

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÖNEN, UCU KÜTLELİ VİSKO-ELASTİK ÇUBUKLARIN ÖZ
KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mesut KARA

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Makina Dinamiği, Titreşim Ve Akustiği

HAZİRAN 2009

**DÖNEN, UCU KÜTLELİ VİSKO-ELASTİK ÇUBUKLARIN ÖZ
KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Mesut KARA
(503071406)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Mayıs 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 04 Haziran 2009

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin GÜRGÖZE (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Temel BELEK (İTÜ)
Prof. Dr. Uğur GÜVEN (YTÜ)**

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Hayatımda büyük bir yere sahip olan bu Yüksek Lisans Tezinde, hem görüş hem de önerileriyle beni yönlendirerek yardımlarını esirgemeyen, bana çok emek harcayan ve her zaman ilgilenip destek olan Değerli Danışmanım Prof. Dr. Metin Gürgöze'ye en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Yine bu tezde, üzerinde çalışılan problemin sınır şartlarının elde edilmesinde yardımlarını esirgememiş olan Prof. Dr. Manfred Braun'a (Duisburg Üniversitesi, Almanya) ve elde edilen öz değerlerin hesaplanmasında kullanılan program kodlarını hazırlamamda desteğini esirgemeyen Makina Yüksek Mühendisi Serkan Zeren'e teşekkür ederim.

Son olarak her an yanımda olup, beni her an desteklediklerini bildiğim ve benden manevi desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma, özellikle de F. Zafer Topsakal'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

Haziran 2009

Mesut KARA

(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Özeti	1
2. TEORİ	5
2.1 Maxwell Çubuğunun Karakteristik (Frekans) Denkleminin Elde Edilmesi	6
2.1.1 Maxwell Sönüm Modeline İlişkin Bilgiler	6
2.1.2 Gerilme-Toplam Birim Şekil Değiştirme-Zaman Bağıntısı	7
2.1.3 Eğilme Momenti- Düzlem Dışı Yer Değiştirme-Zaman Bağıntısı	9
2.1.4 Düzlem Dışı Yer Değiştirme-Zaman Bağıntısı.....	10
2.1.5 Sınır Şartları	15
2.1.6 Sınır Değer Problemi ve Çözümü.....	15
2.1.7 Öz Değer Probleminin Diferansiyel Denklemi ve Sınır Şartlarının Boyutsuzlaştırılması.....	17
2.1.8 Frobenius Seri Çözümü.....	23
3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (FEM) ÇÖZÜMÜ	29
3.1 “Zayıf” (Weak) Formun Elde Edilmesi.....	29
3.2 Dönen Visko-elastik Ankastre Çubuğun Ayırıklaştırılması	37
3.3 Global Denklem Elde Edilmesi.....	41
4. SAYISAL SONUÇLAR	47
5. SONUÇLAR.....	51
KAYNAKLAR.....	55
EKLER.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	77

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Sönüm oranının 0.5 olduğu durumdaki titreşim karakteristikleri.....	48
Çizelge 4.2 : Sönüm oranının 1 olduğu durumdaki titreşim karakteristikleri.....	49
Çizelge B.1 : Maxwell sönüm modeli için titreşim karakteristikleri	69
Çizelge B.2 : Kelvin-Voigt sönüm modeli için titreşim karakteristikleri.....	73

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Bir diferansiyel çubuk elemanının dönme hareketi	5
Şekil 2.2 : Dönen visko-elastik çubuk modeli	5
Şekil 2.3 : Maxwell modeli	7
Şekil 2.4 : Dönen visko-elastik çubuktaki atalet kuvvetleri	11
Şekil 3.1 : Çubuğun ayrıklaştırılmış gösterimi	37
Şekil 3.2 : Bir e elemanının düzlem dışı yer değiştirme ve eğiminin gösterimi.....	38
Şekil 3.3 : 100 elemandan oluşan çubuğun gösterimi	41
Şekil 3.4 : K matrisinin gösterimi	42

DÖNEN, UCU KÜTLELİ VISKO-ELASTİK ÇUBUKLARIN ÖZ KARAKTERİSTİKLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında üzerinde çalışılan problem, kesit alanı değişmeyen ve sönüm bakımından Maxwell visko-elastik modeline uyan, sol ucunda göbeğe sabitlenmiş ve sağ ucunda tekil bir kütle taşıyan, uzunluğu L olan, dönen bir Bernoulli-Euler çubuğunun düzlem dışı titreşimlerinin incelenmesiyle ilgilidir.

Bu problemde bulunması hedeflenen öz değerlerin hesaplanması için iki yöntem kullanılmıştır. Birinci yöntem seri çözüm yöntemidir ve bu yöntemde, elde edilen öz değer probleminden, Frobenius yöntemi kullanılmasıyla frekans denkleminde geçilmiştir. Bu frekans denkleminde aranılan öz değerler, Matlab programında yazılan bir kod yardımıyla elde edilmiştir. İkinci yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemidir ve bu yöntemde öncelikle zayıf form elde edilmiştir. Ardından dönen visko-elastik çubuk, 100 eleman kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Son adımda ise ayrıklaştırılmış elemanlar birleştirilerek Global denklem elde edilmiştir. Değişkenlerin ayrışması metodu yardımıyla, elde edilen bu Global denklemden kübik öz değer problemine geçilmiştir. Hesaplanan öz değerler Mathematica programında yazılan bir kod yardımıyla elde edilmiştir.

Bir Bernoulli-Euler çubuğu için, Maxwell sönüm modeli kullanılmasıyla elde edilen öz değerler, boyutsuz açısal hızın, boyutsuz kütle parametresinin ve boyutsuz sönüm oranının değişimleriyle birlikte çizelgeler halinde verilmiştir. İlk adımda, bu çizelgelerin yardımıyla Frobenius seri çözüm yönteminden ve Sonlu Elemanlar Yönteminden elde edilen sonuçların birbirleriyle olan tutarlılıkları irdelenmiştir.

İkinci adımda, Maxwell sönüm modeli için bir takım gözlemlere yer verilmiştir. Bu gözlemlerin öz değerlerin gerçel kısımlarını ilgilendiren bölümleri şu şekildedir;

- sabit açısal hızda kütle parametresinin artmasıyla, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerinin azaldığı,
- kütle parametresinin sabit tutulması durumunda açısal hızın artmasının, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerini azalttığı,
- açısal hız ve kütle parametreleri sabit tutularak, sönüm oranının artmasının ise, yine öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerini azalttığı görülmüştür.

Bu üç durumda da sönümün etkisinin azaldığı gözlenmiştir.

Maxwell sönüm modelinde öz değerlerin sanal kısımları ile ilgili yapılan gözlemler ise şu şekilde verilebilir;

- sabit açısal hızda kütle parametresinin artması, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerini azalttığı, diğer bir ifadeyle öz frekansları azalttığı görülmüştür.

- kütle parametresinin sabit tutulması durumunda açısal hızın artmasının, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerini arttırdığı,
- açısal hız ve kütle parametreleri sabit tutularak, sönüm oranının artırılması durumunda ise, yine öz değerlerin sanal kısmının büyüklüğünün arttığı görülmüştür.

Bu son iki durumda öz frekansların arttığı görülmüştür.

Son adımda ise, Çizelge B.1’de verilen Maxwell sönüm modelindeki öz değerler ile Çizelge B.2’de verilen Kelvin-Voigt modelindeki öz değerler karşılaştırılmıştır ve bu karşılaştırmalar sonucunda, bu modellerin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları irdelenmiştir. Bu tezde yapılan bütün karşılaştırmalar ve bunlardan elde edilen sonuçların bu sönüm modelleriyle çalışmak isteyen kişiler için önemli bir kaynak olabileceği düşünülmektedir.

ON THE INVESTIGATION OF THE EIGENCHARACTERISTICS OF ROTATING VISCO-ELASTIC BEAMS CARRYING A TIP MASS

SUMMARY

The problem studied in this thesis is concerned with the out-of-plane vibrations of a rotating, internally damped (Maxwell model) uniform Bernoulli-Euler beam, with length L , which is clamped to a hub at the left end and carrying a tip mass at the other end.

In order to calculate the objective eigenvalues in this problem, two methods are used. The first method is called as Series Solution Method, and in this method, the frequency equation with the use of Frobenius method is transitioned from the obtained eigenvalue problem. From this frequency equation, the eigenvalues in demand are obtained by the help of a code written in Matlab programme. The second method is Finite Element Method, and in this method, firstly the weak form is obtained. After getting the weak form, the rotating visco-elastic beam is discretized by the use of 100 elements, and at the last step, the Global equation is obtained by combining the discretized elements. The cubic eigenvalue problem is transitioned from the global equation, which is obtained by using Method of Separation of Variables. The calculated eigenvalues are obtained with the help of a code written in Mathematica programme.

The eigenvalues obtained for the Bernoulli-Euler beam using Maxwell damping model are given in tables with the change of the nondimensional angular velocity, the nondimensional mass parameter, and the nondimensional damping ratio. At the first step, the coherences of results both from the Frobenius Series Solution and from the Finite Element Solution are investigated with the help of these tables.

At the second step, a set of observations are given for the Maxwell damping model. Parts of observations evolving the real parts of the eigenvalues are as follows;

- if the rate of the mass parameter increases at a fixed value of the angular velocity, the magnitudes of the real parts of the eigenvalues decrease,
- in case of a fixed value of the mass parameter, if the angular velocity increases, the magnitudes of the real parts of the eigenvalues decrease,
- at a fixed angular velocity and the mass parameters, if the damping ratio increases, it is again seen that the magnitudes of the real parts of the eigenvalues decrease.

In these three cases, it is observed that the damping effect weakens.

Observations concerned with the imaginary parts of the eigenvalues in the Maxwell damping model can be given as follows;

- at a fixed value of the angular velocity, if the rate of the mass parameter values increase, the magnitudes of the imaginary parts of the eigenvalues decrease, in other words, it is seen that the eigenfrequencies decrease,

- in case of a fixed value of the mass parameter, the increase of the angular velocity makes the magnitudes of the imaginary parts of the eigenvalues increase,
- in case of a fixed angular velocity and the mass parameters, if the damping ratio is increased, it is again seen that the magnitudes of the imaginary parts of the eigenvalues increase.

In this last two cases, it is seen that the eigenfrequencies increase.

At the last step, eigenvalues both from Maxwell damping model given in the Table B.1 and from Kelvin-Voigt damping model given in the Table B.2 are compared and at the end of this comparisons, advantages and disadvantages of these models, according to each other, are investigated. All comparisons in this thesis and results obtained from these comparisons are thought to might be an important source for people who want to study with these damping models.

1. GİRİŞ

Makine ve uçak mühendisliğinin birçok uygulamalarında, dönen çubukların dinamik davranışlarının incelenmesi önemli bir yer tutmaktadır. Bu çubukların uygulama alanı olarak, buhar ve gaz türbinlerinin kanatları, helikopter palaları, uçak pervaneleri, rüzgâr türbinlerinin pervaneleri gösterilebilir. Söz konusu dönen çubukların bazılarının uç kısmına, uç kütle eklenerek tasarımında değişikliklere de gidilir. Bu eklenen uç kütleinin etkisi, rüzgâr türbininde hava akışını arttırmak, helikopter palalarının titreşim frekanslarını değiştirmek, araçların soğutma fanlarının esnek kanatlarında, esnekliği arttırmaktır. Literatürde, dönen çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşim davranışlarının incelenmesi üzerine birçok yayın bulunmaktadır. Uç kütleli veya kütsüz dönen çubukların dinamik davranışları birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu konuda birçok yayın yapılmıştır[1-17, 20]. Bu çalışmalarda dikkat çeken ortak özellik, dönen çubukların düzlem dışı titreşimlerinin incelenmesidir.

1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında incelenmesi düşünülen problem, kesit alanı değişmeyen ve sönüm bakımından Maxwell visko-elastik modeline uyan, sol ucunda göbeğe sabitlenmiş ve sağ ucunda tekil bir kütle taşıyan, uzunluğu L olan, dönen bir Bernoulli-Euler çubuğunun düzlem dışı titreşimlerinin incelenmesiyle ilgilidir.

1.2 Literatür Özeti

Bu çalışmanın yapılması sırasında yararlanılan literatürdeki bazı araştırmalara, inceledikleri konularla beraber aşağıda değinilecektir.

Al-Ansary, 1998 yılında yayınlanan çalışmasında [1], boyuna elastiklikliği de göz önüne alınan sabit kesitli, dönen bir çubuğun dönme ataletinin, eksenel yöndeki çekme kuvvetine ve özdeğerlerine yaptığı etkileri araştırmıştır. Bu sonuçlara ulaşmak

için pertürbasyon tekniği ve Galerkin metodu kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlardan dönme ataletinin, eksenel yöndeki çekme kuvvetini %10 arttırdığı gözlenmiştir.

Banerjee tarafından yapılan incelemede [2], Frobenius seri çözüm metodu yardımıyla hareketin diferansiyel denkleminde başlanarak, dönen sabit kesitli bir Bernoulli-Euler çubuğu için dinamik rijitlik matrisi elde edilmiştir.

Pescheck, Pierre ve Shaw'ın çalışmalarında [3], dönen çubuğun lineer modları arasında, lineer olmayan bağlar oluşturacak bir metot geliştirilerek, sistemin dinamiklerine daha yakın sonuçların elde edilmesi hedeflenmiştir.

Chung, ve Yoo'nun yaptıkları araştırmada [4], dönen ankastre çubuk için yalnızca boyuna uzama yerine, hem boyuna hem enine uzama göz önüne alınması ve Sonlu Elemanlar Yönteminin yardımıyla birlikte çubuğun özdeğerleri, açısal hızdaki değişimle orantılı olarak elde edilmiştir. Ayrıca, yine açısal hız ile orantılı olarak zaman cevabındaki, gerilme ve şekil değiştirmedeki değişimler de hesaplanmıştır.

Chung, ve Yoo'nun araştırmalarında [5], geometrik şekli ve malzeme özellikleri verilen dönen ankastre bir çubuk için, Mod Metodu ve Sonlu Elemanlar Metodu kullanarak, çubuğun modal karakteristiğindeki değişimlere doğru bir şekilde ulaşmayı hedeflemişlerdir.

Jones yaptığı incelemede [6], Singüler Pertürbasyon Yönteminde integral denklemi metodu kullanılmasıyla, ikinci mertebeye indirgenmiş problemin ikinci öz değerinin bulunması için gerekli alt sınırların elde edilmesini gerçekleştirmiştir.

Boyce ve Handelman'ın yapmış oldukları çalışma [7], ucunda kütle bulunan dönen çubukların dinamiğinin incelenmesinde öncü çalışmalardan biridir. Bu çalışmada, ucunda kütle bulunan dönen bir çubuğun düzlem dışı titreşimlerinin kesin özdeğerlerinin hesaplanması için birkaç tane metot üzerinde durulmuştur.

Hoa'nın yapmış olduğu araştırmada [8], ucunda kütle bulunan dönen bir çubuğun titreşimlerini incelemiştir. Bu çalışmada sonuçlara ulaşmak için Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) kullanılmıştır. Elde edilen sonuç, çubuktaki uç kütlelerin düşük dönme hızındaki titreşimlerde, titreşim frekanslarını azalttığı ve yüksek dönme hızındaki titreşimlerde, titreşim frekansını arttırdığı şeklinde özetlenebilir.

Wright, Smith, Thresher ve Wang'ın yapmış oldukları çalışma [9], ucunda kütle bulunan dönen bir çubukla ilgili problemlerde en çok atıf yapılan çalışmalardan

biridir. Frobenius seri çözüm metodu yardımı ile çubuğun kesin öz değerleri ve mod şekilleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, çubuk kesitinin sabit olup olmaması, göbek ve uç kütlelerin bulunup bulunmaması durumları için tablolar halinde gösterilmiştir.

Ahn'ın yapmış olduğu incelemede [10], sabit kesitli ve bir ucu sabit, diğer ucu serbest dönen elastik bir çubuğun düzlem dışı titreşimlerine ait birinci ve ikinci doğal frekanslarının elde edilmesinde gerekli olan alt sınır şartlarının, integral denklemi metoduyla elde edilmesi üzerinde çalışmıştır.

Bhat'ın yapmış olduğu araştırmada [11], Rayleigh-Ritz metodunda bulunan karakteristik ortogonal polinomları kullanarak, dönen sabit kesitli ve ucunda kütle bulunan bir çubuğun doğal frekanslarını ve mod şekillerini hesaplamıştır. Geometrik sınır şartlarını sağlayan ortogonal polinom takımı, Gram-Schmidt metoduyla elde edilmiştir.

Kuo, Wu ve Lee'nin yapmış oldukları çalışmada [12], sabit kesitli olmayan elastik bir çubuğun eğilme titreşimlerinin incelenmesinde, koniklik oranının, elastiklik sınırlarının, açısal hızın değişimlerinin etkileri incelenmiştir.

Yoo, Seo ve Huh'un yapmış oldukları incelemede [13], bir ek kütle, çubuğun değişik konumlarına yerleştirilmesiyle dönen bir ankastre çubukta elde edilen, değişik modal karakteristikleri incelenmiştir.

Lee, Lin ve Wu'nun yapmış oldukları araştırmada [14], Hamilton prensibi yardımıyla sabit açısal hızla dönmekte olan ve ucunda kütle bulunan değişken kesitli bir çubuğun, titreşimlerinin diferansiyel denklemleri elde edilmiştir.

Mei'nin yapmış olduğu çalışmada [15], bir çubuğun serbest titreşimlerinin incelenmesi için, diferansiyel transformasyon tekniğinde yeni bir yöntemi, adi diferansiyel denklemlerin çözümü için uygulamıştır.

Yukarıda değinilen çalışmalarda, yapılan hesaplamalar dönen çubukların herhangi bir sönüme sahip olmadığı kabul edilerek yapılmıştır. Araştırmalar sonucunda literatürde, çubuğun sönüme sahip olması durumunda, hesaplanan öz değerlerin nasıl değişeceğini gösteren yeterli sayıda çalışma olmadığı görülmüştür. Bu nedenle bu tez çalışmasında, bir karşılaştırma yapılabilmesi amacıyla, dönen sabit kesitli ve sönümlü bir çubuğun düzlem dışı titreşim karakteristiklerinin elde edilmesi yönüne gidilmiştir. Literatür araştırmalarında Abolghasemi ve Jalali'nin çalışmalarında [16],

dönen visko-elastik çubukların titreşim karakteristiklerinin incelenmesi ile ilgili bir çalışma bulunmuştur. Ancak bu kişilere ait olan çalışmada, eğilme açısının değişimine bağlı olarak, dönen visko-elastik bir çubuğun lineer olmayan titreşimleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise, Abolghasemi ve Jalali'nin çalışmalarından [16] farklı olarak, dönen visko-elastik bir çubuğun ucunda uç kütle bulunmaktadır ve sönümlü titreşim karakteristiklerinin hesaplanması için kesin karakteristik denkleminin elde edilmesi hususu vardır. Bu tez çalışmasında elde edilmiş olan kesin karakteristik denklem ve bu denklemden yararlanılarak ulaşılan sayısal sonuçlar, daha önce teknik literatürde verilmemiştir.

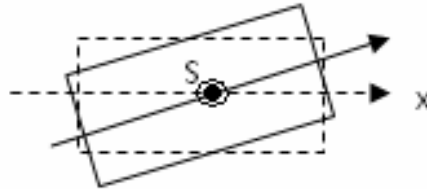
Son adımda ise, sönüm oranı, uç kütle ve açısal hız parametrelerinin değiştirilmesi sonucunda elde edilen ve Çizelge B.1'de verilmiş olan Maxwell sönüm modelinin öz değerlerinin sayısal değerleri ile Gürgöze ve Zeren'in [17] Kelvin-Voigt sönüm modeli kullanarak elde etmiş oldukları, Çizelge B.2'de verilmiş olan öz değerlerin sayısal değerleri karşılaştırılmıştır.

Sonuç olarak, çizelgeler halinde verilmiş olan öz değerlerin, dönen visko-elastik çubukların titreşim karakteristikleri ile ilgili çalışmayı hedefleyen kişiler için önemli bir kaynak niteliği taşıyacağı, dönen çubuğun sönüme sahip olmadığı durumdaki öz değerlerle veya Kelvin-Voigt sönüm modeli kullanılmasıyla elde edilmiş olan öz değerlerle bir karşılaştırma yapılabilmesi olanağı sağlayacağı düşünülmekte ve ümit edilmektedir.

2. TEORÌ

Bu tez çalışmasında incelenecek olan problem, Şekil 2.2’de gösterilen, ucunda kütle bulunan, bir ucu göbeğe ankastre, dönen visko-elastik bir çubuğun dinamiğinin incelenmesi problemidir. Çubuk malzemesinin ise, sönüm bakımından Maxwell sönüm modeline uyduğu kabul edilecektir. Çubuk, x-y düzleminde Ω açısal hızı ile dönen Bernoulli-Euler çubuğundan oluşmaktadır. Bu durumda:

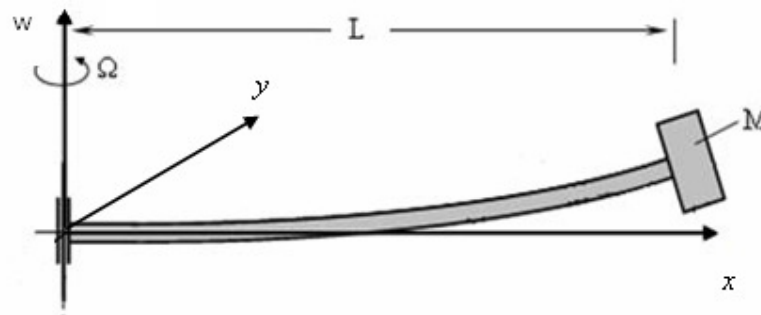
- a. Ω açılma hızı ile dönerken oluşan düzlem dışı yer değiştirmeler esnasında, (yani x-y düzlemine dik olan w eksenini doğrultusundaki yer değiştirmeler kastedilmektedir.) Şekil 2.1’de gösterildiği gibi, çubuk elemanlarının, kağıda dik S merkezli eksenleri etrafında dönmeler söz konusu olur. Bilindiği üzere, Bernoulli-Euler çubuğunda, bu dönmelerden meydana gelen atalet kuvvetlerinin veya kısaca dönme ataletinin ihmal edilmesi söz konusudur.



Şekil 2.1 : Bir diferansiyel çubuk elemanının dönme hareketi

- b. Ayrıca, elemanın iki yüzündeki kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edilmesi de söz konusudur [18].

Dönen visko-elastik Bernoulli-Euler çubuk modeli Şekil 2.2’de,



Şekil 2.2 : Dönen visko-elastik çubuk modeli

şeklinde verilmiştir. Yukarıda gösterilmiş olan modelin fiziksel parametreleri şunlardır; L , Ω , m , M . Bunlar sırasıyla elastik çubuğun boyu, açısal hızı, çubuğun birim uzunluğunun kütlesi ve uç kütledir.

Bu çalışmada üzerinde çalışılan Bernoulli-Euler çubuğunun yanı sıra, dönme ataletinin ihmal edilmemesi durumunda, Rayleigh çubuğundan, kayma şekil değiştirmesinin ihmal edilmemesi durumunda, Timoshenko çubuğundan ve her ikisinin ihmal edilmemesi durumunda ise Rayleigh-Timoshenko çubuğundan söz edildiği bilinmektedir [18].

2.1 Maxwell Çubuğunun Karakteristik (Frekans) Denkleminin Elde Edilmesi

Maxwell çubuğunun karakteristik denklemi elde edilirken öncelikle çubuğun hareketinin diferansiyel denklemi yani, kısaca hareket denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklem ilgili geometrik ve dinamik sınır şartlarıyla bir arada, bir sınır değer problemini oluşturur.

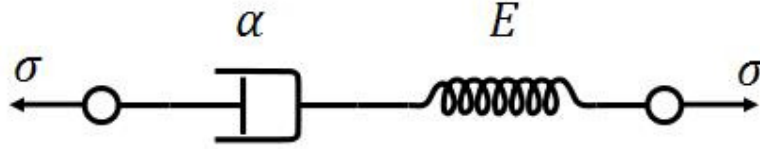
Sınır değer probleminden, hareketin diferansiyel denklemi ve ilgili geometrik ve dinamik sınır şartlarından, üstel bir çözüm kabulüyle problem bir özdeğer problemine dönüştürülmüş olur. Özdeğer probleminde söz konusu olan diferansiyel denklemin homojen olması sebebiyle, çözümü tek şekilde belirli olarak değil de ancak form olarak tayin edilebilir. Bunun sebebi, bir çözümün herhangi bir sabit sayıyla çarpılması da yine çözümdür. İki geometrik ve ikisi dinamik olmak üzere dört sınır şartı yardımıyla, hem çözümün formu, hem de çözüldüğünde özdeğerleri verecek olan karakteristik (frekans) denklemi elde edilir [19].

2.1.1 Maxwell Sönüm Modeline İlişkin Bilgiler

Bu bölümde, Maxwell sönüm modeline, kısaca Maxwell modeline ilişkin özet bilgiler verilecektir. Maxwell modeli Şekil 2.3'de gösterildiği gibi elastik yay ve viskoz sönüm elemanının birbirine seri olarak bağlanmasıyla elde edilmektedir. Yay için söz konusu olan değerler σ_y, ϵ_y, E yani sırasıyla, yay elemanında meydana gelen gerilme, yay elemanında oluşan birim şekil değiştirme ve Elastisite modülüdür. Sönüm elemanı için ise, $\sigma_d, \epsilon_d, \eta$ sırasıyla, sönüm elemanında meydana gelen gerilme, sönüm elemanında oluşan birim şekil değiştirme ve visko-elastiklik katsayısını göstermektedir.

Elastik yay ve sönüm elemanının birbirine paralel bağlanması ile elde edilen modele de Kelvin-Voigt modeli denildiği, bilinmektedir. Yay ve sönüm elemanının birbirlerine değişik şekillerde bağlanmalarıyla üç parametrelili model ve dört parametrelili model diye adlandırılan modeller de elde edilmektedir [20].

Burada,



Şekil 2.3 : Maxwell modeli

şeklindeki inceleyeceğimiz modele tek yönlü aksel gerilme σ uygulandığında, yay ve viskoz damperin seri bağlı olması sebebiyle, oluşan toplam gerilme,

$$\sigma_{\text{toplam}} = \sigma_y = \sigma_d \quad (2.1)$$

şeklindedir. Bu ifade toplam gerilmenin, sönüm elemanındaki gerilmeye, onun da yay elemanındaki gerilmeye eşit olduğunu ifade etmektedir. Tek yönlü aksel gerilme σ uygulanması sonucunda oluşan toplam birim şekil değiştirme,

$$\varepsilon_{\text{toplam}} = \varepsilon_y + \varepsilon_d \quad (2.2)$$

şeklindedir. Bu ifade toplam birim şekil değiştirmenin, sönüm elemanındaki birim şekil değiştirme ile yay elemanındaki birim şekil değiştirmenin toplamına eşit olduğunu ifade etmektedir.

2.1.2 Gerilme(σ)-Toplam Birim Şekil Değiştirme(ε)-Zaman(t) Bağıntısı

Bu bölümde, sönüm bakımından Maxwell visko-elastik modeline uyan kısaca, Maxwell çubuğu diye isimlendirilen, Bernoulli-Euler çubuğu için gerilme(σ)-toplam birim şekil değiştirme(ε)-zaman(t) bağıntısı elde edilecektir. Burada visko-elastik davranışı ifade ederken, yay elemanı için aksel σ gerilmesi altında elastik katı davranışını açıklayan Hooke kanunu ve viskoz damper için aksel σ gerilmesi altında viskoz sıvı davranışını açıklayan Newton akış kanunu göz önüne alınmıştır. Hooke kanunu sembolik olarak,

$$\sigma = \sigma_y = E\varepsilon_y \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilir. Bu ifadede gerilme-şekil değişimi sabit bir katsayı olan Elastisite modülü ile orantılı olarak değişmektedir. Newton akış kanunu sembolik olarak,

$$\sigma = \sigma_d = \alpha \dot{\epsilon}_d \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir. Yukarıda gösterilen gerilme, sabit bir katsayı olan visko-elastiklik katsayısı ile orantılı olarak değişmektedir.

Gerilme(σ)-toplam birim şekil değiştirme(ϵ)-zaman(t) bağıntısının elde edilmesinde kolaylık sağlaması bakımından öncelikle (2.2)'deki toplam birim şekil değiştirmeyi gösteren denklemin zamana göre türevi,

$$\dot{\epsilon}_{toplam} = \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_d \quad (2.5)$$

şeklinde alınır.

İkinci adım olarak, (2.1) ifadesindeki sönüm ve yay elemanlarındaki gerilme ile toplam gerilmenin eşit olduğu göz önüne alınarak, yay elemanının birim şekil değiştirmesi, (2.3)'deki Hooke kanunu denkleminden çekilerek ve sönüm elemanındaki birim şekil değiştirme hızı, (2.4) Newton akış kanunu denkleminden çekilerek, (2.5) nolu denklemde yerlerine yerleştirilmeleri suretiyle,

$$\dot{\epsilon}_{toplam} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\alpha} \quad (2.6)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\tau = \frac{\alpha}{E} \quad (2.7)$$

şeklinde yeni bir notasyon kullanılacak olursa, (2.2)'deki toplam birim şekil değiştirme denklemi için (2.6)'dan,

$$\tau \dot{\sigma} + \sigma = \alpha \dot{\epsilon}_{toplam} \quad (2.8)$$

şeklinde, gerilme (σ)-toplam birim şekil değiştirme (ϵ)-zaman(t) bağıntısı elde edilmiş olur. Bu bağıntıda geçen parametreler,

α : Visko-elastiklik katsayısını,

E : Elastisite modülünü,

τ : Visko-elastiklik katsayısının Elastisite modülüne oranını,

ϵ : Birim şekil değiştirmeyi ifade etmektedir.

Yukarıda değinilen birim şekil değıştirme (ε) ifadesi matematiksel olarak,

$$\varepsilon = zK + \varepsilon_0 \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir. Bu ifadede,

ε_0 : Çubuğun merkezindeki birim şekil değıştirmeyi,

z : Merkezle elyaf arasındaki mesafeyi,

$K = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$: Kirişin tarafsız eksenin eğriliğini göstermektedirler [20].

2.1.3 Eğilme momenti(M)-Düzlem Dışı Yer Değıştirme($w(x,t)$)-Zaman(t) Bağıntısı

Bu bölümde, sonuçta ulaşılması hedeflenen düzlem dışı yer değıştirme-zaman bağıntısına geçilebilmesi için, (2.8) denklemindeki her bir terim $z dA$ ile çarpılıp A alanında integrali alınınca,

$$\int_A \tau \dot{\varepsilon} z dA + \int_A \sigma z dA = \int_A \alpha \dot{\varepsilon} z dA \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir.

Burada eğilme momenti için,

$$M(x,t) = \int_A \sigma z dA \quad (2.11)$$

olduğu Stevens'dan [20] göz önüne alınarak ve denklemin sağ tarafındaki birim şekil değıştirme için, (2.9) denkleminde de yararlanılırsa,

$$\int_A \tau \dot{\varepsilon} z dA + \int_A \sigma z dA = \int_A \alpha \dot{\varepsilon} z dA \quad (2.12)$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\int_A \tau \dot{\varepsilon} z dA} & \underbrace{\int_A \sigma z dA} & \underbrace{\int_A \alpha \dot{\varepsilon} z dA} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \tau \dot{M}(x,t) & M(x,t) & \alpha(\dot{K} \int_A z^2 dA + \dot{\varepsilon}_0 \int_A z dA) \end{array}$$

elde edilir. Burada,

$$\int_A z dA = 0, \quad (2.13)$$

dir. Bunun sebebi, çubuk kesiti simetrik olduğundan dolayı çubuk ekseninin, çubuğun kütle merkezinden geçmesidir. Dolayısıyla, eksenin altındaki alan ile üstündeki alanın eşittir. Diğer bir ifadeyle çubuk kesiti için, herhangi bir z mesafesi

ile dA diferansiyel alanın çarpılıp tüm alan boyunca integre edilmesi neticesinde sıfır sonucu elde edilir. İkinci olarak, alan elemanının kesit atalet momenti diye isimlendirilen,

$$I = \int_A z^2 dA \quad (2.14)$$

ifadesi, (2.12) denkleminde yerlerine konup düzenlenirse,

$$\tau \dot{M}(x,t) + M(x,t) = \alpha I \dot{K} = \alpha I w^{II}. \quad (2.15)$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilmiş olan (2.15) numaralı denklem, bir düzenleme yapılması amacıyla τ 'ya bölünürse,

$$\dot{M}(x,t) + \frac{M(x,t)}{\tau} = \frac{\alpha I \dot{K}}{\tau} = \frac{\alpha I w^{II}}{\tau} \quad (2.16)$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem, (2.7) numaralı bağıntıdaki τ içindeki parametreler göz önüne alınarak tekrar düzenlenirse,

$$\dot{M}(x,t) + \frac{M(x,t)}{\tau} = E I w^{II}. \quad (2.17)$$

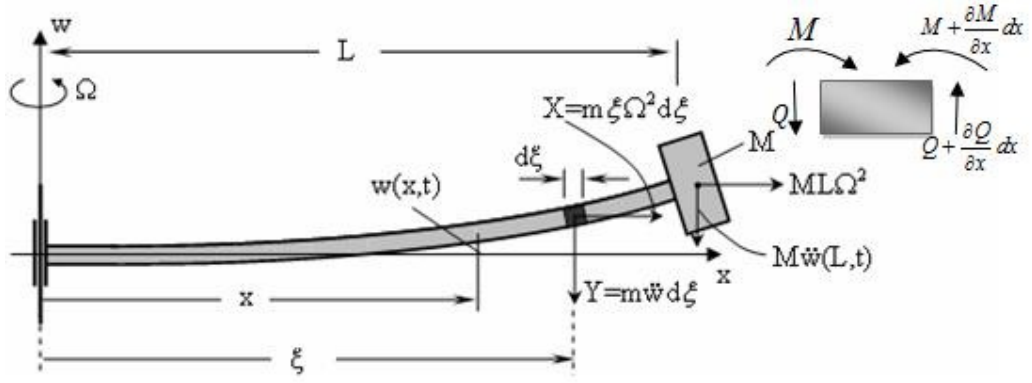
elde edilmiş olur.

Elde edilmiş olan bu ifade, eğilme momenti(M)-düzlem dışı yer değiştirme($w(x,t)$)-zaman(t) bağıntısıdır. Bu bağıntı, Karl Kent Stevens'daki [20] Maxwell elemanı için (7) numarayla ifade edilmiş olan bağıntıyla aynıdır.

2.1.4 Düzlem Dışı Yer Değiştirme ($w(x,t)$)-Zaman(t) Bağıntısı

Bu bölümde, hareket denkleminin elde edilmesi için, (2.17)'deki bağıntıdan eğilme momentinin yok edilmesi gerekmektedir. Bunun için birinci adımda, çubuğun bir x kesitindeki eğilme momenti elde edilecektir. İkinci adımda, elde edilen bu eğilme momenti ifadesi (2.17) denkleminde yerine konulacaktır.

Dönen Bernoulli-Euler çubuğunun herhangi bir x kesitindeki eğilme momenti ifadesini elde edebilmek için, çubuk boyu doğrultusu (x) ve düzlem dışı yer değiştirme (w) yönlerindeki atalet kuvvetleri ve bir eleman üzerinde, pozitif kabul edilen yönler,



Şekil 2.4 : Döner visko-elastik çubuktaki atalet kuvvetleri

şeklinde gösterilmiştir.

Yukarıdaki çubuğun bir x kesitindeki eğilme momenti, atalet kuvvetlerinin yönlerinin dikkate alınmasıyla,

$$M(x, t) = - \int_x^L (\xi - x) m \ddot{w}(\xi, t) d\xi - \int_x^L [w(\xi, t) - w(x, t)] m \xi \Omega^2 d\xi - ML \Omega^2 [w(L, t) - w(x, t)] - (L - x) M \ddot{w}(L, t) \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir.

Buradaki eğilme momenti ifadesini elde etmek için kabul edilen çubuk modeli, Bernoulli-Euler çubuk modelidir. Diğer bir ifadeyle, dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmesi ihmal edilmiştir. Uç kısmında bulunan M kütlesi ise maddesel nokta olarak düşünüldüğünden, bu kütleden meydana gelecek olan dönme ataleti de ihmal edilmiştir.

Burada,

m : Birim uzunluğun kütesini,

t : zamanı,

ξ : x ve L arasındaki herhangi bir noktayı,

$d\xi$: x ve L arasındaki herhangi bir noktadaki diferansiyel elemanın genliğini,

$w(x, t)$: Düzlem dışı yer değiştirmenin miktarını,

$\ddot{w}(x, t)$: Düzlem dışı yer değiştirmenin zamana göre ikinci mertebeden türevini, yani ivmeyi simgelemektedir.

Yukarıda elde edilen eğilme momenti ifadesi daha sonra, (2.17) numarası ile gösterilen bağıntısındaki eğilme momenti ifadesinde yerine konularak bu ifade yok edilecektir. Fakat ileride hesaplanacak sınır şartlarının, burada elde edilecek olan düzlem dışı yer değiştirme($w(x, t)$)-zaman(t) bağıntısıyla uyumlu olabilmesi durumu göz önüne alınınca, öncelikle (2.17)'deki bağıntının, ardından elde edilen (2.18)'deki eğilme momentinin 0 ve L arasındaki herhangi bir yeri ifade eden x'e göre iki kere türevi alınacaktır.

Son adımda ise, iki kere x'e göre türevi alınmış olan, çubuğun bir x kesitindeki eğilme momenti denklemi, yine iki kere x'e göre türevi alınmış eğilme momenti(M)-düzlem dışı yer değiştirme($w(x, t)$)-zaman(t) bağıntısında, yerine konulmasıyla, hedeflenen düzlem dışı yer değiştirme-zaman bağıntısı, yani hareket denklemi elde edilecektir.

Şimdi, yukarıda sayılan adımlar sırayla gerçekleştirilecektir.

Eğilme momenti(M)-düzlem dışı yer değiştirme($w(x, t)$)-zaman(t) bağıntısı olan (2.17)'nin x'e göre iki kere türevi alınırsa,

$$M''(x, t) + \frac{M''(x, t)}{\tau} = EIw'''' \quad (2.19)$$

ifadesi elde edilir.

Eğilme momenti ifadesinin türevi alınırken yardımcı olması için, Flügge 8-12'den [21] yararlanılacaktır.

Burada bir F(y) fonksiyonu,

$$F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \quad (2.20)$$

şeklinde hem x'in hem de y'nin fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

Bu ifadenin y'ye göre türevi elde edilmek istendiğinde,

$$\frac{dF}{dy} = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y dx - f(g, y) \frac{dg}{dy} + f(h, y) \frac{dh}{dy} \quad (2.21)$$

işlemlerinin yapılması gerekmektedir. Bilindiği üzere bu ifadeye Leibnitz kuralı denmektedir.

Eğilme momentinin ifadesi olan (2.18) nolu ifadenin x 'e göre birinci türevi, (2.21) formülü yardımıyla alınırsa,

$$M^I = \frac{\sigma M(x,t)}{\sigma x} = - \left[\int_x^L m(-1) \ddot{w}(\xi, t) d\xi - 0 * 1 \right] - \left[\int_x^L m\xi \Omega^2 [-w^I(x,t)] d\xi - 0 * 1 \right] + ML\Omega^2 w^I(x,t) + M\ddot{w}(L,t) \quad (2.22)$$

elde edilir.

Elde edilen yukarıdaki ifadenin önceki sayfada açıklandığı gibi, tekrar x 'e göre türevi alınırsa,

$$M^{II} = -[(-1)m(-1)\ddot{w}(x,t)] + \left[\frac{m\Omega^2}{2}(L^2 - x^2)w^I(x,t)\right]^I + ML\Omega^2 w^{II}(x,t) \quad (2.23)$$

elde edilir. Elde edilen yukarıdaki (2.23) numaralı ifade eğilme momentinin x 'e göre ikinci mertebeden türevidir.

Bu ifade düzenlenirse,

$$M'' = -m\ddot{w}(x, t) + \frac{m\Omega^2}{2} [(L^2 - x^2)w^I(x, t)]' + ML\Omega^2 w^{II}(x, t) \quad (2.24)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi de elde edilen bu denklemin zamana göre birinci türevi alınırsa,

$$M^{II} = -m\ddot{w}(x, t) + \frac{m\Omega^2}{2} [(L^2 - x^2)w^I(x, t)]' + ML\Omega^2 w^{II}(x, t) \quad (2.25)$$

elde edilmiş olur.

Burada, (2.24) numaralı ifade ve (2.25) numaralı ifade, (2.19) numaralı iki kere x' e göre türevi alınmış olan Eğilme momenti(M)-Düzlem dışı yer değiştirme($w(x, t)$)-Zaman(t) bağıntısında yerine konunca,

$$-m\ddot{w}(x,t) + \frac{m\Omega^2}{2} [(L^2 - x^2)w^I(x,t)]^I + ML\Omega^2 w^{II}(x,t) + \frac{1}{\tau} \left(-m\dot{w}(x,t) + \frac{m\Omega^2}{2} [(L^2 - x^2)w^I(x,t)]^I + ML\Omega^2 w^{II}(x,t) \right) - E I w^{IV}(x,t) = 0 \quad (2.26)$$

elde edilir.

Burada bir kaç düzenleme yapılacaktır. Öncelikle ikinci terimin parantez içindeki ifadesi için,

$$\begin{aligned} a &= [(L^2 - x^2)w^I(x,t)]^{II} = [-2xw^I(x,t) + (L^2 - x^2)w^{II}(x,t)]^{II} = \\ &= -2xw^{III}(x,t) + (L^2 - x^2)w^{IV}(x,t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

şeklinde bir a notasyonu tanımlanıp, bir düzenleme yapılmıştır ve ardından üçüncü terimin ikinci kısmı için de,

$$b = [(L^2 - x^2)w^I(x,t)]^I = -2xw^I(x,t) + (L^2 - x^2)w^{II}(x,t) \quad (2.28)$$

şeklinde bir b notasyonu tanımlanarak düzenlenmiştir.

Düzenlenmiş a ve b ifadeleri, (2.26) bağıntısında yerlerine yazılınca,

$$\begin{aligned} &-m\ddot{w}(x,t) - \frac{m\Omega^2}{2} [2xw^I(x,t) - (L^2 - x^2)w^{II}(x,t)] + ML\Omega^2 w^{II}(x,t) + \\ &\frac{1}{\tau} \left(-m\ddot{w}(x,t) - \frac{m\Omega^2}{2} [2xw^I(x,t) - (L^2 - x^2)w^{II}(x,t)] - ML\Omega^2 w^{II}(x,t) \right) - \\ &EIw^{IV}(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

bağıntısına gelinir.

Elde edilen (2.29) nolu bağıntı, öncelikle mertebe sırasına göre tekrar düzenlenip, ardından -1 ile çarpılıp, açılarak düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} EIw^{IV}(x,t) + m\ddot{w}(x,t) - \left[\frac{m\Omega^2}{2} (L^2 - x^2) + ML\Omega^2 \right] w^{II}(x,t) + \frac{m\Omega^2}{2} 2xw^I(x,t) + \\ \frac{m}{\tau} \ddot{w}(x,t) + \frac{m\Omega^2}{2} 2xw^I(x,t) - \frac{m\Omega^2}{2\tau} (L^2 - x^2)w^{II}(x,t) - \frac{ML\Omega^2}{\tau} w^{II}(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

bağıntısı elde edilmiş olur.

Son olarak, mertebe sırasına göre düzenlenmiş olan bu bağıntı, Ω^2 parantezine de alınınca, Düzlem dışı yer değiştirme($w(x,t)$)-Zaman(t) bağıntısı,

$$\begin{aligned} EIw^{IV}(x,t) + m\ddot{w}(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2} (L^2 - x^2) + ML \right] w^{II}(x,t) + \frac{m}{\tau} \ddot{w}(x,t) + \\ m\Omega^2 xw^I(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) + \frac{ML}{\tau} \right] w^{II}(x,t) + \frac{m\Omega^2 x}{\tau} w^I(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Diğer bir ifade ile tanımlamak gerekirse, elde edilmiş olan bu kısmi türevli diferansiyel denklem, Şekil 2.4'de gösterilmiş olan çubuk sisteminin hareket denklemidir.

2.1.5 Sınır Şartları

Bu bölümde çubuğun sınır şartlarına yer verilecektir. Üzerinde çalışılan dönen visko-elastik çubuk modelinin yer değiştirme ve eğime ilişkin olarak, geometrik şartlarından kaynaklanan iki tane geometrik sınır şartı vardır. Bilindiği üzere, geometrik sınır şartlarının problemin gerektirdiği sınır şartı sayısını sağlayamadığı hallerde eksik kalan sınır şartlarının, moment ve düzlem dışı yöndeki kuvvetin dengesine, yani kesme kuvvetine ilişkin şartlarla sağlanması söz konusudur. Bu sınır şartlarına, dinamik sınır şartları denmektedir [19].

$x=0$ noktasındaki geometrik sınır şartları yer değiştirme ve eğim sırasıyla,

$$w(0, t) = 0, \quad (2.32)$$

$$w'(0, t) = 0 \quad (2.33)$$

şeklindedir.

$x=L$ noktasındaki dinamik sınır şartları, eğilme momenti ve düzlem dışı yer değiştirme yönündeki kuvveti yani, kesme kuvveti sırasıyla,

$$EIw''(L, t) = 0, \quad (2.34)$$

$$M \left[\ddot{w}(L, t) + \frac{1}{\tau} \dot{w}(L, t) \right] - EIw'''(L, t) + ML\Omega^2 \left[w'(L, t) + \frac{1}{\tau} w'(L, t) \right] = 0 \quad (2.35)$$

dir. Eğilme momentini temsil eden sınır şartında, düzlem dışı yer değiştirmenin iki defa x 'e göre ve bir defa da zamana göre türevi vardır. Bu denklemdeki zamana göre türev visko-elastiklikten kaynaklanmaktadır.

Yukarıda verilen (2.34) ve (2.35) numaralı denklemlerdeki dinamik sınır şartlarının elde edilmesi EK A.1'de gösterilmiştir.

2.1.6 Sınır Değer Problemi ve Çözümü

Sistemin hareket denklemi olan (2.31), geometrik sınır şartlarını ifade eden (2.32), (2.33) ifadeleri ve dinamik sınır şartlarını ifade eden (2.34), (2.35) ifadeleri ile birlikte, bir sınır değer problemini oluşturur.

Bu sınır değer problemini çözebilmek üzere, problemi bir öz değer problemine dönüştürmek gerekmektedir. Bunun için de,

$$w(x, t) = W(x)e^{\lambda t} \quad (2.36)$$

şeklinde biri yalnızca konumun, diğeri de yalnızca zamanın fonksiyonu olan iki fonksiyonun çarpımı şeklinde bir çözüm kabulü yapılacaktır. Bilindiği üzere buna değişkenlerin ayrışması metodu denmektedir.

Yukarıdaki (2.36) numaralı çözüm kabulü ifadesini aşağıdaki,

$$EIw^{IV}(x,t) + m\ddot{w}(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2}(L^2 - x^2) + ML \right] w^{II}(x,t) + \frac{m}{\tau} \dot{w}(x,t) + m\Omega^2 x w^I(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2\tau}(L^2 - x^2) + \frac{ML}{\tau} \right] w^{II}(x,t) + \frac{m\Omega^2 x}{\tau} w^I(x,t) = 0 \quad (2.31)$$

düzlem dışı yer değiştirme($w(x,t)$)-zaman(t) bağıntısında, yani hareket denkleminde yerine konulup, gerekli düzenlemeler yapılnca,

$$EI\lambda W^{IV}(x) + m\lambda^3 W(x) - \Omega^2 \lambda \left[\frac{m}{2}(L^2 - x^2) + ML \right] W^{II}(x) + \frac{m}{\tau} \lambda^2 W(x) + m\Omega^2 x \lambda W^I(x) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2\tau}(L^2 - x^2) + \frac{ML}{\tau} \right] W^{II}(x) + m\Omega^2 x W^I(x) = 0 \quad (2.37)$$

ifadesi elde edilir.

Elde edilen (2.37) denklemindeki birinci terimin önündeki katsayı kaldırmak maksadıyla denklem, $EI\lambda$ ' ya bölüldüğü takdirde,

$$W^{IV}(x) - \frac{\Omega^2}{EI} \left\{ \left[\frac{m}{2}(L^2 - x^2) + ML \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{m}{2\tau}(L^2 - x^2) + \frac{ML}{\tau} \right] \right\} W^{II}(x) + \frac{m\Omega^2 x}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] W^I(x) + \frac{m\lambda^2}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] W(x) = 0 \quad (2.38)$$

elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklem, ulaşılmak istenen öz değer probleminin diferansiyel denklemdir.

Çözüm kabulü olan (2.36) ifadesi, (2.32) , (2.33) geometrik sınır şartlarında yerine konulduğu takdirde,

$$W(0) = 0, \quad (2.39)$$

$$W^I(0) = 0 \quad (2.40)$$

ifadeleri elde edilir.

Yapılan çözüm kabulü (2.34) , (2.35) dinamik şartlarında da yerine konulduğu takdirde,

$$EI\lambda W^{II}(L) = 0 \quad (2.41)$$

ifadesi elde edilir.

Elde edilen bu (2.41) nolu ifade $EI\lambda^4$ 'ya bölüldüğü takdirde,

$$W'''(L) = 0 \quad (2.42)$$

ifadesi eğilme momenti için elde edilir.

Aynı şekilde son sınır şartı olan kesme kuvveti için, yapılan çözüm kabulü yerine konduğu takdirde,

$$M \left[\lambda^3 W(L) + \frac{1}{\tau} \lambda^2 W(L) \right] - \lambda EI W'''(L) + ML\Omega^2 \left[\lambda W'(L) + \frac{1}{\tau} W'(L) \right] = 0 \quad (2.43)$$

elde edilir.

Elde edilen bu (2.43) ifadesi, $EI\lambda^4$ 'ya bölünüp düzenlenirse,

$$W'''(L) - \frac{ML\Omega^2}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] W'(L) - \frac{M\lambda^2}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] W(L) = 0 \quad (2.44)$$

bulunur.

Yukarıda (2.38) nolu zamandan bağımsız olduğundan dolayı hareket denklemi değil diferansiyel denklem olarak isimlendirilmektedir. İşte bu diferansiyel denklem, (2.39), (2.40) geometrik ve (2.42) ve (2.44) dinamik sınır şartları homojen olup λ parametresine bağlıdır. Bunlar birlikte, bir özdeğer problemini teşkil eder. Burada λ değerleri, aranan sönümlü titreşim karakteristikleri, yani öz değerlerdir.

2.1.7 Öz Değer Probleminin Diferansiyel Denklemi ve Sınır Şartlarının Boyutsuzlaştırılması

Problemin bu aşamasında ilerideki çözüm işlemlerinde kolaylık sağlaması için boyutsuzlaştırma işlemine gidilmiştir. Bunun için, konum koordinatı x , çubuk boyuna, yani L 'ye oranlanması suretiyle,

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad (2.45)$$

elde edilir.

Yer değiştirme genlik fonksiyonu $W(x)$, çubuk boyuna, yani L 'ye oranlanması suretiyle,

$$\bar{W} = \frac{W}{L} \quad (2.46)$$

elde edilmiş olur.

Boyutsuzlaştırma çözüm kabulü olan ifade düzenlenirse,

$$W = \bar{W}L \quad (2.47)$$

ifadesine gelinir.

Yukarıda elde edilen ifadenin x'e göre türevi boyutsuz olarak,

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}} \quad (2.48)$$

şeklinde elde edilir.

Öz Değer Probleminin diferansiyel denkleminde bulunan yer değiştirme genlik fonksiyonunun ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden mertebeden türevleri yukarıdaki boyutsuzlaştırma işlemleri göz önüne alındığı takdirde,

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{L} \frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{x}^2}, \quad (2.49)$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \frac{1}{L^2} \frac{d^3 \bar{W}}{d\bar{x}^3}, \quad (2.50)$$

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = \frac{1}{L^3} \frac{d^4 \bar{W}}{d\bar{x}^4} \quad (2.51)$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıda tanımlanan (2.45), (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) boyutsuz parametreleri, (2.38) numaralı diferansiyel denkleminde yerine konulması neticesinde, boyutsuzlaştırılmış olarak ifade edilecek olan hareketin diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^3} \bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \frac{\Omega^2}{EI} \left\{ \left[\frac{mL^2}{2} (1 - \bar{x}^2) + ML \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{mL^2}{2\tau} (1 - \bar{x}^2) + \frac{ML}{\tau} \right] \right\} \frac{1}{L} \bar{W}^{II}(\bar{x}) \\ + \frac{m\Omega^2 \kappa}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] \bar{W}^I(\bar{x}) + \frac{m\lambda^2}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] L \bar{W}(\bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

şeklinde elde edilir. Burada düzenleme yapmak için, (2.52) denklemi L^3 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \frac{\Omega^2 L^2}{EI} \left\{ \left[\frac{mL^2}{2} (1 - \bar{x}^2) + ML \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{mL^2}{2\tau} (1 - \bar{x}^2) + \frac{ML}{\tau} \right] \right\} \bar{W}^{II}(\bar{x}) \\ + \frac{m\Omega^2 \kappa L^4}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] \bar{W}^I(\bar{x}) + \frac{m\lambda^2 L^4}{EI} \left[1 + \frac{1}{\tau\lambda} \right] \bar{W}(\bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

ifadesi elde edilir. Konum kordinatı ve genlik fonksiyonuna göre boyutsuzlaştırılmış olan bu (2.53) ifadesi, (2.38) numarası ile gösterilen denklemin katsayılar hariç boyutsuzlaştırılmış halinin ifadesidir.

Bundan sonra geriye (2.53) denkleminin ilgili katsayılarının boyutsuzlaştırılması kalmaktadır.

İkinci terimin birinci katsayısı,

$$\frac{\Omega^2 L^2}{EI} \frac{mL^2}{2} = \frac{\Omega^2 mL^4}{2EI} = \frac{\Omega^2}{2EI/mL^4} = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\bar{\Omega}^2}{2} \quad (2.54)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış olur.

İkinci terimin ikinci kısmından gelen katsayı,

$$\frac{\Omega^2 L^2}{EI} ML \frac{mL}{mL} = \Omega^2 \frac{M}{mL} \frac{mL^4}{EI} = \Omega^2 \alpha_M \frac{1}{\omega_0^2} = \bar{\Omega}^2 \alpha_M \quad (2.55)$$

olarak boyutsuzlaştırılır.

Üçüncü terimin birinci kısmında bulunan katsayı,

$$\frac{\Omega^2 L^2}{EI} \frac{mL^2}{2\tau\lambda} = \frac{\Omega^2 mL^4}{2EI\tau\lambda} = \frac{\Omega^2}{(2EI/mL^4)(\lambda\alpha/E)} = \frac{\Omega^2/\omega_0^2}{2\alpha I\lambda/mL^4\omega_0^2} = \frac{\bar{\Omega}^2}{2\bar{d}\bar{\lambda}} \quad (2.56)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış olur.

Burada $\bar{d}$ ve $\bar{\lambda}$,

$$\bar{d} = \frac{\alpha I/L^3}{mL\omega_0^2}, \quad (2.57)$$

ve

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\omega_0} \quad (2.58)$$

şeklindedir.

Üçüncü terimin ikinci katsayısı,

$$\frac{\Omega^2 L^2}{EI} \frac{ML}{\tau\lambda} \frac{mL}{mL} = \frac{\Omega^2 mL^4}{EI} \frac{M}{mL} \frac{1}{\lambda\alpha/E} = \frac{\bar{\Omega}^2 \alpha_M}{\bar{d}\bar{\lambda}} \quad (2.59)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır.

Dördüncü terimin birinci kısmında bulunan katsayı,

$$\frac{\Omega^2 mL^4}{EI} = \frac{\Omega^2}{EI/mL^4} = \bar{\Omega}^2 \quad (2.60)$$

olarak boyutsuzlaştırılmış olur.

Dördüncü terimin ikinci kısmından gelen katsayı,

$$\frac{\Omega^2 mL^4}{EI} \frac{1}{\tau \lambda} = \frac{\Omega^2}{EI/mL^4} \frac{1}{\lambda \alpha/E} = \frac{\bar{\Omega}^2}{d\bar{\lambda}} \quad (2.61)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır.

Beşinci terimin birinci kısmında yer alan katsayı,

$$\frac{m\lambda L^4}{EI} \lambda = \frac{mL^4 \lambda^2}{EI} = \frac{\lambda^2}{EI/mL^4} = \bar{\lambda}^2 \quad (2.62)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış olur.

Beşinci terimin ikinci kısmında bulunan katsayı,

$$\frac{m\lambda L^4}{EI} \frac{1}{\tau} = \frac{m\lambda L^4}{EI} \frac{1}{\alpha/E} = \frac{m\lambda L^4}{EI} \frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda^2/\omega_0^2}{\alpha \lambda/mL^4 \omega_0^2} = \frac{\bar{\lambda}^2}{d\bar{\lambda}} = \frac{\bar{\lambda}}{d\bar{\lambda}} \quad (2.63)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır.

Bu boyutsuz büyüklükler, (2.53) diferansiyel denkleminde yerlerine konunca, öz değer probleminin nihai diferansiyel denklemi,

$$\bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \left[\frac{\bar{\Omega}^2}{2} (1 - \bar{x}^2) + \bar{\Omega}^2 \alpha_M + \frac{\bar{\Omega}^2}{2d\bar{\lambda}} (1 - \bar{x}^2) + \frac{\bar{\Omega}^2}{d\bar{\lambda}} \alpha_M \right] \bar{W}^{II}(\bar{x}) + \left[\bar{\Omega}^2 \bar{x} + \frac{\bar{\Omega}^2 \bar{x}}{d\bar{\lambda}} \right] \bar{W}^I(\bar{x}) + \bar{\lambda}^2 \left[1 + \frac{1}{d\bar{\lambda}} \right] \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (2.64)$$

şeklini alır.

Son bir düzenleme daha yapılırsa bu denklem,

$$\bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \bar{\Omega}^2 \left[\left(\frac{1}{2} (1 - \bar{x}^2) + \alpha_M \right) \left(1 + \frac{1}{d\bar{\lambda}} \right) \right] \bar{W}^{II}(\bar{x}) + \bar{\Omega}^2 \bar{x} \left(1 + \frac{1}{d\bar{\lambda}} \right) \bar{W}^I(\bar{x}) + \bar{\lambda}^2 \left[1 + \frac{1}{d\bar{\lambda}} \right] \bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (2.65)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu ifade, (2.38) numaralı öz değer probleminin diferansiyel denkleminin boyutsuzlaştırılmış ifadesidir.

Şimdi ise probleme ait olan sınır şartları, boyutsuz büyüklükler cinsinden yazılacaktır.

İlk olarak yer değiştirmeden kaynaklanan ve geometrik sınır şartı olan, birinci sınır şartı boyutsuzlaştırılırsa,

$$\bar{W}(0) = 0 \quad (2.66)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış sınır şartı elde edilir.

Aynı şekilde, ikinci geometrik sınır şartı olan, eğimden kaynaklanan sınır şartı boyutsuzlaştırılırsa,

$$\bar{W}'(0) = 0 \quad (2.67)$$

olarak elde edilir.

Dinamik sınır şartı olan ve eğilme momentinden kaynaklanan sınır şartı boyutsuzlaştırılırsa,

$$\bar{W}''(1) = 0 \quad (2.68)$$

şeklinde elde edilir.

Son olarak, dinamik sınır şartı olan ve kesme kuvvetinden kaynaklanan dördüncü sınır şartı boyutsuzlaştırılırsa,

$$\frac{1}{L^2} \bar{W}''''(1) - \frac{ML\Omega^2}{EI} \bar{W}'(1) - \frac{ML\Omega^2}{\lambda EI\tau} \bar{W}'(1) - \frac{M\lambda^2 L}{EI} \bar{W}(1) - \frac{M\lambda L}{EI\tau} \bar{W}(1) = 0 \quad (2.69)$$

ifadesi elde edilir.

Bu sınır şartında bir düzenleme yapılacaktır. Bunun için, (2.69) denklemi L^2 ile çarpılarak,

$$\bar{W}''''(1) - \frac{ML^3\Omega^2}{EI} \bar{W}'(1) - \frac{ML^3\Omega^2}{\lambda EI\tau} \bar{W}'(1) - \frac{M\lambda^2 L^3}{EI} \bar{W}(1) - \frac{M\lambda L^3}{EI\tau} \bar{W}(1) = 0 \quad (2.70)$$

şekline getirilmiştir.

Yukarıdaki (2.70) denkleminin katsayıları için boyutsuzlaştırma işlemine gidilirse, ikinci katsayı,

$$\frac{ML^3\Omega^2}{EI} = \frac{ML^3\Omega^2}{EI} \frac{mL}{mL} = \frac{mL^4\Omega^2}{EI} \frac{M}{mL} = \alpha_m \bar{\Omega}^2 \quad (2.71)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış olur.

Üçüncü katsayı,

$$\frac{ML^3\Omega^2}{\lambda EI\tau} = \frac{ML^3\Omega^2 mL}{\lambda EI\tau mL} = \frac{mL^4\Omega^2 M}{EI\lambda\tau mL} = \alpha_m \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{d}\lambda} \quad (2.72)$$

olarak boyutsuzlaştırılmış olarak elde edilir.

Dördüncü katsayı boyutsuzlaştırıldığı takdirde,

$$\frac{M\lambda^2 L^3}{EI} = \frac{M\lambda^2 L^3 mL}{EI mL} = \frac{mL^4 \lambda^2 M}{EI mL} = \alpha_m \bar{\lambda}^2 \quad (2.73)$$

elde edilmiş olur.

Beşinci katsayı ise,

$$\frac{M\lambda L^3}{EI\tau} = \frac{M\lambda L^3 mL}{EI\tau mL} = \frac{mL^4 \lambda M}{EI\tau mL} = \alpha_m \frac{\bar{\lambda}}{\bar{d}} \quad (2.74)$$

şeklinde boyutsuzlaştırılmış olur.

Yukarıdaki (2.71), (2.72), (2.73) ve (2.74) boyutsuz katsayıları (2.70)'de yerlerine konunca,

$$\bar{W}^{III}(1) - \alpha_m \bar{\Omega}^2 \bar{W}^I(1) - \alpha_m \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{d}\lambda} \bar{W}^I(1) - \alpha_m \bar{\lambda}^2 \bar{W}(1) - \alpha_m \frac{\bar{\lambda}}{\bar{d}} = 0 \quad (2.75)$$

ifadesi elde edilir.

Burada da son bir düzenleme daha yapılmasıyla, dördüncü sınır şartı nihayet,

$$\bar{W}^{III}(1) - \alpha_m \bar{\Omega}^2 \left(1 + \frac{1}{\bar{d}\lambda}\right) \bar{W}^I(1) - \alpha_m \bar{\lambda}^2 \left(1 + \frac{1}{\bar{d}\lambda}\right) \bar{W}(1) = 0 \quad (2.76)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, boyutsuz hale getirilmiş olan öz değer problemi,

$$\begin{aligned} \bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \bar{\Omega}^2 \left[\left(\frac{1}{2}(1 - \bar{x}^2) + \alpha_m \right) \left(1 + \frac{1}{\bar{d}\lambda} \right) \right] \bar{W}^{II}(\bar{x}) + \bar{\Omega}^2 \bar{x} \left(1 + \frac{1}{\bar{d}\lambda} \right) \bar{W}^I(\bar{x}) \\ + \bar{\lambda}^2 \left[1 + \frac{1}{\bar{d}\lambda} \right] \bar{W}(\bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

diferansiyel denkleminde ve

$$\bar{W}(0) = 0, \quad (2.66)$$

$$\bar{W}^I(0) = 0, \quad (2.67)$$

$$\bar{W}'''(1) = 0, \quad (2.68)$$

$$\bar{W}'''(1) - \alpha_m \bar{\Omega}^2 \left(1 + \frac{1}{d\lambda}\right) \bar{W}'(1) - \alpha_m \bar{\lambda}^2 \left(1 + \frac{1}{d\lambda}\right) \bar{W}(1) = 0 \quad (2.76)$$

şeklindeki sınır şartlarından oluşmaktadır.

Elde edilmiş olan (2.65) diferansiyel denkleminin katsayılarının, bağımsız değişken $\bar{x}$ 'nin fonksiyonları olduğu görülmektedir. Bu denklem, değişken $\bar{W}(\bar{x})$ değerleri için sabit katsayılı olmayıp değişken katsayılıdır. İşte bu değişken katsayılı bir diferansiyel denklem ve ilgili sınır şartlarından oluşan bu öz değer probleminin çözümü için, bundan sonra Frobenius Seri Çözümü yönteminden yararlanılacaktır.

2.1.8 Frobenius Seri Çözümü

Dönen visko-elastik Bernoulli-Euler çubuğunun Maxwell modeli kullanılarak boyutsuzlaştırılmış diferansiyel denklem ve boyutsuzlaştırılmış sınır şartları elde edildi. Burada boyutsuzlaştırılmış hareket denkleminde dikkat edilirse katsayılarının, boyutsuz konum parametreleri $\bar{x}$ 'nin fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu durumda, Frobenius seri çözümü uygulanarak çözüme gidilir.

Bilindiği üzere Frobenius seri çözümü yöntemi için çözüm kabulü,

$$\bar{W}(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{x}^n \quad (2.77)$$

şeklindedir.

Burada C_n 'ler bilinmeyen katsayılar ve $\bar{x}$ ise boyutsuz konum parametresidir. Yukarıda elde edilmiş olan (2.65) boyutsuzlaştırılmış denkleminde kullanılmak üzere, (2.77) çözüm kabulü ifadelerinin değişik mertebelerden türevleri teşkil edilecektir.

Bu türev ifadelerinin sırasıyla,

$$\bar{W}'(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \bar{x}^{n-1} \quad (2.78)$$

$$\bar{W}''(\bar{x}) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n \bar{x}^{n-2} \quad (2.79)$$

$$\bar{W}^{III}(\bar{x}) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)C_n \bar{x}^{n-3} \quad (2.80)$$

$$\bar{W}^{IV}(\bar{x}) = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)C_n \bar{x}^{n-4} \quad (2.81)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir.

Şimdi ilerideki çözüm safhalarında kolaylık sağlaması için son bir boyutsuzlaştırma işlemi daha yapılacaktır.

Bu işlem için Frobenius seri çözümüyle çözülecek olan diferansiyel denklem (2.65), aşağıda,

$$\begin{aligned} \bar{W}^{IV}(\bar{x}) - \bar{\Omega}^2 \left[\left(\frac{1}{2} (1 - \bar{x}^2) + \alpha_M \right) \left(1 + \frac{1}{d\lambda} \right) \right] \bar{W}^{II}(\bar{x}) + \bar{\Omega}^2 \bar{x} \left(1 + \frac{1}{d\lambda} \right) \bar{W}^I(\bar{x}) \\ + \bar{\lambda}^2 \left[1 + \frac{1}{d\lambda} \right] \bar{W}(\bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

şeklinde tekrar edilmiştir.

Yukarıdaki denklemde,

$$a = \frac{\bar{\Omega}^2}{2} \left(1 + \frac{1}{d\lambda} \right), \quad (2.82)$$

$$b = \bar{\lambda}^2 \left(1 + \frac{1}{d\lambda} \right) \quad (2.83)$$

şeklinde a ve b diye, , aranılan öz değerleri içlerinde barındıran, iki yeni notasyon tanımlaması yapılmıştır, bunlar (2.65) denklemine yerlerine yazılırsa, bu denklemin düzenlenmiş hali,

$$\bar{W}^{IV}(\bar{x}) - a[(1 - \bar{x}^2) + 2\alpha_M] \bar{W}^{II}(\bar{x}) + 2a\bar{x} \bar{W}^I(\bar{x}) + b\bar{W}(\bar{x}) = 0 \quad (2.84)$$

şeklini alır.

Frobenius seri çözümüne gidilirken, öncelikle (2.77) çözüm kabulü ve (2.78), (2.79), (2.80) ve (2.81)'de elde edilmiş olan bu çözüm kabulünün türevleri, (2.84) numaralı bağımsız $\bar{x}$ parametresine bağlı olan değişken katsayılı denklemde yerine konulacaktır.

Bu yapıldığı takdirde çözüm işleminin ilk adımında,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)C_n \bar{x}^{n-4} - a \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n \bar{x}^{n-2} \\
& - 2a\alpha_M \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n \bar{x}^{n-2} + a\bar{x}^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n \bar{x}^{n-2} \\
& + 2a\bar{x} \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \bar{x}^{n-1} + b \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{x}^n = 0
\end{aligned} \tag{2.85}$$

ifadesi elde edilir.

İkinci adımda ise (2.85) ifadesindeki bütün terimlerdeki $\bar{x}$ çarpanının üslerini, $\bar{x}^n$ şeklinde,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{n+4} \bar{x}^n - a \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} \bar{x}^n \\
& - 2a\alpha_M \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} \bar{x}^n + a \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n \bar{x}^n \\
& + 2a \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \bar{x}^n + b \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{x}^n = 0
\end{aligned} \tag{2.86}$$

yukarıdaki gibi eşit hale getirilmeye çalışılır.

Sonraki adımda ise C_4 ve C_5 bilinmeyen katsayılarını ve bilinmeyen C_n katsayılarını bulmak için gerekli genel formu, yukarıdaki (2.86) ifadesinin bütün terimlerindeki toplam işaretlerinin başlangıç terimleri $n=2$ 'den başlayarak açmak suretiyle,

$$\begin{aligned}
& 24C_4 + 120C_5\bar{x} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{n+4} \bar{x}^n - 2aC_2 - 6aC_3\bar{x} \\
& - a \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} \bar{x}^n - 4a\alpha_M C_2 - 12a\alpha_M C_3\bar{x} \\
& - 2a\alpha_M \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} \bar{x}^n + a \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n \bar{x}^n + 2aC_1\bar{x} \\
& + 2a \sum_{n=2}^{\infty} nC_n \bar{x}^n + bC_0 + bC_1\bar{x} + b \sum_{n=2}^{\infty} C_n \bar{x}^n = 0
\end{aligned} \tag{2.87}$$

ifadesine gelinir.

Yukarıdaki (2.87) numaralı denklemdeki terimler $\bar{x}$ 'in mertebesine göre parantezlere alınarak düzenleme yapılırsa C_4 ve C_5 için,

$$C_4 = \frac{2a(1 + 2\alpha_M)C_2 - bC_0}{24}, \quad (2.88)$$

$$C_5 = \frac{6a(1 + 2\alpha_M)C_3 - (2a + b)C_1}{120}, \quad (2.89)$$

ifadeleri elde edilir.

Yine (2.87)'den C_n katsayıları için genel form ise,

$$C_{n+4} = \frac{a(1 + 2\alpha_M)(n+2)(n+1)C_{n+2} - (an(n+1) + b)C_n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.90)$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki genel form ifadesinde C_n 'ler bilinmeyen ve bulunmak istenen katsayıları göstermektedirler ve bu katsayılar elde edilmiş olan genel form ifadesinden yararlanılarak bulunurlar.

Sınır şartları için (2.77)'deki Frobenius seri çözüm kabulünün ifadesinden açılmış bir şekilde yazılmış ifadesi,

$$\bar{W}(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{x}^n = C_0 + C_1 \bar{x} + C_2 \bar{x}^2 + C_3 \bar{x}^3 + C_4 \bar{x}^4 + C_5 \bar{x}^5 + C_6 \bar{x}^6 + \dots \quad (2.91)$$

şeklindedir.

Burada ilk olarak, bu çözüm kabulü sırasıyla yer değiştirme ve eğimi ifade eden birinci ve ikinci geometrik sınır şartlarında yerine yazılırsa,

$$\bar{W}(0) = C_0 = 0, \quad (2.92)$$

$$\bar{W}'(0) = C_1 = 0 \quad (2.93)$$

elde edilmiş olur.

Yukarıda elde edilen C_0 ve C_1 katsayıları, ikinci adımda çözüm kabulünün açık formunda yerine yazılınca,

$$\bar{W}(\bar{x}) = C_2 \bar{x}^2 + C_3 \bar{x}^3 + C_4 \bar{x}^4 + C_5 \bar{x}^5 + C_6 \bar{x}^6 + \dots \quad (2.94)$$

ifadesine gelinir.

Bilinmeyen katsayıların (C_n), genel formunun verildiği (2.90) denkleminde bakılırsa, bütün C_n katsayılarının C_2 ve C_3 'e bağlı olduğu görülür. O halde, (2.94) denklemi C_2 ve C_3 'e göre düzenlenirse,

$$\bar{W}(\bar{x}) = C_2 u_2 + C_3 u_3 \quad (2.95)$$

formu elde edilir. Elde edilen bu formun içindeki u_2 ve u_3 ifadeleri,

$$u_2(\bar{x}) = \bar{x}^2 + \frac{1}{12}a(1 + 2\alpha_M)\bar{x}^4 + \frac{1}{360}(-6a + a^2(1 + 2\alpha_M)^2 - b)\bar{x}^6 + \dots, \quad (2.96)$$

$$u_3(\bar{x}) = \bar{x}^3 + \frac{1}{20}a(1 + 2\alpha_M)\bar{x}^5 + \frac{1}{840}(-12a + a^2(1 + 2\alpha_M)^2 - b)\bar{x}^7 + \dots \quad (2.97)$$

şeklindedir.

Şimdi bu çözüm kabulü dinamik sınır şartları olarak isimlendirilen üçüncü ve dördüncü sınır şartlarındaki boyutsuz yer değiştirmenin, genlik fonksiyonunun değeri olan $W(1)$ parametresine uygulanırsa,

$$\bar{W}'''(\bar{x}) = C_2 u_2''' + C_3 u_3''' = 0 \quad (2.98)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem eğilme momentine ilişkin sınır şartlarından elde edilmiş olur.

Aynı işlem dördüncü sınır şartı için uygulanırsa,

$$C_2 u_2'''' + C_3 u_3'''' - 2a\alpha_M(C_2 u_2' + C_3 u_3') - \alpha_M b(C_2 u_2 + C_3 u_3) = 0 \quad (2.99)$$

elde edilir. Elde edilen (2.99) denklemi, kesme kuvvetine ilişkin sınır şartından elde edilmiş olur.

Üçüncü ve dördüncü sınır şartlarının (2.98) ve (2.99)'deki değerlerine bakılırsa, C_2 ve C_3 bilinmeyen parametrelerinin u_2 ve u_3 türevlerine bağlı oldukları görülür.

Bilinmeyen C_2 ve C_3 katsayılarının bulunması için (2.98) ve (2.99)'da elde edilmiş olan iki homojen denklemden,

$$\begin{bmatrix} u_2'' & u_3'' \\ u_2'''' + 2a\alpha_M u_2' - \alpha_M b u_2 & u_3'''' + 2a\alpha_M u_3' - \alpha_M b u_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.100)$$

elde edilir. Burada eşitliğin sağında kalın olarak gösterilen sıfır, 2x1 boyutunda bir sütun vektördür. Bu matris ifadesinin bayağı olmayan çözümler verebilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekmektedir.

O halde, elde edilen bu matris formunun katsayılar determinantı alınınca nihayet,

$$u_2^{II} * (u_3^{III} - 2a\alpha_M u_3^I - \alpha_M b u_3) - u_3^{II} * (u_2^{III} - 2a\alpha_M u_2^I - \alpha_M b u_2) = 0 \quad (2.101)$$

elde edilir. Elde edilen bu denkleme Maxwell çubuğunun karakteristik (frekans) denklemi denir.

Birinci adımda, elde edilen karakteristik denklemin çözülmesi neticesinde, kısaltılmış a ve b parametrelerinin içinde bulunan λ sönümlü öz titreşim karakteristikleri, diğer deyimle öz değerleri, boyutsuz açısal hız ($\bar{\Omega}$), boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$), boyutsuz kütle ($\bar{\alpha}_m$) parametrelerinin değerlerine bağlı olarak elde edilir.

İkinci adımda ise,

1. boyutsuz açısal hız ($\bar{\Omega}$),
2. boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$),
3. boyutsuz kütle parametresi ($\bar{\alpha}_m$)'in

değişik değerleri için (2.101) denklemi sayısal olarak çözülmek suretiyle, λ öz değerleri elde edilir. Elde edilen bu öz değerler çizelgelerde verilmiştir. Burada öz değerlerin bulunması için kullanılan program kodu, MATLAB programında yazılmıştır ve bu kod EK A.2'de birinci sırada verilmiştir.

3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (FEM) ÇÖZÜMÜ

Dönen ve ucunda kütle bulunan visko-elastik bir Bernoulli-Euler çubuğunun, düzlem dışı titreşimlerinin incelenmesi temeline dayanan bu çalışmanın ikinci kısmında, Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak, Frobenius seri çözümünde elde edilen değerlerin tekrar hesaplanması ve elde edilen bu öz değerlerin, ilk öz değerlerle olan tutarlılıklarının incelenmesi söz konusudur.

Burada çözüm adımlarına başlamadan evvel, Sonlu Elemanlar Yöntemi için yapılmış olan kabuller belirtilecektir. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle çözüme gidilirken Maxwell sönüm modeline uyan Bernoulli-Euler çubuğu, tek boyutlu hareket edebilen ve iki düğüm noktasından oluşan 100 tane eleman kullanılarak ayrıklaştırılacaktır. Bu sonlu elemanlar, her bir düğüm noktalarında iki serbestlik derecesine sahiptirler, diğer bir ifadeyle düzlem dışı yer değiştirme ve eğim yapmaktadırlar.

Sonlu Elemanlar Yöntemiyle çözüme gidilirken üç adım izlenecektir. Bunlar sırasıyla,

1. “Zayıf” (Weak) Formun elde edilmesi,
2. Dönen ankastre çubuğun ayrıklaştırılması,
3. Global denklemin elde edilmesidir.

3.1 “Zayıf” (Weak) Formun Elde Edilmesi

Katı cisim mekaniği problemlerinde zayıf form, Virtüel İşler Prensipleri veya hareketin diferansiyel denklemiyle olmak üzere iki şekilde elde edilir. Çözümün bu aşamasında, (2.31)’de

$$EIw^{IV}(x,t) + m\ddot{w}(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2}(L^2 - x^2) + ML \right] w^{II}(x,t) + \frac{m}{\tau} \dot{w}(x,t) + m\Omega^2 x w^I(x,t) - \Omega^2 \left[\frac{m}{2\tau}(L^2 - x^2) + \frac{ML}{\tau} \right] w^{II}(x,t) + \frac{m\Omega^2 x}{\tau} w^I(x,t) = 0 \quad (2.31)$$

şeklinde elde edilmiş olan hareketin diferansiyel denklemi kullanılarak, zayıf form elde edilecektir.

Zayıf form, (2.31) denkleminin her bir teriminin ağırlık fonksiyonu (weight function, $(\bar{w})$) ile çarpılarak, başlangıç noktasından itibaren çubuk boyuna integre edilmesiyle yani, 0'dan L'ye integre edilmesiyle, elde edilir.

Yukarıdaki (2.31) numaralı hareketin diferansiyel denklemine gerekli işlemler uygulandığı takdirde zayıf form,

$$\int_0^L \bar{w} EI w^{IV} dx + \int_0^L \bar{w} m \ddot{w} dx - \Omega^2 \left[\int_0^L \bar{w} \frac{m}{2} (L^2 - x^2) w'' dx + \int_0^L \bar{w} ML w'' dx \right] + \int_0^L \bar{w} \frac{m}{\tau} \dot{w} dx + \int_0^L \bar{w} m x w' dx - \Omega^2 \left[\int_0^L \bar{w} \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) w'' dx + \int_0^L \bar{w} \frac{ML}{\tau} w'' dx \right] + \int_0^L \bar{w} \frac{mx}{\tau} w' dx = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Bu zayıf form ifadesi görüldüğü üzere yedi tane terimden oluşmaktadır. Birinci terim,

$$\int_0^L \bar{w} EI w^{IV} dx \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu integral ifadesinin değerlendirilmesi için, kısmi integral işlemi uygulanacaktır. Bu işleme ait kural bir hatırlatma olması bakımından,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3.2a)$$

şeklinde integral içindeki ifade u ve dv diye iki ifadenin çarpımı şeklinde ayrılırsa, bu ifadeler eşitliğin sağındaki gibi yazılabilir. Şimdi birinci terime geri dönülürse, yukarıdaki (3.2) nolu ifadeden,

$$u = \bar{w} \quad (3.3)$$

$$dv = EI w^{IV} dx \quad (3.4)$$

şeklinde u ve dv ifadeleri seçilerek, kısmi integral işlemine göre sırasıyla türev ve integralleri alınırsa,

$$du = \bar{w}' dx \quad (3.5)$$

$$v = EI w^{III} \quad (3.6)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.2) ifadesinde yerlerine konulduğu takdirde,

$$\int_0^L \bar{w} EI w^{IV} dx = \bar{w} EI w^{III} \Big|_0^L - \int_0^L \bar{w}' EI w^{III} dx \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi işleme devam edilecektir. Bunun için yukarıdaki (3.7) ifadesinin sağ kısımdaki integral ifadesine tekrar bir kısmi integral işlemi uygulanacaktır. Bu işlemin yapılabilmesi için (3.7)'den ,

$$u = \bar{w}' \quad (3.8)$$

$$dv = EIw'''' dx \quad (3.9)$$

şeklinde u ve dv diye iki ifade seçilerek, kısmi integral işlemi uygulandığında,

$$du = \bar{w}'' dx \quad (3.10)$$

$$v = EIw'' \quad (3.11)$$

ifadeleri bulunur.

Bu ifadeler (3.7)'de yerlerine konduğu takdirde,

$$k_s = \int_0^L \bar{w} EI w'''' dx = \bar{w} EI w''' \Big|_0^L - \bar{w}' EI w'' \Big|_0^L + \int_0^L \bar{w}'' EI w'' dx \quad (3.12)$$

elde edilir.

Yukarıda verilen, (3.2) numaralı ifadede, terimleri integralden kurtarmak için iki defa kısmi integral işlemi uygulanmıştır. Bu işlemlerin uygulanması neticesinde, birinci terimdeki yer değiştirmenin dördüncü mertebeden x 'e göre türevi, yer değiştirme ve ağırlık fonksiyonu üzerinde eşit bir biçimde yayılmıştır, diğer bir ifadeyle ikisi de x 'e göre, iki defa kısmi türeve sahip hale gelmiştir.

Yukarıdaki (3.12) numaralı ifadeye bakıldığı takdirde, iki defa kısmi integral işlemi uygulandığından dolayı, $x=0$ ve $x=L$ sınır noktalarında ikişer tane sınır şartının işin içine girdiği görülmektedir.

$x=0$ sıfır sınır noktasında eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olduğundan dolayı, yukarıdaki (3.12) numaralı denklemde, $EIw''(0,t)$ ve $EIw'''(0,t)$ ifadeleri sıfır olacaktır.

$x=L$ sınır noktasındaki $EIw''(L,t)$ ve $EIw'''(L,t)$ ifadeleri ise, sırasıyla dinamik sınır şartlarından eğilme momentini ve kesme kuvvetinden doğan ve (2.35)'de verilmiş olan dördüncü sınır şartının ikinci terimini göstermektedirler.

Zayıf formun ikinci terimi,

$$m_1 = \int_0^L \bar{w} m \ddot{w} dx = m \int_0^L \bar{w} \ddot{w} dx \quad (3.13)$$

şeklindedir. Bu ifadede yer değıştirmenin x'e göre türev bulunmamaktadır. Bu sebepten dolayı, bu ifadeye kısmi integral işlemi uygulanmamış olup, sadece düzenlenmiştir.

Yukarıda (3.1)'de verilen zayıf form ifadesinin üçüncü teriminin birinci kısmı,

$$m_2 = \int_0^L \bar{w} \frac{m}{2} (L^2 - x^2) w^{II} dx \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu integral ifadesinin değeriendirilmesi için, kısmi integral işlemine başvurulmuştur.

Bu işlemin uygulanması için yukarıdaki ifadeden,

$$u = \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w} \quad (3.15)$$

$$dv = w^{II} dx \quad (3.16)$$

şeklinde u ve dv olmak üzere iki tane değışken seçilip, kısmi integral işlemine göre sırayla,

$$du = \left(\frac{m}{2} (-2x) \bar{w} + \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w}' \right) dx \quad (3.17)$$

$$v = w^I \quad (3.18)$$

şeklinde türev ve integralleri alınmıştır. Elde edilen (3.17) ve (3.18) ifadeleri, (3.14)'da verilen ifadede yerlerine konursa,

$$m_2 = \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w} w^I \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{m}{2} (-2x) \bar{w} + \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w}' \right) w^I dx \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$m_2 = \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w} w^I \Big|_0^L + \int_0^L mx \bar{w} w^I dx - \int_0^L \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w}' w^I dx \quad (3.20)$$

elde edilmiş olur.

Yukarıdaki ifadenin integralsiz kısmında, $x=0$ konduğu takdirde elde edilen değeri, eğimi vermektedir. Bu sınır şartında eğim sıfır olduğundan dolayı elde edilecek olan değeri sıfır olacaktır.

$x=L$ sınır noktasında, L değeri yerine konduğu takdirde, (3.20) ifadesindeki integralsiz terimin parantez içindeki değeri sıfır olmasından dolayı, sıfır sonucu elde edilecektir.

Zayıf formun üçüncü teriminin ikinci kısmı,

$$M_{rip1} = \int_0^L \bar{w} M L w^{II} dx \quad (3.21)$$

olarak elde edilmiştir.

Yukarıda çubuğun sağ ucundaki uç kütle ile ilgili olan integral ifadesinin değerlendirilmesi için, kısmi integral işlemi uygulanacaktır.

Bu işlemin uygulanması için yukarıdaki ifadede,

$$u = M L \bar{w} \quad (3.22)$$

$$dv = w^{II} dx \quad (3.23)$$

şeklinde u ve dv ifadeleri seçilerek, kısmi integral işlemine tabi tutulduğunda,

$$du = M L \bar{w}' dx \quad (3.24)$$

$$v = w^I \quad (3.25)$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen (3.24) ve (3.25) ifadeleri (3.21)'deki ifadede yerine konulduğu takdirde,

$$M_{rip1} = M L \bar{w} w^I \Big|_0^L - \int_0^L M L \bar{w}' w^I dx \quad (3.26)$$

elde edilmiş olur.

Böylece elde edilen ifadede, integral ifadesinin solundaki terime sıfır değeri konulmasıyla,

$$M L \bar{w}(0) w^I(0) \quad (3.27)$$

ifadesi elde edilmiştir. $x=0$ noktasındaki sınır şartında eğim olmadığından dolayı, yukarıda bulunan değer sıfıra eşit olmuştur.

$x=L$ değeri konulduğunda ise, kesme kuvvetinden doğan ve (2.35)'de verilen dördüncü sınır şartının üçüncü teriminin birinci kısmı elde edilmiştir.

Zayıf form ifadesinin dördüncü terimi,

$$m_3 = \int_0^L \bar{w} \frac{m}{\tau} \ddot{w} dx = \frac{m}{\tau} \int_0^L \bar{w} \ddot{w} dx \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Elde edilen bu ifade, (3.13) ifadesi gibi x 'e göre türeve sahip değildir. Dolayısıyla kısmi integral işleminin uygulanmasına gerek olmadığından, sadece düzenleme yapılmıştır.

Yukarıda (3.1)'de verilmiş olan zayıf formun beşinci terimi,

$$m_4 = \int_0^L \bar{w} m x w^I dx \quad (3.29)$$

şeklindedir. Bu integral ifadesinin değerlendirilmesi amacıyla, x 'e göre türeve sahip diğer terimlere uygulandığı gibi bu integral ifadesine de kısmi integral işlemi uygulanmıştır. Bunun için,

$$u = m x \bar{w} \quad (3.30)$$

$$dv = w^I dx \quad (3.31)$$

şeklinde u ve dv ifadeleri seçilerek, kısmi integral işlemi göz önüne alındığında,

$$du = (m \bar{w} + m x \bar{w}^I) dx \quad (3.32)$$

$$v = \dot{w} \quad (3.33)$$

elde edilmiş olur.

Seçilen bu ifadeler yerlerine konursa,

$$m_4 = m x \bar{w} \dot{w} \Big|_0^L - \int_0^L (m \bar{w} + m x \bar{w}^I) \dot{w} dx \quad (3.34)$$

ifadesi elde edilir.

Bu ifadede düzenleme yapılırsa,

$$m_4 = m x \bar{w} \dot{w} \Big|_0^L - \int_0^L m \bar{w} \dot{w} dx - \int_0^L m x \bar{w}^I \dot{w} dx \quad (3.35)$$

elde edilmiş olur.

Yukarıda elde edilmiş olan ifadenin integralsiz kısmında, $x=0$ değeri yerine konulduğu takdirde, x 'in çarpan olarak bulunması sebebiyle, sıfır değeri elde edilecektir.

Yine yukarıda bulunan (3.35) nolu ifadenin integrale sahip olmayan terimine, $x=L$ konmasıyla elde edilen ifade ne geometrik ne de dinamik sınır şartından kaynaklanmaktadır. Elde edilen bu ifade, Sonlu Elemanlar Yöntemi çözümünün üçüncü aşamasında, Global matrisler elde edildikten sonra ilgili yere eklenecektir.

Zayıf formun altıncı teriminin birinci kısmı,

$$m_s = \int_0^L \bar{w} \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) w'' dx \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Bu ifadede integral ifadesinin değerlendirilmesi için, kısmi integral işlemi uygulanmıştır. Bu işlemin uygulanması için yukarıdaki ifadede,

$$u = \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w} \quad (3.37)$$

$$dv = w'' dx \quad (3.38)$$

şeklinde u ve dv ifadeleri seçilerek, kısmi integral işleminde göz önünde bulundurulursa,

$$du = \left(\frac{m}{2\tau} (-2x) \bar{w} + \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}' \right) dx \quad (3.39)$$

$$v = w' \quad (3.40)$$

elde edilir.

Elde edilen (3.39) ve (3.40) ifadeleri (3.36)'deki ifadede yerine konulmasıyla

$$m_s = \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w} w' \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{m}{2\tau} (-2x) \bar{w} + \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}' \right) w' dx \quad (3.41)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade düzenlenirse,

$$m_s = \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w} w' \Big|_0^L + \int_0^L \frac{mx}{\tau} \bar{w} w' dx - \int_0^L \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}' w' dx \quad (3.42)$$

elde edilmiş olur.

Yukarıdaki ifadede, birinci terime $x=0$ değeri konduğunda,

$$\frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}(0) w'(0) \quad (3.43)$$

ifadesi elde edilir.

Burada $x=0$ geometrik sınır şartı olan eğimi göstermektedir ve modelin $x=0$ sınır noktasında eğim olmadığından dolayı, elde edilen bu ifade sıfıra eşittir.

$x=L$ sınır noktasında, L değeri yerine konduğu takdirde, (3.43) ifadesinin parantez içindeki kısmı sıfır olduğundan dolayı, sıfır sonucu elde edilmiştir.

Zayıf formun altıncı terimin ikinci kısmı,

$$M_{tip2} = \int_0^L \bar{w} \frac{ML}{\tau} w'' dx \quad (3.44)$$

olarak elde edilmiştir. Bu ifade (3.21) ifadesi gibi, çubuğun sağ ucundaki uç kütle ile ilgilidir. Burada kısmi integral kuralı uygulanması için,

$$u = \frac{ML}{\tau} \bar{w} \quad (3.45)$$

$$dv = w'' dx \quad (3.46)$$

şeklinde u ve dv ifadeleri seçilmiştir. Bu ifadelerin sırasıyla türev ve integralleri alınır,

$$du = \frac{ML}{\tau} \bar{w}' dx \quad (3.47)$$

$$v = w' \quad (3.48)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.44)'da yerine konulduğunda,

$$M_{tip2} = \frac{ML}{\tau} \bar{w} w' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{ML}{\tau} \bar{w}' w' dx \quad (3.49)$$

ifadesi bulunmuş olur.

Burada $x=0$ değeri geometrik sınır şartı olan eğimi göstermektedir ve problemde tanımlanan modelin $x=0$ sınır noktasında eğime sahip olmamasından dolayı sıfırdır.

$x=L$ değeri konulduğunda elde edilen ifade, kesme kuvvetinden doğan ve (2.35)'de verilen dördüncü sınır şartının üçüncü teriminin ikinci kısmını göstermektedir.

Nihayet, zayıf formun son terimi olan yedinci terimi,

$$m_6 = \int_0^L \bar{w} \frac{mX}{\tau} w' dx \quad (3.50)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Burada integral ifadesinin değerlendirilmesi için, kısmi integral işlemi uygulanmıştır.

Bu işlemin uygulanması için yukarıdaki ifadede,

$$u = \frac{mX}{\tau} \bar{w} \quad (3.51)$$

$$dv = w^I dx \quad (3.52)$$

şeklinde u ve dv diye iki tane ifade seçilmiştir. Bu ifadelere kısmi integral işlemi uygulanınca,

$$du = \left(\frac{m}{\tau} \bar{w} + \frac{mx}{\tau} \bar{w}^I \right) dx \quad (3.53)$$

$$v = w \quad (3.54)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.50)'deki bağıntıda yerlerine konulduğu takdirde,

$$m_\xi = \frac{mx}{\tau} \bar{w} w \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{m}{\tau} \bar{w} + \frac{mx}{\tau} \bar{w}^I \right) w dx \quad (3.55)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen ifade düzenlenirse,

$$m_\xi = \frac{mx}{\tau} \bar{w} w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{m}{\tau} \bar{w} w dx - \int_0^L \frac{mx}{\tau} \bar{w}^I w dx \quad (3.56)$$

bulunmuş olur.

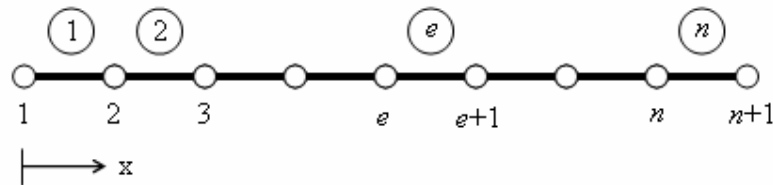
Yukarıdaki bağıntının birinci terimine $x=0$ değeri konulduğu takdirde, x 'in çarpan olarak bulunması sebebiyle sıfır değeri elde edilmiştir.

Yine yukarıda elde edilen bağıntının integralsiz kısmı olan birinci terimine $x=L$ değeri konulduğu takdirde,

$$\frac{mL}{\tau} \bar{w}(L)w(L) \quad (3.57)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, ne problemin geometrik ve ne de dinamik şartlarından kaynaklanmaktadır. Global matrisler elde edildikten sonra ilgili yere eklenecektir.

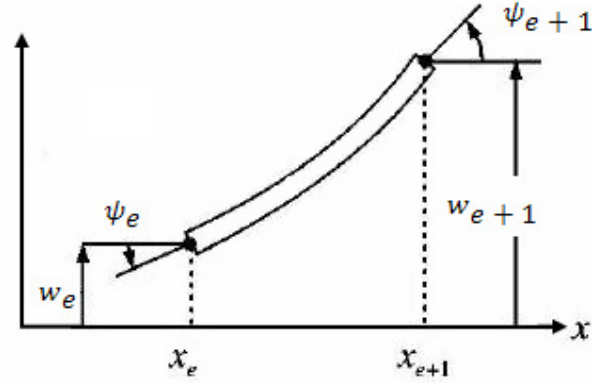
3.2 Dönen Visko-elastik Ankastre Çubuğun Ayırıklaştırılması



Şekil 3.1 : Çubuğun ayırıklaştırılmış gösterimi

Sonlu Elemanlar Yöntemiyle çözüm işleminin ikinci aşamasında, dönen visko-elastik ankastre çubuk, $n=100$ tane tek boyutlu hareket yapan, sağında ve solunda birer

düğüm noktası bulunan elemanlara, ayrılaştırılmıştır. Şekil 3.1’de verilen ayrılaştırılmış çubuğun üst kısmında bulunan daire içinde gösterilen rakamlar eleman sayısını, alt kısmındaki rakamlar ise düğüm noktası sayısını göstermektedir. Bir e elemanı için, e birinci düğüm noktasını, $e + 1$ ise ikinci düğüm noktasını göstermektedir.



Şekil 3.2 : Bir e elemanın düzlem dışı yer değiştirme ve eğiminin gösterimi

Yukarıdaki şekilde bir e sonlu elemanı için, düğüm noktalarındaki yer değiştirme ve eğimler gösterilmiştir.

Bu ifadeler sembol olarak,

$$w(x_e) = w_1, \quad (3.58)$$

$$w(x_{e+1}) = w_2, \quad (3.59)$$

$$\psi(x_e) = \psi_1, \quad (3.60)$$

$$\psi(x_{e+1}) = \psi_2 \quad (3.61)$$

şeklinde gösterilmiştir. Yukarıda bulunan bu ifadeler, herhangi bir e elemanı için 4 tane sınır şartı olduğunu göstermektedir.

Bu dört sınır şartını sağlamak amacıyla, düzlem dışı yer değiştirme (w),

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (3.62)$$

şeklinde 4 terimli veya kübik olarak seçilmiştir [22]. Yukarıdaki seçimin yapılması, zayıf form ifadesinde bulunan yer değiştirmenin x 'e göre ikinci türevinin sıfır olmamasını sağlamaktadır.

Bir e elemanı için, seçilen yer değiştirme (w) fonksiyonu, J. Chung'un makalesinde [4],

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}^T \mathbf{d}_e \quad (3.63)$$

şeklinde, şekil fonksiyonu vektörü $\mathbf{N}$ 'in transpozesi ile eleman şekil değiştirme vektörü $\mathbf{d}$ 'nin çarpımı şeklinde ifade edilmiştir. Yukarıdaki ifadede, eleman şekil değiştirme vektörü,

$$\mathbf{d}_e = \{w_e, \psi_e, w_{e+1}, \psi_{e+1}\}^T \quad (3.64)$$

şeklinde gösterildiği gibi elemanın iki düğüm noktasındaki yer değiştirme ve eğimden oluşmaktadır.

Şekil fonksiyonu vektörü, yine J. Chung'un makalesinde [4],

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \frac{(x - x_{e+1})^2(2x - 3x_e + x_{e+1})}{h_e^3} \\ \frac{(x - x_e)(x - x_{e+1})^2}{h_e^2} \\ -\frac{(x - x_e)^2(2x + 3x_e - x_{e+1})}{h_e^3} \\ \frac{(x - x_e)^2(x - x_{e+1})}{h_e^2} \end{Bmatrix}^T \quad (3.65)$$

şeklinde verilmiştir.

Yukarıda verilmiş olan şekil fonksiyonu vektörü içinde bulunan ve bir elemanın uzunluğunu ifade eden h_e ise,

$$h_e = x_{e+1} - x_e \quad (3.66)$$

şeklindedir.

Yer değiştirme için ağırlık fonksiyonu,

$$\bar{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{N} \quad (3.67)$$

olarak şekil fonksiyonu vektörü $\mathbf{N}$ ile keyfi sütun vektörü olan $\boldsymbol{\eta}_e$ 'nin çarpımı şeklinde seçilmiştir [4].

Problemin hareket denklemi, (3.63) nolu yer değiştirme fonksiyonunun, (3.67) nolu ağırlık fonksiyonunun, (3.1) nolu zayıf formdan elde edilen (3.12), (3.13), (3.20),

(3.26), (3.28), (3.35), (3.42), (3.49) ve (3.56) nolu ifadelerin içlerinde göz önünde bulundurulması suretiyle,

$$\sum_{e=1}^N (\eta_e)^T [k_e \dot{d} + m_1 \ddot{d} - \Omega^2 (m_2 + M_{tip1}) \dot{d} + m_3 \ddot{d} + \Omega^2 m_4 \dot{d} - \Omega^2 (m_5 + M_{tip2}) \dot{d} + \Omega^2 m_6 d] = 0 \quad (3.68)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Bu denklem, terimlerinin mertebelerine göre düzenlenecek olursa,

$$\sum_{e=1}^N (\eta_e)^T [m_1 \ddot{d} + m_3 \ddot{d} + \{k_e - \Omega^2 (m_2 + M_{tip1} - m_4)\} \dot{d} - \Omega^2 (m_5 + M_{tip2} - m_6) d] = 0 \quad (3.69)$$

ifadesi elde edilmiş olur.

Elde edilmiş olan yukarıdaki denklemde baştaki toplam işaretinin üzerindeki üst limit N eleman sayısını göstermektedir. Eleman sayısı, FEM çözümünde 100 olarak seçilmiştir.

Hareketin diferansiyel denklemindeki terimler düzenlenmiş bir şekilde sırayla aşağıda gösterilecektir.

Birinci terimin düzenlenmiş hali,

$$m_1 = m \int_0^L NN^T dx \quad (3.70)$$

şeklindedir.

İkinci terimin düzenlenince,

$$m_3 = \frac{m}{\tau} \int_0^L NN^T dx \quad (3.71)$$

şeklini almıştır.

Üçüncü terimin birinci kısmının düzenlenmiş hali,

$$k_e = \bar{w} EI w''' \cdot |_0^L - \bar{w}' EI w'' \cdot |_0^L + EI \int_0^L \frac{d^2 N}{dx^2} \frac{d^2 N^T}{dx^2} dx \quad (3.72)$$

olarak elde edilmiştir.

Üçüncü terimin ikinci kısmı,

$$m_2 = \frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w} w' \cdot |_0^L + m \int_0^L x N \frac{dN^T}{dx} dx - \frac{m}{2} \int_0^L (L^2 - x^2) \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} dx \quad (3.73)$$

şeklinde düzenlenmiştir.

Üçüncü terimin üçüncü kısmının düzenlenmesi sonucunda,

$$\mathbf{M}_{tip1} = ML\bar{w}w^{,f}|_0^L - ML \int_0^L \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} dx \quad (3.74)$$

ifadesi elde edilmiştir.

Üçüncü terimin dördüncü kısmı düzenlenince,

$$\mathbf{m}_4 = mx\bar{w}w^{,f}|_0^L - m \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx - m \int_0^L x \frac{dN}{dx} \mathbf{N}^T dx \quad (3.75)$$

şeklini almıştır.

Dördüncü terimin birinci kısmının düzenlenmiş hali,

$$\mathbf{m}_5 = \frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}w^{,f}|_0^L + \frac{m}{\tau} \int_0^L x \mathbf{N} \frac{dN^T}{dx} dx - \frac{m}{2\tau} \int_0^L (L^2 - x^2) \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} dx \quad (3.76)$$

olarak elde edilir.

Dördüncü terimin ikinci kısmının düzenlenmiş hali,

$$\mathbf{M}_{tip2} = \frac{ML}{\tau} \bar{w}w^{,f}|_0^L - \frac{ML}{\tau} \int_0^L \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} dx \quad (3.77)$$

olarak gösterilmiştir.

Dördüncü terimin üçüncü kısmının düzenlenmiş hali ise,

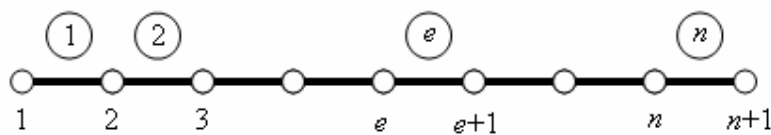
$$\mathbf{m}_6 = \frac{mx}{\tau} \bar{w}w^{,f}|_0^L - \frac{m}{\tau} \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx - \frac{m}{\tau} \int_0^L x \frac{dN}{dx} \mathbf{N}^T dx \quad (3.78)$$

olarak elde edilmiştir.

3.3 Global Denklemin Elde Edilmesi

Sonlu Elemanlar Yönteminin üçüncü ve son aşamasında, Global denklem elde edilecektir. Bunun için (3.69)'de elde edilmiş olan hareket denkleminin 100 tane sonlu eleman için birleştirilmesi gerekmektedir.

Burada n=100 tane elemandan oluştuğu kabul edilen dönen çubuğun modeli,



Şekil 3.3 : 100 elemandan oluşan çubuğun gösterimi

şeklinde gösterilmiştir. Bu model 101 tane düğüm noktasına sahiptir ve her bir düğüm noktasında yer değiştirme ve eğim olmak üzere iki serbestlik derecesi mevcuttur. Bu durumda çubuk modeli, 202 serbestlik derecesine sahip olmaktadır.

Yukarıda elde edilmiş olan (3.69) denkleminde bakıldığında, sonlu elemanların birleştirilmesi durumunda 9 tane ayrı Global matris elde edileceği görülmektedir. Bu Global matrisler oluşturulurken, bir elemanın ikinci düğüm noktasındaki yer değiştirme ve eğimle, onun hemen sağındaki diğer elemanın birinci düğüm noktasındaki yer değiştirme ve eğim toplanacaktır.

Bu Global matrislerin tamamının yer sorunu nedeniyle gösterilemeyeceğinden dolayı, 100 eleman için oluşturulan ve K diye isimlendirilen bir matris kısaltılmış olarak,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & K_{33}^{99} + K_{11}^{100} & K_{34}^{99} + K_{12}^{100} & K_{13}^{100} & K_{14}^{100} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{43}^{99} + K_{21}^{100} & K_{44}^{99} + K_{22}^{100} & K_{23}^{100} & K_{24}^{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{31}^{100} & K_{32}^{100} & K_{33}^{100} & K_{34}^{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{41}^{100} & K_{42}^{100} & K_{43}^{100} & K_{44}^{100} \end{bmatrix}$$

Şekil 3.4 : K matrisinin gösterimi

şeklinde gösterilmiştir.

Buradaki, çubuk modelinde $x=0$ noktasındaki sınır şartı göz önüne alındığında, 1 numaralı sonlu elamanın ilk düğüm noktasında yer değiştirme (w_1) ve eğim (ψ_1) sıfır olduğundan, 202x202 boyutunda olan bu Global matrislerin ilk iki satır ve sütunları kaldırılması suretiyle bu matrisler 200x200 boyutunda matrislere indirgenmişlerdir.

Şimdi yukarıda elde edilmiş olan hareket denkleminin ifadesi,

$$\sum_{e=1}^N (\eta_e)^T [m_1 \ddot{d} + m_3 \ddot{d} + \{k_e - \Omega^2 (m_2 + M_{tip1} - m_4)\} \dot{d} - \Omega^2 (m_5 + M_{tip2} - m_6) d] = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde idi.

Bu ifadede, Sonlu Eleman sayısı N=100 için elde edilen matrislerin birleştirilmesi ve η_e keyfi bir vektör olduğundan, yukarıdaki denklemden yok edilmesi sonucu Global denklemin ifadesi,

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{M}_3 \ddot{\mathbf{d}} + \{\mathbf{K}_e - \Omega^2(\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_{TIP1} - \mathbf{M}_4)\} \dot{\mathbf{d}} - \Omega^2(\mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_{TIP2} - \mathbf{M}_6) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

şeklinde elde edilir.

Global denklem elde edildikten sonra aşağıdaki,

$$\begin{aligned} EI \bar{w} w^{III} \Big|_0^L - EI \bar{w}' w^{II} \Big|_0^L - \Omega^2 \left(\frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w} w' \Big|_0^L + ML \bar{w} w' \Big|_0^L - mx \bar{w} \dot{w} \Big|_0^L \right) \\ - \Omega^2 \left(\frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w} w' \Big|_0^L + \frac{ML}{\tau} \bar{w} w' \Big|_0^L - \frac{mx}{\tau} \bar{w} w \Big|_0^L \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

şeklindeki ifadeler fazla olarak Global matrislere yerleştirilmemiş durumda kalmışlardır. Bu ifadeler öncelikle sınır şartlarıyla eşleştirilecektir. Bunun için, model x=0 sınır noktasında göbeğe sabitlenmiş olduğundan dolayı, bu noktaya karşılık gelen sınır şartları sıfır değerini alacaktır. O halde yukarıdaki (3.80) ifadesi, sadece x=L'deki sınır şartları göz önüne alınarak açılırsa,

$$\begin{aligned} EI \bar{w}(L) w^{III}(L, t) - EI \bar{w}'(L) w^{II}(L, t) - \Omega^2 \left(\frac{m}{2} (L^2 - x^2) \bar{w}(L) w'(L, t) + \right. \\ \left. ML \bar{w}(L) w'(L, t) - mx \bar{w}(L) \dot{w}(L, t) \right) - \Omega^2 \left(\frac{m}{2\tau} (L^2 - x^2) \bar{w}(L) w'(L, t) + \right. \\ \left. \frac{ML}{\tau} \bar{w}(L) w'(L, t) - \frac{mx}{\tau} \bar{w}(L) w(L, t) \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifadede, çubuğun x=L noktasındaki dinamik sınır şartları olan eğilme momenti

$$EI w^{II}(L, t) = 0 \quad (2.34)$$

ve kesme kuvveti,

$$M \left[\ddot{w}(L, t) + \frac{1}{\tau} \dot{w}(L, t) \right] - EI w^{III}(L, t) + ML \Omega^2 \left[w'(L, t) + \frac{1}{\tau} w'(L, t) \right] = 0 \quad (2.35)$$

ile eşleştirme yapıldığı takdirde,

$$\Omega^2 mx \bar{w}(L) \dot{w}(L, t) + \Omega^2 \left(\frac{mx}{\tau} \bar{w}(L) w(L, t) \right) + M(\ddot{w}(L, t) + \frac{1}{\tau} \dot{w}(L, t)) \quad (3.82)$$

ifadesindeki terimler fazla olarak kalmaktadır. Bu ifadedeki terimler, (3.79)'de 100 tane sonlu elemanın birleştirilmesiyle elde edilen Global matrislerde x=L sınır şartını ifade eden uygun yere eklenecektir. Bunun yapılması durumunda çözülmesi düşünülen matris formu doğru bir şekilde elde edilmiş olur.

Global şekil değiştirme vektörü için, birinci sonlu elemandaki yer değiştirme ve eğimin sıfır olması göz önüne alındığı takdirde,

$$d_e = \{w_2, \psi_2, w_3, \psi_3, \dots, w_{100}, \psi_{100}, w_{101}, \psi_{101}\}^T \quad (3.83)$$

şeklinde elde edilir.

Sonlu elemanların birleştirilmesinden elde edilen Global matrisler ise,

$$\begin{aligned} M_1 &= \overset{n}{A} m_1, \quad M_3 = \overset{n}{A} m_3, \quad K_e = \overset{n}{A} k_e, \quad M_2 = \overset{n}{A} m_2, \quad M_{TIP1} = \overset{n}{A} M_{TIP1} \\ M_4 &= \overset{n}{A} m_4, \quad M_5 = \overset{n}{A} m_5, \quad M_{TIP2} = \overset{n}{A} M_{TIP2}, \quad M_6 = \overset{n}{A} m_6 \end{aligned} \quad (3.84)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki ifadelerde, alt ve üst indise sahip A simgeleri 200x200 boyutunda Global matrisleri göstermektedirler, üst indislerde bulunan n'ler ise, Sonlu Elemanlar Yöntemi için seçilen 100 tane eleman sayısını göstermektedirler.

Yukarıda (3.79)'da verilen Global denklemin çözümü için Global şekil değiştirme vektörü için,

$$d = X e^{\lambda t} \quad (3.85)$$

şeklinde biri yalnızca konumun vektörü, diğeri de yalnızca zamanın fonksiyonu olan iki ifadenin çarpımı şeklinde bir çözüm kabulü yapılacaktır. Bilindiği üzere buna değişkenlerin ayrışması metodu denmektedir. Bu çözüm kabulünde zamanın fonksiyonu olan λ çözümü aranan sönümlü öz titreşim karakteristiklerini göstermektedir.

Bu çözüm kabulü, (3.79) nolu denkleme yerleştirildiğinde aşağıdaki,

$$[\lambda^3 M_1 + \lambda^2 M_3 + \{K_e - \Omega^2 (M_2 + M_{TIP1} - M_4)\} \lambda - \Omega^2 (M_5 + M_{TIP2} - M_6)] X = 0 \quad (3.86)$$

şeklinde bir kübik özdeğer problemi elde edilir.

Yukarıda elde edilen bu kübik özdeğer probleminin çözümü için Swensson [23]'deki düzenli form yazılacaktır.

Swensson tarafından yayınlanan çalışmada,

$$(A_0 + \omega A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3) X = 0 \quad (3.87)$$

şeklinde bir üçüncü dereceden kübik öz değer problemi tanımlanmıştır.

Bu öz değer problemindeki parametreler, A_0 , A_1 , A_2 ve A_3 kare matrisleri göstermektedir. X öz vektörü ve U ise, genişletilmiş öz vektör olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlanan genelleştirilmiş öz vektör,

$$U = \begin{Bmatrix} X \\ \omega X \\ \omega^2 X \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

şeklinde. Swensson'un makalesinde yer verilen ve yukarıda (3.87) nolu ifadede gösterilen kübik öz değer probleminden aranan ω öz değerlerin bulunması için gerekli matris formu,

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

şeklinde düzenlenmiştir.

Şimdi yukarıda verilen matrisler $n \times n$ boyutuna sahiptirler ve matrislerin içlerindeki I 'lar ve 0 'lar sırayla, birim matrisleri ve bütün elemanları sıfır olan sıfır matrislerini göstermektedirler. Eşitliğin sağında bulunan ve kalın olarak gösterilen sıfır ise, $n \times 1$ boyutuna sahip sütun vektörü göstermektedir.

Şimdi yukarıda verilen (3.86) kübik öz değer problemi, (3.89)'de verilen düzenli matris formuna göre düzenlendiği takdirde,

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2(M_5 + M_{TIP2} - M_6) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} -(K_e - \Omega^2(M_2 + M_{TIP1} - M_4)) & -M_3 & -M_1 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.90)$$

elde edilir.

Yukarıdaki (3.90) nolu ifadede bulunan matrisler 600×600 boyutundadırlar. Matrislerin içindeki I birim matrislerinin boyutları ve 0 matrislerinin boyutları 200×200 boyutundadır.

Eşitliğin hemen sağındaki kalın olarak gösterilen 0 , 600×1 boyutunda bir sütun vektörünü göstermektedir. λ ise, aranan öz değerleri göstermektedir.

Burada ilk adımda, λ öz değeri boyutsuz açısal hız ($\bar{\Omega}$), boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$), boyutsuz kütle parametresi ($\bar{\alpha}_m$)'e bağı olarak elde edilmiştir.

İkinci adımda ise,

4. boyutsuz açısal hız ($\bar{\Omega}$),
5. boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$),
6. boyutsuz kütle parametresi ($\bar{\alpha}_m$)'in

değişik değeri için (3.90) düzenli matris formu sayısal olarak çözülmek suretiyle, λ öz değeri elde edilir. Elde edilen bu öz değeri eklerde verilen çizelgelerde kalın gösterimle verilmiştir. Burada öz değeri bulunması için kullanılan program kodu MATHEMATICA programında yazılmıştır ve bu kod EK A.2'de ikinci sırada verilmiştir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölüm, ikinci bölümde çıkarılmış olan ve daha önce literatürde yer almayan frekans (karakteristik) denkleminin sayısal olarak çözülmesi neticesinde, öz değerlerinin bulunmasına ve üçüncü bölümdeki Sonlu Elemanlar Yönteminde elde edilen kübik özdeğer probleminin çözümlerinin elde edilmesine ve değerlendirilmesine ayrılmıştır.

Şekil 2.2’de gösterilen, ucunda kütle bulunan dönen visko-elastik bir Bernoulli-Euler çubuğu için Çizelge 4.1 ve 4.2’de verilen boyutsuzlaştırılmış birinci özdeğerler, boyutsuzlaştırılmış sönümün 0.5 ve 1 olmaları durumları için, boyutsuzlaştırılmış uç kütlelerin olmamasının, diğer bir ifadeyle sıfır olmasının ve 1, 2, 5 olması durumları için ve boyutsuzlaştırılmış açısal hızının ise, 0’dan 10’a kadar olması durumları için hesaplanmıştır.

Çizelgelerde, elde edilen her bir özdeğerlerin biri normal, diğeri kalın olarak gösterilmek üzere ikişer değerleri vardır. Bu çizelgelerdeki ilk satırdaki değerler, Frobenius seri çözümüyle çıkarılmış olan karakteristik denklemden elde edilen değerleri göstermektedirler, kalın olarak gösterilen ikinci değerler ise, Sonlu Elemanlar Yöntemiyle elde edilmiş olan sayısal değerleri göstermektedirler. Frobenius seri çözümü için 100 terim ve Sonlu Elemanlar Yöntemi çözümü içinse, 100 tane eleman kullanılmıştır

Frobenius seri çözümüyle elde edilen öz değerler ile Sonlu Elemanlar Yöntemiyle (FEM) hesaplanan öz değerler karşılaştırıldığında, hesaplanan sayısal değerlerin tutarlı olduğu verilen çizelgelerde açıkça görülmektedir.

Frobenius seri çözüm yönteminden öz değerlerin hesaplanması için Matlab programında yazılan bir kod, Sonlu Elemanlar Yönteminden öz değerlerin hesaplanması için Mathematica programında yazılan bir kod kullanılmıştır. Bu programların kodları EK A.2’de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Sönüm oranının 0.5 olduğu durumdaki titreşim karakteristikleri

	$a_M = 0$	$a_M = 1$	$a_M = 2$	$a_M = 5$
0	-1.000000±3.370810i -1.000000±3.370807i	-1.000000±1.193808i -1.000000±1.193810i	-1.000000±0.584312i -1.000000±0.584305i	-1.000000±15.570266i -1.000000±15.570266i
1	-0.909934±3.521232i -0.909933±3.521231i	-0.548476±1.527750i -0.548475±1.527750i	-0.305774±1.268545i -0.305773±1.268544i	-0.133741±1.146310i -0.133740±1.146309i
2	-0.709125±3.974126i -0.709125±3.974125i	-0.272965±2.509451i -0.272964±2.509451i	-0.171284±2.334670i -0.171284±2.334670i	-0.093405±2.198155i -0.093405±2.198154i
3	-0.519905±4.664641i -0.519904±4.664640i	-0.175935±3.504284i -0.175934±3.504284i	-0.117220±3.349063i -0.117220±3.349063i	-0.068989±3.213654i -0.068988±3.213653i
4	-0.385294±5.488426i -0.385294±5.488426i	-0.128336±4.498566i -0.128335±4.498565i	-0.088519±4.352540i -0.088518±4.352539i	-0.053892±4.219441i -0.053892±4.219441i
5	-0.295319±6.380895i -0.295319±6.380894i	-0.100700±5.493578i -0.100699±5.493577i	-0.070871±5.352988i -0.070871±5.352987i	-0.043926±5.221884i -0.043926±5.221883i
6	-0.234649±7.310990i -0.234648±7.310990i	-0.082780±6.489507i -0.082779±6.489506i	-0.058979±6.352500i -0.058978±6.352499i	-0.036946±6.222968i -0.036946±6.222967i
7	-0.192572±8.263223i -0.192571±8.263222i	-0.070246±7.486216i -0.070246±7.486216i	-0.050447±7.351733i -0.050446±7.351733i	-0.031820±7.223438i -0.031820±7.223437i
8	-0.162414±9.229226i -0.162414±9.229226i	-0.060996±8.483533i -0.060995±8.483533i	-0.044040±8.350917i -0.044039±8.350916i	-0.027913±8.223603i -0.027912±8.223609i
9	-0.140086±10.204177i -0.140086±10.204176i	-0.053890±9.481318i -0.053889±9.481317i	-0.039058±9.350133i -0.039058±9.350132i	-0.024840±9.223620i -0.024841±9.223629i
10	-0.123047±11.185158i -0.123047±11.185158i	-0.048262±10.479463i -0.048262±10.479462i	-0.035078±10.349409i -0.035077±10.349409i	-0.022360±10.223570i -0.022368±10.223572i

Çizelge 4.2: Sönüm oranının 1 olduğu durumdaki titreşim karakteristikleri

	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
0	-0.500000±3.480282i -0.500000±3.480278i	-0.500000±1.474848i -0.500000±1.474850i	-0.500000±1.044711i -0.500000±1.044710i	-0.500000±0.568291i -0.500000±0.568291i
1	-0.455801±3.642289i -0.455801±3.642288i	-0.325076±1.812451i -0.325076±1.812450i	-0.241880±1.491530i -0.241879±1.491529i	-0.130650±1.244423i -0.130649±1.244422i
2	-0.359958±4.097220i -0.359957±4.097219i	-0.165212±2.624364i -0.165212±2.624364i	-0.110408±2.412723i -0.110408±2.412722i	-0.062097±2.240870i -0.062096±2.240870i
3	-0.267847±4.764107i -0.267846±4.764107i	-0.099991±3.560497i -0.099991±3.560496i	-0.067692±3.387503i -0.067691±3.387502i	-0.040189±3.236444i -0.040188±3.236444i
4	-0.199555±5.560489i -0.199554±5.560488i	-0.069838±4.530866i -0.069837±4.530866i	-0.048429±4.375112i -0.048428±4.375112i	-0.029611±4.233329i -0.029611±4.233329i
5	-0.152729±6.432006i -0.152729±6.432006i	-0.053386±5.514345i -0.100049±0.073747i	-0.037669±5.367759i -0.037669±5.367759i	-0.023407±5.231145i -0.023407±5.231144i
6	-0.120855±7.347742i -0.120855±7.347742i	-0.043189±6.503944i -0.043188±6.503943i	-0.030819±6.362891i -0.030819±6.362890i	-0.019338±6.229551i -0.019338±6.229550i
7	-0.098734±8.290336i -0.098734±8.290335i	-0.036274±7.496825i -0.036273±7.496825i	-0.026077±7.359428i -0.026077±7.359427i	-0.016467±7.228343i -0.016467±7.228343i
8	-0.082931±9.249801i -0.082930±9.249800i	-0.031277±8.491656i -0.031277±8.491656i	-0.022600±8.356838i -0.022599±8.356837i	-0.014338±8.227400i -0.014335±8.227400i
9	-0.071284±10.220217i -0.071284±10.220217i	-0.027497±9.487735i -0.027496±9.487735i	-0.019941±9.354827i -0.019940±9.354827i	-0.012687±9.226645i -0.012689±9.226644i
10	-0.062439±11.197971i -0.062439±11.197971i	-0.024536±10.484660i -0.024536±10.484660i	-0.017841±10.353222i -0.017840±10.353221i	-0.011381±10.226000i -0.011381±10.226024i

Yukarıda verilen Maxwell sönüm modeli için hazırlanmış olan çizelgelerde, birer kompleks sayı olan boyutsuzlaştırılmış öz değerler, gerçel (real) ve sanal (imaginary) kısımlar olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadırlar. Gerçel kısımlar sönümü temsil etmektedirler ve sistem, kararlı bir sistem olduğu için, negatif işarete sahiptirler. Sanal kısımlar ise öz frekanslara karşılık gelmektedir.

Aşağıda “boyutsuzlaştırılmış” ekinin sık tekrarından kaçınılması amacıyla, “boyutsuzlaştırılmış parametreler” yerine kısaca “parametrelerden” söz edilecektir.

Sönüm oranı $(\bar{d})$ ’nin 0.5 ve 1 olarak alınmış olduğu durumlar için verilmiş olan çizelgelere bakıldığında,

- sönüm oranı $(\bar{d})$ ’nin artmasıyla, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerinin azaldığı,
- açısal hız $(\bar{n})$ ’nin artması durumuna bakıldığında, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerinin düştüğü,
- sabit açısal hızda, kütle parametresi (α_M) ’in artmasıyla, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerinin azaldığı görülmektedir.

Diğer bir ifadeyle yukarıda sayılan üç durumda da, sönümün etkisinin azaldığı görülmüştür.

Yukarıda kısaca değinildiği üzere, öz değerlerin sanal kısımları, öz frekanslarla ilgilidir. Maxwell sönüm modelinde,

- sabit açısal $(\bar{n})$ hızında, kütle parametresi (α_M) ’in artmasıyla, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerinin azaldığı görülmektedir. Bu durum öz frekansların azaldığını göstermektedir,
- diğer taraftan, kütle parametresi (α_M) ’in sabit tutulması durumunda, açısal hız $(\bar{n})$ ’nin artmasıyla, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerinin arttığı,
- sönüm oranı $(\bar{d})$ ’nin 0.5’den 1’e çıkması durumunda, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerinin arttığı görülmektedir.

Bu verilen son iki durum öz frekansların arttığını ortaya koymaktadır.

Sönüm oranı $(\bar{d})$ ’nin değişik değerler alması durumunda, elde edilen sönümlü öz titreşim karakteristiklerini gösteren çizelgeler eklerde verilmiştir.

Verilen çizelgelere bakıldığında, söz edilen açısal hız $(\bar{n})$, kütle (α_M) , sönüm $(\bar{d})$ parametrelerinin değişmesi durumunda, öz değerlerde ortaya çıkan eğilimlerin, yukarıda gözlenen eğilimlerde benzer olduğu görülmüştür.

5. SONUÇLAR

Teknik literatürde, günlük hayatta karşılaşılan dönen çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşim davranışlarının incelenmesi üzerine birçok yayın bulunmaktadır. Bu çalışmaların bazılarında, çubuğun serbest ucunda uç kütleinin bulunması durumu için de araştırmalar yapılmıştır. Bu yapılan çalışmaların çoğunda sönüm, çözülmesi istenen modele dahil edilmemiştir.

Bu tez çalışmasında incelenen problem, dönen visko-elastik bir Bernoulli-Euler çubuğunun düzlem dışı titreşimleriyle ilgilidir. Diğer çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada, dönen çubuğa Maxwell visko-elastik sönüm modeli eklenmiştir ve çubuğun ucunda, bir uç kütle vardır. Sonuçlara ulaşmak için elde edilmiş olan kesin karakteristik denklemin, daha önce literatürde yer almadığı görülmüştür.

Maxwell visko-elastik sönüm modeli kullanılan, dönen visko-elastik bir Bernoulli-Euler çubuğunun düzlem dışı titreşimlerinin karakteristikleri, Çizelge 4.1, 4.2 ve eklerde verilmiştir. Bu çizelgeler yardımıyla, Frobenius seri çözüm yönteminden ve Sonlu Elemanlar Yönteminden elde edilen sayısal sonuçların, diğer bir deyimle öz değerlerin birbirleriyle olan tutarlılıkları irdelenmiştir.

Aşağıda “boyutsuzlaştırılmış” ekinin sık tekrarından kaçınmak amacıyla, “boyutsuzlaştırılmış parametreler” yerine kısaca “parametrelerden” söz edilecektir.

Çizelge B.1’de verilmiş olan, Maxwell sönüm modelinden elde edilen öz değerlerinin gerçel kısımlarının büyüklükleri ile Gürgöze ve Zeren’in [17], eklerdeki Çizelge B.2’de verilen, Kelvin-Voigt modelinden bulmuş oldukları sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır ve bu çalışmalarla ilgili olarak aşağıda bir takım gözlemlere yer verilmiştir.

Maxwell modelinde,

- sabit ($\bar{n}$) açısal hızında, kütle parametresi (α_M)’in artmasının, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerini azalttığı tespit edilmiştir.

Verilen bu durum Kelvin-Voigt modeli için de geçerlidir, yani bu modelde de sönüm etkisi azalmaktadır.

Maxwell modelinde,

- açısal hız ($\bar{n}$) ve kütle parametresi (α_M)'in sabit tutularak, sönüm oranı artırıldığında, yine öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerinin azaldığı görülmüştür.

İncelenen bu durum Kelvin-Voigt modelinde kütlenin olmadığı durum dahil edilmemek şartıyla tam tersidir, yani bu modelde sönüm etkisi artmaktadır.

Maxwell modelinde,

- kütle parametresi (α_M)'in sabit tutulması durumunda, açısal hız ($\bar{n}$)'nin artmasının, öz değerlerin gerçel kısımlarının büyüklüklerini azalttığı anlaşılmıştır.

İncelenen bu durum, Kelvin-Voigt modelinde tam tersidir, yani açısal hız ($\bar{n}$)'nin artmasıyla, Maxwell modelinde sönüm etkisinin azalmasına karşın Kelvin-Voigt modelinde sönüm etkisi artmaktadır.

Maxwell sönüm modelinden elde edilen öz değerlerinin sanal kısımlarının büyüklükleri ile Kelvin-Voigt modelinden bulunan sayısal sonuçlar karşılaştırılması neticesinde,

Maxwell modelinde,

- sabit ($\bar{n}$) açısal hızında, kütle parametresi (α_M)'in artmasının, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerini azalttığı tespit edilmiştir, diğer bir ifadeyle öz frekansların azaldığı görülmüştür,

Kelvin-Voigt modelinde ise, sönüm oranının 0.1, 0.5 ve 1 (kütle parametresinin göz önünde bulundurulmaması koşuluyla) alınması durumlarında aynı eğilim gözlenmektedir, fakat sönüm oranının 2 olduğu durum incelendiğinde Kelvin-Voigt sönüm modeli için genel bir eğilimden söz edilememektedir.

Maxwell modelinde,

- kütle parametresi (α_M)'in sabit tutulması durumunda, açısal hız ($\bar{n}$)'nin artması, öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüğünün arttırdığı gözlenmiştir.

Bu durum, Kelvin-Voigt modeli için de geçerlidir, yani bu modelin de öz frekansları artmaktadır.

Maxwell modelinde,

- açısal hız ($\bar{\Omega}$) ve kütle parametresi (α_M)'in sabit tutularak, sönüm oranı ($\bar{d}$)'nin artırıldığında, bu modelde öz değerlerin sanal kısımlarının büyüklüklerinin arttığı anlaşılmıştır.

Gözlenen bu durum, Kelvin-Voigt modelinde ise düzenli bir eğilime sahip değildir, sadece genel olarak bu modelde, sönüm oranının artmasıyla, küçük açısal hızlar için öz frekanslar azalırken, yüksek açısal hızlarda öz frekanslar artmaktadır denilebilir.

Yapılan bu tez çalışmasında, çizelgeler halinde verilmiş olan öz değerlerin, Maxwell ve Kelvin-Voigt sönüm modellerinin kullanıldığı, dönen visko-elastik çubukların titreşim karakteristikleri ile ilgili çalışmayı hedefleyen kişiler için önemli bir kaynak niteliği taşıyacağı ve ayrıca, dönen çubuğun sönüme sahip olmadığı durumdaki sayısal sonuçlarla bir karşılaştırma yapılabilmesi olanağını sağlayacağı düşünülmekte ve ümit edilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Al-Ansary, M. D.**, 1998. Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia. *Computers & Structures*, **69**, 321-328.
- [2] **Banerjee, J. R.**, 2000. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, **233**, 857-875.
- [3] **Pescheck, E., Pierre, C., and Shaw, S. W.**, 2002. Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes. *Transaction of the ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **124**, 229-236.
- [4] **Chung, J., and Yoo, H. H.**, 2002. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using finite element method. *Journal of Sound Vibration*, **249**, 147-164.
- [5] **Yoo, H. H., Cho, J. E., and Chung, J.**, 2006. Modal analysis and shape optimization of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, **290**, 223-241.
- [6] **Jones, L. H.**, 1975. Transverse vibrations of a rotating beam with a tip mass method of integral-equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, **33**, 193-203.
- [7] **Boyce, W. E., and Handelman, G. H.**, 1961. Vibrations of rotating beams with tip mass. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **12**, 369-392.
- [8] **Hoa, S. V.**, 1979. Vibration of a rotating beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, **67**, 369-381.
- [9] **Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W., and Wang, J. L. C.**, 1982. Vibration modes of centrifugally stiffened beams. *Journal of Applied Mechanics*, **49**, 197-202.
- [10] **Ahn H. J.**, 1983. On random transverse vibrations of a rotating beam with a tip mass method of integral equations. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **36**, 97-109.
- [11] **Bhat, R. B.**, 1986. Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with a tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, **105**, 199-210.
- [12] **Kuo, Y. H., Wu, T. H., and Lee, S. Y.**, 1992. Bending vibrations of a rotating non uniform beam with tip mass and an elastically restrained root. *Computers & Structures*, **42**, 229-236.

- [13] **Yoo, H. H., Seo, S., and Huh, K.,** 2002. The effect of a concentrated mass on the modal characteristics of a rotating cantilever beam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **216**, 151-163.
- [14] **Lee, S. Y., Lin, S. M., and Wu, C. T.,** 2004. Free vibrations of a rotating non uniform beam with arbitrary pretwist, an elastically restrained root and tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, **273**, 477-492.
- [15] **Mei, C.,** 2008. Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam. *Computers & Structures*, **86**, 1280-1284.
- [16] **Abolghasemi, M., and Jalali, M. A.,** 2003. Attractors of a rotating visco-elastic beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **38**, 739-751.
- [17] **Gürgöze, M., and Zeren, S.,** (Baskıda). On the eigen characteristics of a centrifugally stiffened, visco-elastic beam carrying a tip mass. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*.
- [18] **Pasin, F.,** 1994. *Mekanik Sistemler Dinamiği*, 127-138, Matbaa teknisyenleri basımevi, İstanbul.
- [19] **Gürgöze, M.,** 1984. *Analitik Metotlarla Titreşimlerin Etüdü*, 120-133, İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi Offset baskı atölyesi, İstanbul.
- [20] **Stevens, K. K.,** 1966. On the parametric excitation of a visco-elastic column. *AIAA Journal*, **4**, 2111-2116.
- [21] **Flügge, W.,** 1962. *Handbook of Engineering Mechanics*, the McGraw-Hill, New York.
- [22] **Reddy, J. N.,** 1993. *An introduction to the finite element method*, the McGraw-Hill, New York.
- [23] **Swensson, I.,** 2001. Dynamic instability regions in a damped system. *Journal of Sound and Vibration*, **244**, 779-793.
- [24] **Banks, H. T., and Inman, D. J.,** 1991. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics*, **58**, 716-723.
- [25] **Gürgöze, M., Doğruoğlu, A. N., and Zeren, S.,** 2007. On the eigencharacteristics of a visco-elastic beam carrying a tip mass and its representation by a spring-damper-mass system. *Journal of Sound and Vibration*, **301**, 420-426.
- [26] **Meirovitch, L.,** 1967. *Analytical Methods in Vibrations*, the MacMillian Company, New York.

EKLER

EK A.1 : Maxwell Çubuğu için Dinamik Sınır Şartları

EK A.2 : Özdeğerlerin Elde Edilmesi için Gerekli Program Kodları

EK A.1

Sabit kesitli bir çubuğun, $w(x,t)$ düzlem dışı yer değiştirmesine karşı gelen harekete ait diferansiyel denklem, öncelikle kütle merkezi hareketi teoremi,

$$\rho A \ddot{w} = Q^I \quad (1)$$

ve sonra da hareket miktarı moment teoremi,

$$\rho I w^{IV} = M^I + Q \quad (2)$$

vasıtasıyla bulunur. Burada,

ρ : Yoğunluğu,

A : Kesit alanını,

I : Tarafsız eksene göre kesit atalet momentini,

Q : Kesme kuvvetini,

M : Eğilme momentini

göstermektedir.

Bu problemde çubuk tipi olarak Bernoulli-Euler çubuğu kullanılması sebebiyle, çubuğun sınır momentinin (dönme ataletinin) ve kayma şekil değiştirmesinin ihmal edilmesi söz konusudur, fakat öncelikle burada, normal bir çubuk için genel ifadeler elde edildikten sonra, bu değerler ihmal edilecektir.

Çubuğun $x=L$ ucuna zamanla değişen bir $F_1(t)$ kuvveti ve zamanla değişen bir $M_1(t)$ momenti etki ederse ve bu etkiler, pozitif kabul edilen yönlerde olursa, çubuğun ucundaki dinamik sınır şartları,

$$Q(L,t) = F_1(t), \quad (3a)$$

$$M(L,t) = M_1(t) \quad (3b)$$

şeklinde olur.

Burada (1), (2) hareket denklemleri ve (3a), (3b) sınır şartları temel mekanik denklemlerden elde edilmiştir, fakat bunlar problemdeki çubuğun hareketini ifade etmekte yetersiz kalmaktadırlar.

Bu sebeple, M eğilme momentini, düzlem dışı yer değiştirmeye, daha doğrusu onun türeviyle ilişkilendiren bağıntı gereklidir.

Elastik Bernoulli-Euler çubuğu için bu bağıntı,

$$M = EI w'' \quad (3c)$$

şeklinde dir.

Bu bağıntı göz önünde bulundurularak Maxwell çubuğunun küçük yer değiştirmeler yapması halinde,

$$\dot{M} + \frac{1}{\tau} M = EIw^{IV} \quad (4)$$

şeklindeki ifade, (2.17)'de elde edilmiştir. Elde edilmiş olan bu ifade, eğilme momenti(M)-düzlem dışı yer değiştirme($w(x, t)$)-zaman(t) bağıntısıdır. Bu bağıntı, Karl Kent Stevens'daki [20], Maxwell elemanı için (7) numarayla ifade edilmiş olan bağıntıyla aynıdır. Burada,

E : Elastisite modülünü,

τ : Zaman sabitini

göstermektedir.

Şimdi yukarıdaki (2) nolu denklemde kesme kuvveti yok edilecektir. Bunun için öncelikle (2) nolu denklemin x 'e göre türevi alınıp, (1) nolu denklemdeki Q^I ifadesi, (2)'de yerine yazılması gerekmektedir. Bu yapıldığı takdirde,

$$\rho(A\ddot{w} - Iw^{III}) = -M^{II} \quad (5)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemin zamana göre türevi alınır,

$$\rho(A\ddot{\ddot{w}} - Iw^{IV}) = -M^{III} \quad (6)$$

elde edilir. Burada bulunan (5) ve(6) değerleri hareketin diferansiyel denkleminin çıkarılmasında kullanılacaktır. Yukarıda verilmiş olan (4) nolu ifadenin iki kere x 'e göre türevi alınır,

$$EIw^{IV} = M^{III} + \frac{1}{\tau} M^{II} \quad (7)$$

elde edilmiş olur.

Şimdi (6) + $\frac{1}{\tau}$ (5) + (7) lineer kombinasyonu teşkil edilirse,

$$\rho A \left(\ddot{\ddot{w}} + \frac{1}{\tau} \ddot{w} \right) - \rho I + EIw^{IV} = 0 \quad (8)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem düzlem dışı yer değiştirmenin türevini içeren bir diferansiyel denklemdir.

Benzer şekilde, $x=L$ noktasındaki (3b) sınır şartı, (3c) bağıntısı ile birlikte,

$$EIw^{III}(L, t) = \dot{M}_1(t) + \frac{1}{\tau} M_1(t) \quad (9)$$

sınır şartı ifadesini verir. Bu sınır şartı düzlem dışı yer değiştirme ve verilmiş olan M_1 sınır momentini içerir.

Burada sınır momentini,

$$M_1(t) = -J_1 w^{II}(L, t) \quad (10)$$

şeklindedir.

Bu (10) nolu sınır momentini ifadesi, (9) nolu sınır şartında yerine konduğu ve düzenleme yapıldığı takdirde,

$$\left[EI w^{II} + J_1 \left(w^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots} \right) \right]_{x=L} = 0 \quad (11)$$

elde edilir. Elde edilen bu sınır şartı normal bir çubuk için elde edilmiş olan sınır şartıdır.

Bernoulli-Euler çubuğu içinse sınır momentinin ihmalı söz konusudur. Bu durumda, $x=L$ noktasında eğilmeden kaynaklanan sınır şartı,

$$[EI w^{II}]_{x=L} = 0 \quad (12)$$

şeklinde elde edilir.

Elde edilen bu ifade eğilme momentinden kaynaklanan üçüncü sınır şartını göstermektedir.

Elde edilmesi düşünülen son sınır şartı ifadesi çubukta meydana gelen kesme kuvvetiyle ilgili olup, hareket miktarı moment teoremi yardımıyla bulunmaya çalışılacaktır.

Bu durumda, (2) nolu ifadenin zamana göre türevi alınır,

$$\rho I w^{I\cdots} = M^{I\cdots} + \dot{Q} \quad (13)$$

elde edilir.

Elde edilen bu ifade, (10) + $\frac{1}{\tau}(2)$ şeklinde teşkil edilirse,

$$\rho I \left(w^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots} \right) = M^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} M^I + \dot{Q} + \frac{1}{\tau} Q \quad (14)$$

ifadesine ulaşılmış olur.

Yukarıdaki ifadede eşitliğin sağında bulunan eğilme momentleri, (4) ifadesine göre düzenlenirse,

$$\rho I \left(w^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots} \right) = EI w^{III} + \dot{Q} + \frac{1}{\tau} Q \quad (15)$$

elde edilmiş olur. Elde edilen bu ifade tüm çubuk için geçerlidir.

Burada $x=L$ 'deki kesme kuvveti göz önüne alınır,

$$\rho I \left[w^{I\cdots}(L, t) + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots}(L, t) \right] - EI w^{III}(L, t) = \dot{F}_1(t) + \frac{1}{\tau} F_1(t) \quad (16)$$

ifadesine gelinir.

Yukarıdaki ifadede söz edilen kesme kuvveti Maxwell çubuğu için,

$$F_1(t) = -M\ddot{w}(L, t) - ML\Omega^2 w^I(L, t) \quad (17)$$

şeklindedir.

Bu (17) ifadesi, yukarıdaki (16) sınır şartında yerine konduğu takdirde,

$$\rho I \left(w^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots} \right) - EI w^{III} = -M\ddot{w}(L, t) - ML\Omega^2 w^I(L, t) - \frac{M}{\tau} \ddot{w}(L, t) - \frac{ML\Omega^2}{\tau} w^I(L, t) \quad (18)$$

elde edilir.

Bu ifade düzenlenirse,

$$\rho I \left(w^{I\cdots} + \frac{1}{\tau} w^{I\cdots} \right) - EI w^{III} + M\ddot{w}(L, t) + ML\Omega^2 w^I(L, t) + \frac{1}{\tau} (M\ddot{w}(L, t) + ML\Omega^2 w^I(L, t)) \quad (19)$$

gelinir.

Bu problemde Bernoulli-Euler çubuğu kullanılmasından dolayı dönme ataleti,

$$\rho I = 0 \quad (20)$$

değerini almaktadır.

Ayrıca çubuğun $x=L$ ucuna sabitlenmiş olan M kütlesi maddesel nokta olarak kabul edilmiştir. O halde (20) nolu değer, (19) nolu sınır şartında yerine konduğu takdirde,

$$M \left[\ddot{w}(L, t) + \frac{1}{\tau} \dot{w}(L, t) \right] - EI w''' + ML\Omega^2 \left[w^1(L, t) + \frac{1}{\tau} w^1(L, t) \right] = 0 \quad (21)$$

ifadesi elde edilir.

Elde edilen bu ifade, kesme kuvvetinden kaynaklanan dördüncü sınır şartını oluşturmaktadır.

EK A.2

Program 1: Frobenius Seri Çözümünde Özdeğerlerin Bulunması için Matlab Kodu

Bu program 2.101’de verilen katsayılar determinantını sayısal olarak elde ederek, a ve b parametrelerinin içinde bulunan **öz değerlerini**, boyutsuz açısal hız (Ω), boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$), boyutsuz kütle ($\bar{\alpha}_m$) parametrelerinin değerlerine bağlı olarak hesaplamaktadır.

```
function f=maxwell_matlab(x, omegac) ;
N=100;          %N: serideki terim sayısı;
omegac=10;      %Boyutsuz açısal hız
alfam=5;        %Boyutsuz uç kütle oranı
dc=0.5;         %Boyutsuz sönüm oranı
i=sqrt(-1);
lamdac=x(1)+x(2)* i ;

a= omegac^2*(1+(1/(dc*lamdac)))/2 ;
b= lamdac^2*(1+(1/(dc*lamdac))) ;

w=zeros(1,N);
w(1,1)=0;      w(1,2)=0;

Genel Form
for n=1:1:N
    w(1,n+3)=( a*( 1 + 2*alfam )*(n+2)*(n+1)*w(1,n+1)) -
    (w(1,n)*(a*n*(n+b)))/((n+4)*(n+3)*(n+2)*(n+1) );
end
w2=zeros(1,N);   w3=zeros(1,N);
for k=1:2:N
    w2(1,k) = w(1,k);
end
for k=2:2:N
    w3(1,k) = w(1,k);
end

w2d=polyder(w2);
w2dd=polyder(w2d);
w2ddd=polyder(w2dd);

w3d=polyder(w3);
w3dd=polyder(w3d);
w3ddd=polyder(w3dd);

w2x1=polyval(w2,1);
w2dx1=polyval(w2d,1);
w2ddx1=polyval(w2dd,1);
w2dddx1=polyval(w2ddd,1);
```

```

w3x1=polyval(w3,1);
w3dx1=polyval(w3d,1);
w3ddx1=polyval(w3dd,1);
w3dddx1=polyval(w3ddd,1);

e11=w2ddx1;      e12=w3ddx1;
e21=w2dddx1-2*alfam*a*w2dx1-alfam*b*w2x1
e22=w3dddx1-2*alfam*a*w3dx1-alfam*b*w3x1

A=[e11 e12 ; e21 e22];
F=abs(det(A));
x0=[-0.02 10.22];
options= optimset ( 'Display', 'off', 'NonlEqnAlgorithm', 'gn' );
x=fsolve ( @ (x) Maxwell(x), x0, options); fprintf('%1.6f + %1.6fi\n', x(1), x(2));

```

Program 2: Sonlu Elemanlar Yöntemi Çözümünde Özdeğerlerin Bulunması için Mathematica Kodu

Bu program 3.90'da verilen matrisin çözülmesiyle, ω öz değerlerini, boyutsuz açılmal hız (Ω), boyutsuz sönüm oranı ($\bar{d}$), boyutsuz kütle ($\bar{a}_m$) parametrelerinin değerlerine bağlı olarak hesaplamaktadır.

```

El=100;           % Çubuğun ayrıklaştırıldığı Sonlu Eleman sayısı
L=1;             % Boyutsuz olarak uzunluk
l=L/El;          % Bir tane elemanın uzunluğu
b=l;             % Çubuğun genişliği
h=l;             % Çubuğun yüksekliği
Ik=1/12*b*h^3;   % Çubuğun kesit atalet momenti

alfamm=5;        % Boyutsuz uç kütle oranı
omegac=10;       % Boyutsuz açılmal hız
dc=0.5;          % Boyutsuz sönüm oranı
En=108*10^9      % Elastisite modülü
m=0.76           % Çubuğun birim uzunluğunun kütlesi
w0=sqrt(En*Ik/m*L^4) % Doğal frekans

Mtip=alfamm*m*L; % Uç kütle
Omega=omegac*w0;  % Açılmal hız
alfa=dc*m*L^4*w0/Ik; % Visko-elastiklik katsayısı
tau=alfa/En;      % Visko-elastiklik katsayısının Elastisite modülüne oranını,

Ko=Table[a[i,j],{i,El},{j,2}];
For [t=1,t<=El,
  Ko[[t,1]]=(t-1)*1;
  Ko[[t,2]]=t*1;
  t++]

Ns=Table[a[i,j],{i,4},{j,El}];

For [i=1,i<=El,
  Ns[[1,i]]=(x-Ko[[i,2]])^2*(2*x-3*Ko[[i,1]]+Ko[[i,2]])/l^3;
  Ns[[2,i]]=(x-Ko[[i,1]])*(x-Ko[[i,2]])^2/l^2;

```



```

Ns[[3,i]]=(x-Ko[[i,1]])^2*(2*x+Ko[[i,1]]-3*Ko[[i,2]])/l^3;
Ns[[4,i]]=(x-Ko[[i,1]])^2*(x-Ko[[i,2]])/l^2; i++]

m1={{(13* l m)/35, (11* l^2 m)/210, (9* l m)/70, -((13 *l^2 m)/420)}, {(11*l^2 m)/210, (l^3
m)/105, (13* l^2 m)/420, -((l^3 m)/140)}, {(9* l m)/70, (13*l^2 m)/420, (13* l m)/35, -
((11*l^2 m)/210)}, {-((13*l^2 m)/420), -(l^3 m)/140, -((11*l^2 m)/210), (l^3 m)/105}};

ke={{(12 En Ik)/l3, (6 En Ik)/l^2, -((12 En Ik)/l^3), (6 En Ik)/l^2}, {(6 En Ik)/l^2, (4 En
Ik)/l,-((6 En Ik)/l^2), (2 En Ik)/l}, {-((12 En Ik)/l^3), -((6 En Ik)/l^2), (12 En Ik)/l^3, -((6 En
Ik)/l^2)}, {(6 En Ik)/l^2, (2 En Ik)/l, -((6 En Ik)/l^2), (4 En Ik)/l}};

m3=1/τ*{{(13* l m)/35, (11*l^2 m)/210, (9* l m)/70, -((13*l^2 m)/420)}, {(11*l^2 m)/210,
(l^3 m)/105, (13*l^2 m)/420, -((l^3 m)/140)}, {(9* l m)/70, (13*l^2 m)/420, (13* l m)/35, -
((11*l^2 m)/210)}, {-((13*l^2 m)/420), -(l^3 m)/140, -((11*l^2 m)/210), (l^3 m)/105}};

m2=Array[a,{El,4,4}]; m4=Array[a,{El,4,4}]; m5=Array[a,{El,4,4}];
m6=Array[a,{El,4,4}]; Mt1=Array[a,{El,4,4}]; Mt2=Array[a,{El,4,4}];

For[i=1,i≤El,
  Nt={{Ns[[1,i]],{Ns[[2,i]],{Ns[[3,i]],{Ns[[4,i]]}}}};

  m2[[i,All,All]]=
  m * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] x * Nt.∂xTranspose[Nt]dx -  $\frac{m}{2}$  *
  ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] (L2 - x2) * ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx

  Mt1[[i,All,All]]=-Mtip * L * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx;

  m4[[i,All,All]]=
  -m * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] Nt.Transpose[Nt]dx - m * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] x * ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx;

  m5[[i,All,All]]=
  - $\frac{m}{\tau}$  * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] x * Nt.∂xTranspose[Nt]dx -  $\frac{m}{\tau}$  *
  ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]]  $\frac{1}{2}$  (L2 - x2) * ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx

  Mt2[[i,All,All]]= $\frac{-Mtip*L}{\tau}$  * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx;

  m6[[i,All,All]]=
  - $\frac{m}{\tau}$  * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] Nt.Transpose[Nt]dx -  $\frac{m}{\tau}$  * ∫Ko[[i,1]]Ko[[i,2]] x * ∂xNt.∂xTranspose[Nt]dx;

  Clear[Nt]; i++]

M1=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}]; M2=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}];
M3=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}]; M4=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}];
M5=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}]; M6=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}];
MT1=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}]; MT2=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}];
K=Array[a,{(2*(El+1)),(2*(El+1))}];

For [i=1,i≤ (2*(El+1)),
  For[j=1,j≤(2*(El+1)),
    M1[[i,j]]=0; M2[[i,j]]=0; M3[[i,j]]=0; M4[[i,j]]=0; M5[[i,j]]=0; M6[[i,j]]=0;
    MT1[[i,j]]=0; MT2[[i,j]]=0; K[[i,j]]=0; j++] i++]

```

```

For[i=1,i≤El,
  M1[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M1[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m1;

  K[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=K[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+ke;

  M3[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M3[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m3;

  M2[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M2[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m2[[i,All,All]];

  M4[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M4[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m4[[i,All,All]];

  M5[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M5[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m5[[i,All,All]];

  M6[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=M6[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+m6[[i,All,All]];

  MT1[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=MT1[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+Mt1[[i,All,All]];

  MT2[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]=MT2[[Range[2*i-1,2*(i+1)],Range[2*i-1,2*(i+1)]]]+Mt2[[i,All,All]]; i++]

M1[[2*El+1,2*El+1]]= M1[[2*El+1,2*El+1]]+Mtip;
M3[[2*El+1,2*El+1]]= M3[[2*El+1,2*El+1]]+Mtip/τ;
M4[[2*El+1,2*El+1]]= M4[[2*El+1,2*El+1]]+m;
M6[[2*El+1,2*El+1]]= M6[[2*El+1,2*El+1]]+m/τ;

KTesas=-Ω^2*(M5-M6+MT2);
CTesas=K-Ω^2*(M2-M4+MT1);
Mesas2nokta=M3;
Mesas3nokta=M1;
reducedMesas2nokta=Array[a,{(2*(El)),(2*(El))}];
reducedMesas3nokta=Array[a,{(2*(El)),(2*(El))}];
reducedKTesas=Array[a,{(2*(El)),(2*(El))}];
reducedCTesas=Array[a,{(2*(El)),(2*(El))}];

For [i=1,i≤ (2*(El)),
  For[j=1,j≤(2*(El)),
    reducedMesas2nokta[[i,j]]=0;
    reducedMesas3nokta[[i,j]]=0;
    reducedKTesas[[i,j]]=0;
    reducedCTesas[[i,j]]=0; j++ i++]
  reducedKTesas=KTesas[[Range[3,2*(El+1)],Range[3,2*(El+1)]]];
  reducedCTesas=CTesas[[Range[3,2*(El+1)],Range[3,2*(El+1)]]];
  reducedMesas2nokta=Mesas2nokta[[Range[3,2*(El+1)],Range[3,2*(El+1)]]];
  reducedMesas3nokta=Mesas3nokta[[Range[3,2*(El+1)],Range[3,2*(El+1)]]];

```

```

Id=IdentityMatrix[2*El];
Aa=Array[a,{(3*2*(El)),(3*2*(El))}];
Bb=Array[a,{(3*2*(El)),(3*2*(El))}];

For [i=1,i<= (3*2*(El)),
  For[j=1,j<=(3*2*(El)),
    Aa[[i,j]]=0; Bb[[i,j]]=0; j++; i++]

Aa[[Range[1,2*El],Range[1,2*El]]]=-reducedCTesas;
Aa[[Range[1,2*El],Range[2*El+1,2*2*El]]]=-reducedMesas2nokta;
Aa[[Range[1,2*El],Range[2*2*El+1,3*2*El]]]=-reducedMesas3nokta;
Aa[[Range[2*El+1,2*2*El],Range[1,2*El]]]=Id;
Aa[[Range[2*2*El+1,3*2*El],Range[2*El+1,2*2*El]]]=Id;

Bb[[Range[1,2*El],Range[1,2*El]]]=reducedKTesas;
Bb[[Range[2*El+1,2*2*El],Range[2*El+1,2*2*El]]]=Id;
Bb[[Range[2*2*El+1,3*2*El],Range[2*2*El+1,3*2*El]]]=Id;

Kk=Inverse[Aa].Bb;
sonuc=Eigenvalues[Kk]/w0;

InputForm[N[sonuc,6]]

```


Çizelge B.1: Maxwell sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 0.1$	0	-5.000000±21.459702i -5.000000±21.459699i	-5.000000±15.461736i -5.000000±15.461735i	-5.000000±15.052170i -5.000000±15.052170i	-5.000000±14.779486i -5.000000±14.779485i
	1	-0.714051±0.945305i -0.714051±0.945305i	-0.145978±1.091209i -0.145977±1.091208i	-0.096719±1.075842i -0.096719±1.075841i	-0.056970±1.051283i -0.056969±1.051282i
	2	-0.690982±2.249014i -0.690981±2.249014i	-0.172445±2.157663i -0.172444±2.157662i	-0.118515±2.118369i -0.118515±2.118368i	-0.071445±2.076908i -0.071445±2.076907i
	3	-0.658454±3.431960i -0.658453±3.431959i	-0.186396±3.205747i -0.186395±3.205746i	-0.129705±3.151449i -0.129705±3.151448i	-0.079273±3.097380i -0.079273±3.097379i
	4	-0.621314±4.566276i -0.621314±4.566276i	-0.191848±4.244965i -0.191848±4.244965i	-0.134774±4.179051i -0.134774±4.179051i	-0.083154±4.114650i -0.083153±4.114650i
	5	-0.582919±5.667490i -0.582919±5.667490i	-0.191898±5.277617i -0.191897±5.277616i	-0.135835±5.202344i -0.135835±5.202344i	-0.084423±5.129361i -0.084422±5.129362i
	6	-0.545311±6.744491i -0.545310±6.744490i	-0.188510±6.304847i -0.188509±6.304847i	-0.134266±6.221993i -0.134265±6.221992i	-0.083940±6.141885i -0.083942±6.141881i
	7	-0.509642±7.803653i -0.509641±7.803653i	-0.183024±7.327532i -0.183023±7.327532i	-0.131027±7.238525i -0.131026±7.238524i	-0.082310±7.152500i -0.082319±7.152502i
	8	-0.476483±8.849633i -0.476483±8.849632i	-0.176359±8.346422i -0.176358±8.346422i	-0.126791±8.252411i -0.126790±8.252410i	-0.079980±8.161490i -0.079984±8.161490i
	9	-0.446035±9.885798i -0.446034±9.885797i	-0.169128±9.362168i -0.169128±9.362168i	-0.122020±9.264072i -0.122019±9.264072i	-0.077230±9.169080i -0.077237±9.169089i
	10	-0.418275±10.914580i -0.418275±10.914580i	-0.161734±10.375322i -0.161732±10.375323i	-0.117025±10.273879i -0.117024±10.273878i	-0.074280±10.175510i -0.074288±10.175517i

Çizelge B.1: (devam) Maxwell sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 0.5$	0	-1.000000±3.370810i -1.000000±3.370807i	-1.000000±1.193808i -1.000000±1.193810i	-1.000000±0.584312i -1.000000±0.584305i	-1.000000±15.570266i -1.000000±15.570266i
	1	-0.909934±3.521232i -0.909933±3.521231i	-0.548476±1.527750i -0.548475±1.527750i	-0.305774±1.268545i -0.305773±1.268544i	-0.133741±1.146310i -0.133740±1.146309i
	2	-0.709125±3.974126i -0.709125±3.974125i	-0.272965±2.509451i -0.272964±2.509451i	-0.171284±2.334670i -0.171284±2.334670i	-0.093405±2.198155i -0.093405±2.198154i
	3	-0.519905±4.664641i -0.519904±4.664640i	-0.175935±3.504284i -0.175934±3.504284i	-0.117220±3.349063i -0.117220±3.349063i	-0.068989±3.213654i -0.068988±3.213653i
	4	-0.385294±5.488426i -0.385294±5.488426i	-0.128336±4.498566i -0.128335±4.498565i	-0.088519±4.352540i -0.088518±4.352539i	-0.053892±4.219441i -0.053892±4.219441i
	5	-0.295319±6.380895i -0.295319±6.380894i	-0.100700±5.493578i -0.100699±5.493577i	-0.070871±5.352988i -0.070871±5.352987i	-0.043926±5.221884i -0.043926±5.221883i
	6	-0.234649±7.310990i -0.234648±7.310990i	-0.082780±6.489507i -0.082779±6.489506i	-0.058979±6.352500i -0.058978±6.352499i	-0.036946±6.222968i -0.036946±6.222967i
	7	-0.192572±8.263223i -0.192571±8.263222i	-0.070246±7.486216i -0.070246±7.486216i	-0.050447±7.351733i -0.050446±7.351733i	-0.031820±7.223438i -0.031820±7.223437i
	8	-0.162414±9.229226i -0.162414±9.229226i	-0.060996±8.483533i -0.060995±8.483533i	-0.044040±8.350917i -0.044039±8.350916i	-0.027913±8.223603i -0.027912±8.223609i
	9	-0.140086±10.204177i -0.140086±10.204176i	-0.053890±9.481318i -0.053889±9.481317i	-0.039058±9.350133i -0.039058±9.350132i	-0.024840±9.223620i -0.024841±9.223629i
	10	-0.123047±11.185158i -0.123047±11.185158i	-0.048262±10.479463i -0.048262±10.479462i	-0.035078±10.349409i -0.035077±10.349409i	-0.022360±10.223570i -0.022368±10.223572i

Çizelge B.1: (devam) Maxwell sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 1$	0	-0.500000±3.480282i -0.500000±3.480278i	-0.500000±1.474848i -0.500000±1.474850i	-0.500000±1.044711i -0.500000±1.044710i	-0.500000±0.568291i -0.500000±0.568291i
	1	-0.455801±3.642289i -0.455801±3.642288i	-0.325076±1.812451i -0.325076±1.812450i	-0.241880±1.491530i -0.241879±1.491529i	-0.130650±1.244423i -0.130649±1.244422i
	2	-0.359958±4.097220i -0.359957±4.097219i	-0.165212±2.624364i -0.165212±2.624364i	-0.110408±2.412723i -0.110408±2.412722i	-0.062097±2.240870i -0.062096±2.240870i
	3	-0.267847±4.764107i -0.267846±4.764107i	-0.099991±3.560497i -0.099991±3.560496i	-0.067692±3.387503i -0.067691±3.387502i	-0.040189±3.236444i -0.040188±3.236444i
	4	-0.199555±5.560489i -0.199554±5.560488i	-0.069838±4.530866i -0.069837±4.530866i	-0.048429±4.375112i -0.048428±4.375112i	-0.029611±4.233329i -0.029611±4.233329i
	5	-0.152729±6.432006i -0.152729±6.432006i	-0.053386±5.514345i -0.100049±0.073747i	-0.037669±5.367759i -0.037669±5.367759i	-0.023407±5.231145i -0.023407±5.231144i
	6	-0.120855±7.347742i -0.120855±7.347742i	-0.043189±6.503944i -0.043188±6.503943i	-0.030819±6.362891i -0.030819±6.362890i	-0.019338±6.229551i -0.019338±6.229550i
	7	-0.098734±8.290336i -0.098734±8.290335i	-0.036274±7.496825i -0.036273±7.496825i	-0.026077±7.359428i -0.026077±7.359427i	-0.016467±7.228343i -0.016467±7.228343i
	8	-0.082931±9.249801i -0.082930±9.249800i	-0.031277±8.491656i -0.031277±8.491656i	-0.022600±8.356838i -0.022599±8.356837i	-0.014338±8.227400i -0.014335±8.227400i
	9	-0.071284±10.220217i -0.071284±10.220217i	-0.027497±9.487735i -0.027496±9.487735i	-0.019941±9.354827i -0.019940±9.354827i	-0.012687±9.226645i -0.012689±9.226644i
	10	-0.062439±11.197971i -0.062439±11.197971i	-0.024536±10.484660i -0.024536±10.484660i	-0.017841±10.353222i -0.017840±10.353221i	-0.011381±10.226000i -0.011381±10.226024i

Çizelge B.1: (devam) Maxwell sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 2$	0	-0.250000±3.507116i -0.250000±3.507116i	-0.250000±1.537100i -0.250000±1.537097i	-0.250000±1.130894i -0.250000±1.130894i	-0.250000±0.714461i -0.250000±0.714459i
	1	-0.228000±3.671852i -0.228000±3.671852i	-0.166783±1.879753i -0.166783±1.879752i	-0.130698±1.565320i -0.130698±1.565320i	-0.079640±1.300022i -0.079639±1.300022i
	2	-0.180605±4.127337i -0.180604±4.127337i	-0.086385±2.658030i -0.086384±2.658030i	-0.059018±2.438623i -0.059018±2.438622i	-0.033807±2.256512i -0.033806±2.256512i
	3	-0.134867±4.788987i -0.134866±4.788987i	-0.051671±3.576700i -0.051671±3.576699i	-0.035186±3.399034i -0.035186±3.399033i	-0.020972±3.243469i -0.020971±3.243469i
	4	-0.100632±5.578852i -0.100631±5.578851i	-0.035697±4.539831i -0.035697±4.539831i	-0.024800±4.381469i -0.024799±4.381469i	-0.015187±4.237286i -0.015186±4.237286i
	5	-0.077004±6.445137i -0.077003±6.445136i	-0.027101±5.519947i -0.027100±5.519946i	-0.019138±5.371771i -0.019137±5.371770i	-0.011902±5.233675i -0.011901±5.233675i
	6	-0.077004±6.445137i -0.060876±7.357197i	-0.021832±6.507763i -0.021832±6.507763i	-0.015586±6.365650i -0.015586±6.365650i	-0.009785±6.231307i -0.009784±6.231306i
	7	-0.049679±8.297299i -0.049679±8.297298i	-0.018287±7.499595i -0.018286±7.499595i	-0.013150±7.361442i -0.013150±7.361442i	-0.008307±7.229632i -0.008306±7.229631i
	8	-0.041685±9.255070i -0.041685±9.255070i	-0.015739±8.493758i -0.015739±8.493757i	-0.011375±8.358373i -0.011375±8.358372i	-0.007218±8.228385i -0.007216±8.228385i
	9	-0.035800±10.224313i -0.035800±10.224313i	-0.013819±9.489385i -0.013819±9.489385i	-0.010024±9.356036i -0.010023±9.356035i	-0.006379±9.227420i -0.006379±9.227420i
	10	-0.031336±11.201234i -0.031335±11.201234i	-0.012320±10.485990i -0.012319±10.485989i	-0.008959±10.354197i -0.008959±10.354197i	-0.005716±10.226652i -0.005716±10.226652i

Çizelge B.2 : Kelvin-Voigt sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 0.1$	0	-0.618118±3.461256i -0.618118±3.461256i	-0.121259±1.552570i -0.121259±1.552567i	-0.067071±1.156253i -0.067071±1.156253i	-0.028648±0.756395i -0.028648 ±0.756395i
	1	-0.618176±3.629399i -0.618176±3.629397i	-0.121558±1.897849i -0.121557±1.897848i	-0.067582±1.588833i -0.067582±1.588835i	-0.029625±1.322000i -0.029625 ±1.322000i
	2	-0.618965±4.091099i -0.618965±4.091099i	-0.124827±2.667511i -0.124827±2.667511i	-0.072209±2.447759i -0.072209±2.447759i	-0.035550±2.262983i -0.035550 ±2.262983i
	3	-0.621887±4.758479i -0.621887±4.758479i	-0.133527±3.582911i -0.133527±3.582911i	-0.082083±3.405110i -0.082083±3.405110i	-0.044502±3.247988i -0.044502 ±3.247988i
	4	-0.628263±5.554515i -0.628263±5.554515i	-0.146906±4.547485i -0.146905±4.547485i	-0.094877±4.388640i -0.094877±4.388641i	-0.054237±4.242517i -0.054237 ±4.242517i
	5	-0.638812±6.428757i -0.638811±6.428757i	-0.163055±5.531372i -0.163055±5.531371i	-0.108782±5.381657i -0.108782±5.381657i	-0.064063±5.240628i -0.064062 ±5.240628i
	6	-0.653597±7.351173i -0.653597±7.351172i	-0.180499±6.524226i -0.180499±6.524226i	-0.122954±6.379146i -0.122954±6.379148i	-0.073753±6.240563i -0.073751 ±6.240565i
	7	-0.672233±8.304062i -0.672233±8.304062i	-0.198379±7.521917i -0.198378±7.521917i	-0.137024±7.379161i -0.137024±7.379162i	-0.083215±7.241599i -0.083212 ±7.241601i
	8	-0.694105±9.276766i -0.694105±9.276766i	-0.216237±8.522534i -0.216236±8.522534i	-0.150822±8.380772i -0.150821±8.380773i	-0.092405±8.243366i -0.092401 ±8.243369i
	9	-0.718533±10.262669i -0.718533±10.262669i	-0.233837±9.525071i -0.233836±9.525072i	-0.164268±9.383467i -0.164266±9.383468i	-0.101308±9.245648i -0.101300 ±9.245652i
	10	-0.744871±11.257545i -0.744871±11.257545i	-0.251057±10.528939i -0.251056±10.528940i	-0.177327±10.386933i -0.177324±10.386934i	-0.109918±10.248311i -0.109908 ±10.248311i

Çizelge B.2 : (devam) Kelvin-Voigt sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 0.5$	0	-3.090591±1.676488i -3.090591±1.676465i	-0.606294±1.434428i -0.606294±1.434452i	-0.335355±1.108584i -0.335355±1.108579i	-0.143239±0.743261i -0.143239±0.743262i
	1	-3.090821±2.001110i -3.090821±2.001093i	-0.607512±1.803196i -0.607512±1.803197i	-0.337466±1.555545i -0.337466±1.555550i	-0.147424±1.316270i -0.147424±1.316269i
	2	-3.092796±2.754712i -3.092796±2.754720i	-0.616920±2.609536i -0.616919±2.609533i	-0.352152±2.437775i -0.352152±2.437775i	-0.169366±2.272893i -0.169366±2.272893i
	3	-3.097266±3.682796i -3.097266±3.682807i	-0.636262±3.563510i -0.636262±3.563505i	-0.379096±3.424886i -0.379095±3.424888i	-0.199539±3.277523i -0.199539±3.277524i
	4	-3.104071±4.682468i -3.104071±4.682462i	-0.663147±4.569629i -0.663147±4.569631i	-0.412381±4.440597i -0.412381±4.440597i	-0.229353±4.291108i -0.229353±4.291107i
	5	-3.113034±5.715991i -3.113034±5.715991i	-0.695202±5.596108i -0.695202±5.596107i	-0.447659±5.464437i -0.447659±5.464438i	-0.256771±5.306945i -0.256771±5.306945i
	6	-3.124047±6.767568i -3.124048±6.767565i	-0.730442±6.630408i -0.730443±6.630407i	-0.482515±6.490101i -0.482515±6.490101i	-0.281841±6.323331i -0.281840±6.323331i
	7	-3.137036±7.829620i -3.137034±7.829618i	-0.767287±7.667066i -0.767286±7.667068i	-0.515891±7.515663i -0.515891±7.515663i	-0.304941±7.339655i -0.304940±7.339655i
	8	-3.151939±8.898085i -3.151939±8.898083i	-0.804561±8.703662i -0.804561±8.703661i	-0.547491±8.540599i -0.547492±8.540598i	-0.326416±8.355664i -0.326415±8.355664i
	9	-3.168695±9.970586i -3.168693±9.970586i	-0.841471±9.739197i -0.841471±9.739200i	-0.577364±9.564809i -0.577364±9.564808i	-0.346535±9.371260i -0.346534±9.371259i
	10	-3.187243±11.045635i -3.187242±11.045637i	-0.877532±10.773347i -0.877532±10.773347i	-0.605680±10.588301i -0.605679±10.588301i	-0.365507±10.386412i -0.365505±10.386411i

Çizelge B.2 : (devam) Kelvin-Voigt sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 1.0$	0	-1.097419±0.000000i -1.097414±0.000000i	-1.212588±0.977142i -1.212588±0.977139i	-0.670710±0.944229i -0.670710±0.944220i	-0.286477±0.700632i -0.286477±0.700631i
	1	-1.015126±0.000000i -1.015126±0.000000i	-1.214125±1.467271i -1.214125±1.467274i	-0.673440±1.444941i -0.673440±1.444940i	-0.292242±1.295959i -0.292242±1.295958i
	2	-1.594563±0.000000i -1.594572±0.000000i	-1.221905±2.396951i -1.221905±2.396958i	-0.686772±2.379844i -0.686772±2.379846i	-0.316863±2.278905i -0.316863±2.278906i
	3	-2.304904±0.000000i -2.304913±0.000000i	-1.235566±3.423791i -1.235566±3.423783i	-0.709276±3.404534i -0.709276±3.404536i	-0.351847±3.308667i -0.351847±3.308666i
	4	-3.606860±0.000000i -3.606860±0.000000i	-1.254422±4.479720i -1.254423±4.479713i	-0.738776±4.452948i -0.738776±4.452946i	-0.389426±4.343342i -0.389426±4.343342i
	5	-6.194157±2.029126i -6.194157±2.029105i	-1.277939±5.546296i -1.277939±5.546302i	-0.773291±5.507357i -0.773291±5.507358i	-0.425672±5.375954i -0.425672±5.375954i
	6	-6.200050±4.159173i -6.200051±4.159162i	-1.305559±6.616543i -1.305559±6.616545i	-0.810963±6.561445i -0.810963±6.561445i	-0.459335±6.405965i -0.459335±6.405966i
	7	-6.207005±5.733549i -6.207006±5.733554i	-1.336684±7.687208i -1.336683±7.687209i	-0.850199±7.612806i -0.850199±7.612805i	-0.490418±7.433894i -0.490418±7.433893i
	8	-6.215015±7.130244i -6.215015±7.130244i	-1.370696±8.756583i -1.370696±8.756584i	-0.889771±8.660696i -0.889771±8.660697i	-0.519296±8.460210i -0.519296±8.460209i
	9	-6.224072±8.437850i -6.224072±8.437850i	-1.406985±9.823721i -1.406986±9.823719i	-0.928825±9.705136i -0.928825±9.705137i	-0.546362±9.485213i -0.546361±9.485213i
	10	-6.234166±9.692391i -6.234166±9.692391i	-1.444968±10.888118i -1.444968±10.888119i	-0.966839±10.746467i -0.966839±10.746466i	-0.571930±10.509094i -0.571930±10.509094i

Çizelge B.2 : (devam) Kelvin-Voigt sönüm modeli için titreşim karakteristikleri

	$\bar{\Omega}$	$\alpha_M = 0$	$\alpha_M = 1$	$\alpha_M = 2$	$\alpha_M = 5$
$\bar{d} = 2.0$	0	-0.510542±0.000000i 0.510537±0.000000i	-0.566063±0.000000i -0.566058±0.000000i	-0.664672±0.000000i -0.664640±0.000000i	-0.572954±0.494649i -0.572954±0.494644i
	1	-0.561439±0.000000i -0.561441±0.000000i	-0.925071±0.000000i -0.925075±0.000000i	-1.343671±0.862663i -1.343670±0.862686i	-0.578056±1.201541i -0.578056±1.201537i
	2	-0.715739±0.000000i -0.715739±0.000000i	-2.430898±1.164010i -2.430898±1.164036i	-1.351780±2.085683i -1.351780±2.085686i	-0.595757±2.241891i -0.595757±2.241891i
	3	-0.977523±0.000000i -0.977521±0.000000i	-2.438403±2.714220i -2.438404±2.714204i	-1.365206±3.217154i -1.365207±3.217149i	-0.623314±3.309118i -0.623314±3.309118i
	4	-1.354354±0.000000i -1.354349±0.000000i	-2.448850±3.972090i -2.448851±3.972089i	-1.383611±4.327784i -1.383611±4.327789i	-0.657935±4.377211i -0.657935±4.377212i
	5	-1.858468±0.000000i -1.858481±0.000000i	-2.462165±5.155594i -2.462165±5.155592i	-1.406602±5.428621i -1.406602±5.428617i	-0.696781±5.440342i -0.696781±5.440342i
	6	-2.509169±0.000000i -2.509177±0.000000i	-2.478259±6.306109i -2.478258±6.306120i	-1.433714±6.522888i -1.433713±6.522885i	-0.737405±6.497154i -0.737405±6.497153i
	7	-3.337783±0.000000i -3.337781±0.000000i	-2.497027±7.438327i -2.497028±7.438325i	-1.464428±7.611767i -1.464428±7.611765i	-0.778013±7.547920i -0.778013±7.547919i
	8	-4.399106±0.000000i -4.399092±0.000000i	-2.518351±8.558887i -2.518351±8.558891i	-1.498196±8.695764i -1.498196±8.695763i	-0.817496±8.593516i -0.817496±8.593515i
	9	-5.804074±0.000000i -5.804069±0.000000i	-2.542096±9.671227i -2.542097±9.671220i	-1.534458±9.775146i -1.534458±9.775148i	-0.855300±9.634941i -0.855300±9.634941i
	10	-7.860430±0.000019i -7.860446±0.000000i	-2.568120±10.777298i -2.568120±10.777299i	-1.572668±10.850108i -1.572667±10.850107i	-0.891248±10.673090i -0.891248±10.673089i

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Mesut KARA

Doğum Yeri ve Tarihi: Gaziosmanpaşa, 10.10.1985

Adres: 50. yıl mahallesi A caddesi 2042 sokak No:8/3 Gaziosmanpaşa/İstanbul

Lisans Üniversite: Balıkesir Üniversitesi