellenmektedir [39].

Bu bağlamda, rotor göbeğine ileri-geri titreşim mafsallıyla bağlı rijit bir palin (Şekil 3.4) küçük açı (Şekil 3.4'teki ζ açısı) kabulüyle hareket denklemini ve buradan da

palin, dönen ileri-geri titreşim modu frekansı elde edilmek istensin. Şekil 3.4'te düzlem içindeki pal kesitine etkiyen kuvvetler verilmektedir.



Şekil 3.4 : Burulma yaylı ve eşdeğer mafsalsal mesafeli rijit pal modeli [40].

- IF: eylemsizlik kuvveti, $m\ddot{x}.dr = m(r-e)\ddot{\zeta}dr$; moment kolu, $(r-e)$
- CF: merkezkaç kuvveti, $m\Omega^2rdr$; moment kolu, $\frac{e}{r}x$
- AF: aerodinamik yük, F_ζ ; moment kolu, $(r-e)$
- SF: gecikme yayı momentisi, $k_\zeta\zeta$

İleri-geri titreşim mafsalsı etrafındaki tüm momentler toplanırsa,

$$\int_e^R m(r-e)^2 dr \ddot{\zeta} + \int_e^R m\Omega^2 r(r-e) \frac{e}{r} dr \zeta - \int_e^R F_\zeta (r-e) dr + k_\zeta \zeta = 0 \quad (3.3)$$

ve $I_\zeta = \int_e^R m(r-e)^2 dr$ ifadesi yardımıyla da hareket denklemi boyutsuz olarak yazılırsa (3.4) elde edilir.

$$I_\zeta \left(\zeta^{**} + \nu_\zeta^2 \zeta \right) = \frac{1}{\Omega^2} \int_e^R F_\zeta (r-e) dr \quad (3.4)$$

Burada, dönen ileri-geri titreşim modu frekansı açık olarak yazılırsa,

$$\nu_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{I_\zeta \Omega^2} + \frac{e \int_e^R m(r-e) dr}{I_\zeta} \quad (3.5)$$

$$\nu_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{I_\zeta \Omega^2} + \frac{e S_\zeta}{I_\zeta} \quad [-] \quad (3.6)$$

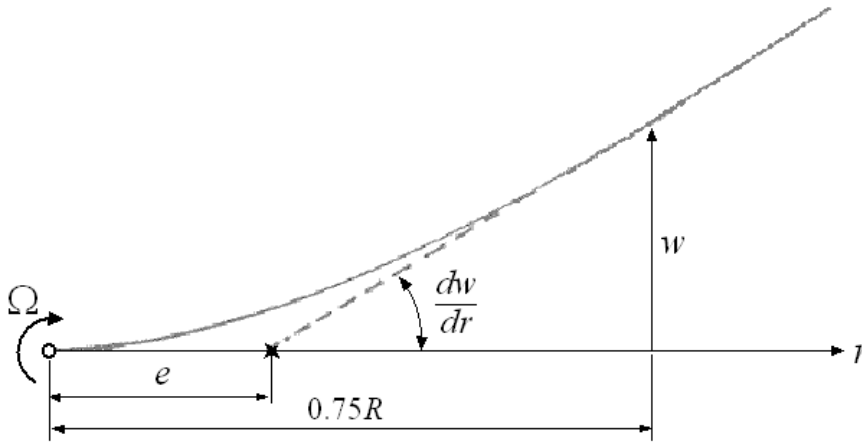
Bu bağıntı (3.6) boyutsuz haldedir. Boyutlu halde ifade edilirse,

$$\sigma_{\zeta} = \sqrt{\frac{k_{\zeta}}{I_{\zeta}} + \frac{eS_{\zeta}}{I_{\zeta}} \Omega^2} \quad [rad/s] \quad (3.7)$$

(3.7) denkleminde k_{ζ} çekilirse,

$$k_{\zeta} = I_{\zeta} \sigma_{\zeta}^2 - eS_{\zeta} \Omega^2 \quad [Nm/rad] \quad (3.8)$$

Bu şekilde, yataksız bir rotor ile, eşdeğer mafsallı bir burulma yayı ile modellenmiş olan mafsallı bir rotorun ilk düzlem-içi ileri-geri titreşim modu frekansları eşleştirilerek k_{ζ} elde edilir [1,3,40,55].



Şekil 3.5 : Eşdeğer mafsallı mesafesi hesabı.

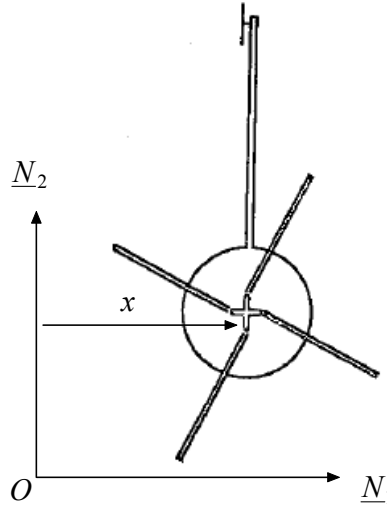
Eşdeğer mafsallı mesafesi ise Şekil 3.5'te görüldüğü üzere palin temel gecikme mod şeklinden faydalanılarak hesaplanmaktadır. Buna göre, palin 0.75R lik kısmından çıkılan dikmenin temel mod eğrisini kestiği noktanın mod eğrisine tegeti alınarak oluşturulan doğru parçasının pal eksenini kestiği P noktası eşdeğer mafsallı noktası olarak kabul edilmektedir.

$$e = R - \frac{w_{tip}}{\left. \frac{dw}{dr} \right|_{0.75R}} \quad [m] \quad (3.9)$$

3.4 Üç Serbestlik Dereceli Yer Rezonansı Modeli

Yer rezonansını matematiksel olarak modellemekte kullanılabilecek en basit model Şekil 3.6-7'de verilmektedir. Şekil 3.7'de yandan ve üstten görünümü verilmiş mekanik sistem sürtünmesiz bir zemin üzerinde bulunmakta olup yere tek doğrultuda

lineer bir yay vasıtasıyla bağlanmıştır. Burada, m_B kütesine sahip bir rijit gövde ve ona rijit bağlı b adet pale sahip bir rotor, mekanik sistemi oluşturmaktadır. Sistem $b+1$ adet serbestlik derecesine sahiptir. Bu serbestlik derecelerinden b adedi dönen eksen takımında b adet palin ileri-geri titreşim hareketini, kalan bir adedi ise –ki bu helikopter gövdesinin enlemesine hareketini (Şekil 3.6) temsil etmektedir– sabit eksen takımında tanımlanmıştır. Bununla birlikte, çoğu lineer analizde olduğu gibi palin dönen eksen takımına göre tanımlanmış serbestlik dereceleri –FKD’den (Fourier koordinat dönüşümü) yararlanılarak– sabit eksen takımındaki muadillerine dönüştürülmektedirler. Ortaya çıkan –sabit eksen takımındaki– bu yeni b adet serbestlik derecesinin iki adedi rotorun müşterek ve tepkisiz modlarına aittir ve bu iki moda ait hareket denklemleri gövdenin hareket denklemiyle bağısızdırlar (uncoupled). Bu nedenle bu iki serbestlik derecesi yer rezonansı analizine dahil edilmemektedir. Sonuç olarak $b=4$ palli bir rotor için, geriye $(b-2)+1=3$ serbestlik derecesi kalmaktadır. “Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modeli” şeklindeki adlandırma buradan ileri gelmektedir.



Şekil 3.6 : Helikopter gövdesinin üstten görünüşü ve gövde serbestlik derecesi.

3.4.1 Sönümsüz model

Şekil 3.7’de görülen yer rezonansı modelinde, m_B gövdenin kütesini, m_b tek palin kütesini, b toplam pal sayısını, $M = m_B + m_b b$ sistemin toplam kütesini, ψ_k k ’ıncı palin azimut açısını, ζ_k k ’ıncı palin ileri-geri titreşim hareketi serbestlik derecesini, I^* palin kütle merkezine göre kütle eylemsizlik momentini, $I = I^* + m_b r^2$ palin

Figure 1 consists of four diagrams labeled (a) through (d).
 (a) A mass m_B is shown on a horizontal surface. A spring with stiffness k_x is attached to the left side of the mass. A vertical force N_3, b_3 is applied upwards from the top of the mass.
 (b) A mass m_B is shown on a horizontal surface. A spring with stiffness k_x is attached to the left side of the mass. A vertical force N_2 is applied upwards from the top of the mass. A coordinate x is shown at the bottom.
 (c) A mass m_B is shown on a horizontal surface. A spring with stiffness k_x is attached to the left side of the mass. A vertical force N_2 is applied upwards from the top of the mass. A coordinate x is shown at the bottom. A rotation angle $(\psi_k + \zeta_k)$ is indicated by a blue arrow.
 (d) A rotating link of length r is shown. The link has a mass m_0 and a moment of inertia KM . A spring with stiffness k_z is attached to the right end of the link. A force b_1^k is applied at the right end of the link. A coordinate $b_2^k = b_3 \times b_1^k$ is shown at the bottom.

30

Gövdenin kütle merkezinin hızı:

$$\underline{v}^B = \dot{x} \underline{N}_1 \quad (3.12)$$

k'inci palin kütle merkezinin açısal hızı:

$$\underline{\omega}^B = (\Omega + \dot{\zeta}_k) \underline{N}_3 = (\Omega + \dot{\zeta}_k) b_3 \quad (3.13)$$

k. palin kütle merkezinin doğrusal hızı:

$$\begin{aligned} \underline{v}^k &= \dot{x} \underline{N}_1 + (\Omega + \dot{\zeta}_k) b_3 \times (r) b_1^k \\ \underline{v}^k &= \dot{x} \underline{N}_1 + (\Omega + \dot{\zeta}_k) r b_2^k \\ \underline{v}^k &= \dot{x} \underline{N}_1 + (\Omega + \dot{\zeta}_k) r (-\sin \Psi_k \underline{N}_1 + \cos \Psi_k \underline{N}_2) \\ \underline{v}^k &= \left[\dot{x} - (\Omega + \dot{\zeta}_k) r \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_1 + \left[(\Omega + \dot{\zeta}_k) r \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sistemin öteleme kinetik enerjisi:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\left[\dot{x} - (\Omega + \dot{\zeta}_k) r \sin(\psi_k + \zeta_k) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 r^2 \cos^2(\psi_k + \zeta_k) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sistemin dönme kinetik enerjisi:

$$T_r = \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \quad (3.16)$$

Sistemin toplam kinetik enerjisi:

$$\begin{aligned} T &= T_r + T_t = \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b b \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b r^2 \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 + \\ &\quad - m_b r \dot{x} \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$I = I^* + m_b r^2$ ifadesi kullanılarak toplam kinetik enerji ifadesi (3.17) sadeleştirilirse,

$$T = \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 + \frac{1}{2} m_b b \dot{x}^2 - m_b r \dot{x} \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \quad (3.18)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_B + m_b b) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 - m_b r \dot{x} \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \quad (3.19)$$

$M = m_B + m_b b$ ifadesi (3.19)'da kullanılırsa,

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b \left(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2 \right) - m_b r \dot{x} \sum_{k=1}^b \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin(\psi_k + \zeta_k) \quad (3.20)$$

Rotorun sabit bir Ω hızıyla döndüğü kabul edildiği için, üstteki ifadede bulunan Ω^2 li terimin hareket denkleminde bir katkısı olmayacaktır. Bu nedenle, (3.20)'den atılabilir. Sistemin potansiyel enerjisi:

$$P = \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2 + \frac{1}{2} k_x x^2 \quad (3.21)$$

Lagrange fonksiyonu, $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b \left(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2 \right) + \\ - m_b r \dot{x} \sum_{k=1}^b \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin(\psi_k + \zeta_k) - \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2 - \frac{1}{2} k_x x^2 \quad (3.22)$$

x genelleştirilmiş koordinatı için hareket denklemi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} - m_b r \sum_{k=1}^b \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin(\psi_k + \zeta_k) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x} - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -k_x x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ M \ddot{x} - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] + k_x x = 0 \quad (3.23)$$

ζ_k ($k=1,2,...,b$) genelleştirilmiş koordinatları için hareket denklemi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} = I \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) - m_b r \dot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) = I \ddot{\zeta}_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) - m_b r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \dot{x} \cos(\psi_k + \zeta_k) \\ \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = -m_b r \dot{x} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) - k_\zeta \zeta_k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = 0$$

$$I \ddot{\zeta}_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + k_\zeta \zeta_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.24)$$

Böylece, sistemin hareketini veren denklem takımı elde edilmiş olur. Bu, toplam $b+1$ adet denklemden oluşan periyodik katsayılı ve lineer olmayan bir denklem takımıdır.

Hareket denklemlerinin lineerleştirilmesi: Bu kısımda, (3.23) ve (3.24) denklemleri, sistemin denge konumu –ki bu $\zeta_k = 0$ dır– etrafında lineerleştirilirler. Lineerleştirmeye gövde denklemi (3.23) açık halde yazılarak başlanılsın,

$$M \ddot{x} - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) \overset{\approx \sin \psi_k}{+} \Omega^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) + \right. \\ \left. + 2\Omega \dot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) \overset{\approx \cos \psi_k}{+} \dot{\zeta}_k^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \overset{\approx 0}{+} \right] + k_x x = 0 \quad (3.25)$$

(3.25), gövde denkleminde köşeli parantez içindeki ilk ifade açık halde yazılırsa,

$$\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) = \ddot{\zeta}_k \left(\sin \psi_k \cos \zeta_k \overset{\approx 1}{+} \cos \psi_k \sin \zeta_k \overset{\approx \zeta_k}{+} \right) = \ddot{\zeta}_k \sin \psi_k + \ddot{\zeta}_k \zeta_k \cos \psi_k$$

eşitliğinin en sağındaki terimin $\ddot{\zeta}_k \zeta_k$ çarpımını içerdiği görülmektedir. Bu nedenle bu terim atılarak $\ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) \approx \ddot{\zeta}_k \sin \psi_k$ olacak şekilde ilk ifade lineerleştirilir. Gövde denklemi (3.25)'te köşeli parantez içindeki ikinci ifade açık olarak yazılsa,

$$\Omega^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) = \Omega^2 \left(\cos \psi_k \cos \zeta_k \overset{\approx 1}{+} - \sin \psi_k \sin \zeta_k \overset{\approx \zeta_k}{+} \right) = \Omega^2 (\cos \psi_k - \sin \psi_k \cdot \zeta_k)$$

olacak şekilde lineerleştirilmektedir. Gövde denklemi (3.25)'teki üçüncü terim açık olarak yazılırsa,

$$\dot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) = \dot{\zeta}_k \left(\cos \psi_k \cos \zeta_k \overset{\approx 1}{+} - \sin \psi_k \sin \zeta_k \overset{\approx \zeta_k}{+} \right) = \dot{\zeta}_k \cos \psi_k - \dot{\zeta}_k \zeta_k \sin \psi_k$$

eşitliğinin en sağındaki lineer olmayan $\dot{\zeta}_k \zeta_k$ terimi içerdiği görülmektedir. Bu nedenle bu terim atılarak $\dot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) \approx \dot{\zeta}_k \cos \psi_k$ olacak şekilde üçüncü ifade lineerleştirilir. Gövde denklemindeki köşeli parantez içindeki son ifade ise, küçük bir açının karesi $\dot{\zeta}_k^2$ 'yi içerdiği için $\dot{\zeta}_k^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \approx 0$ olarak alınmaktadır.

$$M\ddot{x} + k_x x - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin \psi_k + \Omega^2 (\cos \psi_k - \zeta_k \sin \psi_k) + 2\Omega \dot{\zeta}_k \cos \psi_k \right] = 0 \quad (3.26)$$

Pal sayısı üç ve üzeri olan rotorlar için geçerli olan (A.5) trigonometrik bağıntısı (3.26) denkleminde uygulanırsa, gövdenin hareket denkleminde (3.27) gelir.

$$M\ddot{x} + k_x x - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin \psi_k + 2\Omega \dot{\zeta}_k \cos \psi_k - \Omega^2 \zeta_k \sin \psi_k \right] = 0 \quad (3.27)$$

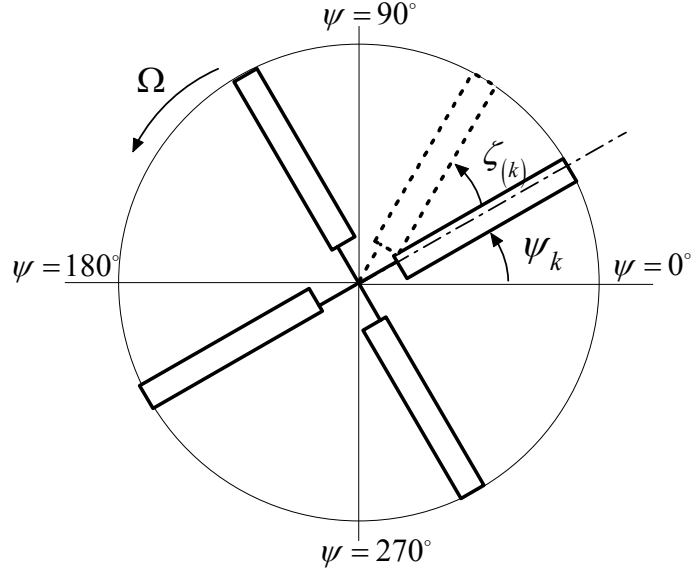
k'ncı pal denklemi (3.24)'ün lineerleştirilmesiyle (3.28) elde edilir.

$$I \ddot{\zeta}_k - m_b r \ddot{x} \sin \psi_k + k_\zeta \zeta_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.28)$$

Ortaya çıkan denklem takımı bağılı lineer ADD (Adi Diferansiyel Denklem) takımı olmakla beraber, bu denklem takımının periyodik katsayılı olması çözümün geleneksel yöntemlerle bulunmasına engel teşkil etmektedir. Bu sorunun üstesinden gelmek için Fourier koordinat dönüşümünden faydalanılır.

Fourier koordinat dönüşümü (FKD): Genellikle rotora ait hareket denklemleri dönen eksen takımına göre çıkartılır ve her bir serbestlik derecesi ayrı olarak ilgili palin hareketini tanımlar. Bununla beraber, gerçekte, rotor bir bütün olarak tahriklere (aerodinamik sağanaklara (gusts), kontrol çubukları girdileri, ya da ana rotor mili titreşimleri) sabit eksen takımına göre cevap verir. Bu nedenle, rotorun bu davranışını yansıtan serbestlik dereceleri ile çalışılması arzu edilir. Rotor hareketinin bu şekilde bir temsili, hem rotorun analizi hem de davranışının anlaşılmasını kolaylaştırır. Palin daimi rejimdeki hareketi, Fourier serisi ile uygun bir şekilde temsil edilebilir, öyleki, bu serinin Fourier katsayıları rotorun hareketini bir bütün olarak tanımlarlar. Bu nedenle, rotorun sabit eksen takımındaki hareket denklemleri basitçe, harmonikler cinsinden cebrik denklem takımındırlar.

Özetle, dönen eksen takımından seçilmiş serbestlik dereceleri için uygun dönüşüm şekli ve rotorun sabit eksen takımındaki hareket denklemlerinin şekli, Fourier serisine benzemektedir. Bu koordinat dönüşümü, Fourier serisi, Fourier interpolasyonu, ve ayrık Fourier dönüşümü arasında bir çok benzerlik vardır, ama temelde, hepsinin ortak paydası sistemin doğasına hakim olan periyodiklik özelliğidir [3].



Şekil 3.8 : k'inci palin azimuth açısı ve serbestlik derecesi.

Azimet açısı etrafında $\psi_k = \psi + k \cdot \Delta\psi$ eşit aralıklarla yerleştirilmiş b adet pale sahip bir rotor (Şekil 3.8) ele alınsın. Burada $\Delta\psi = 2\pi/b$ azimuth aralığı, ψ boyutsuz zaman değişkeni ($\psi = \Omega t$, sabit dönme hızı için), k ise 1'den b'ye kadar olan palleri gösteren pal indisi olsun. $\zeta_{(k)}$, k'inci palin dönen eksen takımındaki herhangi bir serbestlik derecesi olsun. Bu serbestlik derecesi, sonsuz adet terimden oluşan bir seri formunda ifade edilir:

$$\begin{aligned} \zeta_{(k)} = & \zeta_0(t) + \zeta_d(t)(-1)^k + \zeta_c(t)\cos\psi_k + \zeta_s(t)\sin\psi_k + \\ & + \zeta_{2c}(t)\cos 2\psi_k + \zeta_{2s}(t)\sin 2\psi_k + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pratikte ise, bu serinin terim sayısı, sistemin serbestlik derecesi sayısına eşit olacak şekilde alınmaktadır. Örneğin, üç palli bir rotor için ζ_0 , ζ_c , ζ_s ; dört palli bir rotor için ζ_0 , ζ_c , ζ_s , ζ_d ; beş palli bir rotor için ζ_0 , ζ_c , ζ_s , ζ_{2c} , ζ_{2s} 'li terimler alınmaktadır. Sonlu sayıda terimle ifade edilen bu serinin Fourier katsayıları, rotor sisteminin sabit eksen takımına karşılık gelen yeni serbestlik derecelerini (başka bir deyişle sistemin modlarını) temsil etmektedirler.

Örnek olarak dört palli bir rotor ele alınırsa, EK A.2.1-4'te tanımlı olan dört serbestlik derecesi rotorun hareketini sabit eksen takımında tanımlamakta kullanılırlar. Buna göre, ζ_0 kolektif (collective) serbestlik derecesine, ζ_{1c} ve ζ_{1s} rotorun kütle merkezinin hareketini tanımlayan dögüsel (cyclic) serbestlik

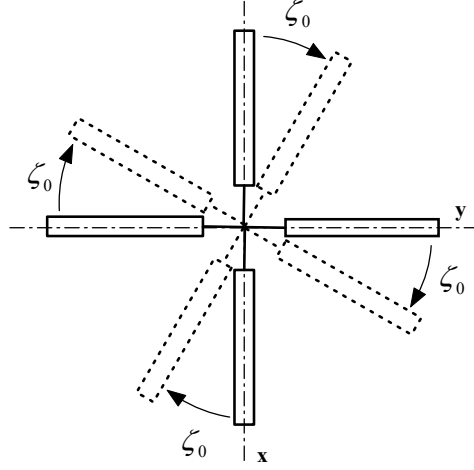
derecelerine karşılık gelmektedirler. Bu üç serbestlik derecesinin dışında kalan serbestlik dereceleri ise, rotor göbeğine net bir kuvvet veya net bir momentin etkimesine katkıda bulunmadıkları için tepkisiz (reactionless) modlar olarak adlandırılırlar. Fourier koordinat dönüşümü, sabit eksen takımında tanımlanmış b serbestlik derecesi ile dönen eksen takımında tanımlanmış b serbestlik derecesi arasında yapılan ve tersi de mevcut olan lineer bir dönüşümdür. Bu dönüşüme karşılık gelen ters dönüşüm EK A.2.5'te verilmiştir.

ζ_0 , ζ_{nc} , ζ_{ns} , ve ζ_d serbestlik dereceleri rotorun hareketini bir bütün olarak sabit eksen takımında tanımlarlar; buna mukabil, $\zeta_{(k)}$ serbestlik dereceleri ise teker teker her bir palin hareketini dönen eksen takımında tanımlarlar. Bu nedenle, herbirinin eleman sayısı N olan bu iki serbestlik derecesi kümesi arasında, lineer ve tersinir bir dönüşüm vardır.

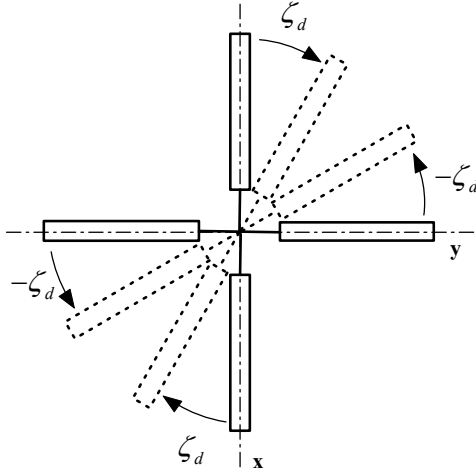
$\zeta_{(k)}$, ψ_k 'in periyodik bir fonksiyonudur ve her bir palin hareketi tıpatıp aynıdır. Özetle, dönen eksen takımına göre yazılan palin hareketi Fourier serisi ile temsil edilebilir öyle ki bu serinin katsayıları –Fourier koordinat dönüşümündeki katsayıların aksine– zamana göre değişmezler, sabittirler; fakat, sayıca sonsuzdur. Bu nedenden ötürü, Fourier koordinat dönüşümü ile Fourier serisi arasında benzerlikler bulunmakla beraber ikisi aynı şeyler değildir [3].

Rotorun düzlem-içi modları: Helikopterin rotor/gövde hareketinin kararlılık analizinde, Fourier koordinat dönüşümünden faydalanılarak, rotorun hareket denklemlerinin sabit eksen takımında ifade edilebileceğine bir önceki kısımda değinilmiştir. Dört palli bir rotorun düzlem-içi modları; kolektif (collective) mod, tepkisiz (reactionless veya differential) mod, ve çevrimsel (cyclic) olmak üzere dört adettir. Kolektif modda (Şekil 3.9) tüm paller aynı fazda ve aynı genlikle salınım hareketi yaparlar. Bu modda pallerin hareketi, ancak rotor göbeğinin veya aktarma organlarının burulma titreşimleri ile bağlı (coupled) olmaktadır. Başka bir deyişle, bu mod rotorun kütle merkezinde net bir yer değiştirmeye yol açmadığından, yer rezonansı incelenirken rahatlıkla göz ardı edilebilir.

Pal sayısı en az dört ve çift olan rotorlarda, ζ_d terimi ile ifade edilen diferansiyel veya makaslama modu (Şekil 3.10) olarak da adlandırılan mod bulunmaktadır. Bu modda, karşılıklı paller aynı faz açısı ile hareket etmektedirler.

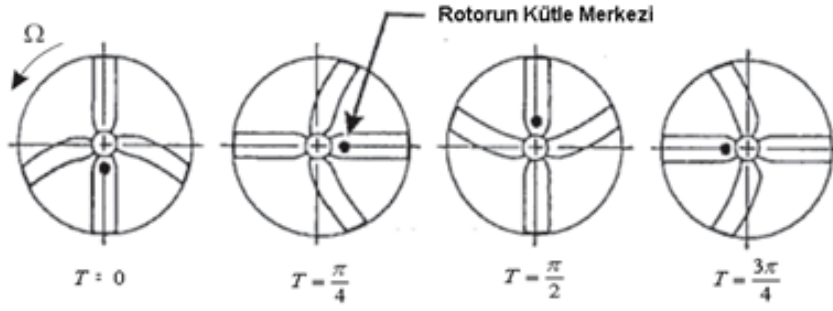


Şekil 3.9 : Rotorun müşterek modu.



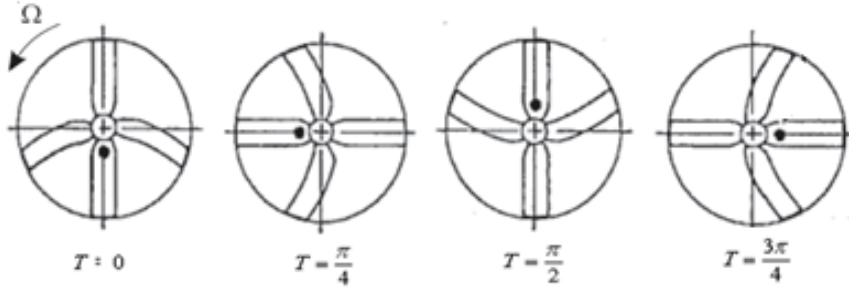
Şekil 3.10 : Rotorun diferansiyel modu.

ζ_{1c} ve ζ_{1s} terimleri ise, rotorun net kütle merkezinin yatay (Şekil 3.10, y doğrultusu) ve dikey (Şekil 3.10, x doğrultusu) yöndeki ötelemelerini temsil etmektedirler. Tüm rotor sisteminin kütle merkezinin dönme (dolanım) yönü ile rotorun dönüş yönünün aynı olduğu ve iki çevrimsel (cyclic) moddan ilki olan bu moda, rotorun ilerleyen ileri-geri titreşim (progressive lag) modu denmektedir. Şekil 3.11’de görüldüğü üzere rotor diskinin kütle merkezinin, rotorun dönme eksenini etrafında $\Omega\nu_\zeta$ açısal hızı ile döndüğü kabul edilirse (ν_ζ , palin ileri-geri titreşim modunun rotor nominal çalışma hızıyla boyutsuzlaştırılmış doğal frekansıdır) ilerleyen ileri-geri titreşim modunun boyutsuz frekansı basitçe $\nu_\zeta + 1$ olarak yazılabilir.



Şekil 3.11 : Rotorun ilerleyen ileri-geri titreşim modu.

Rotorun kütle merkezinin yaptığı dolanım hareketinin yönü ile rotorun dönme yönünün birbirilerine zıt istikamette olduğu moda (Şekil 3.12) ise, rotorun gerileyen ileri-geri titreşim (regressive lag) modu denmektedir. Gerileyen ileri-geri titreşim modunun boyutsuz frekansı basitçe $|\nu_\zeta - 1|$ olarak yazılabilir.

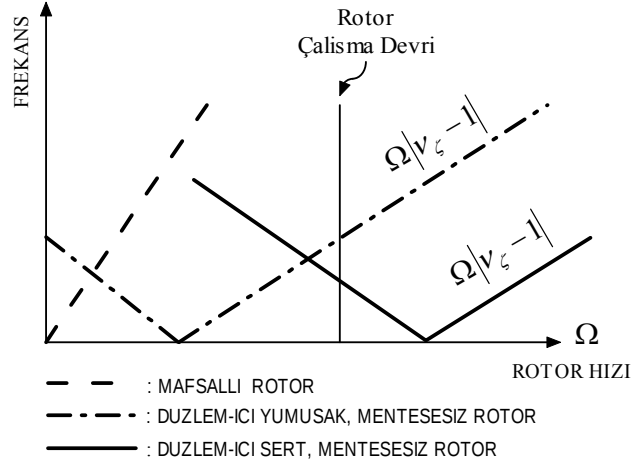


Şekil 3.12 : Rotorun gerileyen ileri-geri titreşim modu.

Gövde-Rotor sisteminde, yer rezonansı kararsızlığının oluşmasından esas sorumlu olan modlar; gerileyen ileri-geri titreşim modu ve temel gövde (yunuslama ve yuvarlanma) modlarıdır. Sözü edilen gövde ve rotor modlarının frekansları artan rotor hızıyla önce birbirlerine yaklaşır daha sonra birleşerek kararsızlık bölgesini oluştururlar.

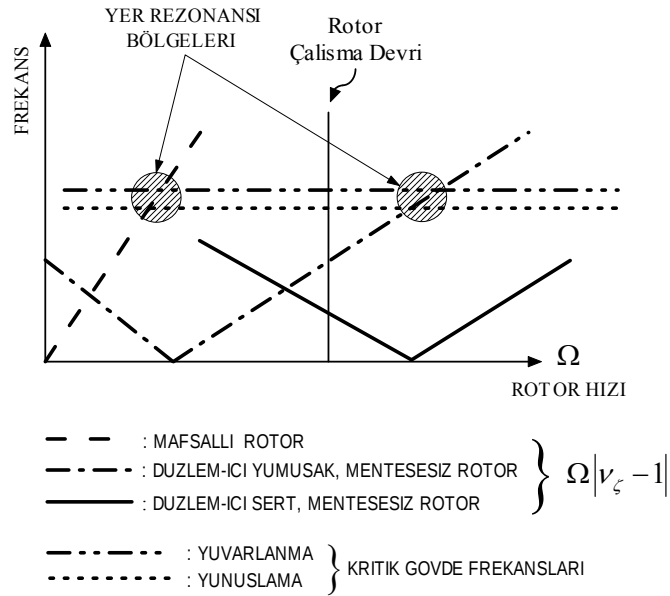
Rotorların düzlem-içi gecikme modları hakkında kısaca bilgi verdikten sonra, rotorların kendi aralarında düzlem-içi yumuşak ve düzlem-içi sert (Bölüm 3.2) olarak ayrılması bahsine tekrar değinilmesinde fayda vardır. Şekil 3.13'te düzlem-içi sert, düzlem-içi yumuşak, ve mafsallı rotorların gerileyen gecikme modlarının frekans karakteristiğini gösteren eğriler bir arada verilmiştir. Bir rotorun düzlem-içi yumuşak veya sert olacağı ön tasarım aşamasında belirlenmekte ve rotorun düzlem-içi ileri-geri titreşim modlarını ifade eden bu eğriler ortaya konmaktadır.

Nominal dönme hızında, temel ileri-geri titreşim modu frekansı, rotorun dönme frekansının altında olan rotorların kararsızlık göstermeleri mümkündür ve bu kararsızlık hali Şekil 3.13'te görüldüğü gibi, mafsallı rotorlara ve düzlem-içi yumuşak rotorlara özgüdür.



Şekil 3.13 : Farklı rotor tiplerinin gerileyen ileri-geri titreşim modu karakteristikleri.

Şekil 3.14'te düzlem-içi yumuşak ve mafsallı rotorların niçin yer rezonansı kararsızlığına yatkın oldukları açıklanmaktadır. Gerileyen ileri-geri titreşim modu frekansı $\Omega|v_{\zeta}-1|$ 'nin belli bir rotor çalışma devrinde, gövde frekanslarından biriyle çakışması durumunda ortaya çıkan kararsızlık hali Şekil 3.14'te gösterilmiştir.



Şekil 3.14 : Farklı rotor tiplerinin, gerileyen ileri-geri titreşim modu (tahrik) frekansı ile gövde modu frekansı arasındaki ilişki.

Şekil 3.14'te gösterilen düzlem-içi yumuşak rotor için, çalışma hızının biraz üzerindeki devirlerde yer rezonansı riski gözükmemektedir. Genellikle, nominal çalışma hızının %120'si üzerindeki ve nominal çalışma hızının %40'ı altındaki bu tip rezonanslar kabul edilebilir sayılmaktadırlar [3] ve sistemde kararsızlığa neden olmamaktadırlar. Düşük hızlarda (nominal rotor hızının %40'nın altında) rotorun kendisi yeteri kadar kinetik enerji depolayamamakta ve dolayısıyla rotor bu bölgedeki rezonanslardan geçerek hızlanırken büyük genlikli salınımlar yaratmamaktadır.

3.4.1.2 Hareket denklemlerinin elde edilmesi

Alt başlıklar halinde FGD ve rotorun düzlem-içi modları hakkında gereken açıklayıcı bilgi yukarıda verildikten sonra tekrar hareket denklemlerinin elde edilmesine kalınan yerden, (3.27) ve (3.28) denklemlerinden devam edilsin. Bu denklemlerdeki periyodik katsayılardan kurtulmak için FGD'den yararlanılacaktır. (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin (3.27)'de kullanılmasıyla (3.30) denkleminde gelinir.

$$M\ddot{x} + k_x x - \frac{bm_b r}{2} \ddot{\zeta}_s = 0 \quad (3.30)$$

Benzer şekilde, $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.28) \times \cos \psi_k)$ ve $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.28) \times \sin \psi_k)$ işlemleri yapıp, (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin uygulanmasıyla (3.31) ve (3.32) denklemlerine ulaşılır.

$$I(\ddot{\zeta}_c + 2\Omega\dot{\zeta}_s - \Omega^2\zeta_c) + k_\zeta\zeta_c = 0 \quad (3.31)$$

$$I(\ddot{\zeta}_s - 2\Omega\dot{\zeta}_c - \Omega^2\zeta_s) + k_\zeta\zeta_s - m_b r \ddot{x} = 0 \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32) denklemleri (b/2) ile çarpılarak, sonuçlar toplu halde yazılırsa:

$$M\ddot{x} + k_x x - \frac{bm_b r}{2} \ddot{\zeta}_s = 0 \quad (3.33a)$$

$$\frac{b}{2} I(\ddot{\zeta}_c + 2\Omega\dot{\zeta}_s - \Omega^2\zeta_c) + \frac{b}{2} k_\zeta\zeta_c = 0 \quad (3.33b)$$

$$\frac{b}{2} I(\ddot{\zeta}_s - 2\Omega\dot{\zeta}_c - \Omega^2\zeta_s) + \frac{b}{2} k_\zeta\zeta_s - \frac{bm_b r}{2} \ddot{x} = 0 \quad (3.33c)$$

Denklem takımı (3.33) hakkında yorum yapılması gerekirse; denklem takımındaki (3.33a) denkleminde ζ_s koordinatının x koordinatını tahrik ettiği; fakat, ζ_c

koordinatının x koordinatını tahrik etmediği, ayrıca (3.33b) ve (3.33c) denklemlerinden ζ_s ve ζ_c koordinatlarının birbiriyle jiroskopik bağlı oldukları görülmektedir. Ele alınan sistemin hareket denklemlerinin matris formunda ifade edilmesi halinde:

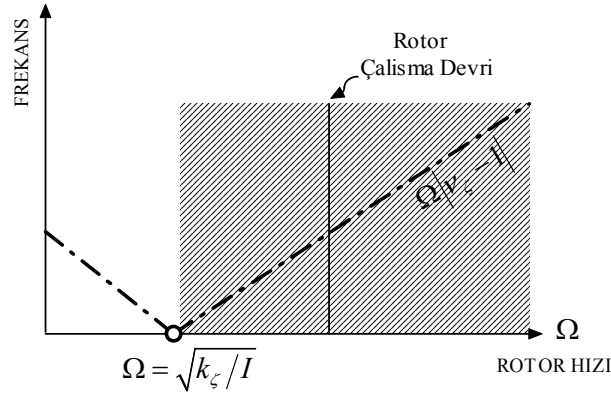
$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & \frac{-m_b br}{2} \\ 0 & \frac{b}{2}I & 0 \\ \frac{-m_b br}{2} & 0 & \frac{b}{2}I \end{bmatrix} \quad [G] = \frac{b}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega I \\ 0 & -2\Omega I & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{2}(k_\zeta - I\Omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}(k_\zeta - I\Omega^2) \end{bmatrix} \quad \text{ve } \{q\} = \begin{Bmatrix} x \\ \zeta_c \\ \zeta_s \end{Bmatrix}$$

olmak üzere,

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (3.34)$$

Kütle matrisi $[M]$, köşegen dışı terimler içerdiğinden dolayı dinamik (atalet) bağlı bir sistem söz konusudur. Kütle matrisindeki bu köşegen dışı terimlerin varlığı, gövde ile rotor serbestlik derecelerinin birbirleriyle bağlanmasına yol açmaktadır ki bu da yer rezonansının temel nedenidir. Jiroskopik matristeki $[G]$ ters-simetriklik durumu ise rotorun kendi serbestlik derecelerinin (ζ_s ve ζ_c) birbirleriyle bağlanmasına neden olur ki bu da sistem üzerinde kararlaştırıcı bir rol oynamaktadır. Katılık matrisinin $[K]$, bazı Ω dönme hızı değerleri için pozitif belirli (definite) olmadığı açıktır ve bu katılık matrisinin pozitif belirli olmama hali –bazı Ω dönme hızları için $(\Omega > \sqrt{k_\zeta/I})$ – sistemde olası bir kararsızlık halinin varlığına işaret etmektedir. Bu gerçek, bize aynı zamanda düzlem-içi yumuşak rotorların niçin yer rezonansı kararsızlığına yatkın olduklarını da açıklamaktadır. Düzlem-içi yumuşak rotorlarda, sistemin katılık matrisinin pozitif belirli olmaması durumu, Şekil 3.15’te taralı bölgenin varlığı ile kendini belli etmektedir.

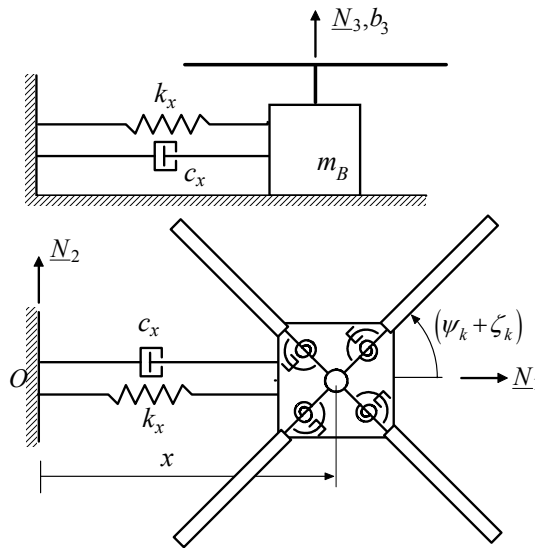


Şekil 3.15 : Yer rezonansı modelinde katılık matrisinin pozitif belirli olmamasının fiziksel açıklaması.

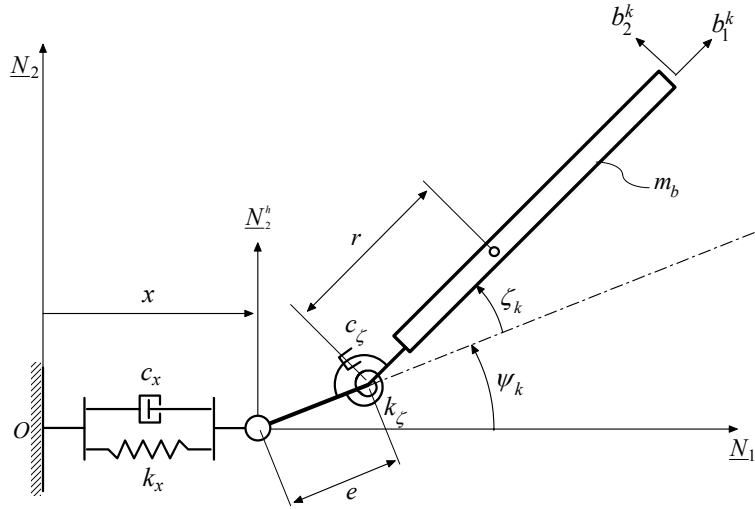
Denge konumu etrafında lineerleştirilmiş korunumlu mekanik sistemin boyutlu denklemleri (3.34) matris formunda elde edildiğine göre sistemin karalılık analizi, belli başlangıç koşulları altındaki zaman cevabı veya belli bir frekanstaki basit harmonik bir tahrik kuvveti altında frekans cevabı rahatlıkla araştırılabilir.

3.4.2 Sönümlü model

Bu yer rezonansı modelinin (Şekil 3.16) önceki sönümsüz modelden farkı, lineer viskoz sönüm elemanları ve eşdeğer mafsalsı mesafesi (e) içermesidir. Biri c_x gövdenin öteleme hareketini; diğeri de c_{ζ} palin ileri-geri titreşim mafsalsı etrafındaki dönme hareketini sönümlemek için iki tip damper (Şekil 3.16,17) yer rezonansı modeline eklenmiştir.



Şekil 3.16 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin yandan ve üstten görünüşü.



Şekil 3.17 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde kullanılan düzlem-içi rijit pal modeli.

3.4.2.1 Hareket denklemlerinin elde edilmesi

Şekil 3.16’te görülen rijit palın kütle merkezinin yer vektörü $\underline{N}_2 O \underline{N}_1$ sabit eksen takımına göre yazılırsa,

$$\vec{r}_b = (x + e \cos \psi_k + r \cos(\psi_k + \zeta_k)) \underline{N}_1 + (e \sin \psi_k + r \sin(\psi_k + \zeta_k)) \underline{N}_2 \quad (3.35)$$

Bu ifadenin –kinetik enerji ifadesinden yerine konmak üzere– zamana göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_b = & \left[\dot{x} - e\Omega \sin \psi_k - r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_1 + \\ & \left[e\Omega \cos \psi_k + r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sistemin öteleme kinetik enerjisi,

$$T_t = \frac{1}{2} m_b \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \dot{\vec{r}}_b \cdot \dot{\vec{r}}_b \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} T_t = & \frac{1}{2} m_b \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\left\{ \dot{x} - e\Omega \sin \psi_k - r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \right\}^2 + \right. \\ & \left. + \left\{ e\Omega \cos \psi_k + r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sistemin dönme kinetik enerjisi,

$$T_r = \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \quad (3.39)$$

Sistemin potansiyel enerjisi,

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2 \quad (3.40)$$

Sistemin enerji sönüm fonksiyonu,

$$D = \frac{1}{2}c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2}c_\zeta \sum_{k=1}^b \dot{\zeta}_k^2 \quad (3.41)$$

Öteleme kinetik enerjisi sadeleştirmelerin yapılabilmesi için açılarak yazılırsa,

$$T_t = \frac{1}{2}m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + e^2 \Omega^2 \sin^2 \psi_k - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + r^2 (\Omega + \dot{\zeta})^2 \sin^2 (\psi_k + \zeta_k) \right. \\ \left. - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin (\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}) \sin \psi_k \sin (\psi_k + \zeta_k) + e^2 \Omega^2 \cos^2 \psi_k \right. \\ \left. + r^2 (\Omega + \dot{\zeta})^2 \cos^2 (\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}) \cos \psi_k \cos (\psi_k + \zeta_k) \right]$$

$$T_t = \frac{1}{2}m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + e^2 \Omega^2 - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + r^2 (\Omega + \dot{\zeta})^2 \right. \\ \left. - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin (\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}) \cos \zeta_k \right]$$

Sistemin toplam enerjisi,

$$T = T_t + T_r \\ T = \frac{1}{2}m_B \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + e^2 \Omega^2 - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + \underline{\underline{r^2 (\Omega + \dot{\zeta})^2}} \right. \\ \left. - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin (\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}) \cos \zeta_k \right] + \\ + \frac{1}{2}I^* \sum_{k=1}^b \underline{\underline{(\Omega + \dot{\zeta}_k)^2}} \quad (3.42)$$

(3.42)'de altı çizili terimler de dikkate alınarak düzenlenirse,

$$T = \frac{1}{2}(m_B + bm_b) \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b b e^2 \Omega^2 + \frac{1}{2}(I^* + m_b r^2) \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 + \\ + \frac{1}{2}m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin (\psi_k + \zeta_k) + \right. \\ \left. + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right] \quad (3.43)$$

(3.43) ifadesi de, $M = m_B + bm_b$ ve $I = I^* + m_b r^2$ sadeleştirmeleriyle,

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b b e^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\psi_k + \zeta_k) + \right. \\
& \left. + 2er\Omega(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Ayrıca, (3.44) kinetik enerji ifadesindeki 3. terim açık halde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_b b e^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (\underline{\underline{\Omega^2}} + 2\Omega\dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2) \\
& + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\psi_k + \zeta_k) + \right. \\
& \left. + 2er\Omega(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Bu ifadedeki altı çizili terimler birer sabit oldukları için sadelik bakımın kinetik enerji ifadesinden atılabilirler. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (2\Omega\dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2) + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k \right. \\
& \left. - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Lagrange fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
L = T - V = & \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (2\Omega\dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2) + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + \right. \\
& \left. - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right] + \\
& - \frac{1}{2} k_x x^2 - \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2
\end{aligned} \tag{3.47}$$

x genelleştirilmiş koordinatı için hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = & M \dot{x} - m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega \sin \psi_k + r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = & M \ddot{x} - m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \cos \psi_k + r \left\{ \ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right\} \right] \\
\frac{\partial L}{\partial x} = & -k_x x \\
\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = & c_x \dot{x}
\end{aligned}$$

$$Q_x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_x$$

$$M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \cos \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0 \quad (3.48)$$

ζ_k ($k=1,2,...,b$) genelleştirilmiş koordinatları için hareket denklemi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} = I \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) - m_b \dot{x} r \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega \cos \zeta_k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) = I \ddot{\zeta}_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) - m_b r \dot{x} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) - m_b e r \Omega \dot{\zeta}_k \sin \zeta_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = -m_b \dot{x} r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) - m_b e r \Omega \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \zeta_k - k_\zeta \zeta_k$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\zeta}_k} = c_\zeta \dot{\zeta}_k$$

$$Q_{\zeta_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\zeta}_k} = Q_{\zeta_k}$$

$$I \ddot{\zeta}_k + c_\zeta \dot{\zeta}_k + k_\zeta \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega^2 \sin \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.49)$$

Mekanik sistemin lineer olmayan diferansiyel denklem takımı toplu halde yazılırsa:

$$M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \cos \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0 \quad (3.50)$$

$$I \ddot{\zeta}_k + c_\zeta \dot{\zeta}_k + k_\zeta \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega^2 \sin \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.51)$$

Elde edilen bu $b+1$ adet periyodik katsayılı lineer olmayan bağlı ADD takımının (3.50 ve 3.51) $\zeta_k = 0$ denge konumu civarında lineerleştirilmesi gerekmektedir. (Eğer incelemede aerodinamik etkiler ihmal edilmeseydi, sistemi farklı bir denge konumu civarında lineerleştirmek gerekecekti.)

Bu bağlamda, ele alınan sistemi temsil eden lineer olmayan bu denklemleri incelemede kullanabileceğimiz analiz araçları kısıtlı olduğundan (zaman alanında integrasyon, faz düzlemi), sistemin lineerleştirilmiş diferansiyel denklem takımıyla analize devam etmek gerekmektedir. Lineerleştirmiş gövde ve pal denklemi sırasıyla (3.52) ve (3.53)'te verilmektedir.

$$M\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin \psi_k - \Omega^2 \zeta_k \sin \psi_k + 2\Omega \dot{\zeta}_k \cos \psi_k \right] = 0 \quad (3.52)$$

$$I\ddot{\zeta}_k + c_\zeta \dot{\zeta}_k + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin \psi_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.53)$$

Daha önce yapıldığı gibi bu aşamada, bu diferansiyel denklem takımındaki periyodik katsayılardan kurtulmak için FKD'den faydalanılarak ζ_c ve ζ_s genelleştirilmiş koordinatlarına geçilir. Bunun için; (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin (3.52) gövde denkleminde yerlerine konmasıyla ve sadeleştirmelerle (3.54) denkleminde gelinir.

$$M\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x - \frac{m_b r b}{2} \ddot{\zeta}_s = 0 \quad (3.54)$$

Benzer şekilde, $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.53) \times \cos \psi_k)$ ve $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.53) \times \sin \psi_k)$

işlemleri yapıp, (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin uygulanmasıyla (3.55) ve (3.56) denklemlerine ulaşılır.

$$\frac{b}{2} \left[I\ddot{\zeta}_c + c_\zeta \dot{\zeta}_c + (m_b e r \Omega^2 - I\Omega^2 + k_\zeta) \zeta_c + 2I\Omega \dot{\zeta}_s + c_\zeta \Omega \zeta_s \right] = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{b}{2} \left[I\ddot{\zeta}_s + c_\zeta \dot{\zeta}_s + (m_b e r \Omega^2 - I\Omega^2 + k_\zeta) \zeta_s - 2I\Omega \dot{\zeta}_c - c_\zeta \Omega \zeta_c - m_b r \ddot{x} \right] = 0 \quad (3.56)$$

Sistemin hareket denklemleri (3.54, 55, 56) matris formunda ifade edilmesi halinde:

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [G])\{\dot{q}\} + ([K] + [H])\{q\} = \{0\} \quad (3.57)$$

(3.57)'denkleminde geçen matrisler açıkça yazılırsa,

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & -\frac{m_b b r}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} I & 0 \\ -\frac{m_b b r}{2} & 0 & \frac{b}{2} I \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} c_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} c_\zeta \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}(2\Omega I) \\ 0 & -\frac{b}{2}(2\Omega I) & 0 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}c_\zeta\Omega \\ 0 & -\frac{b}{2}c_\zeta\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{2}[(m_b e r - I)\Omega^2 + k_\zeta] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2}[(m_b e r - I)\Omega^2 + k_\zeta] \end{bmatrix} \quad \text{ve } \{q\} = \begin{Bmatrix} x \\ \zeta_c \\ \zeta_s \end{Bmatrix}$$

Elde edilen matris formundaki hareket denkleminde (3.57) bakılarak incelenen sistemin ataletsel olarak ve jirokopik olarak bağı, buna mukabil, statik olarak bağısız olduğu görülmektedir. Yukarıda da görüldüğü gibi sönüm matris simetriktir ve köşegeni üzerinde sistemdeki sönüm elemanlarıyla ilgili terimleri kapsamaktadır. Jirokopik matris ise ters-simetriktir (skew-symmetric) ve mekanik sistemdeki dönen elemanların üzerine etkiyen jirokopik momentleri^{**} ve/veya (eğer, hareket denklemleri, hareketli (noninertial)^{††} bir eksen takımına göre elde edilmiş ise) koriolis ivmelerini içermektedir [30]. Bunun yanında, Jirokopik matris [G], sistemi kararsızlaştıracak bir etki yaratmamaktadır.

Simetrik olan katılık matrisinde [K], –bir önceki yer rezonansı modeline göre– mafsallık mesafesi e 'nin eklenmesinden dolayı geometrik kökenli bir direngenlik artışı görülmektedir. Daha önce bahsedilen pozitif belirli olmama durumu buradaki katılık matrisi için de geçerlidir. Ters-simetrik olan dönence (circulatory) matrisindeki terimler ise sistemde bulunan dönen elemanların üzerine etkiyen korunumsuz momentleri temsil etmektedirler.

^{**} Jirokopik moment: Bir yapının, bir Δ eksen etrafında döndüğü kabul edilsin. Δ eksen etrafında dönmekte olan yapıya, Δ eksenine dik bir eksen etrafında dönme hareketi uygulanırsa, bu her iki eksene dik üçüncü bir eksen etrafında jirokopik moment adı verilen bir tepki momenti oluşmaktadır [41].

^{††} Hareketli (noninertial) eksen takımı: Başka sabit bir eksen takımına göre düzgün olmayan bir hızla öteleme hareketi yapan ve/veya yine sabit bir eksen takımına göre düzgün olsun olmasın dönme hareketi yapan eksen takımıdır [42].

Denge konumu etrafında lineerleştirilmiş korunumsuz mekanik sistemin boyutlu denklemleri matris formunda elde edildiğine göre (3.57) sistemin kararlılık analizi, belli başlangıç koşulları ve/veya belli tahrik kuvvetleri etkisi altındaki zaman cevabı veya belli bir frekanstaki basit harmonik tahrik etkisi altında frekans cevabı rahatlıkla araştırılabilir.

3.4.2.2 Özdeğer analizi

Üç serbestlik dereceli yer rezonansı için hareket denklemi en genel haliyle (3.57)'de verilmiştir.

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [G])\{\dot{q}\} + ([K] + [H])\{q\} = \{0\} \quad (3.57)$$

Durum uzayı formülasyonu kullanılarak bu denklem takımı, değişken dönüşümü yardımıyla birinci mertebeden lineer dif. denklem takımına dönüştürülür.

$$\begin{cases} \{q\} = \{x_1\} \\ \{\dot{q}\} = \{x_2\} \end{cases} \quad (3.57)$$

değişkenleri tanımlansın. Ayrıca, $\{\dot{x}_1\} = \{x_2\}$ olduğu dikkate alınırsa, (3.57)'de tanımlanan değişkenlerin, (3.56)'da yerine konmasıyla, diferansiyel denklem takımı “standart formda” elde edilir. Bunun için,

$$\begin{cases} \{\dot{x}_1\} = \{x_2\} \\ \{\dot{x}_2\} = -[M]^{-1}([K] + [H])\{x_1\} - [M]^{-1}([C] + [G])\{x_2\} \end{cases}$$

İfadesi düzenlenirse,

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \left[\begin{array}{c|c} [0] & [I] \\ \hline -[M]^{-1}([K] + [H]) & -[M]^{-1}([C] + [G]) \end{array} \right]_{2n \times 2n} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (3.58)$$

(3.58) daha sade gösterimle yazılırsa,

$$\{\dot{x}\}_{2n \times 1} = [A]_{2n \times 2n} \{x\}_{2n \times 1} \quad (3.59)$$

(3.59) denkleminin çözümü için üstel çözüm kabulünden (3.60) formunda bir çözüm aranmalıdır.

$$\{x(t)\}_{2n \times 1} = \{X\}_{2n \times 1} e^{\lambda_j t} \quad (3.60)$$

(3.60)'daki çözüm kabulünün, (3.59)'deki denkleme konmasıyla, standard özdeğer problemine (3.61) gelinir.

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (3.61)$$

λ_j 'ler $[A]$ matrisi ile ifade edilen sistemin kompleks eşlenik özdeğerleridir.

$$\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.62)$$

olmak üzere toplam n kompleks eşlenik özdeğer bulunur. $\{X\}_{2n \times 1}$ kompleks genlik vektörüdür. (3.62)'de verilen λ_j kompleks eşlenik özdeğerleri [43], daha açık şekliyle şöyle ifade edilebilir:

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j \pm i \left(\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

(3.63) ifadesinde geçen $\omega_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$ ve $\zeta_j = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}$ sırasıyla, j 'inci modun

sönümsüz doğal frekansı ve yine j 'inci modun modal sönüm oranıdır.

3.4.2.3 Serbest titreşim zaman cevabı

Sistemin zaman cevabı MATLAB [44] kullanılarak inceleneceğinden ikinci mertebeden olan hareket denklemleri, yeni değişkenler tanımlanarak, birinci mertebeden denklem takımına dönüştürülür. Bu sayede sistemin hareket denklemleri (3.57), MATLAB kullanılarak kolayca sayısal olarak integre edilebilir. Yeni değişkenler vektör formunda (3.64)'te verilmiştir.

$$\{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6\}^T = \{x \ \dot{x} \ \zeta_c \ \dot{\zeta}_c \ \zeta_s \ \dot{\zeta}_s\}^T \quad (3.64)$$

(3.64)'ün, hareket denklemi (3.57)'de yerine konmasıyla, (3.65)'e gelinir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ M\ddot{x}_2 + c_x x_2 + k_x x_1 - \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_6 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ I\ddot{x}_4 + c_\zeta x_4 + (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_3 + 2I \Omega x_6 + c_\zeta \Omega x_5 &= 0 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ I\ddot{x}_6 + c_\zeta x_6 + (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_5 - 2I \Omega x_4 - c_\zeta \Omega x_3 - m_b r \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

(3.65)'in düzenlenmesiyle (3.66) elde edilir.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{M} \left(-c_x x_2 - k_x x_1 + \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_6 \right) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_4 - (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_3 - 2I \Omega x_6 - c_\zeta \Omega x_5 \right) \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_6 - (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_5 + 2I \Omega x_4 + c_\zeta \Omega x_3 + m_b r \dot{x}_2 \right)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

(3.66)da $\dot{x}_2$ ve $\dot{x}_6$ denklemleri karşılıklı olarak birbirilerinin yerine konduğu takdirde,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{M} \left(-c_x x_2 - k_x x_1 + \frac{m_b r b}{2I} \left[-c_\zeta x_6 - (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_5 + 2I \Omega x_4 + c_\zeta \Omega x_3 + m_b r \dot{x}_2 \right] \right) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_4 - (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_3 - 2I \Omega x_6 - c_\zeta \Omega x_5 \right) \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_6 - (m_b e r \Omega^2 - I \Omega^2 + k_\zeta) x_5 + 2I \Omega x_4 + c_\zeta \Omega x_3 + \frac{m_b r}{M} \left[-c_x x_2 - k_x x_1 + \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_6 \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$P = k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I)$ ve $Q = m_b^2 r^2 b - 2MI$ olmak üzere, (3.67) düzenlenirse, (3.68)'deki birinci mertebeden lineer ADD takımı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2Ik_x/Q & 2Ic_x/Q & -br\Omega c_\zeta m_b/Q & -2brI\Omega m_b/Q & Pbrm_b/Q & br c_\zeta m_b/Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P/I & -c_\zeta/I & -c_\zeta \Omega/I & -2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2rk_x m_b/Q & 2rc_x m_b/Q & -2M\Omega c_\zeta/Q & -4MI\Omega/Q & 2PM/Q & 2Mc_\zeta/Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} \tag{3.68}$$

Böylece, sistem $\{\dot{x}\} = [A]\{x\}$ formunda ifade edilir. Bu başlangıç değer probleminin çözümü ise, uygun bir başlangıç koşulları vektörü $\{x_{1,\dots,6}(t=0)\}^T = \{\dots\}^T$ yardımıyla sisteme bir bozuntu (perturbation) verilmesi ve sistemin serbest titreşim hareketini temsil eden geçici zaman cevabının elde edilmesiyle tamamlanmaktadır. Sistemin tüm serbestlik derecelerinin zamana bağlı değişimi bu yöntemle elde edildikten sonra, ilgili serbestlik derecesinin zaman cevabından, sistemin kararlı mı yoksa

kararsız mı olduğu hakkında –belli bir simülasyon süresi için de olsa– bir öngöründe bulunulabilmektedir.

Bu çalışmada hareket denklemlerini integre etmek için, Runge-Kutta-Fehlberg “RKF45” algoritmasını esas alan ve seçilen mutlak/bağılı tolerans değerine göre optimum integrasyon adımını otomatik olarak belirleyen MATLAB’in “ode45” fonksiyonu kullanılmıştır.

3.4.2.4 Serbest titreşim zaman cevabından Coleman diyagramının elde edilmesi

Bu bölümde sistemin zaman cevabı, bir önceki bölümden farklı olarak, sadece rotorun bir dönme hızı için değil rotorun birden fazla dönme hızı değeri için elde edilmekte ve her bir zaman cevabının FFT dönüşümü alınmak suretiyle elde edilen spektraların hız-frekans düzleminde ard arda çizdirilmesiyle Ardarda tarzda bir Coleman diyagramı elde edilmektedir. Bu işlem için MATLAB’in “fft” fonksiyonundan –Ayrık Fourier Dönüşümü algoritması– faydalanılmaktadır. Bu yöntemle, sistemin detaylı bir Coleman diyagramının çıkartılabilmesi için; frekans ve rotor hızı vektörünün çözünürlüğü arttırılarak (diğer bir ifadeyle Δf ve $\Delta \Omega$ azaltılarak) analiz tekrarlanmalıdır. Ayrıca, genlik eksenin logaritmik olarak ifade edilmesi de diyagramın görseelliğini iyileştirmektedir.

3.4.2.5 KSFD ile Coleman diyagramının elde edilmesi

Sayısal ses işleme, sismik, sonar, radar verilerinin işlenmesi ve rotor dinamiğinde rotorların hızlanması ve yavaşlaması esnasında ortaya çıkan titreşimlerin incelenmesi gibi birçok uygulamada, bir sinyalin zamanla değişen frekans içeriği araştırma konusudur. Bu tip, spektrumu zamanla değişen sinyaller durağan olmayan (non-stationary) sinyaller olarak adlandırılmaktadır ve standart Fourier dönüşümü bu tarz sinyalleri analiz etmede yetersiz kalmaktadır. Bu amaçla KSFD yöntemi geliştirilmiştir (EK A.3).

Dönel makinaların cevap spektrumunun dönme hızına bağılılığı bu makinaların çok önemli bir özelliğidir [45]. Aynı zamanda, dönel makinalardan elde edilen titreşim cevabının frekans içeriğinin, başta dönme hızı olmak üzere birçok faktöre bağılı olduğu da bilinmektedir. Bu nedenle, ölçülen titreşim sinyalinin karakteristiği dönme hızına bağılı olarak sistematik bir şekilde değişmektedir. Örneğin dönel makinalarda, maksimum genliklerin görüldüğü frekanslar, rotorun dönme hızına bağılı olarak

değişmektedirler. Daha önce de ifade edildiği gibi, genellikle bu yüksek genlikler, dönme hızı frekansındaki tahriklerin ve dönme hızı frekansının tamsayı katlarındaki tahriklerin, sistemin yapısal doğal frekansları ile çakışması sonucu görülmektedir. Son yıllarda, örneklenmiş zaman cevabından sürekli zamana bağlı olarak değişen spektrumun tahmin edilmesi ilgi görmektedir. Genellikle, çok ufak bir zaman aralığında değişmedikleri varsayılarak elde edilen spektrumlar, bir spektrogram (zaman-frekans diyagramı) üzerine yatay eksenle zaman bilgisini içerecek şekilde gösterilmektedirler.

Bu çalışmada, spektrogram KSFD yöntemiyle elde edilemekte, ve Coleman diyagramı (hız-frekans diyagramı) da, zaman ile hız arasındaki $\Omega(t) = \alpha.t$ şeklinde tanımlanmış lineer bağıntıdan faydalanılarak oluşturulmaktadır. Başlangıç noktası olarak, daha önceden oluşturulmuş üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin denklemleri (3.57) kullanılmaktadır.

Sabit katsayılı ve bağlı lineer diferansiyel denklem takımı olarak tanımlanan hareket denklemleri (3.57) daha önce serbest titreşim zaman cevabında da olduğu gibi çözdürülmektedirler. Fakat bir farkla, o da bu kez serbest titreşim zaman cevabı sabit bir Ω dönme hızı için elde edilmek yerine, $\Omega(t) = \alpha.t$ şeklinde tanımlı lineer bir fonksiyon olarak benzetim süresi boyunca değişmekte ve serbest titreşim zaman cevabı bu suretle elde edilmektedir. Esasen burada yapılan, değişken katsayılı (rotor hızı zamanın fonksiyonu olduğu için) bir ADD takımına (3.69)

$$[M]\{\ddot{q}\} + [f(\Omega(t))]\{\dot{q}\} + [f(\Omega(t))]\{q\} = \{0\} \quad (3.69)$$

başlangıç koşulları vasıtasıyla bir bozuntu verilerek sistemin serbest titreşim zaman cevabının elde edilmesidir. Elde edilen zaman cevabı da durağan olmayan (non-stationary) bir sinyal olacağından, bu zaman cevabının KSFD yöntemiyle işlenmesiyle Coleman diyagramına varılmaktadır.

3.4.2.6 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında elde edilmesi

İncelenmekte olan üç serbestlik dereceli (dönen eksen takımına göre beş) yer rezonansı modelinde, her bir palin kendi eksen takımında ve belirli başlangıç koşulları altında yapmış olduğu zamana bağlı titreşim hareketi ele alınmak istensin. Bunun için, önceki bölümlerde hareket denklemleri çıkartılmış, lineerleştirilmiş fakat

henüz FKD uygulanmamış halde bulunan hareket denklemlerinden (3.52, 53) yola çıkılması gerekmektedir.

$$M\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin \psi_k - \Omega^2 \zeta_k \sin \psi_k + 2\Omega \dot{\zeta}_k \cos \psi_k \right] = 0 \quad (3.52)$$

$$I\ddot{\zeta}_k + c_\zeta \dot{\zeta}_k + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin \psi_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.53)$$

(3.52, 53)'te verilen toplam beş adet periyodik katsayılı lineer diferansiyel denklemin düzenlenmesi ve birinci mertebeden bir forma getirilmesi sayısal çözüm için gereklidir. Bunun için külfetli sayılabilecek sembolik işlemlerin uygulanması gerekmektedir. Bu sistemin genelleştirilmiş koordinat vektörü ise, $\{x \ \dot{\zeta}_1 \ \dot{\zeta}_2 \ \dot{\zeta}_3 \ \dot{\zeta}_4\}^T$. Sistem birinci mertebeye indirgeneceğinden, yeni bir genelleştirilmiş koordinat vektörü (3.70) tanımlanır.

$$\{x \ \dot{\zeta}_1 \ \dot{\zeta}_2 \ \dot{\zeta}_3 \ \dot{\zeta}_4\}^T = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}\}^T \quad (3.70)$$

(3.70)'in (3.52) ve (3.53)'te yerine konmasıyla (3.71) elde edilir.

$$\begin{aligned} & M\dot{x}_2 + c_x x_2 + k_x x_1 - m_b r \left[\dot{x}_4 \sin \psi_1 + \dot{x}_6 \sin \psi_2 + \dot{x}_8 \sin \psi_3 + \dot{x}_{10} \sin \psi_4 + \right. \\ & \left. - \Omega^2 [x_3 \sin \psi_1 + x_5 \sin \psi_2 + x_7 \sin \psi_3 + x_9 \sin \psi_4] + \right. \\ & \left. + 2\Omega [x_4 \cos \psi_1 + x_6 \cos \psi_2 + x_8 \cos \psi_3 + x_{10} \cos \psi_4] \right] = 0 \\ & I\dot{x}_4 + c_\zeta x_4 + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_3 - m_b r \sin \psi_1 \dot{x}_2 = 0 \\ & I\dot{x}_6 + c_\zeta x_6 + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_5 - m_b r \sin \psi_2 \dot{x}_2 = 0 \\ & I\dot{x}_8 + c_\zeta x_8 + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_7 - m_b r \sin \psi_3 \dot{x}_2 = 0 \\ & I\dot{x}_{10} + c_\zeta x_{10} + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_9 - m_b r \sin \psi_4 \dot{x}_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Bu aşamadan sonra cebirsel işlemler (denklemlerde yerine koymalar, trigonometrik basitleştirmeler, vs.) çok uzayacağından herhangi bir hataya yer vermemek için MATLAB' te [44] sembolik olarak gerçekleştirilmektedir. Bu işlemler sonucunda, MATLAB'ten, sistem matrisi $[A]_{10 \times 10}$ 'nın katsayıları (3.72)'de yerlerine konmak üzere metin formatında (Şekil 3.18) elde edilmektedir.

```

coef_2_1 = -kx.*I./ (Mt.*I-mb.^2.*r.^2.*sin(psi1).^2-mb.^2.*r.^2.*sin(psi2).^2-mb.^2. ...
coef_2_2 = -cx.*I./ (Mt.*I-mb.^2.*r.^2.*sin(psi1).^2-mb.^2.*r.^2.*sin(psi2).^2-mb.^2. ...
coef_2_3 = -(mb.^2.*r.^2.*sin(psi1)).*e.*omega.^2+mb.*r.*sin(psi1).*kzeta+mb.*r. ...
coef_2_4 = -(mb.*r.*sin(psi1)).*czeta-2.*mb.*r.*omega.*cos(psi1).*I./ (Mt.*I- ...
coef_2_5 = -(mb.^2.*r.^2.*sin(psi2)).*e.*omega.^2+mb.*r.*sin(psi2).*kzeta+mb.*r.* ...
...
...

```

Şekil 3.18 : Sistem matrisi [A]’nın katsayıları metin formatında

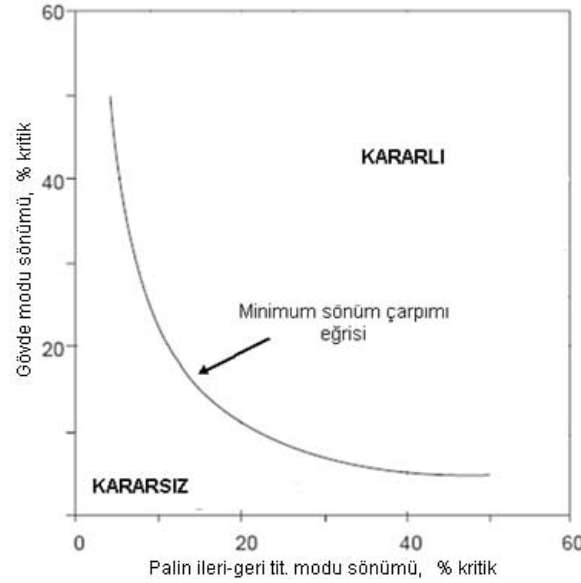
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} & c_{2,7} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,6} & c_{4,7} & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{6,1} & c_{6,2} & c_{6,3} & c_{6,4} & c_{6,5} & c_{6,6} & c_{6,7} & c_{6,8} & c_{6,9} & c_{6,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{8,1} & c_{8,2} & c_{8,3} & c_{8,4} & c_{8,5} & c_{8,6} & c_{8,7} & c_{8,8} & c_{8,9} & c_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_{10,1} & c_{10,2} & c_{10,3} & c_{10,4} & c_{10,5} & c_{10,6} & c_{10,7} & c_{10,8} & c_{10,9} & c_{10,10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Bu halde, sistem sayısal olarak integre edilebilir haldededir, fakat, sistem matrisi [A] sabit katsayılı değil periyodik katsayılı olduğu için, bu katsayılar ADD çözücüsüne kullanıcının tanımladığı zaman eşit aralıklı zaman noktalarında beslenmek yerine, çözücünün integrasyon adımını optimize ettiği zaman noktalarında interpolate edilerek beslenmelidir. Doğal olarak ADD çözücüsü çıktıları, simülasyon esnasında yakınsaklığı sağlamak için zamanı farklı büyüklükteki integrasyon adımlarına bölerek verecektir. Bu nedenle, çözücünden alınan veriler işlenmeden (signal processing) önce, eşit aralıklı bir zaman vektörü baz alınarak interpolate edilmelidir. Daha önce yapıldığı gibi burada da, ilgili serbestlik derecesinin zaman cevabından sistemin kararlılığı hakkında fikir edinilebilmektedir.

3.4.2.7 Gerekli sönümün belirlenmesi

Yer rezonansı modelinde, kararsızlığın meydana geldiği rotor hızı aralığını gidermede başvurulmuş en etkili yöntem genellikle sisteme sönüm eklenmesi şeklindedir. Tüm yapıya eklenecek olan sönüm, sisteme ait hareket denklemleri çıkartılırken yapılan kabuller göz önünde bulundurularak, hem sabit duran yapı üzerine –gövdeye– hem de dönen yapı üzerine –rotora– olacak şekilde ikiye ayrılmak durumundadır. İlk olarak, Coleman ve Feingold’un ifade ettiği gibi, gövde ile palin sönümleri çarpımı belli bir minimum değeri sağlamak zorundadır ki sistem kararlı

olabilsin. Palin veya gövdenin kendi başına sahip olduğu sönüm değerleri, kararsızlık aralığını giderme bahsinde pek bir anlam ifade etmemektedirler.



Şekil 3.19 : Minimum sönüm gereksinimi için kararlılık sınırı grafiği

$sönüm_{gövde} \cdot sönüm_{\zeta} > sabit$ şeklinde ifade edilen kararlılık kriteri bir diyagram üzerinde gösterildiğinde ortaya Şekil 3.19'dakine benzer hiperbolik bir grafik ortaya çıkmaktadır. Bu grafik farklı sönüm kombinasyonları için sistemin kararlılık durumu hakkında bilgi vermektedir.

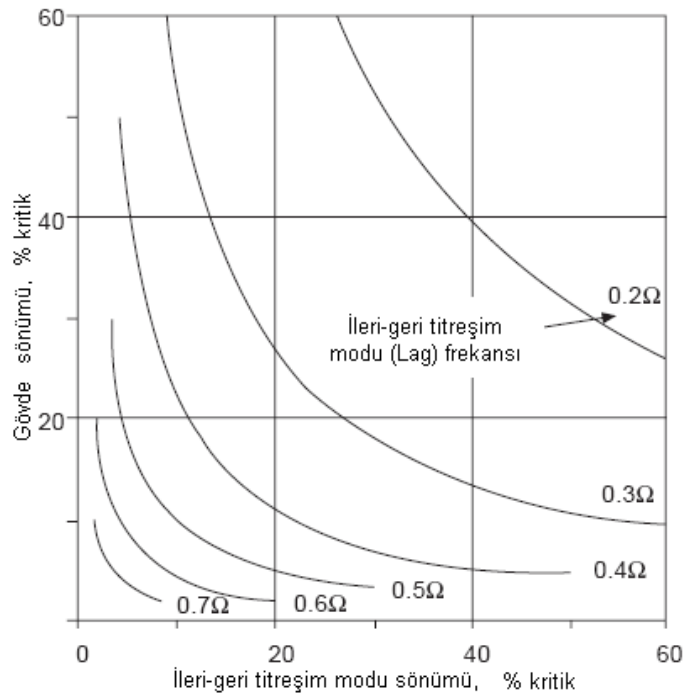
Şekil 3.19'da görülen kararlılık sınırı grafiğinin elde edilmesi ise şu esaslara dayanılarak yapılmaktadır: Şekil 3.19'daki grafikten seçilen bir çift sönüm sabiti (boyutlu veya boyutsuz, ilgilenilen denklem takımının durumuna göre) seçilerek matematik modele girilir ve rotorun çalışma devri aralığındaki her bir hız için sistemin özdeğerleri elde edilir ve tüm bu çalışma devri aralığında elde edilen kompleks özdeğerlerden en az birinin reel kısmının pozitif olması durumunda, Şekil 3.19'daki sönüm çifti parametresine karşı gelen çalışma noktası kararsız bölge olarak grafik üzerine işlenmektedir. Buna karşılık, yine ilgili sönüm çiftine karşılık gelen ve negatif reel kısma sahip özdeğerler Şekil 3.19'de kararlı çalışma bölgesini temsil etmektedirler. Her iki bölgenin arası ise sistemin kararlılık sınırını vermektedir. Çok serbestlik dereceli sistemlerde, benimsenebilecek olan bu tarz “bir çift parametrenin bir değer aralığını süpürmesiyle” sistemin kararlılık kartı elde edilebilmektedir. Bunun yanında, az serbestlik dereceli sistemler (iki-üç) için kararlılık sınırı; sembolik

olarak çıkartılmış olan frekans denkleminde s (Laplace değişkeni) yerine $j\omega$ yazılarak elde edilen polinomun çözümüyle de bulunabilir.

Şekil 3.19’da verilen kararlılık sınırı grafiği boyutlu veya boyutsuz olarak elde edilmektedir. Eğer, boyutlu diferansiyel denklemler ile çalışılıyorsa; başka bir

deyişle c_ζ ve c_x boyutlu sönüm sabitleriyse, $\xi_\zeta = \frac{c_\zeta}{2\sqrt{k_\zeta I}}$ ve $\xi_x = \frac{c_x}{2\sqrt{k_x M}}$

bağıntılarından yararlanılarak Şekil 3.19’daki grafik boyutsuzlaştırılabilmektedir.

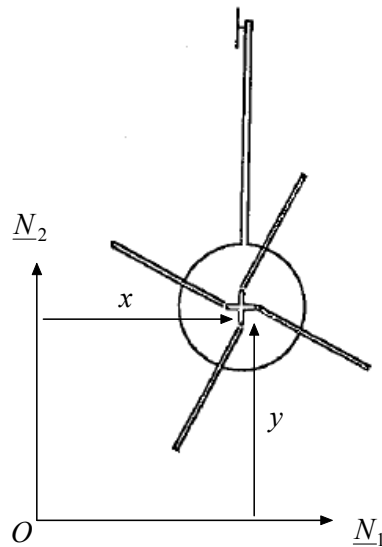


Şekil 3.20 : Sönüm gereksiniminin ileri-geri titreşim modu frekansına bağlı değişimi [35].

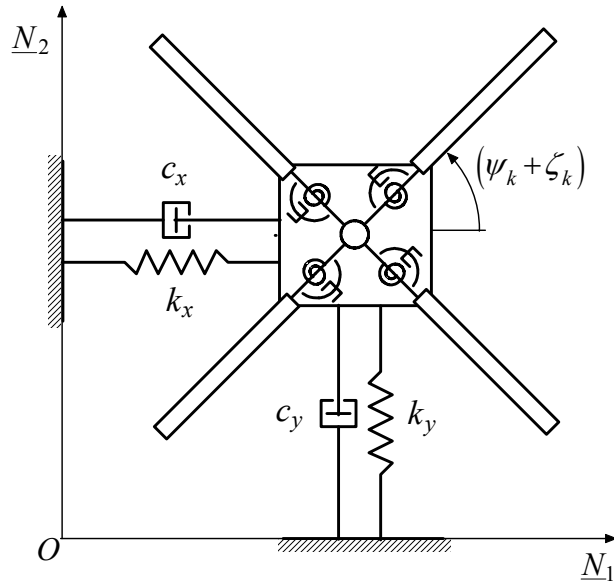
Şekil 3.20’de minimum sönüm gereksinimi, ileri-geri titreşim modu frekansının bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Buna göre, gecikme modu frekansı 1Ω ’ya yaklaştıkça sistemde kararlılığı sağlamak için gerekli sönüm azalmaktadır [35]. Bu çalışmada incelenen yer rezonansı modelinde sönüm, matematiksel açıdan kolaylık sağlaması bakımından lineer viskoz tipi sönüm olarak alınmış olmakla birlikte, diğer sönüm çeşitlerine “bir çevrim boyunca harcanan eşdeğer enerji” prensibi kullanılarak geçiş yapılabilir.

3.5 Dört Serbestlik Dereceli Basit Yer Rezonansı Modeli

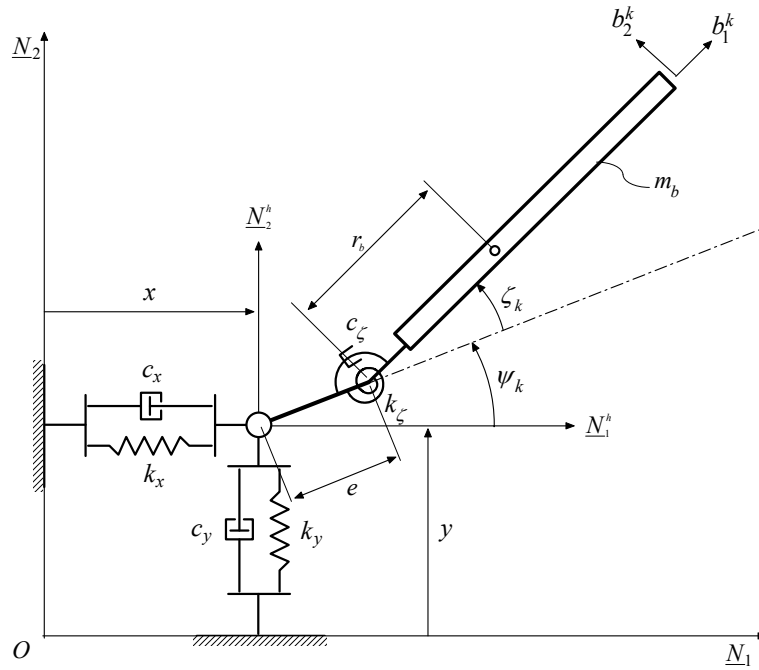
Yer rezonansını matematiksel olarak modellemekte kullanılabilecek en basit ikinci model Şekil 3.21’de verilmektedir. Şekil 3.22’de üstten görünümü verilmiş mekanik sistem sürtünmesiz bir zemin üzerinde bulunmakta olup yere iki doğrultuda lineer bir yaylar ve viskoz damper vasıtasıyla bağlanmıştır. Burada, $\underline{N}_1$ ve $\underline{N}_2$ doğrultularında m_x ve m_y eşdeğer kütleleriyle modellenen rijit bir gövde ve ona rijit bağlı b adet pale sahip bir rotor, mekanik sistemi oluşturmaktadır. Sistem $b+2$ adet serbestlik derecesine sahiptir. Bu serbestlik derecelerinden b adedi dönen eksen takımında b adet palin ileri-geri titreşim hareketini, kalan iki adedi ise –ki bu helikopter gövdesinin enine ve boyuna hareketlerini (Şekil 3.21) temsil etmektedir– sabit eksen takımında tanımlanmıştır. Bununla birlikte, pallerin dönen eksen takımına göre tanımlanmış serbestlik dereceleri –FKD’den yararlanılarak– sabit eksen takımındaki muadillerine dönüştürülmektedirler. Ortaya çıkan –sabit eksen takımındaki– bu yeni b adet serbestlik derecesinin iki adedi rotorun müşterek ve tepkisiz modlarına aittir ve bu iki moda ait hareket denklemleri gövdenin hareket denklemiyle bağısızdır. Bu nedenle, bu iki serbestlik derecesi yer rezonansı analizine dahil edilmemektedir. Sonuç olarak $b=4$ palli bir rotor için, geriye $(b-2)+2=4$ serbestlik derecesi kalmaktadır. “Dört serbestlik dereceli yer rezonansı modeli” şeklindeki adlandırma buradan ileri gelmektedir.



Şekil 3.21 : Helikopter gövdesinin üstten görünüşü ve gövde serbestlik dereceleri.



Şekil 3.22 : Dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin üstten görünüşü.



Şekil 3.23 : Dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde kullanılan düzlem-içi rijit pal modeli.

3.5.1 Hareket denklemlerinin elde edilmesi

Burada, daha önce yapıldığı gibi, sabit eksen takımına göre dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin hareket denklemleri Lagrange denklemleri yöntemiyle elde edilecektir. Şekil 3.23'teki rijit palın kütle merkezinin konum vektörü, $\underline{N}_2 O \underline{N}_1$ sabit

eksen takımına göre yazılarak hareket denklemleri oluşturulacaktır. Rijit palin kütle merkezinin konum vektörü:

$$\vec{r}_b = (x + e \cos \psi_k + r \cos(\psi_k + \zeta_k)) \underline{N}_1 + (y + e \sin \psi_k + r \sin(\psi_k + \zeta_k)) \underline{N}_2 \quad (3.73)$$

Bu ifadenin –kinetik enerji ifadesinden yerine konmak üzere– zamana göre türevi alınırsa,

$$\dot{\vec{r}}_b = \left[\dot{x} - e\Omega \sin \psi_k - r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_1 + \left[e\Omega \cos \psi_k + r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \underline{N}_2 \quad (3.74)$$

Sistemin öteleme kinetik enerjisi:

$$T_t = \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\left(\dot{x} - e\Omega \sin \psi_k - r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right)^2 + \left(\dot{y} + e\Omega \cos \psi_k + r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right)^2 \right] \quad (3.75)$$

Sistemin dönme kinetik enerjisi:

$$T_r = \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \quad (3.76)$$

Sistemin potansiyel enerjisi:

$$V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2 \quad (3.77)$$

Sistemin sönüm enerjisi fonksiyonu:

$$D = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} c_\zeta \sum_{k=1}^b \dot{\zeta}_k^2 \quad (3.78)$$

(3.75) öteleme kinetik enerji ifadesi açılarak sadeleştirilirse (3.79) elde edilir.

$$T_t = \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2 \Omega^2 - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + 2\dot{y}e\Omega \cos \psi_k + r^2 (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \sin(\psi_k + \zeta_k) + 2\dot{y}r(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos(\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega (\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right] \quad (3.79)$$

Sistemin toplam kinetik enerjisi ise,

$$\begin{aligned}
T &= T_t + T_r \\
T &= \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2 \Omega^2 - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}e\Omega \cos \psi_k + r^2 \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 - 2\dot{x}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \left(\psi_k + \zeta_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \left(\psi_k + \zeta_k \right) + 2er\Omega \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \zeta_k \right] + \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Lagrange fonksiyonu (3.81)'de verilmektedir.

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
L &= \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2 \Omega^2 - 2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}e\Omega \cos \psi_k + r^2 \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 - 2\dot{x}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \left(\psi_k + \zeta_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \left(\psi_k + \zeta_k \right) + 2er\Omega \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \zeta_k \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} I^* \sum_{k=1}^b \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 - \frac{1}{2} k_x x^2 - \frac{1}{2} k_y y^2 - \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2
\end{aligned} \tag{3.81}$$

(3.81)' de Ω^2 'yi içeren sabit terimlerin ifadeden atılması ve $I = I^* + m_b r^2$ basitleştirmesiyle (3.82) ifadesine gelinir.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} (m_x + m_b b) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (m_y + m_b b) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b \left(2\Omega \dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k + 2\dot{y}e\Omega \cos \psi_k - 2\dot{x}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \left(\psi_k + \zeta_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \left(\psi_k + \zeta_k \right) + 2er\Omega \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos \zeta_k \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} k_x x^2 - \frac{1}{2} k_y y^2 - \frac{1}{2} k_\zeta \sum_{k=1}^b \zeta_k^2
\end{aligned} \tag{3.82}$$

x genelleştirilmiş koordinatı için hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_x + m_b b) \dot{x} - m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega \sin \psi_k + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \left(\psi_k + \zeta_k \right) \right] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_x + m_b b) \ddot{x} - m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \cos \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \sin \left(\psi_k + \zeta_k \right) + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos \left(\psi_k + \zeta_k \right) \right] \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -k_x x \\
\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} &= c_x \dot{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \\
& (m_x + m_b b) \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + \\
& -m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \cos \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.83}$$

y genelleştirilmiş koordinatı için hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_y + m_b b) \dot{y} + m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega \cos \psi_k + r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = (m_y + m_b b) \ddot{y} + m_b \sum_{k=1}^b \left[-e\Omega^2 \sin \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) - r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] \\
& \frac{\partial L}{\partial y} = -k_y y \\
& \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = c_y \dot{y} \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \\
& (m_y + m_b b) \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y + \\
& + m_b \sum_{k=1}^b \left[e\Omega^2 \sin \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) - r \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right)^2 \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

ζ_k ($k=1,2,...,b$) genelleştirilmiş koordinatları için hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} = I \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) - m_b \dot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b \dot{y} \cos(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega \cos \zeta_k \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) = I \ddot{\zeta}_k - m_b r \left[\ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + \dot{x} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] + \\
& \quad + m_b r \left[\ddot{y} \cos(\psi_k + \zeta_k) - \dot{y} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] - m_b e r \Omega \dot{\zeta}_k \sin \zeta_k \\
& \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} = -m_b \dot{x} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \cos(\psi_k + \zeta_k) - m_b \dot{y} \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin(\psi_k + \zeta_k) + \\
& \quad - m_b e r \Omega \left(\Omega + \dot{\zeta}_k \right) \sin \zeta_k - k_\zeta \zeta_k \\
& \frac{\partial D}{\partial \dot{\zeta}_k} = c_\zeta \dot{\zeta}_k
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\zeta}_k} = 0$$

$$I \ddot{\zeta}_k + c_{\zeta} \dot{\zeta}_k + k_{\zeta} \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b r \ddot{y} \cos(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega^2 \sin \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.85)$$

Elde edilen lineer olmayan periyodik katsayılı ADD takımı toplu halde (3.86)'da verilmiştir.

$$(m_x + m_b b) \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - m_b \sum_{k=1}^b \left[e \Omega^2 \cos \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \sin(\psi_k + \zeta_k) + r (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \cos(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0 \quad (3.86a)$$

$$(m_y + m_b b) \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y + m_b \sum_{k=1}^b \left[e \Omega^2 \sin \psi_k + r \ddot{\zeta}_k \cos(\psi_k + \zeta_k) - r (\Omega + \dot{\zeta}_k)^2 \sin(\psi_k + \zeta_k) \right] = 0 \quad (3.86b)$$

$$I \ddot{\zeta}_k + c_{\zeta} \dot{\zeta}_k + k_{\zeta} \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin(\psi_k + \zeta_k) + m_b r \ddot{y} \cos(\psi_k + \zeta_k) + m_b e r \Omega^2 \sin \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.86c)$$

(3.86) de verilen denklemler $\zeta_k = 0$ civarında lineerleştirildiklerinde (3.87) 'deki periyodik katsayılı lineer ADD takımı elde edilmektedir. $M_x = m_x + b m_b$ $M_y = m_y + b m_b$ olmak üzere,

$$M_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \sin \psi_k + 2 \Omega \dot{\zeta}_k \cos \psi_k - \Omega^2 \zeta_k \sin \psi_k \right] = 0 \quad (3.87a)$$

$$M_y \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y + m_b r \sum_{k=1}^b \left[\ddot{\zeta}_k \cos \psi_k - 2 \Omega \dot{\zeta}_k \sin \psi_k - \Omega^2 \zeta_k \cos \psi_k \right] = 0 \quad (3.87b)$$

$$I \ddot{\zeta}_k + c_{\zeta} \dot{\zeta}_k + (k_{\zeta} + m_b e r \Omega^2) \zeta_k - m_b r \ddot{x} \sin \psi_k + m_b r \ddot{y} \cos \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, b \quad (3.87c)$$

İki adedi gövde, dört adedi rotor denklemi olmak üzere toplam altı adet ikinci mertebe diferansiyel denklem elde edilmektedir.

Daha önce yapıldığı gibi bu aşamada, (3.87) ADD takımındaki periyodik katsayılarından kurtulmak için FGD'den faydalanılarak ζ_c ve ζ_s genelleştirilmiş koordinatlarına geçilir. Bunun için; (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin (3.87a) ve

(3.87b) gövde denklemlerinde yerlerine konması ve gerekli sadeleştirmelerle (3.88a) ve (3.88b) denklemlerine gelinir.

Benzer şekilde, $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.87c) \times \cos \psi_k)$ ve $\sum_{k=1}^b (\text{denklem}(3.87c) \times \sin \psi_k)$ işlemleri yapıp, (B.6), (B.7) ve (B.8) ifadelerinin uygulanmasıyla (3.88c) ve (3.88d) denklemlerine ulaşılır.

$$M_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - \frac{m_b r b}{2} \ddot{\zeta}_s = 0 \quad (3.88a)$$

$$M_y \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y + \frac{m_b r b}{2} \ddot{\zeta}_c = 0 \quad (3.88b)$$

$$\frac{b}{2} \left[I \ddot{\zeta}_c + c_{\zeta} \dot{\zeta}_c + (k_{\zeta} + \Omega^2 [m_b e r - I]) \zeta_c + 2I \Omega \dot{\zeta}_s + c_{\zeta} \Omega \zeta_s + m_b r \ddot{y} \right] = 0 \quad (3.88c)$$

$$\frac{b}{2} \left[I \ddot{\zeta}_s + c_{\zeta} \dot{\zeta}_s + (k_{\zeta} + \Omega^2 [m_b e r - I]) \zeta_s - 2I \Omega \dot{\zeta}_c - c_{\zeta} \Omega \zeta_c - m_b r \ddot{x} \right] = 0 \quad (3.88d)$$

(3.88) denklem takımının matris formunda ifade edilmesi halinde:

$$\begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 & -\frac{m_b r b}{2} \\ 0 & M_y & \frac{m_b r b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m_b r b}{2} & \frac{b}{2} I & 0 \\ -\frac{m_b r b}{2} & 0 & 0 & \frac{b}{2} I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\zeta}_c \\ \ddot{\zeta}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} c_{\zeta} & \frac{b}{2} (2I \Omega) \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} (2I \Omega) & \frac{b}{2} c_{\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\zeta}_c \\ \dot{\zeta}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} [k_{\zeta} + \Omega^2 (m_b e r - I)] & \frac{b}{2} c_{\zeta} \Omega \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} c_{\zeta} \Omega & \frac{b}{2} [k_{\zeta} + \Omega^2 (m_b e r - I)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \zeta_c \\ \zeta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

3.5.2 Özdeğer analizi

Üç serbestlik dereceli modelinin özdeğer analizi ile tamamen aynıdır.

3.5.3 Serbest titreşim zaman cevabı

Daha önce yapıldığı gibi sistemin hareketini tanımlayan ADD takımından (3.89) hareketle ve alışlageldiği üzere, denklem takımı birinci mertebeye indirgenmektedir.

$$\left\{ \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\zeta}_c \quad \dot{\zeta}_s \right\}^T = \left\{ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \right\}^T \quad (3.90)$$

Bu amaçla, (3.90)'da tanımlanan yeni değişkenler (3.89)'a konursa (3.91) ve (3.91)'in düzenlenmesiyle (3.92) elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ M_x \dot{x}_2 + c_x x_2 + k_x x_1 - \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_8 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ M_y \dot{x}_4 + c_y x_4 + k_y x_3 + \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_6 &= 0 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ I \dot{x}_6 + c_\zeta x_6 + \left(k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I) \right) x_5 + 2I\Omega x_8 + c_\zeta \Omega x_7 + m_b r \dot{x}_4 &= 0 \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ I \dot{x}_8 + c_\zeta x_8 + \left(k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I) \right) x_7 - 2I\Omega x_6 - c_\zeta \Omega x_5 - m_b r \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M_x} \left(-c_x x_2 - k_x x_1 + \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_8 \right) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{M_y} \left(-c_y x_4 - k_y x_3 - \frac{m_b r b}{2} \dot{x}_6 \right) \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_6 - \left(k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I) \right) x_5 - 2I\Omega x_8 - c_\zeta \Omega x_7 - m_b r \dot{x}_4 \right) \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= \frac{1}{I} \left(-c_\zeta x_8 - \left(k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I) \right) x_7 + 2I\Omega x_6 + c_\zeta \Omega x_5 + m_b r \dot{x}_2 \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

(3.92)'denklem takımındaki $\dot{x}_2 = \dots$ ve $\dot{x}_8 = \dots$ denklemleri karşılıklı olarak birbirlerinde yerlerine konup (benzer şekilde $\dot{x}_4 = \dots$ ve $\dot{x}_6 = \dots$ denklemleri de) düzenlenirse, $P_x = 2M_x I - m_b^2 r^2 b$, $P_y = 2M_y I - m_b^2 r^2 b$ ve $Q = k_\zeta + \Omega^2 (m_b e r - I)$ olmak üzere (3.93) elde edilir. Böylece, sistem $\{\dot{x}\} = [A]\{x\}$ formunda ifade edilir.

Bu başlangıç değer probleminin çözümü ise, uygun bir başlangıç koşulları vektörü $\{x_{1,\dots,8}(t=0)\}^T = \{\dots\}^T$ yardımıyla sisteme bir bozuntu verilmesi ve sistemin serbest titreşim hareketini temsil eden geçici zaman cevabının elde edilmesiyle tamamlanmaktadır. Sistemin tüm serbestlik derecelerinin zamana bağlı değişimi bu yöntemle elde edildikten sonra, ilgili serbestlik derecesinin zaman cevabından, sistemin kararlı mı yoksa kararsız mı olduğu hakkında bir öngörude bulunulabilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2k_x I / P_x & -2c_x I / P_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2k_y I / P_y & -2c_y I / P_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_\delta r k_y / P_y & 2m_\delta r c_y / P_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2m_\delta r k_x / P_x & -2m_\delta r c_x / P_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_\delta r b c_\zeta \Omega / P_x & 2m_\delta r b l \Omega / P_x & -m_\delta r b Q / P_x & -m_\delta r b c_\zeta / P_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_\delta r b Q / P_y & m_\delta r b c_\zeta / P_y & m_\delta r b c_\zeta \Omega / P_y & 2m_\delta r b l \Omega / P_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2M_y Q / P_y & -2c_\zeta M_y / P_y & -2c_\zeta \Omega M_y / P_y & -4l \Omega M_y / P_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2c_\zeta M_x / P_x & 4l \Omega M_x / P_x & -2M_x Q / P_x & -2c_\zeta M_x / P_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

3.5.4 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında elde edilmesi

İncelenmekte olan dört serbestlik dereceli (dönen eksen takımına göre altı) yer rezonansı modelinde, her bir palin kendi başına dönen eksen takımında ve belirli başlangıç koşulları altında yapmış olduğu zamana bağlı titreşim hareketi ele alınmak istensin.

Bunun için, önceki bölümlerde hareket denklemleri çıkartılmış, lineerleştirilmiş fakat henüz FKD uygulanmamış halde bulunan hareket denklemlerinden (3.87) yararlanılır. (3.87)'deki toplam altı adet periyodik katsayılı lineer diferansiyel denklemin düzenlenmesi ve birinci mertebeden bir forma getirilmesi sayısal çözüm için gereklidir. Bunun için bir çok sembolik işlemin uygulanması gerekmektedir. Bu

sistemin genelleştirilmiş koordinat vektörü $\{x \ y \ \zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4\}^T$ dir. Sistem birinci mertebeye indirgeneceğinden, yeni bir genelleştirilmiş koordinat vektörü (3.94) tanımlanır.

$$\{x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ \zeta_1 \ \dot{\zeta}_1 \ \zeta_2 \ \dot{\zeta}_2 \ \zeta_3 \ \dot{\zeta}_3 \ \zeta_4 \ \dot{\zeta}_4\}^T = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}\}^T \quad (3.94)$$

(3.94)'ün (3.87)'de yerine konmasıyla (3.95) elde edilir.

$$\begin{aligned} & M_x \dot{x}_2 + c_x x_2 + k_x x_1 - m_b r [\dot{x}_6 \sin \psi_1 + \dot{x}_8 \sin \psi_2 + \dot{x}_{10} \sin \psi_3 + \dot{x}_{12} \sin \psi_4 + \\ & -\Omega^2 [\zeta_5 \sin \psi_1 + \zeta_7 \sin \psi_2 + \zeta_9 \sin \psi_3 + \zeta_{11} \sin \psi_4] + \\ & + 2\Omega [x_6 \cos \psi_1 + x_8 \cos \psi_2 + x_{10} \cos \psi_3 + x_{12} \cos \psi_4]] = 0 \\ & M_y \dot{x}_4 + c_y x_4 + k_y x_3 + m_b r [\dot{x}_6 \cos \psi_1 + \dot{x}_8 \cos \psi_2 + \dot{x}_{10} \cos \psi_3 + \dot{x}_{12} \cos \psi_4 + \\ & -\Omega^2 [x_5 \cos \psi_1 + x_7 \cos \psi_2 + x_9 \cos \psi_3 + x_{11} \cos \psi_4] + \\ & -2\Omega [x_6 \sin \psi_1 + x_8 \sin \psi_2 + x_{10} \sin \psi_3 + x_{12} \sin \psi_4]] = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$I\dot{x}_6 + c_\zeta x_6 + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_5 - m_b r \sin \psi_1 \dot{x}_2 + m_b r \cos \psi_1 \dot{x}_4 = 0$$

$$I\dot{x}_8 + c_\zeta x_8 + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_7 - m_b r \sin \psi_2 \dot{x}_2 + m_b r \cos \psi_2 \dot{x}_4 = 0$$

$$I\dot{x}_{10} + c_\zeta x_{10} + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_9 - m_b r \sin \psi_3 \dot{x}_2 + m_b r \cos \psi_3 \dot{x}_4 = 0$$

$$I\dot{x}_{12} + c_\zeta x_{12} + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) x_{11} - m_b r \sin \psi_4 \dot{x}_2 + m_b r \cos \psi_4 \dot{x}_4 = 0$$

Bu aşamadan sonra cebirsel işlemler (denklemlerde yerine koymalar, trigonometrik basitleştirmeler, vs.) çok uzayacağından herhangi bir hataya yer vermemek için MATLAB' te sembolik olarak gerçekleştirilmektedir. Bu işlemler sonucunda, MATLAB'ten, sistem matrisi $[A]_{12 \times 12}$ 'nın katsayıları (3.96)'da yerlerine konmak üzere metin formatında (Şekil 3.24) elde edilmektedir.

```
coef_2_1 = - ( - kx.*I.*mb.^2.*r.^2.*cos(psi4).^2 + kx.*I.^2.*My - kx.*I.*mb.^2 ...
coef_2_2 = - (cx.*I.^2.*My - cx.*I.*mb.^2.*r.^2.*cos(psi4).^2 - cx.*I.*mb.^2.*r.^2...
coef_2_3 = - ( - mb.^2.*r.^2.*cos(psi4).*sin(psi4).*ky.*I - mb.^2.*r.^2.*cos(psi3)...
coef_2_4 = - ( - mb.^2.*r.^2.*cos(psi3).*sin(psi3).*cx.*I - mb.^2.*r.^2.*cos(psi2)...
...
...
coef_12_12 = - ( - 2.*mb.^4.*r.^4.*cos(psi4).^2.*I.*cos(psi1).*sin(psi1).*omega ...
```

Şekil 3.24 : Sistem matrisi $[A]$ 'nın katsayıları metin formatında

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} & c_{2,7} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} & c_{2,11} & c_{2,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,6} & c_{4,7} & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} & c_{4,11} & c_{4,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{6,1} & c_{6,2} & c_{6,3} & c_{6,4} & c_{6,5} & c_{6,6} & c_{6,7} & c_{6,8} & c_{6,9} & c_{6,10} & c_{6,11} & c_{6,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{8,1} & c_{8,2} & c_{8,3} & c_{8,4} & c_{8,5} & c_{8,6} & c_{8,7} & c_{8,8} & c_{8,9} & c_{8,10} & c_{8,11} & c_{8,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{10,1} & c_{10,2} & c_{10,3} & c_{10,4} & c_{10,5} & c_{10,6} & c_{10,7} & c_{10,8} & c_{10,9} & c_{10,10} & c_{10,11} & c_{10,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{12,1} & c_{12,2} & c_{12,3} & c_{12,4} & c_{12,5} & c_{12,6} & c_{12,7} & c_{12,8} & c_{12,9} & c_{12,10} & c_{12,11} & c_{12,12} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

Bu halde, sistem sayısal olarak integre edilebilir haldededir, fakat, sistem matrisi $[A]$ sabit katsayılı değil periyodik katsayılı olduğu için, bu katsayılar ADD çözücüsüne kullanıcının tanımladığı zaman eşit aralıklı zaman noktalarında beslenmek yerine, çözücünün integrasyon adımını optimize ettiği zaman noktalarında interpolate edilerek beslenmelidir. Doğal olarak ADD çözücüsü çıktıları, simülasyon esnasında yakınsaklığı sağlamak için zamanı farklı büyüklükteki integrasyon adımlarına bölerek verecektir. Bu nedenle, çözücünden alınan veriler işlenmeden (signal processing) önce, eşit aralıklı bir zaman vektörü baz alınarak interpolate edilmelidir. Daha önce yapıldığı gibi burada da, ilgili serbestlik derecesinin zaman cevabından sistemin kararlılığı hakkında fikir edinilebilmektedir.

3.5.5 Gerekli sönümün belirlenmesi

Bu bölümde, sistemi kararlı hale getirmek için gerekli minimum sönüm ifadesinin elde edilişi atlanarak doğrudan sonuç olarak verilmektedir. İlgili ifadenin elde edilişi için okuyucular *Helicopter Theory*, [3] adlı kaynağa başvurabilirler. Bu sönüm kriteri aynı zamanda Deutsch'un (1946) elde ettiği sönüm kriterinin bir benzeridir. Deutsch'un sönüm kriteri daha kullanışlı olması bakımından boyutlu olarak ifade edillirse, x doğrultusundaki gövde modu için sönüm kriteri

$$\frac{c_\zeta c_x}{\omega_x^2} > \frac{b(1-\nu_\zeta)}{4\nu_\zeta} S^2 \quad (3.97)$$

Bu sönüm kriteri, gerileyen ileri-geri titreşim modunun, ω_x gövde moduyla yaptığı

ve $\Omega = \frac{\omega_x}{1-\nu_\zeta}$ rotor hızında meydana gelen rezonans için gerekli ileri-geri titreşim

modu sönümünü vermektedir. y doğrultusundaki gövde modu için sönüm kriteri (3.98)'de verilmektedir.

$$\frac{c_\zeta c_y}{\omega_y^2} > \frac{b(1-\nu_\zeta)}{4\nu_\zeta} S^2 \quad (3.98)$$

Bu sönüm kriteri, gerileyen ileri-geri titreşim modunun, ω_y gövde moduyla yaptığı

ve $\Omega = \frac{\omega_y}{1-\nu_\zeta}$ rotor hızında meydana gelen rezonans için gerekli ileri-geri titreşim

modu sönümünü vermektedir. (3.97) ve (3.98)'de geçen,

ν_ζ [1/rev]: ileri-geri titreşim modu frekansı,

ω_x [rad/s]: bağımsız sistemin, x doğrultusundaki salınım frekansı ,

ω_y [rad/s]: bağımsız sistemin, y doğrultusundaki salınım frekansı,

c_x [N.s/m]: gövdenin x doğrultusundaki lineer sönüm katsayısı,

c_y [N.s/m]: gövdenin y doğrultusundaki lineer sönüm katsayısı,

c_ζ [N.m.s/rad]: palin ileri-geri titreşim hareketine ait sönüm katsayısı, ve

$S = \int_e^R m(r-e)dr$ [kg.m]: ileri-geri titreşim modunun ilk kütleli atalet momentidir.

Menteşeli bir rotor için S basitçe, palin kütlesi m_b ile ileri-geri titreşim mafsallından palin kütle merkezine kadar olan radyal r mesafenin çarpımıdır.

olarak birbirine bağlayan $m_b r b / 2$ teriminin atılmasıyla, (3.54) gövde denkleminde (4.1)'e gelinir.

Çizelge 4.1 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modeline ait sayısal veriler [15].

Fiziksel Büyüklük	Sembol	Değer
Pal sayısı	b	4
Pal kütlesi	m_b	24.8 [kg]
Eşdeğer gövde kütlesi x yönündeki	m_B	500 [kg]
Toplam kütle	$M = m_B + b m_b$	599.2 [kg]
Atalet momenti (ileri-geri tit ¹ . maf ² . etr ³ .)	I	665.4435 [kg.m ²]
Palin kütle merkezi (gecikme maf. ölç ⁴ .)	r	5.18 [m]
İleri-geri tit. mafsali mesafesi	e	1.22 [m]
Gövdenin direngenliği x yönündeki	k_x	72000 [N/m]
İleri-geri tit. yayının direngenliği	k_ζ	154148.92 [N.m/rad]
Gövde sönüm katsayısı	c_x	0.0 [N.s/m]
İleri-geri tit. mafsali sönüm katsayısı	c_ζ	0.0 [N.s.m/rad]

$$M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x = 0 \quad (4.1)$$

Gövdenin $-x$ yönündeki titreşim modunun doğal frekansı ise, $\sqrt{k_x/M} = 1.74 [Hz]$ tir. Benzer olarak dönen eksen takımındaki (3.53) pal denkleminde ilgili terimin atılmasıyla (4.2) elde edilir.

$$I\ddot{\zeta}_k + c_\zeta \dot{\zeta}_k + (m_b e r \Omega^2 + k_\zeta) \zeta_k = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde. (4.2)'den palin $\Omega=0$ daki sönümsüz doğal frekansının $\sqrt{k_\zeta/I}$ olduğu açıktır. Buna göre, palin ileri-geri titreşim modunun sönümsüz doğal frekansı $\sqrt{k_\zeta/I} = 2.42 [Hz]$ dir. Çizelge 4.1'de sayısal verileri verilen rijit palin frekans

diyagramı (Şekil 4.2) $\sigma_\zeta = \sqrt{\frac{k_\zeta}{I} + \frac{m_b e r}{I} \Omega^2} [rad/s]$ bağıntısıyla elde edilmiştir.

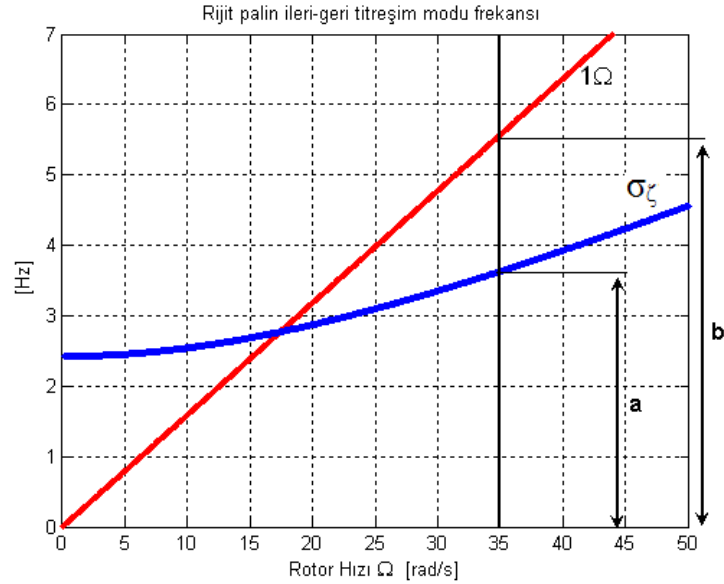
¹ tit. : titreşim

² maf.: mafsali

³ etr. : etrafında

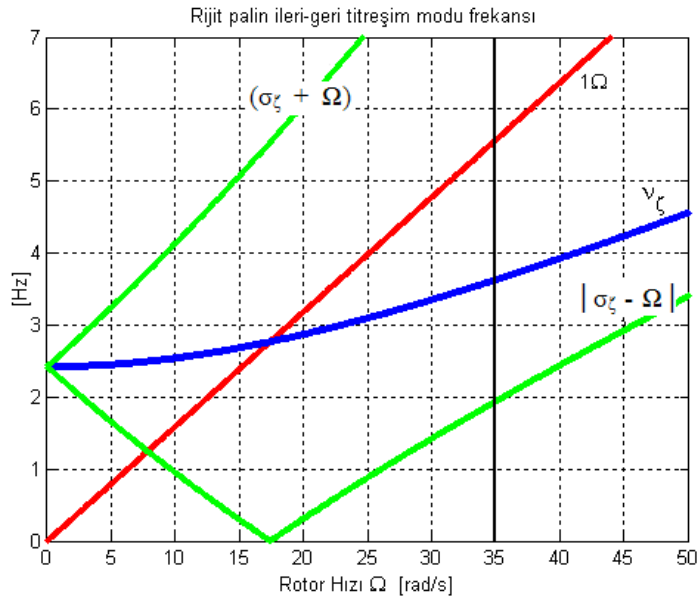
⁴ ölç. : ölçülen

Düzlem-içi ileri-geri titreşim hareketinin frekans diyagramı Şekil 4.2’de görülen rijit palli rotor için bir çalışma hızı seçilmelidir. Bu amaçla rotorun çalışma hızı $\Omega=35[\text{rad/s}]$ kabul edilsin. Bu durumda palin boyutsuz ileri-geri titreşim modu frekansı $a/b=0.65P$ olmaktadır (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 : Rijit palin ileri-geri titreşim modu frekans diyagramı.

Şekil 4.2’de palin dönen eksen takımındaki yapmış olduğu ileri-geri titreşim hareketine ait frekans diyagramı görülmektedir. Yer rezonansının incelenebilmesi için ileri-geri titreşim modu frekansı sabit eksen takımında ifade edilmelidir.

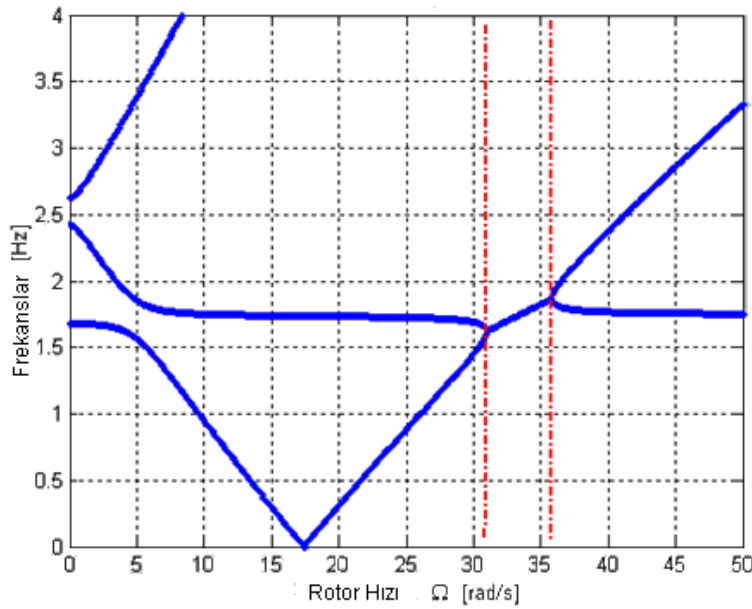


Şekil 4.3 : Rijit palin sabit ve dönen eksen takımlarına göre ileri-geri titreşim modu frekansları.

Bu yapıldığı takdirde, ilerleyen ileri-geri titreşim moduna ait $(\sigma_\zeta + \Omega)$ frekansı ile gerileyen ileri-geri titreşim moduna ait $|\sigma_\zeta - \Omega|$ frekansı elde edilmektedir (Şekil 4.3). Özetle, Şekil 4.3'teki mavi çizgi palin dönen eksen takımına göre ileri-geri titreşim modu frekansını; yeşil çizgiler ise, palin sabit eksen takımına göre (ilerleyen ve gerileyen) ileri-geri titreşim modu frekanslarını temsil etmektedirler.

4.1.1 Özdeğer analizi

Hareket denklemi (3.57)'de verilen ve sayısal verileri çizelge 4.1'den alınmış üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin (Şekil 4.1) klasik özdeğer yöntemi ile elde edilmiş Coleman diyagramı Şekil 4.4'te görülmektedir.

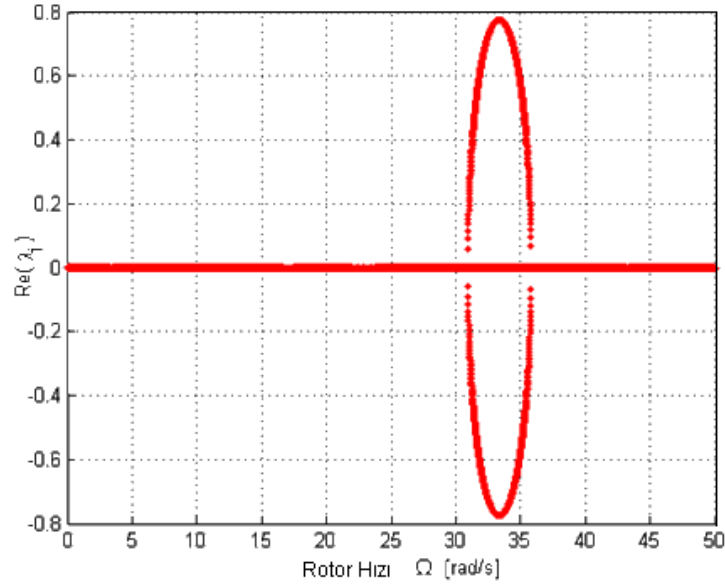


Şekil 4.4 : Üç serbestlik dereceli sistemin Coleman diyagramı.

Kararsızlık bölgesi, Şekil 4.4'te iki kesikli kırmızı çizgi arasında kalan bölgedir. Sistemin Ω 'ya bağlı kompleks özdeğerleri ile sistemin kararlılık durumu arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla çizelge 4.2'de bazı Ω hızları için sistemin kompleks eşlenik özdeğerleri verilmiştir. Burada, $\Omega=32$, $\Omega=34$ [rad/s] için kompleks eşlenik özdeğerlerden en az birinin reel kısmının pozitif olduğu görülmektedir ve bu durum sistemde kararsızlığın görülmesi için yeterlidir. Aynı sistemin azalım hızı diyagramı Şekil 4.5'te verilmektedir. Burada yine özdeğerlerin reel kısmının pozitif olduğu hız değerleri sistemde kendini besleyen titreşimlerin olduğu kararsızlık bölgesini göstermektedir.

Çizelge 4.2 : Üç serbestlik dereceli modelin farklı dönme hızlarındaki kompleks özdeğerleri

Dönme Hızı Ω [rad/s]	Özdeğerler λ_j		
	λ_1	λ_2	λ_3
0.00	0.0000 +10.5630j	0.0000 +16.4918j	0.0000 +15.2200j
	0.0000 -10.5630j	0.0000 -16.4918j	0.0000 -15.2200j
10.00	0.0000 +27.1109j	0.0000 +11.0017j	0.0000 +5.9557j
	0.0000 -27.1109j	0.0000 -11.0017j	0.0000 -5.9557j
20.00	-0.0000 +39.9742j	0.0000 +10.8944j	0.0000 +1.9486j
	-0.0000 -39.9742j	0.0000 -10.8944j	0.0000 -1.9486j
30.00	-0.0000 +53.9062j	0.0000 +10.6238j	0.0000 +9.1213j
	-0.0000 -53.9062j	0.0000 -10.6238j	0.0000 -9.1213j
32.00	-0.0000 +56.7804j	0.6448 +10.5209j	-0.6448 +10.5209j
	-0.0000 -56.7804j	0.6448 -10.5209j	-0.6448 -10.5209j
34.00	-0.0000 +59.6773j	-0.7472 +11.1583j	0.7472 +11.1583j
	-0.0000 -59.6773j	-0.7472 -11.1583j	0.7472 -11.1583j
36.00	0.0000 +62.5948j	-0.0000 +12.0953j	-0.0000 +11.4762j
	0.0000 -62.5948j	-0.0000 -12.0953j	-0.0000 -11.4762j
38.00	-0.0000 +65.5308j	0.0000 +13.6334j	-0.0000 +11.1747j
	-0.0000 -65.5308j	0.0000 -13.6334j	-0.0000 -11.1747j
40.00	0.0000 +68.4837j	0.0000 +14.9268j	0.0000 +11.1017j
	0.0000 -68.4837j	0.0000 -14.9268j	0.0000 -11.1017j
50.00	0.0000 +83.4498j	0.0000 +11.0109j	-0.0000 +20.9213j
	0.0000 -83.4498j	0.0000 -11.0109j	-0.0000 -20.9213j

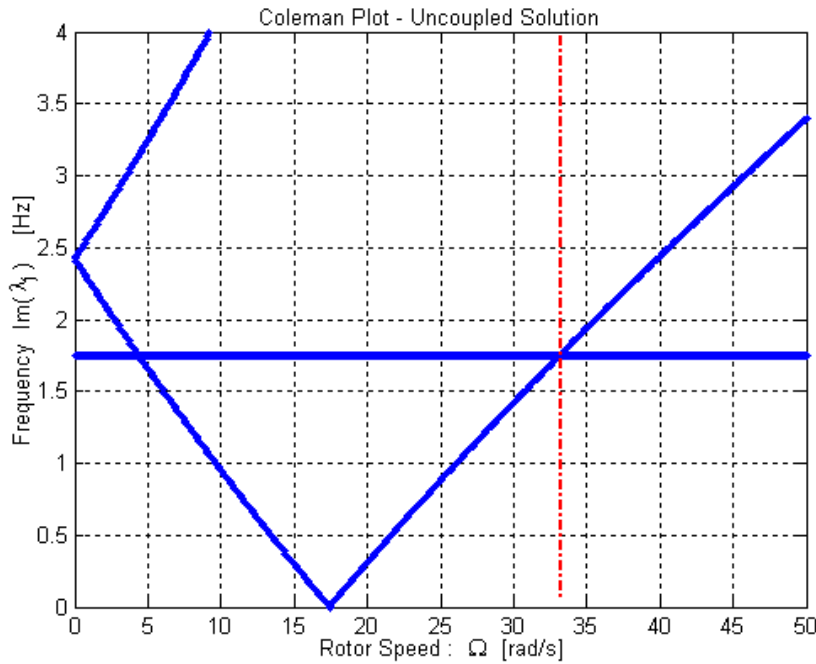


Şekil 4.5 : Üç serbestlik dereceli sistemin azalım hızı diyagramı.

Kütle matrisinde köşegen dışındaki terimlerin varlığı dolayısıyla bu sistem dinamik (atalet) bağlıdır. Dinamik bağlılık kinetik enerji ifadesinden de anlaşılabilir. Örneğin, T kinetik enerjisinin ifadesinde

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \sum_{k=1}^b (2\Omega \dot{\zeta}_k + \dot{\zeta}_k^2) + \frac{1}{2} m_b \sum_{k=1}^b \left[-2\dot{x}e\Omega \sin \psi_k - 2\dot{x}r(\Omega + \dot{\zeta}) \sin(\psi_k + \zeta_k) + 2er\Omega(\Omega + \dot{\zeta}_k) \cos \zeta_k \right]$$

genelleştirilmiş koordinatların karışık çarpımları mevcut ise, o takdirde sistem dinamik bağıdır denir [46]. Kütle matrisinde köşegen dışındaki terimler sıfır alınarak tekrar sistemin Coleman diyagramı oluşturulursa, –rotor ile gövde arasındaki ataletsel etkileşim ortadan kalkacağından– rotorun dolanım hareketi, gövdeyi tahrik edemeyecektir. Buna bağlı olarak ta Şekil 4.7’de görüldüğü gibi gövdenin ve rotorun ilgili modlarını temsil eden frekanslar birbirleriyle etkileşime girmemektedirler. Bu nedenle, rotor ve gövde arasındaki ataletsel etkileşimin gözardı edilmesiyle yapılan bu tip bağısız (uncoupled) yer rezonansı analizlerinde –varsa bile– bir kararsızlık bölgesinin genişliği ve kararsızlığın şiddeti elde edilememekte, onun yerine rotorun gerileyen ileri-geri titreşim modu frekansı ile gövdenin yuvarlanma modu frekansının kesiştikleri ve kararsızlık bölgesinin merkezi sayılabilecek bir nokta elde edilmektedir.

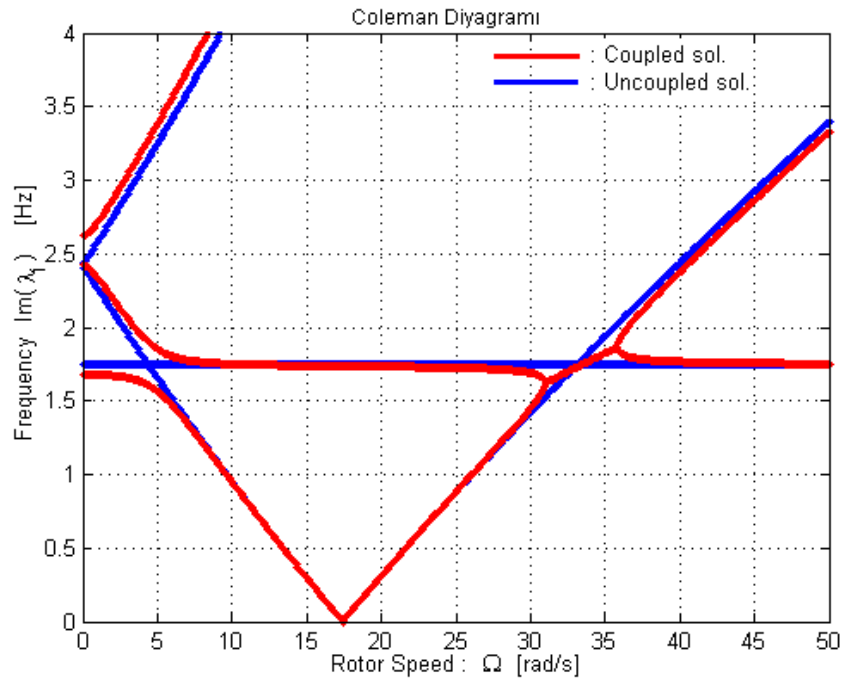


Şekil 4.6 : Üç serbestlik dereceli sistemin bağısız Coleman diyagramı.

Genellikle, bu tezde yapıldığı gibi, birkaç serbestlik derecesiyle modellenebilen yer rezonansı modellerinde, sistemin hareketini veren bağılı diferansiyel denklem takımı açık olarak elde edilebilmekte ve bu dinamik bağı olan sistemin özdeğerleri klasik yöntemle hesaplanabilmektedir. Buna karşılık, çok serbestlik dereceli sistemlerde –

örneğin bir helikopter sonlu elemanlar modelinde– gövde ve rotor sonlu eleman modelleri birbirinden ayrı olarak ele alınıp, gövdenin ve rotorun istenilen modlarına ait doğal frekansları ayrı ayrı hesaplanmaktadır [47]. Ve bu durumda, rotor ve gövde sistemi birbirinden ayrı olarak incelenmiş olduğundan tüm sistem için Şekil 4.7’dekine benzer bir bağımsız (uncoupled) bir Coleman diyagramı elde edilmektedir.

Çok serbestlik dereceli sistemleri bu şekilde iki alt sisteme ayırıp her bir alt sistemin doğal frekanslarının bir sonlu elemanlar çözücüsüyle elde edilebilmesine rağmen, bu yaklaşımın esas dezavantajı net bir kararsızlık bölgesi aralığı elde edilememesi, bunun yerine yaklaşık olarak kararsızlık bölgesinin merkezi olarak kabul edilebilecek bir hız değeri elde edilebilmesidir. Örneğin Şekil 4.7’de görülen üç serbestlik dereceli basit sistemin Coleman diyagramında bu değer kabaca 33 [rad/s] dir. Bu tür SE analizlerinde gövde ve paller ayrı ayrı ve detaylı olarak modellenemediği halde, iki sistem arasındaki dinamik bağıllık dikkate alınmadığı veya alınmadığı durumlarda sistemin etkileşimli davranışını güvenilir bir şekilde modelleyebilmek zordur.



Şekil 4.7 : Üç serbestlik dereceli sistemin bağlı/bağımsız Coleman diyagramı.

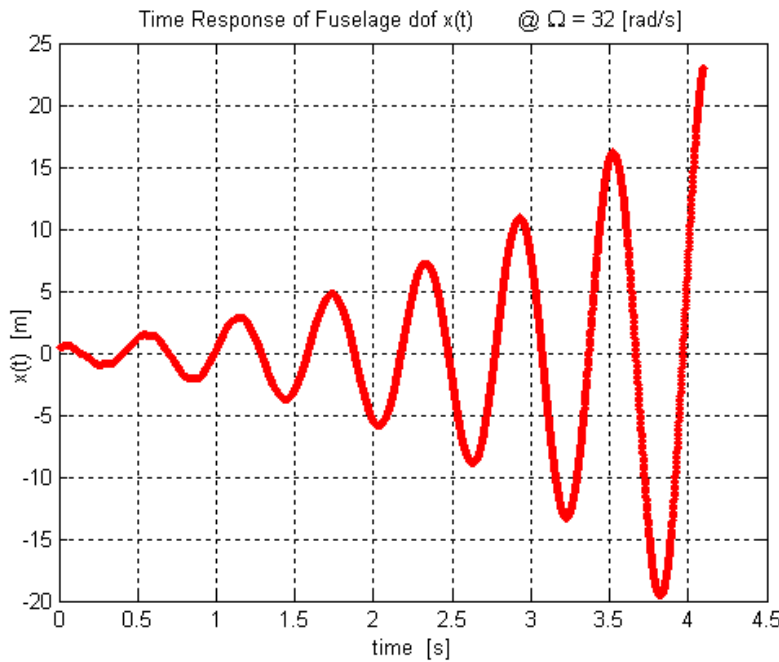
Şekil 4.8’de, ele alınan sistemin hem bağlı hem de bağımsız durumda iken hareket denklemlerinin özdeğer analiziyle elde edilen Coleman diyagramları üst üste gösterilmiştir.

4.1.2 Serbest titreşim zaman cevabı

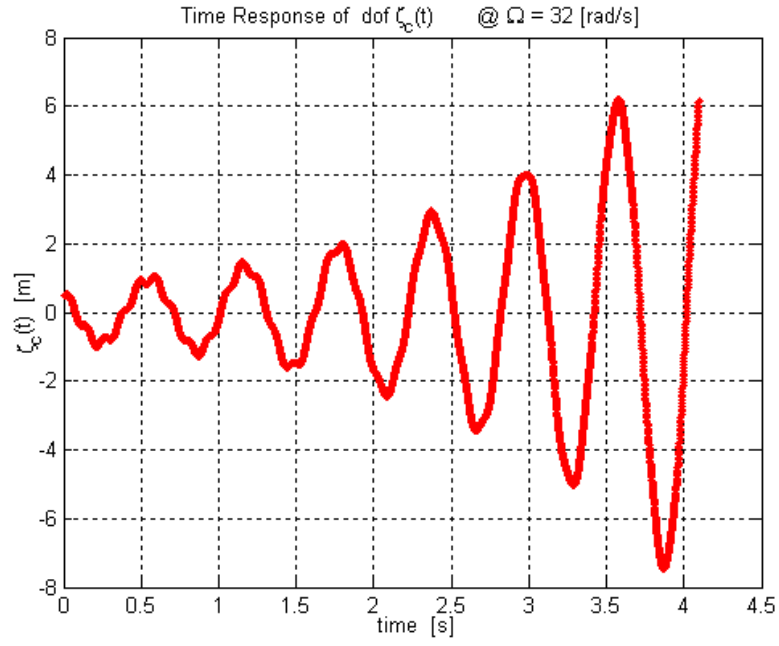
Çizelge 4.1’de sayısal verileri verilen üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin (Şekil 4.1) serbest titreşim zaman cevabı bu bölümde ele alınmaktadır. Sistemin serbest titreşim zaman cevabı sabit bir Ω dönme hızı için elde edilmektedir. Bununla beraber, daha önceden yapılan özdeğer analizi sayesinde sistemin kararlı ve kararsız rotor çalışma hızları bilindiğine göre, seçilen bir Ω dönme hızı için elde edilecek serbest titreşim zaman cevabının da sistemin kararlılık durumunu yansıtmaması beklenir. Buradaki örnekte, serbest titreşim zaman cevabı için gövde denge konumundan 0.5[m] pozitif x yönünde, benzer şekilde rotorun kütle merkezi de 0.5[m] pozitif x ve y yöndelerinde deplase edilip ilk hızsız olarak bırakılmaktadır.

$$\{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6\}^T = \{x \ \dot{x} \ \zeta_c \ \dot{\zeta}_c \ \zeta_s \ \dot{\zeta}_s\}^T = \{0.5 \ 0.0 \ 0.5 \ 0.0 \ 0.5 \ 0.0\}^T \quad (4.3)$$

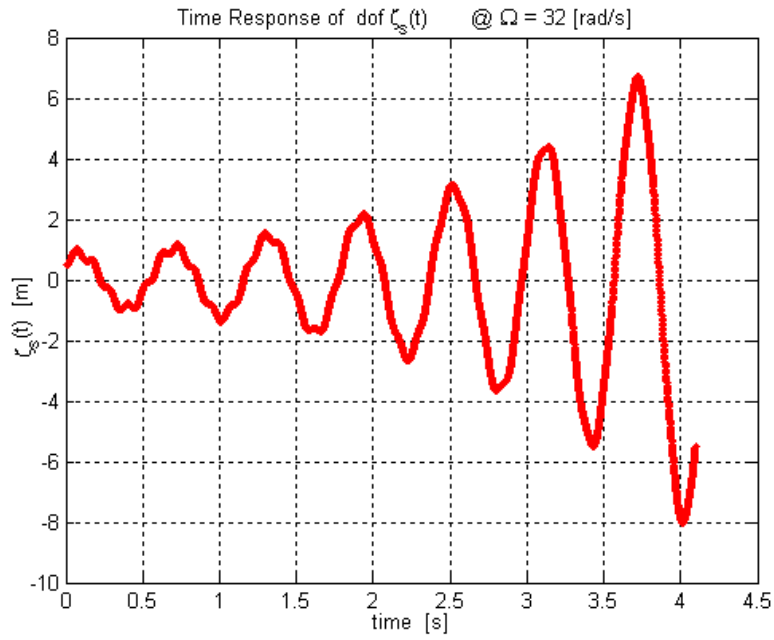
Başlangıç anında ve tüm benzetim süresi boyunca, rotor sabit $\Omega=32$ [rad/s] ($=5.09$ [Hz]) hızla dönmektedir. Bu başlangıç koşulları altında, gövde ve rotorun zaman cevabı grafikleri monoton şekilde artan bir titreşim sergilemekte (Şekil 4.9-11) ve sistemin kararsız olduğunu göstermektedirler. Şekil 4.12’de ise rotorun kütle merkezinin verilen başlangıç koşulları altında izlemiş olduğu yörünge verilmektedir ve sistemin kararsız olduğu burada da açıkça görülmektedir. Ayrıca benzetim süresinin uzun tutulmasına gerek yoktur, zira sistem lineer olduğu için sistemin “limit çevrim” davranışı sergilemesi beklenmemelidir.



Şekil 4.8 : Gövde serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.

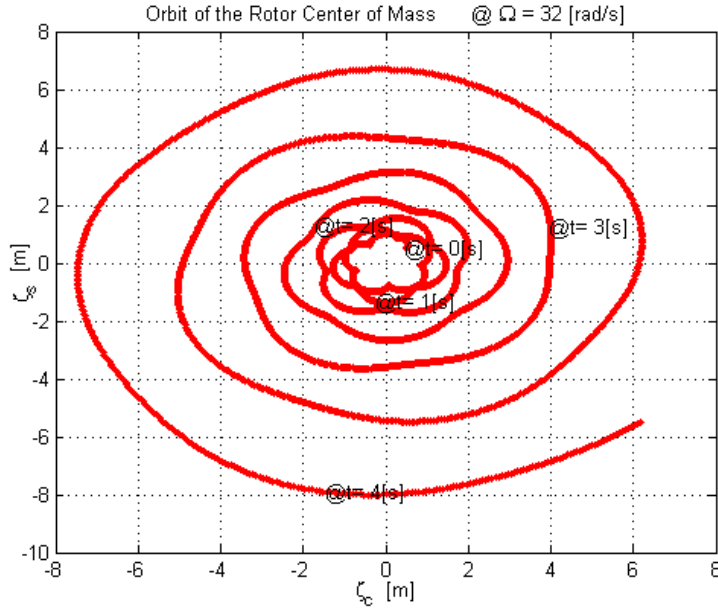


Şekil 4.9 : ζ_c serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.



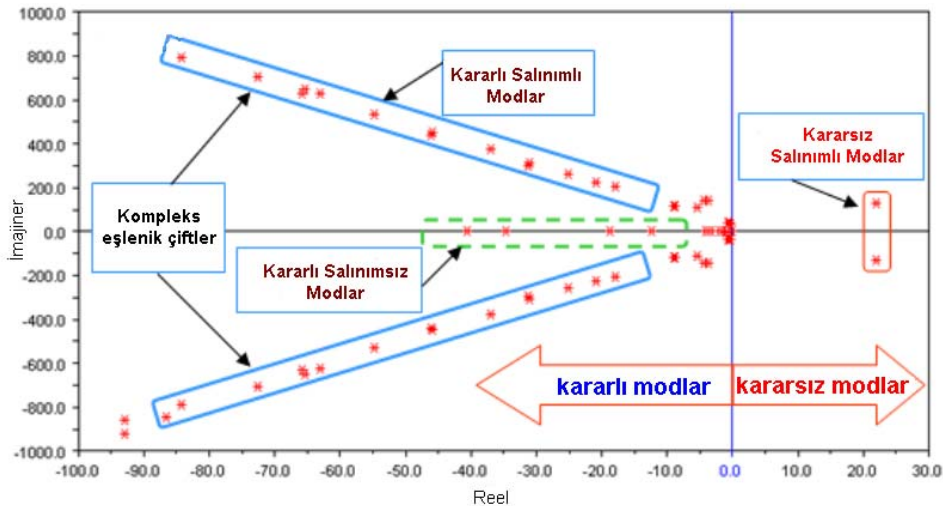
Şekil 4.10 : ζ_s serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı.

$x(t=0) = \zeta_c(t=0) = \zeta_s(t=0) = 0.5[m]$ başlangıç koşulları altında rotorun kütle merkezinin yörüngesi Şekil 4.12'deki gibidir.



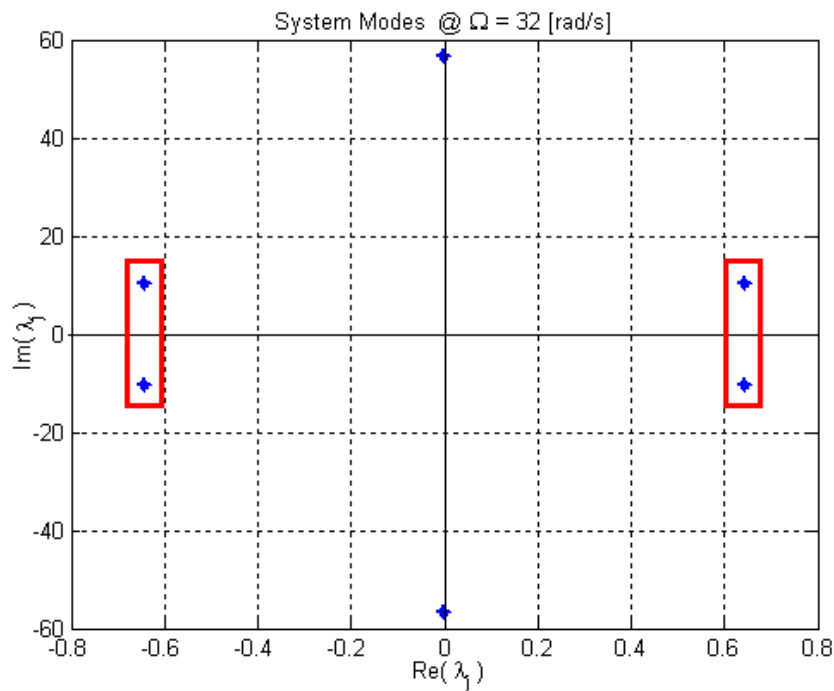
Şekil 4.11 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $x(t=0)=\zeta_c(t=0)=\zeta_s(t=0)=0.5\text{m}$

Genellikle, sistemin kararlılığını incelemeye başvuran diğer bir etkili araç da sistemin kompleks özdeğerlerinin bir çizelge (Çizelge 4.2) üzerinde verilmesi yerine kompleks düzlem üzerinde (Şekil 4.13) gösterilmesidir. Bilindiği üzere, bir sistemin ilgili modunun kompleks özdeğerinin reel kısmının negatif olması durumunda o mod kararlı, pozitif olması durumunda ise kararsızdır. Bu bakımdan kompleks düzlemin (Şekil 4.13) sol yarısında bulunan modlar kararlı sistem modlarını, sağ yarısında bulunan modlar ise kararsız sistem modlarını ifade etmektedir.



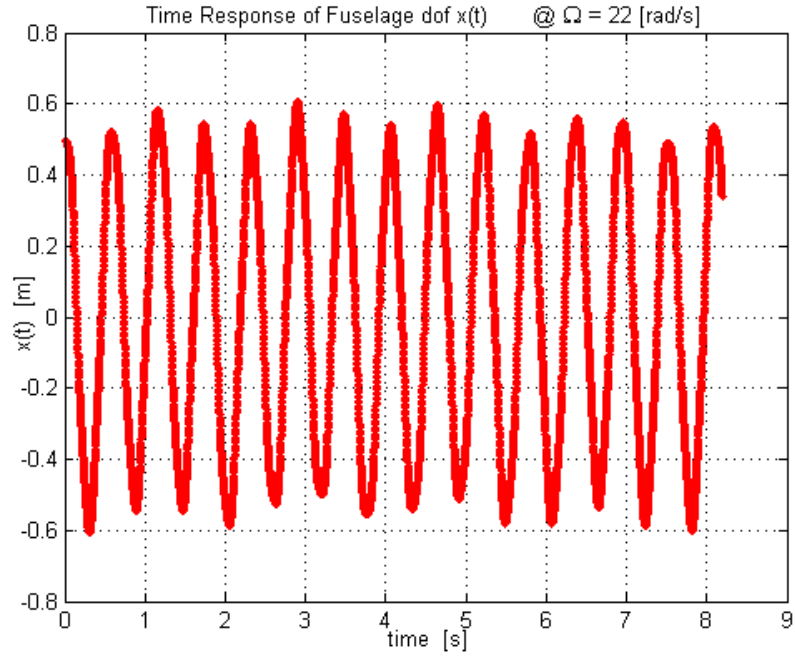
Şekil 4.12 : Kompleks düzlem üzerinde sistem modları ve kararlılık durumları [48].

Bu amaçla ele alınan sayısal örnekte kararsız bir dönme hızında çalışan sistemin ($\Omega=32$ [rad/s]) özdeğerleri kompleks düzlemde (Şekil 4.14) verilmektedir. Özdeğerlerin bir kompleks eşlenik çifti (Şekil 4.14) kompleks düzlemin sağ yarısında yer aldığı için sistemin kararsız olduğu açıktır. Ayrıca düzlemin sağ ve sol yarısındaki özdeğerlerin sanal kısımlarının aynı olması bize, –Şekil 4.4’teki Coleman diyagramından da görülebileceği gibi– gövde modunun frekansı ile rotorun gerileyen ileri-geri titreşim modunun frekansının birbiriyle çakıştığını göstermektedir. Bu nedenle, kararsız bir bölgede çalışan bir sistem için, bütün kompleks özdeğerlerinden en az bir çiftinin sanal kısımlarının birbiriyle çakıştığı söylenebilir.

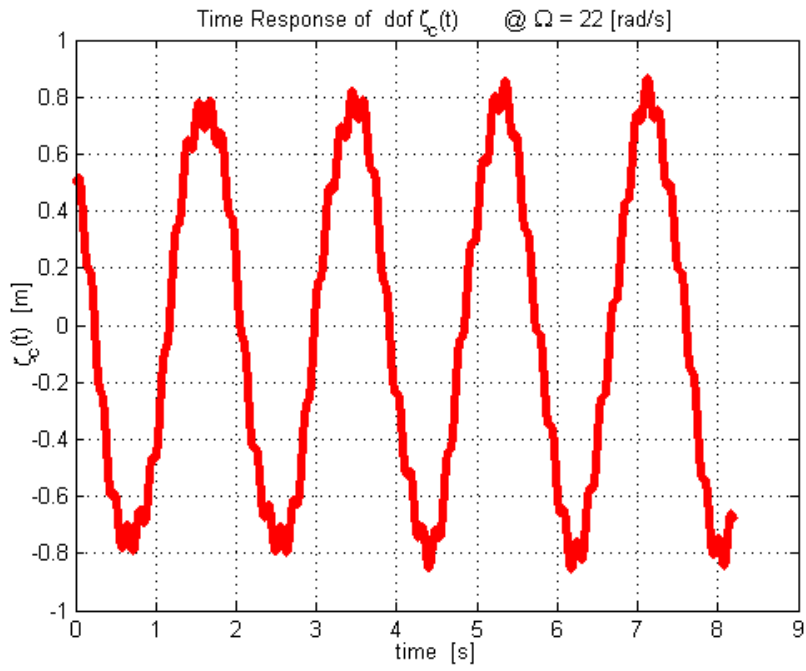


Şekil 4.13 : Kararsız bölgede ($\Omega=32$ [rad/s]) çalışan sistemin kompleks düzlem üzerindeki özdeğerleri.

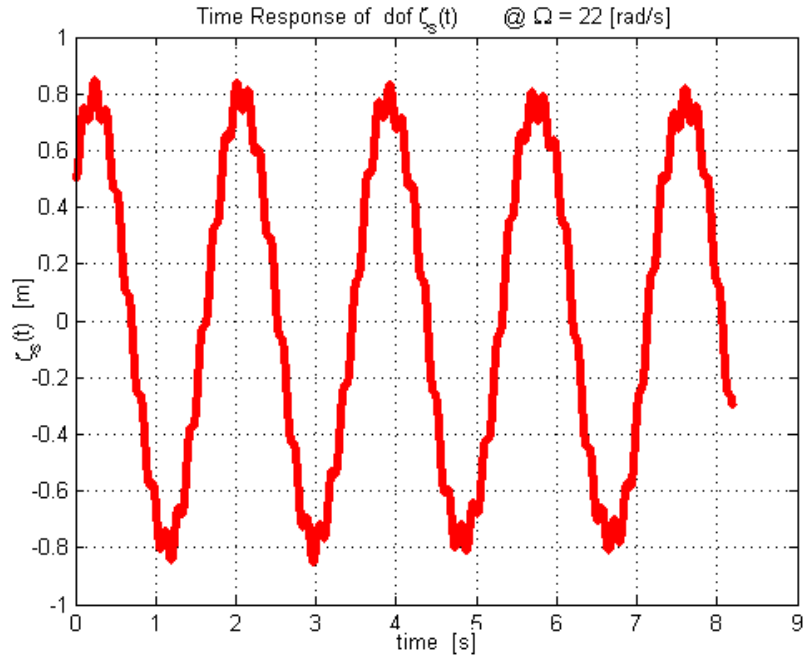
Kararlı rotor hızı bölgesinde çalışan yer rezonansı modeline örnek olarak ise, rotor $\Omega=22$ [rad/s] sabit hızla dönerken aynı başlangıç koşulları (4.3) altında serbest titreşim zaman cevabı elde edilmiştir. Bu başlangıç koşulları altında, gövde ve rotorun zaman cevabı grafiklerinde genliği neredeyse sabit periyodik bir salınım hareketi yapmakta (Şekil 4.14-16) ve sistemin sınırda bir kararlılığa sahip olduğunu göstermektedirler.



Şekil 4.14 : Gövde serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı

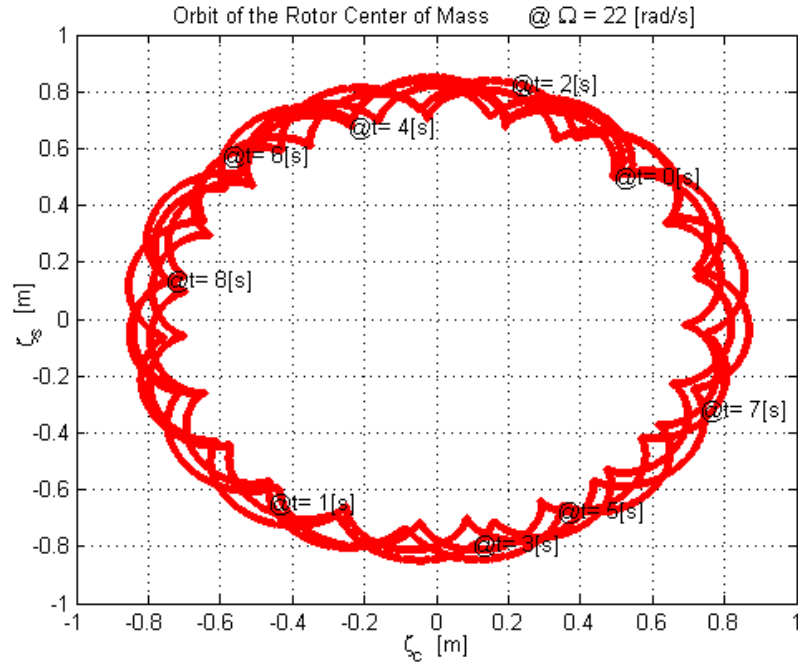


Şekil 4.15 : ζ_c serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı



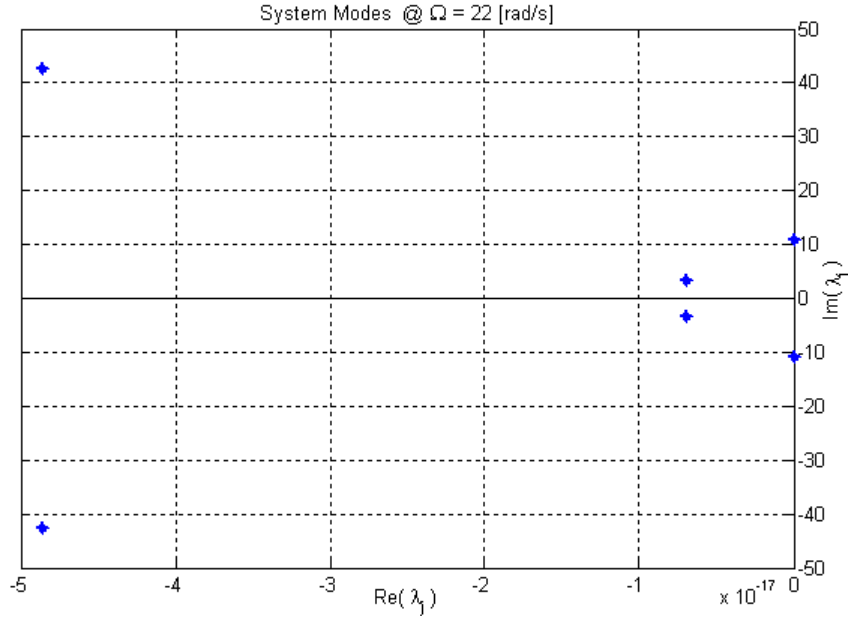
Şekil 4.16 : ζ_s serbestlik derecesinin geçici zaman cevabı

Rotor 22[rad/s] ($=3.5$ [Hz]) sabit açısal hızla dönerken Şekil 4.17’de görüldüğü üzere kararlı bir yörünge izlemektedir. Sistem sönümsüz olduğu için kararlılığı jirooskopik etkiler sağlamaktadır.



Şekil 4.17 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $x(t=0)=\zeta_c(t=0)=\zeta_s(t=0)=0.5m$

Şekil 4.18’de kararlı bölgede çalışan sistemin ($\Omega=22$ [rad/s]) özdeğerleri, sistemin özdeğerlerinin kompleks düzlem üzerinde gösterilmesine emsal teşkil etmesi bakımından, gösterilmektedir.

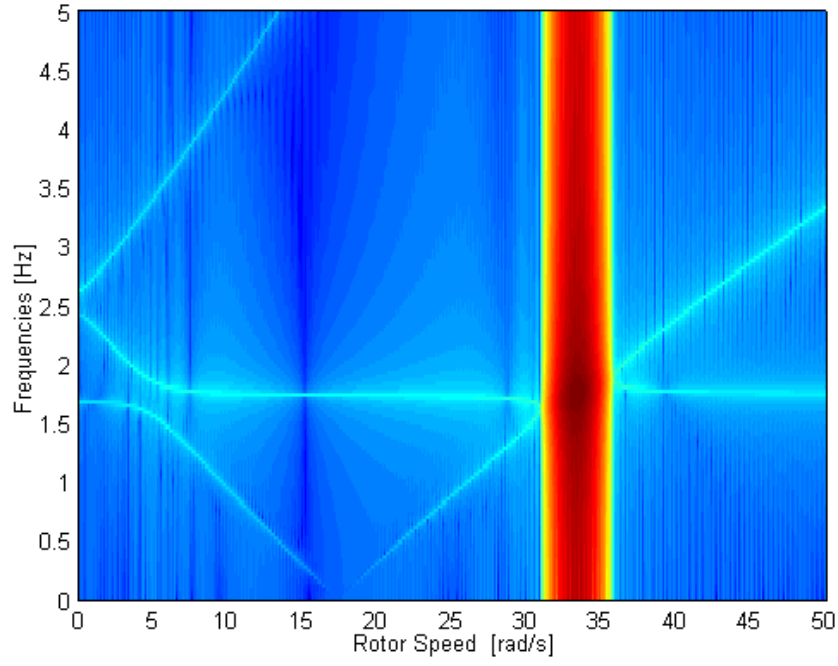


Şekil 4.18 : Kararlı bölgede ($\Omega=22$ [rad/s]) çalışan sistemin kompleks düzlem üzerindeki özdeğerleri

Şekil 4.18’de özdeğerlerin reel kısımları sıfır olarak kabul edilebilir. Bu durumda sönümsüz sistemin (Çizelge 4.1) serbest titreşim zaman cevabının da Şekil 4.14-17’de olduğu gibi sınırda bir kararlılık davranışı (genliği zamanla değişmeyen salınımlar) sergilemesi doğaldır.

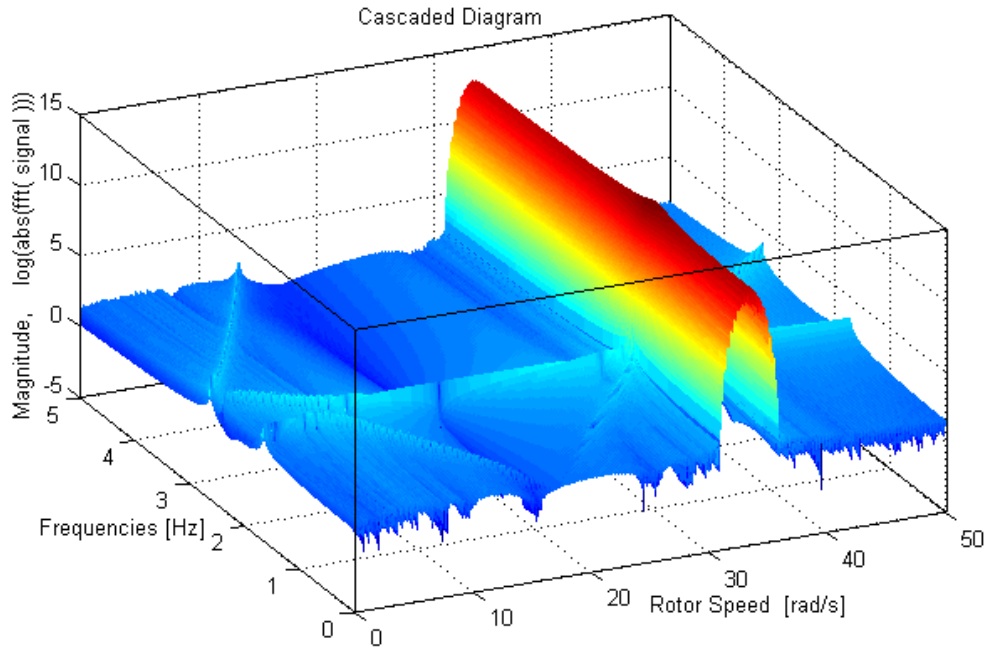
4.1.3 Serbest titreşim zaman cevabından Coleman diyagramının elde edilmesi

Belirlenen bir rotor hızı aralığının ($\Omega = 0.0, 0.01, \dots, 50$ [rad/s]) her bir değeri için bu üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin $x(t=0) = \zeta_c(t=0) = \zeta_s(t=0) = 0.5$ cm başlangıç koşulları altında gövde serbestlik derecesi $x(t)$ ’nin zaman cevabı elde edilmiştir. Bu her bir gövde hareketi zaman verisinin FFT’sinin alınmasıyla Şekil 4.19-21’de görülen Coleman diyagramı elde edilebilmektedir. Bu yöntemle oluşturulan Coleman diyagramı özdeğer yöntemiyle elde edilen veriler ile uyum içerisindedir (Şekil 4.21). Sonuçta, bu kısımda uygulanan yöntemin özdeğer analizine göre –hem hareket denklemlerinin birinci mertebeye indirgenmesi hem de daha çok işlem zamanı gerektirmesi bakımından– pek bir üstünlüğü olmamakla birlikte, analizlerin doğruluğunu kontrol etmek de dahil olmak üzere gerektiği durumlarda uygulanabilmektedir.

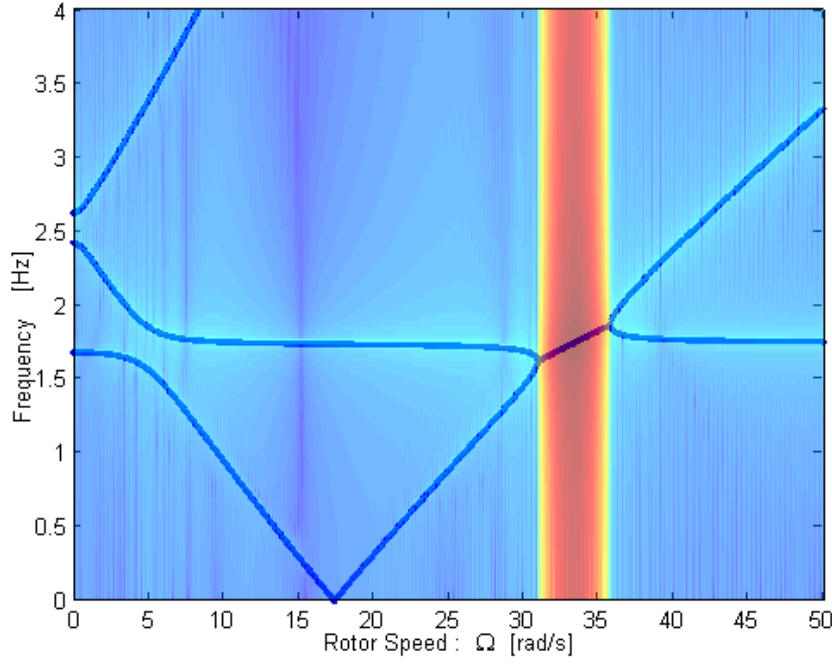


Şekil 4.19 : Ardarda tarzdaki Coleman diyagramı

Şekil 4.20’de, Şekil 4.19’da görülen ardarda tarzdaki Coleman diyagramı üç boyutlu olarak verilmiştir.



Şekil 4.20 : Ardarda tarzdaki üç boyutlu Coleman diyagramı



Şekil 4.21 : Özdeğer analizi ve zaman cevabı yöntemleriyle oluşturulan Coleman diyagramlarının karşılaştırılması

4.1.4 Üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinde KSFD yöntemiyle Coleman diyagramının elde edilmesi

Tezin teori bölümünde (3.1.3) de değinildiği gibi, üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin (Şekil 4.1) KSFD yöntemiyle Coleman diyagramının oluşturulmasında çizelge 4.1’de verilen sayısal veriler kullanılmaktadır. (3.57) hareket denklemleri, aşağıda verilen ve nispeten keyfî seçilmiş başlangıç koşulları kullanılarak zaman alanında integre edilmektedirler.

$$x = -5.5[\text{cm}]$$

$$\dot{x} = 5.0[\text{cm/s}]$$

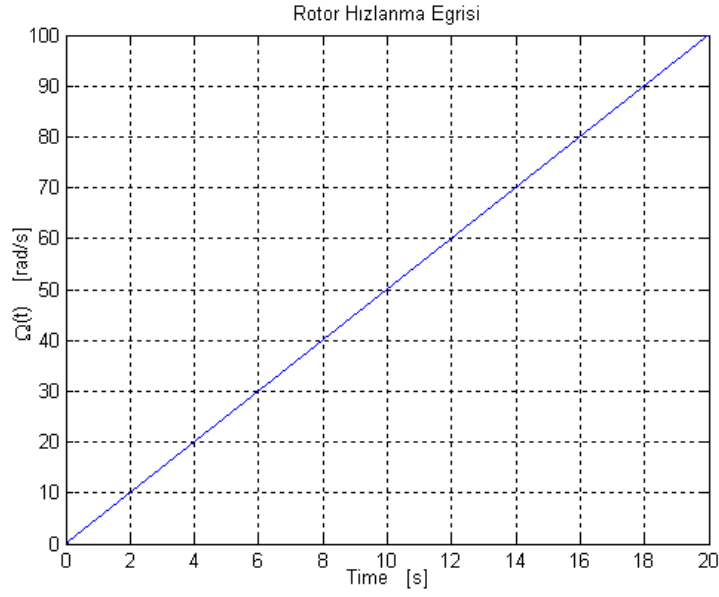
$$\zeta_c = -4.0[\text{cm}]$$

$$\dot{\zeta}_c = 0.0[\text{cm/s}]$$

$$\zeta_s = 3.5[\text{cm}]$$

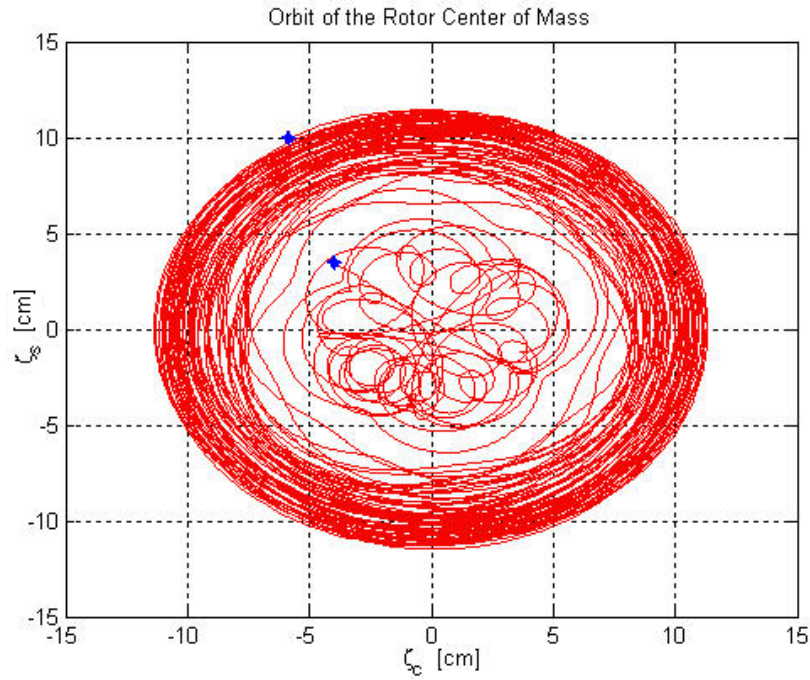
$$\dot{\zeta}_s = 0.0[\text{cm/s}]$$

Rotor hızı (Şekil 4.22) 20 [s]’lik benzetim süresi boyunca $t = 0$ anından başlayarak $\Omega(t)=5t$ [rad/s] bağıntısına göre arttırılmaktadır.



Şekil 4.22 : Rotor hızının ($\Omega(t)=5t$ [rad/s]) benzetim süresi boyunca değişimi

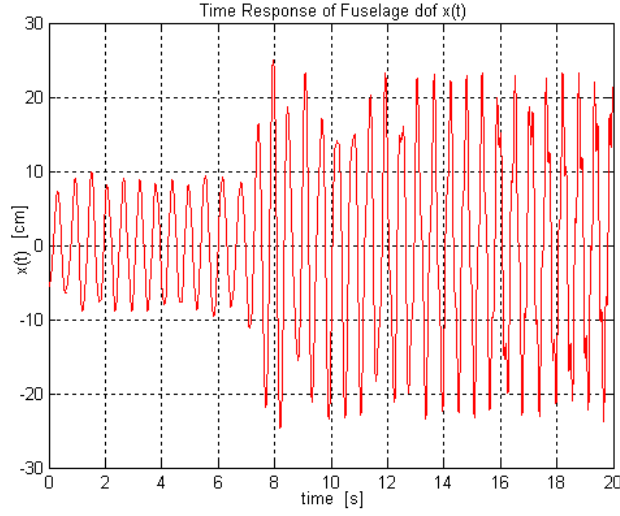
Şekil 4.23'te rotor kütle merkezinin benzetim süresi boyunca izlediği yörünge görülmektedir.



Şekil 4.23 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $\Omega(t=0,...,20) = 5t$ [rad/s]

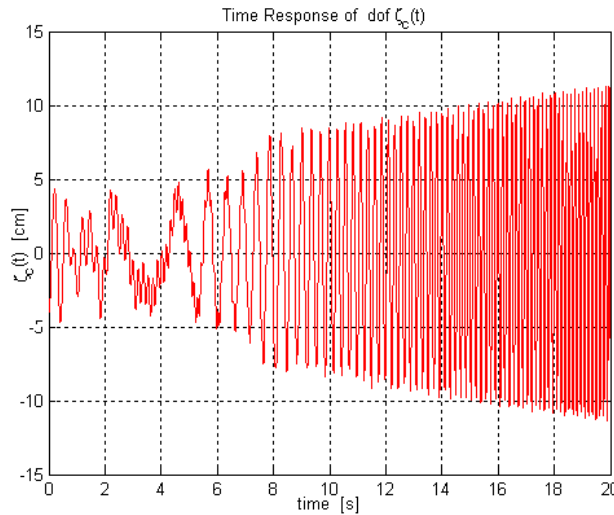
Gövdenin denge konumu etrafında ($x = 0$) yaptığı salınım hareketi Şekil 4.24'te verilmektedir. Şekil 4.24'ten, sönümsüz gövdenin titreşim genliğinde $t = 6,...,7$ [s] dolaylarında ciddi artışlar olduğu; benzer olarak Şekil 4.25-26'da da rotor kütle

merkezinin serbestlik dereceleri için aynı durumun söz konusu olduğu görülmektedir.

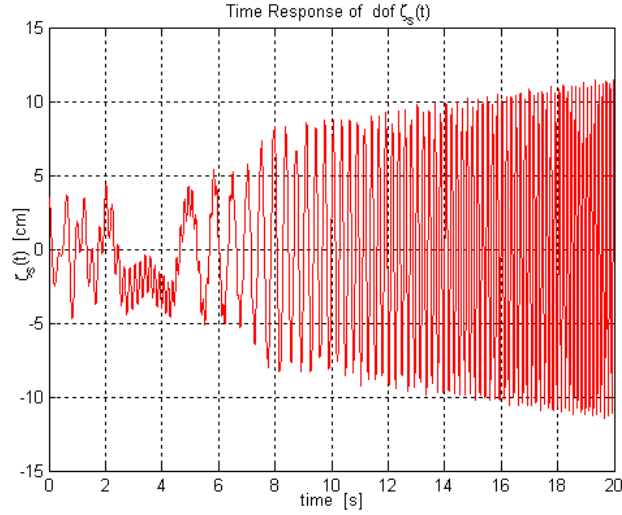


Şekil 4.24 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t$ [rad/s]

Titreşim genliğinde görülen bu artışın temel nedeni, modelin yer rezonansı kararsızlığına yakalanmış olmasıdır. Daha önce yapılan özdeğer analizi (4.1.1) sayesinde $\Omega = 30.96, \dots, 35.78$ [rad/s] rotor devirlerinde yer rezonansı görülmesi beklenmektedir. Bu nedenle, $\Omega(t) = 5t$ bağıntısına uygun olarak hızlanan bir rotorun $t = 6$ [s] dolaylarında yer rezonansı ortaya çıkmaktadır. Benzer bir durum Şekil 4.25-26'da verilen rotor kütle merkezinin serbestlik dereceleri ζ_c ve ζ_s için de geçerlidir.

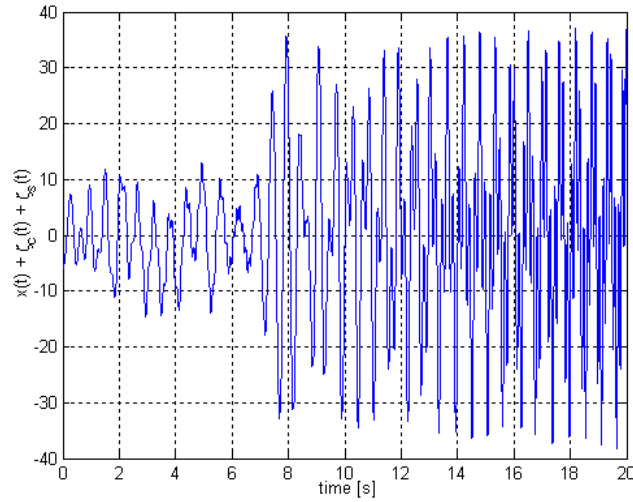


Şekil 4.25 : ζ_c serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t$ [rad/s]



Şekil 4.26 : ζ_s serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,20) = 5t$ [rad/s]

Şekil 4.24-26’da elde edilen zaman verileri herbiri durağan olmayan sinyal örnekleridir. Bunların herbirinin ayrı ayrı KSFD dönüşümleri alınabilmekte ve herbiri ayrı ayrı sistemin birer Coleman diyagramını vermektedirler. Fakat burada, KSFD dönüşümü alınacak olan sinyali bu üç zaman cevabının toplamı olarak ($X_{ns}(t) = x(t) + \zeta_c(t) + \zeta_s(t)$) tanımlanmaktadır. Bu bakımdan, elde edilen yeni sinyal (Şekil 4.27) daha zengin bir frekans içeriğine sahip olacağından Coleman diyagramı (Şekil 4.28) üzerindeki modlar daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadırlar.



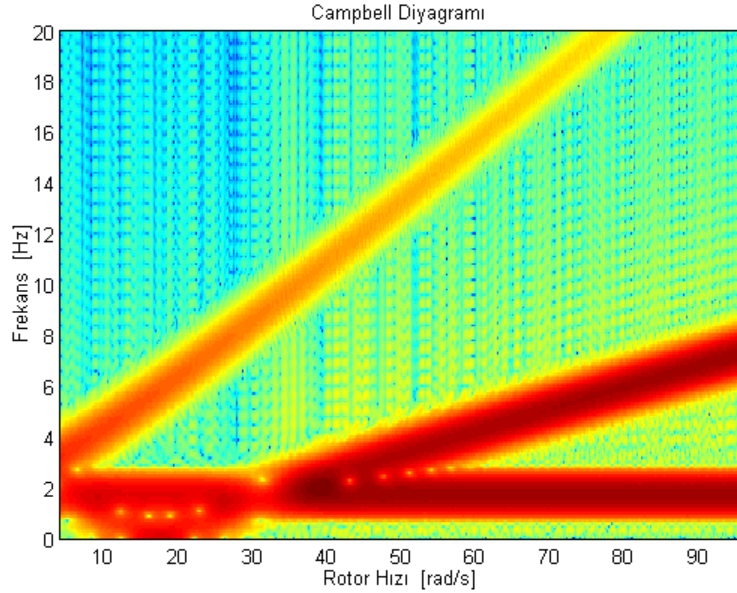
Şekil 4.27 : Durağan olmayan zaman sinyali ($X_{ns}(t) = x(t) + \zeta_c(t) + \zeta_s(t)$)

Coleman diyagramını oluşturmak için X_{ns} verisi Matlab’ in spectrogram fonksiyonu (4.4) vasıtasıyla işlenmektedir:

$$[S, F, T, P] = \text{spectrogram}(X_{ns}, \text{window}, \text{noverlap}, F, fs, \text{'yaxis'}). \quad (4.4)$$

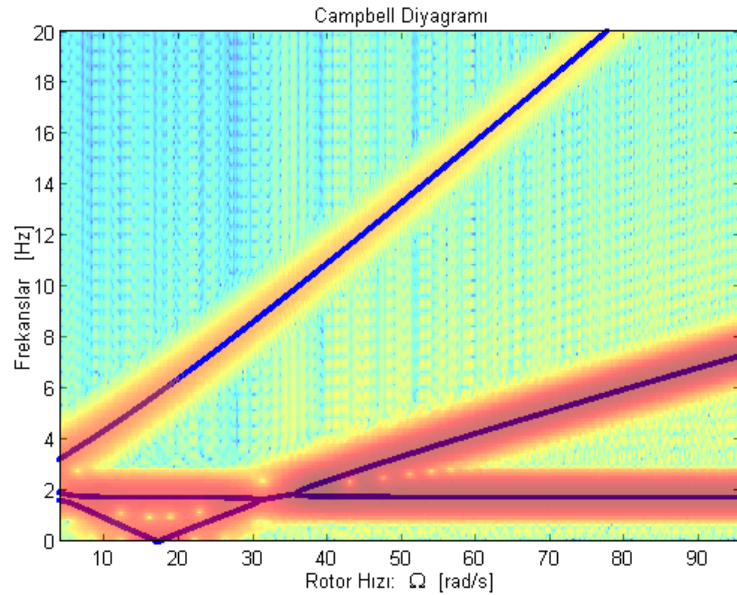
Kullanılan “spectrogram” fonksiyonunun tanımı için Matlab’in dokümantasyonuna [44] başvurulabilir. Spectrogram fonksiyonundan elde edilen $[S,F,T,P]$ matris-vektör çıktıları yine Matlab’de “surf” fonksiyonu (4.5) kullanılarak Coleman diyagramı (Şekil 4.28) elde edilmektedir:

$$\text{surf}(T, F, (10*\log_{10}(\text{abs}(P))), 'EdgeColor', 'none'); \quad (4.5)$$



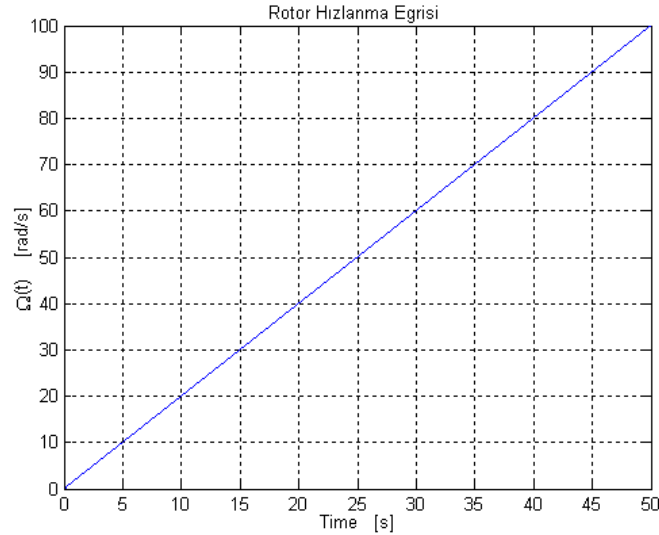
Şekil 4.28 : KSFD yöntemiyle elde edilen Coleman diyagramı ($\Omega(t=0,...,20) = 5t$ [rad/s]).

Şekil 4.28’de KSFD yöntemiyle elde edilen Coleman diyagramının, özdeğer analizi ile elde edilen Coleman diyagramı ile karşılaştırılması Şekil 4.29’de verilmektedir.



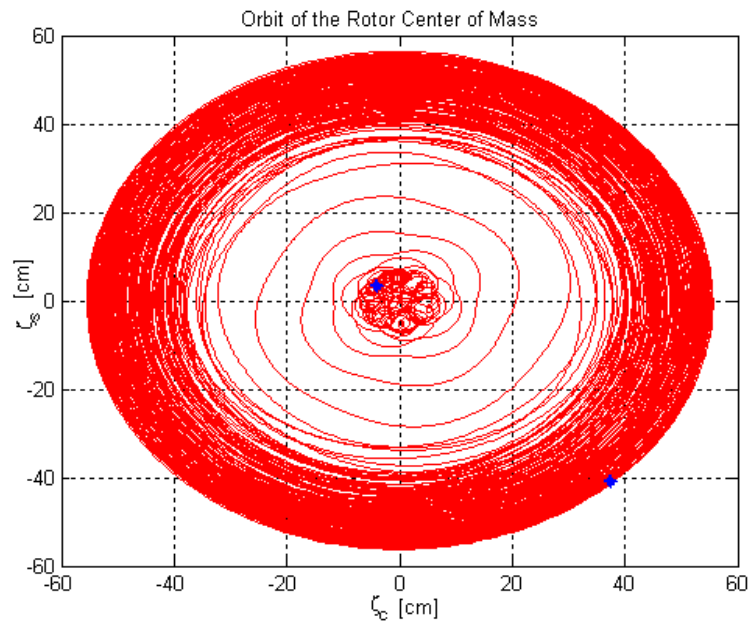
Şekil 4.29 : KSFD ve özdeğer yöntemleriyle elde edilen Coleman diyagramlarının karşılaştırılması.

Her iki yöntemle elde edilen sonuçların birbiriyle uyumlu oluşu, KSFD yönteminin güvenilir bir Coleman diyagramı oluşturmada kullanılabileceğini göstermektedir. Bu aşamada, rotor hızlanma profilinin Coleman diyagramı üzerindeki etkisini görmek amacıyla $\Omega(t) = 2t$ [rad/s] lik, (Şekil 4.30) bir hızlanma eğrisi tanımlansın.



Şekil 4.30 : Rotor hızının ($\Omega(t)=2t$ [rad/s]) benzetim süresi boyunca değişimi.

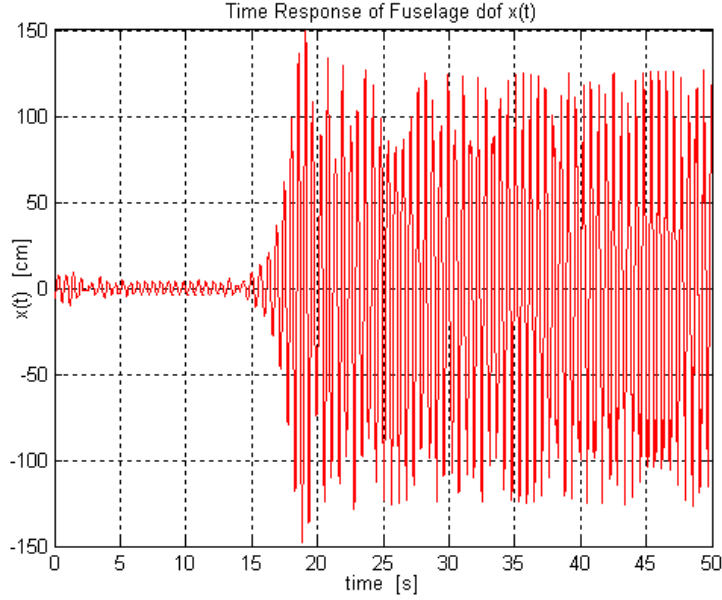
Daha yavaş bir hızlanmayı öngören bu hızlanma profiline göre, aynı başlanıç koşulları altında, 50[s]'lik bir benzetim süresi için elde edilen yerdeğiştirme-zaman grafikleri Şekil 4.31-34 elde edilmiştir.



Şekil 4.31 : Rotor kütle merkezinin yörüngesi, $\Omega(t=0,...,50) = 2t$ [rad/s].

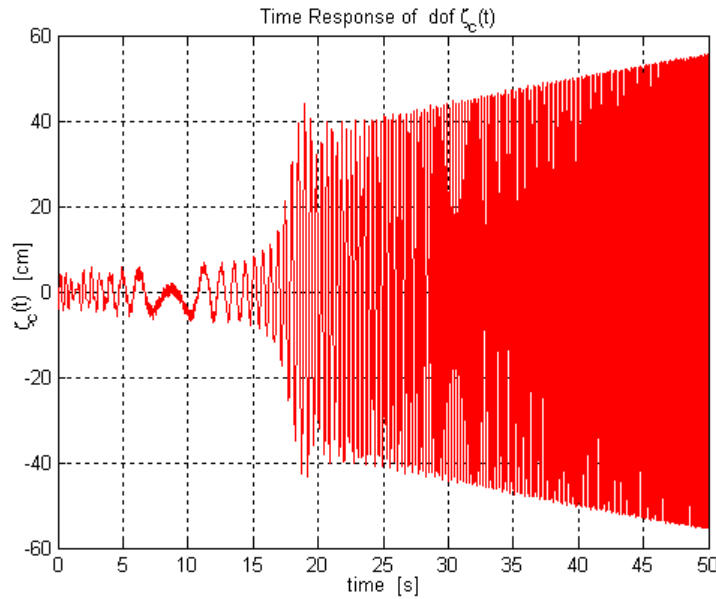
Rotor 30 [rad/s] hızına geldiğinde sistemin yer rezonansına girmesi beklenmektedir. Bu nedenle $t = 15$ [s] den itibaren yer rezonansı görülmektedir.

Gövdenin titreşim genliği (Şekil 4.32) yer rezonansı bölgesi ($\approx 30...36$ [rad/s]) içinde sürekli bir artış göstermekte, rotor hızı bu aralığın dışına çıktıktan sonra ise ($t=20$ [s] sonrası) genlik değerleri Şekil 4.32’de görüldüğü gibi sabitlenmektedir.

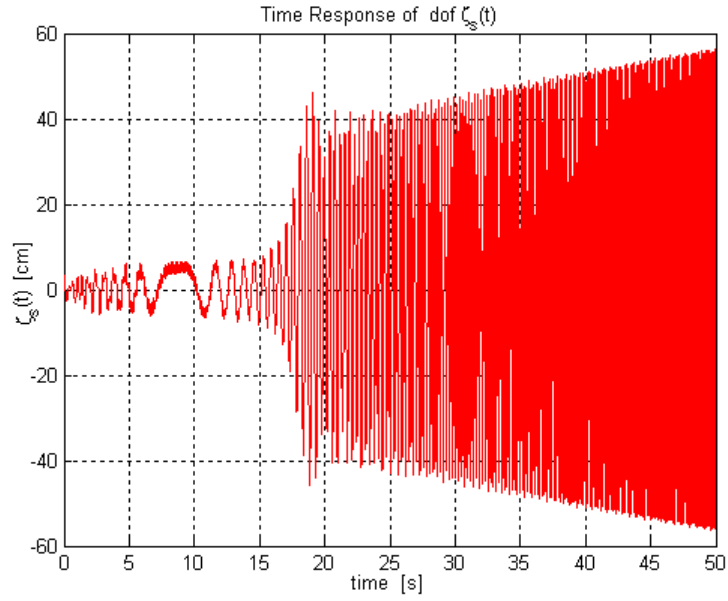


Şekil 4.32 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t$ [rad/s].

Rotor kütle merkezi için ise, rotor hızı yer rezonansı bölgesini ($\approx 30...36$ [rad/s]) aştığı halde ($t=20$ [s] sonrası) genliklerdeki artış (Şekil 4.33-34) devam etmektedir.

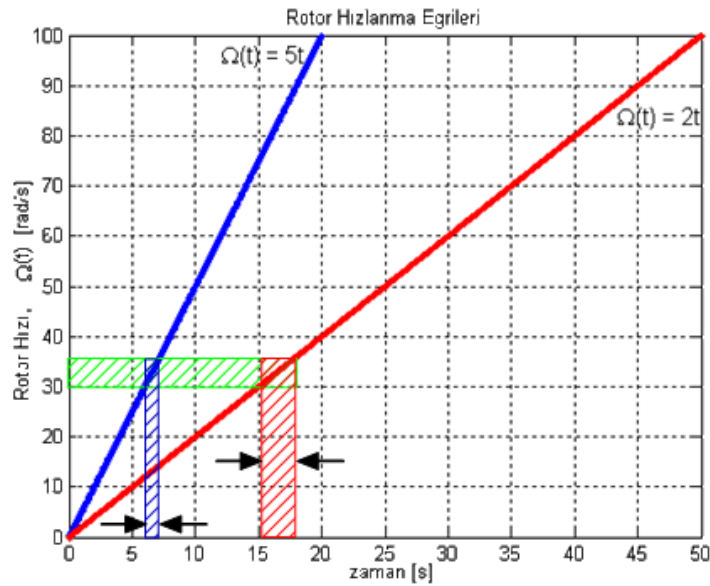


Şekil 4.33 : ζ_c serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t$ [rad/s].



Şekil 4.34 : ζ_s serbest titreşim zaman cevabı $\Omega(t=0,...,50) = 2t$ [rad/s].

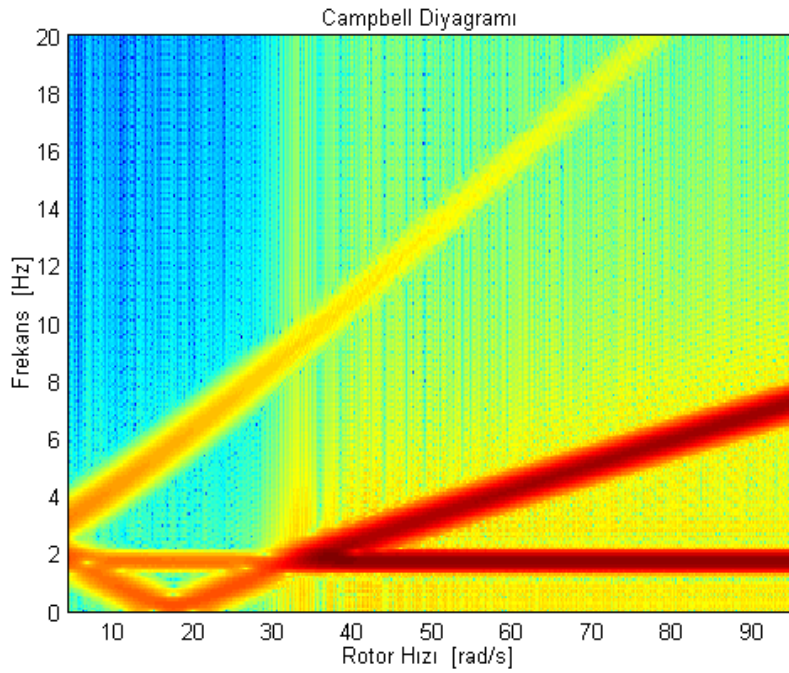
Rotorun iki farklı (hızlı: $\Omega(t) = 5t$ ve yavaş: $\Omega(t) = 2t$) hızlanma stratejisine sistemin vereceği zaman cevapları (sırasıyla Şekil 4.24 ve Şekil 4.32) birbiriyle karşılaştırılmak istensin. Şekil 4.35'te hızlı dönen rotorun, yavaş dönen rotora göre kararsızlık bölgesinde daha kısa bir süre kaldığı görülmekte ve buna bağlı olarak gövde genlikleri Şekil 4.24'te görüldüğü gibi bir değere kadar arttıktan sonra nispeten sabitlenmektedir. Buna karşılık, yavaş dönen rotor Şekil 4.35'te görüldüğü gibi kararsızlık bölgesi içinde daha uzun bir süre kaldığından dolayı genlikler epey yüksek değerlere (Şekil 4.32) ulaşacak zamanı kendilerinde bulabilmektedirler.



Şekil 4.35 : Sistemin, farklı hızlanma eğrilerine göre kararsızlık bölgesi içinde geçirdiği süreler.

Sonuç olarak, yer rezonansı açısından kararsızlık bölgesinin –eğer rotorun hızlanma bölgesi içinde ise– mümkün olduğu kadar kısa sürede geçilmesi gerektiği söylenebilir.

Rotorun hızlanma profilinin ($\Omega(t) = 2t$) Coleman diyagramını nasıl etkilleyeceğini görmek için KSFD yöntemiyle Coleman diyagramı oluşturulursa, daha detaylı bir diyagram (Şekil 4.36) ortaya çıktığı görülmektedir. Bununla beraber, benzetim süresindeki artışın da $t = 0, \dots, 50[s]$ buda katkısı olduğu söylenmelidir.



Şekil 4.36 : KSFD yöntemiyle elde edilen Coleman diyagramı ($\Omega(t=0, \dots, 50) = 2t$ [rad/s]).

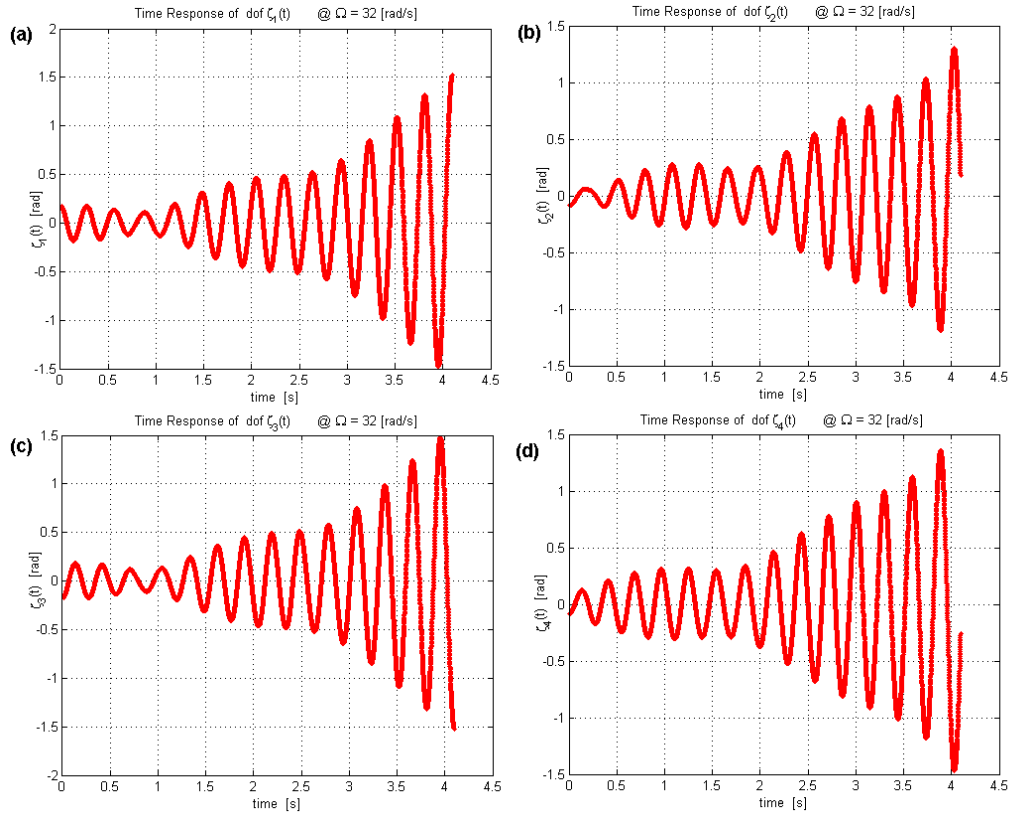
Özetle, Şekil 4.36'daki gibi, frekans-zaman çözünürlüğü Şekil 4.28'e göre daha iyi bir Coleman diyagramı elde edilebilmesi için rotorun hızlanması (run-up) mümkün mertebe yavaş yapılmalıdır; her ne kadar, bu sebepten dolayı daha uzun bir zaman verisi toplanıp, onun KSFD'sinin alınmasını gerektirse bile.

4.1.5 Serbest titreşim zaman cevabının dönen eksen takımında incelenmesi

Sayısal verileri çizelge 4.1'de tanımlanmış üç serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin zaman cevabı, dönen eksen takımında incelenmek istendiğinde sistemin beş serbestlik derecesine $\{x, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}^T$ sahip olduğu görülmektedir. Bölüm (3.4.2.6)'den de hatırlanacağı gibi, bu sistemin (4.6)'da verilen başlangıç koşulları altındaki zaman cevabı elde edilecektir.

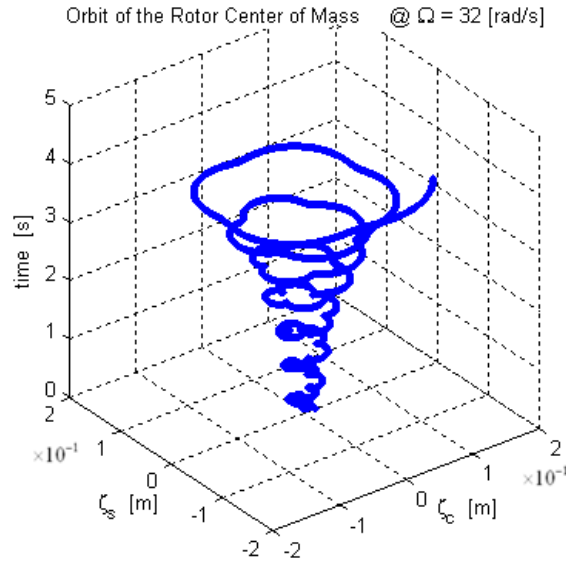
$$\begin{aligned}
x(t=0) &= 0.03[\text{m}] \\
\zeta_1(t=0) &= 10\pi/180 [\text{rad}] \\
\zeta_2(t=0) &= -5\pi/180 [\text{rad}] \\
\zeta_3(t=0) &= -10\pi/180 [\text{rad}] \\
\zeta_4(t=0) &= 5\pi/180 [\text{rad}]
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

Bu durumda, rotor 32[rad/s] açısal hızıyla kararsız bölge içinde dönerken, aşağıda verilen başlangıç koşulları kullanılarak sistemin zaman cevabı (Şekil-A12) elde edilmiştir.



Şekil 4.37 : Her bir palin $\Omega=32$ [rad/s]'de dönen eksen takımındaki zaman cevapları: a) $\zeta_1(t)$, b) $\zeta_2(t)$, c) $\zeta_3(t)$, d) $\zeta_4(t)$

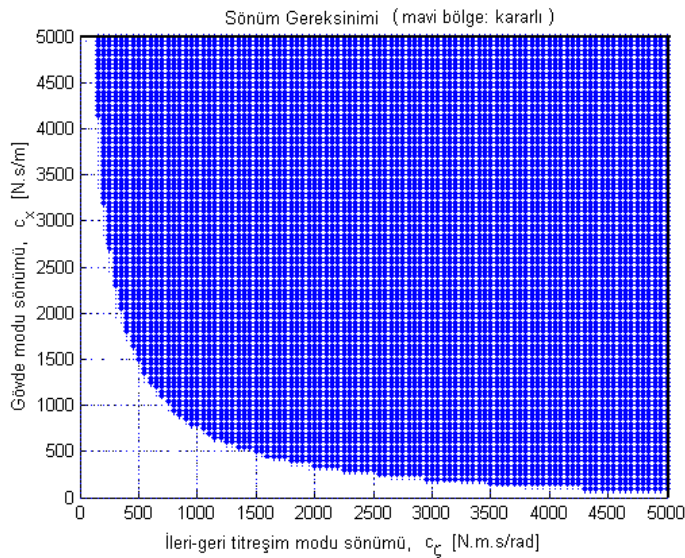
Her bir palin zaman cevabı bilindiğine göre, rotorun kütle merkezinin de zaman cevabı basit bir işlemle elde edilebilir. Bunun için FKD'de kullanılan (B.6a ve B.6b) bağıntılardan faydalanılarak, rotor kütle merkezinin hareketini veren genelleştirilmiş koordinatlara (ζ_c ve ζ_s) geçilmesiyle, rotor kütle merkezinin yörüngesi elde edilir (Şekil 4.38).



Şekil 4.38 : Rotor kütle merkezinin kararsız bir rotor hızındaki yörüngesi.

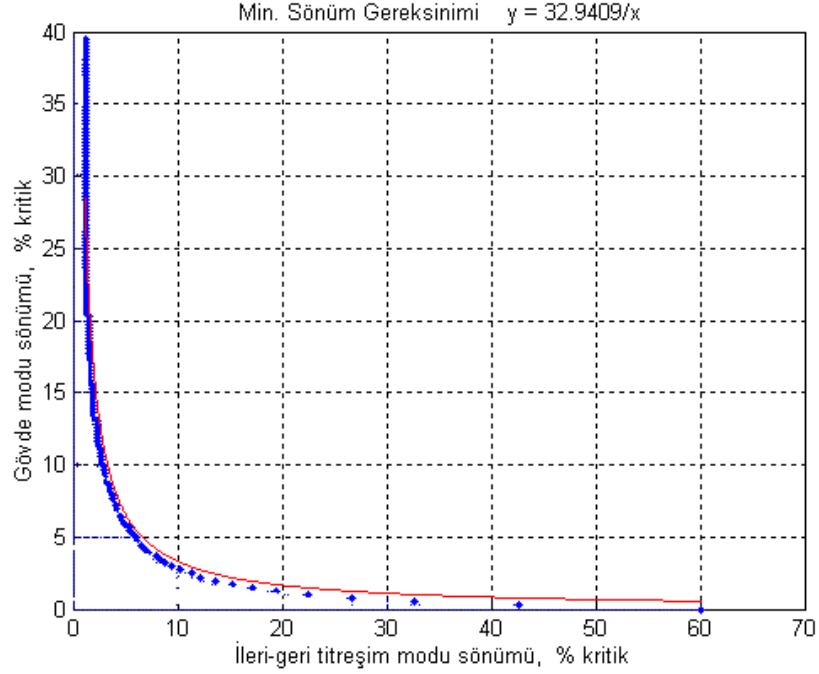
4.1.6 Gerekli Minimum Sönümün Belirlenmesi

Bu bölümde, sistemin kararlı olması için gerekli minimum sönüm miktarı araştırılmıştır. Bu ise bölüm (3.4.2.7) açıklandığı gibi bir çift parametreye sırasıyla değerler atanarak bir parametre aralığının taranması vasıtasıyla yapılmaktadır. Elde edilen grafikler (Şekil 4.39-40) iki bölgeye ayrılmaktadır: birinci bölge, eğrinin üstünde kalan alandır ki bu sistemin kararlı olduğu bölgeyi göstermektedir; ikinci bölge ise, eğrinin altında kalan kısımdır ki bu da sistemin kararsız olduğu bölgeyi göstermektedir.



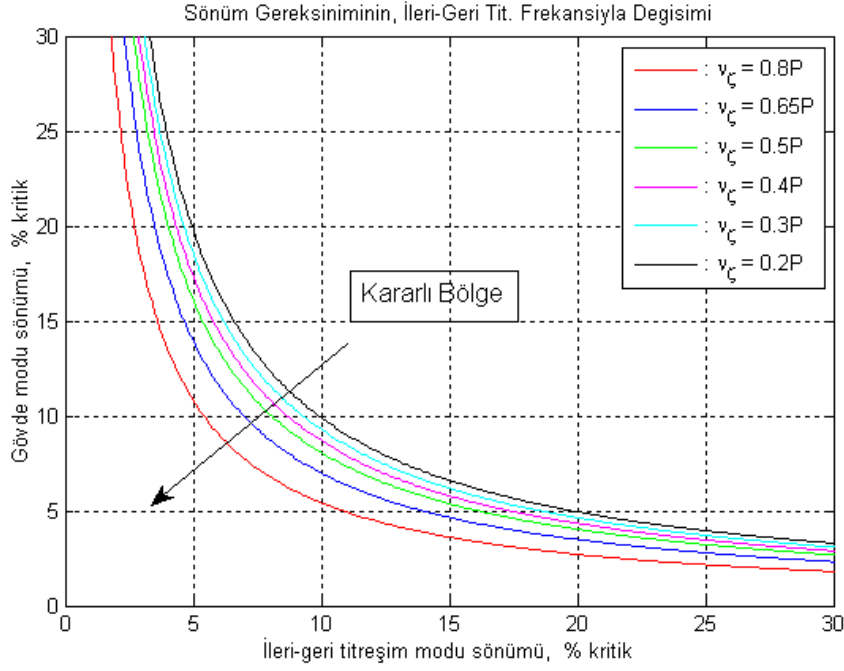
Şekil 4.39 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı grafiği için minimum sönüm gereksinimi.

İfade kolaylığı bakımından minimum sönüm gereksinimi diyagramı Şekil 4.40'ta olduğu gibi boyutsuz olarak da verilmektedir. Şekil 4.40'ta, kararlılık sınırı – kararlılık sınırındaki düğüm (grid) noktaları esas alınarak hiperbolik bir eğri uydurulmasıyla– analitik olarak ifade edilmiştir.



Şekil 4.40 : Üç serbestlik dereceli yer rezonansı grafiği için boyutsuz minimum sönüm gereksinimi grafiği

Palin ileri-geri titreşim modu frekansının, sistemin kararlı kılmak için gerekli olan sönüm miktarı üzerindeki etkisinin incelenmesi amacıyla Şekil 4.41'deki grafik oluşturulmuştur. Burada, rijit palin ileri-geri titreşim modu frekansları (Şekil 4.2'de tanımlandığı gibi) birbirinden farklı olan $v_{\zeta} = 0.8P, 0.65P, 0.5P, 0.4P, 0.3P$ ve $0.2P$ altı adet düzlem-içi yumuşak rotor için minimum sönüm gereksinimi eğrileri elde edilmiştir (Şekil 4.41).



Şekil 4.41 : Minimum sönüm gereksinimi eğrisinin palin ileri-geri titreşim modu frekansına bağlı olarak değişimi.

Şekil 4.41’de palin ileri-geri titreşim modu frekansı arttıkça kararsızlık bölgesinin daraldığı ve daha az miktarda bir sönümün sistemi kararlı kılmak için yeterli olacağı görülmektedir. Bu nedenle, yer rezonansını engellenmesi bakımından, palin ileri-geri titreşim modu frekansının –aynı zamanda 1.0P’ye çok da yakın olmamak şartıyla– mümkün mertebe yüksek olması arzu edilir.

Şekil 4.40’taki kararlılık sınırı grafiğinden bir çift sönüm değeri seçilerek, bunların sistemin kararlılığı üzerine etkisi incelenecektir. Buna örnek olarak palin %10’luk bir kritik sönüm (Şekil 4.40) içermesi durumunda gövdenin yaklaşık % 4’lük bir kritik sönüm içermesi (Şekil 4.40) hali ele alınmak istensin. Bu durumda,

$$c_{\zeta} = 2\xi_{\zeta}\sqrt{k_{\zeta}I}$$

$$c_{\zeta} = 2 \times 0.1\sqrt{k_{\zeta}I} = 2025.6[m.N.s/rad]$$

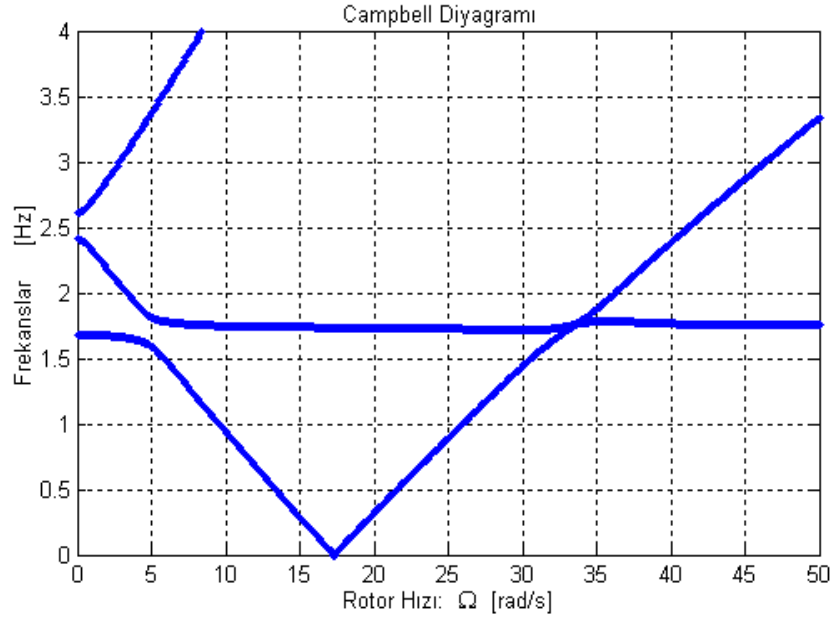
ve

$$c_x = 2\xi_x\sqrt{k_xM}$$

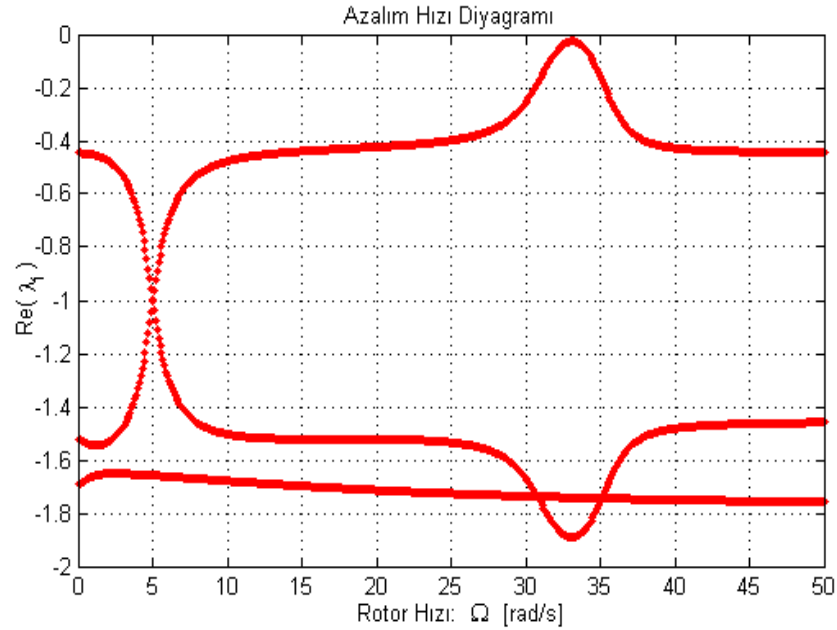
$$c_x = 2 \times 0.04\sqrt{k_xM} = 525.46[N.s/m]$$

Boyutlu sönüm değerleri elde edilir. Hesaplanan c_{ζ} ve c_x sönüm katsayıları matematik modele (3.4.2.2) girilerek analiz edildiği takdirde, Şekil 4.42’deki Coleman diyagramı ve Şekil 4.43’teki azalım hızı diyagramı elde edilmektedir. Şekil 4.43’te tüm kompleks

özdeğerlerin reel kısımlarının negatif olduğu görülmektedir. Bu nedenle, eklenen sönüm miktarının sistemi kararlı hale getirdiği ve yer rezonansını ortadan kaldırdığı görülmektedir.

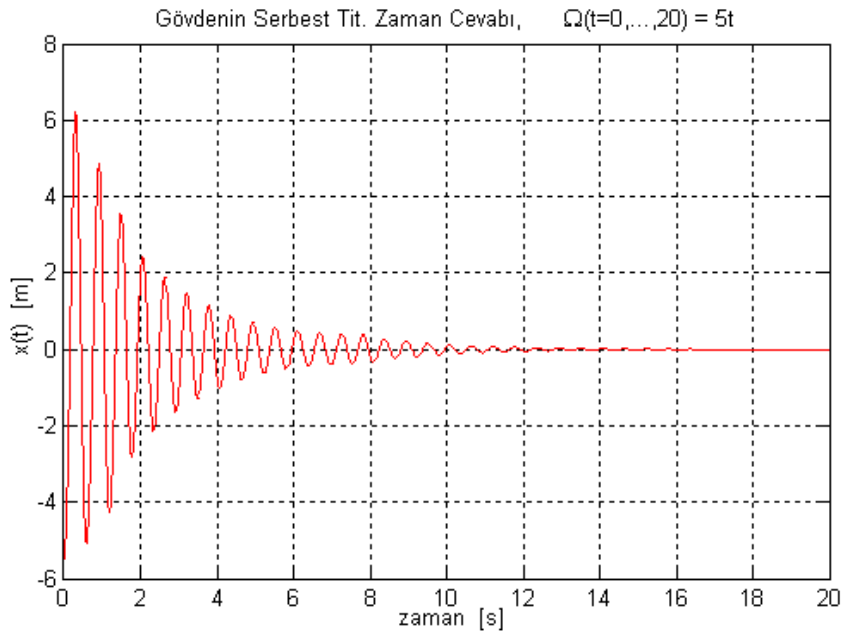


Şekil 4.42 : Sönümlü modelin Coleman diyagramı



Şekil 4.43 : Sönümlü modelin azalım hızı diyagramı

Hesaplanan c_ζ ve c_x sönüm katsayıları, bölüm (4.1.4)’te verilen başlangıç koşulları kullanılarak ve rotor hızı $\Omega(t=0,...,20)=2t$ [rad/s] olacak şekilde, sistemin serbest titreşim zaman cevabı modelinde test edilmiştir. Şekil 4.44’te görüldüğü gibi sistemin zaman cavabı kararlılık sergilemektedir.



Şekil 4.44 : Gövdenin serbest titreşim zaman cevabı.

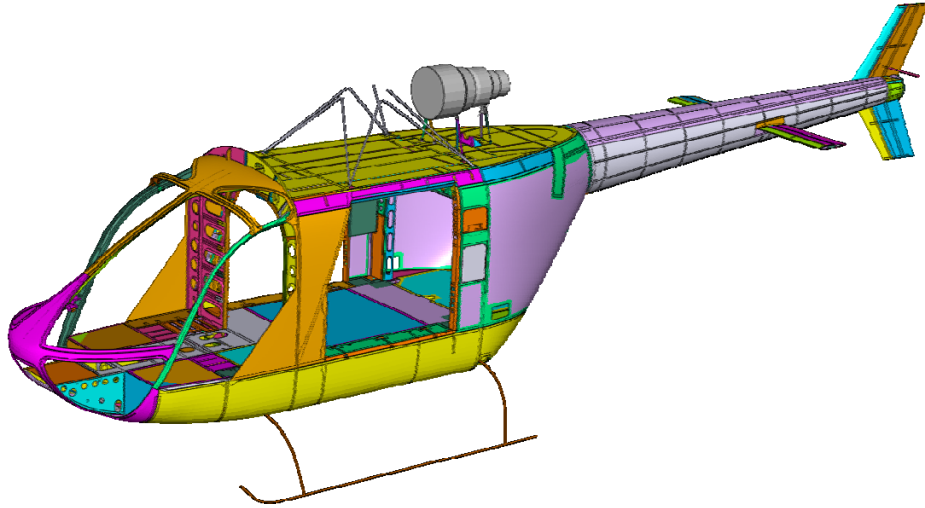
5. İTÜ-HTH HELİKOPTERİNİN MODELLENMESİ, ANALİZİ VE YER REZONANSINA KARŞI TASARLANMASI

5.1 İTÜ-HTH Helikopterin Tanıtılması

Bu bölümde İTÜ-HTH'ı oluşturan iki ana sistem, gövde ve rotor sistemi, tanıtılmakta ve bu iki ana sistemin helikopterin yer rezonansı davranışını modellemede kullanılacak eşdeğer özellikleri elde edilmektedir. Elde edilen eşdeğer parametreler helikopterin yer rezonansı modelinde kullanılmakta ve yer rezonansının oluşmaması için, sistemin içermesi gereken sönüm değerleri araştırılmaktadır.

5.1.1 İTÜ-HTH gövde sistemi

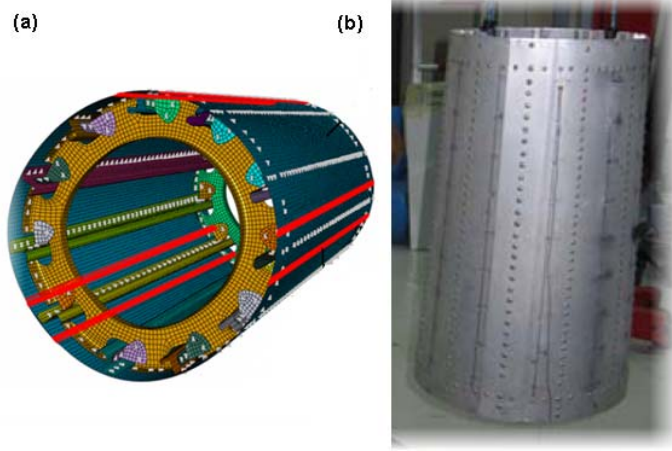
Şekil 5.1'de görülen SE helikopter modeli ABAQUS [49] SE yazılımı kullanılarak oluşturulmuştur. Helikopter, birçok ince kompozit ve alüminyum sac parçanın perçinlerle birleştirilmesiyle meydana gelmektedir. Bu bakımdan, SE modeli çoğunlukla kabuk elemanlardan oluşmaktadır. İTÜ-HTH (Şekil 5.1) SE modeli yaklaşık olarak 800000 eleman ve 900000 düğüm noktası içermektedir.



Şekil 5.1 : İTÜ-HTH SE modeli

Helikopterin yapısal dinamik davranışını doğru modelleyebilmek için perçinli bağlantıların da doğru modellenmesi gerekmektedir [50]. Bu amaçla, tasarım sürecinde, helikopterin kuyruk kesidinden alınan bir parçanın (Şekil 5.2 (b)) deneysel

model analizi yapılmış ve bu analiz sonuçları var olan (Şekil 5.2 (a)) teorik model ile karşılaştırılmış ve teorik model güncellenmiştir [51].



Şekil 5.2 : Kuyruk konisi kesidi a) teorik, b) deneysel modeli [51].

Kaynak [51] deki çalışmada kazanılan deneyim ve birikimden İTÜ-HTH SE modelinin (Şekil 5.1) oluşturulmasında faydalanılmıştır. Şekil 5.3'te deneysel modal analizlerin gerçekleştirildiği kızakları üzerinde duran deneysel İTÜ-HTH görülmektedir. Bu modele dikey ve yatay dengeleyiciler yerleştirilmemiştir ve model sadece gövdenin yapısal elemanlarını, kızıağı ve motoru kapsamaktadır.



Şekil 5.3 : İTÜ-HTH deneysel modeli [51].

Deneysel modelin sonuçları ile karşılaştırılma yapılabilmesi için, bu modele eşdeğer teorik bir SE modeli de çalışma [51] de oluşturulmuştur. Çalışma [51] den elde edilen bilgi birikimi (yapının deneysel doğal frekansları, mod şekilleri ve modlarına ait sönüm oranları) varolan SE helikopter modelinin güncellenmesinde (Şekil 5.1) kullanılmıştır.

5.1.1.1 İTÜ-HTH'ın deneysel modal analizi

Kızakları üzerinde duran ve sadece yapısal gövde elemanları (yatay ve dikey dengeleyiciler hariç) ve motordan oluşan (Şekil 5.3) İTÜ-HTH'ın deneysel modal analizi gerçekleştirilmiştir [51]. Gövdenin belli başlı modlarının doğal frekansları ve bu modlara ait deneysel sönüm oranları kayıp faktörü cinsinden Çizelge 5.1'de verilmektedir.

Çizelge 5.1 : Deneysel olarak elde edilen doğal frekanslar [51].

Deneysel Doğal Frek. [Hz]	Kayıp Faktörü %
5.48	0.8
5.65	0.9
9.03	0.8
9.34	0.7
14.00	1.3
15.90	1.4
24.35	1.3

Çizelge 5.1'deki ilk değer olan 5.48 [Hz] gövdenin kızaklar üzerindeki yuvarlanma moduna, ikinci değer 5.65 [Hz] ise, yunuslama moduna karşılık gelmektedir. Bu iki mod dışında kalan diğer modlar yer rezonansı bakımından bir önem arz etmemektedirler. Görüldüğü bu frekanslar rotor çalışma hızına (5.3 [Hz]) oldukça yakındır. Ancak, bu frekanslar henüz pek çok sistemin (aktarma organları, yakıt ve kontrol sistemleri gibi) gövdeye henüz birleştirilmediği durum için elde edilen frekanslardır. Bu frekansların (5.48 ve 5.65Hz), –şu anda 391 [kg] kütleyle sahip İTÜ-HTH'a (Şekil 5.3)– ileride alt sistemlerin eklenmesiyle düşeceği kesindir.

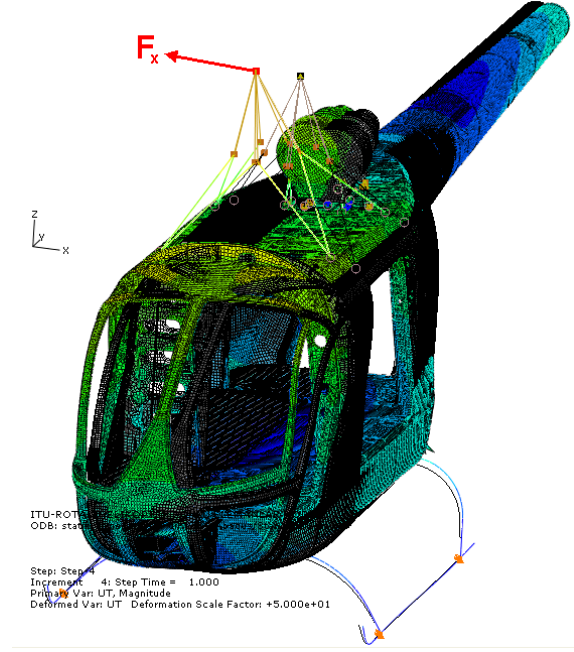
5.1.1.2 Yer rezonansı modeli için eşdeğer gövde parametrelerinin elde edilmesi

Yer rezonansı modelinde (3.89) kullanılmak üzere gövdenin x ve y doğrultularındaki ve de rotor düzlemi seviyesindeki direngenlik değerlerine (k_x ve k_y) ihtiyaç vardır. Bu amaçla, rotor göbeği merkezine sırasıyla F_x (Şekil 5.4) ve F_y (Şekil 5.5) tekil yükleri statik olarak uygulanıp Δx ve Δy yerdeğiştirmeleri elde edilmekte ve buradan da (5.1) bağıntılarıyla gövde direngenlik değerleri bulunmaktadır.

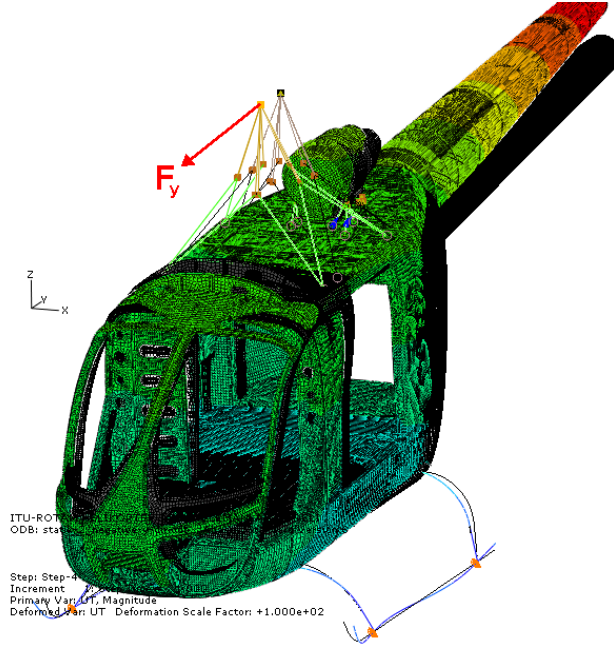
$$k_x = \frac{F_x}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad k_y = \frac{F_y}{\Delta y} \quad (5.1)$$

Gövde direngenliği tayin etmek için yapılan bu statik analizde, helikopter kızıağın dört noktadan yere üç yöndeki öteleme hareketi kısıtlanacak şekilde bağlanmıştır.

Ayrıca bu statik analiz için kullanılan SE modeli (Şekil 5.4,5), deneysel İTÜ-HTH (Şekil 5.3) ile karşılaştırılmak için oluşturulmuş SE modelinin çok benzeridir. Aradaki fark ise, bu model (Şekil 5.4,5) ek olarak rotor destek yapısını (statik mast) içermektedir. Şekil 5.4'te F_x yükü, Şekil 5.5'te F_y yükü rotor göbeğine etkiğinde meydana gelen yerdeğiştirmeler görsel hale getirilerek verilmiştir.



Şekil 5.4 : Rotor göbeğine x doğrultusunda F_x kuvvetinin uygulanması.



Şekil 5.5 : Rotor göbeğine y doğrultusunda F_y kuvvetinin uygulanması.

Elde edilen yer değiştirmeler, (5.1)'e konuğu takdirde, $k_x=312000$ [N/m] ve $k_y=505000$ [N/m] olarak bulunmaktadır. Bununla beraber, deneysel olarak elde edilen ilk iki moda ait doğal frekanslar kullanılarak sırasıyla yuvarlanma ve yunuslama modunu temsil eden m_x (5.2) ve m_y (5.3) kütleleri bulunabilir.

$$m_x = k_x/\omega_x^2 = 312000/(2\pi \cdot 5.48)^2 = 263.2 \text{ [kg]} \quad (5.2)$$

$$m_y = k_y/\omega_y^2 = 505000/(2\pi \cdot 5.65)^2 = 400.7 \text{ [kg]} \quad (5.3)$$

Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta: bulunan eden m_x (5.2) ve m_y (5.3) kütleleri deneysel İTÜ-HTH (Şekil 5.3) modeli temsil etmektedir. Tüm kütlelerin dahil edildiği, İTÜ-HTH modelini temsil etmemektedir. Bu nedenle, deneysel doğal frekansları, toplam kütlesi ve bu toplam kütleyle karşılık gelen eşdeğer kütleleri (5.2,3) elde edilmiş deneysel İTÜ-HTH modeli baz alınarak, gerçekte daha büyük bir kütleyle sahip olacak olan İTÜ-HTH'ın eşdeğer kütleleri lineer ekstrapolasyonla elde edilmiştir. İTÜ-HTH'ın farlı ağırlıklardaki durumu temsil eden ve yer rezonansı analizinde kullanılacak olan eşdeğer m_x , m_y kütleleri Çizelge 5.2'de verilmiştir.

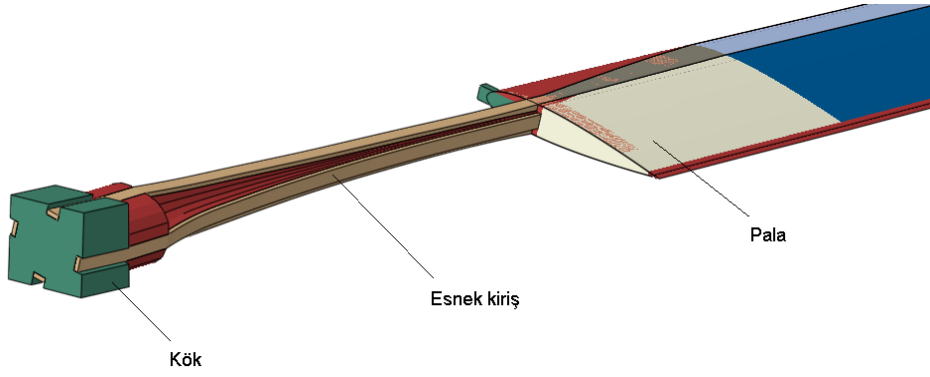
Çizelge 5.2 : İTÜ-HTH için, farklı toplam kütle değerlerine karşılık gelen eşdeğer kütleler.

Toplam Kütle [kg]	Eşdeğer Kütleler [kg]	
m_T	m_x	m_y
391 (ref.)	263.2 (ref.)	400.7 (ref.)
1000	673.1	1024.8
1500	1009.7	1537.2
2000	1346.3	2049.6

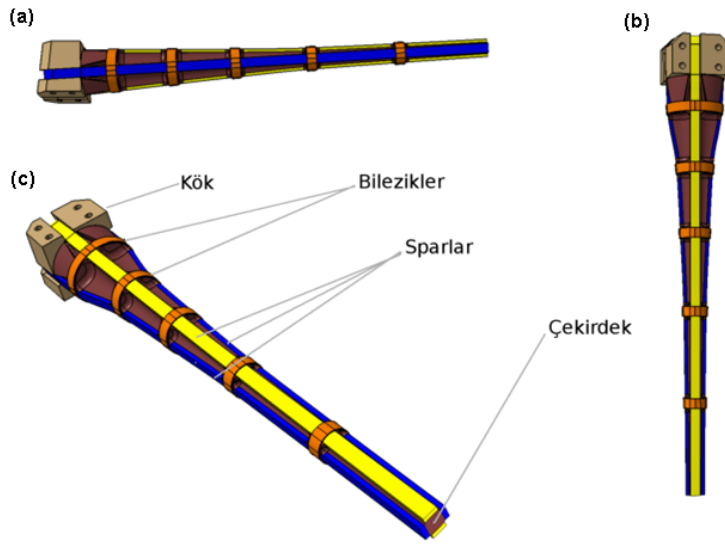
5.1.2 İTÜ-HTH rotor sistemi

İTÜ-HTH'ın rotoru yataksız dört palli, yukarıdan izlendiğinde saatin aksi yönde dönen bir rotordur. Yataksız bir rotorda, palin dinamik yapısal özelliklerini belirleyen en önemli kısım kök kısmına yakın esnek kiriş (Şekil 5.6) parçasıdır.

İTÜ-HTH esnek kirişi: alüminyum alaşım kök, epoksi matris içinde tek yönlü cam elyaflarından imal edilen sparlar, bilezikler ve çekirdekten (Şekil 5.7) oluşmaktadır.



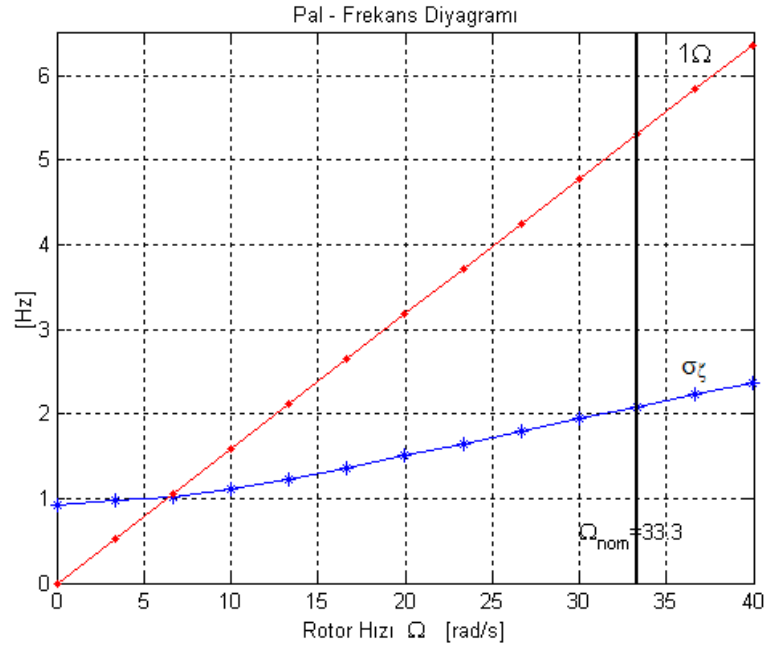
Şekil 5.6 : İTÜ-HTH palı



Şekil 5.7 : İTÜ-HTH palı esnek kiriş parçası: a) yan görünüş, b) üst görünüş, c) alt kısımlar.

Şekil 5.6'daki palın temel ileri-geri titreşim moduna ait frekans diyagramı Şekil 5.8'de verilmektedir. Palın farklı dönme hızlarındaki doğal frekansları ve mod şekilleri, ABAQUS SE yazılımı kullanılarak elde edilmiştir. Düzlem-içi yumuşak rotor olarak tasarlanan İTÜ-HTH rotorunun nominal dönme hızındaki ($\Omega_{nom}=33.33[\text{rad/s}] = 5.3[\text{Hz}]$) boyutsuz temel ileri-geri (lead-lag) titreşim modu doğal frekansı 0.3928P dir. Hesaplanan temel kanat çırpma (flap) doğal frekansı ise 1.07P dir.

İTÜ-HTH palı gerçekte, Şekil 5.6'da görüldüğü gibi üç boyutludur. Bununla birlikte, ABAQUS kullanılarak yapılan kesit analizi sonucunda üç boyutlu olan pal, kiriş elemanlar kullanılarak tek boyutlu olarak (radyal doğrultuda) idealize edilmekte ve Çizelge 5.3'teki kütle dağılımı ortaya çıkmaktadır.



Şekil 5.8 : İTÜ-HTH palı, temel ileri-geri titreşim modu frekans diyagramı (Abaqus analizi ile elde edilmiştir).

Çizelge 5.3 : İTÜ-HTH palinin kütle dağılımı

İstasyon [m]	Birim uzunluğun kütlesi: m [kg/m]
0.000 - 0.555	-
0.555 - 0.610	1.55008
0.610 - 0.809	1.3389
0.809 - 0.971	1.22329
0.971 - 1.046	3.43208
1.046 - 1.121	3.23693
1.121 - 1.195	2.93763
1.195 - 1.270	2.60327
1.270 - 1.377	2.27989
1.377 - 5.172	2.26339
5.172 - 5.457	13.7857
5.457 - 5.492	6.59829

Çizelge 5.3'te verilen kütle dağılımı verisi eşdeğer palin (Çizelge 5.4) eşdeğer mafsal

noktasına göre kütleli atalet momenti ($I = \int_e^R m(r-e)^2 dr$, r : eşdeğer mafsal noktası

ile palin kütle merkezi arasındaki radyal mesafe) ve ilk kütleli atalet momentinin

($S = \int_e^R m(r-e) dr$) hesabında kullanılmaktadır. Eşdeğer mafsal mesafesi (e), ilgili

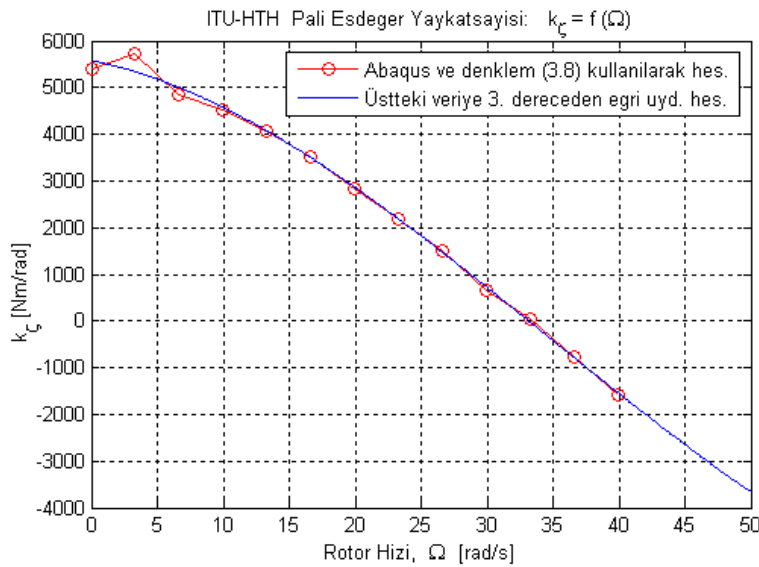
rotor hızı için ABAQUS'ün belirlediği temel ileri-geri titreşim mod şeklinden faydalanılarak (3.9) bağıntısı yardımıyla hesaplanmaktadır. Eşdeğer mafsal mesafesi bulunduğundan sonra palin ileri-geri titreşim mafsalından, pal ucuna kadar olan kütlesi

elde edilir. Çizelge 5.4'teki eşdeğer yay katsayısı k_{ζ} , (3.8) denkleminde elde edilir. Çizelge 5.4'te geçen R ($=5.492[m]$), rotor yarıçapını temsil etmektedir.

Çizelge 5.4 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer pal özellikleri

Rotor Hızı %	σ_{ζ} [rad/s]	e/R [-]	I [kgm ²]	eS [kgm ²]	k_{ζ} [Nm/rad]
0.0	5.91	0.132	154.375	30.132	5392
0.1	6.15	0.120	159.916	28.013	5737
0.2	6.39	0.137	152.103	30.980	4834
0.3	7.00	0.133	153.919	30.304	4512
0.4	7.74	0.129	155.749	29.614	4067
0.5	8.56	0.125	157.592	28.910	3518
0.6	9.44	0.122	158.984	28.374	2820
0.7	10.35	0.118	160.851	27.648	2181
0.8	11.26	0.114	162.733	26.907	1502
0.9	12.18	0.111	164.153	26.344	648
1.0	13.09	0.107	166.058	25.580	37
1.1	14.00	0.104	167.497	24.999	-774
1.2	14.89	0.101	168.943	24.409	-1590

Çizelge 5.4'te eşdeğer yay katsayısının rotor hızına bağlı olarak ciddi oranda değiştiği görülmektedir. Bu sonuç grafik olarak Şekil 5.9'da gösterilmiştir.



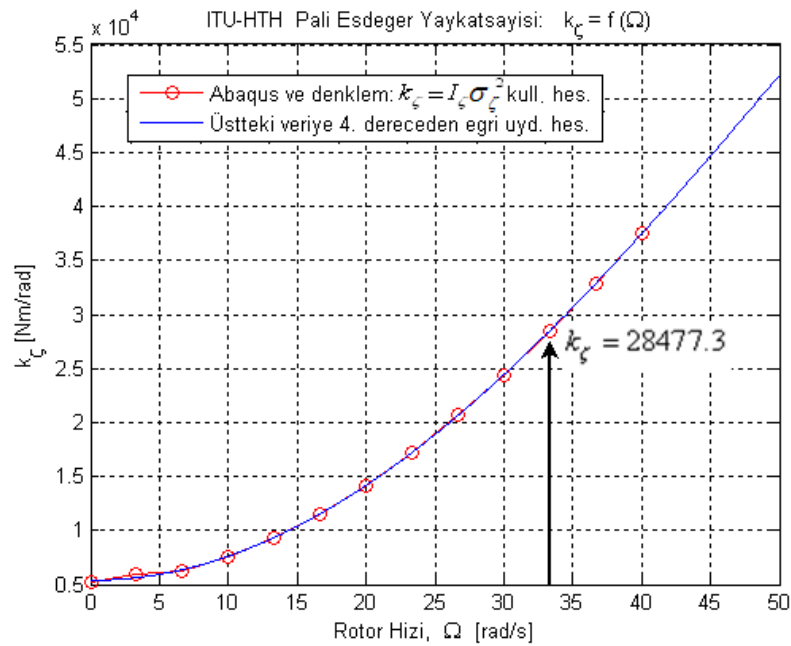
Şekil 5.9 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer ileri-geri titreşim modu yay katsayısının rotor hızına bağlı değişimi.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta eşdeğer burulma yay katsayısı k_{ζ} 'nin, 33...34 [rad/s] den sonra negatif değerler almasıdır. Yay katsayısının negatif değerler almasının fiziksel bir karşılığı olmayıp; bu durumun rotorun temel düzlem içi eğilme frekansı ν_{ζ} (veya σ_{ζ})'yı ABAQUS'ün doğru olarak hesaplayamamasından

kaynaklandığı düşünülmektedir. ABAQUS'ün direngenlik matrisini hesaplarken, elastik direngenliğe ek olarak merkezkaç etkilerden dolayı meydana gelen direngenlik artışını hesaba kattığı; buna karşılık, ileri-geri titreşim hareketi kaynaklı geometrik etkilerden meydana gelen direngenlik artışını hesaba katmadığı düşünülmektedir. ABAQUS'ün ileri-geri yöndeki geometrik kökenli direngenlik artışını hesaplayamayışından dolayı, elde edilen frekans değerlerinin de (σ_ζ) daha düşük çıkması beklenmektedir. Bu geometrik etkiyi hesaba katan yeni (σ_ζ) 'ları hesaplamaya çalışmak yerine, burada daha basit bir düzenlemeye gidilerek: eşdeğer burulma yay katsayısı hesabında kullanılan denklem (3.8)'in sağ tarafındaki ileri-geri yöndeki geometrik kökenli $eS_\zeta\Omega^2$ teriminin atılmasıyla (5.4) elde edilmektedir.

$$k_\zeta = I_\zeta \sigma_\zeta^2 \quad [Nm/rad] \quad (5.4)$$

Şekil 5.10'da, denklem (5.4)'e göre hesaplanan eşdeğer burulma yay katsayısı verilmektedir.



Şekil 5.10 : İTÜ-HTH palinin eşdeğer ileri-geri titreşim modu yay katsayısının rotor hızına bağlı değişimi.

İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizleri de bu son hesap edilen yay katsayısına göre yapılmaktadır. Boyutsuz sönüm gereksinimi grafiklerini elde etmek için ise, –Şekil 5.10'da görülen– nominal rotor çalışma hızındaki eşdeğer yay katsayısından faydalanılmaktadır.

5.2 İTÜ-HTH Yer Rezonansı Modeli

Bu bölümde, İTÜ-HTH'ın yer rezonansının incelenmesi bölüm (3.5)'te verilen dört serbestlik dereceli model (Şekil 3.22,23) vasıtasıyla yapılmaktadır. İTÜ-HTH'ın yer rezonansı davranışı modellemek için bu bölümde elde edilen eşdeğer direngenlikler ve kütlelerden yararlanılacaktır. İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizleri, Çizelge 5.2'de verilen dört farklı toplam gövde ağırlığına karşılık gelen eşdeğer kütle çiftleri için gerçekleştirilecektir.

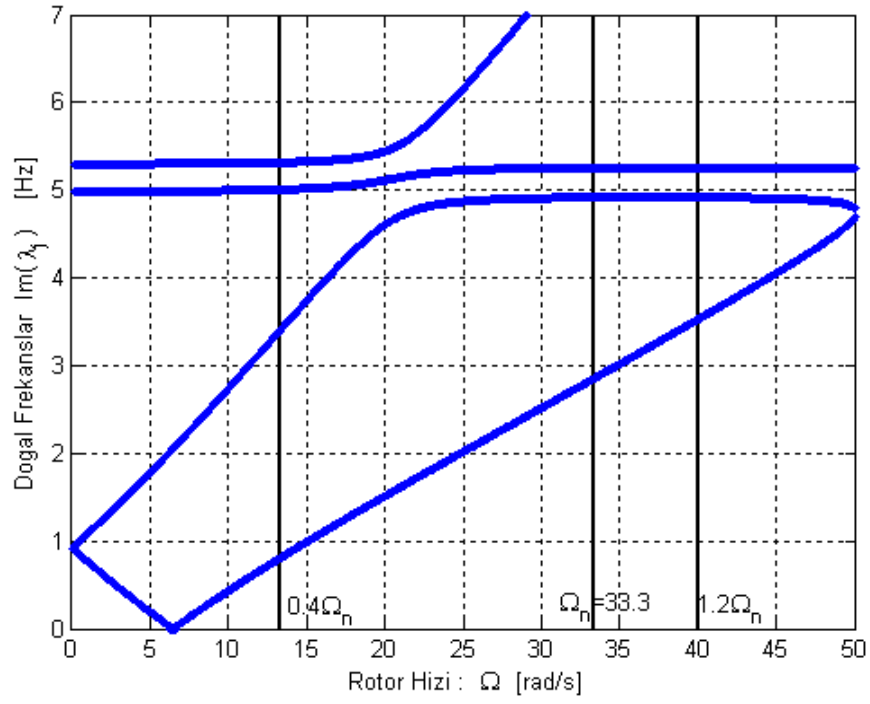
5.2.1 İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizleri

Bu kısımda İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizleri için önceki bölümlerde elde edilen eşdeğer direngenlikler (k_x , k_y , k_ζ) ve Çizelge 5.2'deki eşdeğer kütlelerden (m_x , m_y) faydalanılmaktadır. Çizelge 5.5'te İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizinde kullanılacak tüm parametreler sayısal değerleriyle birlikte verilmiştir.

Çizelge 5.5 : Dört serbestlik dereceli deneysel İTÜ-HTH yer rezonansı modeline ait sayısal veriler.

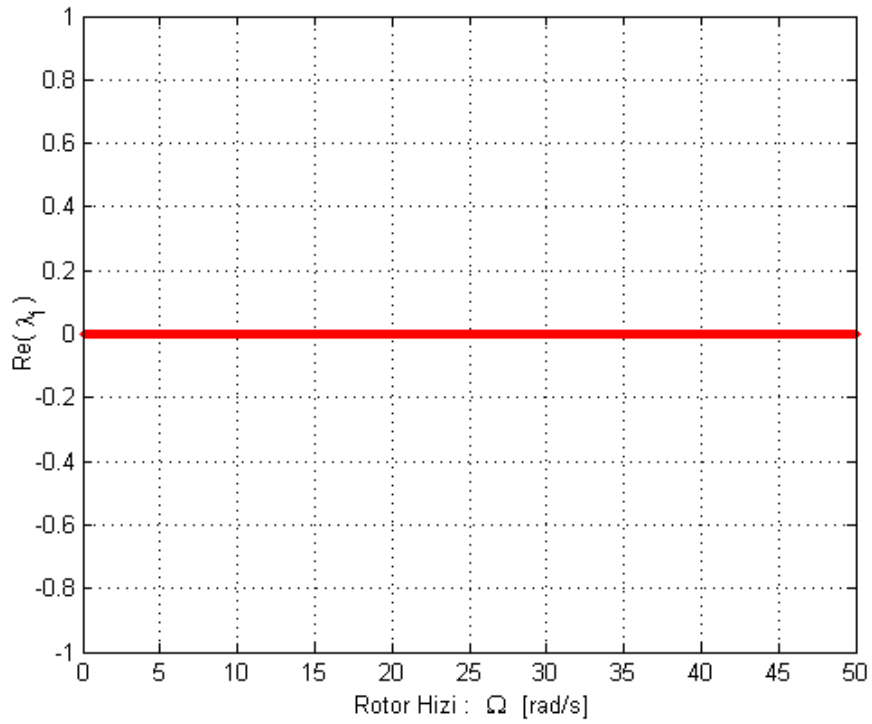
Fiziksel Büyüklük	Sembol	Değer
Pal sayısı	b	4
Pal kütlesi	m_b	14.41 [kg]
Efektif gövde kütlesi x yönündeki	m_x	263.2 [kg]
Efektif gövde kütlesi y yönündeki	m_y	400.7 [kg]
Toplam kütle x yönündeki	$M_x = m_x + bm_b$	320.84 [kg]
Toplam kütle y yönündeki	$M_y = m_y + bm_b$	458.34 [kg]
Atalet momenti (ileri-geri tit. maf. etr.)	I	166.06 [kg.m ²]
Palın kütle merkezi (ileri-geri tit. maf.)	r	1.035 [m]
Gecikme menteşe mesafesi	e	0.5876 [m]
Gövdenin direngenliği x yönündeki	k_x	312000 [N/m]
Gövdenin direngenliği y yönündeki	k_y	505000 [N/m]
Gecikme yayının direngenliği	k_ζ	$k_\zeta = f(\Omega)$ $k_{\zeta ref} = 28477$ [N.m/rad]
Gövde sönüm katsayısı x yönündeki	c_x	0.0 [N.s/m]
Gövde sönüm katsayısı y yönündeki	c_y	0.0 [N.s/m]
Gecikme yayının sönüm katsayısı	c_ζ	0.0 [N.s.m/rad]

Çizelge 5.5'teki sayısal veriler kullanılarak deneysel İTÜ-HTH modelinin özdeğer analizi yapıldığı takdirde, Şekil 5.11'daki Coleman diyagramı ve Şekil 5.12'deki azalım hızı diyagramları elde edilmektedir.



Şekil 5.11 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 391[kg].

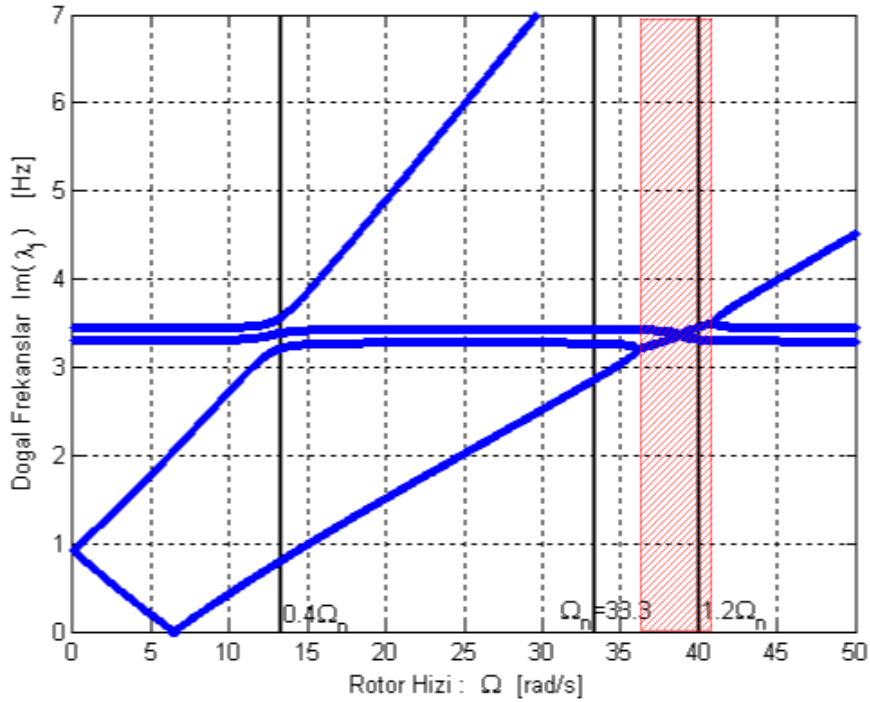
Şekil 5.11'deki Coleman diyagramından görüldüğü gibi yer rezonansı bu toplam kütle değerinde gerçekleşmemektedir.



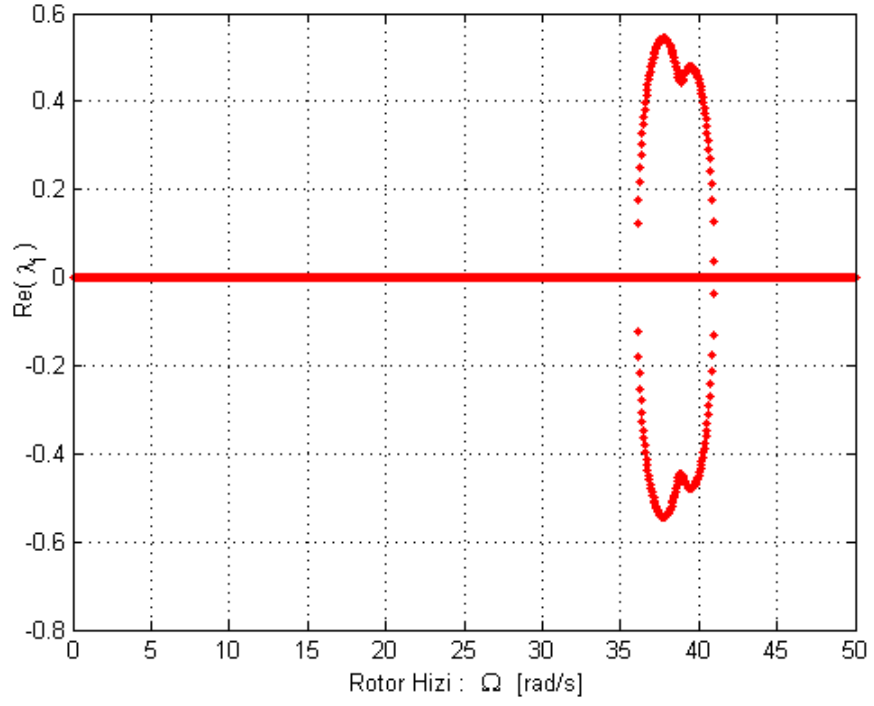
Şekil 5.12 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 391[kg].

Çizelge 5.5'teki veriler sadece $m_x = 673.1[\text{kg}]$, $m_y = 1024.8[\text{kg}]$ olacak şekilde düzenlenip, tekrar özdeğer problemi çözülürse Şekil 5.13'teki 1000[kg]'lık toplam kütleyle karşılık gelen Coleman diyagramı ve Şekil 5.14'teki azalım hızı diyagramı elde edilir. Bu durumda, yer rezonansının rotorun nominal çalışma bölgesinin biraz üzerinde, $\Omega = 36.1, \dots, 40.9 [\text{rad/s}]$ çalışma aralığında meydana geldiği görülmektedir.

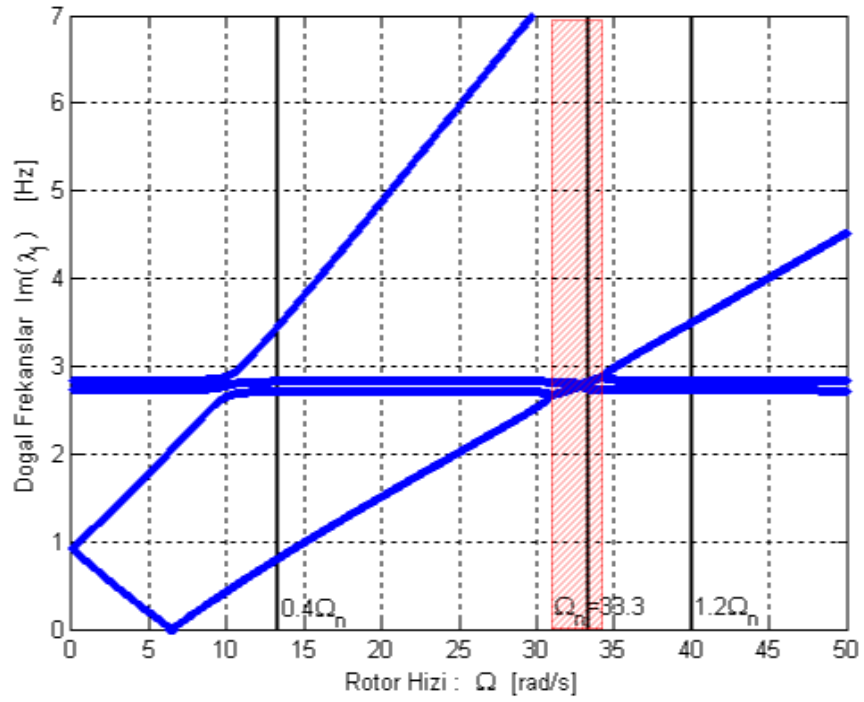
Benzer şekilde, Çizelge 5.5'teki veriler sadece $m_x = 1009.7[\text{kg}]$, $m_y = 1537.2[\text{kg}]$ olacak şekilde düzenlenip, tekrar özdeğer problemi çözülürse Şekil 5.15'deki 1500[kg]'lık toplam kütleyle karşılık gelen Coleman diyagramı ve Şekil 5.16'teki azalım hızı diyagramı elde edilir. Bu kez kararsızlığın gözlemlendiği Şekil 5.15'teki kırmızı taralı bölge, gövde doğal frekanslarının düşmesinden dolayı bir miktar daha sola kayarak $\Omega = 30.95, \dots, 34.3 [\text{rad/s}]$ aralığında yer rezonansına yol açmaktadır. Ayrıca, azalım hızı grafiğinden okunan (Şekil 5.16) maksimum değer bir önceki analize göre 0.5 ten 0.3 dolaylarına indiği, dolayısıyla, yer rezonansının şiddetinde azalma meydana geldiği söylenebilir.



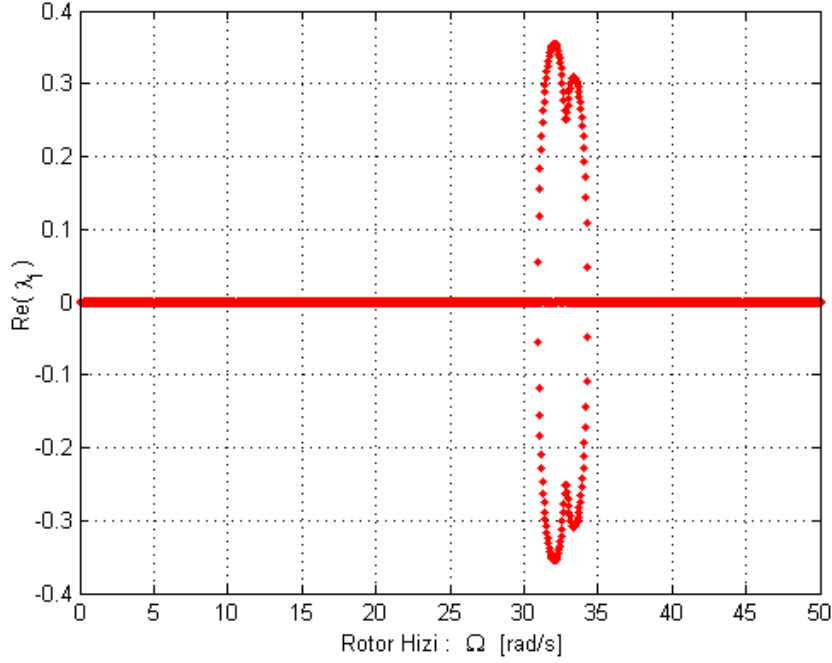
Şekil 5.13 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 1000[kg].



Şekil 5.14 : Azalim hızı diyagramı, toplam kütle = 1000[kg].



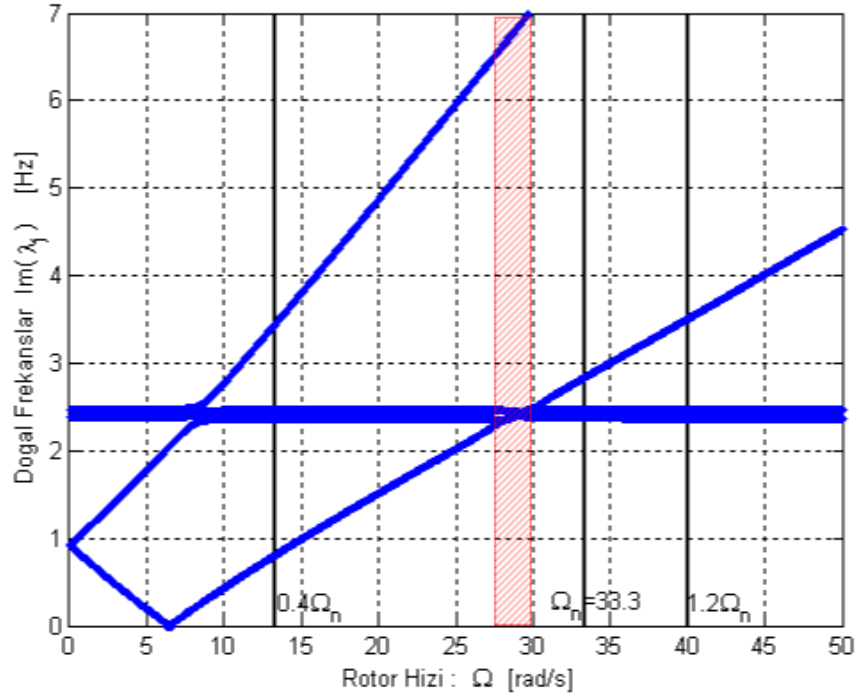
Şekil 5.15 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 1500[kg].



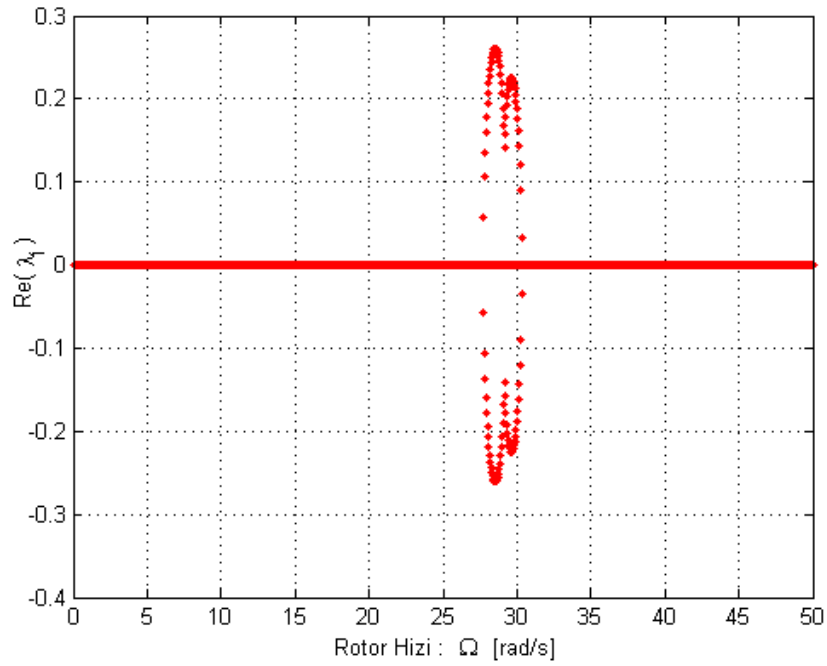
Şekil 5.16 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 1500[kg].

İTÜ-HTH'ın en ağır olduğu durumu ele almak için bu kez, yine Çizelge 5.5'teki veriler sadece $m_x = 1346.3$ [kg], $m_y = 2049.6$ [kg] olacak şekilde düzenlenirse Şekil 5.17'deki 2000[kg]'lık toplam kütleyle karşılık gelen Coleman diyagramı ve Şekil 5.18'deki azalım hızı diyagramı elde edilir. Kararsızlığın gözlemlendiği Şekil 5.17'deki kırmızı taralı bölge, daha da sola kayarak $\Omega = 27.75, \dots, 30.3$ [rad/s] aralığında yer rezonansına yol açmaktadır.

Bu dört farklı toplam kütle değeri için yapılan analizlerden, çıkan sonuç: helikopterin toplam kütlesi arttıkça, yer rezonansının meydana geldiği kararsızlık aralığı küçülmüş ve yer rezonansının şiddeti –ki azalım hızı grafiğinin maksimumu ile temsil edilmektedir– azalmıştır. Bu nedenle, toplam kütle artışı yer rezonansını gidermek için gerekli minimum sönüm miktarını aşağılara çekmesi beklenmektedir.



Şekil 5.17 : Coleman diyagramı, toplam kütle = 2000[kg].

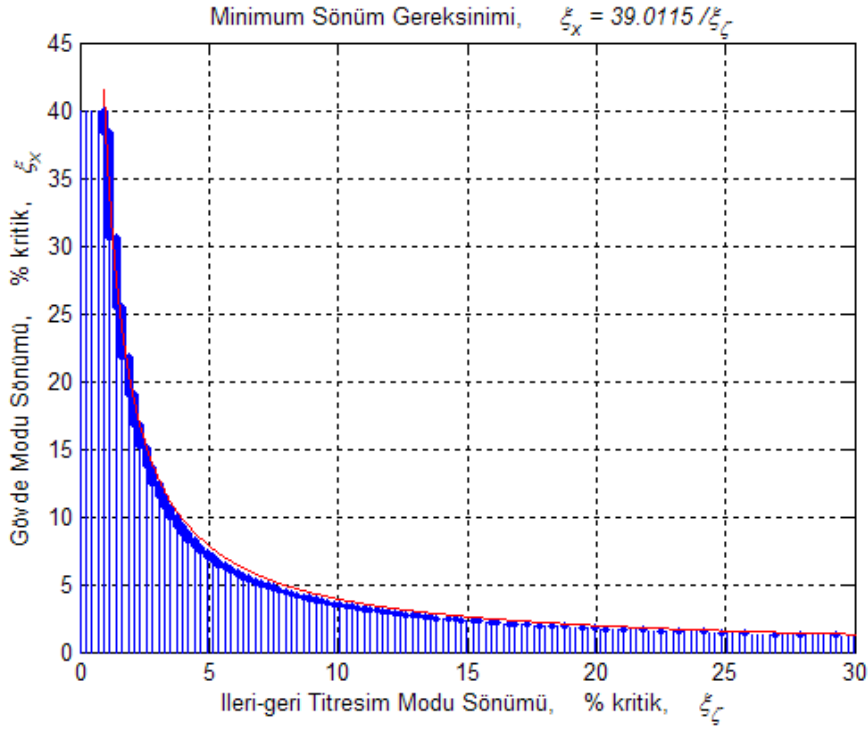


Şekil 5.18 : Azalım hızı diyagramı, toplam kütle = 2000[kg].

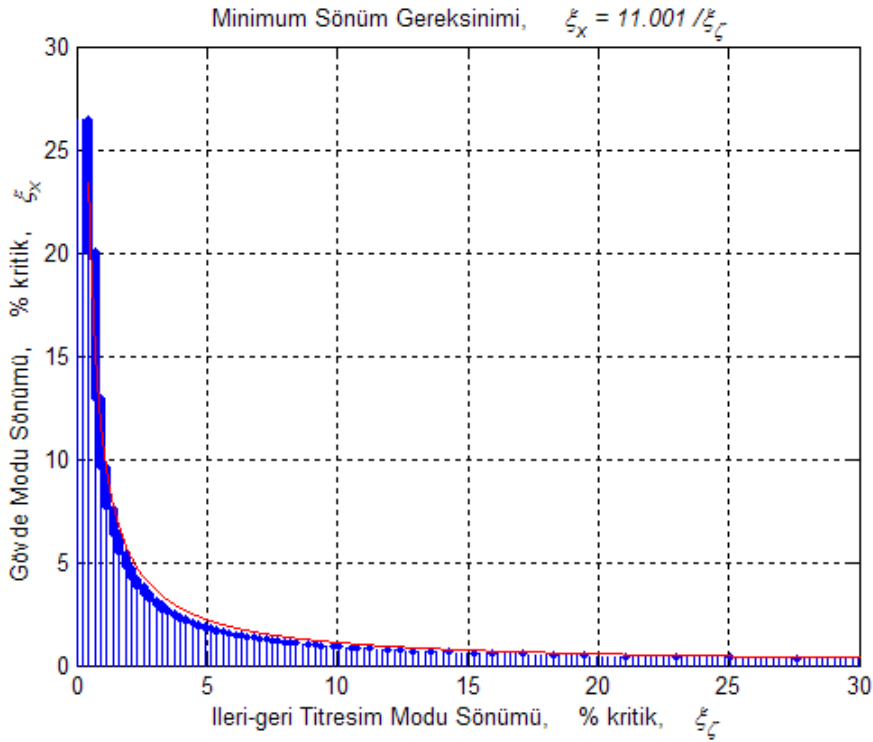
5.2.2 Minimum sönüm gereksinimi

İTÜ-HTH'ın toplam dört farklı kütle değeri için minimum sönüm gereksinimi tezin (3.4.2.7) bölümünde anlatıldığı yöntemle elde edilmiştir. Şekil 5.19-22 de sırasıyla

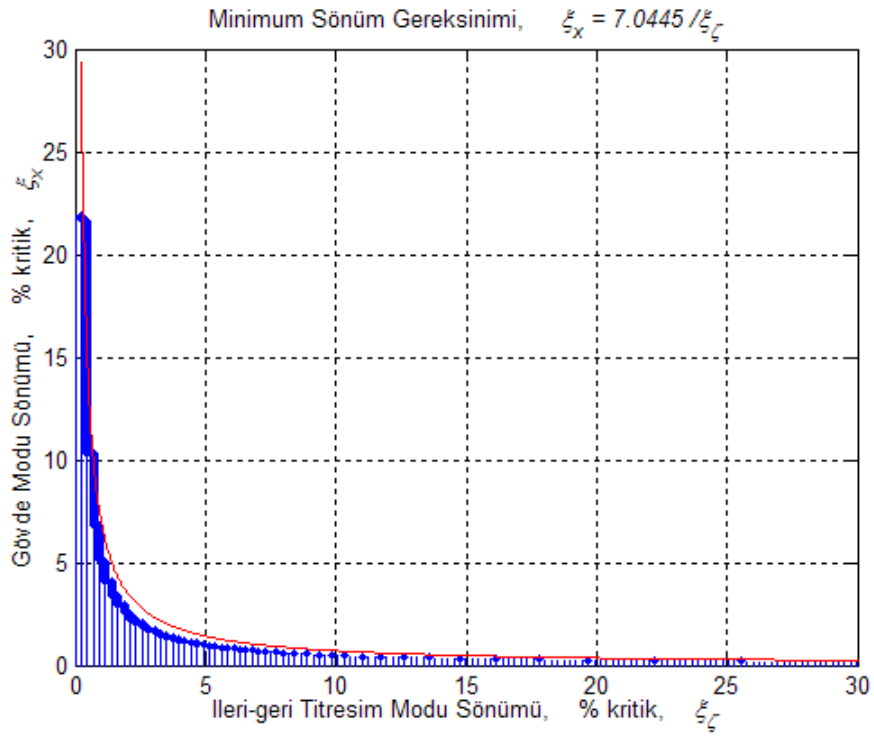
İTÜ-HTH'ın 391, 1000, 1500 ve 2000 [kg] toplam kütle değerlerine karşılık gelen minimum sönüm gereksinimi grafikleri boyutlu olarak verilmektedir.



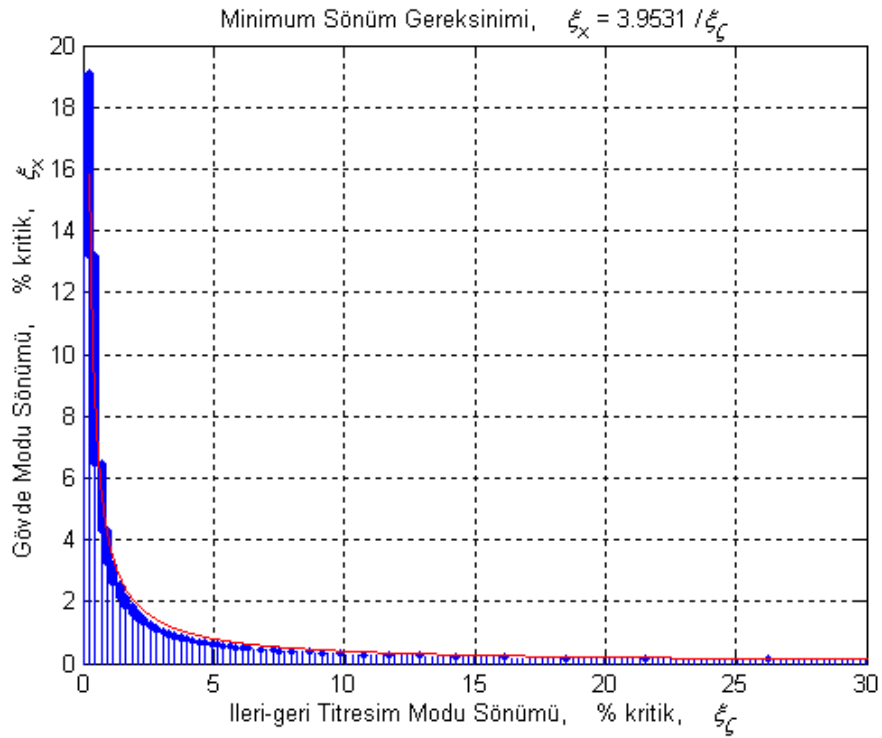
Şekil 5.19 : Toplam kütle = 391[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı



Şekil 5.20 : Toplam kütle = 1000[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı



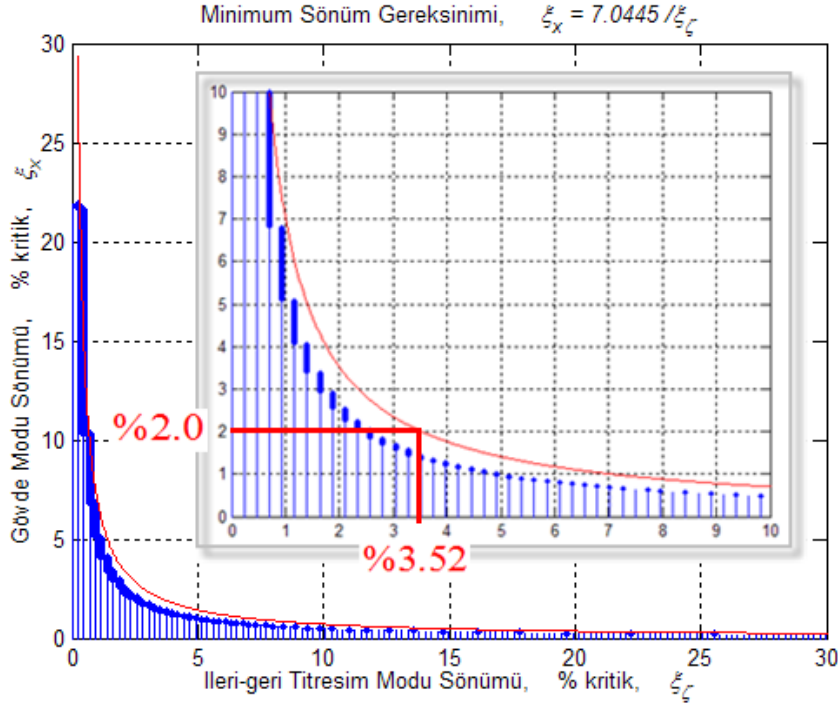
Şekil 5.21 : Toplam kütle = 1500[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı



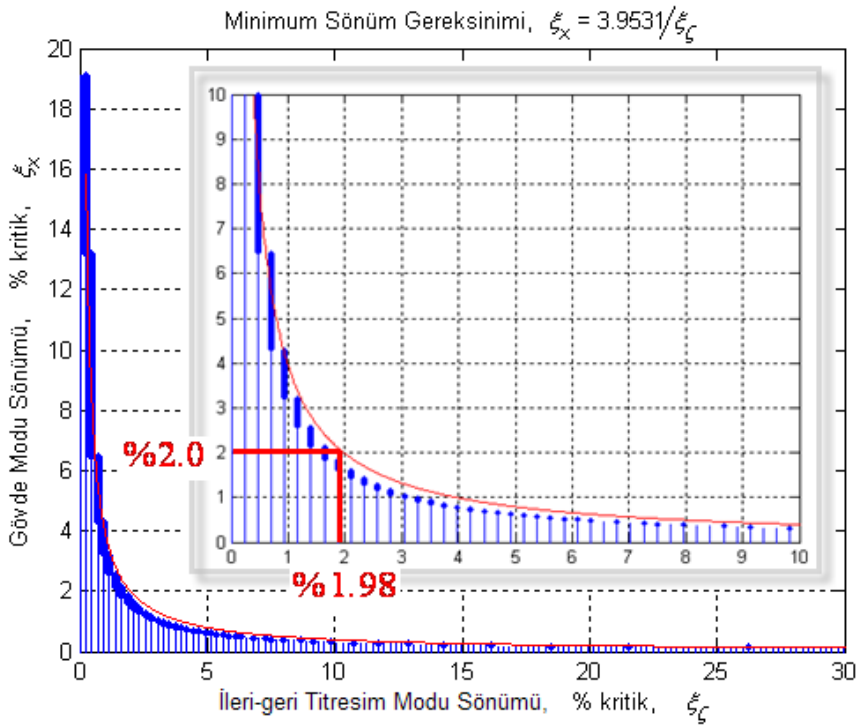
Şekil 5.22 : Toplam kütle = 2000[kg] için min. sönüm gereksinimi diyagramı

Şekil 5.23-24'te sırasıyla İTÜ-HTH'ın toplam 1500 ve 2000 [kg] lık toplam kütle değerleri için gövde ve rotorda bulunması gereken minimum % kritik viskoz sönüm

değerleri verilmektedir. Buna göre, gövdenin % 2'lik sönüm bir sönüm oranı içermesi halinde, 1500 ve 2000 [kg]'lık İTÜ-HTH için sırasıyla rotor üzerinde bulunması gereken minimum sönüm oranları % 3.52 (Şekil 5.23) ve % 1.98 (Şekil 5.24) dir.



Şekil 5.23 : İTÜ-HTH min. sönüm gereksinimi, toplam kütle = 1500[kg].



Şekil 5.24 : İTÜ-HTH min. sönüm gereksinimi, toplam kütle = 2000[kg].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1 Genel Değerlendirme

- Bu çalışmada, yer rezonansı, –literatürde yapılan en yaygın yaklaşımla– üç ve dört serbestlik dereceli en temel lineer mekanik sistemler vasıtasıyla aerodinamik etkiler ihmal edilerek modellenmiş ve incelenmiştir. Öncelikle ele alınan üç veya dört serbestlik dereceli yer rezonansı modelinin hareket denklemleri Lagrange denklemleri yöntemiyle bulunmuş, lineerleştirilmiş, koordinat dönüşümü uygulanmış ve özdeğer analiziyle Coleman diyagramı elde edilmiştir. Ayrıca, Coleman diyagramının, diğer yöntemlerle de (zaman cevabının FFT’sini alınması, KSFD yöntemi) elde edilebileceği gösterilmiştir. Farklı yöntemlerle elde edilen Coleman diyagramlarının uyum içinde olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra, üç ve dört serbestlik dereceli sistemler için belli başlangıç koşulları altında zaman cevapları elde edilmiş ve yer rezonansına ait bulgular saptanmıştır. Elde edilen zaman cevaplarıyla sistemin ilgili şartlar altındaki kararlılık durumu incelenmiştir. Yer rezonansı kararsızlığını gidermek için rotor ve gövde üzerine eklenmesi gereken sönüm miktarı, her iki sönüm değerinin çarpımının bir minimum değeri sağlaması kriterine göre seçilmektedir.

- Literatürden alınan sayısal veriler kullanılarak, üç serbestlik dereceli bir yer rezonansı modeli için geliştirilen ve teori bölümünde anlatılan inceleme yöntemlerinin doğruluğu sınanmış ve doğru sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

- Tezde, İTÜ-HTH’ın yer rezonansı analizi dört serbestlik dereceli model ile gerçekleştirilmektedir. Bu doğrultuda karşılaşılan en büyük zorluk, İTÜ-HTH’ın x ve y doğrultularındaki eşdeğer kütle değerlerinin tahmin edilmesi olup bununla beraber, deneysel İTÜ-HTH’ın doğal frekansları referans alınarak en yüklü haldeki İTÜ-HTH’ın eşdeğer kütleleri tahmin edilmiştir. İTÜ-HTH’ın yer rezonansı kararsızlığına maruz kalmaması için gerekli sönüm miktarı da üç serbestlik dereceli sistemin yer rezonansı modeli için geliştirilen sönüm optimizasyonu kodu ile belirlenmiştir.

- İTÜ-HTH'ın yer rezonansı analizinde karşılaşılan zorluklar ve görülen eksiklikler şunlardır. İTÜ-HTH rotoru düzlem-içi yumuşak yataksız bir rotordur. Bu tip bir rotor sistemine sahip bir yer rezonansı modeli, –geleneksel yöntemlerle– ancak rotorun eşdeğer parametrelerinin elde edilmesiyle oluşturulabilmektedir. Bu amaçla, yataksız bir rotor olan İTÜ-HTH rotoruna, mafsallı bir rotor yaklaşımında bulunmaktadır. İTÜ-HTH palinin eşdeğer burulma yay katsayısının hesabında, ABAQUS'ten elde edilen palin ileri-geri titreşim modu frekans değerleri düzenlemeye gidilerek kullanılmıştır. Burada, ABAQUS'ün hesapladığı frekans değerlerinin (vç) ele alınan rijit, eşdeğer mafsal mesafeli, ve eşdeğer burulma yay katsayılı teorik pal modelini temsil etmede yetersiz kaldığı anlaşılmıştır. Ayrıca, ABAQUS'ün ileri-geri titreşim yönündeki geometrik direngenlik etkilerini hassas bir şekilde direngenlik matrisine dahil etmediği düşünülmektedir. Bu aşamada, ABAQUS'te modellenen İTÜ-HTH palinin değişik dönme hızlarında ölçüm içeren deneysel bir çalışmadan yoksun oluşu ciddi oranda hissedilmektedir. Başka bir ifade ile, İTÜ-HTH palinin dönme hızına bağlı doğal frekanslarının deneysel olarak elde edilmesi gerektiği ve bu sonuçların çok yararlı olacağı kesindir. Yukarıda bahse konu olan hususlar dikkate alınarak rotor üzerinde sağlanması gereken sönüm miktarı seçilirken Şekil 5.19-24'teki grafiklerden yararlanılabilir.

- Yer rezonansının olumsuz etkilerini azaltmak için önerilebilecek diğer bir yöntem, gövde frekanslarının kararsızlık bölgesi dışına veya rotorun %40-%120 çalışma bölgesi dışına ötelenmesi şeklindedir. Fakat, İTÜ-HTH'ın yer rezonansı sorunun bu şekilde çözümü pek uygulanabilir nitelikte olmamakla beraber İTÜ-HTH'ın kızak tasarımında bir takım düzenlemelere (geometri, malzeme, gövde ile bağlantı noktaları) başvurulabilir. Böyle bir düzenleme yapıldığı takdirde, gövde ve rotora tezde belirtilen miktarlardan daha az seviyede sönüm gerekebilir.

6.2 İleride Yapılacak Çalışmalar

İleride, bütün alt sistemler İTÜ-HTH'a eklendiğinde, gövdenin doğal frekansları ölçülmeli, yer rezonansı analizleri tekrar edilmeli ve gerekli minimum sönüm miktarı bu son durum dikkate alınarak elde edilmelidir.

İTÜ-HTH palinin dönme hızına bağlı ileri-geri yöndeki doğal frekansları, deneysel olarak elde edilmelidir. Bunun için bir rotor test düzeneğinin (rotor test facility, whirl tower) kurulması çok faydalı olacaktır. Bunun yanı sıra, rotor test düzeneği, palin dönme hızına bağlı mekanik özellikleri dışında, palin farklı hücum açılarında gerekli kontrol yüklerinin elde edilmesi veya elastik kirişte meydana gelen dinamik gerilmelerin belirlenmesi gibi birçok amaca hizmet edebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Leishman, G.**, 2006. *Principles of Helicopter Aerodynamics*, 2nd Ed., Cambridge University Press, New York.
- [2] **İbacoğlu, H.**, 2007. Helikopter Ön Tasarım Otomasyonu, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [3] **Johnson, W.**, 1980. *Helicopter Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [4] **Prouty, R. W.**, 1998. *Military Helicopter Design Technology*, Krieger Publishing Company, Florida.
- [5] **Watkinson, J.**, *The Art of the Helicopter*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
- [6] **Friedmann, P. P., ve Hodges, D. H.**, 2003. Rotary Wing Aeroelasticity – A Historical Perspective, *Journal of Aircraft*, vol. **40**, no.6, pp. 1019-1046.
- [7] **Hodges, D.**, 2004. Lecture Notes from Distance Learning DVDs, Georgia Institute of Technology.
- [8] **Turhan, Ö.**, 2007. Ders notları, Lineer Olmayan Titreşimler.
- [9] **Nahas, M. N.**, 1976-77, Development of An Analysis Technique for Self-Excited Oscillations in Aircraft, *M.Sc. Thesis*, Cranfield Institute of Technology.
- [10] **Irvine T.**, 2005. Helicopter Ground Resonance Revision B, <http://www.cs.wright.edu/~jslater/SDTCOutreachWebsite/helicopter%20ground%20resonance.pdf>, alındığı tarih 21.04.2009.
- [11] **Url-1** <<http://www.fwcvhpa.org/fw/ground.htm>>, alındığı tarih 21.04.2009.
- [12] **Url-2** <www.fas.org/man/dod-101/sys/ac/sh-2.htm>, alındığı tarih 21.04.2009.
- [13] **Url-3** <www.helispot.com>, alındığı tarih 21.04.2009.
- [14] **Url-4** <www.atsb.gov.au/publications/investigation_reports/1969/AAIR/pdf/196900034.pdf>, alındığı tarih 21.04.2009.
- [15] **Newman, S.**, 1994. *The Foundations of Helicopter Flight*, Halsted Press, London.

- [16] **Coleman, R. P., ve Feingold A. M.**, 1958. Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Helicopter Rotors with Hinged Blades, NACA Report 1351.
- [17] **Deutsch, M. L.**, 1946. Ground Vibration on Helicopters, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. **13**, no. 5, pp. 223-228.
- [18] **Horvay, G.**, 1946. Vibrations of a Helicopter on the Ground, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. **13**, no. 11, pp. 605-619.
- [19] **Howarth, R. M., ve Jones, C. H.**, 1954. Ground Resonance of the Helicopter, *The Journal of the Helicopter Association of Great Britain*, Vol. **7**, no. 4, pp. 167-196.
- [20] **Leone, P. F.**, 1956. Mechanical Stability of a Two-Bladed Cantilever Helicopter Rotor, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. **23**, no.7, pp. 633-638.
- [21] **Hooper, W. E.**, 1959. Helicopter Ground Resonance, *Aircraft Engineering*, Vol. **31**, no. 360, pp. 32-39.
- [22] **Gabel, R., ve Capurso, V.**, 1962. Exact Mechanical Instability Boundaries as Determined from the Coleman Equation, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **7**, no. 1, pp. 17-23.
- [23] **Price, H. L.**, 1960. The Avoidance of Ground Resonance, *Aircraft Engineering*, Vol. **32**, no. 376, pp. 156-160 ve no. 377, pp. 195-200.
- [24] **Price, H. L.**, 1962. Simplified Helicopter Ground Resonance Stability Boundaries, *Aircraft Engineering*, Vol. **34**, no. 404, pp. 294-299 ve no. 405, pp. 332-334.
- [25] **Donham, R. E., Cardinale, S. V., ve Sachs, I. B.**, 1969. Ground and Air Resonance Characteristics of a Soft In-Plane Rigid Rotor System, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **14**, no. 4, pp. 33-41.
- [26] **King, S. P.**, 1973. Simplified Ground Resonance Analysis, Unpublished Note, Westland Helicopter Limited.
- [27] **Mil, M. L., ve diğerleri**, 1968. Helicopters-Calculation and Design-Vol.II, Vibration and Dynamic Stability, NASA TT F-159.
- [28] **Done, G. T. S.**, 1974. A Simplified Approach to Helicopter Ground Resonance, *The Aeronautical Journal*, Vol. **78**, no. 761, pp. 204-208.

- [29] **Hammond, C. E.**, 1974. An Application of Floquet Theory to Prediction of Mechanical Instability, Rotorcraft Dynamics. NASA SP-352, pp. 147-158, Washington, D.C.
- [30] **Genta, G.**, 2005. *Dynamics of Rotating Systems*, Springer, New York.
- [31] **Hochstadt, H.**, 1964. *Differential Equations*, Dover Publications, New York.
- [32] **Bielawa, R. L.**, 2006. *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*, 2nd Ed., AIAA, Virginia.
- [33] **Ehrich, F. F.**, 1992. *Handbook of Rotordynamics*, McGraw-Hill.
- [34] **Meirovitch, L.**, 2001. *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill, Boston.
- [35] **Bramwell, A. R. S., Done, G. T. S., ve Balmford, D.**, 2001. *Bramwell's Helicopter Dynamics*, 2nd Ed., Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [36] **Hodges, D. H.**, 1979. A Theoretical Technique for Analyzing Aeroelastic Stability of Bearingless Rotors, *AIAA Journal*, Vol. **17**, no. 4, pp. 400-407.
- [37] **Friedmann, P. P., Vankatesan, C.**, 1985. Coupled helicopter rotor/body aeromechanical stability comparison of theoretical and experimental results, *Journal of Aircraft*, Vol. **22**, no. 2, pp. 148-155.
- [38] **Schröder, R.**, 1974. A Spatial Theory for the Ground Resonance of Helicopter, DLR-FB pp. 73-84.
- [39] **Robinson C. S., King R. L., Wood E. R.**, 2004. Non-linear simulation of coupled rotor-fuselage response using symbolically derived equations of motion. Part 1: derivation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. **218**, no. 4, pp. 1-9.
- [40] **Chopra, I.**, Helicopter Dynamics (ENAE 633), Lecture Notes, University of Maryland.
- [41] ANSYS, Release 11.0 Documentation.
- [42] **Greenwood, D.T.**, 1988. *Principles of Dynamics*, 2nd Ed., Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [43] **Inman, D. J.**, 2001. *Engineering Vibration*, 2nd Ed., Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [44] MATLAB, Version 7.6.0.324 (R2008a).
- [45] **Bucher, I., ve Ewins D. J.**, 1997. Multidimensional Decomposition of Time-Varying Vibration Response Signals in Rotating Machinery,

- Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. **11**, no. 4, pp. 577-601.
- [46] **Gürgöze, M.**, 1984. *Analitik Metotlarla Titreşimlerin Etüdü*, İTÜ, Elektrik–Elektronik Fakültesi, Ofset Baskı Atölyesi, İstanbul.
- [47] **Monterrubio, L., ve Sharf, I.**, 2002. Influence of Landing-Gear Design on Helicopter Ground Resonance, *Canadian Aeronautics and Space Journal*, Vol. **48**, no. 2, pp. 133-144.
- [48] MSC.ADAMS Version 2007 r1, Build 2006.1.0 on Mar 28 2007, Adams/Vibration Help.
- [49] ABAQUS v6.8., Documentation.
- [50] **Körük, H., ve Şanlıtürk, K. Y.**, 2007. Validation of Finite Element Models of Structures with Riveted Joints Using Vibration Data, The 36th International Congress and Exhibition on Noise Control Engineering, 28-31 August 2007. Inter-noise 2007, Istanbul, Turkey.
- [51] **Körük, H.**, 2008. Measurement, Modelling and Modal Analyses of Helicopter Structures, *M.Sc. Thesis*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [52] **Mitra, S. K.**, 2006. *Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York.
- [53] **Adams, M. L.**, 2001. *Rotating Machinery Vibration, From Analysis to Troubleshooting*, Marcel Dekker, New York.
- [54] **Konstanzer, P., ve diğerleri**, 2008. Recent advances in Eurocopter’s passive and active vibration control, American Helicopter Society 64th Annual Forum, Montréal, Canada.
- [55] **Manimala, B., Walker, D., ve Padfield, G.**, 2005. Rotorcraft Simulation Modelling and Validation for Control Design and Load Prediction, Presented at the 31st European Rotorcraft Forum, 13-15 September 2005, Florance, Italy.
- [56] **Halfman, R. L.**, 1962. *Dynamics. Vol II: Systems–Variational methods and relativity*, Addison-Wesley.

EKLER

EK A.1 : Trigonometrik Bağıntılar

EK A.2 : Fourier Koordinat Dönüşümü

EK A.3 : Kısa-Sürelî Fourier Dönüşümü

EK A.4 : Deney ile hidrolik bir damperin eşdeğer viskoz sönüm katsayısının elde edilmesi

EK A.1

$$\sin(m\psi_k) \cdot \sin(n\psi_k) = \frac{1}{2} \cos(m-n)\psi_k - \frac{1}{2} \cos(m+n)\psi_k \quad (\text{A.1.1})$$

$$\sin(m\psi_k) \cdot \cos(n\psi_k) = \frac{1}{2} \sin(m-n)\psi_k + \frac{1}{2} \sin(m+n)\psi_k \quad (\text{A.1.2})$$

$$\cos(m\psi_k) \cdot \sin(n\psi_k) = -\frac{1}{2} \sin(m-n)\psi_k + \frac{1}{2} \sin(m+n)\psi_k \quad (\text{A.1.3})$$

$$\cos(m\psi_k) \cdot \cos(n\psi_k) = \frac{1}{2} \cos(m-n)\psi_k + \frac{1}{2} \cos(m+n)\psi_k \quad (\text{A.1.4})$$

$$\sum_{k=1}^b \cos \psi_k = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

$$\sum_{k=1}^b \sin \psi_k = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

EK A.2

Bu koordinat dönüşümüyle, her bir palin dönen eksen takımına göre hareketini belirleyen b adet $\zeta_{(k)}$ genelleştirilmiş koordinatı terkedilir ve tüm pallerin ortak kütle merkezinin sabit bir eksen takımına göre düzlem içinde iki doğrultuda hareketini veren yeni genelleştirilmiş koordinatlara: ζ_0 , ζ_{nc} , ζ_{ns} ve ζ_d geçilir.

$$\zeta_0 = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \zeta_{(k)} \quad (\text{A.2.1})$$

$$\zeta_{nc} = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^b \zeta_{(k)} \cos n\psi_k \quad (\text{A.2.2})$$

$$\zeta_{ns} = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^b \zeta_{(k)} \sin n\psi_k \quad (\text{A.2.3})$$

$$\zeta_d = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \zeta_{(k)} (-1)^k \quad (\text{A.2.4})$$

$$\zeta_{(k)} = \begin{cases} \zeta_0 + \sum_{n=1}^{(b-1)/2} (\zeta_{nc} \cos n\psi_k + \zeta_{ns} \sin n\psi_k), & b = \text{tek} \\ \zeta_0 + \sum_{n=1}^{(b-2)/2} (\zeta_{nc} \cos n\psi_k + \zeta_{ns} \sin n\psi_k) + \zeta_d (-1)^k, & b = \text{çift} \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

Dört palli bir rotorun için lineerleştirilmiş periyodik katsayılı hareket denklemlerinde kullanılacak FKD bağıntıları (A.2.6), (A.2.7) ve (A.2.8)'de verilmiştir.

$$\sum_{k=1}^b \zeta_k \sin \psi_k = \frac{b}{2} \zeta_s \quad (\text{A.2.6a})$$

$$\sum_{k=1}^b \zeta_k \cos \psi_k = \frac{b}{2} \zeta_c \quad (\text{A.2.6b})$$

(A.2.6)'daki ifadelerin zamana göre türevinin alınıp düzenlenmesiyle, (A.2.7) elde edilir.

$$\sum_{k=1}^b \dot{\zeta}_k \sin \psi_k = \frac{b}{2} (\dot{\zeta}_s - \Omega \zeta_c) \quad (\text{A.2.7a})$$

$$\sum_{k=1}^b \dot{\zeta}_k \cos \psi_k = \frac{b}{2} (\dot{\zeta}_c + \Omega \zeta_s) \quad (\text{A.2.7b})$$

(A.2.7)'daki ifadelerin zamana göre türevinin alınıp düzenlenmesiyle, (A.2.8) elde edilir.

$$\sum_{k=1}^b \ddot{\zeta}_k \sin \psi_k = \frac{b}{2} (\ddot{\zeta}_s - 2\Omega \dot{\zeta}_c - \Omega^2 \zeta_s) \quad (\text{A.2.8a})$$

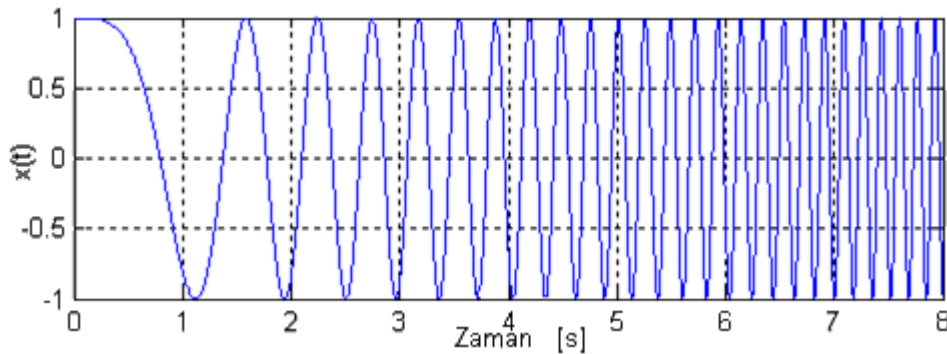
$$\sum_{k=1}^b \ddot{\zeta}_k \cos \psi_k = \frac{b}{2} (\ddot{\zeta}_c + 2\Omega \dot{\zeta}_s - \Omega^2 \zeta_c) \quad (\text{A.2.8b})$$

EK A.3

Zamanın fonksiyonu olarak tanımlanmış bir $x(t)$ sinyali sorunsuz olarak zaman ekseninde temsil edilebilmektedir. Aynı şekilde, Fourier dönüşümü kullanılarak frekans ekseninde $X(\omega)$ genliği ile de temsil edilebilmektedir. Buna karşılık, ses işleme gibi birçok uygulamada, bir sinyalin zamanla değişen frekans içeriği araştırma konusudur. Bu tip, spektrumu zamanla değişen sinyaller durağan olmayan (non-stationary) sinyaller olarak adlandırılmaktadır ve standart Fourier dönüşümü bu tarz sinyalleri analiz etmede yetersiz kalmaktadır. Çünkü sürekli Fourier dönüşümünün altında yatan temel kabul: periyodik olmayan bir $x(t)$ fonksiyonunun, periyodu sonsuz ($T=2\pi/\omega \rightarrow \infty$) olan periyodik bir fonksiyonmuşçasına,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.3.1})$$

ele alınmasıdır. Bu nedenle, Fourier dönüşümü sadece, incelenen sinyalin zamandan bağımsız olan frekans bileşenleri hakkında bilgi vermektedir. Diğer bir ifadeyle, zamanla değişen frekans kavramından söz etmek mümkün değildir. Durağan olmayan sinyallere: ses sinyalleri, rotor dinamiğinde rotorların hızlanması ve yavaşlaması esnasında meydana gelen titreşim sinyalleri ve sismik sinyaller örnek olarak verilebilir.



Şekil A.3.1 : Durağan olmayan sinyal, $x(t)=\sin(\omega(t).t)$

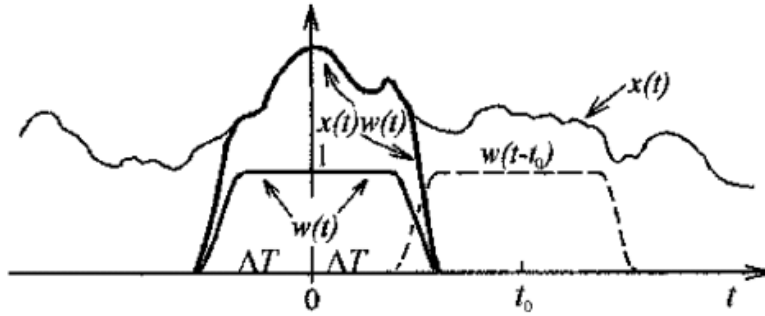
Şekil A.3.1'deki gibi durağan olmayan sinyallerin zaman-frekans alanında incelemesi için farklı yöntemler geliştirilmiştir. KSFD (Kısa-Süreli Fourier Dönüşümü) ve Dalgacık (Wavelet) dönüşümleri bunlardan birkaçıdır. Bu çalışmada KSFD üzerinde durulmaktadır.

KSFD, Dennis Gabor (1946) tarafından geliştirilmiştir. KSFD, belli bir uzunluktaki zaman verisinin ufak bir kesidinin pencereleme fonksiyonu vasıtasıyla elde edilmesi

ve bu ufak zaman kesidindeki veriye Fourier dönüşümünün uygulanması esasına dayanmaktadır. Matematiksel olarak sürekli-zaman için KSFD şu şekilde ifade edilmektedir:

$$KSFD\{x(t)\} \equiv X_{mn}(\omega) = \int_{-n.t_0 - \Delta T}^{n.t_0 + \Delta T} x(t) \cdot w(t - n.t_0) e^{-jm\omega_0 t} dt \quad (\text{A.3.2})$$

Bu ifadede [53] geçen $\Delta T = t_0/2$, $\pm n = 0, 1, 2, \dots, N$ ve $\pm m = 0, 1, 2, \dots, M$.



Şekil A.3.2 : Bir $x(t)$ fonksiyonun KSFD yöntemine göre pencerelenmesi [53].

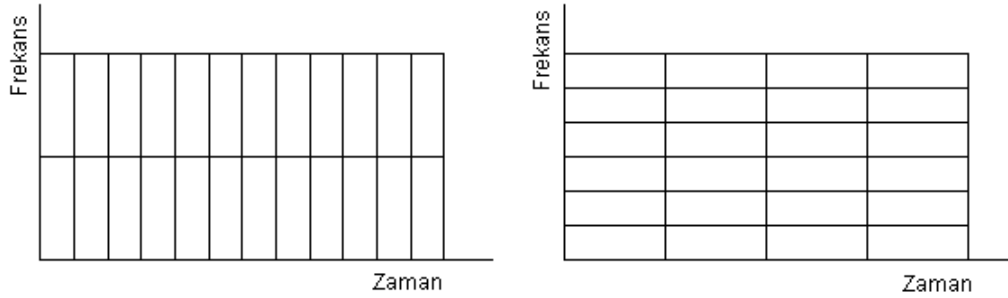
$w(t)$ sıfır civarına merkezlenmiş pencereleme fonksiyonunu, $x(t)$ ise dönüşümü yapılacak fonksiyonu, göstermektedir. $X_{mn}(\omega)$ ise esasen $x(t) \cdot w(t - nt_0)$ ifadesinin Fourier dönüşümüdür ve frekans-zaman alanında genliği ve fazı olan kompleks bir fonksiyonu temsil etmektedir. $x(t)$ fonksiyonu, belli bir nt_0 anına merkezlenmiş olan $w(t - nt_0)$ pencere fonksiyonu ile çarpılarak pencerelenmektedir. $x(t)$ fonksiyonu için yapılan bu pencereleme işlemi, her defasında bir önceki pencereye göre t_0 oranında ötelenmesiyle yapılmaktadır:

$$x(t) \cdot w(t), x(t) \cdot w(t - t_0), x(t) \cdot w(t - 2t_0), \dots, x(t) \cdot w(t - nt_0)$$

nt_0 zaman indisi genellikle “yavaşlatılmış” zaman olarak kabul edilmektedir. Pencereleme fonksiyonlarının arasında belli bir oranda örtüşmenin sağlanması için nt_0 ’ın t zamanından daha az çözünürlükte olması gerekmektedir. Ayrıca, (A.3.2) ifadesinde geçen ω_0 ve t_0 sabittirler, yani frekans ve zaman çözünürlüğü Şekil A.3.3’te görüldüğü gibi sabittir.

Spektrogram, durağan olmayan (spektrumu zamanla değişen) bir sinyalin frekans-zaman düzlemindeki enerji dağılımını tanımlayan bir matris olarak tanımlanabilir. Spectrogram fonksiyonu, $KSFD\{x(t)\}$ ’nin genliğinin karesi yani, $|X_{mn}(\omega)|^2$ olarak tanımlanmaktadır. Seçilen pencere fonksiyonun genişliği, spectrogram’ın

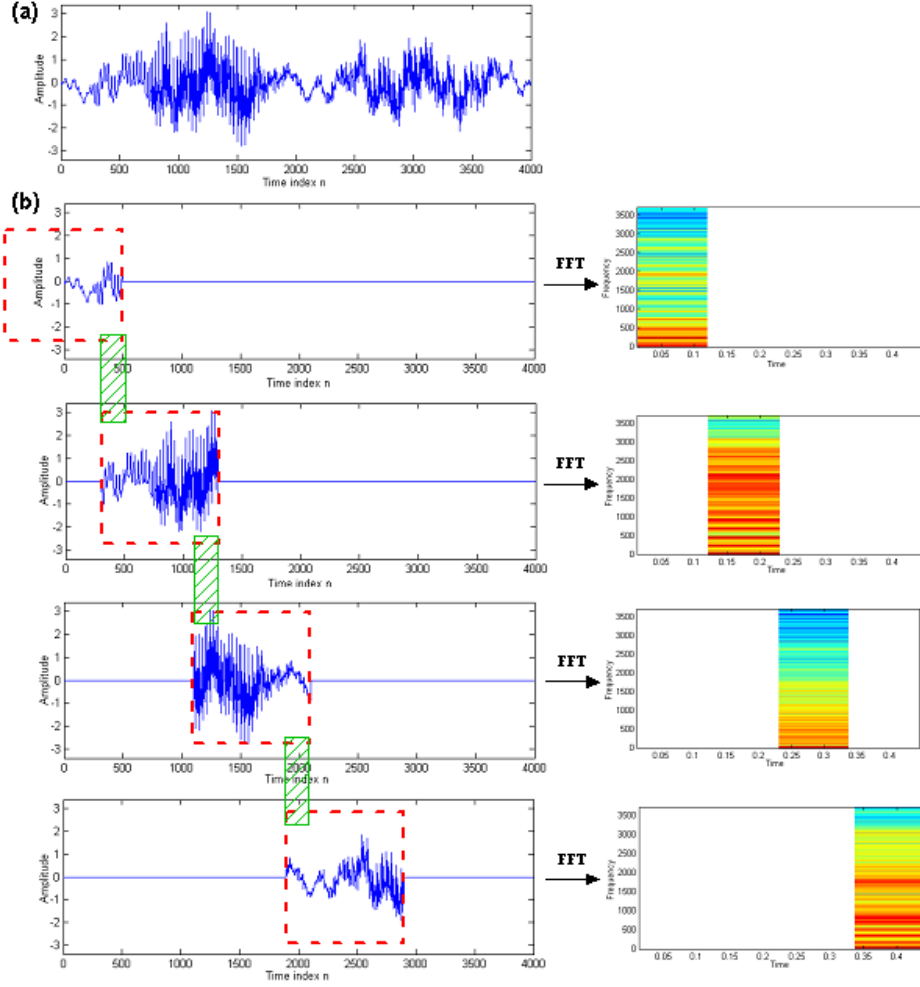
özünürlüğünü doğrudan etkilemektedir. KSFD’de frekans ve zaman çözünürlüğü birbirileriyle ters orantılı olgulardır.



Şekil A.3.3 : KSFD’de frekans-zaman çözünürlüğü kavramı

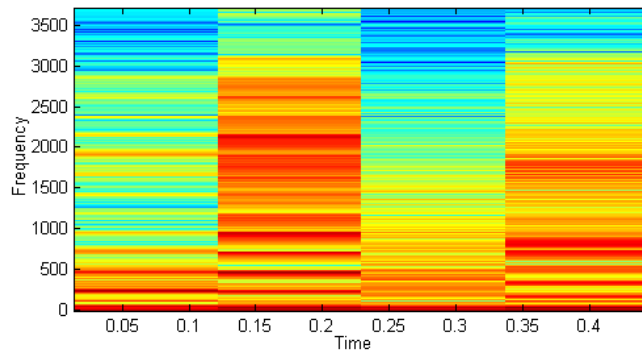
Şekil A.3.3’te soldaki spektrogramda zaman çözünürlüğünün iyi olduğu buna karşılıksa, sağdaki spektrogramda frekans çözünürlüğünün iyi olduğu görülmektedir. Şekil A.3.3’ten de görüldüğü gibi KSFD yöntemi sabit frekans çözünürlüğüne sahiptir ve bu durum genellikle, düşük ve yüksek frekansta meydana gelen değişimlerin KSFD ile ortaya konmasını güçleştirmektedir. Bir amaçla, bu eksikliği gidermek için sabit bir çözünürlük yerine çoklu çözünürlüğe sahip Dalgacık (Wavelet) dönüşümleri geliştirilmiştir.

KSFD’nin işleyişine örnek olarak Şekil A.3.4’teki konuşma sinyalinin KSFD’si ele alınmaktadır. Şekil A.3.4 (a)’da 4001 örnek uzunluğunda, 7418 Hz’te örneklenmiş bir konuşma sinyalinin [52] Hamming tipinde bir pencereleme fonksiyonu, 1000 adet verilik bir pencereleme genişliği ve 200 adet verilik bir örtüşme oranı kullanılarak spektrogram’ının oluşturulması aşama aşama gösterilmiştir.



Şekil A.3.4 : KSFD'nin işleyişi

Şekil A.3.5'te ise bu konuşma sinyalinin tam spektrogramı verilmektedir. Şekil A.3.5'teki spektrogramda frekans çözünürlüğünün iyi, fakat zaman çözünürlüğü yetersiz olduğu görülmektedir. Bu durumu telafi etmek için ise, öncelikle pencere genişliği küçültülmelidir.



Şekil A.3.5 : Örnek konuşma sinyalinin spektrogramı.

EK A.4

Bu bölümde, İTÜ-HTH’da ileri-geri titreşim modu damperi olarak kullanılması düşünülen boşluksuz bir hidrolik damperin (Şekil A.4.1) farklı ayar kademelerine göre, eşdeğer viskoz sönüm katsayısı ($F = c_{eq} \cdot \dot{x}$) elde edilmektedir.



Şekil A.4.1 : Hidrolik damper

Eşdeğer viskoz sönüm katsayısını elde etmek için bir histeresiz çevrimi boyunca harcanan enerji tanımından faydalanılmaktadır. Viskoz sönümlü bir sistemde bir çevrim boyunca harcanan enerji (A.4.1)’deki gibidir.

$$\Delta E = \oint F_d dx = \int_0^{2\pi/\omega} c_{eq} \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi/\omega} c_{eq} \dot{x}^2 dt \quad (\text{A.4.1})$$

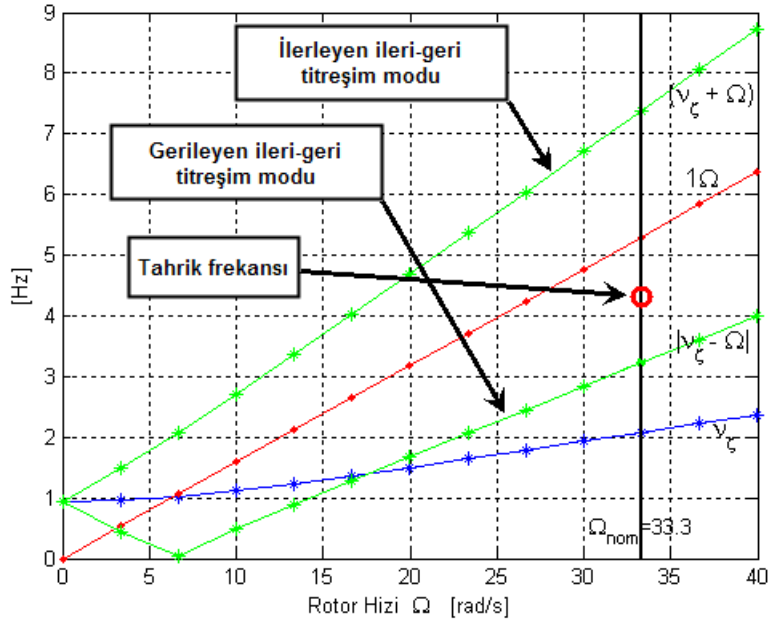
Viskoz sönümlü sistemin daimi rejimdeki cevabı $x = X_0 \sin(\omega t)$, $\dot{x} = \omega X_0 \cos(\omega t)$ çözüm kabulü yapıldığı takdirde, (A.4.1) ifadesi (A.4.2) halini alır.

$$\Delta E = c_{eq} \int_0^{2\pi/\omega} (\omega^2 X_0^2 \cos^2(\omega t)) dt = \pi c_{eq} \omega X_0^2 \quad (\text{A.4.2})$$

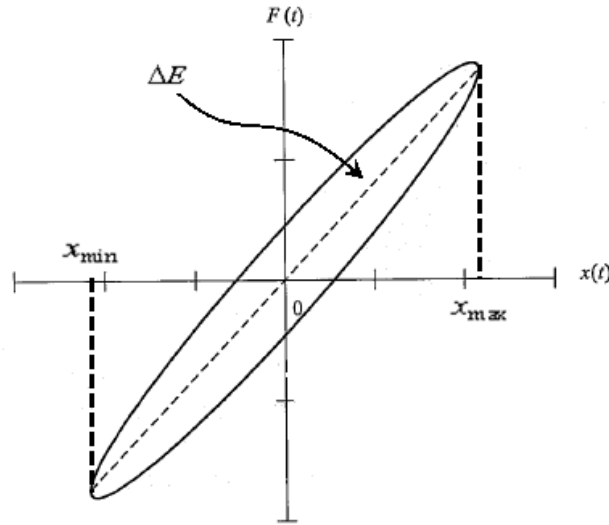
$$c_{eq} = \frac{\Delta E}{\pi \omega X_0^2} \quad (\text{A.4.3})$$

Şekil A.4.1’de görülen deney düzeneğinde, damper sol ucundan hareket etmeyecek şekilde sabitlenmiştir. Dampere, sağ tarafında bulunan hidrolik silindir vasıtasıyla $x(t) = X_0 \cdot \sin(2\pi f)$ şeklinde aksel yönde, basit harmonik bir hareket uygulanmakta ve oluşan aksel kuvvet hidrolik pistonun ucundaki (Şekil A.4.1) yük hücresi ($F_{\max}=1[\text{kN}]$) tarafından ölçülmektedir. Tahrik frekansı, f için rotor dönme

hızı olan 5.3[Hz] ile gerileyen ileri-geri titreşim modu frekansı 3.22[Hz] arasında bir değer olan 4.22[Hz] seçilmiştir.



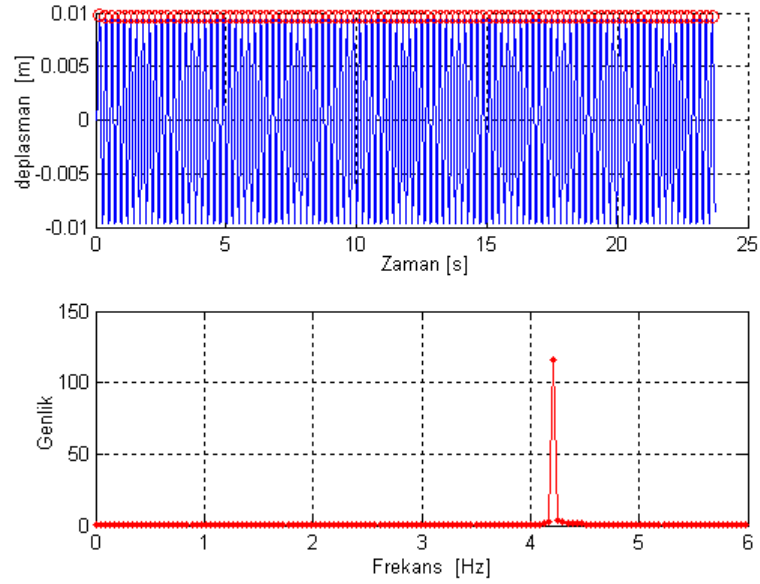
Şekil A.4.2 : Hidrolik damperin eksenel yönde tahrik edildiği frekans değeri.



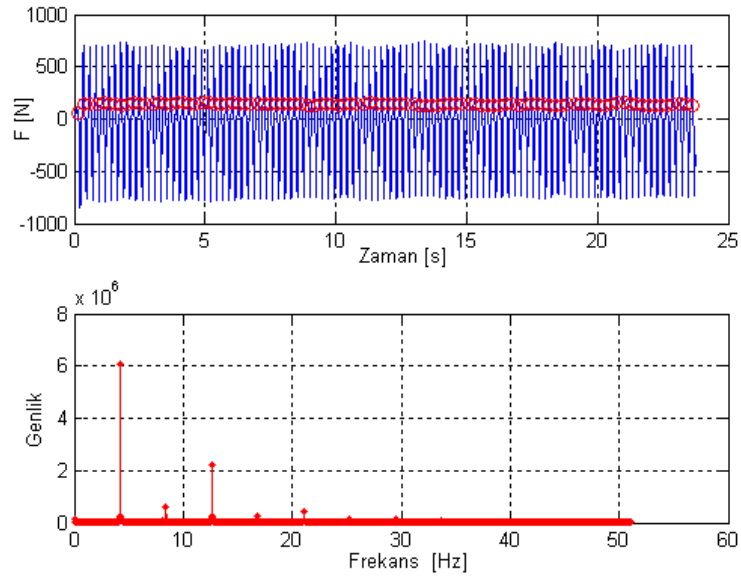
Şekil A.4.3 : Viskoz sönümlü ideal bir sistemin tek bir histeresis eğrisi.

Damperin (Şekil A.4.1) deneysel olarak elde edilen deplasman (Şekil A.4.4) ve kuvvet (Şekil A.4.5) verileri kullanılarak 100 çevrim için histeresiz eğrileri elde edilmekte (Şekil A.4.6), ve her bir çevrim için genlik değeri $X_0 = \frac{|x_{min}| + |x_{max}|}{2}$ (Şekil A.4.3) olacak şekilde hesaplanıp, (A.4.3) ifadesinde yerine konmasıyla, her bir

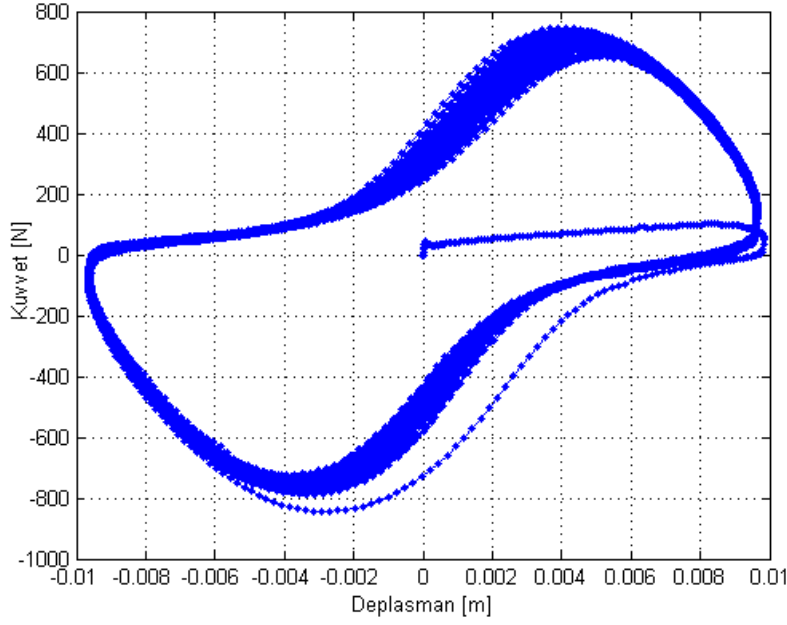
histeresiz çevrimi için bir eşdeğer sönüm katsayısı elde edilmektedir. Son olarak, her bir histeresiz döngüsü için hesaplanan eşdeğer sönüm katsayılarının ortalamaları alınarak, damperi temsil eden bir eşdeğer sönüm katsayısı (Şekil A.4.7) elde edilmektedir.



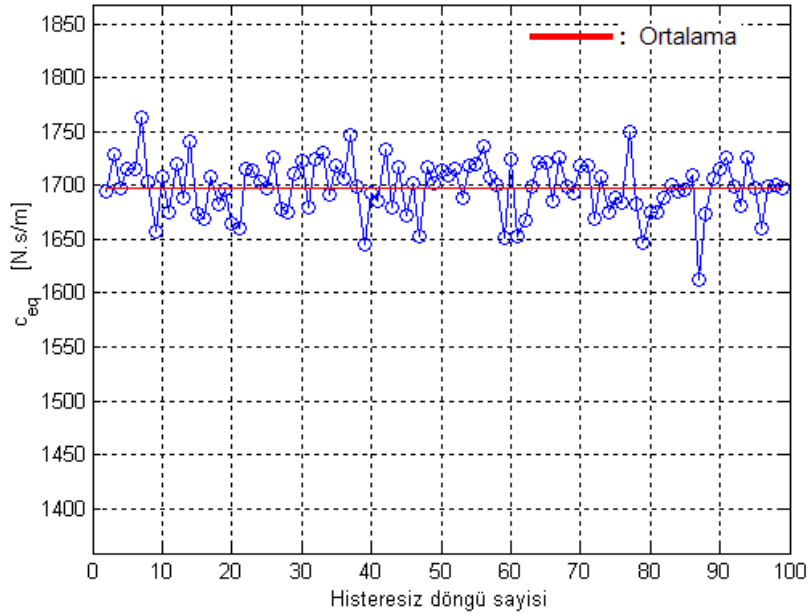
Şekil A.4.4 : Örnek bir tahrik sinyalinin, a) zaman, b) frekans içeriği.



Şekil A.4.5 : Örnek bir çıktı sinyalinin, a) zaman, b) frekans içeriği.

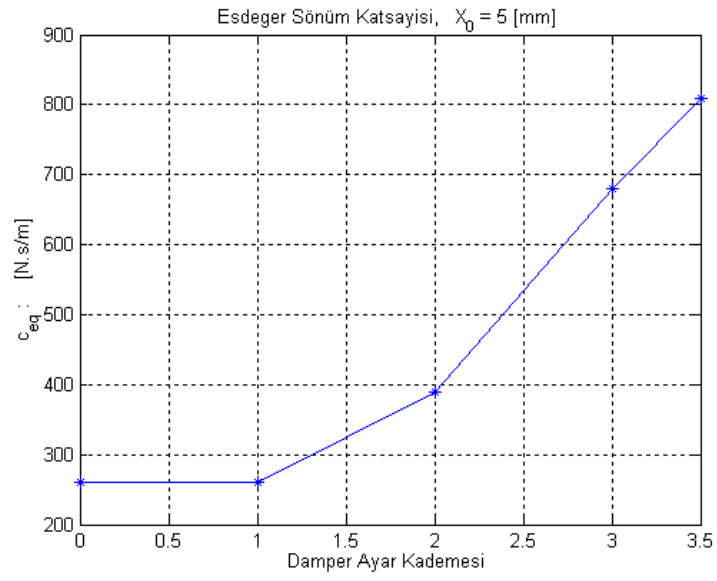


Şekil A.4.6 : Örnek bir deneyin histeresiz eğrileri.

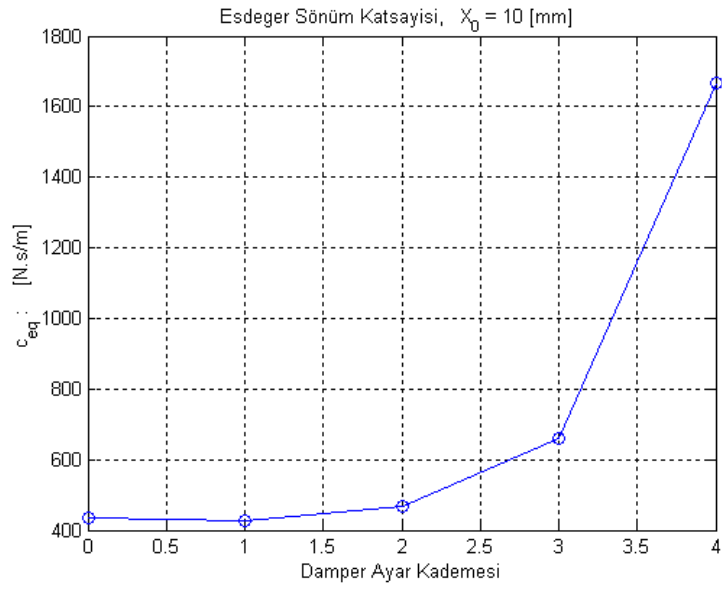


Şekil A.4.7 : Eşdeğer sönüm katsayısı.

Eşdeğer sönüm katsayıları, hidrolik damperin farklı ayar kademelerine bağlı olarak eşde edilmiştir. Şekil A.4.8 ve A.4.9 da sırasıyla $X_0 = 5[\text{mm}]$ ve $X_0 = 10[\text{mm}]$ genlik değerleri için elde edilen eşdeğer sönüm katsayıları damper ayar kademesine bağlı olarak verilmiştir.



Şekil A.4.8 : Eşdeğer sönüm katsayısı, ($X_0 = 5$ [mm]).



Şekil A.4.9 : Eşdeğer sönüm katsayısı, ($X_0 = 10$ [mm]).

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Kenan Gürses
Doğum Yeri ve Tarihi: Razgrad, 05.12.1983
Adres: Şişli / İstanbul
Lisans Üniversitesi: İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

- Körük H., **Gürses K.**, Şanlıtürk K. Y., ‘Helikopter Kuyruk Konisinin Deneysel Modal Analizi’, 13. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Cumhuriyet Üniversitesi, 7-9 Haziran 2007, Sayfa 453, 464.
- Körük, H., Öge, A., **Gürses, K.** ve Şanlıtürk, K. Y., ‘Bir Helikopter Gövde-Kuyruk Bağlantı Parçasının Yapısal Analizi’, Türkiye Abaqus Kullanıcılar Toplantısı, 6-7 Kasım, İstanbul, 2008.
- **Gürses K.**, Şanlıtürk K. Y., ‘Helikopter Yer Rezonansı: Modelleme ve Analizi’, 14. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Kuzey Kıbrıs Kampüsü, 2-4 Temmuz 2009, Sayfa --, --.