

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRUSAL-FAZLI KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ
TASARIMI İÇİN FRM YAKLAŞIMI VE EŞZAMANLI
OPTİMİZASYON TEKNİĞİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Murat KAPAR**

Anabilim Dalı: ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı: TELEKOMÜNİKASYON MÜHENDİSLİĞİ

MART 2006

**DOĞRUSAL-FAZLI KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ
TASARIMI İÇİN FRM YAKLAŞIMI VE EŞZAMANLI
OPTİMİZASYON TEKNİĞİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Murat KAPAR
(504021310)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 27 Şubat 2006
Tezin Savunulduğu Tarih: 8 Mart 2006**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. M. Ertuğrul ÇELEBİ (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. Serhat ŞEKER (İ.T.Ü.)

MART 2006

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasındaki değerli tavsiyelerinden ötürü öncelikle tez danışmanım Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN'a şükranlarımı sunarım. Çalışmanın her safhasında sürekli diyalog halinde olduğum ve bildiklerini tereddütsüz benimle paylaşan Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği asistanlarından Cercis Özgür SOLMAZ arkadaşşıma çok teşekkür ederim.

Bu günlere gelebilmeyi en çok borçlu olduğum, bana zorluklarla mücadele etmeyi ve mutlu olmayı öğreten, hayatta sahip olduğum en değerli iki varlığa, sevgili annem ve babama; en vazgeçtiğim anımda beni akademik anlamda adeta hayata döndürdükleri için sevgili ablam Elif ve kız kardeşim Fatma'ya; ayrıca eğitim hayatım boyunca bana yadsınamaz emekleri geçen sevgili amcama en derin sevgilerimi sunarım.

Altı aylık bu zorlu dönemde hep yanımda olan, motivasyonumu sürekli diri tutan ve bazı şekil çizimlerinde de yardımcı olan sevgili kız arkadaşım Deniz'e, özellikle de sabrından dolayı en içten teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca beni moralsiz bırakmadıkları ve maddi-manevi desteklerini benden esirgemedikleri için değerli ev arkadaşlarım Süleyman ve Volkan'a; ayrıca yardımlarından ötürü sevgili kuzenim Uğur'a çok teşekkür ederim.

Son olarak, hayatta olduğu süre boyunca değerli dualarını ve iyi niyet dileklerini bana çok görmeyen, yakın zamanda kaybettiğim babaanneme minnet ve rahmeti bir borç bilirim.

Şubat, 2006

Murat KAPAR

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
2. SAYISAL SÜZGEÇLER	3
2.1 Sayısal Süzgeçlerin Matematiksel Modellenmesi	3
2.2 Sayısal Süzgeç Tasarım Süreci	4
2.3 Süzgeç Karakteristiğinin Belirlenmesi	5
2.4 FIR Sayısal Süzgeçler	8
2.4.1 Doğrusal-Fazlı FIR Süzgeçler	9
2.4.2 FIR Süzgeç Tasarım Yöntemleri	14
2.4.3 Minimaks Yaklaşımıyla Optimum FIR Süzgeç Tasarımı	15
2.4.3.1 Remez Çoklu Değişim Algoritması	16
2.4.3.2 Minimaks Anlamda Optimum Süzgeçlerin Özellikleri	21
2.4.3.3 Lineer Programlama Tekniği	22
3. FRM TEKNİĞİYLE DOĞRUSAL-FAZLI KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI	26
3.1 Orijinal FRM Yaklaşımı	27
3.1.1 Orijinal FRM Tekniğiyle Dar-Bantlı Süzgeç Tasarımı	27
3.1.2 Orijinal FRM Tekniğiyle Keyfi Bant-Genişlikli Süzgeç Tasarımı	29
3.1.2.1 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi	34
3.1.2.2 Optimum L Faktörünün Seçimi	36
3.1.2.3 $H(\omega)$ Üzerindeki Dalganmaların İncelenmesi	38
3.1.2.4 FRM Süzgecinin Üretilmesi	42
3.2 Eşzamanlı Optimizasyon Tekniği	46
3.2.1 Başlangıç Çözümünün Bulunması	47
3.2.2 Başlangıç Çözümünün İyileştirilmesi	47
3.2.3 Pratik Süzgeç Tasarımı	48
3.3 Genelleştirilmiş FRM Yaklaşımı	52
3.3.1 Süzgeç Yapısı ve Frekans Cevabı	53
3.3.2 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi	56
3.3.3 L_A ve L_M Seçimi	57
3.3.4 Eşzamanlı Optimizasyon Tekniğinin Genelleştirilmiş Tek-Katlı FRM Yaklaşımına Uyarlanması (Önerilen Yöntem)	58
3.4 Salt-Gecikmeli Maskeleye Süzgecinin Kullanımına İlişkin Yaklaşım	63
3.4.1 Süzgeç Yapısı ve Transfer Fonksiyonu	63

3.4.2 Salt-Gecikmeli Tasarım Planı	64
3.5 Çok-Katlı FRM Yapısı	66
3.5.1 Tek-Katlı Optimum Tasarım	66
3.5.2 Çok-Katlı Optimum Tasarım	68
3.5.2.1 Sonuç Süzgecinin Transfer Fonksiyonu	71
3.5.2.2 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi	72
3.5.2.3 Alt-Süzgeçlerin Eşzamanlı Üretilmesi	74
4. SONUÇLAR	80
KAYNAKLAR	82
EK A	85
ÖZGEÇMİŞ	86

KISALTMALAR

ASIC	: Application Specific Integrated Circuit (Uygulamaya Özgül Tümüleşik Devre)
dB	: Desibel
DFT	: Discrete Fourier Transform (Ayrık Fourier Dönüşümü)
DZD	: Doğrusal Zamanla-Değişmeyen
EOT	: Eşzamanlı Optimizasyon Tekniği
EUSIPCO	: European Signal Processing Conference (Avrupa Sinyal İşleme Konferansı)
FFT	: Fast Fourier Transform (Hızlı Fourier Dönüşümü)
FIR	: Finite Impulse Response (Sonlu Dürtü Cevabı)
FRM	: Frequency-Response Masking (Frekans-Cevabı Maskeleyme)
IFIR	: Interpolated Finite Impulse Response (Ara-Değerlenmiş Sonlu Dürtü Cevabı)
IIR	: Infinite Impulse Response (Sonsuz Dürtü Cevabı)
kHz	: Kiloherzt
LMS	: Least-Mean-Square (En Küçük-Ortalama-Kare)
MPR	: McClellan-Parks-Rabiner
SIU	: Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı
SQP	: Sequential Quadratic Programming (Ardışık Karesel Programlama)
VLSI	: Very Large Scale Integration (Çok Büyük Çapta Tümüleşim)

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 Örnek 2.2'ye ilişkin $a(n)$ ve $h(n)$ katsayıları.....	25
Tablo 3.1 $E(\omega)$ hata fonksiyonuna ilişkin denklemler tablosu.....	43
Tablo 3.2 Örnek 3.1 için oluşturulan değer tablosu.....	44
Tablo 3.3 Örnek 3.2'ye ilişkin alt-süzgeç parametreleri.....	50
Tablo 3.4 Örnek 3.3'e ilişkin alt-süzgeç parametreleri.....	59
Tablo 3.5 Örnek 3.4'e ilişkin alt-süzgeç parametreleri.....	61
Tablo 3.6 $R = 0, 1, \dots, 9$ için $\beta_{eşik}(R)$ değerleri.....	70
Tablo 3.7 $\xi(\beta)$ fonksiyonları.....	71
Tablo 3.8 Örnek 3.6'ya ilişkin alt-süzgeç parametreleri.....	75
Tablo 3.9 3-katlı FRM süzgeci için her kata ait özellikler.....	77
Tablo 4.1 Donanım Karşılaştırması – 1.....	81
Tablo 4.2 Donanım Karşılaştırması – 2.....	81
Tablo 4.3 Donanım Karşılaştırması – 3.....	81

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1	Temel sayısal işaret işleme şeması..... 1
Şekil 2.1	Temel frekans süzücü süzgeçlerin ideal frekans cevapları..... 6
Şekil 2.2	Gerçeklenebilir bir alçak-geçiren süzgeç..... 7
Şekil 2.3	$H(\omega)$ ile $ H(e^{j\omega}) $ ve $\phi(\omega)$ ile $\arg H(e^{j\omega})$ arasındaki ilişkiler..... 10
Şekil 2.4	Dört FIR süzgeç tipi için örnek dürtü cevapları..... 11
Şekil 2.5	Dört FIR süzgeç tipi için örnek sıfır-fazlı frekans cevapları..... 14
Şekil 2.6	Optimum bir Tip 1 doğrusal-fazlı alçak-geçiren FIR süzgeç için sıfır-fazlı frekans cevabı ve hata fonksiyonu ($N = 14$, $\delta_g = 2\delta_d$)..... 18
Şekil 2.7	Lineer programlama tekniği yardımıyla tasarlanan alçak-geçiren süzgecin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları..... 25
Şekil 3.1	Frekans-cevabı maskeleme yaklaşımı ile dar-bantlı süzgeç tasarımının basit gösterilimi..... 28
Şekil 3.2	H_c süzgecinin gerçekleşmesi..... 30
Şekil 3.3	Frekans-cevabı maskeleme yaklaşımı ile keyfi bant-genişlikli süzgeç tasarımının basit gösterilimi..... 31
Şekil 3.4	(a) FRM tekniğinin genel yapısı, (b) Etkili bir gerçekleştirme..... 33
Şekil 3.5	Maskeleme süzgeçlerinin önemsiz-bantları..... 41
Şekil 3.6	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_c(z^L)$ süzgecinin $H_{Mc}(z)$ maskesi üzerindeki dengeleme etkisi, (c) $H_c(z^L)$ süzgecinin $H_{Ma}(z)$ maskesi üzerindeki dengeleme etkisi, (d) Maskeleme süzgeçlerinin genlik cevapları..... 46
Şekil 3.7	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_a(z^L)$ ve $H_c(z^L)$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L = 21$), (c) Maskeleme süzgeçlerinin genlik cevapları, (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları..... 52
Şekil 3.8	Genelleştirilmiş tek-katlı FRM tekniğinin genel yapısı..... 53
Şekil 3.9	$L_M = 2$ için, genelleştirilmiş tek-katlı FRM tekniğindeki alt-süzgeçlerin frekans cevapları..... 55
Şekil 3.10	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_A(z^{L_A})$ ve $H_C(z^{L_A})$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L_A = 17$), (c) $H_{Ma}(z^{L_M})$, $H_{Mc}(z^{L_M})$ ve $H_E(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları ($L_M = 3$), (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları..... 61
Şekil 3.11	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_A(z^{L_A})$ ve $H_C(z^{L_A})$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L_A = 26$), (c) $H_{Ma}(z^{L_M})$, $H_{Mc}(z^{L_M})$ ve $H_E(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları ($L_M = 2$), (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları..... 63
Şekil 3.12	Salt-gecikmeli tekniğin genel yapısı..... 64

Şekil 3.13	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $F(z^L)$ ve $z^{-LN_F/2} - F(z^L)$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L = 21$), (c) $G_2(z)$ ve $G_3(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları.....	66
Şekil 3.14	3-katlı bir FRM yapısı.....	69
Şekil 3.15	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^6)$ süzgeçlerinin genlik cevapları, (c) $H_{Ma}^{(2)}(z^6)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^6)$ ve $H_a^{(2)}(z^{36})$ süzgeçlerinin genlik cevapları, (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.....	77
Şekil 3.16	(a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları, (b) $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^4)$ süzgeçlerinin genlik cevapları, (c) $H_{Ma}^{(2)}(z^4)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^4)$ ve $H_a^{(2)}(z^{16})$ süzgeçlerinin genlik cevapları, (d) $H_{Ma}^{(3)}(z^{16})$, $H_{Mc}^{(3)}(z^{16})$ ve $H_a^{(3)}(z^{64})$ süzgeçlerinin genlik cevapları, (e) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.....	79

SEMBOL LİSTESİ

n	: Ayrık zaman değişkeni
$x(n)$	: Giriş işaret dizisi
$y(n)$	: Çıkış işaret dizisi
z	: z-dönüşümü değişkeni
$H(z)$	: Transfer fonksiyonu
$h(n)$	: Dürtü cevabı
ω	: Açısal frekans değişkeni [rad / sn]
$H(e^{j\omega})$	: Frekans cevabı
ω_c	: İdeal süzgecin kesim frekansı
ω_g, θ	: Geçirme-bandı sınırı
ω_d, ϕ	: Durdurma-bandı sınırı
$ H(e^{j\omega}) $	: Genlik cevabı
δ_g	: Geçirme-bandı dalgalanması
δ_d	: Durdurma-bandı dalgalanması
Δ	: Geçiş-bandı genişliği [rad / sn]
A_g	: Maksimum geçirme-bandı değişimi [dB]
A_d	: Minimum durdurma-bandı zayıflaması [dB]
f	: Gerçek frekans [Hertz]
f_s	: Örnekleme frekansı [Hertz]
$f_{düzge}$	: Düzgelenmiş frekans [Boyutsuz]
$\arg H(e^{j\omega})$	: Faz cevabı
$\phi(\omega)$	: Doğrusal-faz terimi
τ_0, τ_1	: $\phi(\omega)$ 'ya ilişkin keyfi sabitler
$\tau_G(\omega)$	: Grup-gecikmesi cevabı
$\tau_F(\omega)$	: Faz-gecikmesi cevabı
N	: Süzgeç derecesi
$H(\omega)$	: Sıfır-fazlı frekans cevabı ($= F(\omega)G(\omega)$)
$F(\omega)$	: ω 'ya bağlı sabit bir fonksiyon
$G(\omega)$	: Kosinüslerin toplamından oluşan terim
$g(n)$	: $G(\omega)$ 'ya ilişkin katsayı dizisi
M	: $G(\omega)$ 'nın derecesi
E_2	: En küçük-ortalama-karesel hata
X	: Süzgeç bantlarını kapsayan yoğun bir frekans noktaları kümesi
$D(\omega)$	: Arzulanan sıfır-fazlı frekans cevabı
$W(\omega)$	: Pozitif değerli ağırlık fonksiyonu
$E(\omega)$	: Ağırlıklı hata fonksiyonu
ε	: $E(\omega)$ 'nın tepe genlik değeri
k	: Bağlı dalgalanma oranı ($= \delta_g / \delta_d$)
Ω	: Birörnek aralıklı frekans noktaları kümesi
Φ_1, Φ_2	: Herrmann derece kestirim formülünde kullanılan iki fonksiyon

x_j	: Birincil problemdeki bilinmeyenler
y_j	: İkili problemdeki bilinmeyenler
a_j, b_i, c_{ij}	: Birincil ve ikili problemin değişmezleri
δ	: Kırıksıklık değişkeni
$H(\omega)$	: Sıfır-fazlı frekans cevabı vektörü
$C(\omega)$	: Kosinüs vektörü
A	: Katsayı vektörü
B	: Bilinmeyenler vektörü
H_a, H_A	: Model süzgeç
H_c, H_C	: Tümlleyen süzgeç
L, L_A	: Model ara-değerleme faktörü
H_{Ma}, H_{Mc}	: Doğrusal-fazlı iki maskeleme süzgeci
M_{Ma}, M_{Mc}	: İlave gecikme elemanı sayıları
N_{etkin}	: Etkin süzgeç derecesi
m	: Küçük bir pozitif tamsayı
Π	: Çarpıcı sayısı
N_{toplam}	: Alt-süzgeçlerin toplam derecesi
Σ	: Toplayıcı sayısı
λ	: Tolerans sabiti
$\delta(\omega)$	: Sıfır-fazlı frekans cevabı sapması
Ω_g, Ω_d	: Model süzgeç için baz alınan bantlar
Φ	: Ayarlanır parametre vektörü
∇	: Gradyan
I	: Örnekleme sayısı
H_E	: Ön-süzgeç
L_M	: Maske ara-değerleme faktörü
G_3	: Ortak süzgeç
C	: Karmaşıklık ölçütü
β	: Geçiş-bandı genişliği [Boyutsuz]
N_0	: Remez süzgeç uzunluğu
α	: Simetri belirleyici gerçel değişken
L_{opt}	: Optimum model ara-değerleme faktörü
$\beta_{eşik}$	: β 'nın eşik değeri ($\approx 1 / 16 \approx 0.063$)
L_r	: r . kata ilişkin model ara-değerleme faktörü
R	: Toplam kat sayısı
$\xi(\beta)$	: β 'ya bağlı bir fonksiyon

DOĞRUSAL-FAZLI KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI İÇİN FRM YAKLAŞIMI VE EŞZAMANLI OPTİMİZASYON TEKNİĞİ

ÖZET

Doğrusal-fazlı sonlu-dürtü-cevaplı (FIR) sayısal süzgeçler, tam kararlılık, faz bozulmasının olmaması ve düşük katsayı duyarlılığı başta olmak üzere pek çok önemli özelliğe sahiptirler. Bu, onları çoğu sayısal işaret işleme uygulamasında eşdeğer sonsuz-dürtü-cevaplı (IIR) süzgeçlere tercih edilir hale getirmiştir. Ancak, özellikle dar geçiş-bantlı (keskin) FIR sayısal süzgeçler gerçekleştirirken karşılaşılan aritmetik karmaşıklık (çarpıcı ve toplayıcı sayılarının fazlalığı), bu tip süzgeçlerin en önemli dezavantajıdır. Aritmetik karmaşıklık geçiş-bandı genişliği ile ters orantılıdır.

Frekans-cevabı maskeleme (FRM) yaklaşımı, doğrusal-fazlı keskin FIR sayısal süzgeçleri tasarlarken gerekli olan çarpıcı ve toplayıcı sayılarını büyük oranlarda azaltmak için çok etkili bir tekniktir. Bu azalmaların bedeli, sonuç süzgecinin derecesindeki artışla ödenir. Fakat bu artış az olması dolayısıyla önemsenmez. FRM tekniğiyle yapılan süzgeç tasarımlarında, iyilik ölçütü olarak genellikle çarpıcı sayısı alınır. Ayrıca FRM tekniği, donanım gereksinimlerini ciddi ölçüde azaltmasıyla düşük güç tüketimi ve dar silikon alanı gerektiren ASIC ve VLSI gibi gerçeklemlere dayalı modern süzgeç tasarımlarında da kullanılabilmektedir.

FRM yaklaşımının ana teması, düşük-dereceli periyodik alt-süzgeçlerin temel yapı blokları olarak kullanılmasında yatar. Orijinal FRM tekniği, iki temel yapı bloğundan oluşmaktadır. Birinci yapı bloğu, bir model süzgecin uygun sayıda sıfırla ara-değerlenerek periyodik hale getirildiği ve bu ara-değerlenmiş süzgecin tümleyeninin oluşturulduğu bloktur. Ara-değerlenmiş periyodik süzgeçlerin geçiş-bandı genişlikleri arzulanan süzgecin geçiş-bandı genişliği kadardır. İkinci yapı bloğunda, ara-değerlenmiş tümleyen çiftin istenmeyen periyodikleri uygun seçilmiş iki maskeleme süzgeci ile maskelenir. Nihayet maskeleme süzgeç çıkışları toplanarak keskin geçişli FRM sonuç süzgeci elde edilir.

Orijinal FRM yaklaşımında kullanılan maskeleme süzgeçlerinin ara-değerlenmesi ve oluşan istenmeyen periyodiklerin basit bir ön-süzgeç ile yok edilmesi şeklinde genelleştirilmiş yaklaşımla, aritmetik karmaşıklığın daha da azalabileceği gösterilmiştir. Orijinal ve genelleştirilmiş FRM yöntemlerinin dezavantajı, alt-süzgeçlerin ayrı ayrı üretiliyor olmasıdır. Orijinal tek-katlı FRM yaklaşımındaki aritmetik karmaşıklık, tüm alt-süzgeçlerin eşzamanlı üretilmesi için önerilen iki-adımlı bir optimizasyon tekniğiyle oldukça azaltılmıştır. Birinci adımda, basit bir algoritma ile alt-optimum bir çözüm bulunur. İkinci adımda, bu çözüm başlangıç çözümü olarak kullanılır ve doğrusal-olmayan bir optimizasyon algoritması yardımıyla iyileştirilir. Orijinal çok-katlı FRM yaklaşımı için de benzer bir optimizasyon tekniği önerilmiştir.

Bu çalışmada, orijinal çok-katlı FRM yaklaşımı için önerilen eşzamanlı optimizasyon tekniği, genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımına uyarlanmıştır. Bu

yeni yöntem, yakın zamanda SIU-2006 ve EUSIPCO-2006'ya bildiri olarak sunulmuştur. Literatürden alınan örnekler, önerilen yöntemle üretilen özellikle dar-banlı FIR süzgeç karmaşıklığının, diğer tek-katlı FRM yöntemlerine göre azaldığını gösterir. Şüphesiz, aritmetik karmaşıklık çok-katlı tekniklerle daha da azalmaktadır. Gelecek çalışmalar, eşzamanlı optimizasyon tekniğinin geliştirilmiş çok-katlı FRM yapılarına uyarlanması şeklinde olabilir.

FRM APPROACH AND SIMULTANEOUS OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR SHARP LINEAR-PHASE FIR DIGITAL FILTER DESIGN

SUMMARY

Linear-phase finite-impulse-response (FIR) digital filters have many important characteristics such as exact stability, free of phase distortion and low coefficient sensitivity. In most of digital signal processing applications, this makes them attractive over their IIR counterparts. However, the arithmetic complexity, i.e. the large number of multipliers and adders required in the implementation, is the main disadvantage of these filters especially when designing narrow transition-band (sharp) FIR digital filters. The arithmetic complexity is inversely proportional to the transition-band width.

Frequency-response masking (FRM) approach is a very efficient technique for considerably reducing the number of multipliers and adders required in implementing sharp linear-phase FIR digital filters. The price for these reductions is paid by the increase in the overall filter order. This increase has no importance due to its slowness. In FRM filter designs, usually the number of multipliers is considered as the goodness measure. In addition, because of significantly reducing the hardware requirements, FRM synthesis technique can also be used in modern filter designs based on the implementations, like ASIC and VLSI, those required low power consumption and small silicon area.

The main idea of FRM approach is to use several low-order periodic subfilters as basic building blocks. Original FRM synthesis technique consists of two fundamental building blocks. The first one is the block where a model filter is made periodic by interpolating with zeros and the complement of the interpolated filter is constructed. The transition-band widths of these periodic subfilters are as narrow as that of the desired filter. In the second one, the unwanted periodical frequency components due to the complementary pair are removed by using two properly chosen masking filters. Finally, the overall sharp filter is obtained by adding up the outputs of the two masking filters.

It has been shown that the arithmetic complexity can be further reduced by using the generalized FRM approach where the masking filters in the original approach are interpolated and the periodical frequency components created by these filters are removed by means of a simple prefilter. The drawback of both the original and the generalized FRM synthesis techniques is that the subfilters have been separately designed. The arithmetic complexity has been significantly decreased in the original one-stage FRM approach by the following two-step optimization technique proposed for simultaneously synthesizing all the subfilters. First, a suboptimal solution is found by using a simple algorithm. Second, this solution is used as an initial solution and is improved by means of a nonlinear optimization

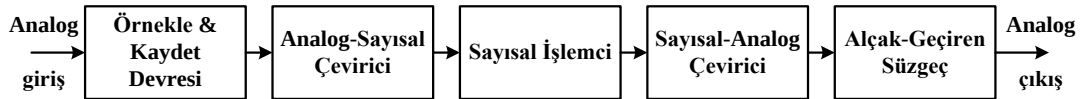
algorithm. A similar optimization technique was also proposed for the original multistage FRM approach.

In this work, the simultaneous optimization technique proposed for the original multistage FRM approach is adapted to the generalized one-stage FRM approach. This new technique is recently submitted to SIU-2006 and EUSIPCO-2006. Examples taken from the literature show that the complexity of especially narrowband FIR digital filters synthesized using the proposed technique decreases compared to the earlier one-stage FRM synthesis techniques. Clearly, the arithmetic complexity can be further reduced by using the multistage design schemes. Future works can be devoted to adapting the simultaneous optimization technique to the generalized multistage FRM structures.

1. GİRİŞ

Zaman, uzaklık, sıcaklık veya basınç gibi bir ya da daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu olan fiziksel niceliklere *işaret* denir. İşaret genliğinin bağımsız değişkenlere göre değişimi ise *dalga biçimi* olarak isimlendirilir. Bir işaret kendiliğinden oluşabileceği gibi, yapay olarak da üretilebilir. İşaretler, bağımsız değişkenlerin sürekli veya ayrık fonksiyonları olabilirler. Eğer bir işaret tek bir bağımsız değişkenin fonksiyonu ise, tek-boyutlu işaret; iki bağımsız değişkenin fonksiyonu ise, iki-boyutlu işaret olarak adlandırılır. Çok-boyutlu bir işaret birden fazla değişkenin fonksiyonudur.

İşaret bilgi taşır ve bu bilgiyi tamamen veya kısmen özütmek için uygulamaya bağlı olarak işlenir. Bu süreç *işaret işleme* olarak isimlendirilir. Kendiliğinden oluşan işaretlerin çoğu, genellikle zamana bağlı sürekli fonksiyonlar olup *analog işaretler* diye bilinirler. Bir analog işaretin sayısal olarak işlenmesi özünde üç adımda gerçekleşir [1]: 1- Analog (sürekli) işaretin sayısal (ayrık) forma dönüştürülmesi, 2- Sayısal işaretin işlenmesi, 3- İşlenmiş işaretin tekrar analog forma dönüştürülmesi. Bu süreç Şekil 1.1’de gösterilir.



Şekil 1.1 Temel sayısal işaret işleme şeması.

Sayısal işaret işleme, 40 yılı aşkın bir süredir çok aktif bir araştırma ve uygulama alanıdır. Bu alandaki gelişmeler, yüksek-hızlı bilgisayarların, mikroelektronik ve tümleşik devre teknolojisinin hızlı büyümesine paraleldir. Sayısal işaret işleme teknolojileri,

- Tüketici elektroniği
- Veri haberleşmesi
- Otomotiv sanayi
- Tıp elektroniği
- Tomografi ve akustik görüntüleme
- Ses tanıma
- Görüntü ve video işleme
- Sismik araştırmalar
- Petrol bulma çalışmaları
- Sonar ve radar elektroniği

- Kartografi

- Robotbilim

gibi daha pek çok uygulama alanına sahiptir.

Sayısal işaret işleminin amaçlarından biri, belirli özellikleri olan bir sonuç işaret dizisi elde edecek biçimde, ayrık bir giriş işaret dizisinin işlenmesi için bir algoritma veya aygıt tasarlamaktır [2]. Bu aygıt veya algoritma *sayısal süzgeç* olarak adlandırılır. Sayısal süzgeçlerin iki temel türü vardır: sonlu-dürtü-cevaplı (FIR) ve sonsuz-dürtü-cevaplı (IIR) süzgeçler. FIR sayısal süzgeçler, birçok olumlu özelliklerinden dolayı sayısal süzgeç uygulamalarında IIR karşıtlarına genellikle tercih edilirler. Fakat dar geçiş-bantlı süzgeçlerin istendiği uygulamalarda, FIR süzgeçlerin kullanılması gerçekleştirme maliyetini artırmaktadır. Orijinali 1986 yılında Lim tarafından önerilen ve günümüzde de halen geliştirilmekte olan frekans-cevabı maskeleye (FRM) yaklaşımı, FIR süzgeç gerçekleştirme maliyetini ciddi ölçüde azaltan etkili bir tekniktir.

Tezin ikinci bölümünde, sayısal süzgeçlerin matematiksel modellenmesinden sonra tasarım süreçlerine kısaca değinilir. Süzgeç karakteristiği için gerekli belirlemelerin ardından FIR sayısal süzgeçler detaylı olarak incelenir. Dört tip doğrusal-fazlı FIR süzgeçten bahsedilir ve sık kullanılan tasarım yöntemleri kısaca özetlenir. Daha sonra, minimaks anlamda optimum FIR süzgeç tasarımının Remez çoklu değişim algoritması ve lineer programlama tekniği yardımıyla nasıl koterıldığı anlatılır. Ayrıca, minimum süzgeç derecesinin tahmini için bazı kestirim formülleri de bu bölümde verilir.

Tezin üçüncü bölümü, asıl tez konusunu oluşturan FRM tekniğinin kapsamıca ele alındığı bölümdür. FRM tekniği orijinal haliyle anlatıldıktan sonra, sırasıyla, eşzamanlı optimizasyon tekniği, geliştirilmiş FRM yaklaşımı, salt-gecikmeli maskeleye tekniği ve çok-katlı FRM yapısı incelenir. Ayrıca çok-katlı FRM yapısı incelenirken, tek- ve çok-katlı optimum tasarımlar için en iyilik kriterleri üzerinde de durulur. Eşzamanlı optimizasyon tekniğinin geliştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımına uyarlanması şeklinde önerdiğimiz yeni yöntem de bu bölümde anlatılır. Bütün FRM teknikleri, literatürden alınan örnekler üzerindeki bilgisayarlı benzetim sonuçlarıyla desteklenir.

Tezin son bölümünde, üçüncü bölümdeki benzetim sonuçlarına ilişkin donanım karşılaştırmaları yapılır ve okuyucuya gelecek çalışmalar hakkında bazı ipuçları verilir.

2. SAYISAL SÜZGEÇLER

Sayısal süzgeçler, doğrusal ve doğrusal-olmayan süzgeçler ile zamanla-değişmeyen ve zamanla-değişen süzgeçler olmak üzere iki ayrı kategoride sınıflandırılırlar. Doğrusal zamanla-değişmeyen (DZD) sayısal süzgeçler için teori ve tasarım teknikleri sistemattiktir ve oldukça tamamlanmıştır. Pek çok fiziksel sistem DZD sistem biçiminde modellenenebildiği için, DZD sistemler sayısal işaret işlemede çok önemli bir yere sahiptirler. Bu çalışmada sadece DZD süzgeçler incelenecektir. “Süzgeç” dendiğinde artık, “DZD süzgeç” anlaşılacaktır.

2.1 Sayısal Süzgeçlerin Matematiksel Modellenmesi

Sayısal bir süzgeç için giriş ve çıkış işaretleri arasındaki ilişki, aşağıdaki fark denklemi ile modellenenebilir [2].

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^N b(k)y(n-k) \quad (2.1)$$

z -dönüşümü yardımıyla sayısal süzgecin transfer fonksiyonu, $H(z)$, şöyle ifade edilebilir:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b(k)z^{-k}} \quad (2.2)$$

Bu denklemin ayrık zaman-bölgesi karşılığı bir evrişim (convolution) toplamıdır:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(n-l) \quad (2.3)$$

Burada $h(n)$, sayısal süzgecin dürtü cevabıdır.

Sayısal süzgeçlerin iki temel türü vardır: $h(n)$ dizisinin sıfırdan farklı örneklerinin sonlu sayıda olduğu FIR (Finite Impulse Response, Sonlu Dürtü Cevabı)

süzgeçler ve sıfırdan farklı örneklerinin sonsuz sayıda olduğu IIR (Infinite Impulse Response, Sonsuz Dürtü Cevabı) süzgeçler. FIR süzgeçler için, sadece $a(k)$ dizisi süzgeç katsayıları olarak tanımlanır; IIR süzgeçler içinse, süzgeç katsayıları geri besleme terimleri olan $b(k)$ dizisi katsayılarını da içerir.

Sayısal süzgeçlerin istenilen özellikleri genellikle frekans-bölgesinde belirtilir. Süzgecin frekans cevabı (2.2)'de $z = e^{j\omega}$ dönüşümü uygulanarak bulunabilir.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M a(k)e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N b(k)e^{-j\omega k}} \quad (2.4)$$

Süzgecin frekans-bölgesi karakteristiğini gösteren frekans cevabı, $H(e^{j\omega})$, ω açısal frekansının karmaşık bir fonksiyonudur. $H(e^{j\omega})$ 'nın ters Fourier dönüşümü olan $h(n)$ dürtü cevabı, süzgecin zaman-bölgesini karakterize eder. Ancak, sayısal süzgeç karakteristiğinin zaman-bölgesinde verilmesi yaygın değildir. Çoğunlukla, $H(e^{j\omega})$ 'nın genlik spektrumunu gerçekleyen bir sayısal süzgeç bulunmaya çalışılır. Bu da, $k = 0, 1, K, M$ için $a(k)$ ve $k = 1, 2, K, N$ için $b(k)$ katsayılarının bulunmasını gerektirir.

2.2 Sayısal Süzgeç Tasarım Süreci

Sayısal süzgeç tasarımı için genellikle aşağıdaki temel adımlar izlenir [1, 3]:

1. Süzgeç tasarımına esas olacak frekans cevabı özellikleri belirlenir.
2. Arzulanan frekans cevabına yakınsayacak süzgeç tipi (FIR / IIR) seçilir.
3. Uygun bir tasarım tekniği belirlenir ve ideal süzgeç biçimine yaklaşmak için arzulanan özellikler matematiksel forma sokulur.
4. Yaklaşıklık problemi çözülür ve önceden belirlenmiş bir iyilik ölçütünü en küçük yapacak süzgeç katsayıları bulunur.
5. Bilgisayar, sayısal işlemci veya VLSI yongası gibi uygun bir teknoloji kullanılarak süzgeç gerçekleştirilir.
6. Süzgeç performansı, benzetim yardımıyla test edilir.

Arzulanan frekans cevabı çoğunlukla, genlik cevabı, faz cevabı veya hem genlik hem de faz cevabı şeklinde verilir. Genlik cevabı genellikle, giriş işaretinin korunması veya bastırılması gereken frekans bölgeleri cinsinden belirtilir. Çoğu uygulamada faz cevabının, giriş işaretinin korunduğu veya bastırıldığı frekans bölgelerinde doğrusal olması istenir. Bazı durumlarda, zaman-bölgesi koşulları da aranır. Basamak cevabı üzerinde kısıtların olduğu uygulamalar da mevcuttur.

İkinci adım, verilen frekans cevabına yaklaşmak için uygun bir süzgeç sınıfının seçilmesinden ibarettir. İlk olarak, FIR süzgeçlerin mi yoksa IIR süzgeçlerin mi kullanılacağına karar verilmelidir. Daha sonra, FIR veya IIR süzgeçlerin uygun bir sınıfı seçilir. Hesaplama açısından etkin veya düşük-duyarlıklı çoğu FIR ve IIR süzgeç sınıfı için, transfer fonksiyonu üzerinde birtakım kısıtlar vardır. Bu durumda, transfer fonksiyonu ve süzgeç gerçekleştirilmesi birbirinden ayrılamaz. İlgili süzgeç sınıfını arzulanan süzgeç yapısı belirler.

Üçüncü adımda, belirlenen uygun bir teknik yardımıyla istenen özellikler kesin bir matematiksel ifadeye dönüştürülür. İlerleyen altbölümlerde FIR sayısal süzgeçler için bazı tasarım teknikleri anlatılacaktır.

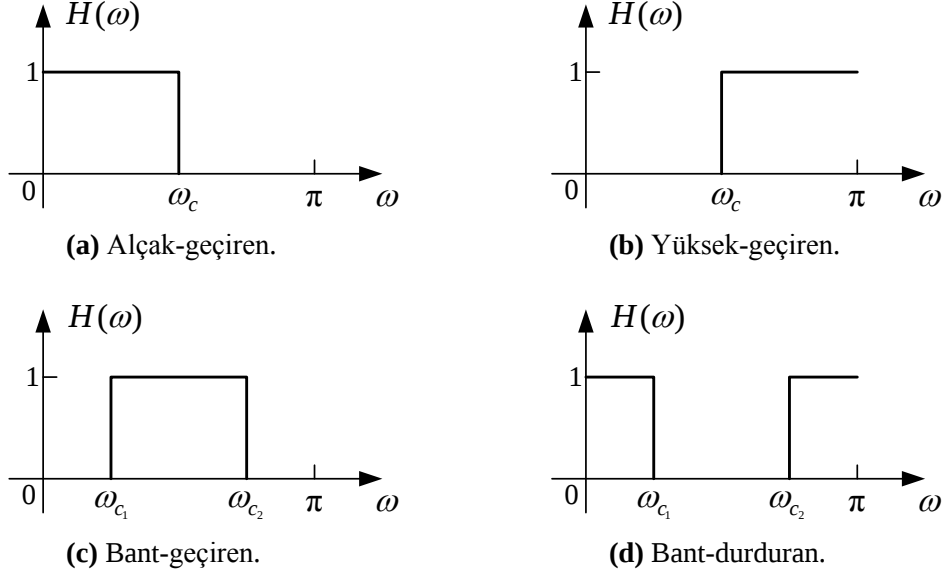
Dördüncü adımda, yaklaşıklık problemi çözülür ve süzgeç katsayıları bulunur. İyilik ölçütü olarak genellikle izin verilen maksimum hata miktarı kullanılır; örneğin, arzulanan frekans cevabından maksimum sapma miktarı. Öncelikli problem, minimum süzgeç karmaşıklığını (örneğin, minimum süzgeç derecesi) belirlemektir. Sonrasında, iyilik ölçütünü en aza indirecek minimum karmaşıklıkla süzgeç, yani en iyi süzgeç, bulunur.

Beşinci adım, katsayı değerleri bulunan en iyi süzgecin gerçekleştirilmesinden ibarettir. Son adımda, sonuç süzgecinin verilen tüm özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakılır. Eğer sağlamıyorsa, süzgeç tipi veya iyilik ölçütü değiştirilip tüm süreç yinelenir.

2.3 Süzgeç Karakteristiğinin Belirlenmesi

Süzgeçler genellikle frekans cevaplarına göre sınıflandırılırlar. Alçak-geçiren, yüksek-geçiren, bant-geçiren ve bant-durduran süzgeçler önemli olanlarıdır. Bunlara ilişkin ideal frekans cevapları Şekil 2.1’de gösterilir. Eğer bir sayısal süzgecin frekans cevabı 2π ile periyodik ise, süzgeç karakteristiği sadece bir periyot için, yani

$[-\pi, \pi]$ frekans aralığında, belirlenir. Ayrıca simetri özelliğinden dolayı, frekans cevabının sadece pozitif yarı-periyotta, yani $[0, \pi]$ frekans aralığında, gösterilmesi yeterlidir [1]. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde de aynı varsayımlar kullanılacaktır.



Şekil 2.1 Temel frekans süzücü süzgeçlerin ideal frekans cevapları.

Şekil 2.1'deki süzgeçler, geçirilmek istenen frekans bölgesini hiçbir değişikliğe uğratmazken, zayıflatılmak istenen frekans bölgesini tamamen bastırırlar. Bu özellik ideal süzgeç karakteristiğine karşı düşer. Bant sınırlarındaki süreksizliklerden ötürü, ideal süzgeçlerin doğrudan tasarlanmaları mümkün değildir. Bu nedenle, bu süzgeçlerin gerçekleştirilebilir süzgeçlere yaklaştırılmaları gerekmektedir.

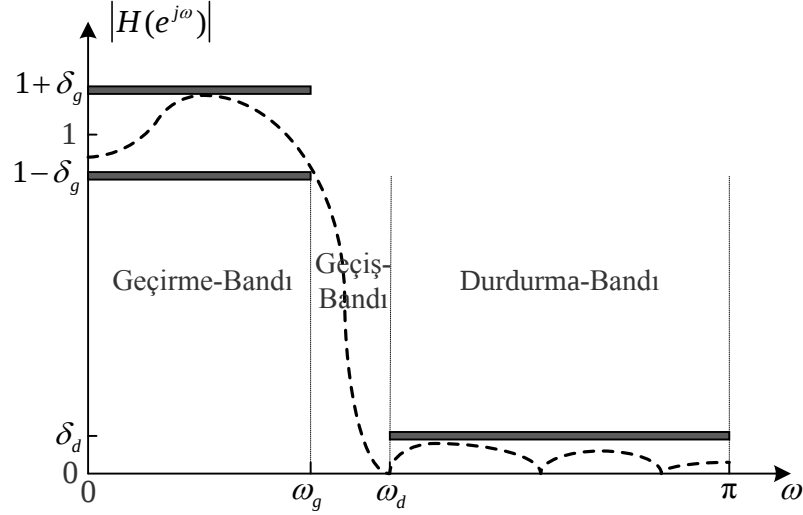
Şimdi, pek çok kullanım alanı olan alçak-geçiren sayısal süzgeci ele alalım. Şekil 2.1(a)'da görüldüğü gibi, bu süzgecin ideal frekans cevabı

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. ω_c kesim frekansında bir süreksizlik söz konusudur. Gerçeklenebilir duruma yaklaşmak için, ω_c frekansı yerini $[\omega_g, \omega_d]$ ile ifade edilen bir geçiş-bandına bırakır. Geçiş-bandındaki frekans cevabı, geçirme-bandından durdurma-bandına kadar değişkenlik gösterir. Gerçeklenebilir bir alçak-geçiren süzgeç için arzulanan genlik cevabı genellikle şu formda verilir:

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \omega_g] \\ 0, & \omega \in [\omega_d, \pi] \end{cases} \quad (2.6)$$

Bu süzgece ait gerçek genlik cevabı, $|H(e^{j\omega})|$, Şekil 2.2’de gösterilir.



Şekil 2.2 Gerçeklenebilir bir alçak-geçiren süzgeç.

Giriş işaretinin, $[0, \omega_g]$ geçirme-bandında korunması ve $[\omega_d, \pi]$ durdurma-bandında bastırılması arzulanır. ω_g ve ω_d , sırasıyla, alçak-geçiren süzgecin geçirme- ve durdurma-bandı sınırındır. Geçirme- ve durdurma-bandındaki izin verilen hatalar, sırasıyla, δ_g ve δ_d ile temsil edilir. Ayrıca $\Delta = \omega_d - \omega_g$, geçiş-bandı genişliğini ifade eder.

Genlik cevabı için izin verilen dalgalanma değerleri genellikle, maksimum geçirme-bandı değişimi ve minimum durdurma-bandı zayıflaması biçiminde logaritmik olarak verilir [1].

$$A_g = 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_g}{1 - \delta_g} \right) \text{ dB} \quad (2.7a)$$

$$A_d = -20 \log_{10} (\delta_d) \text{ dB} \quad (2.7b)$$

Her iki büyüklük de pozitiftir.

Süzgeç karakteristiği için diğer bir husus frekans simgelemidir. f_s örnekleme frekansı olmak üzere, ω açısal frekansının f gerçel frekansı cinsinden ifadesi şöyledir:

$$\omega = 2\pi f / f_s \quad (2.8)$$

Örneğin, $f_s = 20$ kHz ve alçak-geçiren bir süzgecin geçirme- ve durdurma-bandı sınırları 4 ve 5 kHz ise, ω açısal frekansı cinsinden bant sınırları $\omega_g = 0.4\pi$ ve $\omega_d = 0.5\pi$ olur. Diğer bir simgelem de sınırların düzgelenmiş frekans (normalized frequency) cinsinden ifadesidir.

$$f_{düzge} = f / f_s \quad (2.9)$$

Yukarıdaki örnekte, geçirme- ve durdurma-bandının düzgelenmiş sınırları 0.2 ve 0.25'dir.

Bazı uygulamalarda, giriş işaret biçiminin korunması gerekebilir. Bu ancak, süzgecin faz cevabı olan $\arg H(e^{j\omega})$ 'nın $[0, \omega_g]$ geçirme-bandında yaklaşık doğrusal olmasıyla, yani aşağıdaki doğrusal eğriye yakınsamasıyla, başarılır.

$$\phi(\omega) = \tau_0 \omega + \tau_1 \quad (2.10)$$

τ_0 ve τ_1 sabitleri keyfi seçilebilir. Faz cevabı yerine genellikle grup-gecikmesi cevabı,

$$\tau_G(\omega) = - \frac{d \arg H(e^{j\omega})}{d\omega}, \quad (2.11a)$$

veya faz-gecikmesi cevabı,

$$\tau_F(\omega) = - \frac{\arg H(e^{j\omega})}{\omega}, \quad (2.11b)$$

tercih edilir. Bu iki fonksiyon, faz cevabına göre daha basit formlarda olup yorumlanmaları daha kolaydır.

2.4 FIR Sayısal Süzgeçler

Sonlu dürtü cevablı (FIR) süzgeçlerin iki önemli özelliği vardır: 1- Daima karalıdır, 2- Sonlu gecikme yardımıyla daima nedensel olmaları sağlanabilir. IIR süzgeçlerin aksine, FIR süzgeçler doğrusal-fazlı olarak tasarlanabilirler. Pek çok sayısal işaret

işleme uygulamasında, FIR süzgeçler IIR eşdeğerlerine tercih edilirler. Bunun nedenleri şöyle sıralanabilir [1, 2]:

1. Tam doğrusal-fazlı FIR süzgeç kolayca tasarlanabilir.
2. FIR süzgeçler için etkin gerçeklemeler mevcuttur. Hem özyineli hem de özyinesiz gerçekleştirilebilirler.
3. Özyinesiz gerçekleştirilen FIR süzgeçlerin z -düzleminde sadece sıfırları olup kutupları olmadığından, bu tür süzgeçler daima kararlıdır.
4. Keyfi karakteristikli FIR süzgeçler için mükemmel tasarım teknikleri mevcuttur. Fakat keyfi genlikli IIR süzgeçlerin tasarımı genellikle zaman alıcıdır ve optimum çözüme yakınsama garanti edilmez.
5. FIR süzgeçlerin nicemleme (quantization) ve yuvarlama hatalarından kaynaklanan çıkış gürültüleri genellikle çok düşüktür. Ayrıca katsayı duyarlılıkları IIR süzgeçlere göre daha azdır.

Geleneksel FIR süzgeç tasarımının temel dezavantajı, özellikle dar geçiş-bantlı uygulamalarda, IIR süzgeç ile karşılaştırıldığında daha çok aritmetik işlem ve donanım bileşenine (çarpıcı, toplayıcı ve gecikme elemanı gibi) ihtiyaç duyulmasıdır. Geçiş-bandı genişliği daraldıkça, süzgeç derecesi ve beraberinde aritmetik karmaşıklık artar. Bu da dar geçiş-bantlı FIR süzgeçlerin gerçekleştirilmesini çok maliyetli hale getirir. Gerçekleme maliyetini azaltmak için bazı tasarım teknikleri geliştirilmiştir; örneğin, frekans-cevabı maskeleye (FRM) tekniği (Bkz. Bölüm 3).

2.4.1 Doğrusal-Fazlı FIR Süzgeçler

$\{h(n)\}$, $N + 1$ uzunluklu nedensel (causal) bir FIR süzgecin dürtü cevabı olmak üzere, bu süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + L + h(N)z^{-N} \quad (2.12)$$

ile verilir. Frekans cevabı ise,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h(n)e^{-j\omega n} = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + L + h(N)e^{-j\omega N} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada N , süzgecin derecesidir.

Pratikte, çoğu FIR süzgeç için faz teriminin tam doğrusal olması istenir. Bu ancak, süzgecin frekans cevabının aşağıdaki formda yazılabilmesiyle mümkündür.

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (2.14)$$

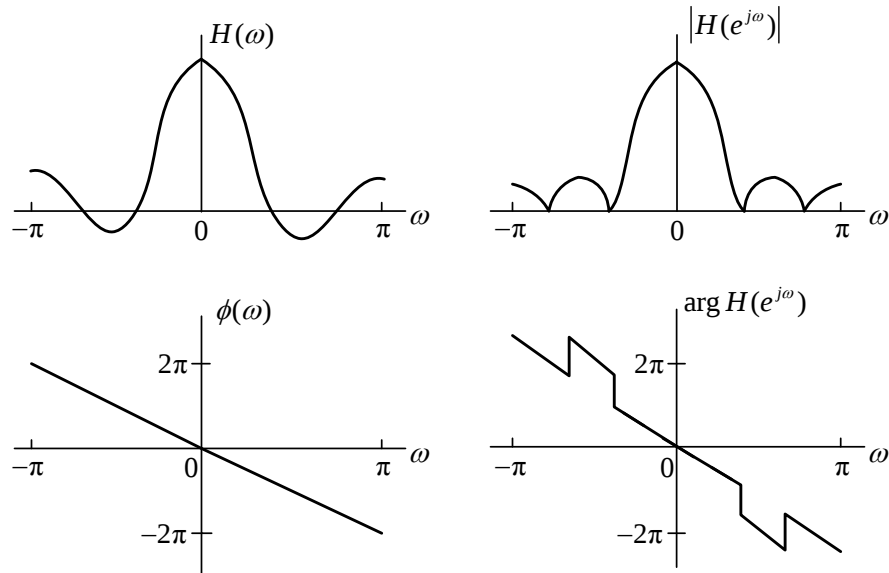
Burada $H(\omega)$, ω 'ya bağlı gerçel ve çift bir fonksiyon olup *sıfır-fazlı frekans cevabı* olarak isimlendirilir. (2.10) ve (2.14) denklemlerinden, $H(e^{j\omega})$ 'nın genlik ve fazı, sırasıyla,

$$|H(e^{j\omega})| = |H(\omega)| \quad (2.15a)$$

ve

$$\arg H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \tau_0\omega + \tau_1, & H(\omega) \geq 0 \\ \tau_0\omega + \tau_1 - \pi, & H(\omega) < 0 \end{cases} \quad (2.15b)$$

olur. $H(\omega)$ ile $|H(e^{j\omega})|$ ve $\phi(\omega)$ ile $\arg H(e^{j\omega})$ arasındaki ilişkiler Şekil 2.3'de gösterilir. Sıfır-fazlı frekans cevabı hem pozitif hem de negatif değerler alabilirken, genlik cevabının sadece pozitif değerler alabildiğine dikkat ediniz.



Şekil 2.3 $H(\omega)$ ile $|H(e^{j\omega})|$ ve $\phi(\omega)$ ile $\arg H(e^{j\omega})$ arasındaki ilişkiler.

Süzgeç derecesinin tek veya çift ve dürtü cevabı simetrisinin pozitif veya negatif olmasına göre dört tip doğrusal-fazlı FIR süzgeçten bahsedilebilir [1–6].

Tip 1: N çift, pozitif simetrik dürtü cevabı $[h(N - n) = h(n)]$.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(\omega n) \quad (2.16)$$

$M = N/2$, $a(0) = h(M)$ ve $n = 1, 2, K, M$ için $a(n) = 2h(M - n)$.

Tip 2: N tek, pozitif simetrik dürtü cevabı [$h(N - n) = h(n)$].

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^M b(n) \cos[\omega(n - 1/2)] \quad (2.17)$$

$M = (N + 1)/2$ ve $n = 1, 2, K, M$ için $b(n) = 2h(M - n)$.

Tip 3: N çift, negatif simetrik dürtü cevabı [$h(N - n) = -h(n)$].

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \quad (2.18)$$

$M = N/2$, $n = 1, 2, K, M$ için $c(n) = 2h(M - n)$ ve $h(M) = 0$.

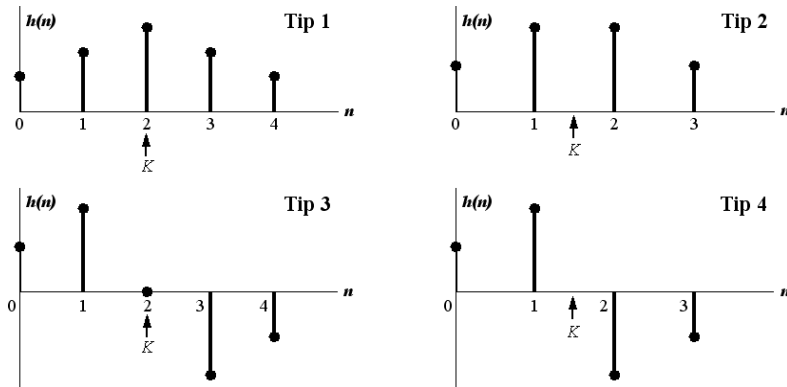
Tip 4: N tek, negatif simetrik dürtü cevabı [$h(N - n) = -h(n)$].

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^M d(n) \sin[\omega(n - 1/2)] \quad (2.19)$$

$M = (N + 1)/2$ ve $n = 1, 2, K, M$ için $d(n) = 2h(M - n)$.

Dört süzgeç tipi için de, $H(\omega)$ farklı taban fonksiyonların lineer birleşiminden oluşmaktadır. (2.10)'daki doğrusal-faz terimi ise şöyle ifade edilir:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -N\omega/2, & \text{Tip 1 ve 2 için} \\ -N\omega/2 + \pi/2, & \text{Tip 3 ve 4 için} \end{cases} \quad (2.20)$$



Şekil 2.4 Dört FIR süzgeç tipi için örnek dürtü cevapları.

Şekil 2.4 örnek dürtü cevaplarını gösterir. Her durumda simetri merkezi $K = N / 2$ 'dedir. Tip 1 ve 3 için, K bir tamsayıdır ve tam bu noktada dürtü cevabının bir örneği bulunmaktadır. Tip 2 ve 4 için, K tamsayı olmayıp ilgili dürtü cevabının iki örneği arasında konuşlanmaktadır. Ayrıca Tip 3 için, simetri özelliği $h(N / 2) = 0$ olmaya zorlar.

Önceleri, FIR süzgeç tasarımları Tip 1 üzerine yoğunlaşmıştı. Ancak [4]'de önerilen birleştirilmiş yaklaşımla, dört tipin tasarımı da mümkün hale getirilmiştir. Bu yaklaşımda, her süzgeç tipini ortak bir kosinüs taban fonksiyonuna indirgemek için, $H(\omega)$ sıfır-fazlı frekans cevabı aşağıdaki formda yazılır.

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega) \quad (2.21)$$

Burada $F(\omega)$, ω 'ya bağlı sabit bir fonksiyonken, $G(\omega)$, kosinüslerin toplamından oluşan terimdir. Böylece (2.16) – (2.19) denklemleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir [4, 6].

Tip 1:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^M a(n) \cos(\omega n) \\ &= F(\omega) \cdot G(\omega) = 1 \cdot \sum_{n=0}^M g(n) \cos(\omega n) \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$a(n) = g(n), \quad n = 0, 1, K, M \quad (2.22b)$$

Tip 2:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=1}^M b(n) \cos[\omega(n - 1/2)] \\ &= F(\omega) \cdot G(\omega) = \cos(\omega / 2) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} g(n) \cos(\omega n) \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$b(n) = \begin{cases} g(0) + \frac{1}{2}g(1), & n = 1 \\ \frac{1}{2}[g(n-1) + g(n)], & n = 2, 3, K, M-1 \\ \frac{1}{2}g(M-1), & n = M \end{cases} \quad (2.23b)$$

Tip 3:

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \\
&= F(\omega) \cdot G(\omega) = \sin(\omega) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} g(n) \cos(\omega n)
\end{aligned} \tag{2.24a}$$

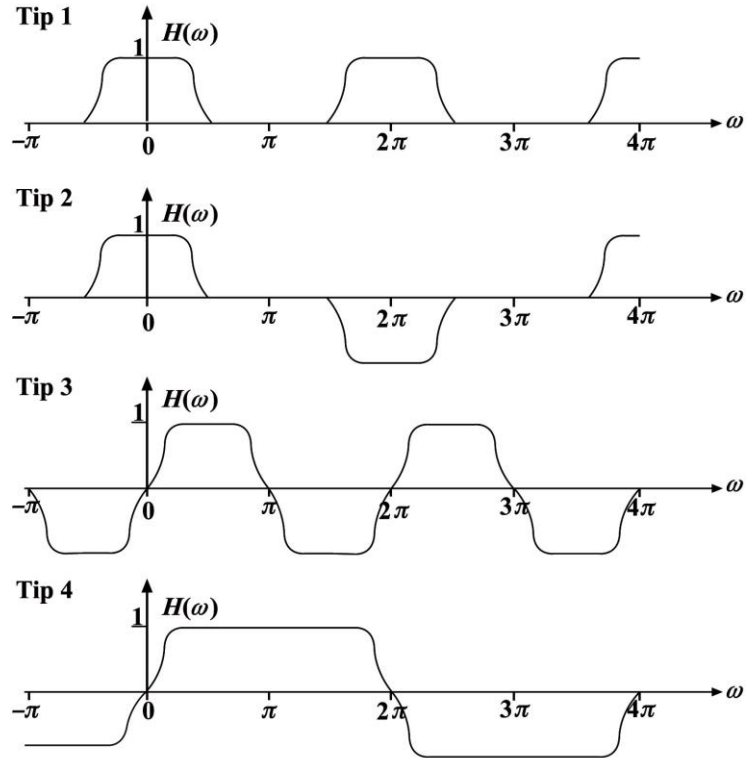
$$c(n) = \begin{cases} g(0) - \frac{1}{2}g(2), & n = 1 \\ \frac{1}{2}[g(n-1) - g(n+1)], & n = 2, 3, \dots, M-2 \\ \frac{1}{2}g(n-1), & n = M-1, M \end{cases} \tag{2.24b}$$

Tip 4:

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=1}^M d(n) \sin[\omega(n-1/2)] \\
&= F(\omega) \cdot G(\omega) = \sin(\omega/2) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} g(n) \cos(\omega n)
\end{aligned} \tag{2.25a}$$

$$d(n) = \begin{cases} g(0) - \frac{1}{2}g(1), & n = 1 \\ \frac{1}{2}[g(n-1) - g(n)], & n = 2, 3, \dots, M-1 \\ \frac{1}{2}g(M-1), & n = M \end{cases} \tag{2.25b}$$

Doğrusal-fazlı dört FIR süzgeç tipi için örnek sıfır-fazlı frekans cevapları Şekil 2.5’de gösterilir. **Tip 1** için, $H(\omega)$ fonksiyonu $\omega = 0$ ve $\omega = \pi$ civarında çifttir ve periyodu 2π ’dir. **Tip 2** için, $F(\omega) = \cos(\omega/2)$ sabit terimi $\omega = \pi$ için sıfır olduğundan, bu nokta civarında $H(\omega)$ fonksiyonu tektir ve periyodu 4π ’dir. **Tip 3** için, sabit terim $\omega = 0$ ve $\omega = \pi$ için sıfır olduğundan, $H(\omega)$ fonksiyonu bu noktalar civarında tektir ve periyodu 2π ’dir. **Tip 4** için, sabit terim $\omega = 0$ için sıfır olduğundan, $H(\omega)$ fonksiyonu bu nokta civarında tektir ve periyodu 4π ’dir.



Şekil 2.5 Dört FIR süzgeç tipi için örnek sıfır-fazlı frekans cevapları.

Tip 1 ve 2 süzgeçler, geleneksel frekans süzme uygulamalarında kullanılırlar. Çünkü bu tipler için sinüzoidal işaretlerden kaynaklanan gecikme, $-\phi(\omega) / \omega = N / 2$, ω açısal frekansından bağımsızdır. Tip 3 ve 4 süzgeçler, 90° 'lik ek bir faz kaymasına sahiptirler. Her iki tip için de sinüzoidal işaretlerden kaynaklanan gecikme frekansa bağlıdır. Bu süzgeç tipleri, Hilbert dönüştürücü ve sayısal türev alıcı yapıların gerçekleştirilmesi için en uygun tiplerdir [1]. Ayrıca, bütün süzgeç tiplerinin grup gecikmeleri, $-d\phi(\omega) / d\omega$, sabit olup $N / 2$ 'ye eşittir.

2.4.2 FIR Süzgeç Tasarım Yöntemleri

FIR süzgeç tasarımlarında sık kullanılan başlıca yöntemler, özet açıklamalarıyla birlikte, aşağıda sıralanır. Bunlardan minimaks yaklaşımı Alt bölüm 2.4.3'de ve frekans-cevabı maskeleye (FRM) tekniği Bölüm 3'de kapsamıyla incelenecektir.

1. **Pencereleme Yöntemi:** En basit tasarım yöntemidir. Amacı, ideal bir süzgecin frekans cevabını Fourier serilerine açarak sonsuz dürtü cevabını belirlemek ve sonrasında bir pencere fonksiyonu yardımıyla bu cevabı kırmak ve yumuşatmaktır. Dikdörtgen, Bartlett, Hanning, Hamming ve Blackman sık kullanılan pencerelerdir. Bu tekniğin asıl avantajı, dürtü cevabı katsayılarının kapalı formda elde edilebilmesi ve bu katsayıların hesap

makinesiyle bile çok çabuk bulunabilmesidir. Dezavantajı ise, sonuç süzgecinin geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmalarının yaklaşık eşit olması gerekliliğidir.

2. **En Küçük-Ortalama-Kare (LMS) Yaklaşımı:** İkinci basit yaklaşımdır. Amaç, aşağıda verilen hata ifadesini en küçük yapan süzgeç katsayılarını bulmaktır.

$$E_2 = \int_x \{W(\omega)[H(\omega) - D(\omega)]\}^2 d\omega \quad (2.26)$$

X , geçirme- ve durdurma-bandı bölgelerini içerir. $D(\omega)$ ve $W(\omega)$, sırasıyla, arzulanan sıfır-fazlı frekans cevabı ve pozitif değerli ağırlık fonksiyonudur.

3. **Minimaks Yaklaşımı:** Yaygın olarak kullanılmaktadır. Chebyshev yaklaşıklığı olarak da bilinir. Eşit dalgalanma esasına dayanan bu yöntemde amaç, maksimum hatayı kontrol etmektir, yani süzgeç katsayılarını maksimum hatayı minimum yapacak şekilde belirlemektir.

4. **Periyodik Alt-Süzgeçlerin Temel Yapı Blokları Olarak Kullanılması Yöntemi:** FIR süzgeç gerçekleştirme maliyetini azaltmak için düşünülmüştür. Sonuç süzgeci, transfer fonksiyonu $F(z^L)$ formunda olan alt-süzgeçler yardımıyla oluşturulur. Bu yaklaşımı esas alan çeşitli teknikler mevcuttur. Bölüm 3'ün konusu olan FRM tekniği en etkili olanlardan biridir.

2.4.3 Minimaks Yaklaşımıyla Optimum FIR Süzgeç Tasarımı

FIR süzgeçlerin IIR eşdeğerlerine olan temel üstünlüklerinden biri, keyfi genlikli FIR süzgeçlerin minimaks anlamda optimize edilmesi için etkin algoritmaların varlığıdır. Oluşan süzgeç, istenen keyfi özellikleri minimum derece ile sağlamak anlamında optimumdur. Keyfi genlikli IIR süzgeçlerin tasarımı ise genellikle zaman alıcıdır ve optimum çözüm her zaman garanti değildir.

Keyfi özelliklere sahip doğrusal-fazlı optimum FIR süzgeçlerin tasarımı için en etkili algoritma, Remez çoklu değişim algoritmasıdır. Bu algoritmanın işletilmesi için en eski yöntem, Parks ve McClellan tarafından sadece Tip 1 FIR süzgeçler için geliştiren yöntemdir [7]. Aynı ikili, [4] ile önerdikleri birleştirilmiş yaklaşım sayesinde, Remez çoklu değişim algoritmasını dört FIR süzgeç tipine de uygulanır hale getirmişlerdir. Nihayetinde McClellan, Parks ve Rabiner üçlüsü, FORTRAN ile

yazdıkları bilgisayar programını duyurmuşlardır [8]. Böylece, Remez algoritması sistematik gelişim sürecini neredeyse tamamlamış ve artık “MPR algoritması” diye de anılmaya başlanmıştır.

Minimaks anlamda optimum FIR süzgeçlerin tasarımı için diğer bir teknik lineer programlamadır [1, 9]. Bu teknik, özünde bir tekli değişim algoritması olup Remez çoklu değişim algoritmasına nazaran oldukça yavaştır. Ancak zaman-bölgesinde de birtakım kısıtların olduğu süzgeç tasarımları için, tartışmasız en etkili ve belki de bilinen tek basit yöntemdir. Oysaki Remez algoritması bu tasarımlar için uygun değildir. Lineer programlama tekniğinin avantajı, optimum çözüme yakınsamanın çoğu kez garanti edilmesidir; dezavantajı ise, özellikle yüksek-dereceli süzgeçleri tasarlarken, uzun hesaplama zamanının ve büyük bilgisayar belleğinin gerekmesidir. Dolayısıyla, lineer programlamanın sadece hızlı tekniklerle başarılabilen durumlarda kullanılması tavsiye edilir. Ayrıca [10]’da önerilen özel amaçlı bir lineer programlama sayesinde, genel amaçlı lineer programlama ile karşılaştırıldığında, işlemsel yük anlamında kazanç sağlanabilir. Özel amaçlı lineer programlama, FFT (Fast Fourier Transform, Hızlı Fourier Dönüşümü) ve sıfır-fazlı FIR süzgeç esasına dayanmaktadır. Bu çalışmada özel amaçlı tekniğin ayrıntılarına girilmeyecektir ve “lineer programlama” dendiğinde artık, “genel amaçlı lineer programlama” anlaşılabacaktır.

2.4.3.1 Remez Çoklu Değişim Algoritması

Remez algoritması, bir $E(\omega)$ ağırlıklı (weighted) hata fonksiyonun ε ile gösterilen tepe genlik değerini en küçük yapacak $h(n)$ süzgeç katsayılarını bulmak için en güçlü algoritmadır.

$$\varepsilon = \max_{\omega \in X \subset [0, \pi]} |E(\omega)| \quad (2.27a)$$

$$E(\omega) = W(\omega)[H(\omega) - D(\omega)] \quad (2.27b)$$

Burada $D(\omega)$, arzulanan sıfır-fazlı frekans cevabıyken, $W(\omega)$, pozitif bir ağırlık fonksiyonudur. Her iki fonksiyonun da kapalı bir $X \subset [0, \pi]$ altkümesinde sürekli olması istenir.

Gerçek sıfır-fazlı frekans cevabının $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$ şeklinde ifade edilebilmesinden dolayı (Bkz. (2.21) denklemi), Remez algoritması doğrusal-fazlı

dört FIR süzgeç tipi için de kullanılabilmektedir. Öncelikle, $E(\omega)$ ağırlıklı hata fonksiyonunu aşağıdaki formda yeniden düzenlemek elverişli olacaktır.

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H(\omega) - D(\omega)] = W(\omega)[F(\omega)G(\omega) - D(\omega)] \\ &= W(\omega)F(\omega)[G(\omega) - D(\omega)/F(\omega)] = \bar{W}(\omega)[G(\omega) - \bar{D}(\omega)] \end{aligned} \quad (2.28a)$$

burada

$$\bar{W}(\omega) = W(\omega)F(\omega), \quad \bar{D}(\omega) = D(\omega)/F(\omega). \quad (2.28b)$$

Yukarıdaki düzenleme sayesinde, dört tip FIR süzgeç ortak bir minimaks problemde birleştirilebilir. Bu problem,

$$\varepsilon = \max_{\omega \in X} |E(\omega) - \bar{W}(\omega)[G(\omega) - \bar{D}(\omega)]| \quad (2.29)$$

tepe genlik değerini en küçük yapan

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^M g(n) \cos(\omega n) \quad (2.30)$$

fonksiyonun $g(n)$ katsayılarını bulmaktır. En iyi yaklaşıklama için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki alternasyon teoremi ile verilir [1–8].

Alternasyon Teoremi: Eğer $G(\omega)$ (2.30)'daki gibi $M + 1$ adet kosinüs fonksiyonunun lineer birleşimi ise, (2.29) ile verilen ε değerini minimum yapan $G(\omega)$ 'nın eşsiz en iyi çözüm olabilmesi için gerek ve şart: $E(\omega)$ ağırlıklı hata fonksiyonu X üzerinde en az $M + 2$ alternasyon göstermelidir. Başka bir deyişle,

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{M+1} < \omega_{M+2} \quad (2.31a)$$

$$E(\omega_{i+1}) = -E(\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, M + 1 \quad (2.31b)$$

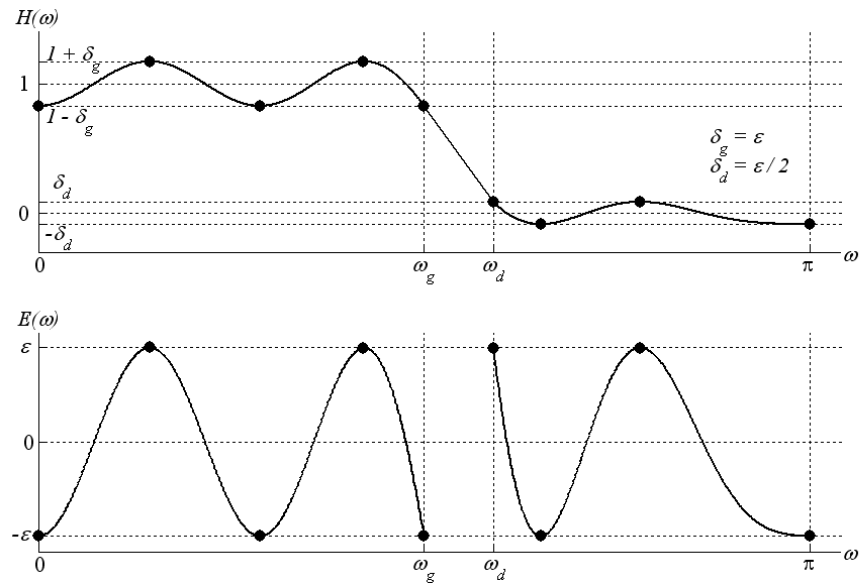
$$|E(\omega_i)| = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, M + 2 \quad (2.31c)$$

olacak şekilde, X kümesinde $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}$ gibi en az $M + 2$ tane frekans noktası bulunmalıdır.

Alternasyon teoremine göre, ulaşılan bir çözümün optimum olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. Bağıl dalgalanma oranı $k = \delta_g / \delta_d$ olmak üzere, eğer geçirme-bandında $1 \pm \varepsilon$ ve durdurma-bandında $\pm \varepsilon / k$ arasında değişen bir $H(\omega)$ çözümünü mevcutsa ve de $E(\omega)$ ağırlıklı hata fonksiyonuna ilişkin en uç (extremum) noktaların sayısı en az $M + 2$ 'ye eşitse, bu çözüm en iyi tek (unique) çözümdür. Alçak-geçiren durumda hem ω_g hem de ω_d en uç noktadır, $H(\omega_g) = 1 - \varepsilon$ ve $H(\omega_d) = \varepsilon / k$. Bu noktalarda ağırlıklı hata fonksiyonu $E(\omega_g) = -\varepsilon$ ve $E(\omega_d) = \varepsilon$ olur.

Örnek 2.1

Derecesi $N = 14$ olan optimum bir Tip 1 alçak-geçiren süzgecin sıfır-fazlı frekans cevabı ve ilgili hata fonksiyonu şekil 2.6'da gösterilir. δ_g dalgalanması, δ_d dalgalanmasının iki katı olarak boyutlandırılmıştır. $M = N / 2 = 7$ olduğundan, $G(\omega)$ fonksiyonun sekiz bilinmeyen $[g(0), g(1), \dots, g(7)]$ vardır. En uç noktaların sayısı şekilden de görüldüğü gibi $M + 2 = 9$ 'dur.



şekil 2.6 Optimum bir Tip 1 doğrusal-fazlı alçak-geçiren FIR süzgeç için sıfır-fazlı frekans cevabı ve hata fonksiyonu ($N = 14$, $\delta_g = 2\delta_d$).

Remez (MPR) Algoritması: $E(\omega)$ ağırlıklı hata fonksiyonunun $M + 2$ en uç noktası aşağıdaki adımlar yardımıyla yinelemeli olarak bulunabilir [1, 3, 6, 7].

Adım 1: Tasarlanmak istenen süzgece ait frekans bantları için, birörnek (uniform) aralıklı yoğun bir frekans ızgara noktaları kümesi (X)

belirle.¹ Bu kümeden $M + 2$ tane eşit uzaklıklı noktadan oluşan bir $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+2}\}$ başlangıç altkümesi seç.

Adım 2: Ω altkümesiyle $k = 1, 2, \dots, M + 2$ için aşağıdaki denklemi çöz ve $g(0), g(1), \dots, g(M)$ ile ε bilinmeyenlerini bul.

$$E(\omega_k) = \bar{W}(\omega_k)[G(\omega_k) - \bar{D}(\omega_k)] = (-1)^k \varepsilon \quad (2.32)$$

Bu eşitlik matris formunda da yazılabilir, fakat çözümü zor ve yavaştır. ε tepe genlik değerini aşağıda verilen analitik yolla hesaplamak daha etkili ve kolaydır.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^{M+2} a_k \bar{D}(\omega_k)}{\sum_{k=1}^{M+2} a_k (-1)^{k+1} / \bar{W}(\omega_k)} \quad (2.33a)$$

burada

$$a_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M+2} \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i}. \quad (2.33b)$$

Adım 3: $G(\omega)$ için, aşağıda verilen barisentrik (barycentric) formdaki Lagrange ara-değerleme formülünü kullan:

$$G(\omega) = \begin{cases} C_k, & \omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+1} \\ \frac{\sum_{k=1}^{M+1} \frac{\beta_k}{\cos \omega - \cos \omega_k} C_k}{\sum_{k=1}^{M+1} \frac{\beta_k}{\cos \omega - \cos \omega_k}}, & \omega \neq \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M+1} \end{cases} \quad (2.34a)$$

burada

$$C_k = \bar{D}(\omega_k) - (-1)^k \frac{\varepsilon}{\bar{W}(\omega_k)} \quad (2.34b)$$

¹ Pratikte, ızgara noktalarının sayısı için $16M$ ile $20M$ arası değerler yeterlidir [1, 7].

ve

$$\beta_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M+1} \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i} = a_k (\cos \omega_k - \cos \omega_{M+2}) \quad (2.34c)$$

$k = 1, 2, K, M + 2$ için.

Adım 4: X kümesiyle $E(\omega)$ ağırlıklı hata fonksiyonunu hesapla. Eğer bu kümedeki bütün frekans noktaları için $|E(\omega)| \leq \varepsilon$ ise, optimum çözüme ulaşılmıştır; bir sonraki adıma geç. Eğer bazı frekans noktaları için $|E(\omega)| > \varepsilon$ ise, $M + 2$ tane aday en uç noktadan oluşan yeni bir altküme seç. Bu altküme, hesaplanan $E(\omega)$ hata eğrisinin tepe ve çukurları ile örtüşen frekans ızgara noktaları altkümesidir. Böylece ε tepe genlik değeri, izin verilen üst sınırına doğru artma eğilimi gösterir. Eğer $E(\omega)$ eğrisi için $M + 2$ 'den fazla en uç nokta gözlemlenirse, $|E(\omega)|$ mutlak hata eğrisinin en büyük olduğu $M + 2$ frekans noktası² ile Ω altkümesini yenile ve Adım 2'ye geri dön.

Adım 5: $g(n)$ katsayılarını belirle: $G(\omega)$ fonksiyonunu $2M + 1$ tane eşit uzaklıklı frekans noktasında hesapla ve ters ayrık Fourier dönüşümü (inverse DFT) al. $g(n)$ katsayılarından (2.22) – (2.25) denklemleri yardımıyla $h(n)$ dürtü cevabını oluştur.

Alçak-geçiren durumda, tipik olarak dört ila sekiz döngüde optimum çözüme ulaşılır. Birden fazla geçirme- ve durdurma-bandına sahip süzgeçlerin tasarımında ise, bu sayı tipik olarak iki ya da üç katına çıkar [1].

Literatürde, yukarıdaki algoritmayı gerçekleyen FORTRAN ile yazılmış bir bilgisayar programı mevcuttur [8]. Bu program, alçak-geçiren, yüksek-geçiren, bant-geçiren ve bant-durduran FIR süzgeçler ile Hilbert dönüştürücü ve sayısal türev alıcı FIR süzgeçlere doğrudan uygulanabilmektedir. Ayrıca, birkaç geçirme- ve durdurma-bandına sahip süzgeç tasarımlarında da kullanılabilmektedir. Bu çalışmada, Remez algoritması için MATLAB'deki remez.m fonksiyonundan faydalanılmıştır.

² Bant sınırlarındaki frekans noktaları daima saklanmalıdır [6].

2.4.3.2 Minimaks Anlamda Optimum Süzgeçlerin Özellikleri

Pek çok kullanım alanına sahip alçak-geçiren bir süzgeç için tasarım parametreleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}\omega_g &: \text{Geçirme-bandı sınırı} \\ \omega_d &: \text{Durdurma-bandı sınırı} \\ \delta_g &: \text{Geçirme-bandı dalgalanması} \\ \delta_d &: \text{Durdurma-bandı dalgalanması}\end{aligned}\tag{2.35}$$

Yukarıdaki özellikleri sağlayan optimum alçak-geçiren süzgecin minimum derecesi N ile gösterilsin. Tasarım yapılırken δ_g ve δ_d yerine genellikle, $k = \delta_g / \delta_d$ şeklinde belirlenen bir bağıl dalgalanma oranı kullanılır. Optimum çözüm, aşağıdaki fonksiyonlar baz alınarak elde edilir.

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \omega_g] \\ 0, & \omega \in [\omega_d, \pi], \end{cases} \quad W(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \omega_g] \\ k, & \omega \in [\omega_d, \pi]. \end{cases}\tag{2.36}$$

Burada $D(\omega)$, arzulanan fonksiyon ve $W(\omega)$, ağırlık fonksiyonudur.

N ile ω_g , ω_d , δ_g ve δ_d parametreleri arasında ne yazık ki kesin bir analitik bağıntı yoktur. Ancak literatürde bazı kestirim formülleri bulunmaktadır [11, 12]. Kaiser, minimum süzgeç derecesinin tahmini için aşağıdaki formülü önermiştir [11]:³

$$N \approx \left\lceil \frac{-20 \log_{10} \left(\sqrt{\delta_g \delta_d} \right) - 13}{14.6(\omega_d - \omega_g)/(2\pi)} \right\rceil\tag{2.37}$$

Herrmann tarafından önerilen daha doğru bir kestirim formülü ise şöyledir [12]:

$$N \approx \left\lceil \frac{\Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{(\omega_d - \omega_g)/(2\pi)} - \Phi_2(\delta_g, \delta_d)[(\omega_d - \omega_g)/(2\pi)] \right\rceil\tag{2.38a}$$

burada

³ $\lceil x \rceil$, x 'den büyük veya eşit en küçük tamsayıdır. MATLAB karşılığı $\text{ceil}(x)$ 'dir.

$$\Phi_1(\delta_g, \delta_d) = \left[0.005309(\log_{10} \delta_g)^2 + 0.07114 \log_{10} \delta_g - 0.4761 \right] \log_{10} \delta_d - \left[0.00266(\log_{10} \delta_g)^2 + 0.5941 \log_{10} \delta_g + 0.4278 \right] \quad (2.38b)$$

ve

$$\Phi_2(\delta_g, \delta_d) = 11.01217 + 0.51244(\log_{10} \delta_g - \log_{10} \delta_d). \quad (2.38c)$$

(2.38) formülü $\delta_d < \delta_g$ için geliştirilmiştir. Eğer $\delta_d > \delta_g$ ise, formülde δ_g ile δ_d yer değiştirilmelidir [1]. Çalışma boyunca, tüm süzgeç dereceleri (2.38) formülüyle kestirilecektir.

2.4.3.3 Lineer Programlama Tekniği

Lineer programlama, pek çok kısıtlı minimaks yaklaşıklık problemini çözmek için çok esnek bir tekniktir. Lineer programlama problemi, matematiksel olarak aşağıdaki “birincil problem” formunda ifade edilebilir [1, 9]:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, K, N \quad (2.39a)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, K, M \quad (M < N) \quad (2.39b)$$

kısıtlarına bağlı olarak, $j = 1, 2, K, N$ için $\{x_j\}$ bilinmeyenlerini bul; öyle ki

$$\sum_{j=1}^N a_j x_j \quad (2.39c)$$

en küçük olsun. Bu problemde, a_j , b_i ve c_{ij} değişmezlerdir. İkilik (duality) ilkesine göre, yukarıdaki problem aşağıda verilen “ikili problem”e matematiksel olarak denktir:

$$\sum_{i=1}^M c_{ij} y_i \leq a_j, \quad j = 1, 2, K, N \quad (2.40a)$$

kısıtlarına bağlı olarak, $i = 1, 2, K, M$ için $\{y_i\}$ bilinmeyenlerini bul; öyle ki

$$\sum_{i=1}^M b_i y_i \quad (2.40b)$$

en büyük olsun.

Sayısal süzgeç tasarım problemleri için, ikili problem en doğal formdur. Literatürde, arzulanan çözüme $M + N$ adımda ulaşmak için iyi tanımlanmış birkaç yordam mevcuttur [13–15]. Ancak, kısıtsız veya az kısıtlı lineer problemlerin çözümünde daha sade teknikler kullanılabilir.

Lineer programlama tekniğini kullanarak optimum FIR süzgeç tasarımının nasıl kotarıldığını anlamak için, basitliği açısından alçak-geçiren bir doğrusal-fazlı FIR süzgeci ele alalım. Bu süzgecin özellikleri (2.35) ile verilsin. $H(\omega)$, yoğun bir ω frekans ızgarası üzerindeki gerçek sıfır-fazlı frekans cevabı olmak üzere, ikili problem için kısıtlar kümesi şöyle oluşturulur [9]:

$$\left. \begin{array}{l} H(\omega) \leq 1 + \delta_g \\ H(\omega) \geq 1 - \delta_g \end{array} \right\} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g, \quad (2.41a)$$

$$\left. \begin{array}{l} H(\omega) \leq \delta_d \\ H(\omega) \geq -\delta_d \end{array} \right\} \quad \omega_d \leq \omega \leq \pi. \quad (2.41b)$$

Yukarıdaki kısıtlara zaman-bölgesinde de kısıtlar eklenebilir. $D(\omega)$ ve $W(\omega)$ fonksiyonları (2.36) ile verilmek üzere, (2.41) kısıtları aşağıda olduğu gibi genelleştirilebilir [10]:

$$\begin{aligned} H(\omega) - \delta / W(\omega) &\leq D(\omega) \\ -H(\omega) - \delta / W(\omega) &\leq -D(\omega) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Burada δ , kırısklık (ripple) değişkenidir.

$H(\omega)$, süzgecin dürtü cevabı olan $h(n)$ ile ilintilidir ve ω 'ya bağlı birtakım trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmektedir (Bkz. Altbölüm 2.4.1). İlgili trigonometrik fonksiyonu, $h(n)$ 'nin simetrisi ile süzgeç derecesi N 'nin tek veya çift olması belirler. İncelemekte olduğumuz alçak-geçiren süzgeç için, $h(n)$ pozitif simetrik ve N çift olsun (Tip 1 FIR süzgeç). Bu durumda $H(\omega)$, (2.16) denkleminde şöyle ifade edilir:

$$H(\omega) = a(0) + \sum_{n=1}^{N/2} a(n) \cos(n\omega) \quad (2.43a)$$

$$a(n) = \begin{cases} h(N/2), & n = 0 \\ 2h(N/2 - n), & n = 1, 2, \dots, N/2 \end{cases} \quad (2.43b)$$

Yukarıdaki denklem vektör formunda da yazılabilir:

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{A}, \quad (2.44a)$$

$$\mathbf{C}(\omega) = [1, \cos(\omega), \cos(2\omega), \dots, \cos(N\omega/2)]^T, \quad (2.44b)$$

$$\mathbf{A} = [a(0), a(1), a(2), \dots, a(N/2)]^T. \quad (2.44c)$$

(2.42) ve (2.44)'den,

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^T(\omega), -1/W(\omega)] \mathbf{B} &\leq D(\omega) \\ [-\mathbf{C}^T(\omega), -1/W(\omega)] \mathbf{B} &\leq -D(\omega) \end{aligned} \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}^T, \delta]^T \quad (2.45b)$$

elde edilir. Nihayet ikili problemi şu şekilde ifade edebiliriz: (2.45a)'daki kısıtlara bağlı olarak, $\mathbf{B}$ bilinmeyenler vektörünü bul; öyle ki $-\delta$ en büyük olsun. Bu problem MATLAB'de linprog.m fonksiyonuyla çözülebilir. Fakat bu çalışmada, performans bakımından üstünlük kriteri gözetilerek, yukarıdaki ikili problemin çözümü için MOSEK isimli özel bir optimizasyon araç kutusundan faydalanılmıştır [16].

Örnek 2.2

Lineer programlama tekniğini kullanarak aşağıdaki özelliklere sahip alçak-geçiren doğrusal-fazlı bir FIR süzgeç tasarlayalım.

$$\begin{aligned} \omega_g &= 0.4\pi, & \delta_g &= \pm 0.1 \text{ dB } (= 0.0115) \\ \omega_d &= 0.5\pi, & \delta_d &= -40 \text{ dB } (= 0.01) \end{aligned}$$

Bu özellikleri sağlayan optimum süzgecin minimum derecesi (2.38) formülünden $N = 38$ olarak kestirilir. Tasarlanmak istenen süzgeç geleneksel bir frekans süzücü ve

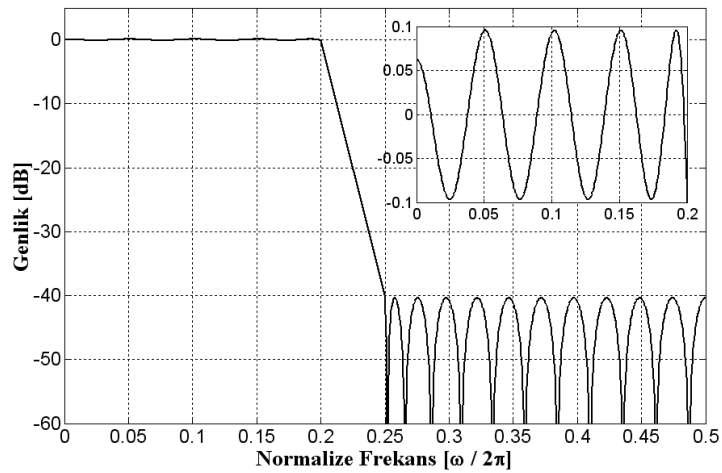
kestirilen derece çift olduğundan, bu süzgeci Tip 1 FIR süzgeç olarak tasarlamak uygun olacaktır. Bu süzgeç için, $M = N / 2 = 19$ ve $k = \delta_g / \delta_d = 1.1513$ olur.

Frekans ızgarası 1000 noktalı alınarak yapılan tasarıma ilişkin $a(n)$ katsayıları ve $h(n)$ pozitif simetrik dürtü cevabı katsayıları Tablo 2.1’de sıralanır. Ayrıca, kırıksıklık değişkeni $\delta = 0.0111$ olarak bulunmuştur.

Tablo 2.1 Örnek 2.2’ye ilişkin $a(n)$ ve $h(n)$ katsayıları.

n	$a(n)$	$h(n)$	n	$a(n)$	$h(n)$
0	0.4494	0.0079	10	0.0467	0.0038
1	0.6266	0.0016	11	0.0068	-0.0314
2	0.0981	-0.0065	12	-0.0322	-0.0175
3	-0.1838	-0.0049	13	-0.0139	0.0388
4	-0.0903	0.0073	14	0.0191	0.0413
5	0.0827	0.0095	15	0.0147	-0.0451
6	0.0775	-0.0069	16	-0.0098	-0.0919
7	-0.0350	-0.0161	17	-0.0130	0.0490
8	-0.0629	0.0034	18	0.0033	0.3133
9	0.0076	0.0233	19	0.0158	0.4494

Süzgecin genlik cevabı, geçirme-bandı ayrıntılarıyla birlikte, Şekil 2.7’de gösterilir. Şekilden görüldüğü gibi, genlik cevabı izin verilen dalgalanma sınırları içerisindedir. Buradan, tahmin edilen süzgeç derecesinin yeterli olduğu ve bizi optimum çözüme götürdüğü sonucuna varılır. Aksi durumda, kestirilen süzgeç derecesinin bir miktar artırılması gerekebilirdi.



Şekil 2.7 Lineer programlama tekniği yardımıyla tasarlanan alçak-geçiren süzgecin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları.

3. FRM TEKNİĞİYLE DOĞRUSAL-FAZLI KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

Doğrusal-fazlı FIR sayısal süzgeçler, tam kararlılık, faz bozulmasının olmaması ve düşük katsayı duyarlılığı başta olmak üzere birçok önemli özelliğe sahiptirler [5]. Bu, onları pek çok sayısal işaret işleme uygulamasında eşdeğer IIR süzgeçlere tercih edilir hale getirmiştir. Ancak, FIR sayısal süzgeçler gerçekleştirirken karşılaşılan işlemsel karmaşıklık ve donanım bileşenlerindeki (çarpıcılar, toplayıcılar ve gecikme elemanları) artış, bu tip süzgeçlerin en önemli dezavantajıdır. İşlemsel karmaşıklık ve dolayısıyla donanım bileşenleri, artan süzgeç boyuyla artmaktadır. Aşağıdaki alçak-geçiren süzgeç özelliklerini sağlayan doğrusal-fazlı optimum bir FIR süzgecin minimum uzunluğu,

$$1 - \delta_g \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_g, \quad \omega \in [0, \omega_g] \quad (3.1a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_d, \quad \omega \in [\omega_d, \pi] \quad (3.1b)$$

yaklaşık olarak

$$N = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_g \delta_d}) - 13}{14.6(\omega_d - \omega_g)/(2\pi)} + 1 \quad (3.1c)$$

formülüyle elde edilebilir (Bkz. Bölüm 2.4.3.2). Yukarıdaki formülden görüleceği gibi, gerekli süzgeç boyu geçirme-bandı genişliğiyle $(\omega_d - \omega_g)$ ters orantılıdır. Bu olgulardan hareketle, özellikle keskin süzgeç tasarımlarında, yukarıda bahsedilen dezavantaj ciddi bir sorun haline gelmektedir.

Keskin FIR süzgeçlerin işlemsel karmaşıklığını azaltmak için, literatürde bazı yöntemler önerilmiştir. Alçak-geçiren bir süzgece ait dürtü cevabının ara-değerlenmesi ilkesine dayanan IFIR (Interpolated Finite Impulse Response, Ara-Değerlenmiş Sonlu Dürtü Cevabı) yaklaşımı [17], bu yöntemlerden bir tanesidir. Bu yöntem özellikle dar-bantlı süzgeçler için çok uygundur. Giriş işaretinin gecikmiş

halinden dar-bantlı işaret çıkarılarak geniş-bantlı süzgeçler de üretilebilir. Elde edilen geniş-bantlı süzgece tekrar IFIR tekniğinin uygulanması [18], önerilen başka bir yöntemdir. Literatürdeki diğer bir yöntem ise, 1986 yılında Lim tarafından önerilen FRM (Frequency-Response Masking, Frekans-Cevabı Maskeleye) tekniğidir [19].

FRM tekniğiyle çok seyrek katsayılı süzgeç tasarımları yapılabilmiş ve dolayısıyla bu teknik zaman içerisinde çok sayıda akademik yayına öncülük etmiştir. FRM tekniği, işlemsel karmaşıklığı, donanım gereksinimlerini, yuvarlama hatalarını ve katsayı duyarlılığını ciddi oranlarda azaltmasıyla, düşük güç tüketimi ve dar silikon alanı gerektiren ASIC ve VLSI gibi gerçeklemelere dayalı modern süzgeç tasarımlarında kullanılabilmektedir. Ayrıca FRM tekniğinin, grafik denkleştirici (graphic equalizer) ve ses kontrolü gibi işitsel sistemlerde kullanılan doğrusal-fazlı süzgeç ailesi için, uygun bir teknik olduğu öne sürülmüştür [20]. FRM tekniği, yazılıma dayalı radyo (software radio) [21] ve müzik notası ayırma [22] gibi uygulamalarda da kullanılmaktadır.

FRM tekniğiyle elde edilen süzgeç katsayılarının çok azı sıfır-dışı değerler olduğu için, işlemsel karmaşıklık, eşdeğer bir sonsuz kelime-uzunluklu optimum minimaks süzgeçle karşılaştırıldığında büyük ölçüde azalmaktadır. Ancak, karşılaştırma etkin süzgeç uzunluğu (hem sıfır hem de sıfır-dışı katsayılar) için yapıldığında, FRM tekniğiyle elde edilen süzgecin etkin uzunluğunda bir miktar artış olur. Ayrıca [23]'de yapılan çalışmayla, FRM tekniğinin en küçük grup-gecikmeli tasarımı sağladığı gösterilmiştir.

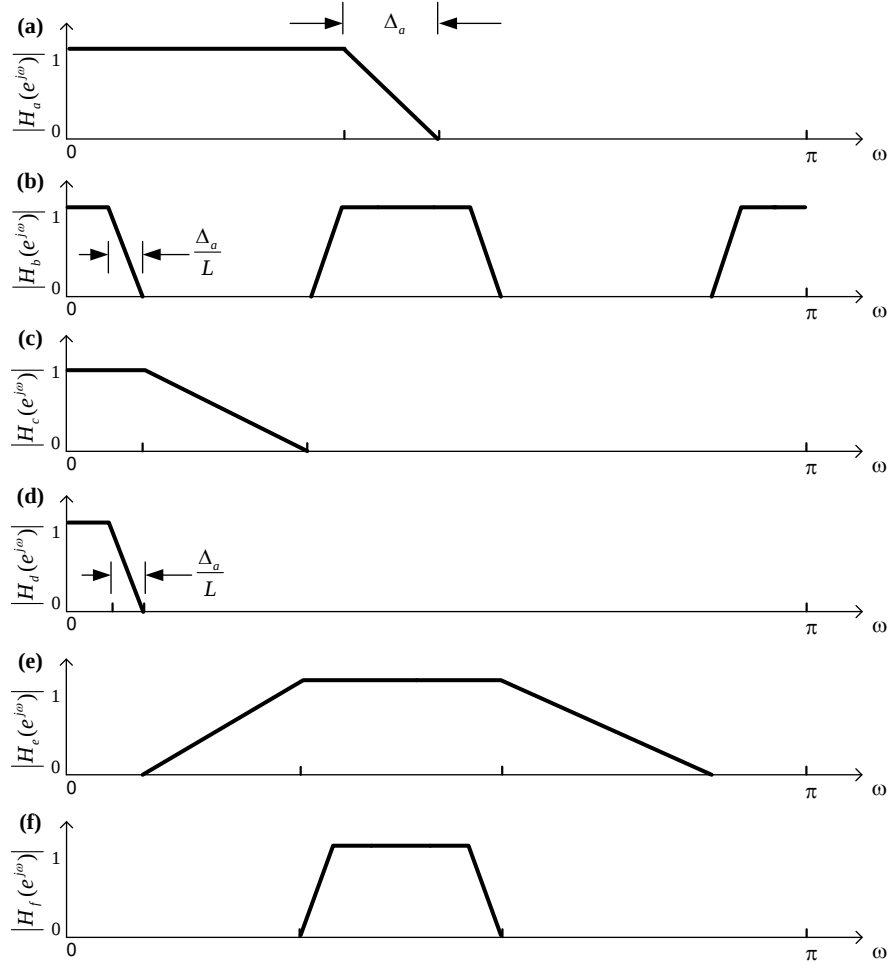
3.1 Orijinal FRM Yaklaşımı

FRM tekniği alçak-geçiren, yüksek-geçiren, bant-geçiren ve bant-durduran doğrusal-fazlı FIR sayısal süzgeçleri tasarlamak için kullanılabilir. Ayrıca bu teknik, hem dar-bantlı hem de keyfi bant-genişlikli sayısal süzgeç tasarımlarında çok etkilidir.

3.1.1 Orijinal FRM Tekniğiyle Dar-Bantlı Süzgeç Tasarımı

Transfer fonksiyonu $H_a(z)$, geçiş-bandı genişliği Δ_a ve frekans cevabı $H_a(e^{j\omega})$ olan alçak-geçiren bir süzgeç Şekil 3.1(a) ile verilmiştir. Bu süzgecin her gecikme elemanı L tane gecikme elemanı ile yer değiştirilerek, transfer fonksiyonu $H_b(z) = H_a(z^L)$ ve frekans cevabı $H_b(e^{j\omega}) = H_a(e^{jL\omega})$ olan periyodik bir süzgeç elde edilir, Şekil 3.1(b). Eğer $H_b(e^{j\omega})$ Şekil 3.1(c) ile verilen $H_c(e^{j\omega})$ frekans cevabı ile maskelenirse,

Şekil 3.1(d)'de gösterilen $H_d(e^{j\omega}) = H_b(e^{j\omega})H_c(e^{j\omega})$ frekans cevabı elde edilir. $H_d(e^{j\omega})$ 'nın geçiş-bandı genişliği Δ_a / L olur. Eğer $H_b(e^{j\omega})$ Şekil 3.1(e) ile verilen $H_e(e^{j\omega})$ ile maskelenirse, Şekil 3.1(f)'de gösterilen $H_f(e^{j\omega}) = H_b(e^{j\omega})H_e(e^{j\omega})$ frekans cevabı elde edilir. Aynı şekilde, $H_f(e^{j\omega})$ 'nın geçiş-bandı genişliği de Δ_a / L olur. Buraya kadar anlatılanlar, geniş geçiş-bandına sahip süzgeçlerden keskin süzgeçlerin türetilmesi yöntemi şeklinde özetlenebilir.



Şekil 3.1 Frekans-cevabı maskeleye yaklaşımı ile dar-bantlı süzgeç tasarımının basit gösterilimi.

Bu basit yöntem ciddi bir soruna sahiptir. $H_a(z)$ 'nin her gecikme elemanı L tane gecikme elemanı ile yer değiştirildiğinde, elde edilen $H_b(z)$ 'nin geçiş-bandı genişliği L oranında azalırken, geçirme-bandı genişliği de aynı oranda azalmaktadır. Bu nedenle, bu yöntem sadece dar-bantlı süzgeç tasarımları için uygundur [19]. Ayrıca IFIR yaklaşımı [17], FRM tekniğinin Şekil 3.1(c) maskesi ile elde edilen özel bir halidir.

3.1.2 Orijinal FRM Tekniğıyle Keyfi Bant-Genişlikli Süzgeç Tasarımı

$H_a(e^{j\omega})$ ve $H_c(e^{j\omega})$, sırasıyla, H_a ve H_c süzgeçlerinin frekans cevapları olmak üzere,

$$\left| H_a(e^{j\omega}) + H_c(e^{j\omega}) \right| = 1 \quad (3.2)$$

ise, bu iki süzgeç tümleyen bir çift oluşturur. H_a model süzgeci, derecesi N_a (çift bir tamsayı) olan doğrusal-fazlı bir FIR süzgeç olsun. Bu süzgecin frekans cevabı şöyle ifade edilebilir:

$$H_a(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N_a}{2}\omega} H_a(\omega) \quad (3.3a)$$

Burada $H_a(\omega)$, *sıfır-fazlı frekans cevabı* olup ω açısal frekansına bağlı trigonometrik bir fonksiyondur (Bkz. Bölüm 2.4.1) ve şu şekilde ifade edilir:

$$H_a(\omega) = h_a(N_a/2) + 2 \sum_{n=1}^{N_a/2} h_a(N_a/2 - n) \cos(n\omega) \quad (3.3b)$$

h_a , H_a süzgecinin pozitif simetrik dürtü cevabıdır. (3.2) denklemini kullanarak H_c tümleyen süzgecinin frekans cevabı,

$$H_c(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N_a}{2}\omega} H_c(\omega) \quad (3.4a)$$

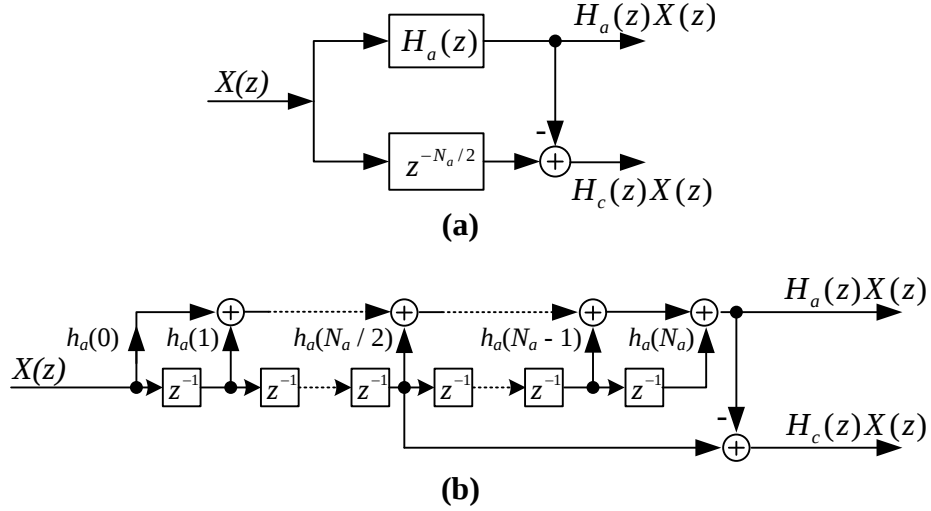
$$H_c(\omega) = 1 - H_a(\omega) \quad (3.4b)$$

olarak elde edilir.

H_a süzgecinin transfer fonksiyonu $H_a(z)$ olsun. H_c süzgecinin transfer fonksiyonu, Şekil 3.2(a)'da gösterildiği gibi, giriş işaretinin $N_a/2$ kadar gecikmiş halinden H_a 'nın çıkış işaretinin çıkarılmasıyla kolayca elde edilebilir:

$$H_c(z) = z^{-N_a/2} - H_a(z) \quad (3.5)$$

$z^{-N_a/2}$ ile ifade edilen gecikme elemanlarının yerine, H_a süzgecinin kendi gecikme elemanları kullanılabilir, Şekil 3.2(b).



Şekil 3.2 H_c süzgecinin gerçekleştirilmesi.

FRM tekniğinde ana tema, önce geniş-bantlı alçak-geçiren bir süzgeç tasarlamak ve sonra ara-değerleme yaparak bu süzgecin geçiş-bandını daraltmaktır. H_a süzgecinin sıfır-fazlı frekans cevabı, $H_a(\omega)$, Şekil 3.3(a) ile verilmiş olsun. Bu alçak-geçiren süzgecin kesim frekansları θ ve ϕ olsun. Şekil 3.3(b)'de H_c tümleyen süzgecinin sıfır-fazlı frekans cevabı, $H_c(\omega)$, gösterilir. H_a ve H_c süzgeçlerinin her gecikme elamanı L tane gecikme elamanıyla yer değiştirilir, diğer bir ifadeyle, L faktörü ile ara-değerleme yapılır. Böylece Şekil 3.3(c)'de gösterilen periyodik sıfır-fazlı frekans cevapları, $H_a(L\omega)$ ve $H_c(L\omega)$, elde edilir. (3.3) ve (3.4) denklemlerinden,

$$H_a(e^{jL\omega}) = e^{-j\frac{N_a}{2}L\omega} H_a(L\omega) \quad (3.6a)$$

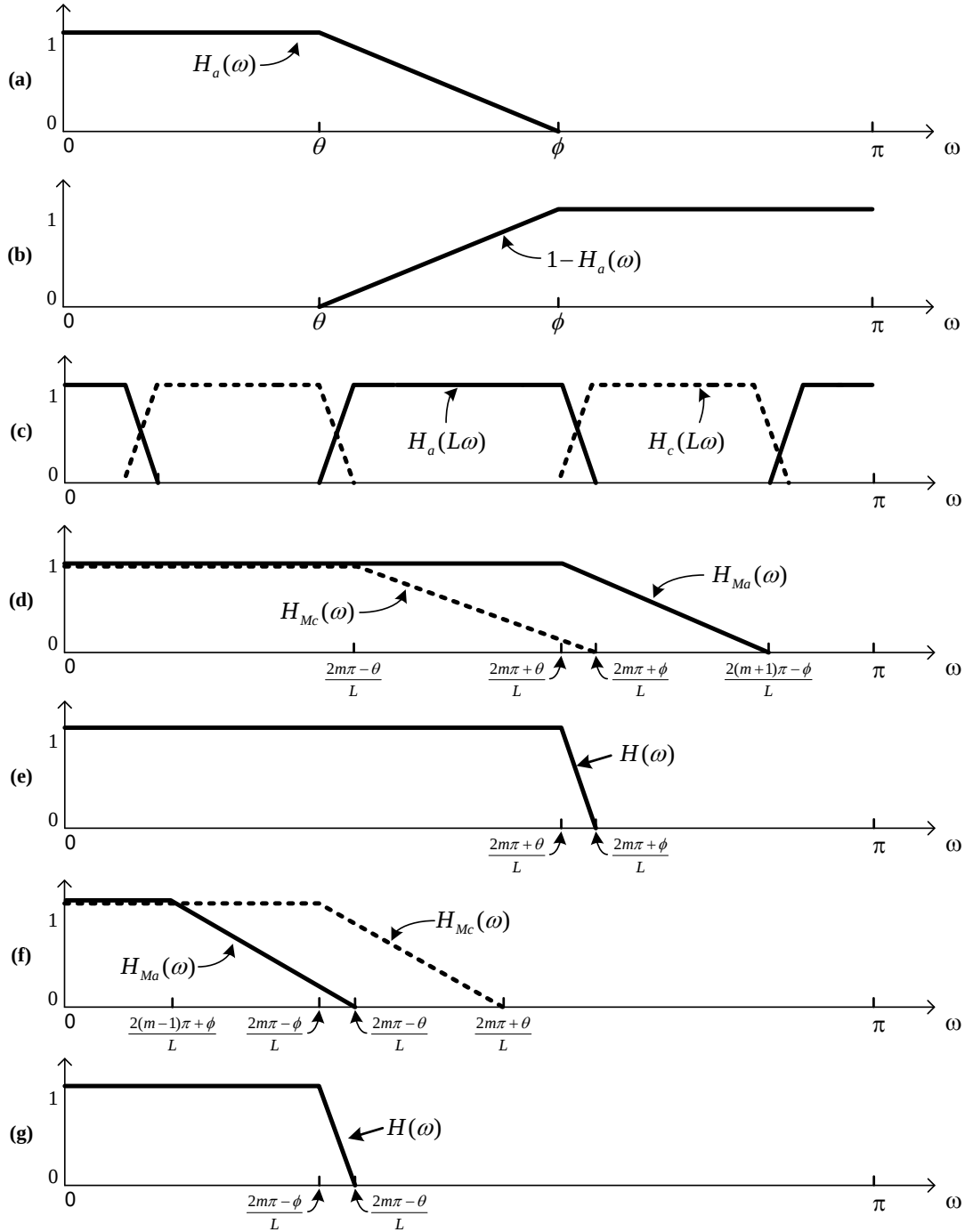
$$H_a(L\omega) = h_a(N_a/2) + 2 \sum_{n=1}^{N_a/2} h_a(N_a/2 - n) \cos(nL\omega) \quad (3.6b)$$

ve

$$H_c(e^{jL\omega}) = e^{-j\frac{N_a}{2}L\omega} H_c(L\omega) \quad (3.7a)$$

$$H_c(L\omega) = 1 - H_a(L\omega) \quad (3.7b)$$

yazılabilir.



Şekil 3.3 Frekans-cevabı maskeleyme yaklaşımı ile keyfi bant-genişlikli süzgeç tasarımının basit gösterilimi.

Açıklama 3.1

Yarı-gecikmeleri önlemek için $N_a L$ ifadesi çift olmak zorundadır. N_a çift seçildiğinde bu şart sağlanır. Böylece L ara-değerleme faktörü üzerinde herhangi bir kısıtlama kalmaz. Eğer N_a tek sayı olursa, $H_a(L\omega)$ $\omega = \pi/L, 3\pi/L, 5\pi/L, \dots$ frekanslarında işaret değiştirir ve ardışık geçirme-bandı bölgelerinde +1 veya -1 değerine yakınsar [1]. $H_c(L\omega)$ tümleyeni ise aynı frekans bölgelerinde 1 veya 2 değerini alır. Bu istenmeyen bir durumdur. Bu yüzden, bu çalışmada N_a daima çift olacak şekilde seçilmiştir. Literatürde N_a tek, yani model süzgeç boyu çift, seçilerek yapılan

çalışmalar da vardır [24]. Ancak tasarımın daha zor olduğu ve avantaj sağlamadığı önerilmiştir.

H_{Ma} ve H_{Mc} doğrusal-fazlı iki maskeleme süzgeci olsun. Bu süzgeçlerin frekans cevapları, sırasıyla, $H_{Ma}(e^{j\omega})$ ve $H_{Mc}(e^{j\omega})$ olup şu şekilde ifade edilebilir:

$K = Ma, Mc$ için,

$$H_K(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N_K}{2}\omega} H_K(\omega) \quad (3.8a)$$

$$H_K(\omega) = \begin{cases} h_K(N_K/2) + 2 \sum_{n=1}^{N_K/2} h_K(N_K/2 - n) \cos(n\omega), & N_K \text{ çift ise} \\ 2 \sum_{n=0}^{(N_K-1)/2} h_K[(N_K-1)/2 - n] \cos[(n+0.5)\omega], & N_K \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.8b)$$

Burada N_K süzgeç derecesini, $H_K(\omega)$ sıfır-fazlı frekans cevabını ve h_K simetrik dürtü cevabını belirtmektedir.

Açıklama 3.2

Arzulanan $H(z)$ FRM süzgecini oluşturabilmek için, H_{Ma} ve H_{Mc} maskeleme süzgeçlerinin grup-gecikmeleri eşit olmalıdır. Bunu sağlamak için aşağıdaki adımlar izlenebilir.

1. Adım: N_{Ma} ve N_{Mc} , her ikisi de tek ya da çift olacak şekilde seçilir.

2. Adım: $N_{Ma} \geq N_{Mc}$ ise,

$$M_{Ma} = 0, \quad (3.9a)$$

$$M_{Mc} = \frac{N_{Ma} - N_{Mc}}{2}. \quad (3.9b)$$

$N_{Ma} < N_{Mc}$ ise,

$$M_{Ma} = \frac{N_{Mc} - N_{Ma}}{2}, \quad (3.10a)$$

$$M_{Mc} = 0. \quad (3.10b)$$

H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerine, sırasıyla, M_{Ma} ve M_{Mc} kadar gecikme elemanı (z^{-1}) eklenir. Yani dürtü cevaplarının başına ve sonuna M_{Ma} veya M_{Mc} kadar sıfır eklenir.

$$H_a(z^L) = \sum_{n=0}^{N_a} h_a(n) z^{-nL}, \quad h_a(N_a - n) = h_a(n) \quad (3.12b)$$

$$H_{Ma}(z) = z^{-M_{Ma}} \sum_{n=0}^{N_{Ma}} h_{Ma}(n) z^{-n}, \quad h_{Ma}(N_{Ma} - n) = h_{Ma}(n) \quad (3.12c)$$

$$H_{Mc}(z) = z^{-M_{Mc}} \sum_{n=0}^{N_{Mc}} h_{Mc}(n) z^{-n}, \quad h_{Mc}(N_{Mc} - n) = h_{Mc}(n) \quad (3.12d)$$

yazılabilir. M_{Ma} ve M_{Mc} , (3.9) ve (3.10) denklemlerinden elde edilebilir.

FRM süzgecinin frekans cevabı, $H(e^{j\omega})$, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN_{etkin}\omega/2} H(\omega) \quad (3.13a)$$

$$H(\omega) = H_a(L\omega).H_{Ma}(\omega) + [1 - H_a(L\omega)].H_{Mc}(\omega) \quad (3.13b)$$

$$N_{etkin} = N_a L + \max\{N_{Ma}, N_{Mc}\} \quad (3.13c)$$

Burada N_{etkin} , etkin süzgeç derecesidir.

3.1.2.1 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi

FRM tekniğinde, maskeleme süzgeçlerinin seçimine bağlı olarak iki durum söz konusudur. Maskeleme süzgeçlerinin Şekil 3.3(d)'deki gibi seçilmesini A-durumu, Şekil 3.3(f)'deki gibi seçilmesini de B-durumu olarak adlandıralım.

A-durumunda, baskın maskeleme süzgeci H_{Ma} olup FRM süzgecinin geçiş-bandı sınırları (kesim frekansları) $H_a(L\omega)$ ile belirlenir, Şekil 3.3(e). FRM süzgeci $H(z)$ 'nin kesim frekansları ω_g ve ω_d olmak üzere, bu frekanslar

$$\omega_g = \frac{2m\pi + \theta}{L} \quad (3.14a)$$

$$\omega_d = \frac{2m\pi + \phi}{L} \quad (3.14b)$$

şeklinde ifade edilir. Burada m , L 'den küçük pozitif bir tamsayıdır.

B-durumunda, baskın maskeleye süzgeci H_{Mc} 'dir ve $H(z)$ süzgecinin kesim frekansları Şekil 3.3(g)'de görüldüğü gibi $H_c(L\omega)$ ile belirlenir. Bu frekanslar B-durumu için şöyle ifade edilir:

$$\omega_g = \frac{2m\pi - \phi}{L} \quad (3.15a)$$

$$\omega_d = \frac{2m\pi - \theta}{L} \quad (3.15b)$$

Alçak-geçiren süzgeç tasarımlarında ω_g ve ω_d verilirken, diğer süzgeç parametreleri (m , L , θ , ϕ) tasarımcı tarafından belirlenmelidir. Tasarım L ara-değerleme faktörünün seçimiyle başlar. Ne yazık ki, L faktörü için kapalı formda kesin bir analitik ifade yoktur. Bu parametre tüm süzgeç karmaşıklığını en aza indirecek şekilde seçilmelidir. Öncelikle θ , ϕ ve m parametreleri, ω_g , ω_d ve L cinsinden ifade edilir.

$$\left. \begin{aligned} m &= \lfloor \omega_g L / (2\pi) \rfloor \\ \theta &= \omega_g L - 2m\pi \\ \phi &= \omega_d L - 2m\pi \end{aligned} \right\} \quad \text{A-durumu için} \quad (3.16a)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \lceil \omega_d L / (2\pi) \rceil \\ \theta &= 2m\pi - \omega_d L \\ \phi &= 2m\pi - \omega_g L \end{aligned} \right\} \quad \text{B-durumu için} \quad (3.16b)$$

Burada $\lfloor x \rfloor$, x 'den küçük veya eşit en büyük tamsayı ve $\lceil x \rceil$, x 'den büyük veya eşit en küçük tamsayıdır.¹

Herhangi bir ω_g , ω_d ve L değerleri kümesi için, yalnızca A-durumu ya da yalnızca B-durumu aşağıdaki koşulları sağlayarak çözüme gider.

$$0 < \theta < \phi < \pi, \quad (3.17a)$$

$$0 < m < L. \quad (3.17b)$$

¹ $\lfloor x \rfloor$ 'in MATLAB karşılığı floor(x), $\lceil x \rceil$ 'in MATLAB karşılığı ceil(x)'dir.

H_{Ma} maskeleme süzgecinin bant sınırları $\omega_g^{(Ma)}$ ve $\omega_d^{(Ma)}$, H_{Mc} maskeleme süzgecinin bant sınırları ise $\omega_g^{(Mc)}$ ve $\omega_d^{(Mc)}$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \omega_g^{(Ma)} &= \omega_g = (2m\pi + \theta) / L \\ \omega_d^{(Ma)} &= [2(m+1)\pi - \phi] / L \\ \omega_g^{(Mc)} &= (2m\pi - \theta) / L \\ \omega_d^{(Mc)} &= \omega_d = (2m\pi + \phi) / L \end{aligned} \right\} \text{A-durumu için} \quad (3.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_g^{(Ma)} &= [2(m-1)\pi + \phi] / L \\ \omega_d^{(Ma)} &= \omega_d = (2m\pi - \theta) / L \\ \omega_g^{(Mc)} &= \omega_g = (2m\pi - \phi) / L \\ \omega_d^{(Mc)} &= (2m\pi + \theta) / L \end{aligned} \right\} \text{B-durumu için} \quad (3.18b)$$

yazılabilir.

H_a model süzgecinin geçiş-bandı genişliği,

$$\Delta_a = \phi - \theta = L(\omega_d - \omega_g) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir. Δ_a artan L değeriyle artacağı için, H_a süzgecinin karmaşıklığı L ara-değerleme faktörü ile doğru orantılıdır. H_{Ma} ve H_{Mc} maskeleme süzgeçlerinin geçiş-bandı genişlikleri toplamı şu şekildedir:

$$\Delta_{Ma} + \Delta_{Mc} = 2\pi / L \quad (3.20)$$

Bu toplam artan L değeriyle azalacağı için, maskeleme süzgeçlerinin karmaşıklıkları L ile ters orantılıdır. Buradan, L ara-değerleme faktörünün optimum bir değerinin olması gerektiği sonucuna varılır.

3.1.2.2 Optimum L Faktörünün Seçimi

Daha önce de vurgulandığı gibi, L ara-değerleme faktörü tüm süzgeç karmaşıklığını en aza indirecek şekilde seçilmelidir. Burada “*tüm süzgeç karmaşıklığı*” ile toplam çarpıcı sayısı, toplam süzgeç derecesi ve toplam toplayıcı sayısı kastedilmektedir. L faktörünü seçerken ölçüt olarak genellikle toplam çarpıcı sayısı alınır. Π , FRM tekniğinde kullanılan alt-süzgeçlerin (H_a , H_{Ma} , H_{Mc}) çarpıcı sayılarının toplamını göstermek üzere,

$$\Pi = f(N_a) + f(N_{Ma}) + f(N_{Mc}) \quad (3.21a)$$

$$f(N) = \begin{cases} \frac{N+1}{2}, & N \text{ tek ise} \\ \frac{N}{2} + 1, & N \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.21b)$$

yazılabilir [6]. Görüldüğü gibi Π , alt-süzgeç derecelerinin fonksiyonu şeklindedir. Alt-süzgeçlerin toplam derecesi (N_{toplam}) ve toplayıcı sayılarının toplamı (Σ) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$N_{toplam} = \Sigma = N_a + N_{Ma} + N_{Mc} \quad (3.22)$$

Alt-süzgeç dereceleri (2.38) formülünü kullanarak iyi bir yaklaşıklıkla kestirilebilir. Fakat geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmalarına uygun değerler verilmesine özen gösterilmelidir. Alt-süzgeç dalgalanmalarının arzulanan süzgeç dalgalanmasından %10–15 oranında küçük olması yeterlidir [19]. δ_g ve δ_d arzulanan süzgecin, sırasıyla, geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmaları olmak üzere, alt-süzgeçler için şöyle bir tolerans belirlenebilir:

$$\lambda = [0.85K \ 0.90] \quad (3.23a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{g,a} &= \delta_{g,Ma} = \delta_{g,Mc} = \delta_g \cdot \lambda \\ \delta_{d,a} &= \delta_{d,Ma} = \delta_{d,Mc} = \delta_d \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.23b)$$

Optimum L seçimi aşağıdaki adımlarla yapılabilir.

- 1. Adım:** Arzulanan alçak-geçiren süzgecin ω_g , ω_d , δ_g ve δ_d parametreleri alınır.
- 2. Adım:** L faktörü için uygun bir aralık belirlenir.
- 3. Adım:** Her L değeri için, (3.16) – (3.18) denklemleri yardımıyla alt-süzgeçlerin frekans parametreleri hesaplanır.
- 4. Adım:** Alt-süzgeç dalgalanmaları için uygun bir tolerans sabiti (λ) belirlenir.
- 5. Adım:** Her L değeri için, 3. ve 4. adımda elde edilen alt-süzgeç parametreleri (2.38) formülüne sokularak alt-süzgeç dereceleri kestirilir.

- 6. Adım:** Her L değeri için, (3.21) denklemini kullanarak toplam çarpıcı sayıları hesaplanır.
- 7. Adım:** Toplam çarpıcı sayısının (Π) en az olduğu L faktörü seçilir. Eğer birden fazla L değeri gözlemlenirse, bu değerlerden (3.13c) ile verilen etkin süzgeç derecesini (N_{etkin}) en küçük yapan L optimumdur [25].

Açıklama 3.3

Her ne kadar L için kesin bir analitik ifade olmasa da, literatürde bazı yakınsama formülleri mevcuttur [26]. Bu formüller,

$$L_{opt} = 1 / \sqrt{2(\omega_d - \omega_g) / \pi} \quad (3.24a)$$

$$L_{opt} = 1 / \sqrt{1.6(\omega_d - \omega_g) / \pi} \quad (3.24b)$$

şeklinde verilmiştir. Ayrıca en iyi sonuçların genellikle, N_{Ma} ve N_{Mc} derecelerinin yaklaşık eşit olması durumundaki L değerleri için elde edildiği önerilmiştir.

Şüphesiz, optimum L faktörünün seçilmesiyle diğer tasarım parametreleri de belirlenmiş olur. Parametreleri belirlenen alt-süzgeçleri oluşturmadan önce, kapsamlı bir dalgalanma incelemesi uygun olacaktır.

3.1.2.3 $H(\omega)$ Üzerindeki Dalgalanmaların İncelenmesi

$H(z)$ doğrusal-fazlı alçak-geçiren bir FRM süzgeci olsun. $D(\omega)$ ve $\delta(\omega)$, $H(\omega)$ sıfır-fazlı frekans cevabının, sırasıyla, arzulanan değeri ve sapması olmak üzere, (3.13b) denklemi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$D(\omega) + \delta(\omega) = [D_a(L\omega) + \delta_a(L\omega)][D_{Ma}(\omega) + \delta_{Ma}(\omega)] \\ + [1 - D_a(L\omega) - \delta_a(L\omega)][D_{Mc}(\omega) + \delta_{Mc}(\omega)] = H(\omega). \quad (3.25)$$

Burada $D_a(L\omega)$ ve $\delta_a(L\omega)$, $H_a(L\omega)$ süzgecinin; $D_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Ma}(\omega)$, $H_{Ma}(\omega)$ süzgecinin; $D_{Mc}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$, $H_{Mc}(\omega)$ süzgecinin, sırasıyla, arzulanan değeri ve sapmasıdır.

$H_a(L\omega)$ süzgecinin geçirme-bandında $D_a(L\omega) = 1$ ve durdurma-bandında $D_a(L\omega) = 0$ olması istenir. Geçiş-bandında ise, doğrusal-faz terimindeki hata ile $D_a(L\omega) = H_a(L\omega)$, yani $\delta_a(L\omega) = 0$ olur. Şimdi $H_a(L\omega)$, $H_{Ma}(\omega)$ ve $H_{Mc}(\omega)$ süzgeçlerinin $H(\omega)$ üzerindeki etkilerini üç ayrı frekans bölgesinde inceleyelim.

Frekans Bölgesi 1: $D_{Ma}(\omega) = D_{Mc}(\omega) = 1$. Bu bölgede $D(\omega) = 1$ olduğundan (3.25) denklemi,

$$\begin{aligned}\delta(\omega) &= D_a(L\omega)[\delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega)] + \delta_{Mc}(\omega) \\ &+ \delta_a(L\omega)[\delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega)]\end{aligned}\quad (3.26)$$

şeklinde basitleştirilebilir. İkinci dereceden terimi ihmal ederek, (3.26) denklemi şu şekilde yazılır:

$$\delta(\omega) \approx D_a(L\omega)[\delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega)] + \delta_{Mc}(\omega). \quad (3.27)$$

Burada üç durum söz konusudur.

1. $D_a(L\omega) = 1$ olduğunda,

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega). \quad (3.28a)$$

2. $D_a(L\omega) = 0$ olduğunda,

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Mc}(\omega). \quad (3.28b)$$

3. $0 < D_a(L\omega) < 1$ olduğunda,

$$|\delta(\omega)| \leq \max\{|\delta_{Ma}(\omega)|, |\delta_{Mc}(\omega)|\}. \quad (3.28c)$$

Frekans Bölgesi 2: $D_{Ma}(\omega) = D_{Mc}(\omega) = 0$. Bu bölgede $D(\omega) = 0$ 'dır. (3.25) denklemi ikinci dereceden terim ihmal edilerek,

$$\delta(\omega) \approx D_a(L\omega)[\delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega)] + \delta_{Mc}(\omega) \quad (3.29)$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Bu bölge için de yine üç durum söz konusudur.

1. $D_a(L\omega) = 1$ olduğunda,

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega). \quad (3.30a)$$

2. $D_a(L\omega) = 0$ olduğunda,

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Mc}(\omega). \quad (3.30b)$$

3. $0 < D_a(L\omega) < 1$ olduğunda,

$$|\delta(\omega)| \leq \max\{|\delta_{Ma}(\omega)|, |\delta_{Mc}(\omega)|\}. \quad (3.30c)$$

Frekans Bölgesi 1 ile *Frekans Bölgesi 2*'nin benzerliğine dikkat ediniz.

Frekans Bölgesi 3: *Frekans Bölgesi 1* ve *2*'nin dışında kalan bölge. Bu frekans bölgesi Şekil 3.3(d)'de (A-durumu),

$$\frac{2m\pi - \theta}{L} < \omega < \frac{2(m+1)\pi - \phi}{L} \quad (3.31a)$$

ile, Şekil 3.3(f)'de ise (B-durumu),

$$\frac{2(m-1)\pi + \phi}{L} < \omega < \frac{2m\pi + \theta}{L} \quad (3.31b)$$

ile gösterilir. (3.31a)'da verilen bölgeyi ele alalım. $(2m\pi - \theta) / L < \omega < \omega_g$ için, $D(\omega) = D_a(L\omega) = D_{Ma}(\omega) = 1$ olur. İkinci dereceden terim, $\delta_a(L\omega)\delta_{Ma}(\omega)$, ihmal edilerek

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega) + \delta_a(L\omega)[1 - D_{Mc}(\omega)] \quad (3.32a)$$

elde edilir. $(2m\pi - \theta) / L < \omega < \omega_g$ bölgesinde $D_{Mc}(\omega)$ 1'den 0'a doğru azalır. Böylece bu bölge için,

$$|\delta(\omega)| \leq |\delta_{Ma}(\omega)| + |\delta_a(L\omega)| \quad (3.32b)$$

yazılabilir. $\omega_d < \omega < [2(m+1)\pi - \phi] / L$ için, $D(\omega) = D_a(L\omega) = D_{Mc}(\omega) = 0$ olur. İkinci dereceden terim, $\delta_a(L\omega)\delta_{Mc}(\omega)$, ihmal edilerek

$$\delta(\omega) \approx D_{Ma}(\omega)\delta_a(L\omega) + \delta_{Mc}(\omega) \quad (3.33a)$$

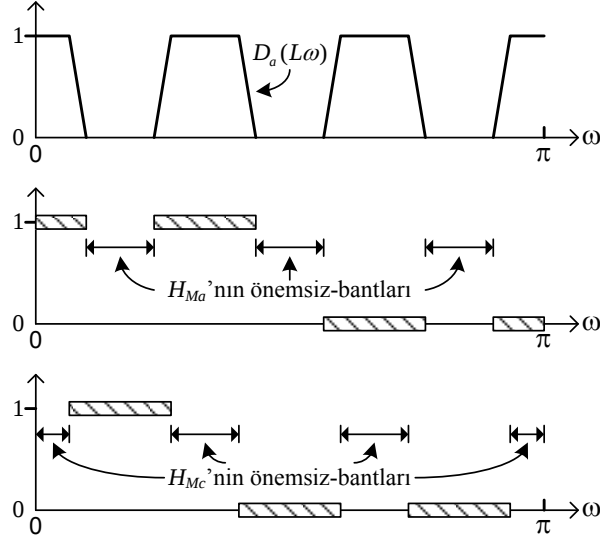
elde edilir. $\omega_d < \omega < [2(m+1)\pi - \phi] / L$ bölgesinde $D_{Ma}(\omega)$ 1'den 0'a doğru azalır. Böylece bu bölge için,

$$|\delta(\omega)| \leq |\delta_a(L\omega)| + |\delta_{Mc}(\omega)| \quad (3.33b)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, (3.32b) ve (3.33b) denklemleri, (3.31b) ile verilen frekans bandı için de türetilir.

Açıklama 3.4

Üç ayrı frekans bölgesinde yapılan incelemeden görüldüğü gibi, $D_{Ma}(\omega)$ ve $D_{Mc}(\omega)$ aynı anda 0'a veya 1'e eşit olduğunda, $\delta(\omega)$ sapması, $D_a(L\omega)$ 'nın 0 veya 1 olmasına bağlı olarak, temelde $\delta_{Ma}(\omega)$ veya $\delta_{Mc}(\omega)$ ile belirlenir. $\delta_a(L\omega)$ 'nın etkisi ikincil önem taşır. Bu yüzden, H_{Ma} ve H_{Mc} maskeleme süzgeçleri, geçirme- ve durdurma-bantları içerisinde önemsiz-bantlara (don't care bands) sahiplermiş gibi düşünülebilirler, Şekil 3.5. Bu önemsiz-bantlar, H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerinin karmaşıklığının azaltılmasında etkili olmaktadır. Pratikte, önemsiz-bantlardaki dalgalanmalar on kat daha büyük seçilebilir [27].



Şekil 3.5 Maskeleme süzgeçlerinin önemsiz-bantları.

$H(z)$ süzgecinin geçiş-bandı civarında, yani (3.31) ile verilen $D_{Ma}(\omega)$ 'nın $D_{Mc}(\omega)$ 'ya eşit olmadığı bölgede, $\delta(\omega)$ sapması, $\delta_a(L\omega)$, $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ 'ya bağlı bir fonksiyondur. Bu bölgede H_a model süzgecini, $\delta_a(L\omega)$ sapması $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ sapmalarını kısmi dengeleyecek şekilde tasarlamak mümkündür.

FRM tekniğinde önce maskeleme süzgeçleri tasarlanmalı, sonra da H_a model süzgeci $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ sapmalarını dengeleyecek şekilde tasarlanmalıdır [19]. Ters durum doğru değildir. Yani önce H_a model süzgeci üretilirse, $\delta_a(L\omega)$ sapmasını dengeleyecek H_{Ma} ve H_{Mc} maskeleme süzgeçlerini üretmek mümkün değildir. Çünkü, $H_a(L\omega)$ süzgecinin etkin uzunluğu $N_aL + 1$ olup maskeleme süzgeçlerinin uzunluğundan çok büyüktür. Ayrıca $\delta_a(L\omega)$ sapmasından kaynaklanan ikinci dereceden terimin ihmal edilebilmesi için, $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ sapmalarının genlikleri, $\delta(\omega)$ sapmasının genliğinden %10–15 oranında küçük olmalıdır.

Şimdi bu bilgiler ışığında FRM süzgecinin nasıl üretildiğini görelim.

3.1.2.4 FRM Süzgecinin Üretilmesi

Geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmaları, sırasıyla, δ_g ve δ_d olan FRM süzgeci, $H(e^{j\omega})$, aşağıdaki dört adımla tasarlanabilir.

Adım 1: $K = Ma, Mc$ için, $H_K(\omega)$ maskesi $[0, \omega_g^{(K)}]$ frekans bandında $0.85\delta_g \dots 0.90\delta_g$ toleransı ile 1'e ve $[\omega_d^{(K)}, \pi]$ frekans bandında $0.85\delta_d \dots 0.90\delta_d$ toleransı ile 0'a yakınsayacak şekilde, h_K maskeleme süzgeç katsayıları bulunur.

Adım 2: (3.9) – (3.11) denklemleri yardımıyla maskeleme süzgeçlerinin grup-gecikmeleri eşitlenir.

Adım 3: $H(\omega)$ aşağıdaki iki koşulu sağlamak üzere, h_a model süzgeç katsayıları bulunur.

Koşul 1: $H(\omega)$, Ω_g ile verilen frekans bandında δ_g toleransı ile 1'e yakınsasın.

$$\Omega_g = \begin{cases} \left[\frac{2m\pi - \theta}{L}, \frac{2m\pi + \theta}{L} \right], & \text{A-durumu için} \\ \left[\frac{2(m-1)\pi + \phi}{L}, \frac{2m\pi - \phi}{L} \right], & \text{B-durumu için} \end{cases} \quad (3.34a)$$

Koşul 2: $H(\omega)$, Ω_d ile verilen frekans bandında δ_d toleransı ile 0'a yakınsasın.

$$\Omega_d = \begin{cases} \left[\frac{2m\pi + \phi}{L}, \frac{2(m+1)\pi - \phi}{L} \right], & \text{A-durumu için} \\ \left[\frac{2m\pi - \theta}{L}, \frac{2m\pi + \theta}{L} \right], & \text{B-durumu için} \end{cases} \quad (3.34b)$$

Adım 4: (3.13) denklemiyle $H(e^{j\omega})$ elde edilir.

Adım 1, Remez çoklu değişim algoritması kullanılarak çok hızlı bir şekilde yapılabilir (Bkz. Bölüm 2.4.3.1). Bu adımda lineer programlama tekniğinden de faydalanılabilir (Bkz. Bölüm 2.4.3.3). Ayrıca, önemsiz-bantlarda daha büyük dalgalanma ağırlıklandırması yapılarak maskeleme süzgeç karmaşıklığı azaltılabilir

(Bkz. Açıklama 3.4). Bu çalışmada, Adım 1 için önemsiz-bantlar dikkate alınmış ve lineer programlama tekniği kullanılmıştır.

Adım 3'deki koşullar, Tablo 3.1 ile verilen hata fonksiyonunun maksimum mutlak değeri, $\max\{|E(\omega)|\}$, $[0, \theta] \cup [\phi, \pi]$ frekans bandında 1'den küçük veya 1'e eşit olduğunda sağlanır [1, 27]. Bu hata fonksiyonu çok karmaşık görünse de, H_a model süzgeci, [8] ile verilen bilgisayar programının EFF ve WATE isimli fonksiyonları yardımıyla kolayca tasarlanabilir. Fakat bu çalışmada, Adım 3 için de yine lineer programlama tekniği tercih edilmiştir.

Tablo 3.1 $E(\omega)$ hata fonksiyonuna ilişkin denklemler tablosu.

$E(\omega) = W_a(\omega)[H_a(\omega) - D_a(\omega)]$	
$D_a(\omega) = [u(\omega) + l(\omega)] / 2, \quad W_a(\omega) = 2 / [u(\omega) - l(\omega)]$	
$u(\omega) = \min \left(\frac{D(\omega) - H_{Mc}[h_1(\omega)]}{H_{Ma}[h_1(\omega)] - H_{Mc}[h_1(\omega)]} + e_1(\omega), \frac{D(\omega) - H_{Mc}[h_2(\omega)]}{H_{Ma}[h_2(\omega)] - H_{Mc}[h_2(\omega)]} + e_2(\omega) \right)$ $l(\omega) = \max \left(\frac{D(\omega) - H_{Mc}[h_1(\omega)]}{H_{Ma}[h_1(\omega)] - H_{Mc}[h_1(\omega)]} - e_1(\omega), \frac{D(\omega) - H_{Mc}[h_2(\omega)]}{H_{Ma}[h_2(\omega)] - H_{Mc}[h_2(\omega)]} - e_2(\omega) \right)$ $e_1(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{ H_{Ma}[h_1(\omega)] - H_{Mc}[h_1(\omega)] }, \quad e_2(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{ H_{Ma}[h_2(\omega)] - H_{Mc}[h_2(\omega)] }$	
A-durumu için,	
$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \theta] \\ 0, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}, \quad \delta(\omega) = \begin{cases} \delta_g, & \omega \in [0, \theta] \\ \delta_d, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}$ $h_1(\omega) = (2m\pi + \omega) / L, \quad h_2(\omega) = \begin{cases} (2m\pi - \omega) / L, & \omega \in [0, \theta] \\ [2(m+1)\pi - \omega] / L, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}$	
B-durumu için,	
$D(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, \theta] \\ 1, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}, \quad \delta(\omega) = \begin{cases} \delta_d, & \omega \in [0, \theta] \\ \delta_g, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}$ $h_1(\omega) = (2m\pi - \omega) / L, \quad h_2(\omega) = \begin{cases} (2m\pi + \omega) / L, & \omega \in [0, \theta] \\ [2(m-1)\pi + \omega] / L, & \omega \in [\phi, \pi] \end{cases}$	

Örnek 3.1

Aşağıdaki özelliklere sahip doğrusal-fazlı alçak-geçiren bir FIR süzgeç tasarlayalım.

Geçirme-bandı sınırı	:	$\omega_g = 0.6\pi$
Durdurma-bandı sınırı	:	$\omega_d = 0.61\pi$
Geçirme-bandı dalgalanması	:	$\pm 0.1 \text{ dB} \quad (\delta_g = 0.0115)$
Durdurma-bandı zayıflaması	:	$-40 \text{ dB} \quad (\delta_d = 0.01)$

(2.38) formülüyle yukarıdaki özellikleri sağlayan optimum minimaks süzgecin derecesi 382 olarak kestirilir. Çarpıcı sayısı ise (3.21b)'den 192 olarak bulunur.

FRM tekniği ile yapılacak tasarımda, ilk olarak L ara-değerleme faktörü belirlenmelidir. L faktörünün $3 \leq L \leq 30$ aralığındaki değerleriyle oluşturulan değer tablosu Tablo 3.2 ile verilir. Tabloda Π ve Σ , gerçeğe yakınlık, sırasıyla, toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısını temsil eder. N_{etkin} ise etkin süzgeç derecesidir. Ayrıca tabloda sıfır olan satırlar, L 'nin o değerleri için FRM çözümünün olmadığı anlamına gelmektedir.

Tablo 3.2 Örnek 3.1 için oluşturulan değer tablosu.

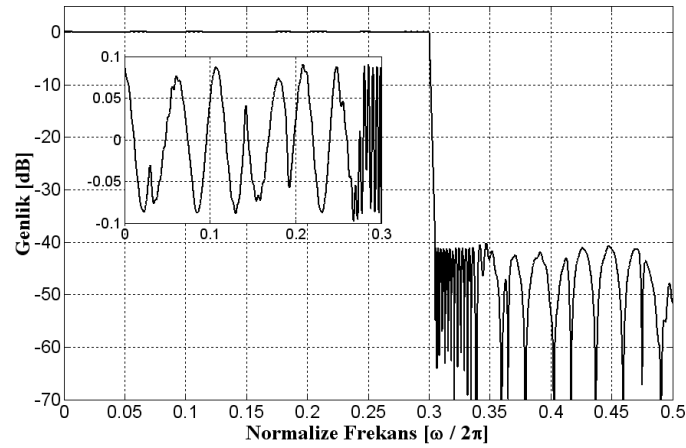
L	Durum	m	θ	ϕ	$\omega_g^{(Ma)}$	$\omega_d^{(Ma)}$	$\omega_g^{(Mc)}$	$\omega_d^{(Mc)}$	N_a	N_{Ma}	N_{Mc}	Π	Σ	N_{etkin}
3	B	1	0.17π	0.2π	0.067π	0.61π	0.6π	0.723π	134	6	32	89	172	434
4	A	1	0.4π	0.44π	0.6π	0.89π	0.4π	0.61π	100	14	18	69	132	418
5	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	B	2	0.34π	0.4π	0.4π	0.61π	0.6π	0.723π	68	18	32	62	118	440
7	A	2	0.2π	0.27π	0.6π	0.819π	0.543π	0.61π	58	19	59	70	136	465
8	A	2	0.8π	0.88π	0.6π	0.64π	0.4π	0.61π	50	100	18	87	168	500
9	B	3	0.51π	0.6π	0.511π	0.61π	0.6π	0.723π	44	40	32	61	116	436
10	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	A	3	0.6π	0.71π	0.6π	0.663π	0.491π	0.61π	36	64	34	70	134	460
12	B	4	0.68π	0.8π	0.567π	0.61π	0.6π	0.723π	34	92	32	82	158	500
13	B	4	0.07π	0.2π	0.477π	0.61π	0.6π	0.621π	30	30	192	129	252	582
14	A	4	0.4π	0.54π	0.6π	0.676π	0.543π	0.61π	28	53	59	72	140	451
15	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	B	5	0.24π	0.4π	0.525π	0.61π	0.6π	0.64π	26	48	100	90	174	516
17	A	5	0.2π	0.37π	0.6π	0.684π	0.577π	0.61π	24	47	119	97	190	527
18	A	5	0.8π	0.98π	0.6π	0.612π	0.511π	0.61π	22	327	41	197	390	723
19	B	6	0.41π	0.6π	0.558π	0.61π	0.6π	0.653π	20	77	75	88	172	457
20	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	A	6	0.6π	0.81π	0.6π	0.628π	0.543π	0.61π	18	142	60	113	220	520
22	B	7	0.58π	0.8π	0.582π	0.61π	0.6π	0.663π	18	142	64	115	224	538
23	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	A	7	0.4π	0.64π	0.6π	0.64π	0.567π	0.61π	16	100	92	107	208	484
25	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	B	8	0.14π	0.4π	0.554π	0.61π	0.6π	0.621π	14	72	192	142	278	556
27	A	8	0.2π	0.47π	0.6π	0.649π	0.585π	0.61π	14	81	161	130	256	539
28	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	B	9	0.31π	0.6π	0.572π	0.61π	0.6π	0.631π	14	107	127	126	248	533
30	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Örneğimizde, alt-süzgeç dereceleri (3.23a)'da gösterilen $\lambda = 0.85$ alınarak kestirilmiştir. Tablo 3.2'de N_a sütununun sadece çift sayılardan oluştuğuna dikkat

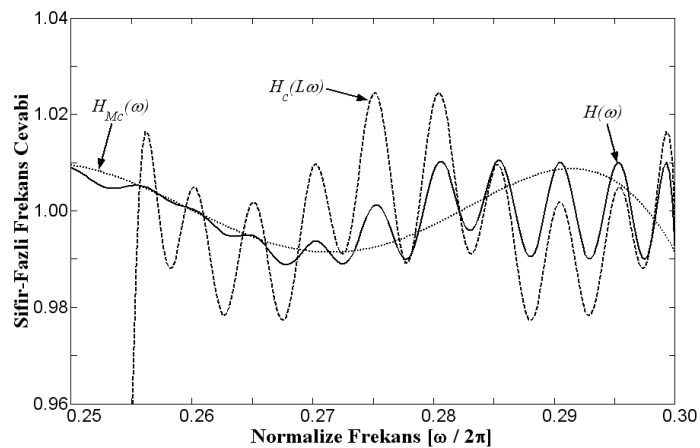
ediniz. Ayrıca, her satırda N_{Ma} ve N_{Mc} değerlerinin her ikisinin de tek ya da çift olduğuna dikkat ediniz. Tabloda Π sütununa bakıldığında, bu değerin $L = 9$ için en küçük (61) olduğu görülür. Böylece optimum L faktörü 9 olarak seçilir. Tasarım parametreleri $L = 9$ satırındaki değerlere eşittir. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayıları, sırasıyla, 61 ve 116 olup eşdeğer bir geleneksel doğru-form tasarım için gerekli olanların (192 ve 382) yaklaşık %32'si kadardır. Etkin süzgeç derecesi ise 436'dır ve doğru-form tasarımdan (382) sadece %14 fazladır.

Tasarım yapılırken maskeleme süzgeçlerinin grup-gecikmelerinin eşitlenmesi unutulmamalıdır. $N_{Ma} = 40$ ve $N_{Mc} = 32$ olduğuna göre, (3.9) denkleminde $M_{Ma} = 0$ ve $M_{Mc} = 4$ olarak bulunur. h_{Mc} dürtü cevabının başına ve sonuna 4 tane sıfır eklenerek grup-gecikmeleri eşitlenir.

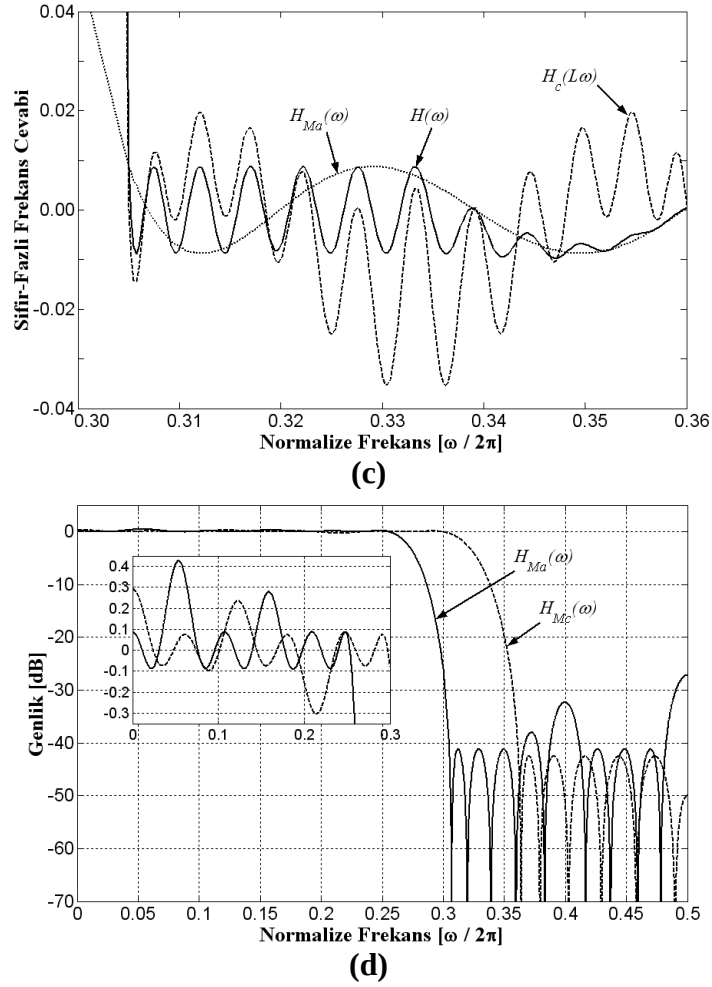
Tasarıma ilişkin frekans cevapları Şekil 3.6'da gösterilir. $H_c(L\omega)$ süzgecinin, maskeleme süzgeçleri, $H_{Ma}(\omega)$ ve $H_{Mc}(\omega)$, üzerindeki dengeleme etkisine dikkat ediniz, Şekil 3.6(b) ve 3.6(c). Ayrıca $H_{Ma}(\omega)$ ve $H_{Mc}(\omega)$ 'nin önemsiz-bantlarındaki büyük dalgalanmalara dikkat ediniz, Şekil 3.6(d).



(a)



(b)



Şekil 3.6 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_c(z^L)$ süzgecinin $H_{Mc}(z)$ maskesi üzerindeki dengeleme etkisi. (c) $H_c(z^L)$ süzgecinin $H_{Ma}(z)$ maskesi üzerindeki dengeleme etkisi. (d) Maskeleme süzgeçlerinin genlik cevapları.

3.2 Eşzamanlı Optimizasyon Tekniği

Orijinal FRM yaklaşımında, gerçekleştirilmede kullanılan bütün alt-süzgeçler ayrı ayrı üretilmektedir. Bu durum, tasarımcı açısından işlemsel yük anlamında bir dezavantaj teşkil etmektedir. Orijinal tek-katlı FRM yöntemiyle tasarlanan FIR süzgeçlere ilişkin aritmetik karmaşıklık, alt-süzgeçlerin eşzamanlı üretilmesi için önerilen iki-adımlı bir optimizasyon tekniği [25] yardımıyla kayda değer oranda azaltılmıştır. Birinci adımda, basit bir algoritma ile alt-optimum bir çözüm bulunur. İkinci adımda, bu çözüm başlangıç çözümü olarak kullanılır ve Dutta-Vidyasagar algoritması [28] veya SQP (Sequential Quadratic Programming, Ardışık Karesel Programlama) gibi doğrusal-olmayan bir optimizasyon algoritması yardımıyla iyileştirilir. Benzer bir teknik, çok-katlı FRM yaklaşımı (Bkz. Altbölüm 3.5) için de önerilmiştir [29]. Bu

çalışmada eşzamanlı optimizasyon tekniği için, değişik FRM yapılarına uyarlanabilirliği bakımından [29]'da önerilen algoritma tercih edilmiştir.

Bu altbölümde, orijinal tek-katlı FRM süzgecinin eşzamanlı optimizasyon tekniğiyle nasıl üretileceği anlatılır. Bu teknik, iki-adımlı bir algoritmadan ibarettir. Birinci adımda, alt-süzgeç dereceleri ve diğer tasarım parametreleri belirlenip başlangıç çözümü elde edilir. İkinci adımda bu çözüm, uygun seçilmiş ve düzensiz dağılmış frekans ızgara noktalarında, yinelemeli etkin bir serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon algoritması ile iyileştirilir.

3.2.1 Başlangıç Çözümünün Bulunması

Arzulanan alçak-geçiren süzgeç özellikleri $(\omega_g, \omega_d, \delta_g, \delta_d)$ verilsin. $H_a(z)$, $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ alt-süzgeçleri için başlangıç katsayıları aşağıdaki adımlarla bulunabilir.

Adım 1: Alt-süzgeç dalgalanmalarını δ_g ve δ_d olarak al ($\lambda = 1$). Altbölüm 3.1.2.2'ye göre optimum L ara-değerleme faktörünü ve ilgili alt-süzgeç parametrelerini belirle.

Adım 2: Parametreleri belirlenmiş alt-süzgeçleri Remez algoritması yardımıyla tasarla. Bu işlem için MATLAB'de `remez.m` fonksiyonu kullanılabilir. Geçirme- ve durdurma-bandındaki ağırlıkları, sırasıyla, $1 / \delta_g$ ve $1 / \delta_d$ olarak al.

3.2.2 Başlangıç Çözümünün İyileştirilmesi

Yukarıdaki basit algoritmayla elde edilen başlangıç çözümü, etkin bir serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon algoritması yardımıyla geliştirilebilir. (3.35a) ile verilen optimizasyon problemi, $|E(\Phi, \omega)|$ mutlak hata fonksiyonun en büyük değerini en küçük yapan ayarlanırlar parametre vektörünü (Φ) bulmaktır.

$$\min_{\Phi} \left\{ \max_{\omega \in [0, \omega_g] \cup [\omega_d, \pi]} |E(\Phi, \omega)| \right\} \quad (3.35a)$$

burada

$$\begin{aligned} \Phi = [& h_a(0), \dots, h_a(N_a/2), \\ & h_{Ma}(0), \dots, h_{Ma} \lfloor N_{Ma}/2 \rfloor, \\ & h_{Mc}(0), \dots, h_{Mc} \lfloor N_{Mc}/2 \rfloor] \end{aligned} \quad (3.35b)$$

$$E(\Phi, \omega) = W(\omega)[H(\Phi, \omega) - D(\omega)], \quad (3.35c)$$

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \omega_g] \\ 0, & \omega \in [\omega_d, \pi] \end{cases}, \quad W(\omega) = \begin{cases} 1/\delta_g, & \omega \in [0, \omega_g] \\ 1/\delta_d, & \omega \in [\omega_d, \pi] \end{cases}. \quad (3.35d)$$

Burada $D(\omega)$, $W(\omega)$ ve $H(\Phi, \omega)$, sırasıyla, arzulanan fonksiyon, ağırlık fonksiyonu ve FRM süzgecinin sıfır-fazlı frekans cevabıdır.

Bu problemi çözmek için geçirme- ve durdurma-bandı bölgeleri, $j = 1, 2, \dots, J_g$ için $\omega_j \in [0, \omega_g]$ ve $j = J_g + 1, J_g + 2, \dots, J_g + J_d$ için $\omega_j \in [\omega_d, \pi]$ ile verilen frekans noktalarına ayrıştırılır. Oluşan ayrık minimaks problem aşağıda verilir:

$$\min_{\Phi} \left\{ \varepsilon = \max_{1 \leq j \leq J_g + J_d} |E(\Phi, \omega_j)| \right\} \leq 1 \quad (3.36)$$

Bu problem, etkili bir serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon algoritması ile çözülebilir. Bu işlem için MATLAB’de `fminimax.m` fonksiyonu kullanılabilir. Bu fonksiyonu kullanırken, amaç fonksiyonunun, yani verilen frekans noktalarında en küçük yapılması istenen mutlak hata fonksiyonunun, değerlerini ve ayarlanır parametre vektörüne göre gradyanlarını ($\nabla_{\Phi} E(\Phi, \omega)$), Bkz. Ek A) hesaplayan başka bir fonksiyon sağlanmalıdır. Arzulanan süzgeç kriterlerini sağlayan çözüm, ε 1’den küçük veya 1’e eşit olduğunda elde edilir.

İstenilen kriterleri sağlayan çözüme en az çarpıcı sayısı ile ulaşmak için, yukarıdaki iki algoritma, kestirilen süzgeç derecelerinin yakınındaki değişik derece kombinasyonları için yürütülür. Ayrıca, hemen hemen aynı çarpıcı sayısına sahip birden fazla L değeri mevcutsa, bütün bu değerler denenir ve sonuç olarak en az karmaşıklıkla sonuçlanan L seçilir.

3.2.3 Pratik Süzgeç Tasarımı

Serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon tekniği ile iyi sonuçlar elde edebilmek için, $E(\Phi, \omega)$ hata fonksiyonun frekans ızgarası yeterince yoğun olmalıdır. Aksi halde enküçültme sonrasında oluşan hata fonksiyonu, örnekleme noktaları arasındaki bölgelerde ani sıçramalara sahip olabilir. Örnekleme sayısı, I , yeteri kadar büyük

tutularak bu sorunun üstesinden gelinebilir. $I = [3K \ 6] \cdot N_a \cdot L$ seçiminin uygun olduğu önerilmiştir [29]. Örnekleme sayısı arttıkça ulaşılan çözümün doğruluğu da artar, fakat işlem hızı yavaşlar. Optimizasyonun aşağıdaki adımlarla yapılması işlem hızını artırabilir.

Adım 1: $k = 1$ ile başla. $[0, \omega_g] \cup [\omega_d, \pi]$ frekans bandında düzgün dağılmış yoğun bir ızgara noktaları kümesi, $\Omega_{yoğun} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_I\}$, belirle. Aynı frekans bandında $J = \lfloor I / 100 \rfloor$ için düzgün dağılmış seyrek bir ızgara noktaları başlangıç kümesi, $\bar{\Omega}_0 = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_J\}$, seç. Ayrıca, Altbölüm 3.2.1'den elde edilen başlangıç katsayılarıyla Φ vektörünü (3.35b)'de verildiği gibi oluştur.

Adım 2: $\Omega_{yoğun}$ kümesinin elemanlarıyla $|E(\Phi, \omega_j)|$ mutlak hata fonksiyonunu hesapla ve bu fonksiyonun yerel maksimum noktalarındaki ızgara bileşenlerini belirle. Yani $\Omega_{yoğun}$ kümesinde (3.37) ifadesini sağlayan ω_j 'leri bul.

$$|E(\Phi, \omega_{j-1})| < |E(\Phi, \omega_j)| > |E(\Phi, \omega_{j+1})| \quad (3.37)$$

$|E(\Phi, \omega_0)| = |E(\Phi, \omega_{J+1})| = 0$ 'dır. Bu frekans noktalarını Ω_{yeni} kümesinde tut ve $\bar{\Omega}_k$ kümesini $\bar{\Omega}_k = \bar{\Omega}_{k-1} \cup \Omega_{yeni}$ şeklinde yenile.

Adım 3: $\bar{\Omega}_k$ kümesiyle (3.36)'daki ayrık minimaks problemi çöz ve Φ vektörünü yenile.

Adım 4: Eğer $|\bar{\Omega}_{k-1}| = |\bar{\Omega}_k|$ ise dur.² Aksi halde, $k = k + 1$ yap ve Adım 2'ye git.

Yukarıdaki algoritma, birbirini izleyen iki optimizasyondaki frekans ızgara noktalarının sayısı aynı olana kadar devam eder.

² $|\Omega|$, Ω kümesinin eleman sayısını temsil eder.

Örnek 3.2

Aşağıdaki özelliklere sahip doğrusal-fazlı alçak-geçiren bir FIR süzgeç tasarlayalım.

Geçirme-bandı sınırı	:	$\omega_g = 0.4\pi$
Durdurma-bandı sınırı	:	$\omega_d = 0.402\pi$
Geçirme-bandı dalgalanması	:	$\delta_g = 0.01$ (± 0.0869 dB)
Durdurma-bandı zayıflaması	:	$\delta_d = 0.001$ ($- 60$ dB)

Geleneksel doğru-form tasarımıyla,³ bu özellikleri sağlayan süzgecin minimum derecesi 2541, çarpıcı sayısı 1271 ve toplayıcı sayısı 2541 bulunur.

Orijinal FRM yaklaşımında gerçeğe yakın olan çarpıcıların sayısı, $L = 16$ için minimum olur. Bu durumda alt-süzgeç dereceleri, $N_a = 162$, $N_{Ma} = 70$ ve $N_{Mc} = 98$ olur. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 168 ve 330 olup geleneksel doğru-form tasarım için gerekenlerin (1271 ve 2541) yaklaşık %13'ü kadardır. Etkin süzgeç derecesi 2690'dır ve doğru-form tasarımdan (2541) sadece %6 fazladır.

Eşzamanlı optimizasyon tekniğiyle $L = 16$ için yapılan tasarımda en iyi çözüm, $N_a = 160$, $N_{Ma} = 47$ ve $N_{Mc} = 57$ ile elde edilir. Çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 134 ve 264 olup orijinal FRM tekniğiyle elde edilenlerin (168 ve 330) yaklaşık %80'ine eşittir. Sonuç süzgecinin derecesi 2617'ye düşer.

Eşzamanlı optimizasyon tekniğinde çarpıcı sayısı, $L = 21$ ile en küçük olur. Bu durumda en iyi çözüm, $N_a = 122$, $N_{Ma} = 55$ ve $N_{Mc} = 77$ ile elde edilir. 129 çarpıcı ve 254 toplayıcı gerekir. Bu değerler, orijinal FRM tekniğiyle yapılan tasarımdaki değerlerin yaklaşık %77'sine eşittir. Yapılan tasarım A-durumu türünden ($m = 4$, $\theta = 0.4\pi$ ve $\phi = 0.442\pi$) olup alt-süzgeç parametreleri Tablo 3.3'de özetlenir.

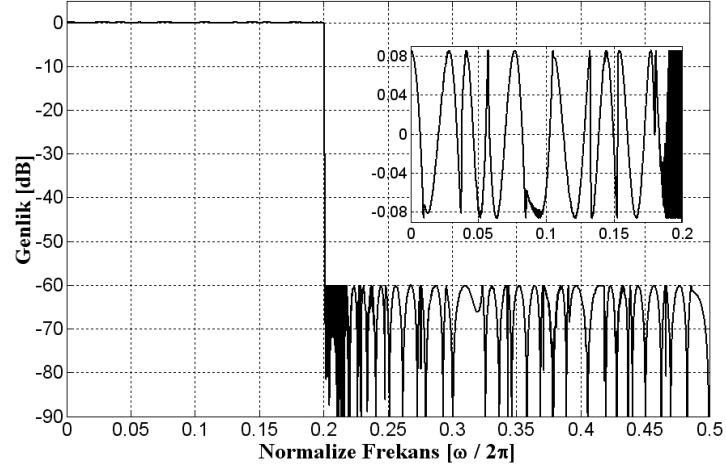
Tablo 3.3 Örnek 3.2'ye ilişkin alt-süzgeç parametreleri.

Alt-süzgeç	Geçirme-bandı sınırı	Durdurma-bandı sınırı	Süzgeç derecesi
H_a	$\theta = 0.4\pi$	$\phi = 0.442\pi$	$N_a = 122$
H_{Ma}	$\omega_g^{(Ma)} = 0.4\pi$	$\omega_d^{(Ma)} = 0.455\pi$	$N_{Ma} = 55$
H_{Mc}	$\omega_g^{(Mc)} = 0.362\pi$	$\omega_d^{(Mc)} = 0.402\pi$	$N_{Mc} = 77$

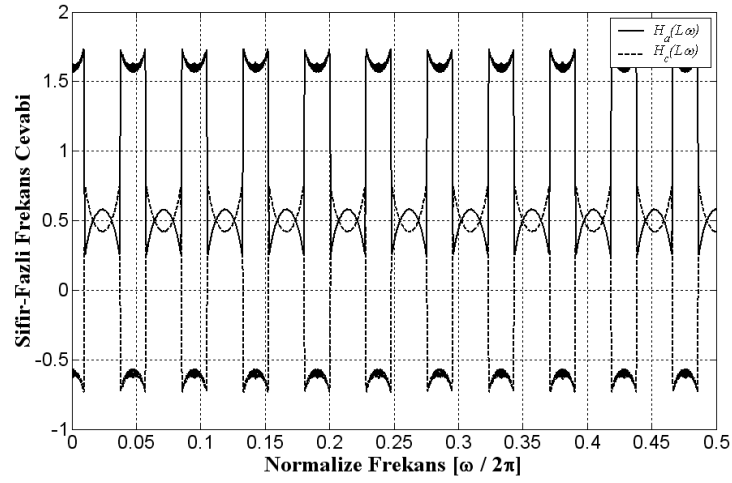
$L = 21$ ve örnekleme sayısı $I = 3N_aL = 7686$ alınarak yapılan tasarıma ilişkin frekans cevapları, Şekil 3.7(a), 3.7(b) ve 3.7(c)'de gösterilir. İlk ($k = 1$) ve son ($k =$

³ Optimum minimaks süzgeç, Remez süzgeç.

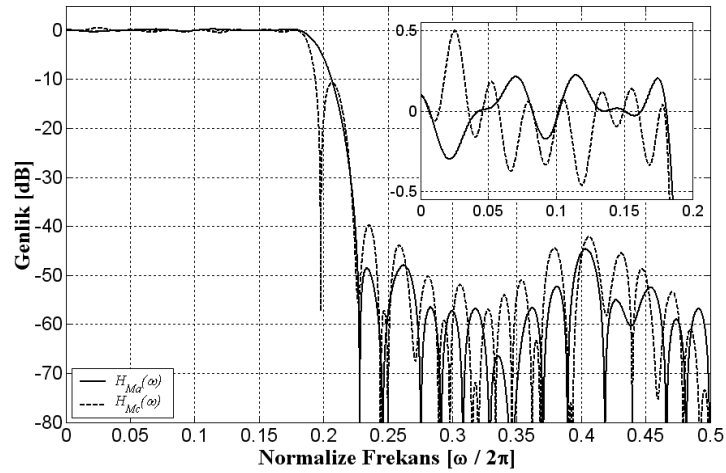
10) döngüdeki hata fonksiyonu, $E(\Phi, \omega)$, Şekil 3.7(d)'de gösterilir. Son döngüde oluşan hata fonksiyonunun $[-1, +1]$ sınırları içerisinde olduğuna dikkat ediniz.



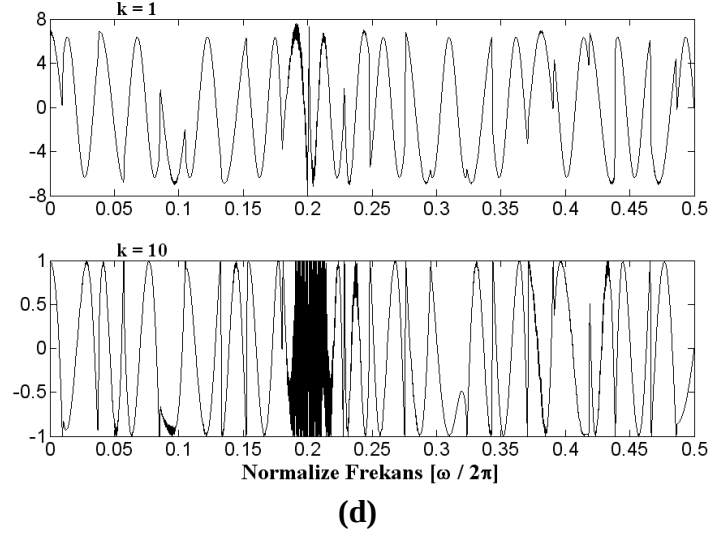
(a)



(b)



(c)



Şekil 3.7 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_a(z^L)$ ve $H_c(z^L)$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L = 21$). (c) Maskeleme süzgeçlerinin genlik cevapları. (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.

3.3 Genelleştirilmiş FRM Yaklaşımı

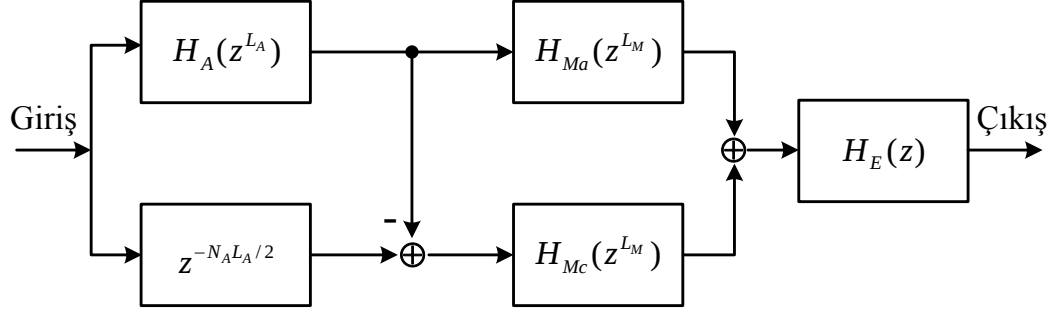
Orijinal FRM yaklaşımında (Bkz. Alt bölüm 3.1) kullanılan maskeleme süzgeçlerinin ara-değerlenmesi ve oluşan istenmeyen periyodiklerin basit bir ön-süzgeç ile yok edilmesi şeklinde genelleştirilen yaklaşımla [30], aritmetik karmaşıklığın orijinal yöntemle göre yaklaşık %20 oranında azaldığı gösterilmiştir. Bu yaklaşım, özellikle dar-bantlı ($\omega_g < 0.5\pi$) keskin süzgeç tasarımları için çok daha uygun olup, bazı ihmallerle iki-katlı FRM tekniğinin (Bkz. Alt bölüm 3.5) özel bir hali gibi düşünülebilir [31].

Orijinal FRM tekniğinde olduğu gibi, [30]'da önerilen genelleştirilmiş FRM yaklaşımında da alt-süzgeçler ayrı ayrı üretilmektedir. Ancak, Alt bölüm 3.2'de anlatılan eşzamanlı optimizasyon tekniği genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımına uyarlandığında, özellikle dar-bantlı FIR süzgeç karmaşıklığı daha da azalabilir. Önerilen bu teknik, 2006 Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı (SIU-2006) ile 2006 Avrupa Sinyal İşleme Konferansı'na (EUSIPCO-2006) bildiri olarak sunulmuştur.

Bu alt bölümde, doğrusal-fazlı FIR süzgeçlerin üretilmesi için genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımı ve bu yaklaşımın eşzamanlı optimizasyon tekniği ile birlikte nasıl kullanılacağı anlatılır. Genelleştirilmiş yaklaşıma ilişkin iki-katlı yapı [30]'dan takip edilebilir.

3.3.1 Süzgeç Yapısı ve Frekans Cevabı

Genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımının genel yapısı Şekil 3.8’de gösterilir.



Şekil 3.8 Genelleştirilmiş tek-katlı FRM tekniğinin genel yapısı.

Genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımında, doğrusal-fazlı bir FIR süzgecin transfer fonksiyonu şöyle oluşturulur:

$$H(z) = [H_A(z^{L_A})H_{Ma}(z^{L_M}) + H_C(z^{L_A})H_{Mc}(z^{L_M})]H_E(z) \quad (3.38a)$$

Alt-süzgeçlerin transfer fonksiyonları ise,

$$H_A(z^{L_A}) = \sum_{n=0}^{N_A} h_A(n)z^{-nL_A}, \quad H_C(z^{L_A}) = z^{-N_A L_A / 2} - H_A(z^{L_A}) \quad (3.38b)$$

$$H_{Ma}(z^{L_M}) = z^{-M_{Ma}L_M} \sum_{n=0}^{N_{Ma}} h_{Ma}(n)z^{-nL_M} \quad (3.38c)$$

$$H_{Mc}(z^{L_M}) = z^{-M_{Mc}L_M} \sum_{n=0}^{N_{Mc}} h_{Mc}(n)z^{-nL_M} \quad (3.38d)$$

$$H_E(z) = \sum_{n=0}^{N_E} h_E(n)z^{-n} \quad (3.38e)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $h_A(n)$, $h_{Ma}(n)$, $h_{Mc}(n)$ ve $h_E(n)$, çift-simetrik dürtü cevabı katsayılarıdır. N_A , N_{Ma} , N_{Mc} ve N_E ise, ilgili alt-süzgecin derecesidir. N_A çift, N_{Ma} ve N_{Mc} her ikisi de tek ya da çift olacak şekilde boyutlandırılır. $N_{Ma} \geq N_{Mc}$ ise, $M_{Ma} = 0$ ve $M_{Mc} = (N_{Ma} - N_{Mc}) / 2$; $N_{Ma} < N_{Mc}$ ise, $M_{Ma} = (N_{Mc} - N_{Ma}) / 2$ ve $M_{Mc} = 0$. Böylece $H_{Ma}(z^{L_M})$ ve $H_{Mc}(z^{L_M})$ süzgeçlerinin grup-gecikmeleri eşitlenmiş olur ki bu tasarımda dikkat edilmesi gereken bir husustur. Ayrıca yarı-gecikmeleri önlemek için, $N_{Ma}L_M$ ve $N_{Mc}L_M$ çarpımları çift olmalıdır [30].

Sonuç süzgecinin frekans cevabı, $H(e^{j\omega})$, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N_A L_A + \max\{N_{Ma}, N_{Mc}\} L_M + N_E)\omega/2} H(\omega) \quad (3.39)$$

Burada $H(\omega)$, sonuç süzgecinin *sıfır-fazlı frekans cevabı* olup,

$$H(\omega) = [H_A(L_A \omega) H_{Ma}(L_M \omega) + H_C(L_A \omega) H_{Mc}(L_M \omega)] H_E(\omega) \quad (3.40a)$$

$$H_C(L_A \omega) = 1 - H_A(L_A \omega) \quad (3.40b)$$

ve $K = A, Ma, Mc, E$ için,

$$H_K(\omega) = \begin{cases} h_K(N_K/2) + 2 \sum_{n=1}^{N_K/2} h_K(N_K/2 - n) \cos(n\omega), & N_K \text{ çift ise} \\ 2 \sum_{n=0}^{(N_K-1)/2} h_K[(N_K-1)/2 - n] \cos[(n+0.5)\omega], & N_K \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.40c)$$

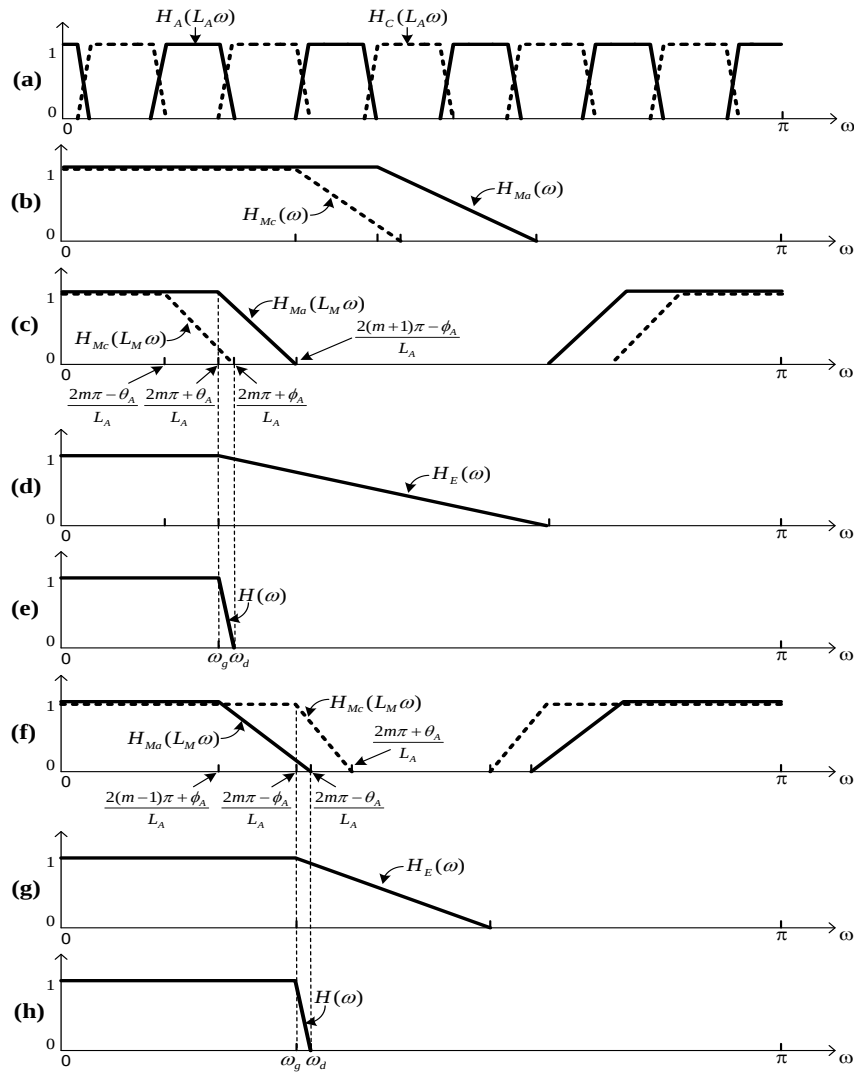
şeklinde ifade edilebilir. $H_A(\omega)$, $H_{Ma}(\omega)$, $H_{Mc}(\omega)$ ve $H_E(\omega)$, sırasıyla, H_A , H_{Ma} , H_{Mc} ve H_E alt-süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevaplarıdır.

$H_A(z^{L_A})$, doğrusal-fazlı bir model süzgecin, $H_A(z)$, her gecikme elemanı L_A tane gecikme elemanı ile yer değiştirilerek elde edilir. $H_C(z^{L_A})$, $H_A(z^{L_A})$ süzgecinin tümleyenidir. $H_A(z^{L_A})$ ve $H_C(z^{L_A})$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları, sırasıyla, $H_A(L_A \omega)$ ve $H_C(L_A \omega) = 1 - H_A(L_A \omega)$, Şekil 3.9(a)'da gösterilir. $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ iki maskeleme süzgeci olmak üzere, bu süzgeçlerin sıfır-fazlı frekans cevapları Şekil 3.9(b)'de gösterilir.

Orijinal FRM yaklaşımındaki maskeleme süzgeçlerinin geçiş-bantları, $H_A(z^{L_A})$ süzgecinden elde edilir. Çok keskin süzgeç tasarımlarında, model ara-değerleme faktörü (L_A) çok büyük olabilir. Bu da $H_A(z^{L_A})$ ve dolayısıyla maskeleme süzgeçlerinin geçiş-bantlarının daralmasına neden olur. Bu durumda yüksek-dereceli maskeler gerekebilir. Bu problemin üstesinden gelmek için, genelleştirilmiş FRM yaklaşımında maskeleme süzgeçleri önce düşük derecelilerle tasarlanır ve ardından bir maske ara-değerleme faktörü (L_M) ile ara-değerleme yapılır. Oluşan yeni maskelerin, $H_{Ma}(z^{L_M})$ ve $H_{Mc}(z^{L_M})$, geçiş-bantları L_M kez daha dardır. $H_{Ma}(L_M \omega)$ ve $H_{Mc}(L_M \omega)$, sırasıyla, $H_{Ma}(z^{L_M})$ ve $H_{Mc}(z^{L_M})$

süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları olmak üzere, $L_M = 2$ için çizilen Şekil 3.9(c) [3.9(f)]’de görüldüğü gibi, bu süzgeçler istenmeyen yüksek-frekanslı bileşenlere de sahiptirler. Bu bileşenler, Şekil 3.9(d) [3.9(g)]’de sıfır-fazlı frekans cevabı gösterilen, basit bir alçak-geçiren süzgeç, $H_E(z)$, yardımıyla yok edilebilir.⁴ $H(z)$ sonuç süzgecinin sıfır-fazlı frekans cevabı, Şekil 3.9(e) [3.9(h)]’de gösterilir.

Genelleştirilmiş yaklaşımla süzgeç tasarımı, önce model ve maske ara-değerleme faktörlerinin (L_A ve L_M) seçimi, ardından alt-süzgeçlerin (H_A , H_{Ma} , H_{Mc} ve H_E) tasarlanması şeklinde gerçekleşir.



Şekil 3.9 $L_M = 2$ için, genelleştirilmiş tek-katlı FRM tekniğindeki alt-süzgeçlerin frekans cevapları.

⁴ Orijinal FRM yaklaşımı, genelleştirilmiş yaklaşımın $L_M = 1$ için özel bir halidir. Bu durumda H_E süzgecinin kullanılmasına gerek yoktur.

3.3.2 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi

Bu altbölümde, L_A ve L_M değerlerinin önceden belirlenmiş oldukları varsayımıyla, alt-süzgeçlerin frekans parametreleri belirlenecektir. L_A ve L_M ara-değerleme faktörlerinin seçimi daha sonra ele alınacaktır.

$K = A, Ma, Mc, E$ için, H_K alt-süzgecinin geçirme-bandı sınırı, durdurma-bandı sınırı ve geçiş-bandı genişliği, sırasıyla, θ_K , ϕ_K ve $\Delta_K = \phi_K - \theta_K$ ile gösterilsin. Bu parametreler $H(z)$ sonuç süzgeci için, sırasıyla, ω_g , ω_d ve $\Delta = \omega_d - \omega_g$ olsun. Şekil 3.9(e) ve 3.9(h)'den görüleceği gibi, ω_g ve ω_d kesim frekansları, m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $[2m\pi / L_A, (2m+1)\pi / L_A]$ veya $[(2m-1)\pi / L_A, 2m\pi / L_A]$ ile verilen frekans aralığında bulunmalıdır. Orijinal FRM tekniğinde olduğu gibi, maskeleme süzgeçlerinin geçirme-bandı genişliklerine bağlı olarak burada da iki durum söz konusudur.

1. durumda (A-durumu): $\theta_{Ma} > \theta_{Mc}$ olup,

$$2m\pi / L_A < \omega_g, \quad \omega_d < (2m+1)\pi / L_A \quad (3.41)$$

yazılabilir. Şekil 3.9(c) ve 3.9(e)'den,

$$\begin{aligned} \theta_A &= \omega_g L_A - 2m\pi \\ \phi_A &= \omega_d L_A - 2m\pi \\ m &= \left\lfloor \omega_g L_A / (2\pi) \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.42)$$

olduğu açıktır. Benzer yolla, diğer alt-süzgeçler için

$$\theta_{Ma} = \frac{2m\pi + \theta_A}{L_A} L_M = \omega_g L_M, \quad \phi_{Ma} = \frac{2(m+1)\pi - \phi_A}{L_A} L_M \quad (3.43a)$$

$$\theta_{Mc} = \frac{2m\pi - \theta_A}{L_A} L_M, \quad \phi_{Mc} = \frac{2m\pi + \phi_A}{L_A} L_M = \omega_d L_M \quad (3.43b)$$

$$\theta_E = \omega_g, \quad \phi_E = \frac{2\pi}{L_M} - \frac{2(m+1)\pi - \phi_A}{L_A} \quad (3.43c)$$

elde edilir.

2. durumda (B-durumu): $\theta_{Ma} < \theta_{Mc}$ olup,

$$(2m-1)\pi / L_A < \omega_g, \quad \omega_d < 2m\pi / L_A \quad (3.44)$$

yazılabilir. Şekil 3.9(f) ve 3.9(h)'den,

$$\begin{aligned} \theta_A &= 2m\pi - \omega_d L_A \\ \phi_A &= 2m\pi - \omega_g L_A \\ m &= \lceil \omega_d L_A / (2\pi) \rceil \end{aligned} \quad (3.45)$$

olduğu açıktır. Benzer yolla, diğer alt-süzgeçler için

$$\theta_{Ma} = \frac{2(m-1)\pi + \phi_A}{L_A} L_M, \quad \phi_{Ma} = \frac{2m\pi - \theta_A}{L_A} L_M = \omega_d L_M \quad (3.46a)$$

$$\theta_{Mc} = \frac{2m\pi - \phi_A}{L_A} L_M = \omega_g L_M, \quad \phi_{Mc} = \frac{2m\pi + \theta_A}{L_A} L_M \quad (3.46b)$$

$$\theta_E = \omega_g, \quad \phi_E = \frac{2\pi}{L_M} - \frac{2m\pi + \theta_A}{L_A} \quad (3.46c)$$

elde edilir.

3.3.3 L_A ve L_M Seçimi

Genelleştirilmiş FRM yaklaşımında tüm süzgeç karmaşıklığı, dört alt-süzgecin dereceleri toplamı ile belirlenir. Bir FIR süzgecin derecesi, geçiş-bandı genişliğiyle ters orantılıdır [11, 12]. Bu yüzden, karmaşıklık ölçütü, C , alt-süzgeçlerin geçiş-bandı genişlikleri ($\Delta_A, \Delta_{Ma}, \Delta_{Mc}, \Delta_E$) cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir [30]:

$$\frac{C}{\pi} = \frac{1}{\Delta_A} + \frac{1}{\Delta_{Ma}} + \frac{1}{\Delta_{Mc}} + \frac{1}{\Delta_E} \quad (3.47)$$

L_A ve L_M , C 'yi en küçük yapacak şekilde seçilir. Aşağıda verilen muhtemel aralıklar iyi bir seçim için yardımcı olabilir:

$$1 \leq L_M \leq \lceil \pi / \omega_d \rceil - 1, \quad (3.48a)$$

$$\max \left\{ \frac{\pi}{\omega_g}, \frac{4L_M\pi}{\pi + \omega_d L_M} \right\} < L_A < \frac{\pi}{\Delta}. \quad (3.48b)$$

3.3.4 Eşzamanlı Optimizasyon Tekniğinin Genelleştirilmiş Tek-Katlı FRM Yaklaşımına Uyarlanması (Önerilen Yöntem)

Genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımındaki bütün alt-süzgeçlerin (H_A , H_{Ma} , H_{Mc} , H_E) eşzamanlı üretilmesi için aşağıdaki adımlar izlenebilir:

- Adım 1:** Dar-bantlı alçak-geçiren süzgeç özellikleri (ω_g , ω_d , δ_g , δ_d) alınır.
- Adım 2:** (3.48) denklemi yardımıyla L_A ve L_M ara-değerleme faktörleri için uygun aralıklar belirlenir.
- Adım 3:** A-durumu için (3.42) ve (3.43), B-durumu için (3.45) ve (3.46) denklemleri kullanılarak, belirlenen aralıklardaki her L_A ve L_M değerleri için alt-süzgeçlerin frekans parametreleri hesaplanır.
- Adım 4:** (3.47) ifadesini en küçük yapan L_A ve L_M değeri seçilir. Alt-süzgeçlerin seçilen bu değerlerle hesaplanmış olan frekans parametreleri belirlenir.
- Adım 5:** Alt-süzgeç dalgalanmaları δ_g ve δ_d olarak alınır ve (2.38) formülü yardımıyla dereceler kestirilir.
- Adım 6:** Altbölüm 3.2.1’de olduğu gibi, geçirme- ve durdurma-bandındaki ağırlıklar, sırasıyla, $1 / \delta_g$ ve $1 / \delta_d$ olarak alınır. Remez algoritması yardımıyla başlangıç katsayıları bulunur ve ayarlanır parametre vektörü (Φ) aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\Phi = \left[h_A(0), \dots, h_A(N_A / 2), h_{Ma}(0), \dots, h_{Ma} \lfloor N_{Ma} / 2 \rfloor, \right. \\ \left. h_{Mc}(0), \dots, h_{Mc} \lfloor N_{Mc} / 2 \rfloor, h_E(0), \dots, h_E \lfloor N_E / 2 \rfloor \right] \quad (3.49)$$

- Adım 7:** (3.40) denklemi ile $H(\Phi, \omega)$ hesaplanır ve Altbölüm 3.2.3’deki adımlar izlenerek başlangıç çözümü iyileştirilir.
- Adım 8:** Optimum çözüme (en az çarpıcı sayısına sahip çözüm) ulaşmak için, Adım 6 ve 7, Adım 5’de elde edilen derecelerin yakınındaki değişik derece kombinasyonları için yinelenir.

Örnek 3.3

Aşağıdaki özelliklere sahip doğrusal-fazlı alçak-geçiren bir FIR süzgeç tasarlayalım.

$$\omega_g = 0.2\pi, \omega_d = 0.205\pi, \delta_g = \pm 0.1 \text{ dB}, \delta_d = -40 \text{ dB}$$

Geleneksel doğru-form tasarımıyla, bu özellikleri sağlayan süzgecin minimum derecesi 760, çarpıcı sayısı 381 ve toplayıcı sayısı 760 olur.

Orijinal FRM yaklaşımında, gerçeklemede gerekli olan çarpıcıların sayısı $L_A = 12$ için minimum olur. Bu durumda alt-süzgeç dereceleri, $N_A = 66$, $N_{Ma} = 41$ ve $N_{Mc} = 55$ olur. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 83 ve 162 olup geleneksel doğru-form tasarım için gerekenlerin (381 ve 760) yaklaşık %22'si kadardır. Etkin süzgeç derecesi 847'dir ve doğru-form tasarımdan (760) sadece %11 fazladır.

Genelleştirilmiş FRM yaklaşımında, (3.48)'den $1 \leq L_M \leq 4$ ve $6 \leq L_A \leq 200$ bulunur. Bu aralıklarda yapılan arama sonucunda, $L_M = 3$ ve $L_A = 17$ değerleriyle $C = 28.22$ minimum değerine ulaşılır. Eğer alt-süzgeçler [30]'da önerildiği gibi ayrı ayrı üretilirse, minimum çarpıcı sayısına $N_A = 48$, $N_{Ma} = 28$, $N_{Mc} = 22$ ve $N_E = 22$ ile ulaşılır. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 64 ve 120'dir. Bu değerler orijinal yaklaşımdakilerle (83 ve 162) karşılaştırıldığında, yaklaşık %23 oranında bir azalma söz konusudur. Etkin süzgeç derecesi 922 olarak bulunur.

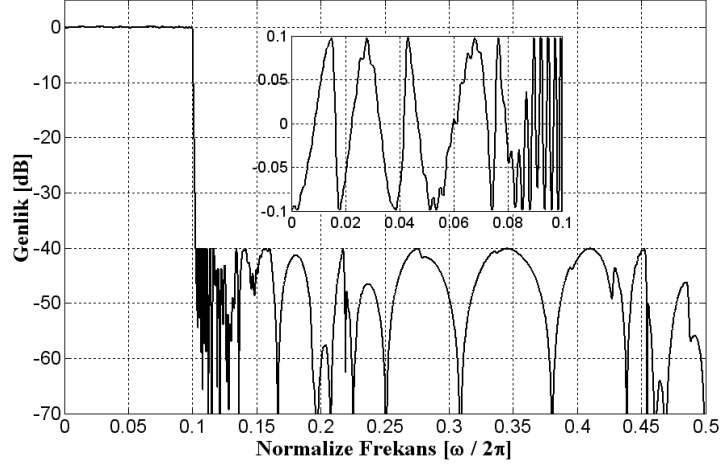
Genelleştirilmiş tek-katlı FRM yaklaşımı eşzamanlı optimizasyon tekniği ile birlikte kullanılırsa (önerilen teknik), $L_M = 3$ ve $L_A = 17$ olan optimum tasarım için minimum çarpıcı sayısına sahip çözüme, $N_A = 44$, $N_{Ma} = 23$, $N_{Mc} = 7$ ve $N_E = 12$ ile ulaşılır. Tasarım B-durumu türündendir ($m = 2$, $\theta_A = 0.515\pi$ ve $\phi_A = 0.6\pi$) ve alt-süzgeç parametreleri Tablo 3.4'de özetlenir. Gerekli olan toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 46 ve 86 olup orijinal FRM yaklaşımdakilerle (83 ve 162) karşılaştırıldığında, yaklaşık %45 oranında bir azalma gözlemlenir. Etkin süzgeç derecesi ise 829'dur ve geleneksel yöntemden (760) sadece %9 fazladır.

Tablo 3.4 Örnek 3.3'e ilişkin alt-süzgeç parametreleri.

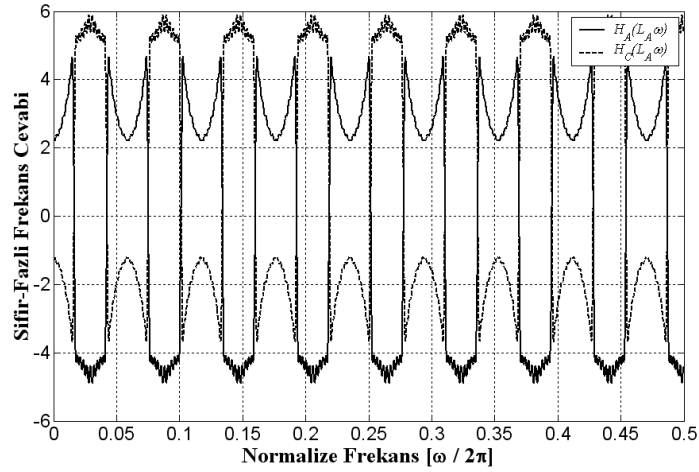
Alt-süzgeç	Geçirme-bandı sınırı	Durdurma-bandı sınırı	Süzgeç derecesi
H_A	$\theta_A = 0.515\pi$	$\phi_A = 0.6\pi$	$N_A = 44$
H_{Ma}	$\theta_{Ma} = 0.459\pi$	$\phi_{Ma} = 0.615\pi$	$N_{Ma} = 23$
H_{Mc}	$\theta_{Mc} = 0.6\pi$	$\phi_{Mc} = 0.797\pi$	$N_{Mc} = 7$
H_E	$\theta_E = 0.2\pi$	$\phi_E = 0.401\pi$	$N_E = 12$

$L_M = 3$, $L_A = 17$ ve örnekleme sayısı $I = 3N_AL_A = 2244$ alınarak önerdiğimiz teknikte yapılan tasarım için, $H(\omega)$ sonuç süzgecine ait frekans cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları Şekil 3.10(a)'da gösterilir. Alt-süzgeçlerin frekans cevapları; $H_A(L_A\omega)$ ve $H_C(L_A\omega)$ Şekil 3.10(b)'de, $H_{Ma}(L_M\omega)$, $H_{Mc}(L_M\omega)$ ve $H_E(\omega)$ ise Şekil

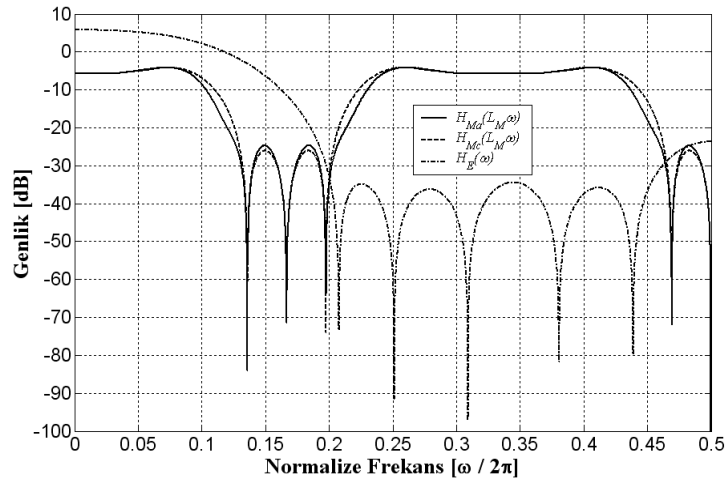
3.10(c)'de gösterilir. Şekil 3.10(c)'de, $H_{Ma}(L_M\omega)$ ve $H_{Mc}(L_M\omega)$ 'ya ait genlik cevaplarının benzerliği dikkat çekicidir. İlk ($k = 1$) ve son ($k = 8$) döngüdeki hata fonksiyonları Şekil 3.10(d)'de gösterilir. Son döngüde oluşan hata fonksiyonunun $[-1, +1]$ sınırları içerisinde olduğuna dikkat ediniz.



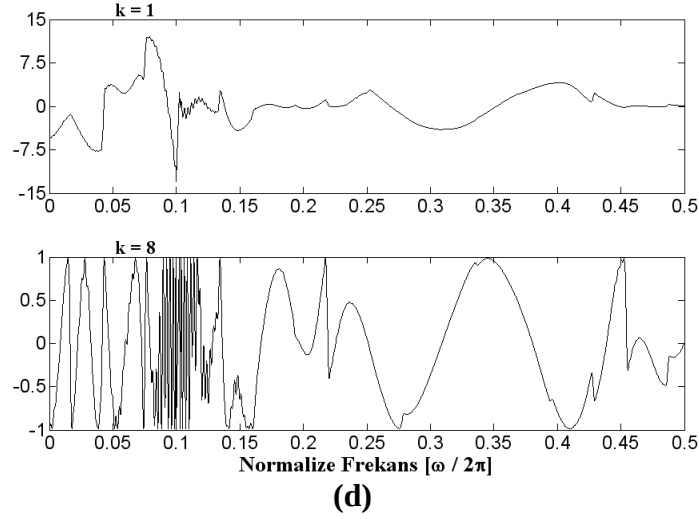
(a)



(b)



(c)



Şekil 3.10 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_A(z^{L_A})$ ve $H_C(z^{L_A})$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L_A = 17$). (c) $H_{Ma}(z^{L_M})$, $H_{Mc}(z^{L_M})$ ve $H_E(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları ($L_M = 3$). (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.

Örnek 3.4

Şimdi, özellikleri Örnek 3.2’de verilen alçak-geçiren süzgeci önerdiğimiz teknikle tasarlayalım.

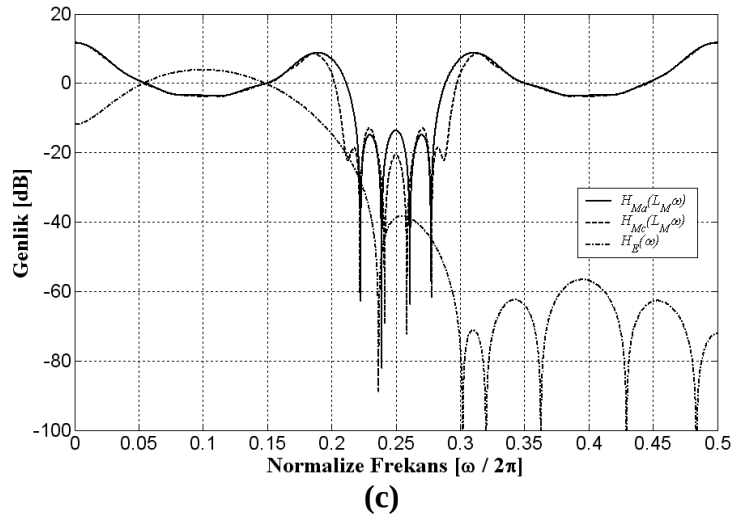
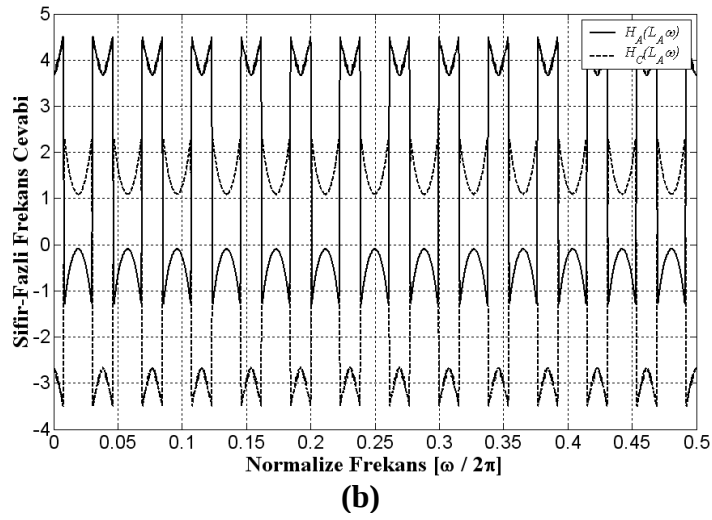
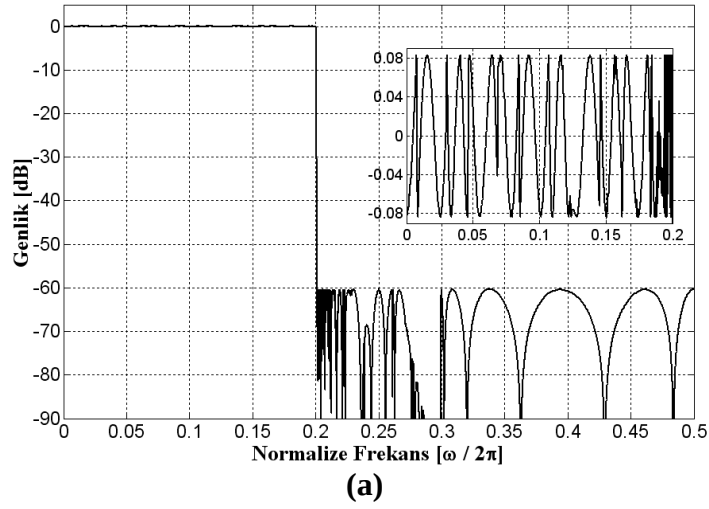
(3.48) denkleminde $1 \leq L_M \leq 2$ ve $3 \leq L_A \leq 499$ bulunur. Bu aralıklarda yapılan arama sonucunda, $L_M = 2$ ve $L_A = 26$ değerleriyle $C = 52.23$ minimum değerine ulaşılır. Tasarım A-durumu türündendir ($m = 5$, $\theta_A = 0.4\pi$ ve $\phi_A = 0.452\pi$). Minimum çarpıcı sayısına sahip çözüm, $N_A = 100$, $N_{Ma} = 20$, $N_{Mc} = 64$ ve $N_E = 16$ ile elde edilir. Alt-süzgeç parametreleri Tablo 3.5’de özetlenir. Gerekli olan toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 104 ve 200’dür. Bu değerler, orijinal tek-katlı FRM yaklaşımıyla elde edilen değerlerin (168 ve 330) yaklaşık %62’si kadardır. Etkin süzgeç derecesi 2744 olup geleneksel yöntemden (2541) sadece %8 fazladır.

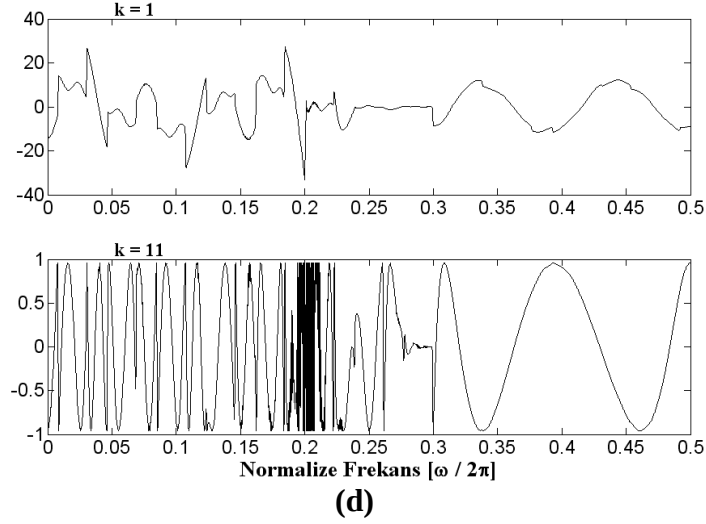
Tablo 3.5 Örnek 3.4’e ilişkin alt-süzgeç parametreleri.

Alt-süzgeç	Geçirme-bandı sınırı	Durdurma-bandı sınırı	Süzgeç derecesi
H_A	$\theta_A = 0.4\pi$	$\phi_A = 0.452\pi$	$N_A = 100$
H_{Ma}	$\theta_{Ma} = 0.8\pi$	$\phi_{Ma} = 0.888\pi$	$N_{Ma} = 20$
H_{Mc}	$\theta_{Mc} = 0.739\pi$	$\phi_{Mc} = 0.804\pi$	$N_{Mc} = 64$
H_E	$\theta_E = 0.4\pi$	$\phi_E = 0.556\pi$	$N_E = 16$

$L_M = 2$, $L_A = 26$ ve örnekleme sayısı $I = 3N_AL_A = 7800$ alınarak yapılan tasarıma ilişkin frekans cevapları, Şekil 3.11(a), 3.11(b) ve 3.11(c)’de gösterilir.

Şekil 3.11(c)'de, $H_{Md}(L_M\omega)$ ve $H_{Mc}(L_M\omega)$ 'ya ait genlik cevaplarının benzerliği dikkat çekicidir. İlk ($k = 1$) ve son ($k = 11$) döngüdeki hata fonksiyonu, $E(\Phi, \omega)$, Şekil 3.11(d)'de gösterilir. Son döngüde oluşan hata fonksiyonunun $[-1, +1]$ sınırları içerisinde olduğuna dikkat ediniz.





Şekil 3.11 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_A(z^{L_A})$ ve $H_C(z^{L_A})$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L_A = 26$). (c) $H_{Ma}(z^{L_M})$, $H_{Mc}(z^{L_M})$ ve $H_E(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları ($L_M = 2$). (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.

3.4 Salt-Gecikmeli Maskeleme Süzgecinin Kullanımına İlişkin Yaklaşım

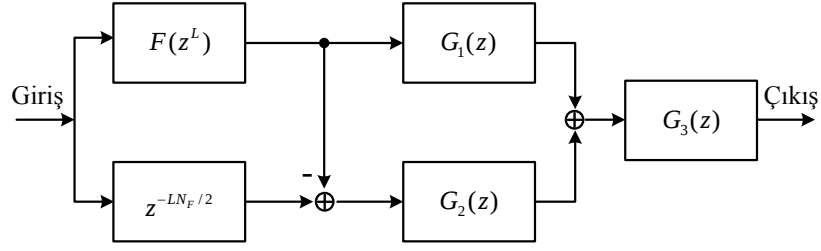
Lim ve Lian tarafından [32]'de önerilen FRM yaklaşımındaki iki maskeleme süzgecinin ortak bir süzgeç kullanılarak yapılandırılması ve bütün alt-süzgeçlerin eşzamanlı üretilmesi için önerilen yaklaşımla [26], aritmetik karmaşıklığın kayda değer oranda azaldığı gösterilmiştir. [32]'deki süzgeçlerin ele alınmasındaki neden, maskeleme süzgeçlerinin genlik cevaplarının eşzamanlı optimizasyondan sonra çok benzer olmaları gerçeğine dayanmaktadır.

[26]'daki yaklaşım, önerilen yöntemle (Bkz. Alt bölüm 3.3.4) benzetmekle birlikte, [26]'da maskeleme süzgeçlerine ara-değerleme uygulanmaz. Bu yöntemde, maskeleme süzgeçlerini oluşturmak için ortak bir süzgeçten faydalanılır. Maskeleme süzgeçlerinden biri, salt-gecikme (z^{-N}) olmak üzere seçilir ve diğer maskeleme süzgecinin derecesi, bu gecikme miktarının iki katı ($2N$) olarak tayin edilir. Nihayet maskeleme süzgeç çıkışları ortak süzgeçten geçirilir.

3.4.1 Süzgeç Yapısı ve Transfer Fonksiyonu

Salt-gecikmeli FRM yaklaşımının genel yapısı Şekil 3.12'de gösterilir. Bu yaklaşımda, sonuç süzgecinin transfer fonksiyonu şu şekilde verilir:

$$H(z) = [F(z^L)G_1(z) + [z^{-LN_F/2} - F(z^L)]G_2(z)]G_3(z) \quad (3.50a)$$



Şekil 3.12 Salt-gecikmeli tekniğin genel yapısı.

Alt-süzgeçlerin transfer fonksiyonları ise,

$$F(z^L) = \sum_{n=0}^{N_F} f(n)z^{-nL} \quad (3.50b)$$

$$G_1(z) = z^{-M_1} \sum_{n=0}^{N_1} g_1(n)z^{-n}, \quad G_2(z) = z^{-M_2} \sum_{n=0}^{N_2} g_2(n)z^{-n} \quad (3.50c)$$

$$G_3(z) = \sum_{n=0}^{N_3} g_3(n)z^{-n} \quad (3.50d)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f(n)$, $g_1(n)$, $g_2(n)$ ve $g_3(n)$, çift-simetrik dürtü cevabı katsayılarıdır. N_F , N_1 , N_2 ve N_3 ise, ilgili alt-süzgecin derecesidir. N_F çift, N_1 ve N_2 her ikisi de tek ya da çift olacak şekilde boyutlandırılır. $N_1 \geq N_2$ ise, $M_1 = 0$ ve $M_2 = (N_1 - N_2) / 2$; $N_1 < N_2$ ise, $M_1 = (N_2 - N_1) / 2$ ve $M_2 = 0$. Böylece $G_1(z)$ ve $G_2(z)$ süzgeçlerinin grup-gecikmeleri eşitlenmiş olur. N_3 derecesi, N_1 veya N_2 'ye bağlıdır ve bir sonraki altbölümde incelenir.

3.4.2 Salt-Gecikmeli Tasarım Planı

$G_1(z)$ veya $G_2(z)$ maskelerinden biri, salt-gecikme olacak şekilde seçilir ve diğer maskenin derecesi, bu gecikmenin iki katı olacak biçimde boyutlandırılır. Tasarım algoritması şu şekilde verilir:

Adım 1: G_3 yokmuş gibi düşünülür ($G_3(z) = 1$) ve eşzamanlı optimizasyon tekniği (Bkz. Alt bölüm 3.2) kullanılarak F , G_1 , G_2 tasarlanır. f a h_a , g_1 a h_{Ma} ve g_2 a h_{Mc} dönüşümleri yararlı olacaktır.

Adım 2: Eğer $N_1 < N_2$ ise, $G_3(z) = G_1(z)$ yapılır. Bu durumda,

$$G_1(z) = z^{-N_2/2}, \quad N_2 = N_2 - N_1 \quad (3.51a)$$

olur. $G_2(z)$ 'nin başlangıç derecesi N_2 olarak seçilir. Eğer $N_1 > N_2$ ise, $G_3(z) = G_2(z)$ yapılır. Bu durumda,

$$G_2(z) = z^{-N_1/2}, \quad N_1 = N_1 - N_2 \quad (3.51b)$$

olur. $G_1(z)$ 'nin başlangıç derecesi N_1 olarak seçilir.

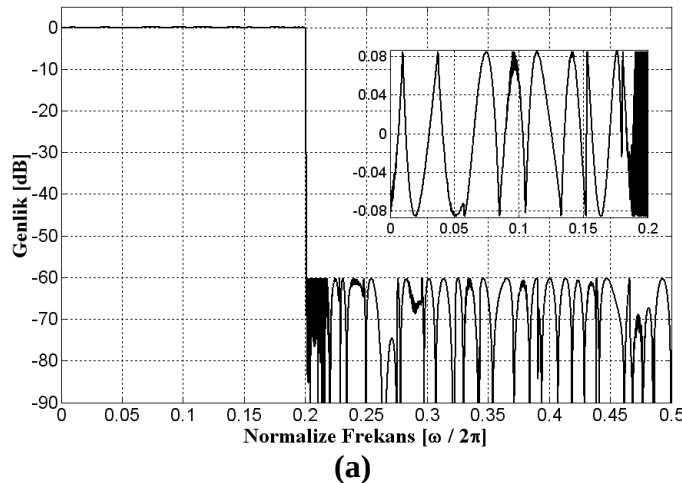
Adım 3: $G_1(z) = z^{-N_2/2}$ olduğu durumda $F(z^L)$, $G_2(z)$ ve $G_3(z)$; $G_2(z) = z^{-N_1/2}$ olduğu durumda ise $F(z^L)$, $G_1(z)$ ve $G_3(z)$ eşzamanlı olarak üretilir.

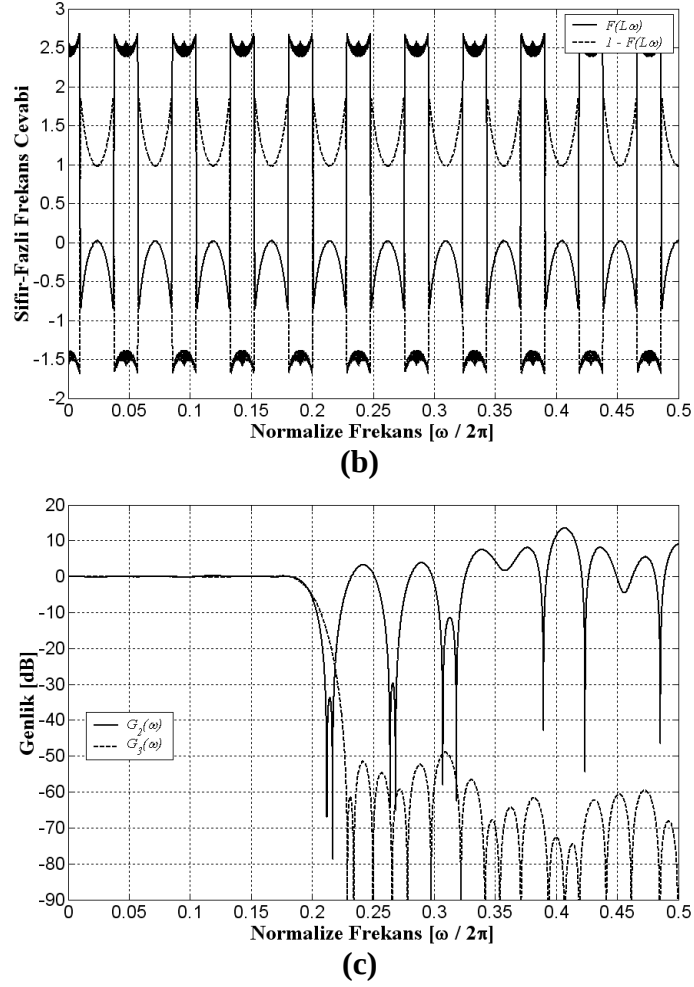
Adım 4: N_2 [N_1] çift bir tamsayı olacak şekilde azar azar artırılır ve Adım 3 yinelenir. Bu işlem, arzulanan süzgeç özelliklerini sağlayan çözüme ulaşana kadar devam eder.

Örnek 3.5

Özellikleri Örnek 3.2'de verilen alçak-geçiren süzgeci salt-gecikmeli teknikle tasarlayalım. Bu yöntemde, alt-süzgeçler eşzamanlı üretilerek minimum çarpıcı sayısına $L = 21$ ile ulaşılır. En iyi çözüm, $N_1 = 0$ ($G_1(z) = z^{-N_2/2} = z^{-23}$), $N_2 = 46$, $N_3 = 55$ ve $N_F = 122$ için elde edilir. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 114 ve 223 olup ortak $G_3(z)$ süzgecinin kullanılmadığı eşzamanlı optimizasyon tekniğiyle elde edilen değerlerin (129 ve 254) yaklaşık %88'i kadardır. Etkin süzgeç derecesi ise 2617'dir ve geleneksel yöntemden (2541) sadece %3 fazladır.

$L = 21$ ve örnekleme sayısı $I = 3N_F L = 7686$ alınarak yapılan tasarım için, $H(\omega)$ sonuç süzgecine ait frekans cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları Şekil 3.13(a)'da gösterilir. Alt-süzgeçlerin frekans cevapları; $F(L\omega)$ ve $1 - F(L\omega)$ Şekil 3.13(b)'de, $G_2(\omega)$ ve $G_3(\omega)$ ise Şekil 3.13(c)'de gösterilir.





Şekil 3.13 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $F(z^L)$ ve $z^{-LN_F/2} - F(z^L)$ süzgeçlerinin sıfır-fazlı frekans cevapları ($L = 21$). (c) $G_2(z)$ ve $G_3(z)$ süzgeçlerinin genlik cevapları.

3.5 Çok-Katlı FRM Yapısı

Frekans-cevabı maskeleme yaklaşımında kullanılan $H_d(z)$ model süzgecinin derecesi çok yüksek olursa, bu süzgeç de FRM tekniğiyle gerçekleştirilerek karmaşıklığı azaltılabilir. Bu işlemi keyfi sayıda tekrarlamak çok-katlı FRM yaklaşımını [27, 33] doğurur.

Bu altbölümde, FRM tekniğinin hangi durumlar altında etkin olacağı, en az karmaşıklık için kaç katlı yapının kullanılması gerektiği ve çok-katlı FRM süzgecinin eşzamanlı optimizasyon tekniğiyle nasıl üretileceği anlatılır.

3.5.1 Tek-Katlı Optimum Tasarım

Geçiş-bandı genişliği $\Delta = \beta f_s$ (f_s : örnekleme frekansı) olan alçak-geçiren bir süzgecin Remez uzunluğu, N_0 , yaklaşık olarak şöyle ifade edilir:

$$N_0 \approx \frac{\Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{\beta} - \Phi_2(\delta_g, \delta_d) \beta + 1 \quad (3.52)$$

Burada δ_g ve δ_d , sırasıyla, geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmalarıdır. $\Phi_1(\delta_g, \delta_d)$ ve $\Phi_2(\delta_g, \delta_d)$, (2.38b) ve (2.38c) denklemleriyle verilir. $\beta \leq 0.2$ için birinci terim baskın hale gelir. Böylece,

$$N_0 \approx \frac{\Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{\beta}, \quad \beta \leq 0.2 \quad (3.53)$$

yazılabilir [33]. Genel olarak, N_0 uzunluklu bir Remez süzgeç N_0 adet katsayıya sahiptir, fakat bunların sadece %50'si farklıdır. Gerçekleme planına bağlı olarak N_0 ya da $N_0 / 2$ tane çarpıcı gerekir. Gerekli olan çarpıcıların sayısı Π_0 ile verilsin.

$$\Pi_0 \approx \frac{\alpha \Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{\beta} \quad (3.54)$$

N_0 tane çarpıcı gerektiğinde $\alpha = 1$ ve $N_0 / 2$ tane çarpıcı gerektiğinde $\alpha = 0.5$ olur.

FRM tekniğinde, $H_a(z)$ model süzgecini gerçeklemek için gerekli olan çarpıcı sayısı (Π_a) şöyle ifade edilebilir:

$$\Pi_a \approx \frac{\Pi_0}{L} \quad (3.55)$$

Burada L , ara-değerleme oranıdır. Maskeleme süzgeçlerinin, $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$, karmaşıklığı bant sınırlarına bağlıdır. Bu süzgeçlerin geçiş-bandı genişlikleri toplamı $2\pi / L$ 'dir (Bkz. Şekil 3.3). $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ için gerekli olan çarpıcıların sayısı, sırasıyla, Π_{Ma} ve Π_{Mc} ile gösterilsin. $\Pi_{Ma} + \Pi_{Mc}$ toplamı $\Pi_{Ma} = \Pi_{Mc}$ için en küçük olur, fakat eşitlik yerine yaklaşıklık ($\Pi_{Ma} \approx \Pi_{Mc}$) kullanılması daha uygundur [33].

$$\Pi_{Ma} \approx \Pi_{Mc} \approx 2L\beta \Pi_0 \quad (3.56)$$

Böylece toplam çarpıcı sayısı, Π , şu şekilde verilir:

$$\Pi = \Pi_a + \Pi_{Ma} + \Pi_{Mc} \approx \left(\frac{1}{L} + 4L\beta \right) \Pi_0 \quad (3.57)$$

Π 'nin L 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$L_{opt} \approx \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \quad (3.58)$$

elde edilir. L_{opt} , karmaşıklığın en az olduğu durumdaki L değeridir. Görüldüğü gibi, L_{opt} α 'ya bağlı değildir. (3.58) ifadesi (3.57)'de yerine konularak,

$$\Pi_{min} \approx 4\Pi_0\sqrt{\beta} \quad (3.59)$$

elde edilir. Burada Π_{min} , minimum karmaşıklık durumundaki toplam çarpıcı sayısıdır. (3.54) ve (3.59) denklemlerinden,

$$\Pi_{min} \approx \frac{4\alpha \Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{\sqrt{\beta}} \quad (3.60)$$

yazılır. (3.60) ifadesi, tek-katlı FRM yaklaşımındaki süzgeç karmaşıklığının, geçiş-bandı genişliğinin karekökü ile ters orantılı olduğunu gösterir. Geçiş-bandı daraldıkça, FRM tekniğinin verimliliği artar. Yani FRM tekniği geniş geçiş-bantlı süzgeçler için etkin değildir. Eşik noktası $\Pi_{min} = \Pi_0$ 'da oluşur, yani $\beta = \beta_{eşik}$ olduğu zaman. $\beta_{eşik}$ (3.59)'dan şöyle elde edilir:

$$\beta_{eşik} \approx \frac{1}{16} \approx 0.063 \quad (3.61)$$

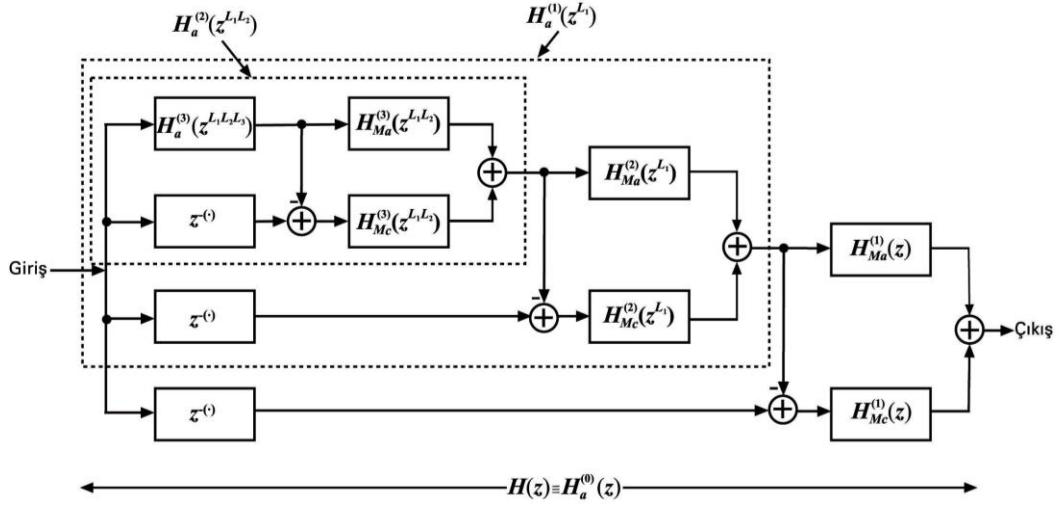
$\beta_{eşik}$ değeri, α , δ_g ve δ_d değerlerinden bağımsız bir sabittir. Sonuç olarak, FRM tekniği, arzulanan süzgecin geçiş-bandı genişliği $\Delta < 0.063 f_s$ olduğunda fayda sağlar.

3.5.2 Çok-Katlı Optimum Tasarım

Eğer $H_a(z)$ süzgecinin derecesi çok yüksek ise, $H_a(z)$ 'nin karmaşıklığını azaltmak için de FRM tekniği kullanılabilir. Bu işlemin keyfi sayıda tekrarlanması çok-katlı yapıyı oluşturur. Çok-katlı FRM yaklaşımına ilişkin alt-süzgeç ilişkisi şöyle tanımlanır:

$$H_a^{(r-1)}(z) = H_a^{(r)}(z^{L_r})H_{Ma}^{(r)}(z) + H_c^{(r)}(z^{L_r})H_{Mc}^{(r)}(z) \quad (3.62)$$

Burada $H_c^{(r)}(z^{L_r})$, $H_a^{(r)}(z^{L_r})$ süzgecinin tümleyenidir. $H_{Ma}^{(r)}(z)$ ve $H_{Mc}^{(r)}(z)$ maskeleme süzgeçleridir. $H_a^{(0)}(z)$ ise sonuç süzgecidir. r . katta, model süzgecin her gecikme elemanı $L_1 \cdot L_2 \cdot L_r$ kadar gecikme elemanı ile yer değiştirilir. 3-katlı bir FRM yapısı Şekil 3.14’de gösterilir.



Şekil 3.14 3-katlı bir FRM yapısı.

R -katlı bir FRM süzgecini ele alalım. Bir önceki altbölümdeki gözlemlere dayanarak, gerçekleştirilmede gerekli olan toplam çarpıcı sayısı, $\Pi(R)$, şöyle verilir:

$$\Pi(R) = \frac{\Pi_0}{R} + 4\beta \Pi_0 \sum_{r=1}^R L_r \prod_{r=1}^R L_r \quad (3.63)$$

$\Pi(R)$ ’nin $r = 1, 2, K, R$ için L_r ’lere göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek, $L_1 = L_2 = L = L_R = L_{opt}(R)$ olduğu zaman $\Pi(R)$ ’nin minimum değeri elde edilir.

$$L_{opt}(R) = (4\beta)^{-1/(R+1)} \quad (3.64)$$

Tek-katlı yapıda olduğu gibi, R -katlı yapıda da $L_{opt}(R)$ geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmalarından bağımsızdır. $\Pi(R)$ ’nin minimum değeri şöyle verilir:

$$\Pi_{min}(R) \approx (R+1) \cdot 4^{R/(R+1)} \cdot \frac{\alpha \Phi_1(\delta_g, \delta_d)}{\beta^{1/(R+1)}} \quad (3.65)$$

Süzgeç karmaşıklığı, β ’nin $(R+1)$. kökü ile ters orantılıdır.

$(R + 1)$ -katlı bir tasarımın, hangi durumda R -katlı bir tasarımdan daha az karmaşıklığa sahip olduğunu bilmek yararlı olacaktır. (3.65) denkleminde, $\beta < \beta_{eşik}(R)$ için $\Pi_{\min}(R + 1)$ 'in $\Pi_{\min}(R)$ 'den daha az olduğu gösterilebilir.

$$\beta_{eşik}(R) \approx \frac{1}{4} \left(\frac{R + 1}{R + 2} \right)^{(R+1)(R+2)} \quad (3.66)$$

$\beta_{eşik}(R)$ de δ_g , δ_d ve α 'dan bağımsızdır. $R = 0, 1, K, 9$ için $\beta_{eşik}(R)$ değerleri Tablo 3.6'da verilir. (3.66)'dan, minimum karmaşıklık için R 'nin aşağıdaki şartı sağlaması gerektiği sonucuna varılır.

$$\beta_{eşik}(R) \leq \beta < \beta_{eşik}(R - 1) \quad (3.67)$$

Bu şart aşağıda verilen sınırları da beraberinde getirir.

$$\left(\frac{R + 1}{R} \right)^R \leq L_{opt}(R) \leq \left(\frac{R + 2}{R + 1} \right)^{R+2} \quad (3.68)$$

$L_{opt}(R) = e$ ($\cong 2.718$, doğal logaritma tabanı) olur.
 $R \rightarrow \infty$

Tablo 3.6 $R = 0, 1, K, 9$ için $\beta_{eşik}(R)$ değerleri.

R	$\beta_{eşik}(R)$	R	$\beta_{eşik}(R)$
0	0.063	5	0.00039
1	0.022	6	0.00014
2	0.0079	7	0.000052
3	0.0029	8	0.000019
4	0.0011	9	0.000007

Verilen bir β için, uygun R değeri (3.67)'den ve ilgili $L_{opt}(R)$ değeri de (3.64)'den hesaplanabilir. $\Pi_{\min}(R)$ ise, (3.65) denklemini yardımıyla bulunabilir ve de β , δ_g ve δ_d cinsinden şöyle ifade edilebilir:

$$\Pi_{\min}(\beta, \delta_g, \delta_d) \approx \xi(\beta) \alpha \Phi_1(\delta_g, \delta_d) \quad (3.69)$$

$\xi(\beta)$ ifadeleri Tablo 3.7 ile verilir.

Tablo 3.7 $\xi(\beta)$ fonksiyonları.

β	$\xi(\beta)$	β	$\xi(\beta)$
0.063–0.022	$4.00 / \beta^{1/2}$	0.00039–0.00014	$22.97 / \beta^{1/7}$
0.022–0.0079	$7.56 / \beta^{1/3}$	0.00014–0.000052	$26.91 / \beta^{1/8}$
0.0079–0.0029	$11.31 / \beta^{1/4}$	0.000052–0.000019	$30.86 / \beta^{1/9}$
0.0029–0.0011	$15.16 / \beta^{1/5}$	0.000019–0.000007	$34.82 / \beta^{1/10}$
0.0011–0.00039	$19.05 / \beta^{1/6}$	0.000007–0.0000047	$38.79 / \beta^{1/11}$

Çok-katlı FRM süzgecinde kullanılan katların gerçek sayısı, kestirilen optimum kat sayısı ile aynı olmayabilir. Çünkü r . kattaki L_r değeri $L_{opt}(R)$ 'ye eşit olmayabilir. Ancak, uygun R kat sayısını ve her kat için gerekli olan L_r değerlerini bulmak için aşağıdaki adımlar izlenebilir [33].

Adım 1: $r = 0$ ile başla. $H_a^{(0)}(z)$ 'ye ilişkin özellikler tüm sisteme ait özelliklerdir.

Adım 2: $H_a^{(r)}(z)$ 'nin özelliklerine, Tablo 3.6'ya ve (3.67) denkleminde göre R 'yi hesapla. Eğer $R \geq 1$ ise, $r = r + 1$ yap; aksi halde dur.

Adım 3: $\xi(\beta_a(r+1)) + 1/\beta_{Ma}(r) + 1/\beta_{Mc}(r)$ ifadesini minimum yapan L_r değerini seç ve Adım 2'ye git.

Yukarıdaki algoritmada R , r değeri ile değişir. Seçilen L_r değeri $L_{opt}(R)$ 'ye eşit olmayabileceğinden, L_r seçildikten sonra, $H_a^{(r+1)}(z)$ süzgecinin karmaşıklığını minimum yapacak yeni bir R değerinin bulunması gerekmektedir.

3.5.2.1 Sonuç Süzgecinin Transfer Fonksiyonu

Çok-katlı FRM yaklaşımında, sonuç süzgeci yinelemeli olarak şöyle üretilir [27, 29]:

$$\begin{aligned}
 H(z) &\equiv H_a^{(0)}(z) = H_a^{(1)}(z^{L_1})H_{Ma}^{(1)}(z) + \left[z^{-L_1 N_a^{(1)}/2} - H_a^{(1)}(z^{L_1}) \right] H_{Mc}^{(1)}(z) \\
 H_a^{(1)}(z) &= H_a^{(2)}(z^{L_2})H_{Ma}^{(2)}(z) + \left[z^{-L_2 N_a^{(2)}/2} - H_a^{(2)}(z^{L_2}) \right] H_{Mc}^{(2)}(z)
 \end{aligned} \tag{3.70a}$$

$$H_a^{(R-1)}(z) = H_a^{(R)}(z^{L_R})H_{Ma}^{(R)}(z) + \left[z^{-L_R N_a^{(R)}/2} - H_a^{(R)}(z^{L_R}) \right] H_{Mc}^{(R)}(z)$$

$$H_a^{(R)}(z^{L_R}) = \sum_{n=0}^{N_a^{(R)}} h_a^{(R)}(n) z^{-nL_R} \tag{3.70b}$$

$$H_{Ma}^{(r)}(z) = \sum_{n=0}^{N_{Ma}^{(r)}} h_{Ma}^{(r)}(n) z^{-n}, \quad H_{Mc}^{(r)}(z) = \sum_{n=0}^{N_{Mc}^{(r)}} h_{Mc}^{(r)}(n) z^{-n} \quad (3.70c)$$

Burada, $r = 1, 2, K, R$ için $H_{Ma}^{(r)}(z)$ 'ler ve $H_{Mc}^{(r)}(z)$ 'ler ve de $H_a^{(R)}(z)$ tasarlanması gereken alt-süzgeçlerdir. $N_a^{(R)}$, $H_a^{(R)}(z)$ süzgecinin derecesidir. $N_{Ma}^{(r)}$ ve $N_{Mc}^{(r)}$ ise, sırasıyla, $H_{Ma}^{(r)}(z)$ ve $H_{Mc}^{(r)}(z)$ maskelerinin dereceleridir. $r = 2, 3, K, R$ için $N_{Ma}^{(r)}$ 'ler ve $N_{Mc}^{(r)}$ 'ler ve de $N_a^{(R)}$ çift olmalıdır. $N_{Ma}^{(1)}$ ve $N_{Mc}^{(1)}$ her ikisi de tek ya da çift olacak şekilde seçilmelidir. Ayrıca $h_a^{(R)}(n)$, $h_{Ma}^{(r)}(n)$ ve $h_{Mc}^{(r)}(n)$, çift-simetrik dürtü cevabı katsayılarıdır. Benzer şekilde, gerçekleştirilebilir $H(z)$ şöyle ifade edilebilir [27]:

$$\begin{aligned} H(z) &\equiv H_a^{(0)}(z^{\hat{L}_0}) = H_a^{(1)}(z^{\hat{L}_1}) H_{Ma}^{(1)}(z^{\hat{L}_0}) + \left[z^{-M_1} - H_a^{(1)}(z^{\hat{L}_1}) \right] H_{Mc}^{(1)}(z^{\hat{L}_0}) \\ H_a^{(1)}(z^{\hat{L}_1}) &= H_a^{(2)}(z^{\hat{L}_2}) H_{Ma}^{(2)}(z^{\hat{L}_1}) + \left[z^{-M_2} - H_a^{(2)}(z^{\hat{L}_2}) \right] H_{Mc}^{(2)}(z^{\hat{L}_1}) \end{aligned} \quad (3.71a)$$

M M M

$$H_a^{(R-1)}(z^{\hat{L}_{R-1}}) = H_a^{(R)}(z^{\hat{L}_R}) H_{Ma}^{(R)}(z^{\hat{L}_{R-1}}) + \left[z^{-M_R} - H_a^{(R)}(z^{\hat{L}_R}) \right] H_{Mc}^{(R)}(z^{\hat{L}_{R-1}})$$

$$\hat{L}_0 = 1, \quad \hat{L}_r = \prod_{k=1}^r L_k, \quad r = 1, 2, K, R \quad (3.71b)$$

$$M_R = \hat{L}_R N_a^{(R)} / 2, \quad M_{R-r} = M_{R-r+1} + l_{R-r}, \quad r = 1, 2, K, R-1 \quad (3.71c)$$

$$l_{R-r} = \hat{L}_{R-r} \max \{ N_{Ma}^{(R-r+1)}, N_{Mc}^{(R-r+1)} \} / 2 \quad (3.71d)$$

3.5.2.2 Tasarım Parametrelerinin Belirlenmesi

$H(z)$ sonuç süzgecinin geçirme- ve durdurma-bandı sınırları, sırasıyla, ω_g ve ω_d ile, geçirme- ve durdurma-bandı dalgalanmaları ise, sırasıyla, δ_g ve δ_d ile gösterilsin. Problem, L_r 'leri ve alt-süzgeç derecelerini belirlemek ve de aşağıda verilen toplam çarpıcı sayısını (Π) en küçük yapmaktır.

$$\Pi = N_a^{(R)} / 2 + 1 + \left\lfloor (N_{Ma}^{(1)} + 2) / 2 \right\rfloor + \left\lfloor (N_{Mc}^{(1)} + 2) / 2 \right\rfloor + \sum_{r=2}^R \left[(N_{Ma}^{(r)} + N_{Mc}^{(r)}) / 2 + 2 \right] \quad (3.72)$$

Alt-süzgeç dereceleri (2.38) formülüyle kestirilebilir.

L_{r+1} 'ler seçildikten sonra, $r = 0, 1, K, R-1$ için her $H_a^{(r)}(z)$ süzgeci için tasarımın türü (A- veya B-durumu) denetlenir ve m_{r+1} , θ_{r+1} ve ϕ_{r+1} parametreleri aşağıdaki adımlar izlenerek belirlenir.

Adım 1: $r = 1$ ile başla.

Adım 2: Her L_r değeri için, $H_a^{(r-1)}(z)$ ya A- ya da B-durumu türünden bir tasarımıdır, her ikisi birden olamaz. $0 < \theta_r < \phi_r < \pi$ ve $0 < m_r < L_r$ şartlarını sağlayan θ_r , ϕ_r ve m_r parametrelerini, aşağıdaki denklemler yardımıyla belirle.

$$\left. \begin{aligned} \theta_r &= L_r \omega_g - 2m_r \pi \\ \phi_r &= L_r \omega_d - 2m_r \pi \\ m_r &= \lfloor L_r \omega_g / (2\pi) \rfloor \end{aligned} \right\} \quad \text{A-durumu} \quad (3.73a)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_r &= 2m_r \pi - L_r \omega_d \\ \phi_r &= 2m_r \pi - L_r \omega_g \\ m_r &= \lceil L_r \omega_d / (2\pi) \rceil \end{aligned} \right\} \quad \text{B-durumu} \quad (3.73b)$$

Adım 3: Eğer $r = R$ ise dur; aksi halde $r = r + 1$, $\omega_g = \theta_{r-1}$, $\omega_d = \phi_{r-1}$ yap ve Adım 2'ye git.

A-durumu tasarım için $H_{Ma}^{(r)}(z)$ ve $H_{Mc}^{(r)}(z)$ süzgeçlerinin geçirme- ve durdurma-bandı sınırları şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \omega_g^{(H_{Ma}^{(r)})} &= [2m_r \pi + \theta_r] / L_r, & \omega_d^{(H_{Ma}^{(r)})} &= [2(m_r + 1)\pi - \phi_r] / L_r \\ \omega_g^{(H_{Mc}^{(r)})} &= [2m_r \pi - \theta_r] / L_r, & \omega_d^{(H_{Mc}^{(r)})} &= [2m_r \pi + \phi_r] / L_r \end{aligned} \quad (3.74a)$$

B-durumu tasarım içinse:

$$\begin{aligned} \omega_g^{(H_{Ma}^{(r)})} &= [2(m_r - 1)\pi + \phi_r] / L_r, & \omega_d^{(H_{Ma}^{(r)})} &= [2m_r \pi - \theta_r] / L_r \\ \omega_g^{(H_{Mc}^{(r)})} &= [2m_r \pi - \phi_r] / L_r, & \omega_d^{(H_{Mc}^{(r)})} &= [2m_r \pi + \theta_r] / L_r \end{aligned} \quad (3.74b)$$

Ayrıca, $H_a^{(R)}(z)$ süzgecinin geçirme- ve durdurma-bandı sınırları, sırasıyla, $\omega = \theta_R$ ve $\omega = \phi_R$ 'de bulunur.

3.5.2.3 Alt-Süzgeçlerin Eşzamanlı Üretilmesi

Orijinal çok-katlı FRM tasarım tekniklerinde [27, 33] alt-süzgeçler ayrı ayrı üretilmektedir. Ancak, bütün alt-süzgeçlerin eşzamanlı üretilmesi için [29]'da önerilen ve Altbölüm 3.2'de de anlatılan iki-adımlı optimizasyon tekniği yardımıyla, aritmetik karmaşıklığın orijinal çok-katlı yöntemlere oranla daha da azaldığı gösterilmiştir.

Birinci adımda, alt-süzgeç dereceleri ve diğer tasarım parametreleri belirlenir ve ikinci adım için bir başlangıç çözümü üretilir. İkinci adımda bu çözüm, uygun seçilmiş ve düzensiz dağılmış frekans ızgara noktalarında, yinelemeli etkin bir serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon algoritması ile geliştirilir. Çok-katlı FRM yaklaşımı için eşzamanlı optimizasyon tekniği kısaca şöyle verilebilir:

Adım 1: Arzulanan süzgeç özellikleri (ω_g , ω_d , δ_g , δ_d) verilsin. Optimum kat sayısı (R) Altbölüm 3.5.2'de verilen algoritma yardımıyla bulunur. L_r 'ler ve alt-süzgeç parametreleri Altbölüm 3.5.2.2'ye göre belirlenir. Geçirme- ve durdurma-bandı ağırlıkları, sırasıyla, $1 / \delta_g$ ve $1 / \delta_d$ alınarak Remez algoritması yardımıyla, tasarlanması gereken alt-süzgeçler $[H_{Ma}^{(r)}(z), H_{Mc}^{(r)}(z) \text{ ve } H_a^{(R)}(z)]$ için başlangıç katsayıları $[h_{Ma}^{(r)}(n), h_{Mc}^{(r)}(n) \text{ ve } h_a^{(R)}(n)]$ üretilir.

Adım 2: Adım 1'de elde edilen başlangıç çözümü, etkin bir serbest ve doğrusal-olmayan optimizasyon tekniği kullanılarak iyileştirilir. İlk olarak, ayarlanır parametre vektörü (Φ) aşağıdaki formda düzenlenir.

$$\Phi = \left[h_{Ma}^{(1)}(0), K, h_{Ma}^{(1)} \left[N_{Ma}^{(1)} / 2 \right], h_{Mc}^{(1)}(0), K, h_{Mc}^{(1)} \left[N_{Mc}^{(1)} / 2 \right], K, \right. \\ \left. h_{Ma}^{(R)}(0), K, h_{Ma}^{(R)} \left(N_{Ma}^{(R)} / 2 \right), h_{Mc}^{(R)}(0), K, h_{Mc}^{(R)} \left(N_{Mc}^{(R)} / 2 \right), \right. \\ \left. h_a^{(R)}(0), K, h_a^{(R)} \left(N_a^{(R)} / 2 \right) \right] \quad (3.75)$$

Daha sonra, geçirme- ve durdurma-bandı bölgeleri yeteri kadar yoğun⁵ frekans noktalarına ayrıştırılır. Oluşan ayrık minimaks problem (3.36) ile verilir. Bu problem, Altbölüm 3.2.3'deki adımlar izlenerek çözülür.

⁵ $I = [3K \ 6] \cdot N_a^{(R)} \cdot \prod_{r=1}^R L_r$ seçiminin uygun olduğu önerilmiştir [29].

Örnek 3.6

Özellikleri Örnek 3.2’de verilen alçak-geçiren süzgeci şimdi de çok-katlı FRM yaklaşımıyla tasarlayalım.

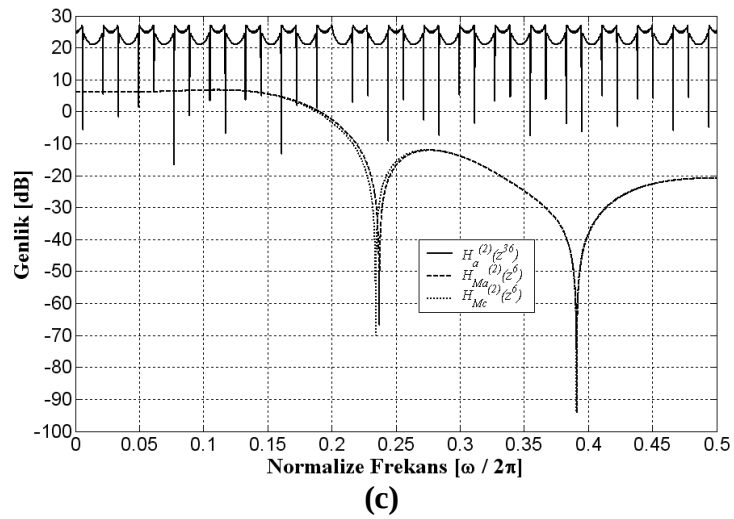
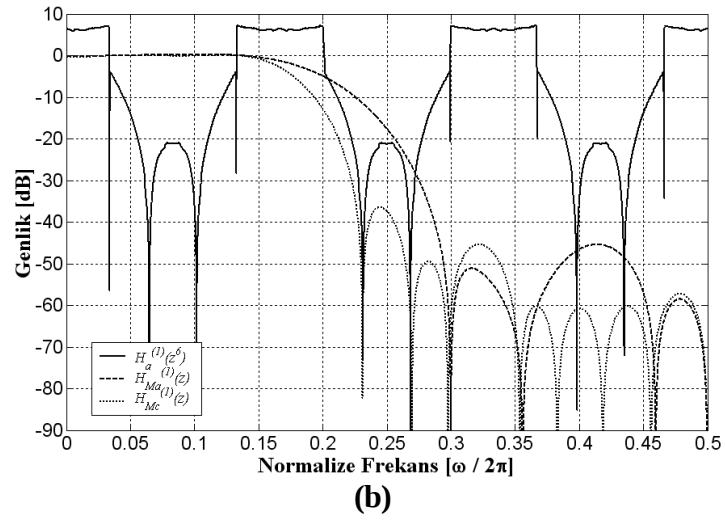
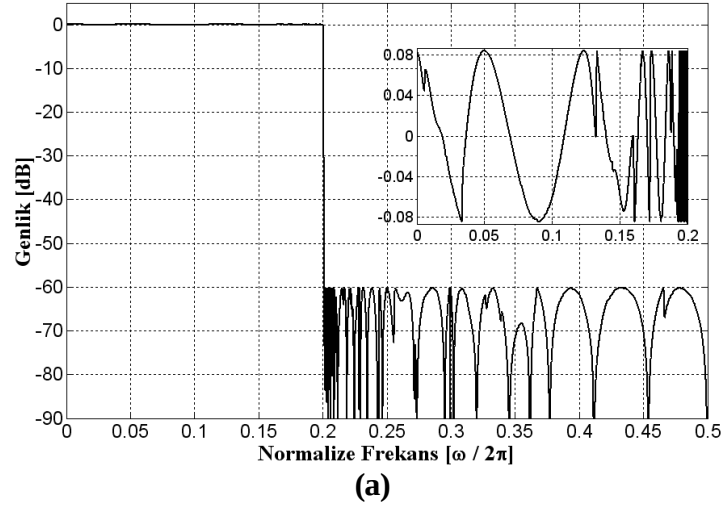
2-katlı FRM yaklaşımı için, sonuç süzgecinin aritmetik karmaşıklığı $L_1 = L_2 = 6$ ile minimum olur. Bu seçimler için, $H_a^{(0)}(z) \equiv H(z)$ ve $H_a^{(1)}(z)$ A-durumu tasarımlardır: $H_a^{(0)}(z)$ için $m_1 = 1$, $\theta_1 = 0.4\pi$ ve $\phi_1 = 0.412\pi$; $H_a^{(1)}(z)$ için $m_2 = 1$, $\theta_2 = 0.4\pi$ ve $\phi_2 = 0.472\pi$. Eşzamanlı optimizasyon tekniği kullanıldığında en iyi çözüm, $N_a^{(2)} = 70$, $N_{Ma}^{(2)} = 14$, $N_{Mc}^{(2)} = 22$, $N_{Ma}^{(1)} = 17$ ve $N_{Mc}^{(1)} = 21$ ile elde edilir. Gerekli olan çarpıcıların sayısı (3.72) denkleminde 76 ve toplayıcıların sayısı alt-süzgeç derecelerinin toplamından 144 olarak bulunur. Bu değerler, orijinal tek-katlı tasarımdaki değerlerin (168 ve 330) yaklaşık %45’ine eşittir. Aritmetik işlemlerdeki azalmanın bedeli, sonuç süzgecinin derecesinde yaklaşık %5’lik bir artışla (2541’den⁶ 2673’e) ödenir. 2-katlı tasarım için alt-süzgeç parametreleri Tablo 3.8’de özetlenir.

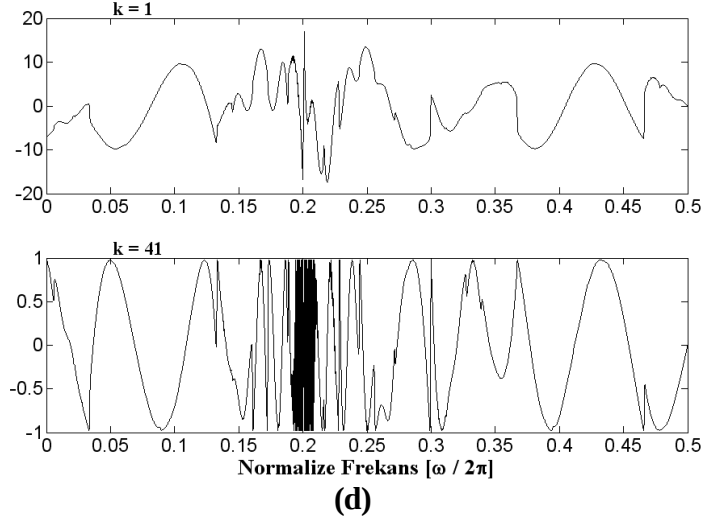
Tablo 3.8 Örnek 3.6’ya ilişkin alt-süzgeç parametreleri.

$H_a^{(1)}(z)$	$H_{Ma}^{(1)}(z)$	$H_{Mc}^{(1)}(z)$	$H_a^{(2)}(z)$	$H_{Ma}^{(2)}(z)$	$H_{Mc}^{(2)}(z)$
$\theta_1 = 0.4\pi$	$\omega_g^{(H_{Ma}^{(1)})} = 0.4\pi$	$\omega_g^{(H_{Mc}^{(1)})} = 0.267\pi$	$\theta_2 = 0.4\pi$	$\omega_g^{(H_{Ma}^{(2)})} = 0.4\pi$	$\omega_g^{(H_{Mc}^{(2)})} = 0.267\pi$
$\phi_1 = 0.412\pi$	$\omega_d^{(H_{Ma}^{(1)})} = 0.598\pi$	$\omega_d^{(H_{Mc}^{(1)})} = 0.402\pi$	$\phi_2 = 0.472\pi$	$\omega_d^{(H_{Ma}^{(2)})} = 0.588\pi$	$\omega_d^{(H_{Mc}^{(2)})} = 0.412\pi$
—	$N_{Ma}^{(1)} = 17$	$N_{Mc}^{(1)} = 21$	$N_a^{(2)} = 70$	$N_{Ma}^{(2)} = 14$	$N_{Mc}^{(2)} = 22$

$L_1 = L_2 = 6$ ve örnekleme sayısı $I = 3N_a^{(2)}L_1L_2 = 7560$ alınarak yapılan tasarım için, sonuç süzgecinin genlik cevabı, geçirme-bandı ayrıntıları ile birlikte, Şekil 3.15(a)’da gösterilir. Şekil 3.15(b), $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^6)$ için; Şekil 3.15(c) ise, $H_{Ma}^{(2)}(z^6)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^6)$ ve $H_a^{(2)}(z^{36})$ için genlik cevaplarını gösterir. Şekil 3.15(c)’de $H_{Ma}^{(2)}(z^6)$ ve $H_{Mc}^{(2)}(z^6)$ ’nın genlik cevaplarının benzer olması ilginçtir. Ayrıca, ilk ($k = 1$) ve son ($k = 41$) döngüdeki hata fonksiyonu, $E(\Phi, \omega)$, Şekil 3.15(d)’de gösterilir. Son döngüde oluşan hata fonksiyonunun $[-1, +1]$ sınırları içerisinde olduğuna dikkat ediniz.

⁶ Geleneksel doğru-form FIR süzgecin derecesidir.





Şekil 3.15 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^6)$ süzgeçlerinin genlik cevapları. (c) $H_{Ma}^{(2)}(z^6)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^6)$ ve $H_a^{(2)}(z^{36})$ süzgeçlerinin genlik cevapları. (d) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.

3-katlı⁷ bir tasarım için gerekli olan çarpıcıların sayısı, $L_1 = L_2 = L_3 = 4$ ile minimum olur. Bu seçimler için yapılan tasarımlar $[H_a^{(0)}(z), H_a^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(2)}(z)]$ B-durumu türündendir. Eşzamanlı optimizasyon tekniği ile en iyi çözüm, $N_a^{(3)} = 38$, $N_{Ma}^{(3)} = 6$, $N_{Mc}^{(3)} = 16$, $N_{Ma}^{(2)} = 8$, $N_{Mc}^{(2)} = 16$, $N_{Ma}^{(1)} = 11$ ve $N_{Mc}^{(1)} = 15$ ile elde edilir. Toplam çarpıcı ve toplayıcı sayısı, sırasıyla, 61 ve 110 olup orijinal tek-katlı tasarımla elde edilenlerin (168 ve 330) yaklaşık %36'sına eşittir ve geleneksel doğru-form tasarım için gerekenlerin (1271 ve 2541) %5'inden bile daha azdır. Etkin süzgeç derecesi ise 2767'dir ve doğru-form tasarımdan (2541) sadece %9 fazladır. 3-katlı FRM süzgeci için katlara ilişkin özellikler Tablo 3.9 ile verilir.

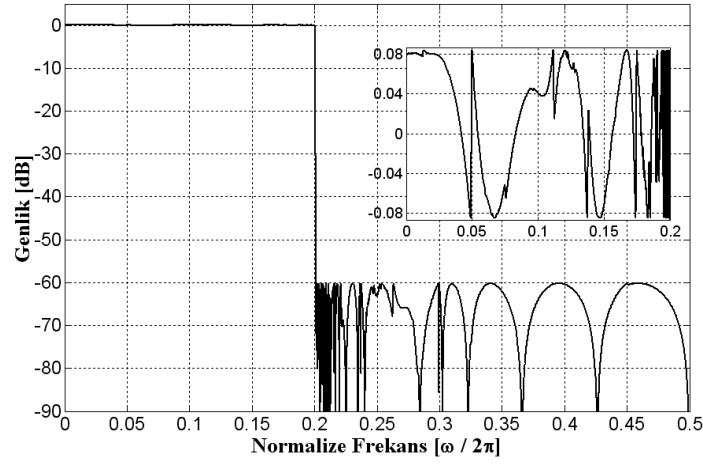
Tablo 3.9 3-katlı FRM süzgeci için her kata ait özellikler.

Süzgeç	r	L_r	Durum	m_r	θ_r	ϕ_r	$N_a^{(R)}$	$N_{Ma}^{(r)}$	$N_{Mc}^{(r)}$
$H_a^{(0)}(z)$	1	4	B	1	0.392π	0.4π	—	11	15
$H_a^{(1)}(z)$	2	4	B	1	0.4π	0.432π	—	8	16
$H_a^{(2)}(z)$	3	4	B	1	0.272π	0.4π	38	6	16

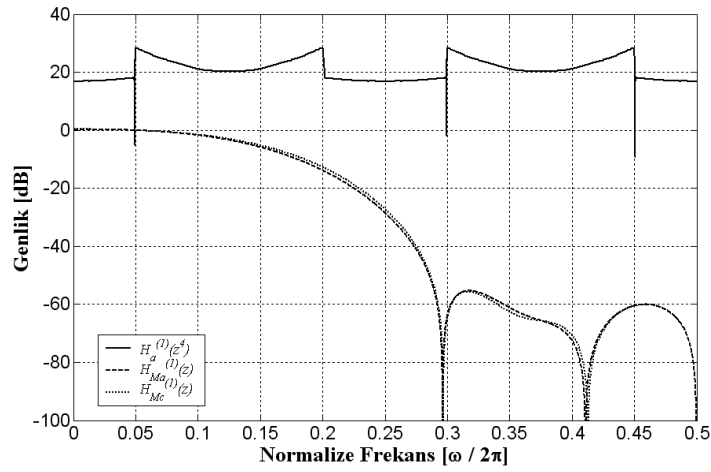
$L_1 = L_2 = L_3 = 4$ ve $I = 10^4$ alınarak yapılan 3-katlı optimum tasarım için, $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı, geçirme-bandı ayrıntıları ile birlikte, Şekil 3.16(a)'da

⁷ Optimum kat sayısı Altbölüm 3.5.2'deki algoritmadan $R = 3$ olarak bulunur.

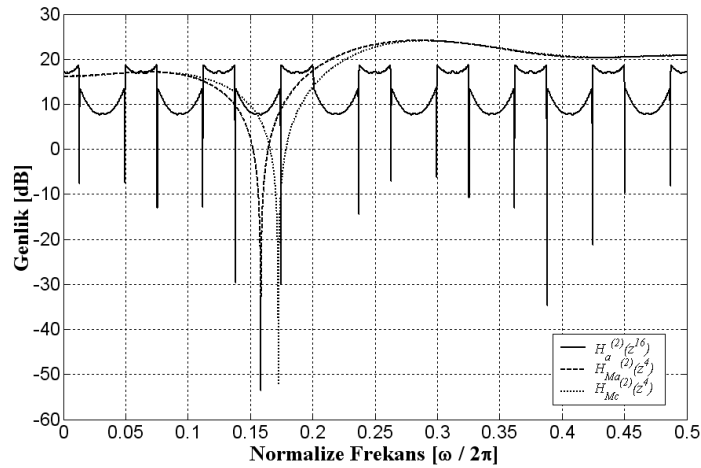
gösterilir. Şekil 3.16(b), $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^4)$ için; Şekil 3.16(c), $H_{Ma}^{(2)}(z^4)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^4)$ ve $H_a^{(2)}(z^{16})$ için; Şekil 3.16(d) ise, $H_{Ma}^{(3)}(z^{16})$, $H_{Mc}^{(3)}(z^{16})$ ve $H_a^{(3)}(z^{64})$ için genlik cevaplarını gösterir. Şekil 3.16(b)'de $H_{Ma}^{(1)}(z)$ ve $H_{Mc}^{(1)}(z)$ 'ye ait genlik cevaplarının benzerliği dikkat çekicidir. İlk ($k = 1$) ve son ($k = 11$) döngüdeki hata fonksiyonları Şekil 3.16(e)'de gösterilir.



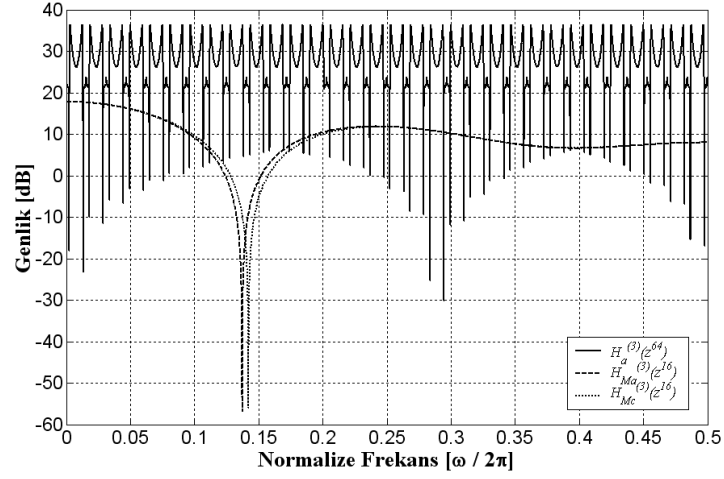
(a)



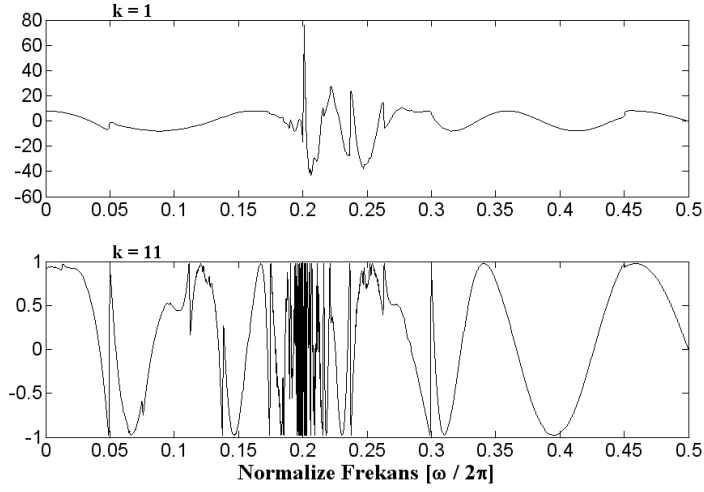
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 3.16 (a) $H(z)$ sonuç süzgecinin genlik cevabı ve geçirme-bandı ayrıntıları. (b) $H_{Ma}^{(1)}(z)$, $H_{Mc}^{(1)}(z)$ ve $H_a^{(1)}(z^4)$ süzgeçlerinin genlik cevapları. (c) $H_{Ma}^{(2)}(z^4)$, $H_{Mc}^{(2)}(z^4)$ ve $H_a^{(2)}(z^{16})$ süzgeçlerinin genlik cevapları. (d) $H_{Ma}^{(3)}(z^{16})$, $H_{Mc}^{(3)}(z^{16})$ ve $H_a^{(3)}(z^{64})$ süzgeçlerinin genlik cevapları. (e) İlk ve son döngüde oluşan hata fonksiyonları.

4. SONUÇLAR

Doğrusal-fazlı FIR sayısal süzgeçler üç tip donanım bileşeniyle gerçekleştirirler. Bunlar, çarpma işlemini gerçekleştiren çarpıcı, toplama işlemini gerçekleştiren toplayıcı ve giriş işaret dizisinin geçmiş değerlerini tutan hafıza ünitesidir. ASIC ve VLSI gibi modern teknolojilerin kullanıldığı gerçeklemelerde, çarpıcı ve toplayıcı elemanlar silikon yongalarına gömülürler. Silikon alanının genişliği, kullanılacak çarpıcı ve toplayıcıların sayısı ile ilintilidir. Bu alan ne kadar dar olursa, güç tüketimi o kadar az ve veri işleme hızı da o kadar yüksek olur. Kullanılacak hafıza biriminin boyutu ise, etkin süzgeç derecesiyle doğru orantılıdır.

FRM tekniği, doğrusal-fazlı keskin FIR sayısal süzgeçlerin aritmetik karmaşıklıklarını, yani çarpıcı ve toplayıcı sayılarını, ciddi ölçülerde azalttığı için, düşük-güçlü ve yüksek-hızlı gerçeklemeleri mümkün kılar. Ancak, bu azalmaların bedeli etkin süzgeç derecesindeki artışla ödendiği için, gerekli olan hafıza ünitesi boyutunun artması da kaçınılmazdır. Fakat bu artış az olması dolayısıyla önemsizdir. FRM tekniğiyle yapılan süzgeç tasarımlarında, iyilik ölçütü olarak genellikle çarpıcı sayısı alınır.

Bölüm 3'deki örneklerde incelenen üç ayrı alçak-geçiren süzgeç için, farklı FRM yöntemleriyle yapılmış tasarımlara ilişkin donanım karşılaştırmaları Tablo 4.1, 4.2 ve 4.3 ile verilir. Tablolardan görüldüğü gibi, tüm FRM yöntemleri çarpıcı sayısı açısından geleneksel yöntemle ciddi üstünlük sağlamaktadır. Tablo 4.2 ve 4.3'te tek-katlı FRM teknikleri karşılaştırıldığında, minimum çarpıcı sayısının önerilen teknik¹ ile elde edildiği görülür. Şüphesiz, bu sayı çok-katlı tekniklerle daha da azalmaktadır. Gelecek çalışmalar, eşzamanlı optimizasyon tekniğinin geliştirilmiş çok-katlı FRM yapılarına uyarlanması şeklinde olabilir.

¹ Genelleştirilmiş tek-katlı FRM süzgecinin eşzamanlı optimizasyon tekniği ile üretilmesi.

Tablo 4.1 Donanım Karşılaştırması – 1.
$$\omega_g = 0.6\pi, \omega_d = 0.61\pi, \delta_g = \pm 0.1 \text{ dB}, \delta_d = -40 \text{ dB}$$

Yöntem	L	N_{Ma}	N_{Mc}	N_a	Π	Σ	N_{etkin}
Geleneksel Doğru-Form	–	–	–	–	192	382	382
Orijinal Tek-Katlı FRM	9	40	32	44	61	116	436
Tek-Katlı FRM $\oplus$ EOT ²	9	26	18	44	47	88	422

Tablo 4.2 Donanım Karşılaştırması – 2.
$$\omega_g = 0.2\pi, \omega_d = 0.205\pi, \delta_g = \pm 0.1 \text{ dB}, \delta_d = -40 \text{ dB}$$

Yöntem	L_A	L_M	N_E	N_{Ma}	N_{Mc}	N_A	Π	Σ	N_{etkin}
Geleneksel Doğru-Form	–	–	–	–	–	–	381	760	760
Orijinal Tek-Katlı FRM	12	1	–	41	55	66	83	162	847
Genelleştirilmiş Tek-Katlı FRM [30]	17	3	22	28	22	48	64	120	922
Önerilen Teknik	17	3	12	23	7	44	46	86	829

Tablo 4.3 Donanım Karşılaştırması – 3.
$$\omega_g = 0.4\pi, \omega_d = 0.402\pi, \delta_g = 0.01, \delta_d = 0.001$$

Yöntem	R	L_r	L_M	N_E	$N_{Ma}^{(3)}$	$N_{Mc}^{(3)}$	$N_{Ma}^{(2)}$	$N_{Mc}^{(2)}$	$N_{Ma}^{(1)}$	$N_{Mc}^{(1)}$	$N_a^{(R)}$	Π	Σ	N_{etkin}
Geleneksel Doğru-Form	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1271	2541	2541
Orijinal Tek-Katlı FRM	1	16	1	–	–	–	–	–	70	98	162	168	330	2690
Tek-Katlı FRM $\oplus$ EOT		16	1	–	–	–	–	–	47	57	160	134	264	2617
Tek-Katlı FRM $\oplus$ EOT		21	1	–	–	–	–	–	55	77	122	129	254	2639
Salt-Gecikmeli Yaklaşım		21	1	55	–	–	–	–	0	46	122	114	223	2617
Önerilen Teknik		26	2	16	–	–	–	–	20	64	100	104	200	2744
İki-Katlı FRM $\oplus$ EOT	2	6	1	–	–	–	14	22	17	21	70	76	144	2673
Üç-Katlı FRM $\oplus$ EOT	3	4	1	–	6	16	8	16	11	15	38	61	110	2767

² EOT: Eşzamanlı Optimizasyon Tekniği.

KAYNAKLAR

- [1] **Mitra, S. K. and Kaiser, J. F.**, 1993. Handbook for Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.
- [2] **Kayran, A. H.**, 1990. Sayısal İşaret İşleme, İ.T.Ü. Matbaası, İstanbul.
- [3] **Rabiner, L. R., McClellan, J. H. and Parks, T. W.**, 1975. FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation, *Proc. IEEE*, **63**, 595–610.
- [4] **McClellan, J. H. and Parks, T. W.**, 1973. A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear-Phase Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, **CT-20**, 697–701.
- [5] **Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W.**, 1975. Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [6] **Diniz, P. S. R., da Silva, E. A. B. and Netto, S. L.**, 2002. Digital Signal Processing: System Analysis and Design, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [7] **Parks, T. W. and McClellan, J. H.**, 1972. Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, **CT-19**, 189–194.
- [8] **McClellan, J. H., Parks, T. W. and Rabiner, L. R.**, 1973. A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, **AU-21**, 506–526.
- [9] **Rabiner, L. R.**, 1972. Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, **AU-20**, 280–288.
- [10] **Lim, Y. C.**, 1983. Efficient Special Purpose Linear Programming for FIR Filter Design, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **ASSP-31**, 963–968.
- [11] **Kaiser, J. F.**, 1974. Nonrecursive Digital Filter Design Using I_0 -sinh Window Function, *Proc. 1974 IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, San Francisco, April 1974, 20–23.
- [12] **Herrmann, O., Rabiner, L. R. and Chan, D. S. K.**, 1973. Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, **52**, 769–799.

- [13] **Dantzig, G.**, 1963. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [14] **Hamming, R. W.**, 1977. Digital Filters, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [15] **Land, A. and Powell, S.**, 1973. Fortran Codes for Mathematical Programming, Wiley, New York.
- [16] **MOSEK ApS**, 1999-2002. The MOSEK Optimization Tools User's Manual and Reference, Version 3.2 (Revision 8), <http://www.mosek.com>, Denmark.
- [17] **Neuvo, Y., Cheng-Yu, D. and Mitra, S. K.**, 1984. Interpolated Finite Impulse Response Filters, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **ASSP-32**, 563–570.
- [18] **Jing, Z. and Fam, A. T.**, 1984. A New Structure for Narrow Transition Band, Lowpass Digital Filter Design, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **ASSP-32**, 362–370.
- [19] **Lim, Y. C.**, 1986. Frequency-Response Masking Approach for the Synthesis of Sharp Linear Phase Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-33**, 357–364.
- [20] **Lim, Y. C.**, 1986. A Digital Filter Bank for Digital Audio Systems, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-33**, 848–849.
- [21] **Yu-liang, Z., Wei-ling, W. and Bao-yu, T.**, 2003. A Novel Sharp-Cutoff FIR Filter Design Technique and Its Application in Software Radio, *Proceedings of ICCT 2003*, **2**, April 9-11, 1821–1825.
- [22] **Foo, S. W. and Lee, E. W. T.**, 2003. Application of FRM Filters for Musical Notes Separation, *IEEE Int. Conf. Neural Networks and Signal Processing*, Nanjing, China, December 14-17, 731–734.
- [23] **Saramäki, T. and Fam, A. T.**, 1988. Subfilter Approach for Designing Efficient FIR Filters, *Proc. 1988 Int. Symp. Circuits Syst.*, 2903–2915.
- [24] **Yu, J. and Lian, Y.**, 2004. Frequency-Response Masking Based Filters With the Even-Length Bandedge Shaping Filter, *Proc. 2004 Int. Symp. Circuits Syst.*, **5**, 536–539.
- [25] **Saramäki, T. and Johansson, H.**, 2001. Optimization of FIR Filters Using the Frequency-Response Masking Approach, *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, **2**, Sydney, Australia, May 2001, 177–180.
- [26] **Saramäki, T. and Yli-Kaakinen, J.**, 2002. Optimization of Frequency-Response-Masking Based FIR Filters with Reduced Complexity, *Proc. IEEE Int. Conf. Circuits Syst.*, **3**, Scottsdale, Arizona, 225–228.
- [27] **Saramäki, T. and Lim, Y. C.**, 1999. Use of the Remez Algorithm for Designing FIR Filters Utilizing the Frequency-Response Masking

Approach, *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, **3**, Orlando, FL, May 1999, 449–455.

- [28] **Dutta, S. R. K. and Vidyasagar, M.**, 1977. New Algorithms for Constrained Minimax Optimization, *Math. Programming*, **13**, 140–155.
- [29] **Yli-Kaakinen, J., Saramäki, T. and Yu, Y. J.**, 2004. An Efficient Algorithm for the Optimization of FIR Filters Synthesized Using the Multistage Frequency-Response Masking Approach, *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, **5**, Vancouver, Canada, May 2004, 540–543.
- [30] **Yang, R., Liu, B. and Lim, Y. C.**, 1988. A New Structure of Sharp Transition FIR Filters Using Frequency-Response Masking, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **CAS-35**, 955–966.
- [31] **Lian, Y.**, 2003. Complexity Reduction for FRM-Based FIR Filters Using the Prefilter-Equalizer Technique, *Circuits Systems Signal Processing*, **22**, 137–155.
- [32] **Lim, Y. C. and Lian, Y.**, 1994. Frequency-Response Masking Approach for Digital Filter Design: Complexity Reduction via Masking Filter Factorization, *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, **41**, 518–525.
- [33] **Lim, Y. C. and Lian, Y.**, 1993. The Optimum Design of One- and Two-Dimensional FIR Filters Using the Frequency Response Masking Technique, *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, **40**, 88–95.

EK A

Amaç fonksiyonunun ayarlanır parametre vektörüne göre gradyanları aşağıdaki denklemler yardımıyla hesaplanabilir:

$$\nabla_{\Phi} E(\Phi, \omega) = W(\omega) \cdot \nabla_{\Phi} H(\Phi, \omega) \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla_{\Phi} H(\Phi, \omega) = \begin{bmatrix} \nabla_{h_a} H_a(L\omega) \cdot [H_{Ma}(\omega) - H_{Mc}(\omega)] \\ \nabla_{h_{Ma}} H_{Ma}(\omega) \cdot H_a(L\omega) \\ \nabla_{h_{Mc}} H_{Mc}(\omega) \cdot [1 - H_a(L\omega)] \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla_{h_a} H_a(L\omega) = \begin{bmatrix} \nabla_{h_a(0)} H_a(L\omega) \\ \mathbf{M} \\ \nabla_{h_a(N_a/2)} H_a(L\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3a})$$

$$\nabla_{h_a(n)} H_a(L\omega) = \begin{cases} 2 \cos[(N_a/2 - n)L\omega], & 0 \leq n < N_a/2 \\ 1, & n = N_a/2 \end{cases} \quad (\text{A.3b})$$

$K = Ma, Mc$ için,

$$\nabla_{h_K} H_K(\omega) = \begin{bmatrix} \nabla_{h_K(0)} H_K(\omega) \\ \mathbf{M} \\ \nabla_{h_K \lfloor N_K/2 \rfloor} H_K(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4a})$$

N_K çift ise,

$$\nabla_{h_K(n)} H_K(\omega) = \begin{cases} 2 \cos[(N_K/2 - n)\omega], & 0 \leq n < N_K/2 \\ 1, & n = N_K/2 \end{cases} \quad (\text{A.4b})$$

N_K tek ise,

$$\nabla_{h_K(n)} H_K(\omega) = 2 \cos[(N_K/2 - n)\omega], \quad 0 \leq n \leq (N_K - 1)/2 \quad (\text{A.4c})$$

ÖZGEÇMİŞ

Murat KAPAR, 12 Ekim 1979'da Bolu'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini bu şehirde tamamladıktan sonra, 1997 yılında İstanbul Üniversitesi Elektronik Mühendisliği bölümünde lisans eğitime başladı. İlk yıl İngilizce hazırlık programına katıldı. 2002 yılında ikincilik diploması almasının hemen ardından, İstanbul Teknik Üniversitesi Telekomünikasyon Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitime başladı. Eğitimi devam ederken, Şubat-2004'de özel bir şirketin Elektronik Arge departmanında göreve başladı. Yaklaşık 1,5 yıllık çalışma süresi boyunca pek çok projede aktif görev aldı. Ağustos-2005 itibariyle yüksek lisans tezini tamamlamak üzere şirketteki görevinden ayrıldı.