İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FREKANS CEVABI MASKELEME (FRM) TEKNİĞİ KULLANARAK YÜKSEK-HIZLI, DÜŞÜK-GÜÇ HARCAYAN KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Cercis Özgür SOLMAZ

Anabilim Dalı : Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
Programı : Telekomünikasyon Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN

HAZİRAN 2005

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında, bana değerli yardımları ve tavsiyeleri için danışmanım Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN'a, uzaktan da olsa bana yardım etmeye çalışan Prof. Dr. Y. C. LIM ve Prof. Dr. Lian Yong'a çok teşekkür ederim.
Ayrıca, değerli ip-uçları ve destekleri için oda arkadaşım Y. Müh. Özgür ORUÇ'a, tavsiyeleri ve yardımları için değerli arkadaşlarım Y. Müh. Aydın KIZILKAYA ve Dr. Ender M. EKŞİOĞLU'na, tüm destek ve iyi niyetleri için değerli arkadaşlarım Y. Müh. Suat AKSU ve Y. Müh Süleyman BAYKUT'a, çok sevdiğim, bir an önce aramıza geri gelmesini beklediğim değerli arkadaşım Y. Müh. Hacı İLHAN'a, ilgileri, sabırları ve yardımları için değerli ev arkadaşlarım Müh. Serkan ERÖKSÜZ'e ve Müh. Kaan BİNGÖL'e ve bana tüm çalışmam boyunca hep yardımcı ve destek olan sevgili arkadaşım Nilgün CURA'a çok teşekkür ederim.

Son olarak, hayatım boyunca beni cesaretlendikleri, sürekli destek oldukları, kendime güvenmemi sağladıkları ve mutlu olmayı öğrettikleri için annem Ayten SOLMAZ, babam Emin SOLMAZ ve kardeşim Özdal SOLMAZ'a tüm sevgilerimi sunarım.

Haziran, 2005 Cercis Özgür Solmaz

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

FIR	Sonlu Dürtü Yanıtlı
IIR	Sonsuz Dürtü Yanıtlı
FRM	Frekans Cevabı Maskeleme
MPR	Parks-McClellan
IFIR	Ara-değerlenmiş Sonlu Dürtü Yanıtlı
RRS	Yinelemeli İlerleyen Toplam
IFIR FRM	Ara-değerlenmiş Sonlu Dürtü Yanıtlı Frekans Cevabı Maskeleme

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

ω	Frekans değişkeni (radyan)
Δ	Geçiş bandı genişliği
∟	Faz
δ	Dalgalanma
A	Zayıflama
τ_g	Grup gecikmesi
f_{norm}	Normalize frekans
f_s	Örnekleme frekansı
X	Frekans bandı
ϵ	Hata fonksiyonunun tepe genliği
ε	Sapma
θ	Model süzgecin iletim bandı sınırı
ϕ	Model süzgecin durdurma bandı sınırı
Φ	Hermann süzgeç uzunluğu kestirim değişkeni
N_0	Remez tasarımlı süzgeç uzunluğu
α	Simetri belirleyici reel değişken
L_0	Çarpıcı sayısını
Λ	Maskeleme süzgecinin geçiş bandı genişliği

FREKANS CEVABI MASKELEME (FRM) TEKNİĞİ KULLANARAK YÜKSEK-HIZLI, DÜŞÜK-GÜÇ HARCAYAN KESKİN FIR SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

ÖZET

Sayısal süzgeç tasarımı, birçok mühendislik alanında önemli yapı taşlarından biridir. İşaret işleme, haberleşme ve kontrol uygulamaları gibi kullanım alanlarına sahiptir. Sayısal süzgeç olarak, genellikle kararlılıkları ve doğrusal fazlı karakterleri nedeniyle FIR süzgeçler tercih edilir. Ancak, keskin bir süzgeç üretmek istendiğinde, süzgeç uzunluğu artar. Bu durumda, büyük süzgeç uzunlukları gerektiren gerçeklenmeler için büyük işlemsel kaynaklar, büyük gerçekleme gereksinimleri ve yüksek güç gereklidir. Bu problemin çözümü için en uygun ve etkili yöntem, Frekans Cevabı Maskele (FRM) tekniğidir. FRM tekniğiyle, uygulamaya göre seçilebilen band genişlikli keskin süzgeçler, süzgeç karmaşıklığı minimize edilerek elde edilebilir.

FRM tekniğinin temel mantığı, birçok kısa alt-süzgeç kullanarak keskin bir FIR süzgeç oluşturmaktır. FRM tekniği, iki yapı bloğundan oluşur. Birinci yapı bloğunda, ara-değerlenmiş band sınırı şekillendiren süzgeç ve bu süzgecin tamamlayıcısı kullanılarak istenilen band genişliği ve keskin geçiş bandı elde edilir. İkinci kısımda ise, band sınırı şekillendiren süzgeçten gelen istenmeyen periyodik yüksek frekans bileşenleri iki maskeleme süzgeci kullanılarak yok edilir. Bu iki yapı bloğunun peşi sıra kullanılmasıyla FRM çıkış süzgeci elde edilir.

Band sınırı şekillendiren süzgeç ara-değerlendiğinden seyrek katsayılı bir FIR süzgeçtir. Bu tür seyrek katsayılı süzgeçler, çarpıcı ve toplayıcı sayısında büyük kazanç sağlamaları yanında, güç tüketimini de önemli oranlarda azaltırlar.

Günümüze kadar, FRM tekniği üzerine kurulmuş bir çok yeni yapı oluşturulmuştur. FRM yaklaşımı üzerinde yapılan bazı değişikliklerle, optimum FRM, IFIR FRM, çift-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç tabanlı FRM ve ön-süzgeçle-me+dengeleyici yapısı ile oluşturulan FRM teknikleri doğmuştur. Yeni yapıların bazıları kullanılarak hesaplama karmaşıklığı % 97-98 oranında azaltılmıştır. Ayrıca,

IFIR FRM tasarımı algoritması üzerinde ufak bir değişiklik yapılarak, hesaplama karmaşıklığı daha da azaltılabilir.

FRM tekniğinin kullanım alanları zamanla artmaktadır ve modern süzgeç tasarımlarında, özellikle düşük-güç uygulamaları için günümüzde tercih edilen ve etkili bir tekniktir.

HIGH-SPEED & LOW-POWER SHARP FIR DIGITAL FILTER DESING BY USING FREQUENCY RESPONSE MASKING (FRM) TECHNIQUE

SUMMARY

Digital filter design is one of the important studies in many engineering applications. Digital filters are commonly used in digital signal processing, communication and control systems. Due to their stability and linear phase, Finite Impulse Response (FIR) filters are mostly prefered in these systems. One of the most important problems is the design of a digital filter with sharp cutoff edges. This kind of filters have excessively long impulse responses. The implementation of a long FIR filter requires great computational burden and high-power. Frequency Response Masking (FRM) technique, one of the most computationally efficient techniques for synthesizing arbitrary bandwidth sharp FIR filters, can be used to overcome these problems.

A long FIR digital filter is considered as a combination of several short filters in FRM technique. There are two main block in FRM structure. In first block, user-specified passband and transition bandwidth are obtained by a bandedge shaping filter and its complement. However, in this block, unwanted periodical frequency components occurs at high frequencies. In second block, high frequnecy components are removed by two masking filters. The desired long-sharp filter is the output of these two blocks, but now it is short and also sharp.

The band-edge shaping filter is interpolated in first block. That’s why, it has sparse coefficients. Such a sparse coefficient filter reduces the number of multipliers and adders. Thus, it requires low-power consumption to implement a desired sharp FIR filter.

There have been developed many modified versions of FRM technique up to recent years. Optimum FRM, Interpolated FIR (IFIR) FRM, even-length band-edge shaping filter based FRM and prefilter+equalizer bazed FRM structures are some of the modified versions of original FRM technique. These modifications yield additional

savings in the number of arithmetic operations, mutlipliers and adders. By using these techniques, in some cases, the reduction of computational complexity can be reduced 97-98 %. Also, more additional reduction on the computational complexity can be achieved by a simple control on the algorithm of IFIR FRM technique.

The usage of digital filters designed by FRM technique is rising day by day and in modern filter design, especially in low-power applications, these filters are being very attractive due to their high efficiency.

1. GİRİŞ

Sonlu Dürtü Yanıtlı (FIR) süzgeçler, yüksek-kaliteli sayısal ses sistemleri, sayısal televizyonlar, konuşma algılama, cep telefonları gibi birçok sayısal işaret işleme uygulamasında kullanılmaktadır. FIR süzgeçlerin en önemli dezavantajı karmaşıklıklarıdır. Bu problem, keskin FIR süzgeçler için mutlaka çözülmesi gereken bir problemdir. Doğrusal fazlı keskin FIR sayısal süzgeçler tasarlamak için kullanılabilecek en etkili yöntem, hesaplama karmaşıklığını, çarpıcı ve toplayıcı sayısını çok büyük oranda azaltan Frekans Cevabı Maskeleme (FRM) tekniğidir. FRM tekniğinin en büyük avantajı, istenen genişlikte iletim ve durdurma bandı sınırlarına sahip süzgeç üretebilmesidir. Hesaplama karmaşıklığındaki büyük azalma, süzgecin etkin uzunluğunun ve tüm süzgecin derecesinin, geleneksel FIR süzgeç gerçeklemesinden az miktarda büyük olmasına neden olur. Bu çalışmada, orijinal FRM tekniği esas alınarak, geliştirilmiş FRM yapıları da incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, genel olarak doğrusal-fazlı FIR süzgeçler üzerinde durulmuştur. FIR süzgeçleri tasarlamak için kullanılan (Parks-McClellan) MPR ve reméz algoritmaları özetlenmiştir. Son olarak da süzgeç uygulamalarında kullanılacak geleneksel doğrusal-fazlı alçak geçiren süzgeçlerin uzunluğunun kestirimi anlatılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, etkin süzgeçlere bir giriş yapılmıştır. Etkin süzgeçlerin tasarlanması için bir yol açan iki yöntem olan ön-süzgeçleme+dengeleyici yapısıyla ara-değerlenmiş (IFIR) süzgeçler, bilgisayarlı gerçeklemeler ile ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümü, tamamıyla FRM tekniği üzerine kurulu olan bölümdür. Bu bölümün ilk kısmında, öncelikle orijinal FRM yapısının teorisi üzerinde durulmuş ardından da bilgisayarlı gerçeklemeler sunulmuştur. İkinci kısmında ise, FRM yapısının nasıl optimum hale getirilebileceği ve bir *K*-katlı optimum yapının, arzulanan bir süzgeci tasarlayacak kullanıcıya FRM hakkında bir öngörü sağlayabileceği anlatılmıştır. Bilgisayarlı gerçeklemelerle optimum tasarım pekiştirilmiştir. Son kısımda ise, yeni bir yaklaşım ile oluşturulan IFIR FRM yapısı ele alınmıştır. 1-katlı ve 2-katlı IFIR FRM yapısı için tasarım denklemeleri anlatılmış ve ayrıntılı olarak bilgisayarlı gerçeklemeler ile desteklenmiştir. Daha sonra IFIR FRM yapısı üzerinde küçük ama etkili bir değişiklik yapılarak daha kullanışlı bir yapı elde edilebileceği üzerinde durulmuştur. Bu yapı için elde edilen farklı bir tasarım da son olarak bilgisayarlı gerçeklemeleriyle birlikte sunulmuştur.

Tezin beşinci bölümünde, FRM tekniğinin durağan bir yapısı olmadığının gösterilmesi ve okuyucuya yeni görüş açıları kazandırma amaçlanmıştır. Bu nedenle son yıllarda tasarlanmış, çift-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç üzerine kurulu FRM yapısı ile ön-süzgeçleme+dengeleyici yapısına kavuşturulmuş band sınırı şekillendiren süzgeç ile tasarlanan FRM yapıları, ayrıntılarına girilmeden ve bilgisayarlı gerçeklemeleri yapılmadan anlatılmıştır.

Tezin altıncı bölümünde, FRM tekniğinin neden tercih edilmesi gerektiği, geliştirilmiş yeni FRM yapılarının FRM tekniğine kattıkları ve bu yeni yapılar üzerinde düşünülebilecek ufak bir değişiklik ile nasıl bir kazanç elde edilebileceği anlatılmıştır.

2. SAYISAL SÜZGEÇLER

Sayısal süzgeçler ses işleme, veri haberleşmesi, görüntü ve video işleme, sonar, radar, sismik araştırmaları ile petrol bulma çalışmaları gibi bir çok alanda geniş bir kullanım alanına sahiptir [1]. Sayısal süzgeçler, doğrusal ve doğrusal olmayan, zamanla-değişen ve zamanla-değişmeyen süzgeçler olarak gruplanırlar. Doğrusal zamanla-değişmeyen sayısal süzgeçler, teori ve tasarım teknikleri sistematik olarak tamamlandığından [2], analiz edilmeleri, tasarlanmaları ve uygulamalarının kolay olduğundan en çok kullanılan süzgeç türüdür. Bu tezde süzgeç dendiğinde doğrusal, zamanla-değişmeyen süzgeçler anlaşılacaktır.

Zamanla değişmeyen sayısal süzgeçler, zaman uzayında dürtü cevabı, $h(n)$ ve frekans uzayında frekans cevabı, $H(\omega)$ (ω, gerçek değerli frekans değişkeni (radyan)) ile benzersiz ve tek olarak tanımlanabilir. Ayrıca $H(\omega)$, $h(n)$ dizisinin Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü (DTFT)'dür. Doğrusal zamanla-değişmeyen sayısal süzgeçlerin iki temel türü vardır: Sadece sonlu sayıda örnek için, dürtü cevabı $h(n)$ dizisinin sıfırdan farklı olduğu Sonlu Dürtü Yanıtlı (FIR) süzgeçler ve sıfırdan farklı örneklerin sonsuz sayıda olduğu dürtü cevabı $h(n)$'e sahip Sonsuz Dürtü Yanıtlı (IIR) süzgeçler. FIR süzgeçler için, $h(n)$ dizisinin örnekleri, süzgeç katsayıları olarak tanımlanır. IIR süzgeçler için ise, süzgeç katsayıları fark denklemleri içinde geri besleme terimlerini de içerir.

Birçok sayısal işaret işleme uygulamalarında, farklı frekans bileşenlerini ileten ya da bastıran frekans-seçici süzgeçlerin tasarlanması arzulanır. Bu durumda, arzulanan süzgeç tasarım özellikleri, frekans uzayında arzulanan frekans cevabı $D(f)$ ile belirlenir. $D(f)$, arzulana genlik cevabı $|D(f)|$ ve arzulanan faz cevabı $\angle D(f)$ olan karmaşık değerli bir dizidir.

En önemli problemlerden biri, keskin kesim frekans sınırlarına sahip (dar geçiş bandlı) süzgeçler tasarlamaktır. Ancak, süzgecin ideal keskin sınırları matematiksel olarak süreksizliklere karşılık gelir ve uygulamada gerçeklenemez. Bu nedenle, süzgeç tasarım problemi, arzulanan tasarım özellikleri ve kısıtlamalara göre belirlenmiş ideal genlik ve faz yanıtlarına en yakın frekans cevabı $H(f)$'e sahip, düşük dereceli ama uygulanabilir süzgeçler bulmaktır.

Sayısal süzgeç tasarımı, genel olarak üç aşamada gerçekleşir.

1. Verilen tasarım özelliklerini kullanarak arzulanan genlik ve faz yanıtlarını, tasarlanacak süzgeç tipini (FIR ve ya IIR), süzgeç derecesini, hata toleransı veya kriterini belirlemek.

2. Birinci aşamada belirlenen özellikleri, matematiksel hata kriterlerine göre, bu özelliklere en yakın frekans cevabına sahip, uygulanabilir FIR veya IIR süzgeçleri için gerekli özelliklere yakınsamak.

3. Uygulama alanına göre uygun sayısal teknoloji kullanarak süzgeci gerçeklemek.

İkinci aşama, matematiksel optimizasyon ve yaklaşım yöntemleri ile gerçekleştirilirken, 1. aşama uygulamadan bağımsız ve ayrıntıları kullanıcı tarafından belirlenir. Günümüzde, ikinci aşama genellikle karmaşık sayısal optimizasyon yöntemlerini uygulayan bilgisayar programları ile gerçekleştirilir.

2.1 Süzgeç Özellikleri

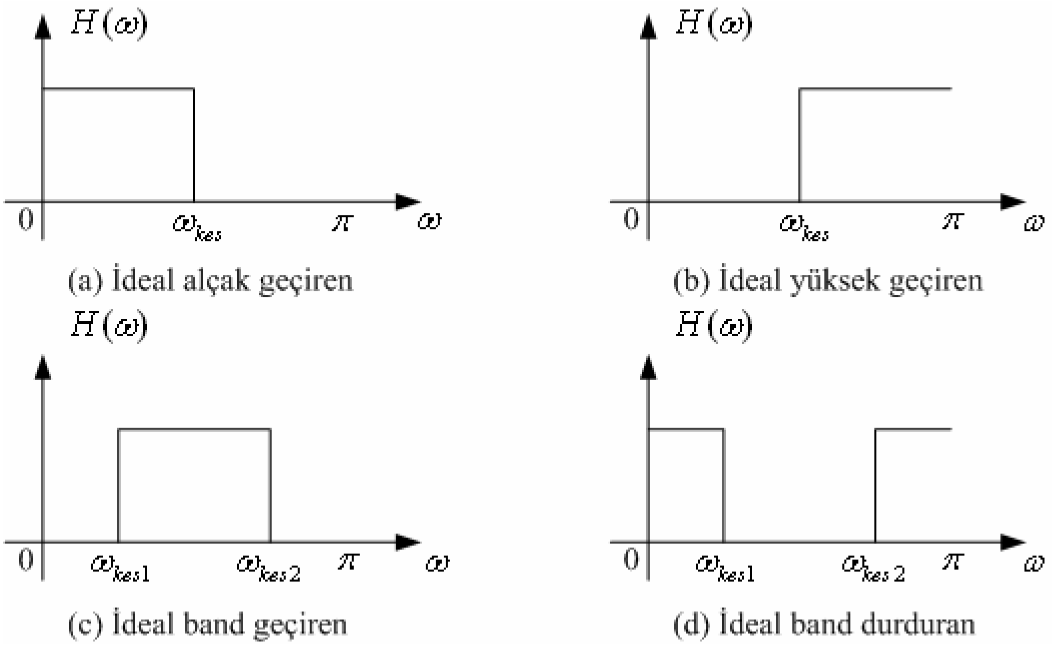
Gerçeklenebilir bir süzgeç, bazı performans kriterlerinin optimize edilmesi ile bulunur. Süzgeç derecesini azaltmak (IIR), süzgeç uzunluğunu azaltmak (FIR) ve iletim ve durdurma bandı dalgalanmalarını azaltarak geçiş bandı genişliğini daraltmak optimize yollarından bazılarıdır.

Sayısal bir süzgecin frekans cevabı, frekans değişkeni ω ile 2π periyodu ile periyodik ise, tasarım özellikleri sadece bir periyot için $[-\pi, \pi]$ frekans aralığında belirlenir.

En basit süzgeç olan sıfır fazlı ideal alçak-geçiren sayısal süzgecin frekans cevabı,

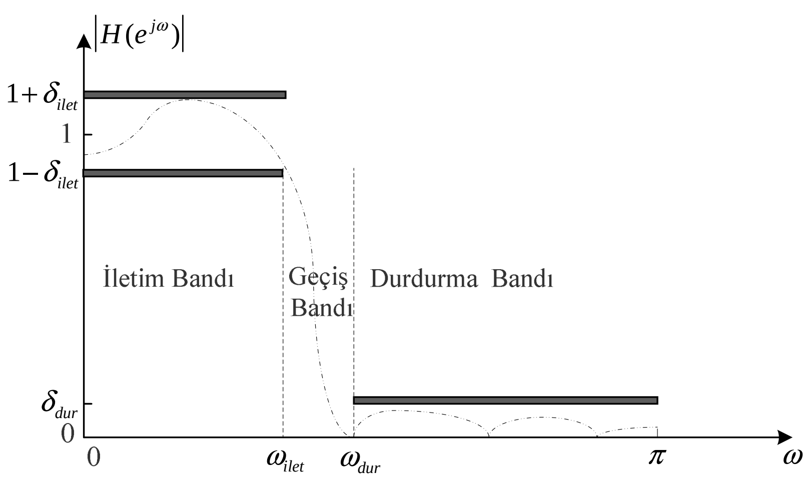
$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{kes} \\ 0, & \omega_{kes} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{2.1}$$

burada, ω_{kes}, kesim frekansıdır. Bu durumda, frekans cevabı, $D(\omega)$, gerçek değerli ve süzgecin genlik cevabına karşı düşer. Bazı genel süzgeç yapılarının frekans yanıtları Şekil 2.1 ile verilmiştir.



Şekil 2.1 Genel ideal sayısal süzgeç tipleri

Bu ideal süzgeçlerin, keskin kesim sınırlarına (süreksizlikler) sahip frekans cevapları nedeniyle doğrudan tasarlanmaları mümkün değildir. Bu nedenle, bu süzgeçlerin gerçeklenebilir süzgeçlere yakınsamaları gerekir. Bu durumda, keskin kesim sınırı yerini bir geçiş bandına bırakır. Geçiş bandındaki frekans cevabı, iletim bandından durdurma bandına kadar değişkenlik gösterir. Alçak geçiren tipik bir süzgeç için bu yapı Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2 İdeal olmayan alçak geçiren bir süzgeç

ω_{ilet} iletim bandı kesim frekansı, ω_{dur} durdurma bandı kesim frekansı, $(\omega_{ilet},\omega_{dur})$ aralığı, genişliği $\Delta\omega_{geç}=\omega_{dur}-\omega_{ilet}$ olan geçiş bandıdır.

Genel tasarım yöntemlerinde, geçiş bandı için tasarım özellikleri verilmez. Bu nedenle, geçiş bandına "ilgilenilmeyen band" (don't care band) adı verilir. δ_{ilet}, iletim bandı dalgalanması ve izin verilen iletim bandı hatasıdır. δ_{dur} ise, durdurma bandı dalgalanması ve izin verilen durdurma bandı hatasıdır. Süzgeç tasarımında bir sonraki adım, tasarım özelliklerine en yakın frekans cevabı $H(\omega)$'e sahip gerçeklenebilir bir FIR veya IIR süzgeç bulmaktır. Daha sonra, iki tasarım kriteri daha belirlenmelidir. Biri genlik cevabı, diğeri de (iletim bandı) faz cevabıdır. İdeal bir faz cevabı, sabit eğimli bir fonksiyonuna sahiptir.

$$\angle D(\omega) = -M\omega \tag{2.2}$$

M parametresi, süzgecin arzulanan gecikmesine eşittir [1].

Genellikle, genlik yanıtı için izin verilen dalgalanmalar logaritmik (dB cinsinden) olarak izin verilen en büyük iletim bandı dalgalanması ve en küçük durdurma bandı zayıflaması cinsinden ifade edilir.

$$A_{ilet} = 20\log_{10}\left(\frac{1+\delta_{ilet}}{1-\delta_{ilet}}\right)\,\mathrm{dB} \tag{2.3a}$$

$$A_{dur} = -20\log_{10}\delta_{dur}\,\mathrm{dB} \tag{2.3b}$$

Bu değerler pozitiftir. Bir başka iletim bandı ölçüm kriteri ise, logaritmik olarak belirtilen tepe sapmasıdır. İletim ve durdurma bandı tepe sapmaları sırasıyla, $A_{ilet} = 20\log_{10}(\delta_{ilet})$ ve $A_{dur} = 20\log_{10}(\delta_{dur})$ 'dır. Bu değerler ise negatiftir.

Eğer süzgecin örnekleme frekansı f_s ise, ω açısal frekansının f cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\omega = 2\pi f / f_s \tag{2.4}$$

Aynı zamanda f, normalize edilerek de ifade edilebilir.

$$f_{norm} = f / f_s \tag{2.5}$$

Bazı uygulamalarda, giriş işaretinin şeklini korumak gereklidir. Bu ancak süzgecin faz cevabının, [0, ω_{ilet}] iletim bandında ve [ω_{dur}, π], durdurma bandında doğrusal olmasıyla başarılabilir.

$$\phi(\omega) = \tau_0\omega + \tau_1 \tag{2.6}$$

burada, τ_0 ve τ_1 istenildiği gibi seçilebilir. Süzgeç tasarımlarında genelde, faz cevabı yerine bir kriter olarak grup gecikme cevabı,

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d \arg H(e^{j\omega})}{d\omega} \tag{2.7}$$

ya da faz gecikme cevabı,

$$\tau_f(\omega) = -\frac{\arg H(e^{j\omega})}{\omega} \tag{2.8}$$

kullanılır. Bu cevaplar faz cevabına göre daha basit ve anlaşılması daha kolaydır.

Süzgeç tasarımlarında, iletim ve durdurma bandları için arzulanan genlik cevabı, $D(\omega)$ yanında, bir de bulunduğu banda bağlı olan, izin verilen en büyük hata terimi de belirtilir. Genel olarak, hata terimi şu şekilde ifade edilir.

$$D_{ilet}(\omega) - e_{ilet}(\omega) \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le D_{ilet}(\omega) - e_{ilet}(\omega) \qquad , \omega \in X_{ilet} \tag{2.9a}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le e_{dur}(\omega) \qquad , \omega \in X_{dur} \tag{2.9b}$$

burada, X_{ilet} ve X_{dur} süzgecin iletim ve durdurma bandlarını temsil etmektedir. $e_{ilet}(\omega)$ ve $e_{dur}(\omega)$ sırasıyla arzulanan iletim bandı cevabı $D_{ilet}(\omega)$'den en büyük sapma ve arzulanan durdurma bandında sıfırdan en büyük sapmadır. (2.9) ile verilen özellikler, iletim ve durdurma bandı ağırlık fonksiyonları $W_{ilet}(\omega)$ ve $W_{dur}(\omega)$ cinsinden de ifade edilebilir.

$$-\delta_{ilet} \le W_{ilet}(\omega).[\left|H(e^{j\omega})\right| - D_{ilet}(\omega)] \le \delta_{ilet} \qquad , \omega \in X_{ilet} \tag{2.10a}$$

$$W_{dur}(\omega).\left|H(e^{j\omega})\right| \le \delta_{dur} \qquad , \omega \in X_{dur} \tag{2.10b}$$

$e_{ilet}(\omega)$ ile δ_{ilet} ve $W_{ilet}(\omega)$ arasındaki ilişki şöyle verilebilir.

$e_{ilet}(\omega) = \delta_{ilet} / W_{ilet}(\omega)$ (2.11a)

Aynı şekilde, $e_{dur}(\omega)$ ile δ_{dur} ve $W_{dur}(\omega)$ arasındaki ilişki de şöyle verilir.

$E_{dur}(\omega) = \delta_{dur} / W_{dur}(\omega)$ (2.11b)

(2.10) denklemlerinin, δ_{ilet} ve δ_{dur} cinsinden ifade edilmeleri birçok süzgeç tasarım tekniği için daha yararlı olacaktır.

$|E(\omega)| \leq \epsilon \quad ,\omega \in X = X_{ilet} \cup X_{dur}$ (2.12a)

burada,

$E(\omega) = W(\omega).[|H(e^{j\omega})| - D(\omega)]$ (2.12b)

$\epsilon = \delta_{ilet}$ (2.12c)

$$D(\omega) = \begin{cases} D_{ilet}(\omega) & ,\omega \in X_{ilet} \\ 0 & ,\omega \in X_{dur} \end{cases} \tag{2.12d}$$

$$W(\omega) = \begin{cases} W_{ilet}(\omega) & ,\omega \in X_{ilet} \\ \dfrac{\delta_{ilet}}{\delta_{dur}} W_{dur}(\omega) & ,\omega \in X_{dur} \end{cases} \tag{2.12e}$$

$D(\omega)$ ve $W(\omega)$, sırasıyla arzulanan fonksiyon ve ağırlık fonksiyonudur. $E(\omega)$ ise ağırlıklandırılmış hata fonksiyonudur. Eğer bu fonksiyonun en büyük mutlak değeri ϵ değerinden küçük ya da ϵ değerine eşit ise, $|H(e^{j\omega})|$'nin verilen süzgeç özelliklerini sağlaması garanti altına alınır.

Örneğin, band geçiren bir süzgeç için süzgeç özellikleri şu şekilde verilebilir.

$1 - \delta_{ilet} \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_{ilet} \quad ,\omega \in [\omega_{ilet1}, \omega_{ilet2}]$ (2.13a)

$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_{dur} \quad ,\omega \in [0, \omega_{dur1}] \cup [\omega_{dur2}, \pi]$ (2.13b)

Sayısal süzgeç tasarımında birçok farklı hata ölçütleri vardır. Bunlardan en önemli üçü Minimax hata tasarımları, en-küçük karelerle hata tasarımları ve en büyük düzlüğe sahip frekans cevabı yaklaşımlarıdır.

2.2 FIR Sayısal Süzgeçler

Sayısal işaret işleme uygulamalarının çoğunda, FIR süzgeçler IIR süzgeçlere göre çok daha fazla tercih edilir. IIR süzgeçlere göre, FIR süzgeçlerin temel avantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. Doğrusal fazlı FIR süzgeçler kolayca tasarlanabilir.
2. FIR süzgeçleri uygulamak için, hesaplama karmaşıklığını azaltan etkin gerçeklemeler vardır.
3. FIR süzgeçler yinelemeli olarak gerçeklenmediklerinden doğal olarak durağandır. Sonlu-kelime uzunluklu sayısal sistemler için osilasyon yapmazlar.
4. Farklı özelliklere sahip FIR süzgeçler için mükemmel tasarım yöntemleri vardır.
5. Bir FIR süzgeçte, yuvarlatma hatalarından dolayı oluşan çıkış gürültüsü genellikle çok küçüktür. Süzgeç katsayılarındaki değişmelere olan sistem duyarlılığı da çok düşüktür.

Geleneksel FIR süzgeç tasarlamanın temel dezavantajı, özellikle dar geçiş bandlı tasarımlarda, çok fazla aritmetik işlem ve çarpıcı, toplayıcı ve gecikme elemanları gibi donanım bileşenlerine ihtiyaç duyulmasıdır. Bir FIR süzgecin geçiş bandı daraltıldığında, aritmetik işlem sayısı ve de işlemsel karmaşıklık, geçiş bandı genişliğiyle ters orantılı olarak artar. Bu, dar geçiş bandlı FIR süzgeçlerin tasarlanmasını çok maliyetli hale getirir. Maliyeti azaltmak için geliştirilmiş yöntemler de tasarlanmıştır. (bkz. Bölüm 3 ve Bölüm 4)

2.2.1 Doğrusal-Fazlı FIR Süzgeçler

N+1 uzunluklu nedensel bir FIR süzgecin dürtü yanıtı {h(n)} olsun. Bu süzgecin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h[n] z^{-n} \tag{2.14a}$$

Buna karşılık frekans cevabı ise,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N} h[n]e^{-jn\omega} \tag{2.14b}$$

Burada N, süzgecin derecesidir. Çoğu FIR süzgeç için fazın doğrusal olması istenir. Bu ancak süzgecin frekans cevabının aşağıdaki formda olması ile mümkündür.

$$H(e^{j\omega}) = \bar{H}(\omega)e^{-j\phi(\omega)} \tag{2.15a}$$

burada,

$$\phi(\omega) = \alpha\omega + \beta \tag{2.15b}$$

ve $\bar{H}(\omega)$, ω değişkenine bağlı çift ve gerçek bir fonksiyondur. Yukarıdaki fonksiyonun faz ve genliği sırasıyla,

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\bar{H}(\omega)\right| \tag{2.16a}$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \alpha\omega + \beta & ,\bar{H}(\omega) \geq 0 \\ \alpha\omega + \beta - \pi & ,\bar{H}(\omega) < 0 \end{cases} \tag{2.16b}$$

$\bar{H}(\omega)$, süzgecin genlik cevabıdır. Bazı yazarlar tarafından mutlak genlik cevabı $|H(e^{j\omega})|$ ’den ayırt etmek için sıfır-fazlı frekans cevabı diye de adlandırılır. Gösterilimi kolaylaştırmak amacıyla, $H(\omega)$ sıfır-fazlı frekans yanıtını göstersin. H‘nin z, $e^{j\omega}$ ve ω değişkenlerine bağlı gösterilimi, sırasıyla, transfer fonksiyonunu, frekans cevabını ve sıfır-fazlı frekans cevabını göstermektedir. $H(\omega)$ ve $|H(e^{j\omega})|$ ile $\phi(\omega)$ ve $\arg H(e^{j\omega})$ arasındaki ilişki Şekil 2.3 ile gösterilmiştir. Süzgecin sıfır-fazlı frekans cevabı negatif ya da pozitif değerler alabilir, fakat mutlak genlik yanıtı negatif olamaz.

Faz doğrusallığını gösteren dört süzgeç tipi şöyledir.

1.Tip. N çift ve $h[N-n] = h[n]$, tüm n değerleri için,

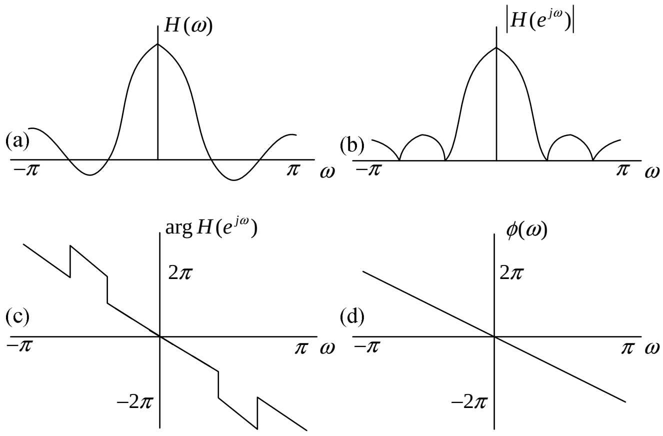
2.Tip. N tek ve $h[N-n] = h[n]$, tüm n değerleri için,

3.Tip. N çift ve $h[N-n] = -h[n]$, tüm n değerleri için,

4.Tip. N tek ve $h[N-n] = -h[n]$, tüm n değerleri için,

Bu dört tipin hepsinde, transfer fonksiyonu şöyle ifade edilir [3].

$$H(z) = F(z).G(z) \tag{2.17}$$



Şekil 2.3 $H(\omega)$ ve $|H(e^{j\omega})|$ ile $\phi(\omega)$ ve $\arg H(e^{j\omega})$ arasındaki ilişki

$F(z)$ aşağıdaki yapıya sahiptir.

$$F(z)=\begin{cases}1 & ,1.Tip\\ [1+z^{-1}]/2 & ,2.Tip\\ [1-z^{-2}]/2 & ,3.Tip\\ [1-z^{-1}]/2 & ,4.Tip\end{cases} \tag{2.18a}$$

ve

$$G(z)=\sum_{n=0}^{2M} g[n]z^{-n} \tag{2.18b}$$

$g(2M-n)=g[n]$, tüm n değerleri için (2.18c)

$$M=\begin{cases}N/2 & ,1.Tip\\ (N-1)/2 & ,2.Tip\\ (N-2)/2 & ,3.Tip\\ (N-1)/2 & ,4.Tip\end{cases} \tag{2.18d}$$

(2.18c) eşitliğinde verilen simetri özelliği kullanılarak $G(z)$ tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned}G(z)=z^{-M}[g[M]+g[M-1](z+z^{-1})\\ +g[M-2](z^2+z^{-2})+....+g[0](z^M+z^{-M})]\end{aligned} \tag{2.19}$$

$z=e^{j\omega}$ değişikliği yapılarak $G(z)$'nin frekans cevabı $G(e^{j\omega})$ yazılırsa,

$$G(z) = e^{-jM\omega}[g[M] + g[M-1](2\cos\omega) \\ + g[M-2](2\cos 2\omega) + ... + g[0](M\cos M\omega)] \tag{2.20}$$

Benzer şekilde uygun işlemler yapılarak, $F(z)$'nin frekans cevabı şu şekilde yazılabilir.

$$F(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ,1.Tip \\ e^{-j\omega/2}\cos(\omega/2) & ,2.Tip \\ e^{-j(\omega-\pi/2)}\sin(\omega) & ,3.Tip \\ e^{-j(\omega/2-\pi/2)}\sin(\omega/2) & ,4.Tip \end{cases} \tag{2.21}$$

Üstte elde edilen sonuçlar birleştirilerek, sıfır-fazlı frekans cevabı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H(\omega) = F(\omega).G(\omega) \tag{2.22}$$

burada,

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & ,1.Tip \\ \cos(\omega/2) & ,2.Tip \\ \sin(\omega) & ,3.Tip \\ \sin(\omega/2) & ,4.Tip \end{cases} \tag{2.23}$$

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{M} a[n]\cos n\omega \tag{2.24a}$$

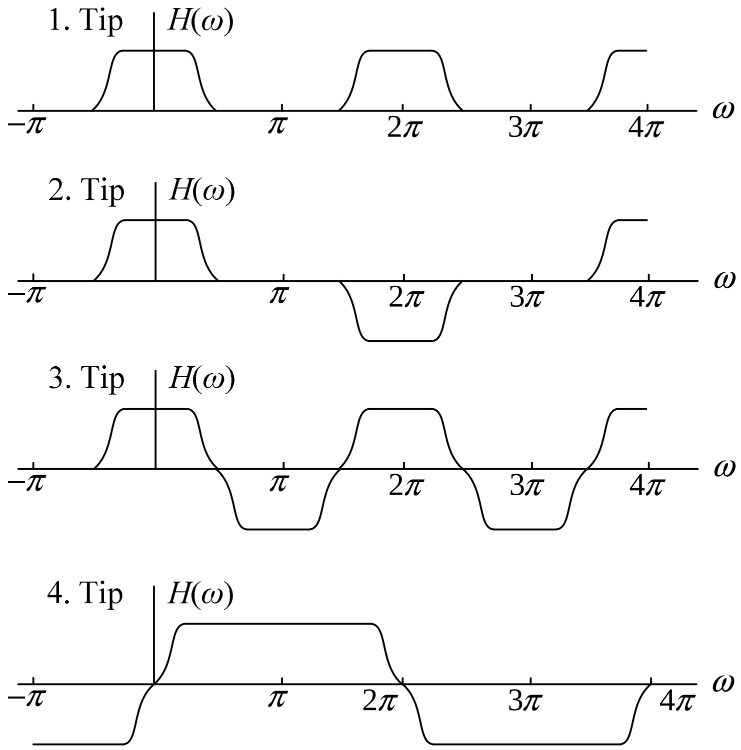
$$a[n] = \begin{cases} g[M] & ,n = 0 \text{ için} \\ 2g[M-n] & ,n \neq 0 \text{ için} \end{cases} \tag{2.24b}$$

Faz terimleri ise dört tip için şu şekilde oluşur:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -N\omega/2 & ,\text{1.Tip ve 2. Tip} \\ -N\omega/2 + \pi/2 & ,\text{3.Tip ve 4. Tip} \end{cases} \tag{2.24c}$$

1. tip süzgeçler için, $H(\omega)$ $\omega = 0$ ve $\omega = \pi$ frekanslarında çift ve periyodu 2π'dir. 2. tip süzgeçler için, sabit terim $F(\omega) = \cos(\omega/2)$, $H(\omega)$ için $\omega = \pi$ frekansında sıfır üretir ve bu nokta civarında $H(\omega)$ frekans cevabı tektir. Periyodu ise 4π'dir. Benzer

şekilde, 4. tip süzgeçlerde, ω = 0'da sıfır üretir. Bu nedenle, ω = 0 civarında $H(\omega)$ tektir. Periyodu da yine 4π'dir. 3. tip süzgeçler için ise, sabit terim $\omega = 0$ ve $\omega = \pi$ frekanslarında $H(\omega) = 0$ ve $H(\omega)$ bu noktalarda tektir. Periyodu 2π'dir. Tüm süzgeç tipleri için sıfır-fazlı frekans cevapları Şekil 2.4'te verilmiştir.



Şekil 2.4 Dört tip doğrusal-fazlı FIR süzgecin sıfır-fazlı frekans cevabı örneği

2.3 FIR Süzgeçlerin Minimax Yaklaşımıyla Tasarlanması

FIR süzgeçlerin IIR süzgeçlere göre avantajlarından biri, farklı genliklerdeki FIR süzgeçlerin tasarlanabilmesi için minimax yaklaşımıyla her zaman etkin bir yöntemin bulunmasıdır. IIR süzgeçler için ise, farklı genlikte süzgeç tasarlama, çok zaman harcatan ve en iyi çözüme yakınsamanın her zaman garanti olmadığı bir süreçtir.

2.3.1 Reméz Algoritması

Doğrusal-fazlı FIR süzgeçlerin, en küçük süzgeç derecesiyle tasarlanması için en uygun yöntem Reméz algoritmasıdır. Bu algoritmayı uygulamak için kullanılan orijinal algoritma Park ve McClellan tarafından ortaya koyulan ve kendi adları ile bilinen Parks-McClellan (MPR) Algoritmasıdır [4]. Reméz algoritması daha sonra

Parks, McClellan ve Rabiner tarafından geliştirilmiştir. Parks-McClellan algoritmasını gerçekleyen bir bilgisayar programı McClellan tarafından 1973 yılında yazılmıştır. Bu program alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren ve band durduran süzgeçler ile Hilbert dönüştürücü ve sayısal fark alıcılar için optimum tasarımlar üretir. Bu bölümde daha çok Parks, McClellan ve Rabiner'in orijinal FIR süzgeç tasarımı programı üzerinde yoğunlaşılmıştır.

2.3.1.1 Optimum Çözümün Eldesi

Reméz algoritması aşağıdaki fonksiyona ait süzgeç katsayıları, $a[n]$ 'i bulmak için en güçlü algoritmadır.

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{M} a[n] \cos n\omega \tag{2.25}$$

Bulunan $a[n]$ katsayıları ağırlıklandırılmış hata fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki tüm X frekans bandında tepe genlik değerini minimize eder.

$$E(\omega) = \bar{W}(\omega)[G(\omega) - \bar{D}(\omega)] \tag{2.26}$$

Bu hatanın tepe genlik değeri şöyle gösterilir.

$$\epsilon = \max_{\omega \in X} |E(\omega)| \tag{2.27}$$

$\bar{D}(\omega)$, X içinde sürekli olmalıdır. $\bar{W}(\omega)$ ise pozitif olmalıdır. Bu algoritma dört doğrusal-fazlı süzgeç tipi için de kullanılabilir. (2.17) denklemi bu durum için tekrar yazılırsa,

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & ,1.Tip \\ \cos(\omega/2) & ,2.Tip \\ \sin(\omega) & ,3.Tip \\ \sin(\omega/2) & ,4.Tip \end{cases} \qquad M = \begin{cases} N/2 & ,1.Tip \\ (N-1)/2 & ,2.Tip \\ (N-2)/2 & ,3.Tip \\ (N-1)/2 & ,4.Tip \end{cases} \tag{2.28}$$

$H(\omega)$ için arzulanan fonksiyon $D(\omega)$ ve ağırlıklandırma fonksiyonu $W(\omega)$ ise, (2.26) denklemindeki formdaki hata fonksiyonu aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$E(\omega) = W(\omega)\left[H(\omega) - D(\omega)\right] = W(\omega)\left[F(\omega)G(\omega) - D(\omega)\right]$$
$$= W(\omega)F(\omega)\left[G(\omega) - D(\omega)/F(\omega)\right] = \bar{W}(\omega)\left[G(\omega) - \bar{D}(\omega)\right] \quad (2.29a)$$

burada,

$$\bar{W}(\omega) = F(\omega)W(\omega), \quad \bar{D}(\omega) = D(\omega)/F(\omega) \quad (2.29b)$$

Reméz algoritması aşağıdaki alternasyon teoremi üzerine kurularak yapılandırılıştır.

Alternasyon Teoremi : $G(\omega)$, (2.25) eşitliği formunda olsun. (2.27) formunda verilen ϵ hatasını X kümesi içinde minimize eden benzersiz-en iyi çözümün $G(\omega)$ olması için gerek ve yeter şart, en az M + 2 noktanın, ω_1, ω_2, ... ω_{M+1}, ω_{M+2} var olmasıdır. Şöyleki,

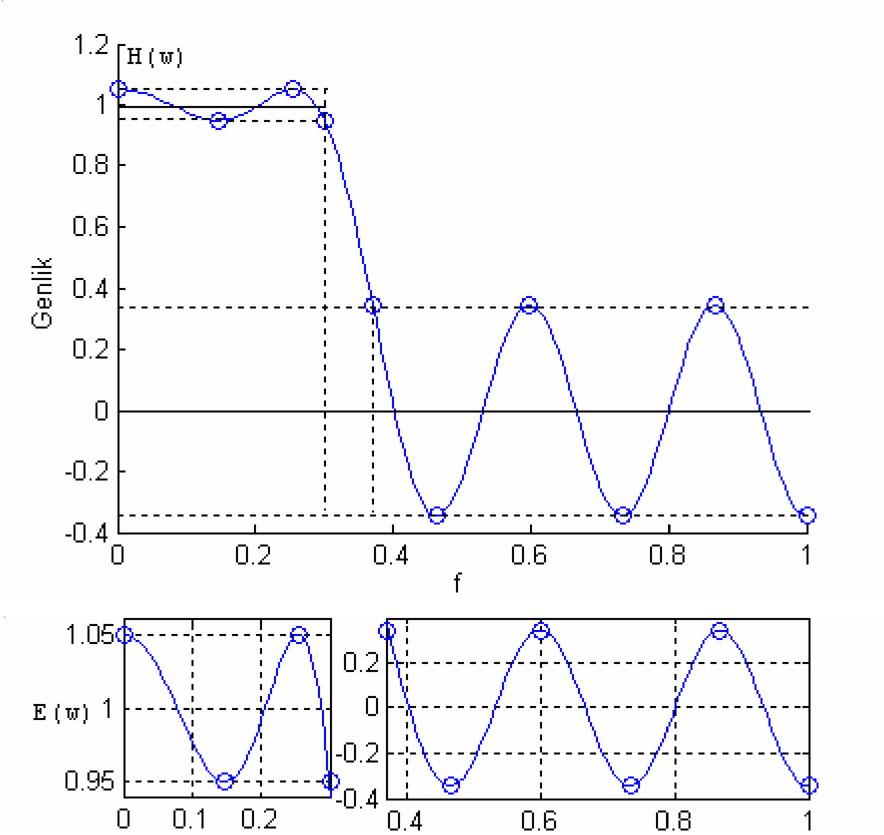
$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < \omega_{M+1} < \omega_{M+2} \quad (2.30)$$

$$E(\omega_{i+1}) = -E(\omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, M+1 \quad (2.31)$$

$$|E(\omega_i)| = \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, M+2 \quad (2.32)$$

Bir başka deyişle, optimum çözüm ağılıklandırılmış hata fonksiyonu $E(\omega)$ için, en az M+2 ardışık noktada, ± ϵ sonucunu verir. Şekil 2.5'te, N = 16 dereceli 1. tip optimum alçak geçiren bir süzgecin frekans cevabı ve buna karşılık gelen hata fonksiyonu verilmiştir. Bu durumda X kümesi geçirme bandı [0, ω_p] ve durdurma bandı [ω_s, π] aralıklarından oluşmaktadır. ω_i frekansları hata fonksiyonu $E(e^{j\omega})$'nin tepelerine karşı düşmektedir. Bu frekanslarda, $H(e^{j\omega})$, hata toleransı içinde kalarak alternasyon teoremini sağlar. Verilen örnekte $M = N / 2 = 8$ 'dir. Bu nedenle $G(\omega)$ dokuz bilinmeyen, a[0], a[1], a[2],.......... a[8] içerir. M+2 = 10 nokta olması için bir nokta daha gereklidir. Bu nedenle teoreme göre, bir çözümüm optimum çözüm olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. İletim ve durdurma bandı dalgalanmalarının birbirine olan bağıl ağırlığı k ise, iletim bandındaki değeri 1 ± ϵ, durdurma bandındaki değeri ± ϵ / k olan ve M + 2 alternasyon içeren bir $H(\omega)$ çözümü vardır. Bu çözüm, benzersiz-optimum çözümdür.

Alternasyon teoreminde, arzulanan eşit dalgalanmalı hata davranışı gösteren süzgeç tasarımında çeşitli yöntemler literatürde bulunmaktadır. Bunların arasında en başarılı ve etkili olanı, bilgisayar yazılımı da olan Reméz değişim algoritmasıdır. Tez boyunca, tüm süzgeç tasarımları, remez değişim algoritmasının gerçeklenmesini sağlayan MATLAB komutu "remez" ile başarılmıştır.



Şekil 2.5 Optimum 1. Tip, $2M$ = 16 dereceli alçak geçiren süzgecin sıfır-fazlı frekans yanıtı ve hata fonksiyonu

2.3.2 Optimum FIR Süzgeçlerin Özellikleri

Alçak geçiren bir süzgecin iletim bandı sınırı ω_{ilet}, durdurma bandı sınırı ω_{dur}, iletim bandı dalgalanması δ_{ilet} ve durdurma bandı bastırması δ_{dur} verildiğinde istenen özellikleri sağlayacak gerekli minumum süzgeç uzunluğu N bulunmalıdır. Chebyshev polinomları ile eşit durdurma bandı bastırması üreten çözüm dışında, minumum süzgeç uzunluğu N ile ω_{ilet}, ω_{dur}, δ_{ilet} ve δ_{dur} arasında analitik bir ilişki yoktur. Ancak, N değerini tahmin etmek için, Hermann tarafından 1973 yılında, deney verileri ile elde edilmiş çok etkili bir süzgeç uzunluğu tahmin formülü kullanılabilir [5].

$$N \approx \frac{D_\infty(\delta_{ilet},\delta_{dur}) - F(\delta_{ilet},\delta_{dur})[(\omega_{dur}-\omega_{ilet})/(2\pi)]^2}{(\omega_{dur}-\omega_{ilet})/(2\pi)} \tag{2.33a}$$

burada,

$$D_{\infty}(\delta_{ilet},\delta_{dur}) = [0.005309\ (\log_{10}\delta_{ilet})^2 + 0.07114\ \log_{10}\delta_{ilet} - 0.4761]\ \log_{10}\delta_{dur} \\ -[0.00266\ (\log_{10}\delta_{ilet})^2 + 0.5941\ \log_{10}\delta_{ilet} + 0.4278] \tag{2.33b}$$

$$F(\delta_{ilet},\delta_{dur}) = 11.01217 + 0.51244[\log_{10}\delta_{ilet} - \log_{10}\delta_{dur}] \tag{2.33c}$$

Bu formül, $\delta_{dur} < \delta_{ilet}$ için geliştirilmiştir. $\delta_{dur} > \delta_{ilet}$ olduğunda, δ_{dur} ve δ_{ilet} değerleri formülasyonda yer değiştirilir.

3. ETKİN FIR SÜZGEÇLERE GİRİŞ

FIR süzgeçlerin temel dezavantajı, pratik uygulamaları gerçeklemek için gerekli olan aritmetik işlemlerin çokluğudur. Ancak, özellikle dar iletim bandlı veya dar geçiş bandlı süzgeçlerde, süzgeç katsayıları arasında ilişki vardır ve bu ilişki süzgeçlerin gerçeklenmesi sırasında aritmetik işlemlerin sayısını azaltmak için kullanılabilir. Bu bölümde, FIR süzgeçlerde hesaplama yoğunluğunu azaltmak amacıyla en çok kullanılan üç yöntemin ilk ikisi anlatılacaktır. Bu yöntemler, ön-süzgeçleme + dengeleyici yaklaşımı, Ara-değerlenmiş FIR süzgeçler (IFIR) ve frekans yanıtı maskeleme (FRM) tekniğidir.

3.1 Ön-süzgeçleme+Dengeleyici Yaklaşımı

Ön süzgeçleme yönteminin temel amacı, çarpıcı ve toplayıcı sayısı azaltılmış, frekans yanıtı da arzulanan frekans yanıtına mümkün olduğunca yakın basit bir FIR süzgeç üretmektir. Daha sonra bu basit süzgeç, daha önceden belirlenen süzgeç özelliklerini sağlayacak bir genlik dengeleyici ile kaskad bağlanır. Ön süzgeçleme, hesaplama karmaşıklığının azaltılması için dengeleyiciye büyük bir kullanım alanı yaratır. Dengeleyicinin geçiş bandı genişliği daha büyüktür ve daha küçük süzgeç uzunluğu gerektirir.

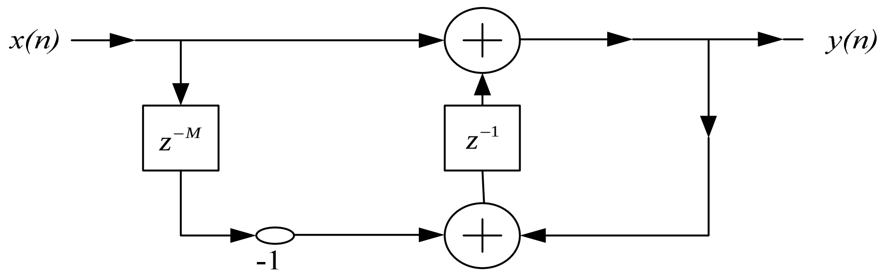
Literatürde bir çok ön-süzgeç yapısı vardır ve istenilen özellikleri sağlayacak en uygun ön-süzgeci seçmek kolay değildir. En basit alçak geçiren süzgeç yapılarından biri Yinelemeli İlerleyen Toplam (RRS) süzgeçleridir [6]. RRS süzgeç-lerin transfer fonksiyonunun doğrudan gerçeklenmesi aşağıdaki gibidir.

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} z^{i} \tag{3.1.1}$$

Burada tüm çarpıcı katsayıları bire eşittir ve çok sayıda toplayıcıya ihtiyaç vardır. Böyle bir transfer fonksiyonunu gerçeklemek için kullanılabilecek alternatif yollardan biri bu transfer fonksiyonunu geometrik serisi terimlerinin toplamı şeklinde ifade etmektir.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M-1}}{1 - z^{-1}} \tag{3.1.2}$$

Transfer fonksiyonunun bu şekilde gerçeklenmesi genel olarak RRS olarak bilinir. RRS çok etkili ve basit bir süzgeç yapısıdır. Süzgeç uzunluğundan bağımsız olarak çarpıcı gerektirmez, sadece iki toplayıcıya gerek duyar [7]. Süzgecin dürtü yanıtı, derecesini M ve uzunluğunu L ile ifade edersek, $L = M + 1$ tane gecikme teriminden oluşur. Ön-süzgeç, genlik dengeleyicinin süzgecin geçiş bandını keskinleştirmesini sağlayacak şekilde seçilmelidir, yani ön-süzgecin amacı genlik dengeleyicinin geçiş bandını arttırarak, derecesini azaltmaktır. Böylelikle tüm süzgecin hesaplama karmaşıklığı azaltılmış olacaktır. Bir RRS süzgecinin blok şeması Şekil 3.1.1'deki gibidir.



Şekil 3.1.1 RRS gerçeklenmesinin blok şeması

M. derece bir RRS süzgecin frekans yanıtı aşağıdaki gibi verilir.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-\frac{j\omega M}{2}} \tag{3.1.3}$$

ω frekans değerleri π'ye yaklaşırken azalan genlik değerleriyle RRS süzgecin durdurma bandındaki frekans yanıtında bir çok dalgalanma oluşur. RRS'in frekans yanıtındaki ilk sıfır ω_{z1} frekansında oluşur.

$$\omega_{z1} = \frac{2\pi}{M+1} \tag{3.1.4}$$

RRS bir ön-süzgeç olarak kullanılırsa, ilk sıfır durdurma bandı sınırı ω_{dur} frekansına mümkün olduğunca yakın en büyük frekans noktasına yerleştirilmelidir. Bu şartı sağlamak için, RRS süzgecin derecesi M şu şekilde seçilmelidir.

$$M = \left\lfloor \frac{2\pi}{\omega_{dur}} - 1 \right\rfloor \quad (3.1.5)$$

Burada $\lfloor x \rfloor$, x'den küçük ya da eşit en büyük tamsayıdır. Daha etkili ön-süzgeçler üretmek için bir çok RRS yapısı kaskad olarak bağlanmalıdır.

Genlik dengeleyici ise, ilk bölümde görülen MPR algoritmasında değişiklikler yapılarak üretilebilir. MPR algoritmasında ağırlıklandırılmış hata fonksiyonunun en büyük değeri şöyledir.

$$E(e^{j\omega}) = \left| W(e^{j\omega}).\{G(e^{j\omega}) - G_d(e^{j\omega})\} \right| \quad (3.1.6)$$

Burada, $G_d(e^{j\omega})$, arzulanan kazanç fonksiyonu, $G(e^{j\omega})$, gerçek kazanç fonksiyonu ve $W(e^{j\omega})$ bağıl ağırlıklandırma fonksiyonudur. MPR bilgisayar programında $G_d(e^{j\omega})$ ve $W(e^{j\omega})$ şu şekilde tanımlanmıştır.

$$G_d(e^{j\omega}) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \le \omega \le \omega_{ilet} \\ 0, & \omega_{dur} \le \omega \le \pi \end{Bmatrix} \quad (3.1.7)$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \le \omega \le \omega_{ilet} \\ K, & \omega_{dur} \le \omega \le \pi \end{Bmatrix} \quad (3.1.8)$$

Verilen herhangi bir ön-süzgeç için bir optimum dengeleyici, MPR algoritması değiştirilerek şu şekilde üretilebilir. $P(e^{j\omega})$ ve $Q(e^{j\omega})$, sırasıyla ön-süzgeç ve dengeleyicinin kazanç fonksiyonlarıdır. $P(e^{j\omega})$. $Q(e^{j\omega})$ çarpımı, tüm süzgecin kazanç fonksiyonudur. Hata fonksiyonu aşağıdaki gibi değiştirilerek genlik dengeleyici elde edilir.

$$E(e^{j\omega}) = \left| W(e^{j\omega}).\{P(e^{j\omega}).Q(e^{j\omega}) - G_d(e^{j\omega})\} \right| \quad (3.1.9a)$$

$$E(e^{j\omega}) = \left| W(e^{j\omega}).P(e^{j\omega})\{.Q(e^{j\omega}) - G_d(e^{j\omega}) / P(e^{j\omega})\} \right| \quad (3.1.9b)$$

$$E(e^{j\omega}) = \left| \widehat{W}(e^{j\omega}).\{\widehat{G}(e^{j\omega}) - \widehat{G}_d(e^{j\omega})\} \right| \quad (3.1.9c)$$

Burada,

$$\widehat{G}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 / P(e^{j\omega}), & 0 \le \omega \le \omega_{ilet} \\ 0, & \omega_{dur} \le \omega \le \pi \end{cases} \quad (3.1.10a)$$

$$\widehat{W}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \left|P(e^{j\omega})\right|, & 0 \le \omega \le \omega_{ilet} \\ K\left|P(e^{j\omega})\right|, & \omega_{dur} \le \omega \le \pi \end{cases} \tag{3.1.10b}$$

$$\widehat{G}(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) \tag{3.1.10c}$$

MPR algoritmasında $\widehat{W}(e^{j\omega})$ mutlaka pozitif olmalıdır. Ancak, durdurma bandındaki frekanslar için $P(e^{j\omega})$ sıfırdır. Bunun için en uygun çözüm, $\widehat{W}(e^{j\omega})$ fonksiyonunu otomatik olarak çok küçük bir pozitif ε sayısı ile alt-sınırlamaktır. Süzgeç tasarımı ε değerine bağlı olmadığından, ε değerinin uygun bir şekilde küçük alınması yeterli olacaktır. Örneğin, $\varepsilon = 10^{-6}$ alınabilir.

Özetle, ön-süzgeçleme+dengeleyici yaklaşımıyla süzgeç tasarımı iki adımda gerçekleştirilir [7].

Adım 1. İstenilen süzgeç özelliklerine uygun bir ön-süzgeç tasarlanır. Ön-süzgeç, en az çarpıcı ve toplayıcı sayısına sahip uygun frekans yanıtlarından en iyisi sahip olmalıdır. Eğer ön süzgeç olarak RRS yapısı kullanılırsa çarpıcı kullanmaya gerek kalmaz.

Adım 2. Ön-süzgeç, tüm süzgecin arzulanan frekans yanıtını elde edecek şekilde bir genlik dengeleyici ile kaskad bağlanır.

Sonuç olarak, ön-süzgeçleme + dengeleyici yaklaşımıyla tasarlanan süzgecin frekans yanıtı şu şekilde gösterilebilir.

$$H(e^{j\omega}) = H_{ön}(e^{j\omega}).H_{den}(e^{j\omega}) \tag{3.1.11}$$

Bir ön-süzgeç tasarımı örneği olarak, iletim bandı sınırı, $f_{ilet} = 0.042\pi$ rad/örnek, iletim bandı dalgalanması 0.2 dB, durdurma bandı sınırı, $f_{dur} = 0.14\pi$ rad/örnek ve durdurma bandı bastırması 35 dB olan bir süzgeç tasarlayalım.

$$M = \left\lfloor \frac{2\pi}{\omega_{dur}} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\pi}{0.14\pi} - 1 \right\rfloor = \lfloor 13.29 \rfloor = 13 \text{ ve } L = M + 1 = 14$$

Uzunluğu 14 olan RRS yapıda bir ön-süzgeç tasarlanması gereklidir.

Bu RRS ön-süzgeç için uygun genlik dengeleyici uzunluğu 24 olarak bulunur. Aynı özellikleri sağlayan geleneksel FIR süzgecin uzunluğu da 36 (35 gecikme elemanı)’ dır. Gerekli dengeleyici katsayıları ve aynı süzgeç özelliklerini sağlayan geleneksel FIR süzgeç için kullanılması gereken katsayılar Tablo 3.1.1 ile verilmiştir.

Tablo 3.1.1
Gerekli Süzgeç Katsayıları

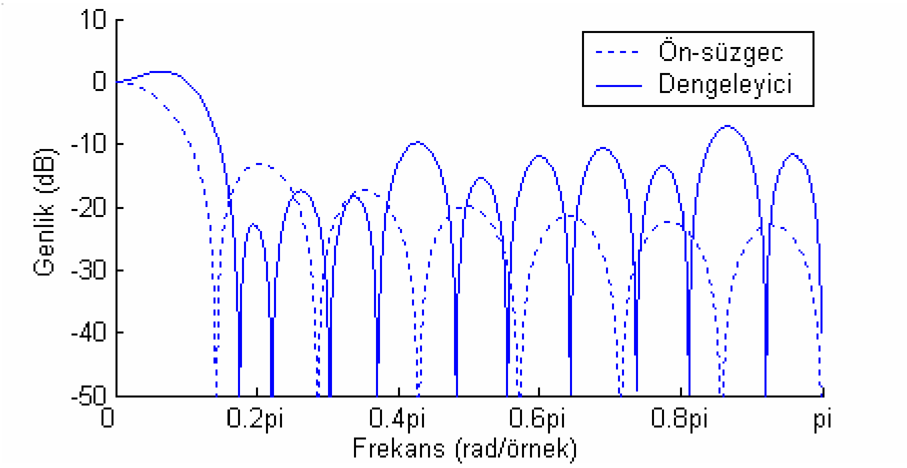
	Dengeleyici	Geleneksel FIR Süzgeç
1	-0.12163029	-0.0110713661234381
2	0.02319508	-0.00751185419972038
3	-0.02155842	-0.00898987430951609
4	-0.00969477	-0.00970281239783673
5	-0.00605022	-0.00928660019399065
6	0.01019741	-0.00736875162026783
7	0.05381588	-0.00367712592152903
8	0.07186058	0.00194774743275933
9	0.11563688	0.00947928883212431
10	0.08261736	0.0187957930929056
11	0.1448707	0.0295202025950192
12	0.15673977	0.0411671669869655
13		0.0530961561680022
14		0.0645853128300216
15		0.0749024700503046
16		0.0833517390127304
17		0.0893405167493232
18		0.0924496887503161

Ön-süzgeçleme yönteminin geleneksel FIR tasarlamaya olan üstünlüğünü daha iyi görebilmek için hesaplama karmaşıklığı veya gerekli donanım özellikleri bu örnek için Tablo 3.1.2'de verilmiştir.

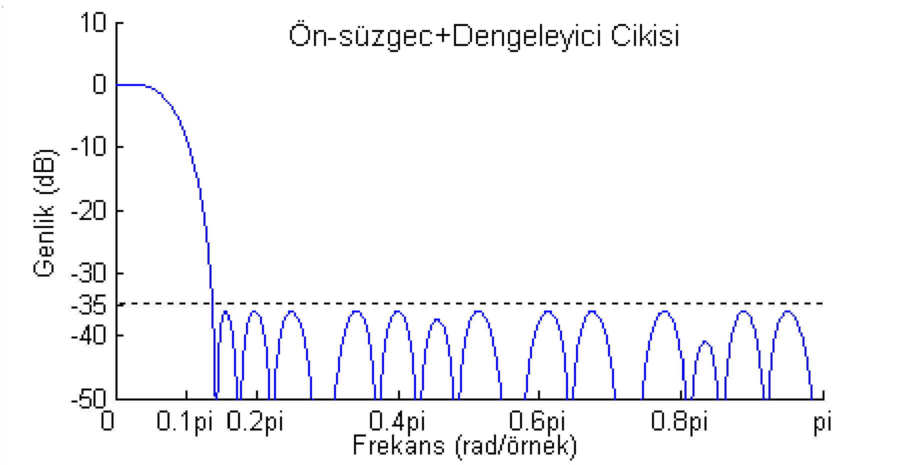
Tablo 3.1.2
Ön-süzgeç örneği için gerekli donanım özellikleri

	Gecikme	Toplayıcı	Çarpıcı
Ön-süzgeç	14	2	0
Dengeleyici	23	23	12
Toplam	37	25	12
Geleneksel FIR Süzgeç	35	35	18

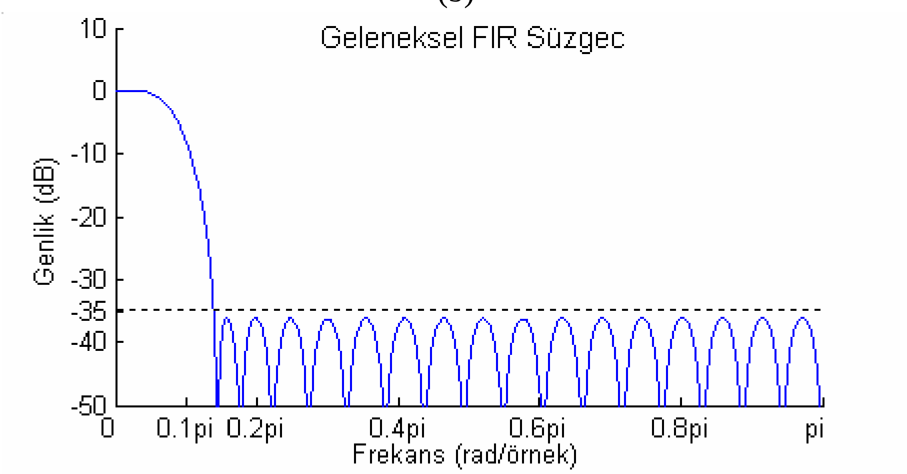
Ön-süzgeç, genlik dengeleyici, tüm süzgecin frekans yanıtları ve aynı şartları sağlayan geleneksel FIR süzgecin frekans yanıtı Şekil 3.1.2'de görüldüğü gibidir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.1.2 Ön-süzgeç + dengeleyici yaklaşımıyla tasarlanan süzgecin frekans yanıtları (a) Ön-süzgeç ve dengeleyici (b) Tüm süzgeç (c) Geleneksel FIR süzgeç

3.2 Ara-değerlenmiş Dar-Bandlı Alçak Geçiren FIR Süzgeçler

IFIR süzgeçler, hesaplama karmaşıklığını geleneksel FIR süzgeçlere göre belirli ölçülerde azaltarak dar band alçak geçiren süzgeçler tasarlamak için kullanılan etkili yöntemlerden biridir. İlk olarak [8]'de, ardından da daha kapsamlı bir şekilde [9]'de ele alınmıştır. Geleneksel FIR süzgeçlerin hesaplama karmaşıklığı, ara değerlenmiş dar band alçak geçiren süzgeçler kullanılarak % 80 oranına kadar azaltılabilir.

Ara-değerlenmiş FIR (IFIR) süzgeçler, N uzunluklu yinelemeli olmayan doğrusal fazlı FIR süzgeçlerin her gecikmesinin M gecikme elemanı ile yer değiştirilmesi ilkesine göre Şekil 3.2.1(a)'daki gibi tasarlanır. Eğer 9 uzunluklu bir FIR süzgecin dürtü yanıtı, $h_{mod}(k)$ Şekil 3.2.1(b)'deki gibi ise, M faktörü (örneğin 3) ile ara-değerlenmiş FIR süzgecin dürtü yanıtı, $h_{ara}(k)$ Şekil 3.2.1(c)'deki gibi olur. Bundan sonra orijinal süzgeç, model süzgeç ve ara-değerlenmiş periyodik model süzgece de band sınırı şekillendiren süzgeç olarak adlandırılacaktır.
Herhangi bir model FIR süzgeci z-uzayında şu şekilde ifade edebiliriz,

$$H_{mod}(k) = \sum_{k=0}^{N-1} h_{mod}(k) z^{-k} \tag{3.2.1}$$

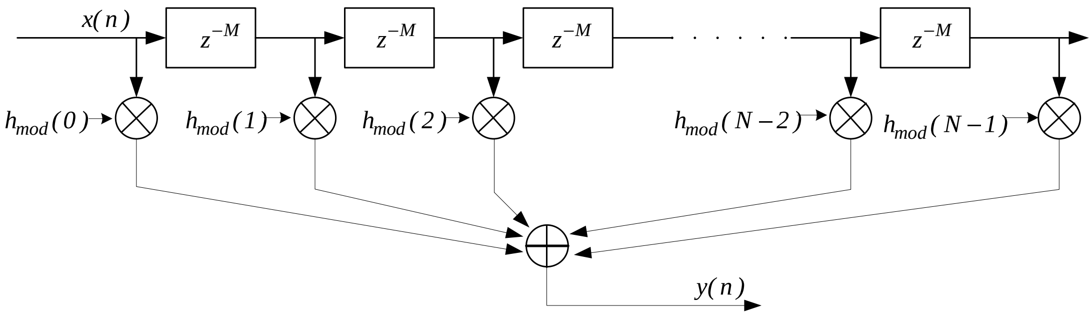
Burada N, $h_{mod}(k)$'nin uzunluğudur. Genel olarak band sınırı şekillendiren bir süzgecin transfer fonksiyonunun z-dönüşümü ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$H_{ara}(k) = \sum_{k=0}^{N-1} h_{ara}(k) z^{-kM} \tag{3.2.2}$$

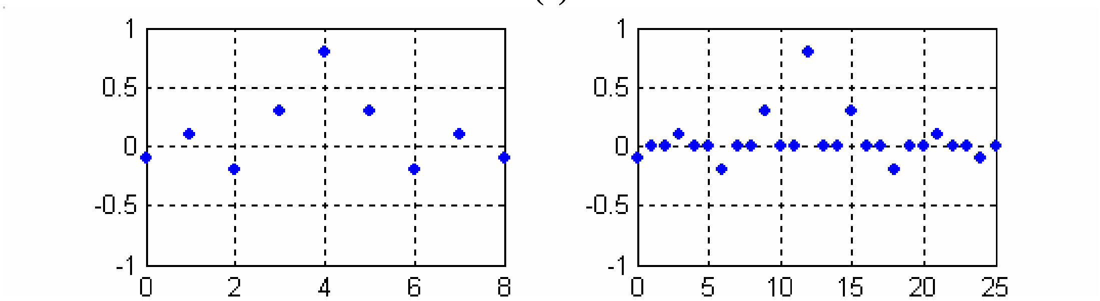
Eğer model süzgecin birim dürtü yanıtı uzunluğu N_{mod} ise, band sınırı şekillendiren süzgeç N_{mod} adet sıfır olmayan katsayı içerir. Tüm uzunluğu ise,

$$L_{ara} = M(N_{mod} - 1) + 1 \tag{3.2.3}$$

M gecikme elemanının frekans-uzayı etkisi Şekil 3.2.2'de açıklanmıştır. Zaman-uzayında her gecikme yerine M gecikme elemanı kullanılması, frekans- uzayında sıkıştırmaya (tekrarlama) neden olur ve Şekil 3.2.2(b)'deki $|H_{ara}(f)|$ genlik yanıtı oluşur. Frekans ekseni, örnekleme frekansı, f_s 'e göre normalize edilmiştir. Örneğin, normalize frekansı f_{ilet} olan iletim bandı sınırı aslında $f_{ilet}.f$ Hz'dir. $|H_{ara}(f)|$'in tekrarlanan iletim bandları *1/M* (f_s/M) frekanslarına yerleşir.



(a)



(b) (c)

Şekil 3.2.1 (a) Her gecikme elemanı yerine *M* gecikme elemanı kullanarak band sınırı şekillendiren FIR süzgeç, (b) Bir model FIR süzgeç (c) *M*=3 alınarak oluşturulan sınırı şekillendiren FIR süzgeç

Eğer band sınırı şekillendiren süzgeç, bu süzgecin periyodik iletim bandlarını bastırmak için alçak geçiren bir maskeleme süzgeci ile kaskad bağlanırsa, Şekil 3.2.2(d)'deki çok-katlı süzgeç yapısı IFIR süzgeç elde edilir. Çıkıştaki $|H_{ifir}(f)|$ frekans genlik yanıtı,

$$|H_{ifir}(f)| = |H_{mod}(f)|.|H_{ma}(f)| \tag{3.2.4}$$

IFIR süzgeç oluşturmak için tasarlanan kaskad bağlı alt-süzgeçlerin oluşturduğu yapı Şekil 3.2.3'de verilmiştir.Eğer tasarlanması istenen alçak geçiren süzgecin arzulanan iletim bandı genişliği f_{ilet}, durdurma bandı f_{dur} ile başlıyor ve geçiş bandı genişliği $f_{gecis} = f_{dur} - f_{ilet}$ ise, model alt-süzgecin normalize frekans band sınırları aşağıdaki gibi olur.

$$f_{mod-ilet} = M.f_{ilet} \tag{3.2.5a}$$

$$f_{mod-dur} = M \cdot f_{dur} \tag{3.2.5b}$$

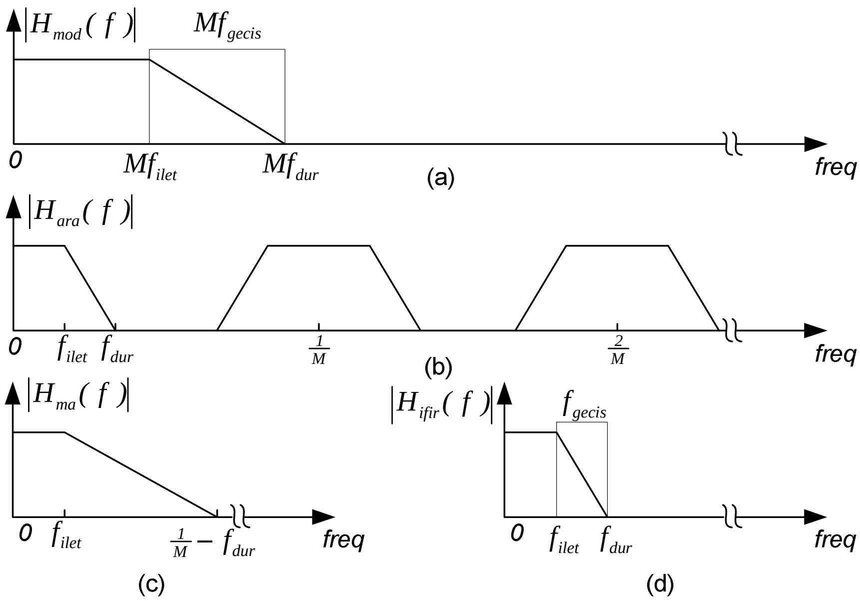
$$f_{mod-gecis} = M \cdot f_{gecis} = M(f_{dur} - f_{ilet}) \tag{3.2.5c}$$

Maskeleme alt-süzgecinin band sınırları,

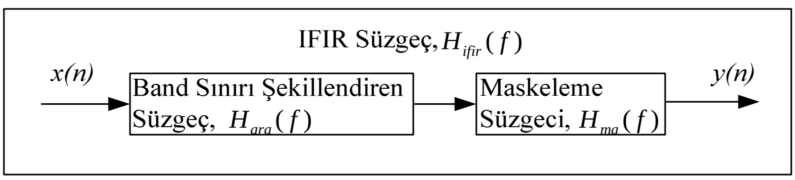
$$f_{ma-ilet} = f_{ilet} \tag{3.2.6a}$$

$$f_{ma-dur} = \frac{1}{M} - f_{dur} \tag{3.2.6b}$$

Model süzgecin ve maskeleme alt-süzgecinin durdurma bandı bastırması, arzulanan IFIR süzgecin durdurma bandı bastırmasıyla aynıdır. IFIR süzgecin etkin uzunluğu, aynı kriterleri sağlayan geleneksel FIR süzgecin uzunluğundan çok az miktarda daha uzundur. Bu fark % 10'un geçmez ancak hesaplama karmaşıklığı % 90'a kadar artabilir.



Şekil 3.2.2 IFIR süzgecin genlik yanıtları (a) Model süzgeç (b) Band sınırı şekillendiren süzgeç (periyodik model süzgeç) (c) Maskeleme süzgeci (d) Sonuç IFIR süzgeci



Şekil 3.2.3 Ara-değerlenmiş FIR süzgeç yapısı

3.2.1 En Uygun M Değerinin Seçimi

M faktörünün hesaplama karmaşıklığını azaltmak için çok dikkatli bir biçimde seçmek gereklidir. Şekil 3.2.2(b)'den de gözlenebileceği gibi *M* değeri için bir kısıtlama getirilebilir. Bu kısıtlama şudur: *M* değeri $1/M - f_{dur} \geq f_{dur}$ kısıtlamasını sağlayan en büyük tamsayı olmalıdır. Bu seçimle band sınırı şekillendiren süzgecin periyodik iletim bandları bastırılmış olur. Bu kısıtlama M için şu üst sınırlamayı ortaya koyar [6].

$$M_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2 f_{dur}} \right\rfloor \tag{3.2.7}$$

Burada, $\lfloor x \rfloor$, *x*'den küçük en büyük tamsayıdır. Sonuçta *M* için kabul edilebilir tamsayı değerleri aralığı, $2 \leq M \leq M_{max}$ 'dır.

3.2.2 FIR Süzgecin Uzunluğunun Tahmini

IFIR süzgeçlerin hesaplama karmaşıklıklarının hesaplanabilmesi için, geleneksel FIR süzgeçlerin uzunluğunu tahmin eden bir algoritma geliştirmek gerekir. Birçok yazar geleneksel FIR süzgeçlerin uzunluğunu tahmin etmek için iletim bandı dalgalanması, durdurma bandı bastırması ve geçiş bandı genişliğine dayanan deneysel ilişkiler (Optimal FIR, Parks-McClellan, remez, Chebyshev yaklaşımı veya eş-dalgalanmalı süzgeçler) ortaya koymuştur. Bu tezde yöntem olarak Parks-McClellan optimal eş-dalgalanmalı FIR süzgeç tasarımı kullanılacaktır. Rabiner ve Hermann'ın 1973 yılında ortaya koydukları FIR süzgeçlerin uzunluğunu tahmin eden formülün 0.1 dB için oluşturulan özel bir halini kullanarak bu tahmin şu şekilde ifade edilebilir [10].

$$N_{tfir} = \frac{Bastırma}{22.(f_{dur} - f_{ilet})} \tag{3.2.8a}$$

Burada *Bastırma* dB cinsinden durdurma bandı bastırmasıdır. f_{ilet} ve f_{dur} ise normalize frekanslardır.

Aynı şekilde model süzgeç ve maskeleme alt-süzgecin uzunlukları da şu şekilde ifade edilebilir.

$$N_{ara} = \frac{Bastırma}{22.M.(f_{dur} - f_{ilet})} \tag{3.2.8b}$$

$$N_{ma} = \frac{Bastırma}{22.(1/M - f_{dur} - f_{ilet})} \tag{3.2.8c}$$

3.2.3 IFIR Süzgecin Performans Modellenmesi

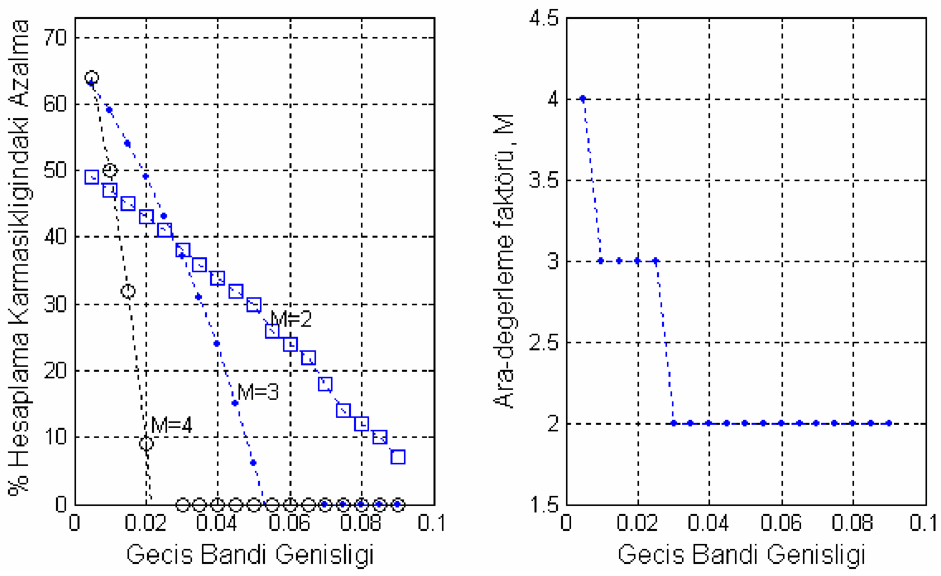
IFIR süzgeçlerde hesaplama karmaşıklığındaki azalma oranı şu şekilde yazılabilir.

$$\%\ \textit{hesaplama karmaşıklığındaki azalma} = 100\frac{N_{tfir} - N_{ara} - N_{ma}}{N_{tfir}} \tag{3.2.9}$$

Bu oran, aslında arzulanan IFIR süzgecin iletim bandı genişliği, geçiş bandı genişliği ve *M* faktörüne bağlıdır. (3.2.8) ve (3.2.9) denklemeleri birlikte kullanılarak bu ilişki ortaya koyulabilir.

$$\%\ \textit{hesaplama karmaşıklığındaki azalma} = 100.\left[\frac{M-1}{M} - \frac{Mf_{gecis}}{1 - Mf_{gecis} - 2Mf_{ilet}}\right] \tag{3.2.10}$$

(3.2.10) denklemi örnekleme frekansının % 10‘u (f_{ilet}=0.1) ve M = 2, 3, 4 için, hesaplama karmaşıklığını ve en uygun *M* faktörünü, geçiş bandı genişliği cinsinden ifade edecek şekilde Şekil 3.2.4’de verilmiştir.



Şekil 3.2.4 f_{ilet}=0.1 dB için geçiş bandı genişliğine bağlı IFIR süzgeç performansı (a) Hesaplama karmaşıklığındaki azalma oranı (b) En uygun *M* değeri

3.2.4 İletim Bandı Dalgalanmasının İncelenmesi

Bir IFIR süzgecin dalgalanması, band sınırı şekillendiren süzgeç ve maskeleme süzgecinin bir fonksiyonudur. IFIR süzgecin iletim bandı yanıtı, band sınırı sekilendiren süzgeç ile maskeleme süzgeci yanıtlarının çarpımıdır. Eğer IFIR süzgecin iletim bandı dalgalanması δ_{ifir} ise, (3.2.4) denkleminden yararlanarak, IFIR süzgecin iletim bandı yanıtı için bir üst sınır çıkarılabilir.

$$\begin{aligned} 1+\delta_{ifir} &= (1+\delta_{ara}).(1+\delta_{ma}) \\ &= 1+\delta_{ara}+\delta_{ma}+\delta_{ara}\delta_{ma} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

δ_{ara} ve δ_{ma} 'nın küçük değerleri için $\delta_{ara}\delta_{ma}$ değeri ihmal edilebilir. Böylece,

$$\delta_{ifir} = \delta_{ara} + \delta_{ma} \tag{3.2.12}$$

Sonuçta, band sınırı şekillendiren süzgeç ve maskeleme süzgeci tasarımı sırasında kullanılacak iletim bandı dalgalanması değeri, arzulanan IFIR süzgecin iletim bandı dalgalanmasının kabaca yarısı olarak alınır.

$$\delta_{ara} = \delta_{ma} \approx \delta_{ifir}/2 \tag{3.2.13}$$

3.2.5 IFIR Süzgeci Tasarımı

Alçak geçiren bir IFIR süzgeç tasarımı pratik olarak dört adım içeren bir algoritma ile gerçekleştirilir [10].

Adım 1. Arzulanan alçak geçiren süzgecin performans özellikleri tanımlanır.
Adım 2. *M* için uygun bir değerler aralığı bulunur
Adım 3. Band sınırı şekillendiren ve maskele süzgeçleri, band sınırları hesaplanarak tasarlanırlar.
Adım 4. Uygun *M* değerleri aralığındaki *M*'ler için IFIR süzgeçlerin performansları incelenir ve en uygun IFIR süzgeç tasarlanır.

Bir IFIR süzgeç tasarımı örneği olarak, normalize iletim bandı genişliği, f_{ilet} = 0.1, iletim bandı dalgalanması 0.1 dB, geçiş bandı genişliği, f_{gecis} =0.02 ve durdurma bandı bastırması 60 dB olan bir IFIR süzgeç tasarlayalım. Bu tasarımda süzgeçlerin tasarımı için MATLAB programının remez komutu kullanılmıştır.
Öncelikle uygun *M* değerleri aralığı belirlenir.

$$M_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2 f_{dur}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2(0.1+0.02)} \right\rfloor = 4 \text{ ve } 2 \le M \le 4 \text{ 'dir}$$

Uygun M değerleri aralığı için gerekli süzgeç uzunlukları ve hesaplama karmaşıklığındaki azalma değerleri Tablo 2.2.1'de verilmiştir. Tablodaki değerler (2.2.3-2.2.13) denklemleri kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 3.2.1 IFIR süzgecinin *M* değerine bağlı hesaplama karmaşıklığındaki azalma

M değeri	2	3	4
$h_{ara}(k)$ uzunluğu	74	49	37
$h_{ma}(k)$ uzunluğu	8	26	98
IFIR süzgecin uzunluğu	82	75	135
Geleneksel FIR süzgecin uzunluğu	137	137	137
Gerekli bellek uzunluğu (IFIR süzgecin etkin uzunluğu)	147	145	145
Hesaplama karmaşıklığındaki azalma	% 41	% 46	% 2

Hesaplama karmaşıklığındaki azalmanın en büyük olduğu M değeri 3'tür. M = 3 için model süzgeç ve maskeleme süzgeci için uygun band sınırı değerleri aşağıdaki gibidir.

$$f_{mod-ilet} = M.f_{ilet} = 3(0.1) = 0.3 \text{ Hz}$$

$$f_{mod-dur} = M.f_{dur} = 3(0.12) = 0.36 \text{ Hz}$$

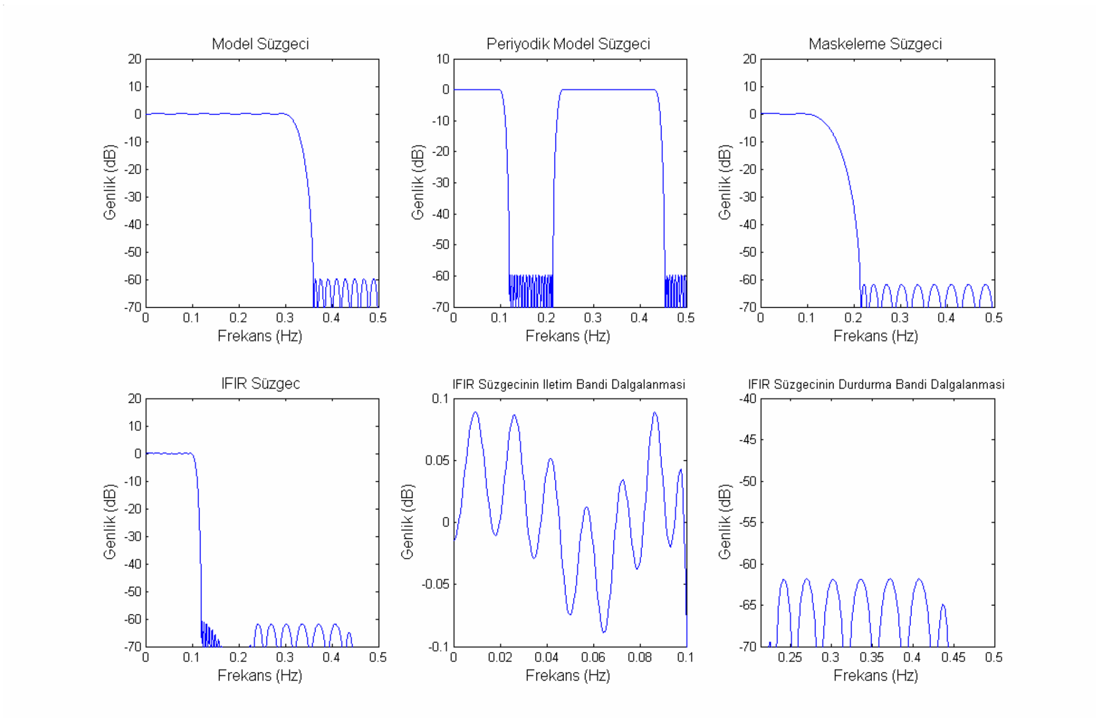
$$f_{mod-gecis} = M.f_{gecis} = M(f_{dur} - f_{ilet}) = 3(0.12\text{-}0.1) = 0.06 \text{ Hz}$$

$$f_{ma-ilet} = f_{ilet} = 0.1 \text{ Hz}$$

$$f_{ma-stop} = \frac{1}{M} - f_{stop} = \frac{1}{3} - 0.12 = 0.2133 \text{ Hz}$$

$$\delta_{ara} = \delta_{ma} \approx \delta_{ifir} / 2 \approx 0.1/2 = 0.5 \text{ dB}$$

Elde edilen bu band sınırları kullanılarak model süzgeç, band sınırı şekillendiren (periyodik model süzgeç), maskeleme süzgeci ve çıkış IFIR süzgeç Şekil 3.2.5'deki gibi tasarlanır.



Şekil 3.2.5 IFIR süzgecin genlik yanıtları (a) Model Süzgeç (b) Band sınırı şekillendiren süzgeç (Periyodik model süzgeç) (c) Maskeleme süzgeci (d) Çıkış IFIR süzgeç (e) IFIR süzgecin iletim bandı dalgalanması (f) IFIR süzgecin durdurma bandı bastırması

Hesaplama karmaşıklığındaki azalmayı daha iyi gözlemek için, normalize iletim bandı genişliği, f_{ilet} = 0.02, iletim bandı dalgalanması 0.1 dB, geçiş bandı genişliği, f_{gecis} =0.005 ve durdurma bandı bastırması 60 dB olan yeni bir IFIR süzgeç tasarlayalım.

Bu süzgeç özelikleri için uygun *M* değerleri aralığı belirlenir.

$$M_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2\,f_{dur}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2(0.02+0.005)} \right\rfloor = 20 \text{ ve } 2 \le M \le 20 \text{ 'dir}$$

Uygun *M* değerleri aralığı için gerekli süzgeç uzunlukları ve hesaplama karmaşıklığındaki azalma değerleri Tablo 3.2.2'de verilmiştir. Bu kez hesaplama karmaşıklığındaki azalmanın % 80 civarında olduğu görülür.

Hesaplama karmaşıklığındaki azalmanın en büyük olduğu *M* değeri 8 ya da 9 olabilir.

Tablo 3.2.2 IFIR süzgecinin *M* değerine bağlı hesaplama karmaşıklığındaki azalma							
M değeri	5	6	7	8	9	10	11
$h_{ara}(k)$ uzunluğu	118	98	84	73	66	59	54
$h_{ma}(k)$ uzunluğu	18	24	30	37	45	54	64
IFIR süzgecin uzunluğu	136	122	114	110	111	113	118
Geleneksel FIR süzgecin uzunluğu	544	544	544	544	544	544	544
Gerekli bellek uzunluğu (IFIR süzgecin etkin uzunluğu)	586	583	582	585	586	581	584
Hesaplama karmaşıklığındaki azalma	% 75	% 78	% 79	% 80	% 80	% 79	% 78

Şekil 3.2.6'daki *M* değerlerine bağlı hesaplama karmaşıklığındaki azalma grafiği esas alınarak, *M* = 8 için model süzgeç ve maskeleme süzgeci için uygun band sınırı değerleri aşağıdaki gibidir.

$$f_{mod-ilet} = M\,.\,f_{ilet} = 8(0.02) = 0.16 \text{ Hz}$$

$$f_{mod-dur} = M\,.\,f_{dur} = 3(0.025) = 0.20 \text{ Hz}$$

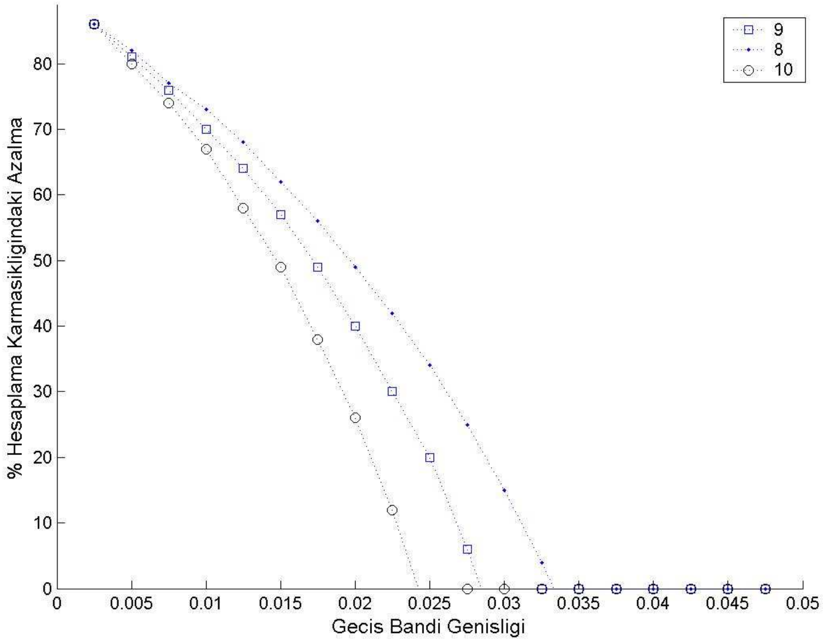
$$f_{mod-gecis} = M\,.\,f_{gecis} = M(f_{dur} - f_{ilet}) = 8(0.025\text{-}0.02) = 0.04 \text{ Hz}$$

$$f_{ma-ilet} = f_{ilet} = 0.02 \text{ Hz}$$

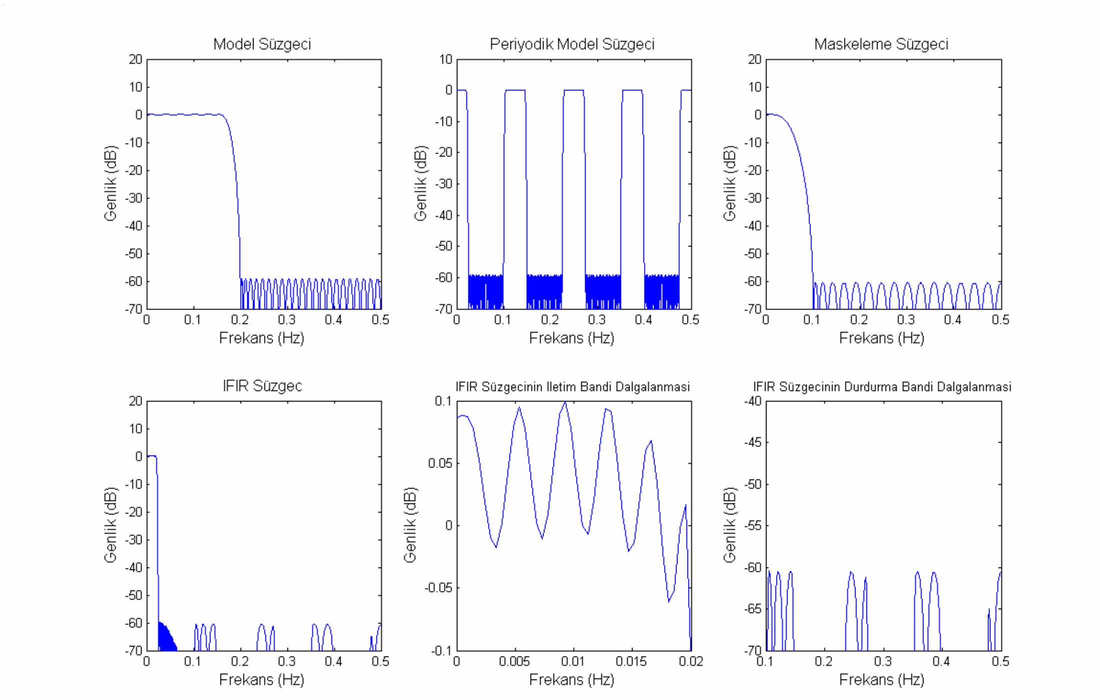
$$f_{ma-stop} = \frac{1}{M} - f_{stop} = \frac{1}{8} - 0.025 = 0.1 \text{ Hz}$$

$$\delta_{ara} = \delta_{ma} \approx \delta_{ifir} / 2 \approx 0.1/2 = 0.5 \text{ dB}$$

M = 8 için elde edilen bu band sınırları kullanılarak model süzgeç, band sınırı şekillendiren (periyodik model süzgeç), maskeleme süzgeci ve çıkış IFIR süzgeç Şekil 3.2.7'de verilmiştir.



Şekil 3.2.6 f_{ilet} = 0.005 esas alınarak, M = 8, 9, 10 için hesaplama karmaşıklığındaki azalma oranları



Şekil 3.2.7 IFIR süzgecin genlik yanıtları (a) Model Süzgeç (b) Band sınırı şekillendiren süzgeç (Periyodik model süzgeç) (c) Maskeleme süzgeci (d) Çıkış IFIR süzgeç (e) IFIR süzgecin iletim bandı dalgalanması (f) IFIR süzgecin durdurma bandı bastırması

4. FREKANS CEVABI MASKELEME (FRM) YAKLAŞIMI KULLANILARAK KESKİN DOĞRUSAL-FAZLI FIR SAYISAL SÜZGEÇ ÜRETİLMESİ

Doğrusal fazlı FIR sayısal süzgeçlerin kararlılık, faz bozulmalarından bağımsızlık ve düşük katsayı duyarlılığı gibi birçok avantajı vardır. FIR süzgeçlerin en önemli dezavantajı karmaşıklıklarıdır. Bu problem, keskin FIR süzgeçler için mutlaka çözülmesi gereken bir problemdir.

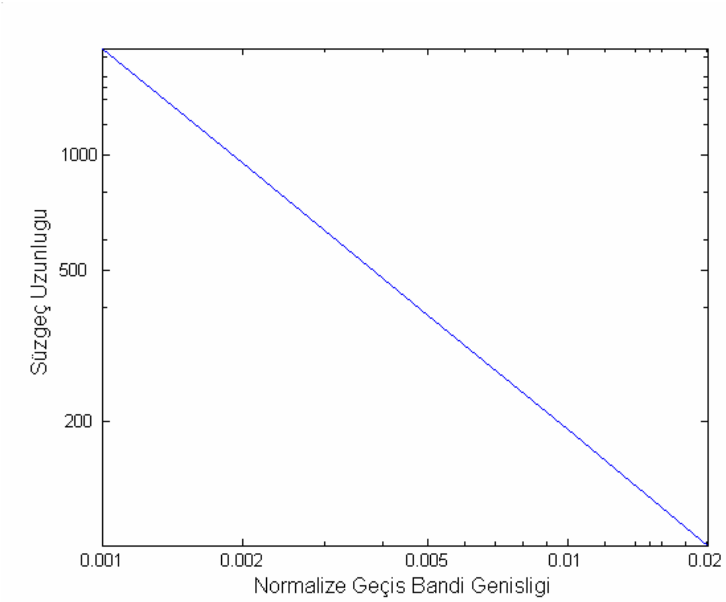
Literatürde, keskin FIR süzgeçlerin karmaşıklığını azaltmak için bugüne kadar birçok yöntem önerilmiştir. İlk olarak, giriş işaretinin band genişliği, çok etkili olmayan geçiş bandı genişliğini daraltan süzgeçler kullanılarak azaltıldı [7]. Daha sonra, örnekleme oranı azaltıldı ve çıkış işareti azaltılan örnekleme oranı ile süzgeçlendi. Son olarak da örnekleme oranı azaltma yerini ara-değerlemeye bıraktı [9].

Yukarıdaki yöntemler dar-bandlı süzgeçleme için etkilidir. Ayrıca geniş-bandlı süzgeçleme için de kullanılabilir. Giriş işaretinin gecikmiş halinden dar bandlı işaret çıkarılarak geniş bandlı işaret üretilebilir. Geniş-bandlı süzgeçlerin band genişliği de dar-bandlı işaretlerde olduğu gibi ara-değerleme ile azaltılabilir.

4.1. Orijinal Frekans Cevabı Maskeleme Yöntemi

FRM tekniği farklı band genişliklerine sahip keskin FIR süzgeçleri üretmek için kullanılan en etkili yöntemdir. Elde edilen süzgecin katsayısı geleneksel süzgeçlere göre daha azdır. Tasarlanması istenen bir süzgecin özellikleri verildiğinde, süzgecin etkin uzunluğu (tüm sıfır ve sıfır olmayan katsayılar dahil), aynı özellikleri sağlayan sonsuz kelime-uzunluklu minimax tasarımlı optimum süzgeçten çok az miktarda daha uzundur. Süzgeç karmaşıklığı ise, katsayıların çoğunun sıfır ve geri kalanların sıfırdan farklı olması nedeniyle, sonsuz kelime-uzunluklu minimax tasarımlı optimum süzgeçten çok daha küçüktür. FRM tekniği çarpıcısız tasarım [11] yöntemleri ile birleştirilirse süzgeç karmaşıklığı minimuma indirilebilir.

Şekil 4.1.1'de gerekli süzgeç uzunluğunun geçiş bandı genişliği ile değişimi, 0.2 dB tepeden-tepeye iletim bandı dalgalanması ve 40 dB durdurma bandı bastırması için verilmiştir. Şekil 4.1'de de görüldüğü gibi süzgeç uzunluğu, geçiş bandı genişliği ile ters orantılıdır ve karmaşıklığın keskin süzgeçler için yüksek olduğu açıktır.

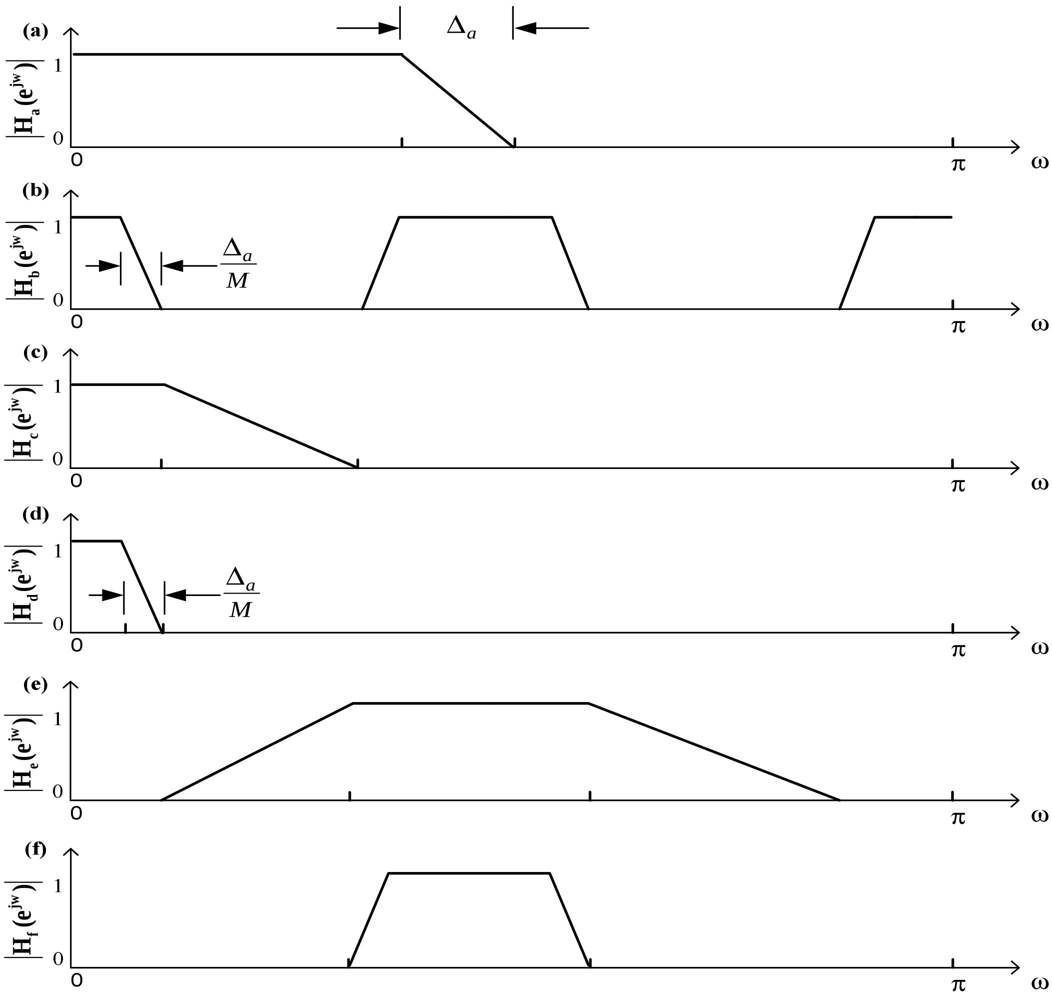


Şekil 4.1 Süzgeç uzunluğunun geçiş bandı genişliği ile değişimi

4.1.1 Dar Band Süzgeç Tasarımı

Transfer fonksiyonunun z-dönüşümü $H_a(z)$, frekans yanıtı $H_a(e^{j\omega})$ ve geçiş bandı genişliği Δ_a olan, alçak geçiren bir süzgeç Şekil 4.1.2(a) ile verilmiştir. Bu süzgecin her gecikme terimi M gecikme terimi ile yer değiştirildiğinde $H_b(z)= H_a(z^M)$ oluşur ve oluşan yeni yapının frekans yanıtı $H_b(e^{j\omega}) = H_a(e^{jM\omega})$ Şekil 4.1.2(b) 'de verilmiştir. Şekil 4.1.2(c)'de $H_b(e^{j\omega})$ frekans yanıtını maskeleyecek $H_c(e^{j\omega})$ maskesi gösterilmiştir. Elde edilen süzgeç çıkışı $H_d(e^{j\omega}) = H_b(e^{j\omega}).H_c(e^{j\omega})$ Şekil 4.1.2(d)'de çizilmiştir. $H_d(e^{j\omega})$ frekans yanıtının geçiş bandı genişliği $\frac{\Delta_a}{M}$'dir. Eğer $H_b(e^{j\omega})$, Şekil 4.1.2(e)'de görülen $H_e(e^{j\omega})$ maskesi ile maskelenirse, çıkışın frekans yanıtı Şekil 4.1.2(f)'deki gibi $H_f(e^{j\omega}) = H_b(e^{j\omega}).H_e(e^{j\omega})$ olur. Geçiş bandı genişliği yine $\frac{\Delta_a}{M}$'dir.

Bu basit frekans yanıtı maskeleme tekniği için çok ciddi bir zorluk vardır.



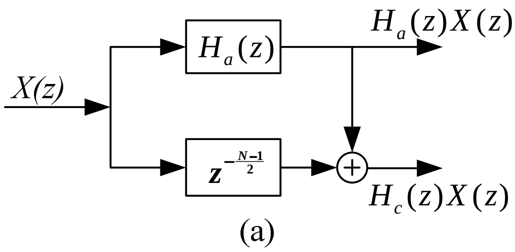
Şekil 4.1.2 Frekans Yanıtı Maskeleme Tekniğinin Basit Gösterilimi

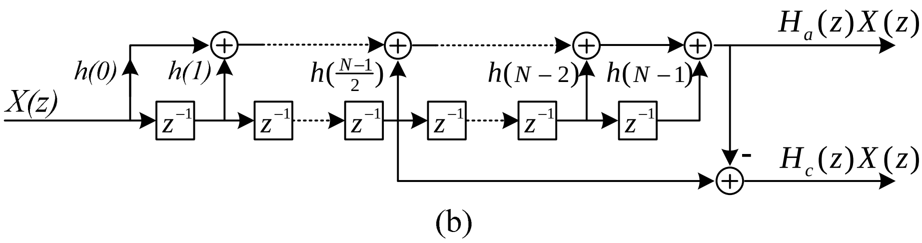
$H_a(z)$ süzgecindeki her gecikme elemanının M gecikme elemanı ile yer değiştirilmesi sırasında, geçiş bandı genişliği M faktörü ile azalırken, iletim bandı genişliği de M faktörü ile azalır. Bu nedenle FRM tekniği, sadece dar band süzgeç tasarımları için uygundur. Ara-değerleme yapılmış dürtü-yanıtı yaklaşımı, FRM tekniğinin özel bir halidir [7]. Ara-değerleyicilerin frekans yanıtı, FRM tekniğindeki Şekil 4.1.2(c)'de görülen maske ile aynı yapıdadırlar.

4.1.2 Keyfi Band Genişlikli FRM Tasarımı

Doğrusal fazlı iki süzgeç H_a ve H_c, eğer $\left|H_a(e^{j\omega}) + H_c(e^{j\omega})\right| = 1$ ise tamamlatıcı bir çift süzgeçtir. $H_a(e^{j\omega})$, H_a süzgecinin ve $H_c(e^{j\omega})$ de H_c süzgecinin frekans yanıtıdır. N uzunluklu doğrusal fazlı bir FIR süzgeç olan $H_a(e^{j\omega})$'nin frekans yanıtı şöyle ifade edilebilir.

$$H_a(e^{j\omega}) = e^{-j((N-1)/2)\omega}.R(\omega) \tag{4.1.1}$$





Şekil 4.1.3 H_c süzgecinin gerçeklenmesi

Bu bölümde N değerinin, ikinci bölümden farklı olarak süzgeç uzunluğuna karşılık geldiği göz önünde bulundurulmalıdır. (4.1.1)'de, $R(\omega)$, ω açısal frekansına bağlı trigonometrik bir fonksiyondur [12]. H_a'nın tamamlayıcı süzgeci H_c'nin frekans yanıtı,

$$H_c(e^{j\omega}) = e^{-j((N-1)/2)\omega}.\{1 - R(\omega)\} \tag{4.1.2}$$

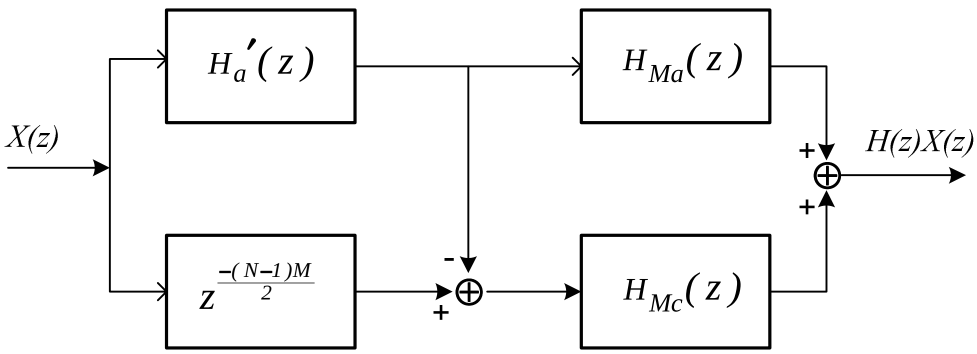
H_a süzgecinin z-dönüşümü $H_a(z)$ ve H_c süzgecinin z-dönüşümü,

$$H_c(z) = e^{-((N-1)/2)} - H_a(z) \tag{4.1.3}$$

Buna karşılık gelen transfer fonksiyonu ise $H_a(z) + H_c(z) = e^{-((N-1)/2)}$'dir. Bu nedenle, $H_a(z)$ gerçeklemesi verildiğinde, tamamlayıcı süzgeci $H_c(z)$, Şekil 4.1.3(a)'da görüldüğü gibi $H_a(z)$ süzgecinin çıkışı, girişinin ((N-1)/2). gecikmiş halinden çıkarılarak kolayca elde edilebilir [4]. H_c'nin H_a'dan elde edilmesi sırasında kullanılan fazladan gecikme elemanlarını tekrardan üretilmesi gerekmez, çünkü H_a süzgecinde kullanılan gecikmeler aynı amaçla kullanılabilir. H_c gerçeklenmesi Şekil 4.1.3(b)'de görülmektedir.

Şekil 4.1.5(a)'da olduğu gibi $R(\omega)$ trigonometrik fonksiyonuna bağlı bir H_a alçak geçiren süzgeci düşününüz. H_a süzgecinin kesim frekansları sırasıyla θ ve ϕ'dir. Tamamlayıcı süzgeç, H_c'nin frekans yanıtı Şekil 4.1.5(b) ile verilmiştir. $H_c(z)$, durdurma bandı sınırı θ ve iletim bandı sınırı ϕ olan yüksek geçiren bir süzgece eşdeğerdir [4]. H_a' ve H_c' süzgeçleri, H_a ve H_c süzgeçlerinde her gecikme elemanı M gecikme elemanı ile yer değiştirerek üretilir. H_a' ve H_c' süzgeçlerinin tek N değerleri için frekans yanıtları Şekil 4.1.5(c)'de verilmiştir. Tek-uzunluklu süzgeçler ω = 2π/M, 4π/M, ... frekanslarında pozitif periyodiklere sahiptir. Ancak çift uzunluklu süzgeçler ω = π/M, 3π/M, 5π/M,.... frekanslarında işaret değiştirir. Ardışıl frekans bandlarında -1 ve +1 genliklerine yaklaşır. İletim ve durdurma bandlarında büyük dalgalanmalara neden olurlar. Bu nedenle model süzgeç olarak tek-uzunluklu süzgeçler kullanılmalıdır [3].

$H'_a(e^{j\omega}) = H_a(e^{jM\omega})$ ve $H'_c(e^{j\omega}) = H_c(e^{jM\omega})$ sırasıyla H_a' ve H_c' süzgeçlerinin frekans yanıtlarıdır. İki maskeleme süzgeci H_{Ma} ve H_{Ma} 'nin frekans yanıtları, sırasıyla $H_{Ma}(e^{j\omega})$ ve $H_{Mc}(e^{j\omega})$, sırasıyla $H'_a(e^{j\omega})$ ve $H'_c(e^{j\omega})$ süzgeçlerini maskelemek için kullanılır. H_{Ma} ve H_{Mc} çıkışları Şekil 4.1.4' deki gibi toplanırsa, sonuç süzgeci H oluşur ve H süzgecinin frekans yanıtı $H(e^{j\omega})$ Şekil 4.1.5.e'de verilmiştir.



Şekil 4.1.4 FRM tekniğinin blok şeması

H süzgecinin band sınırları ω_{ilet} ve ω_{dur} ile gösterilirse, iletim bandı sınırı, ω_{ilet} ve durdurma bandı sınırı, ω_{dur} şu şekilde ifade edilebilir.

$$\omega_{ilet} = \frac{2m\pi + \theta}{M} \qquad (4.1.4.a)$$

$$\omega_{dur} = \frac{2m\pi + \phi}{M} \qquad (4.1.4.b)$$

Burada, m, M'den küçük bir tamsayıdır. Burada dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi, H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerinin grup gecikmeleri eşit olmalıdır. Bunun anlamı H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerinin uzunlukları ya ikisi de çift ya da ikisi de tek olmalıdır. Eğer gerekli ise, gecikmeleri eşitlemek için artan gecikmeler H_{Ma} veya H_{Mc}'ye eklenmelidir. İkincisi ise, yarım örnek gecikmelerinde korunmak için *(N-1)M* çift olmalıdır [12]. Burada *M* çift olmaya zorlanarak *N* değerine kullanım alanı açılabilir [6], ancak *N* tek alındığından bu durumda gerekli değildir.

H süzgecinin Şekil 4.1.5(e)'deki geçiş bandı civarındaki frekans yanıtı, temel olarak H'_a süzgecinin frekans yanıtından elde edilir. Eğer H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerinin frekans yanıtları Şekil 4.1.5(f)'deki gibi ise, *H* süzgecinin frekans yanıtı Şekil 4.1.5(g)'deki gibi oluşur. *H* süzgecinin geçiş bandı civarındaki frekans yanıtı, bu kez, temel olarak H'_c süzgecinin frekans yanıtından elde edilir. Bu durumda band sınırları ω_{ilet} ve ω_{dur} şu şekilde ifade edilebilir.

$$\omega_{ilet} = \frac{2m\pi - \phi}{M} \tag{4.1.5.a}$$

$$\omega_{dur} = \frac{2m\pi - \theta}{M} \tag{4.1.5.b}$$

FRM gerçeklenmesi probleminde ω_{ilet} ve ω_{dur} verilir, *m*, *M*, θ ve ϕ belirlenmelidir. Başlangıç olarak, bazı kriterlere göre tüm süzgecin karmaşıklığı minimum yapacak bir M değeri seçilmelidir. Daha sonra, θ, ϕ ve *m* terimleri, ω_{ilet}, ω_{dur} ve *M* terimleri cinsinden ifade edilmelidir. Bunu yapabilmek için, şu durumun varolduğunu kabul edelim.

$$0 < \theta < \phi < \pi \tag{4.1.6}$$

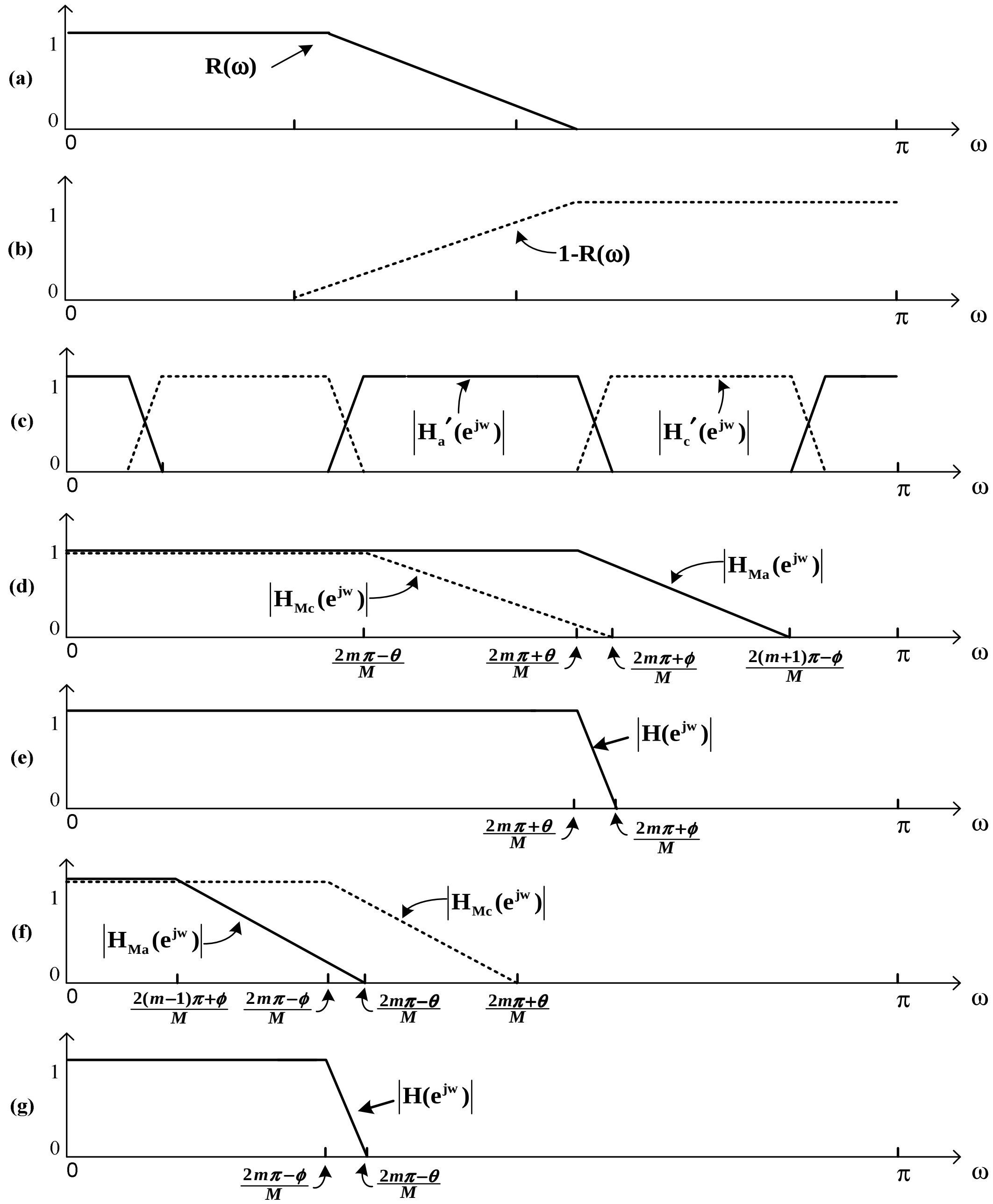
(4.1.4.a) ve (4.1.4.b) eşitliklerinden $0 < \theta < \phi$ için bir çözüm elde etmek için θ, ϕ ve *m* terimlerini, ω_{ilet}, ω_{dur} ve *M* cinsinden ifade ederiz.

$$m = \lfloor \omega_{ilet} M /(2\pi) \rfloor \tag{4.1.4.c}$$

$$\theta = \omega_{ilet} M - 2m\pi \tag{4.1.4.d}$$

$$\phi = \omega_{dur} M - 2m\pi \tag{4.1.4.e}$$

Burada $\lfloor \omega_{ilet} M /(2\pi) \rfloor$, $\omega_{ilet} M /(2\pi)$ değerinden daha küçük ya da eşit en büyük tamsayıdır.



Şekil 4.1.5 Frekans Yanıtı Maskeleme Tekniğinde kullanılan süzgeçlerin frekans yanıtları

(4.1.5.a) ve (4.1.5.b) eşitliklerinden $0 < \theta < \phi$ için bir çözüme ulaşmak için yine m, θ ve ϕ terimlerini ω_{ilet}, ω_{dur} ve M cinsinden ifade etmeliyiz.

$$m = \lceil \omega_{dur} M / (2\pi) \rceil \tag{4.1.5.c}$$

$$\theta = 2m\pi - \omega_{dur} M \tag{4.1.5.d}$$

$$\phi = 2m\pi - \omega_{ilet} M \tag{4.1.5.e}$$

Burada $\lceil \omega_{dur} M / (2\pi) \rceil$, $\omega_{dur} M /(2\pi)$ değerinden daha büyük veya eşit en küçük tamsayı değeridir. Verilen herhangi bir ω_{ilet}, ω_{dur} ve M veri seti için, (4.1.4) veya (4.1.5) eşitliklerinden sadece biri $\phi < \pi$ sınırlamasını sağlayarak θ ve ϕ veri setini elde edebilir.

Tüm süzgecin frekans yanıtı şu şekilde ifade edilebilir.

$$H(e^{j\omega}) = H'_a(e^{j\omega})H_{Ma}(e^{j\omega}) + [1-H'_a(e^{j\omega})]H_{Mc}(e^{j\omega}) \qquad (4.1.7a)$$

Tüm süzgecin frekans yanıtı, benzer bir yapıyla aşağıdaki gibi de verilebilir [13].

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j[(N_a-1)/2+maks((N_{Ma}-1),(N_{Mc}-1))\omega/2]} \qquad (4.1.7b)$$

Burada $H(\omega)$, $H(z)$ süzgecinin sıfır-fazlı frekans cevabını göstermektedir ve şu şekilde tanımlanır.

$$H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \qquad (4.1.7c)$$

$$H_1(\omega) = H_a(M\omega)H_{Ma}(\omega) \qquad (4.1.7d)$$

$$H_2(\omega) = [1 - H_a(M\omega)]H_{Ma}(\omega) \qquad (4.1.7e)$$

$H_a(e^{j\omega})$ süzgecinin geçiş bandı genişliğinin $M(\omega_{dur}-\omega_{ilet})$ olduğundan, verilen ω_{ilet} ve ω_{dur} için, $H_a(e^{j\omega})$ süzgecinin geçiş bandı genişliği, artan M değerleri ile artar. Böylece, H_a süzgecinin karmaşıklığı da artan M değerleri ile azalır. $H_{Ma}(e^{j\omega})$ ve $H_{Mc}(e^{j\omega})$ maskeleme süzgeçlerinin geçiş bandı genişlikleri toplam $\frac{1}{M}$'dir ve artan M değerleri ile azalır.

4.1.3 $H(e^{j\omega})$ Üzerindeki Dalgalanma Etkileri

$G_a'(\omega)$ ve $\delta_a'(\omega)$, $H_a'(\omega)$ süzgecinin sırasıyla arzulanan değeri ve sapması olsun. $H_a'(\omega)$ süzgecinin iletim bandında $G_a'(\omega) = 1$ ve durdurma bandında $G_a'(\omega) = 0$'dır. $H_a'(\omega)$ süzgecinin geçiş bandında, doğrusal faz teriminde küçük bir hata ile $G_a'(\omega)$'yi $H_a'(\omega)$'e eşit ve $\delta_a'(\omega) = 0$ olarak tanımlayacağız. Benzer şekilde, $G_{Ma}(\omega)$ ve $G_{Mc}(\omega)$ ile $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ sırasıyla $H_{Ma}(e^{j\omega})$ ve $H_{Mc}(e^{j\omega})$'nin arzulanan değeri ve sapması ise, tüm süzgecin frekans yanıtı ifadesi kullanılarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$G(\omega) + \delta(\omega) = \{ G_{Ma}(\omega) + \delta_{Ma}(\omega) \}.\{ G_a'(\omega) + \delta_a'(\omega) \}$$

$$+\{ G_{Mc}(\omega) + \delta_{Mc}(\omega) \}.\{ 1 - G_a'(\omega) - \delta_a'(\omega) \} \qquad (4.1.8)$$

Şimdi, H_a', H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçlerinin frekans yanıtlarının H süzgecinin frekans yanıtı üzerindeki etkilerini üç ayrı frekans bölgesinde inceleyelim.

Frekans Bölgesi 1. $G_{Ma}(\omega) = G_{Mc}(\omega) = 1$. Bu frekans bölgesinde, $G(\omega) = 1$ olduğundan (4.1.8) denklemi şu şekilde yeniden düzenlenebilir.

$$\delta(\omega) = G_a'(\omega).\{ \delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega) \} + \delta_{Mc}(\omega) + \delta_a'(\omega).\{ \delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega) \} \qquad (4.1.9)$$

ikinci derece terimi ihmal ederek (4.1.8) denklemini basitleştirirsek,

$$\delta(\omega) \approx G_a'(\omega).\{ \delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega) \} + \delta_{Mc}(\omega) \qquad (4.1.10)$$

$G_a'(\omega) = 1$ olduğunda, $\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega)$, (4.1.11a)

$G_a'(\omega) = 0$ olduğunda, $\delta(\omega) \approx \delta_{Mc}(\omega)$, (4.1.11b)

ve $0 < G_a'(\omega) < 1$ olduğunda, $|\delta(\omega)| \leq \text{maks}\{ |\delta_{Ma}(\omega)|, |\delta_{Mc}(\omega)| \}$ (4.1.11c)

olmaktadır.

Frekans Bölgesi 2. $G_{Ma}(\omega) = G_{Mc}(\omega) = 0$. Bu frekans bölgesinde, $G(\omega) = 0$ alınıp ikinci derece terimler de ihmal edilirse, (4.1.8) denklemi şu şekilde yeniden düzenlenebilir.

$$\delta(\omega) \approx G_a'(\omega).\{ \delta_{Ma}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega) \} + \delta_{Mc}(\omega) \qquad (4.1.12)$$

$G_a'(\omega) = 1$ olduğunda, $\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega)$, (4.1.13a)

$G_a'(\omega) = 0$ olduğunda, $\delta(\omega) \approx \delta_{Mc}(\omega)$, (4.1.13b)

ve $0 < G_a'(\omega) < 1$ olduğunda, $|\delta(\omega)| \leq \text{maks}\{ |\delta_{Ma}(\omega)|, |\delta_{Mc}(\omega)| \}$ (4.1.13c)

olmaktadır.

Frekans Bölgesi 3. Frekans bölgesi 1 ve 2 dışında kalan frekans bölgelerini içerir. Şekil 4.1.5d'de görülen $(2m\pi - \theta)/M < \omega < (2(m+1)\pi - \phi)/M$ aralığında, $G_{Ma}(\omega)$ ve $G_{Mc}(\omega)$ frekans yanıtları ile $(2(m - 1)\pi + \phi)/M < \omega < (2m\pi - \theta)/M$

aralığında, Şekil 4.1.5f'de görülen $G_{Ma}(\omega)$ ve $G_{Mc}(\omega)$ frekans yanıtlarından oluşur. Öncelikle, Şekil 4.1.5d'deki $G_{Ma}(\omega)$ ve $G_{Mc}(\omega)$ frekans yanıtları bölgesini içeren durumu ele alalım.

$(2m\pi - \theta)/M < \omega < \omega_{ilet}$ için, $G(\omega) = G_a'(\omega) = G_{Ma}(\omega) = 1$ 'dir. İkinci derece terim ihmal edilirse,

$$\delta(\omega) \approx \delta_{Ma}(\omega) + \delta_a'(\omega).\{ 1 - G_{Mc}(\omega) \} \tag{4.1.14a}$$

ω, frekans değerleri $(2m\pi - \theta)/M$ 'den ω_{ilet} frekansına doğru artarken, $G_{Mc}(\omega)$ birden sıfıra doğru azalır. Bu nedenle $(2m\pi - \theta)/M < \omega < \omega_{ilet}$ için,

$$|\delta(\omega)| \leq |\delta_{Ma}(\omega)| + |\delta_a'(\omega)| \tag{4.1.14b}$$

$\omega_{dur} < \omega < (2(m+1)\pi - \phi)/M$ için, $G(\omega) = G_a'(\omega) = G_{Mc}(\omega) = 0$ 'dır. İkinci derece terim $\delta_a'(\omega).\ \delta_{Ma}(\omega)$ ihmal edilirse,

$$\delta(\omega) \approx G_{Ma}(\omega).\delta_a'(\omega) + \delta_{Mc}(\omega) \tag{4.1.15a}$$

ω frekans değerleri, ω_{dur} frekansından $(2(m+1)\pi - \phi)/M$ frekansına doğru artarken, $G_{Ma}(\omega)$ birden sıfıra doğru azalır. Bu nedenle $\omega_{dur} < (2(m + 1)\pi - \phi)/M < \omega$ için,

$$|\delta(\omega)| \leq |\delta_{Mc}(\omega)| + |\delta_a'(\omega)| \tag{4.1.15b}$$

(4.1.14b) ve (4.1.15b) ile verilen sınırlar en kötü durumlar için düşünülmüştür [12].

4.1.4 $H_a(\omega)$ Süzgecinin Optimize Edilmesi

H süzgecinin geçiş bandı civarındaki frekanslar için, $\delta_a'(\omega)$, $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ 'nin etkilerini kısmen bastıracak şekilde bir $R(\omega)$ tasarlanabilir. Ancak tersi doğru değildir. Yani, eğer $H_a'(\omega)$ önce elde edilirse, $\delta_a'(\omega)$ 'nin etkilerini azaltacak şekilde $H_{Ma}(\omega)$ ve $H_{Mc}(\omega)$ üretmek mümkün değildir. H_a' süzgecinin etkin uzunluğu $(N\text{-}1)M\text{+}1$ 'dir ve H_{Ma} ile H_{Mc} süzgeçlerinin etkin uzunluklarından çok büyüktür. Bu nedenle, H_{Ma} ve H_{Mc} süzgeçleri önce tasarlanmalı, ardından $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ 'nin etkilerini azaltacak şekilde H_a' tasarlanmalıdır. Ayrıca $\delta_a'(\omega)$ 'nin etkili olabilmesi için, $\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ 'nin genliklerinin, $\delta(\omega)$ 'nin izin verilen en büyük genliğinin % 10 ya da % 15 daha küçüğü olmalıdır.

$\delta_{Ma}(\omega)$ ve $\delta_{Mc}(\omega)$ ‘nin etkilerini azaltacak şekilde bir $R(\omega)$ tasarlamak için, $\delta(\omega)$ ve $R(\omega)$ arasında doğrusal bir denklem elde edilmelidir. Bu denklem, (4.1.8) eşitliği yeniden düzenlenerek şu şekilde elde edilebilir.

$$\delta(\omega) = R(M\omega).\{ G_{Ma}(\omega) + \delta_{Ma}(\omega) - G_{Mc}(\omega) - \delta_{Mc}(\omega)\} + G_{Mc}(\omega) + \delta_{Mc}(\omega) - G(\omega) \tag{4.1.16}$$

(4.1.16) denklemi, Şekil 4.1.5d ‘ye karşılık gelen $(2m\pi - \theta)/M < \omega < (2(m+1)\pi - \phi)/M$ frekans bölgesi ve Şekil 4.1.5f ’e karşılık gelen $(2(m - 1)\pi + \phi)/M < \omega < (2m\pi - \theta)/M$ frekans bölgesini içeren frekanslar için hesaplanmalıdır. $|\delta(\omega)|$ ‘nin minimum yapılması bir doğrusal programlama problemidir ve standart matematik programlama paketleri ile çözülebilir. Eğer sınırlı kelime uzunluklu katsayı değerleri gerekli ise, bu kez sınırlı kelime uzunluklu süzgeç tasarım yöntemleri kullanılabilir. Bunun yanında, [6]’de özellikleri açıklanan dalgalanma iyileştirme çalışmasına göre, genel olarak model süzgecin iletim ve durdurma bandılarının normalize dalgalanmalarının en küçüğü seçilir ve bu değerin yarısı her iki band için de uygulanır. Bu işlemin amacı, model ve tamamlayıcısının eşit dalgalanmalara sahip olup maskelendikten sonra da arzulanan süzgeç özelliklerine sahip olmasıdır. [0, π] frekans aralığı boyunca sabit bir dalgalanma değeri kullanmak gereksizdir. Dalgalanma değerlerinin yarısı alındığında iletim bandı için gerekli dalgalanma büyüklerinin çok daha küçüğü ve gerekli durdurma bandı zayıflamasının da çok daha büyüğü elde edilir. Daha etkin bir FRM süzgeç elde etmek için her iki maskeleme süzgecinin başlangıç bölgeleri için gerekli dalgalanma değerinin % 50’si ve geri kalan frekans bölgeleri için % 80-85’i kullanılabilir. Eğer arzulanan kazanç ve dalgalanma ağırlıkları uygun seçilmişse, $H_a(\omega)$ ‘nin en uygun hale getirilmesi için Reméz algoritması kullanılabilir. Bu tezde tüm süzgeçlerin tasarımı Reméz algoritması ile yapılmıştır.

4.1.5 Optimum *M* Faktörünün Seçimi

M ara-değerleme faktörünün en uygun hale getirilmesi için kapalı bir analitik ifade yoktur. Ancak uygun M değerinin seçimi, tüm M değerleri için bütün alt-süzgeçlerin karmaşıklığı hesaplanıp en küçük karmaşıklığı veren M değerinin seçilmesi ile başarılabilir. Tüm süzgecin gerçeklenebilmesi için gerekli çarpıcı sayısı [6]’da şu şekilde verilmektedir.

$$\Pi = f(N_a) + f(N_{Ma}) + f(N_{Mc}) \tag{4.1.17}$$

burada,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{2} & , x \text{ çift} \\ \dfrac{N-1}{2} + 1 & , x \text{ tek} \end{cases} \tag{4.1.18}$$

Ayrıca süzgecin etkin uzunluğu ise şu şekilde tanımlanır.

$$N_{Etkin} = M(N_a - 1) + maks(N_{Ma} - 1, N_{Mc} - 1) \tag{4.1.19}$$

Daha açıklayıcı olması için aşağıdaki özelliklere sahip doğrusal fazlı alçak geçiren bir FIR süzgeç tasarlayalım.

Örnekleme frekansı : f_s = 2π

İletim bandı sınırı : ω_{ilet} = 0.4π

Durdurma bandı sınırı : ω_{dur} = 0.4002π

İletim bandı dalgalanması : δ_{iletdB} = 0.05 dB

Durdurma bandı δ_{durdB} = -50 dB

Yapılması gereken ilk işlem M ara-değerleme faktörünün seçilmesidir. M'in en uygun değerinin belirlenmesi, en az karmaşıklığa sahip süzgece karşılık düşen M değerini bulan basit bir program (*optimumM.m*) ile bulunabilir. Program çıktısı Tablo 4.1.1 ile verilmiştir. Tablo 4.1.1'de tüm alt-süzgeçlerin band sınırları ve gerekli en küçük uzunlukları verilmektedir.

$m = \lfloor \omega_{ilet} M / (2\pi) \rfloor$ = 0.4 x π x 51/ (2 x π) = 10

$\theta = \omega_{ilet} M - 2m\pi$ = 0.4 x π x 51 – 2 x 10 x π = 0.4π = 1.2566

$\phi = \omega_{dur} M - 2m\pi$ = 0.4 x π x 51 – 2 x 10 x π = 0.4π = 1.2566

Süzgeç Boyunu Minimize Eden M Değerinin Tahmini												
M	Durum	theta	phi	wpMa	wsMa	wpMc	wsMc	Nf	NmA	NmC	Carp. Sayısı	
3	2	0.7994	0.8000	0.2667	0.4002	0.4000	0.9331	10150	40	10	5103	
4	2	0.3992	0.4000	0.1000	0.4002	0.4000	0.5998	7612	18	26	3831	
5	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
6	1	0.4000	0.4012	0.4000	0.5998	0.2667	0.4002	5074	27	39	2573	
7	1	0.8000	0.8014	0.4000	0.4569	0.1714	0.4002	4350	94	24	2237	
8	2	0.7984	0.8000	0.3500	0.4002	0.4000	0.5998	3806	107	27	1973	
9	2	0.3982	0.4000	0.2667	0.4002	0.4000	0.4887	3384	40	60	1745	
10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
11	1	0.4000	0.4022	0.4000	0.5089	0.3273	0.4002	2768	49	73	1448	
12	1	0.8000	0.8024	0.4000	0.4331	0.2667	0.4002	2538	161	39	1372	
13	2	0.7974	0.8000	0.3692	0.4002	0.4000	0.5229	2342	173	43	1282	
14	2	0.3972	0.4000	0.3143	0.4002	0.4000	0.4569	2174	63	93	1168	
15	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
16	1	0.4000	0.4032	0.4000	0.4748	0.3500	0.4002	1904	72	106	1044	
17	1	0.8000	0.8034	0.4000	0.4233	0.3059	0.4002	1792	229	57	1042	
18	2	0.7964	0.8000	0.3778	0.4002	0.4000	0.4887	1692	238	60	998	
19	2	0.3962	0.4000	0.3368	0.4002	0.4000	0.4419	1602	85	127	910	
20	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
21	1	0.4000	0.4042	0.4000	0.4569	0.3619	0.4002	1450	94	140	845	
22	1	0.8000	0.8044	0.4000	0.4180	0.3273	0.4002	1384	297	73	880	
23	2	0.7954	0.8000	0.3826	0.4002	0.4000	0.4694	1324	303	77	855	
24	2	0.3952	0.4000	0.3500	0.4002	0.4000	0.4331	1268	107	161	771	
25	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
26	1	0.4000	0.4052	0.4000	0.4460	0.3692	0.4002	1172	116	172	733	
27	1	0.8000	0.8054	0.4000	0.4146	0.3407	0.4002	1128	365	89	794	
28	2	0.7944	0.8000	0.3857	0.4002	0.4000	0.4569	1088	368	94	778	
29	2	0.3942	0.4000	0.3586	0.4002	0.4000	0.4274	1050	129	195	690	
30	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
31	1	0.4000	0.4062	0.4000	0.4385	0.3742	0.4002	982	139	205	666	
32	1	0.8000	0.8064	0.4000	0.4123	0.3500	0.4002	952	434	106	749	
33	2	0.7934	0.8000	0.3879	0.4002	0.4000	0.4483	922	433	111	736	
34	2	0.3932	0.4000	0.3647	0.4002	0.4000	0.4233	896	151	229	641	
35	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
36	1	0.4000	0.4072	0.4000	0.4331	0.3778	0.4002	846	161	237	625	
37	1	0.8000	0.8074	0.4000	0.4106	0.3568	0.4002	822	503	123	727	
38	2	0.7924	0.8000	0.3895	0.4002	0.4000	0.4419	802	497	127	716	
39	2	0.3922	0.4000	0.3692	0.4002	0.4000	0.4203	780	173	263	611	
40	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
41	1	0.4000	0.4082	0.4000	0.4291	0.3805	0.4002	742	184	270	601	
42	1	0.8000	0.8084	0.4000	0.4093	0.3619	0.4002	724	572	140	721	
43	2	0.7914	0.8000	0.3907	0.4002	0.4000	0.4370	708	561	145	710	
44	2	0.3912	0.4000	0.3727	0.4002	0.4000	0.4180	692	195	297	595	
45	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
46	1	0.4000	0.4092	0.4000	0.4259	0.3826	0.4002	662	206	302	588	
47	1	0.8000	0.8094	0.4000	0.4083	0.3660	0.4002	648	642	156	726	
48	2	0.7904	0.8000	0.3917	0.4002	0.4000	0.4331	634	625	161	713	
49	2	0.3902	0.4000	0.3755	0.4002	0.4000	0.4161	622	216	330	587	
50	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
51	1	0.4000	0.4102	0.4000	0.4233	0.3843	0.4002	598	229	335	584	
52	1	0.8000	0.8104	0.4000	0.4075	0.3692	0.4002	586	712	172	738	
53	2	0.7894	0.8000	0.3925	0.4002	0.4000	0.4300	574	688	178	723	
54	2	0.3892	0.4000	0.3778	0.4002	0.4000	0.4146	564	238	364	586	
55	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	
56	1	0.4000	0.4112	0.4000	0.4212	0.3857	0.4002	544	252	368	585	

Tablo 4.1.1 M ara-değerleme faktörünün tahmini

Süzgeç Boyunu Minimize Eden M Değerinin Tahmini											
M	Durum	theta	phi	wpMa	wsMa	wpMc	wsMc	Nf	NmA	NmC	Carp. Sayısı
57	1	0.8000	0.8114	0.4000	0.4068	0.3719	0.4002	534	782	188	755
58	2	0.7884	0.8000	0.3931	0.4002	0.4000	0.4274	524	752	194	738
59	2	0.3882	0.4000	0.3797	0.4002	0.4000	0.4134	516	260	398	590
60	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
61	1	0.4000	0.4122	0.4000	0.4195	0.3869	0.4002	500	274	400	590
62	1	0.8000	0.8124	0.4000	0.4063	0.3742	0.4002	492	853	205	778
63	2	0.7874	0.8000	0.3937	0.4002	0.4000	0.4252	484	814	212	758
64	2	0.3872	0.4000	0.3813	0.4002	0.4000	0.4123	476	282	434	599
65	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
66	1	0.4000	0.4132	0.4000	0.4180	0.3879	0.4002	462	297	433	599
67	1	0.8000	0.8134	0.4000	0.4058	0.3761	0.4002	454	924	222	803
68	2	0.7864	0.8000	0.3941	0.4002	0.4000	0.4233	448	877	229	780
69	2	0.3862	0.4000	0.3826	0.4002	0.4000	0.4114	442	303	467	609
70	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0

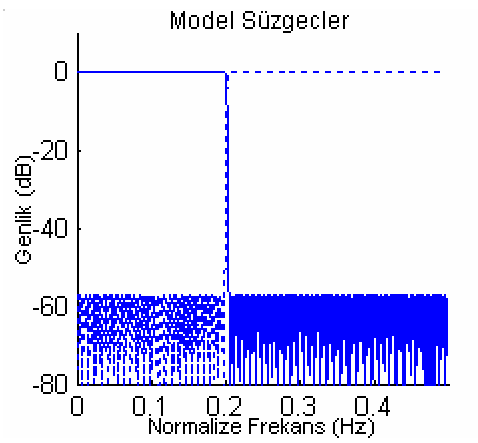
Secilen optimum M = 51
Optimum Süzgeç Uzunlukları
Optimum Nf = 598
Optimum NmA = 229
Optimum NmC = 335
Minimum Carpıcı Sayısı = 584

Tablo 4.1.1 M ara-değerleme faktörünün tahmini (devam)

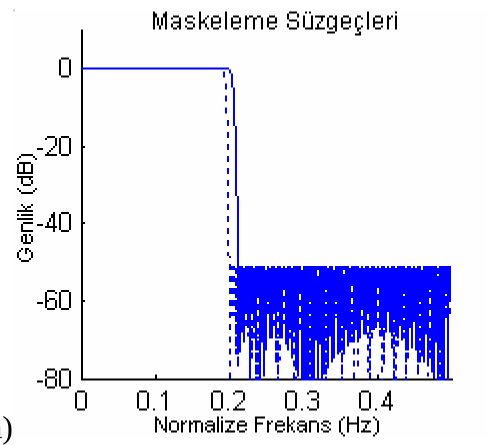
Band sınırı şekillendiren süzgeç için gerekli minimum süzgeç uzunluğu 599'dur. M_a süzgeci ve M_c süzgeci için gerekli minimum süzgeç uzunlukları ise sırasıyla 229 ve 335'dir.

Oluşturulan model süzgeç ve tamamlayıcısı Şekil 4.1.6(a) ile verilmiştir. Maskeleme süzgeçleri ise Şekil 4.1.6(b)2'de görülmektedir. Tez boyunca kesikli çizgilerle gösterilen süzgeçler tamamlayıcı süzgeç ve M_c süzgecidir.

Tasarlanılması istenen tüm süzgecin frekans cevabı ve bu süzgecin iletim bandı dalgalanması ile durdurma bandı bastırması Şekil 4.1.7'de incelenebilir.

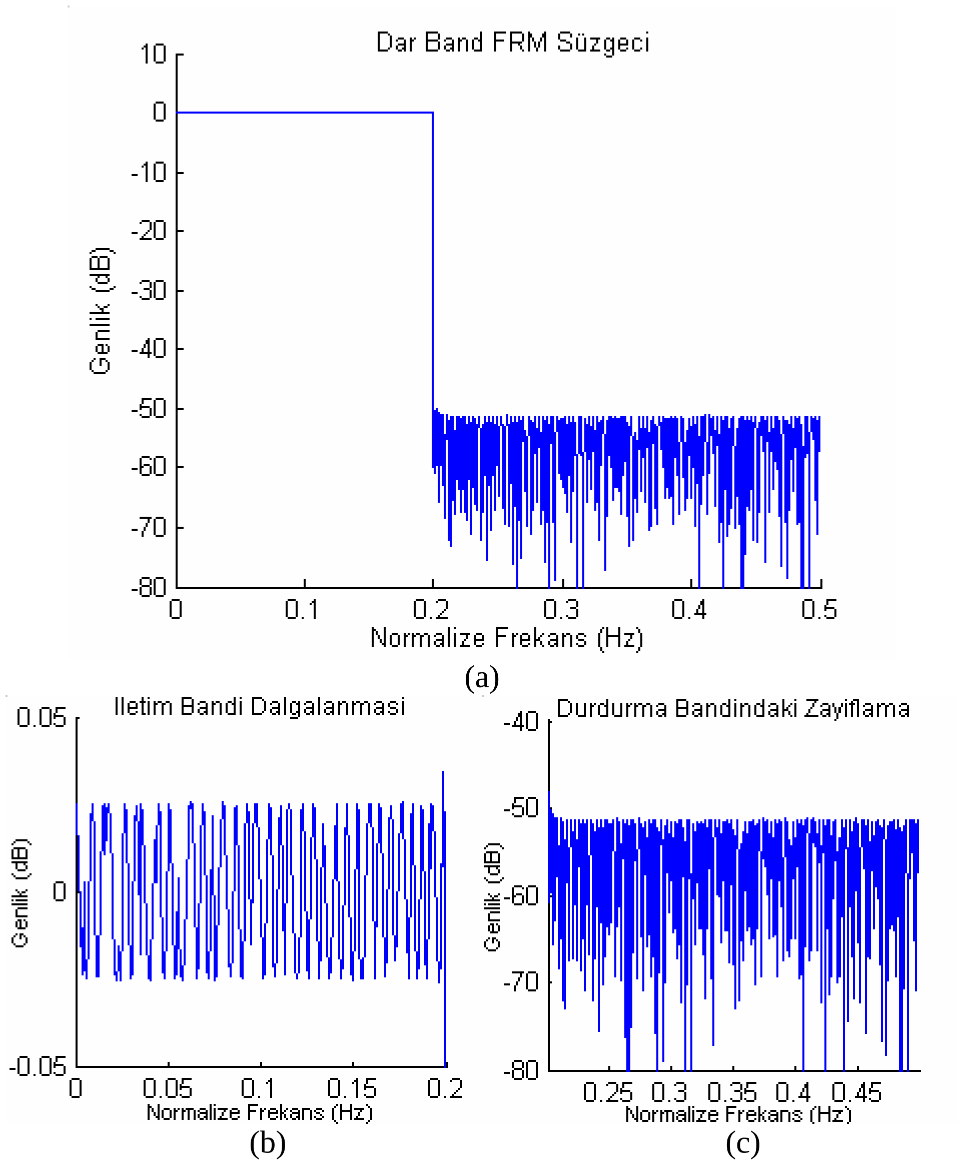


(a)



(b)

Şekil 4.1.6 Model Süzgeçler ve Maskele Süzgeçleri



Şekil 4.1.7 (a) Arzulanan süzgecin frekans cevabı, (b) İletim bandı dalgalanması (c) Durdurma bandı bastırması

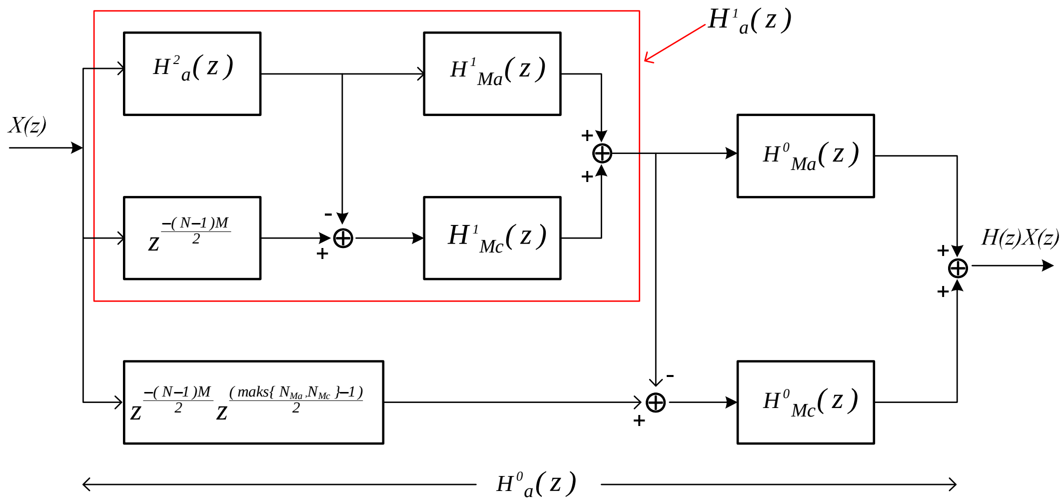
(*FRM_Kat1.m*) dosyası çıktısı yandaki gibi oluşmuştur.

En büyük iletim bandı dalgalanması : 0.034051 dB
En küçük iletim bandı dalgalanması : -0.026403 dB
En küçük durdurma bandı bastırması : -50.195531 dB
nM nin optimum degeri 51 dir
thetaA = 0.400000 (π)
phiA = 0.410200 (π)
thetamA = 0.400000 (π)
phimA = 0.423329 (π)
thetamC = 0.384314 (π)
phimC = 0.400200 (π)
Remez Süzgeç için gerekli süzgeç uzunluğu 24116 dir
mA süsgecinin uzunluğu 230 dir
mC süsgecinin uzunluğu 336 dir
A süsgecinin uzunluğu 601 dir
Toplam Süzgecin uzunlugu Ma+Mc+Fa = 229 + 335 +599 = 1163
Süzgecin Etkin Uzunluğu = (599-1)51+335 =30833

Tablo 4.1.2 *FRM_Kat1.m* programı çıktısı

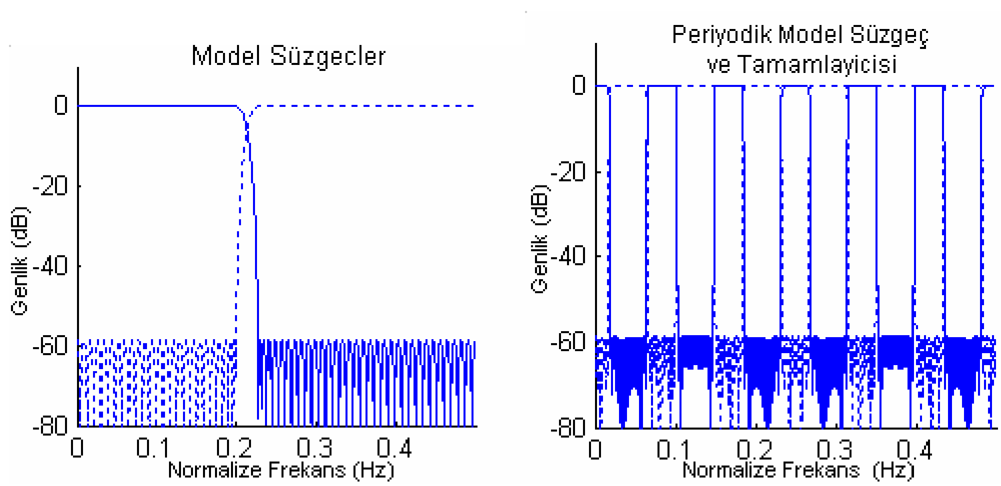
4.1.6 Yüksek Katlı FRM Yapısı

Alt-süzgeçler H_a, H_{Ma} ve H_{Mc}'nin karmaşıklıklarını azaltmak için daha yüksek katlı FRM yapıları kullanılabilir. Tablo 4.1.1'de verilen değerler ele alındığında, tek-katlı FRM yapısı yerine iki-katlı FRM yapısı kullanılırsa, daha az karmaşıklığa sahip bir süzgeç elde edilebilir. Örneğin M = 23 alınırsa, H_a süzgeci için gerekli süzgeç uzunluğu 1324'tür. Bu H_a süzgeci, FRM tekniği kullanılarak bir alt-süzgeçler sistemi ile elde edilebilir. Bu sistemi gerçekleyecek 2-katlı FRM yapısı Şekil 4.1.8 ile verilmiştir.

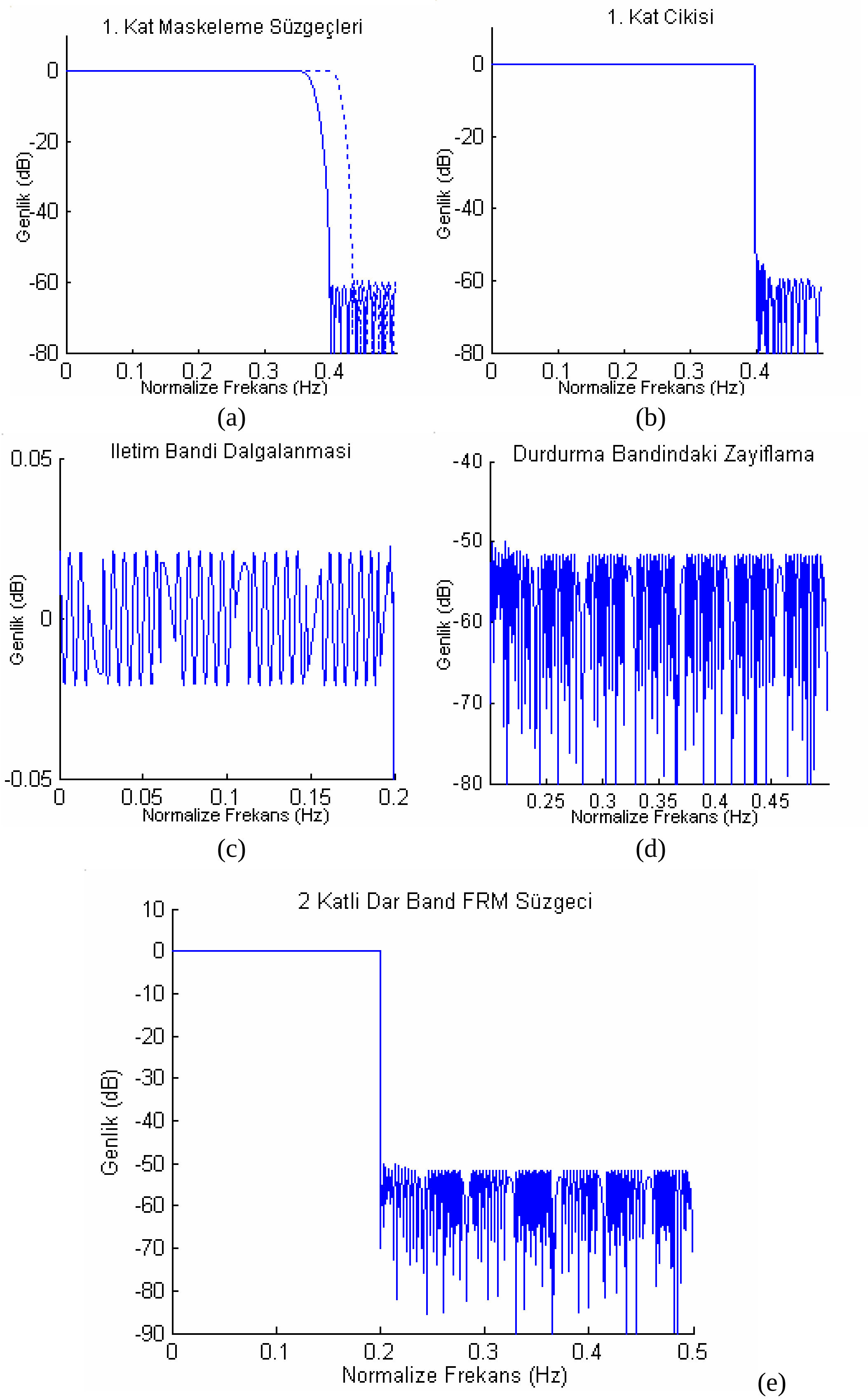


Şekil 4.1.8 2-Katlı FRM yapısı

2-Katlı FRM yapısında $H_a(z)$ süzgeci, $H^1_a(z)$ yapısı ile yer değiştirilmiştir. $H^2_a(z)$, $H^1_{Ma}(z)$ ve $H^1_{Mc}(z)$ süzgeçlerinin uzunlukları sırasıyla 117, 73 ve 93'tür. Buna karşılık $H^0_{Ma}(z)$ ve $H^0_{Mc}(z)$ süzgeçleri uzunlukları sırasıyla 310 ve 84'tür. Tüm süzgeç için gereken toplam süzgeç uzunluğu ise 677'dir.



Şekil 4.1.9 2-Katli FRM yapısı için model ve band sınırı şekillendiren süzgeçler



Şekil 4.1.10 2-Katli FRM yapısında (a) Maskeleme süzgeçleri (b) 1. Kat çıkışı (c) İletim bandı dalgalanması (d) Durdurma bandı bastırması (e) 2-Katlı FRM süzgecinin frekans cevabı

(*FRM_Kat2.m*) dosyası çıktısı yandaki gibi oluşmuştur.

1. kat Ha1 uzunlugu = 117 1. kat Hma1 uzunlugu = 73 1. kat Hmc1 uzunlugu = 93 1. kat Çıkış Etkin uzunlugu = 1477 2. kat Hma2 uzunlugu = 310 2. kat Hmc2 uzunlugu = 84 Toplam Suzgec uzunlugu = Ha1+Ma1+Mc1+Ma2+Mc2 = 117 + 73 + 93 + 310 + 84 = 677 Süzgecin Etkin Uzunluğu = ((117-1)12+93)23+310 = 34465 Bulunan ilk optimum M= 51 Secilen M= 23 Mopt2= 12 En büyük iletim bandı dalgalanması 0.022605 En küçük iletim bandı dalgalanması -0.020893 En küçük durdurma bandı bastırması -50.043889

Tablo 4.1.3 *FRM_Kat2.m* programı çıktısı

4.2 Optimum Çok-Katlı FRM Tasarımı

Geleneksel FRM tekniği birçok doğrusal fazlı FIR süzgeç tasarımı uygulamaları için en kullanışlı yöntemdir. Ancak, bu tekniği daha da kullanışlı hale getirmek için, hangi tür uygulamalarda kullanılabileceği, hangi geçiş bandı genişlikleri için etkili olacağı ve de sonuçta yararlı olabilirliği için bir ölçüt koymak gerekmektedir. FRM tekniği, bazı yaklaşımlar ve yaklaşıklıklar kullanılarak hangi koşullar altında etkili olacağı, istenilen süzgeci elde etmek için kaç katlı bir FRM yapısının kullanılması gerektiği ve her kat için en uygun ara-değerleme faktörü bulunarak optimum hale getirilmiştir.

Geçiş band genişliği βf_s olan alçak geçiren bir süzgecin optimum (reméz) uzunluğu N_0, yaklaşık olarak şöyle ifade edilir [5]. f_s, örnekleme frekansıdır.

$$N_0 = \frac{\Phi_1(\delta_1,\delta_2)}{\beta} - \Phi_1(\delta_1,\delta_2).\beta + 1 \tag{4.2.1}$$

Burada δ_1, iletim bandı dalgalanması ve δ_2, durdurma bandı dalgalanmasıdır. $\Phi_1(\delta_1,\delta_2)$ ve $\Phi_2(\delta_1,\delta_2)$ ifadeleri Ek-A'da verilmiştir. β ise reel bir değişkendir. $\beta \leq 0.2$ değerleri için ilk terim daha baskın olur ve diğerleri ihmal edilebilir [14].

$$N_0 = \frac{\Phi_1(\delta_1,\delta_2)}{\beta} \quad , \beta \leq 0.2 \tag{4.2.2}$$

Genel olarak, N_0 uzunluklu bir süzgeç, N_0 adet katsayıya sahiptir. Ancak bunların sadece % 50'si bilgi taşır. N_0 ya da $N_0/2$ tane çarpıcı kullanılacağı uygulama şemasına bağlıdır. Bu nedenle gerekli çarpıcı sayısını L_0 ile gösterelim.

$$L_0 \approx \frac{\alpha.\Phi_1(\delta_1,\delta_2)}{\beta} \tag{4.2.3}$$

Eğer çarpıcı sayısı N_0 ise, $\alpha = 1$ alınır, eğer $N_0/2$ adet çarpıcı gerekliyse bu kez $\alpha = 1/2$ alınır.

FRM tekniği kullanıldığında, $H_a(z)$'nin tepe dalgalanma büyüklüğü, $H(z)$'nin izin verilen en büyük tepe genliğinden küçük olmalıdır. $H_a(z^M)$ daha sonra $H_{Ma}(z)$ ile kaskad bağlanacağından, bu iki süzgecin dalgalanmaları toplamı yaklaşık olarak $H(z)$'nin dalgalanmasına eşit olacaktır. Ancak bunun süzgeç uzunluğunun belirlenmesi üzerinde çok önemli bir etkisi yoktur. Süzgeç uzunluğunun belirlenmesi dalgalanma büyüklüğünden çok geçiş bandı genişliğine bağlıdır. Ayrıca, $H_a(z^M)$'nin dalgalanması kısmen $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ dalgalanmaları ile azaltılabilir. Bu nedenle, ilk olarak dalgalanmaların azaltılmasından çok yararlı sonuçlar elde etmemizi sağlayacak bazı yaklaşımlar üzerinde durulacaktır. $H_a(z)$ ve $H_a(z^M)$ arasındaki ilişki esas alındığında $H_a(z)$'nin gerçeklenmesi için gerekli çarpıcı sayısı L_a şu şekilde ifade edilebilir.

$$L_a \approx \frac{L_0}{M} \tag{4.2.4}$$

Ara-değerleme süzgeçleri $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ karmaşıklığı onların band sınırlarına bağlıdır. Orijinal FRM yapısından da görülebileceği gibi $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$'nin geçiş band genişlikleri toplamı $2\pi/M$'dir. L_{Ma} ve L_{Mc} sırasıyla, $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ süzgeçlerinin ihtiyaç duydukları çarpıcı sayısı olsun. Burada süzgeç uzunluğunun, geçiş band genişliği ile ters orantılı olduğu ve $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$'nin geçiş bandı genişliklerinin toplamının $2\pi/M$ olduğu gerçeği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir [15].

$$L_{Ma} + L_{Mc} \propto \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\frac{2\pi}{M} - \Lambda} \tag{4.2.5}$$

Λ, $H_{Ma}(z)$ süzgecinin geçiş bandı genişliğidir. L_{Ma} ve L_{Mc} toplamının Λ'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse, Λ için şu çözüm bulunur.

$$\Lambda = \frac{\pi}{M} \tag{4.2.6}$$

$H_{Mc}(z)$ süzgecinin geçiş band genişliği $2\pi/M - 2\pi/M = 2\pi/M$ olarak bulunur. Bu sonuçla, L_{Ma} ve L_{Mc} toplamının minimum değeri için $H_{Ma}(z)$'nin geçiş band genişliği $H_{Mc}(z)$'nin geçiş band genişliğine eşittir ve böylece,

$$L_{\mathrm{Ma}} = L_{\mathrm{Mc}} \tag{4.2.7}$$

$H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$'nin gerçek band sınırları, $H(z)$'nin gerçek band sınırları kullanılarak belirlenir. Bu nedenle, minimum karmaşıklık için $L_{Ma} \approx L_{Mc}$ ($L_{Ma} = L_{Mc}$ yerine) alınabilir [14]. $H_{Ma}(z)$ (ya da uygun $H_{Mc}(z)$) süzgecinin iletim bandı tepe dalgalanmasının yaklaşık olarak $H(z)$ süzgecinki ile aynı olduğunu varsayalım. Sonuçta,

$$L_{Ma} \approx L_{Mc} \approx 2M\beta L_0 \tag{4.2.8}$$

Buna bağlı olarak süzgecin tasarlanması için gerekli toplam çarpıcı sayısı, L için uygun ifade şu şekilde yazılabilir.

$$L = L_a + L_{Ma} + L_{Mc} \approx \left(\frac{1}{M} + 4M\beta\right).\, L_0 \tag{4.2.9}$$

L ifadesinin *M*'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\mathrm{M}_{\mathrm{opt}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \tag{4.2.10}$$

eşitliği elde edilir. M_{opt}, minimum karmaşıklık elde etmek için kullanılması gereken *M* değeridir. Görüldüğü gibi M_{opt} α'a bağlı bir fonksiyon değildir. Bu da gösterir ki, uygulamada kullanılan dürtü yanıtının simetri özelliğinden bağımsızdır. Minimum karmaşıklık için, toplam çarpıcı sayısı $L_{\min}$,

$$L_{\min} = 4L_0\sqrt{\beta} \tag{4.2.11}$$

(4.2.2) ve (4.2.11) denklemlerinden,

$$L_{\min} \approx \frac{4\,\alpha\,\Phi_1(\delta_1,\delta_2)}{\sqrt{\beta}} \tag{4.2.12}$$

(4.2.12) denkleminde, 1-katlı maskeleme için süzgeç karmaşıklığı, geçiş bandı genişliğinin karekökü ile ters orantılıdır. Buradan, FRM tekniğinin dar geçiş bandlı süzgeçlerde daha etkili olduğu çıkarımı yapılabilir. FRM tekniğinin etkili olması için gerekli süzgeç uzunlukları ya da karmaşıklık $L_{\min} = L_0$ noktasında başlar [14]. Bu noktada $\beta = \beta_{\mathrm{b}}$ alınmıştır. β_{b} (4.2.11) denkleminden kolaylıkla bulunabilir.

$$\beta_b \approx \frac{1}{16} \approx 0.063 \tag{4.2.13}$$

Burada, β_b, α, δ_1, δ_2 ‘den bağımsızdır. Sonuç olarak, tasarlanacak süzgecin geçiş bandı genişliği $0.063f_s$ ‘den daha küçük olduğunda, FRM tekniği bu süzgeç için gerekli çarpıcı sayısında bir kazanç sağlar. Üstte yapılan türetmede, $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ süzgeçlerinin geçiş band genişlikleri yaklaşık olarak aynı varsayılmıştır. Ancak $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$’nin band sınırları, M değerinden ve $H(z)$ süzgecinin band sınırlarından belirlendiği için, $M = M_{opt}$ olduğunda, $H_{Ma}(z)$’nin geçiş bandı genişliğini yaklaşık olarak $H_{Mc}(z)$’nin geçiş bandı genişliğine eşit olması sadece bir tesadüftür [14]. Yine de, $H_{Ma}(z)$’nin geçiş bandı genişliğinin yaklaşık olarak $H_{Mc}(z)$’nin geçiş bandı genişliğine eşit olacak şekilde, M değerlerini M_{opt} civarında çeşitlendirmek olasıdır. Sonuç olarak, L’nin M’e göre duyarlılığını bilmek yararlı olacaktır. $M = M_{opt}$ noktasında L’nin M’e göre ikinci türevi,

$$\left.\frac{d^2L}{dM^2}\right|_{M=M_{opt}} \approx 16.\beta^{3/2} \tag{4.2.14}$$

β çok küçük bir değer olduğundan, ikinci türev de çok küçük bir değere sahiptir. β değerinin çok küçük olmaması durumunda FRM tekniğini kullanmamızın bir anlamı da olmazdı. Bu nedenle, $M = M_{opt}$ için L’nin M’e göre duyarlılığı küçüktür. L’nin M’in büyük değişimlerine olan duyarlılığının incelenmesi için, $M = 2M_{opt}$ ve $M = 0.5M_{opt}$ değerleri (4.2.9) denkleminde yerine koyulursa, her iki M değeri için de $L = 1.25L_{min}$ olarak elde edilir. M değeri 2 kat arttırıldığında ya da azaltıldığında L değeri sadece % 25 yükselir. Buradan L’nin M’in büyük değişimlerine olan duyarlılığının çok küçük olduğu görülebilir.

Bir süzgecin özelliklerini anlamak için kullanılan biri de etkin süzgeç uzunluğu N_{etkin}’dir. Grup gecikmesinin $(N_{etkin}$ -1)/2 olduğundan, N_{etkin}’in küçük olması istenir. FRM süzgecinin etkin süzgeç uzunluğu,

$$N_{etkin} \approx (1+\frac{M}{M_{opt}}\sqrt{\beta})N_0 \tag{4.2.15}$$

β çok küçük olduğundan, etkin süzgeç uzunluğu N_0’dan çok az büyüktür. $M = M_{opt}$ olduğunda, $N_{etkin} \approx (1+\beta)N_0$ ‘dır. $L_{Ma} \approx L_{Mc}$ denkliğini sağlamak için, çoğu durumda M, M_{opt} değerine eşit olacak şekilde seçilmez. Eğer aynı karmaşıklığı üreten iki M değeri varsa, etkin uzunluğu daha küçük olan M değeri seçilir.

4.2.1 Optimum Süzgecinin Tasarımı

Eğer $H_a(z)$ süzgecinin derecesi çok yüksek ise, $H_a(z)$'nin karmaşıklığını azaltmak için FRM tekniği kullanılabilir. Bu teknik birden fazla kat kullanılarak tasarlanabildiğinden, çok-katlı FRM tekniğini daha iyi anlayabilmek için, aşağıdaki alt-süzgeç ilişkisi tanımlanmalıdır.

$$H_a^i(z) = H_a^{i+1}(z).H_{Ma}^i(z) + H_c^{i+1}(z).H_{Mc}^i(z) \tag{4.2.16}$$

$H_c^i(z)$, $H_a^i(z)$ süzgecinin tamamlayıcısıdır. $H_{Ma}^i(z)$ ve $H_{Mc}^i(z)$ ara-değerleyicilerdir. $H_a^0(z)$ ise sistemin tümüdür.

i. katta, prototip süzgecin her gecikme elemanı, $M_1M_2......M_i$ gecikme elemanı ile yer değiştirilir. Şekil 4.2.4 ile *K*-katlı bir FRM yapısı verilmiştir. Bir önceki bölümde kabul edilen varsayımlara dayanarak, uygulama için gerekli toplam çarpıcı sayısı $L(K)$,

$$L(K) = \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{K} M_i} + 4\beta L_0 \sum_{i=1}^{K} M_i \tag{4.2.17}$$

$L(K)$'nın M_i , i = 1, 2...., K değerlerine göre parçalı türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, $L(K)$, $M_1=M_2=....... =M_K=M_{opt}(K)$ olduğunda minimum olur.

$$M_{opt} = (4\beta)^{\frac{-1}{(K+1)}} \tag{4.2.18}$$

1-katlı FRM yapısında olduğu gibi, *K*-katlı tasarımda da $M_{opt}(K)$ değeri iletim ve durdurma bandı dalgalanmalarından bağımsızdır. $L_{min}(K)$ ile gösterilen $L(K)$'nın minimum değeri,

$$\begin{aligned} L_{min}(K) &\approx (M_{opt}^{-K}(K) + 4\beta K M_{opt}(K))L_0 \\ &\approx (K+1).4^{K/(K+1)}.\frac{\alpha\,\Phi(\delta_1,\delta_2)}{\beta^{1/(K+1)}} \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Bu nedenle, süzgecin karmaşıklığı β'nın $(K+1)$. Kökü ile ters orantılıdır. 1-katlı FRM yapısında $\beta < 1/16$ için L_{min} değerinin L_0 değerinden küçük olduğu görülmüştü. Bu kez hangi koşullar altında 2-katlı FRM yapısının, 1-katlı olandan daha az karmaşık olacağını bilmek yararlı olacaktır. Genel olarak, $(K+1)$-katlı FRM tasarımının, *K*-katlı FRM tasarımından daha az karmaşık olmasını sağlayan koşulu bilmek daha yaralı olacaktır. (4.2.19) denklemi değiştirilerek (K+1)-katlı tasarımın K-katlı tasarımdan daha az karmaşık olduğu durumun, $\beta < \beta_b(K)$,

$$\beta_b(K) \approx \tfrac{1}{4}.(\tfrac{K+1}{K+2})^{(K+1)/(K+2)} \tag{4.2.20}$$

$\beta_b(K)$, δ_1, δ_2, ve α değişkenlerinden bağımsızdır. $\beta_b(K)$'nın K = 0, 1 ..., 9 için değerleri Tablo 4.2.1 ile verilmiştir.

K	***B_b(K)***	***K***	***B_b(K)***
0	0.063	5	0.00039
1	0.022	6	0.00014
2	0.0079	7	0.000052
3	0.0029	8	0.000019
4	0.0011	9	0.0000070

Tablo 4.2.1 K = 1, 2,....9 için $\beta(K)$ değerleri

(4.2.20) denklemi, K'nın uygun değerlerinin aşağıdaki şartı sağlaması gerektiği göstermektedir.

$$\beta_b(K) \leq \beta \leq \beta_b(K-1) \tag{4.2.21}$$

Bu kısıtlama aşağıdaki sınırlamayı da beraberinde yaratır.

$$(\tfrac{K+1}{K})^{K} \leq M_{opt}(K) \leq (\tfrac{K+2}{K+1})^{K+2} \tag{4.2.22}$$

$((K+1)/K)^K$ değeri K = 1 için 2'den, $K = \infty$ için e'ye (doğal logaritma) doğru artar. $((K+2)/(K+1))^K$ değeri ise K = 1 için 3.4'ten, $K = \infty$ için e'ye doğru azalır. Böylece, verilen bir β değeri için uygun K değeri (3.2.21) denklemi ve $M_{opt}(K)$ değeri de (3.2.19) denklemi ile hesaplanabilir. Bu nedenle $L_{min}(K)$, β, δ_1, δ_2, cinsinden yazılabilir.

$$L_{min}(\beta, \delta_1, \delta_2) \approx \xi(\beta).\alpha.\Phi(\delta_1, \delta_2) \tag{4.2.23}$$

$\xi(\beta)$ değerleri Tablo 3.2.2 ile verilmiştir.

β	K	$\xi(\beta)$	β	K	$\xi(\beta)$
0.063–0.022	1	$4.00 / \beta^{1/2}$	0.00037 – 0.00014	6	$22.97 / \beta^{1/7}$
0.022–0.0079	2	$7.56 / \beta^{1/3}$	0.00014 – 0.000052	7	$26.91 / \beta^{1/8}$
0.0079–0.0029	3	$11.31 / \beta^{1/4}$	0.000052 – 0.000019	8	$30.86 / \beta^{1/9}$
0.0029 – 0.0011	4	$15.16 / \beta^{1/5}$	0.000019 – 0.000007	9	$34.82 / \beta^{1/10}$
0.0011 – 0.00039	5	$19.05 / \beta^{1/6}$	0.000007 – 0.0000047	1	$38.79 / \beta^{1/11}$

Tablo 3.2.2 $\xi(\beta)$ fonksiyonu değerleri

Üstteki tüm ifadeler iki varsayım üzerine kuruludur. Birincisi, her alt-süzgecin uzunluğu $\Phi_1(\delta_1,\delta_2)$/(alt süzgecin geçiş bandı genişliği) ile verilir. Bu varsayımın aslında yanlış olduğu açıktır, çünkü süzgeçler kaskad bağlanmaktadır. Bu nedenle, her bir süzgeç daha sıkı bir koşula bağlı olmalı ve Reméz süzgeç yapısını sağlamalıdır. Bu sıkı koşulun, tüm iletim ve durdurma bandlarına uygulanması gereksizdir. Sadece geçiş bandı etrafındaki iletim ve durdurma bandlarında geçerli olması yeterlidir.

İkincisi varsayımda ise, $H^i_{Ma}(z)$'nin karmaşıklığı yaklaşık olarak $H^i_{Mc}(z)$'nin karmaşıklığı ile aynıdır. Daha önceden de söylendiği gibi bu sadece bir rastlantıdır. Bu nedenle, analiz işlemi sırasında $H^i_{Ma}(z)$'nin karmaşıklığının yaklaşık olarak $H^i_{Mc}(z)$'nin karmaşıklığı ile aynı olması gerektiği kısıtlamasını sağlayacak şekilde, M_i değerleri $M_{\text{opt}}(K)$ civarında seçilmelidir. Bir çok durumda, $M_{\text{opt}}(K)$ civarında üstteki kısıtlamayı sağlayan çok sayıda M_i değeri bulunabilir. Buna bağlı olarak, uygun M_i değerini bulmak için bir strateji geliştirmek gereklidir. (4.2.23) denkleminden, $H^{i+1}_a(z)$'nin gerçeklenmesi için tahmin edilen gerekli karmaşıklık $\xi(\beta_a(i+1))$ ile orantılıdır. Burada $\beta_a(i+1)$, $H^{i+1}_a(z)$'nin geçiş bandı genişliğidir. $H^i_{Ma}(z)$ ve $H^i_{Mc}(z)$'nin tahmin edilen karmaşıklıkları sırasıyla, $1/\beta_{Ma}(i)$ ve $1/\beta_{Mc}(i)$ ile orantılıdır. Burada, $\beta_{Ma}(i)$, $H^i_{Ma}(z)$'nin geçiş bandı genişliği ve $\beta_{Mc}(i)$ de $H^i_{Mc}(z)$'nin geçiş bandı genişliğidir.

$H^{i+1}_a(z)$, $H^i_{Ma}(z)$ ve $H^i_{Mc}(z)$'nin tahmin edilen karmaşıklıkları için orantı sabitleri birbiriyle aynı değildir, ancak yaklaşık olarak aynı kabul edilebilir. Sonuçta, uygun M_i, $\xi(\beta_a(i+1)) + 1/\beta_{Ma}(i) + 1/\beta_{Mc}(i)$ toplamını minimum yapan M_i olarak seçilir.

Çok-katlı FRM yapısının sentezi için gerekli prosedür şimdi formüle edilebilir. Yukarıdaki kısıtlamalar nedeniyle, *i*. katta M_i, $M_{\text{opt}}(K)$ ile aynı olmayabildiğinden, katların gerçek sayısı, tahmin edilen kat sayısı ile aynı olmayabilir.

Uygun kat sayısını ve her kat için gerekli M değerlerini bulmak için aşağıdaki gibi algoritma izlenebilir [14].

1.Adım. $i = 0$ alarak algoritma başlatınız. $H_a^0(z)$ için verilen özellikler, tüm sisteme ait özelliklerdir. İkinci adıma geçiniz.

2.Adım. $H_a^i(z)$'nin özellikleri, Tablo 4.2.1 ve (4.2.21) denkleminden K değeri hesaplayınız. Eğer $K \geq 1$ ise üçüncü adıma geçiniz.

3.Adım. i değerini bir arttırınız. Dördüncü adıma geçiniz.

4.Adım. $\{ \xi(\beta_a(i+1)) + 1/\beta_{Ma}(i) + 1/\beta_{Mc}(i) \}$ toplamını minimum yapacak M_i değerini seçiniz. İkinci adıma geri dönünüz.

Yukarıdaki algoritmada K, i değeri ile değişir. M_i'nin her zaman $M_{opt}(K)$ değerine eşit olmaması nedeniyle, M_i değerini seçtikten sonra, $H_a^{i+1}(z)$'nin karmaşıklığını minimum yapacak yeni bir K değeri bulmak gereklidir.

Sonuç olarak, K-katlı optimum FRM yapısını elde ederken şu üç sonuç elde edilmiştir.

1. FRM katlarının sayısı arttıkça M ara-değerleme faktörü e (doğal logaritma) değerine yaklaşır.

2. K-katlı bir optimum tasarım için tüm süzgecin karmaşıklığı, süzgecin geçiş bandının $(K+1)$. kare kökü ters orantılıdır.

3. FRM tekniği, eğer normalize geçiş bandı genişliği 1/16 (0.063)'dan daha küçük ise etkilidir.

Genelleştirilmiş bir K-katlı Optimum FRM yapısı Şekil 4.2.1'de verilmektedir. K-katlı optimum FRM tasarımı ile aşağıdaki özelliklere sahip bir süzgeç tasarlayalım.

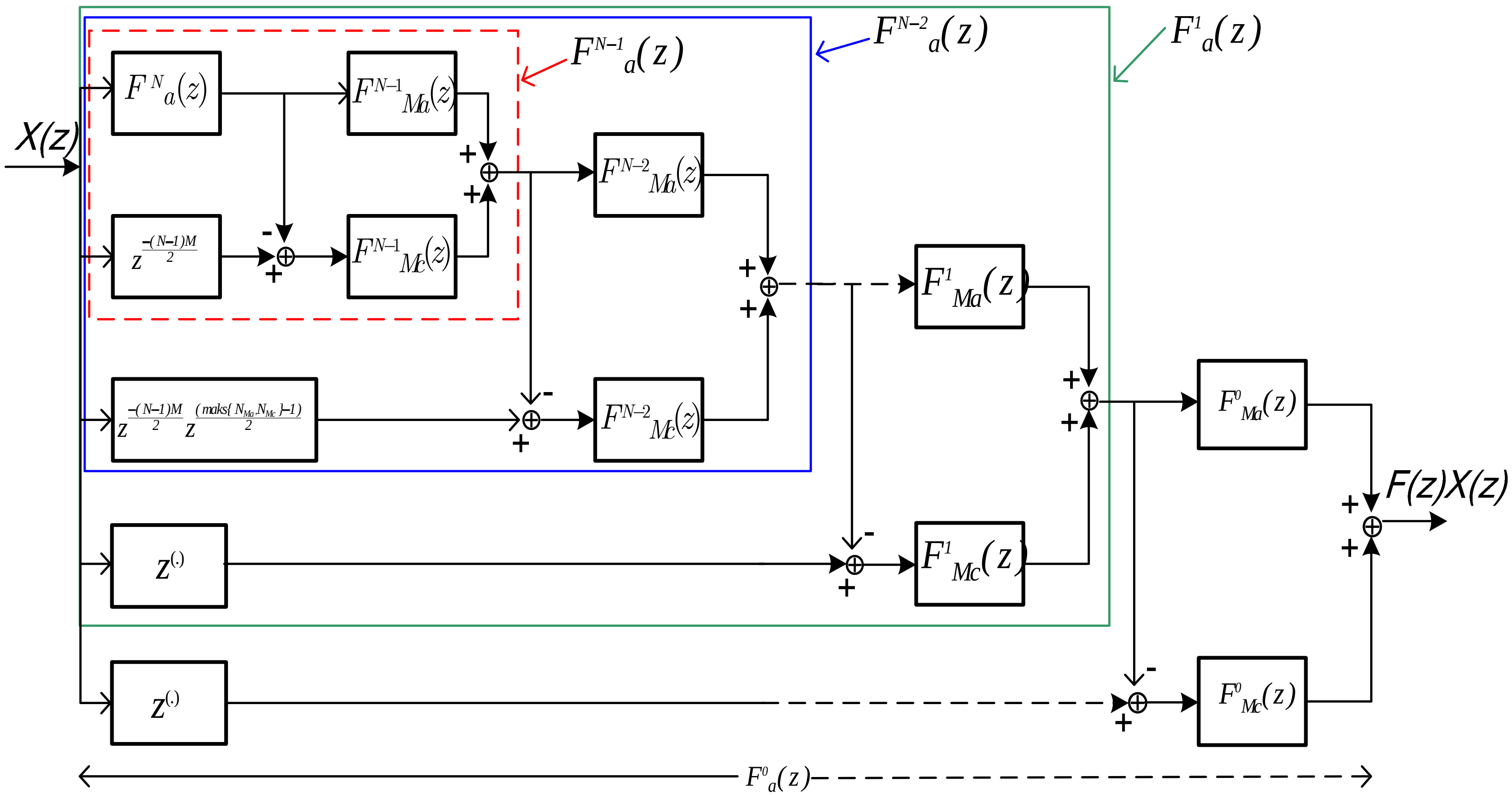
Örnekleme frekansı : $f_s = 2\pi$

İletim bandı sınırı : $\omega_{ilet} = 0.4\pi$

Durdurma bandı sınırı : $\omega_{dur} = 0.4002\pi$

İletim bandı dalgalanması : $\delta_{iletdB} = 0.05$ dB

Durdurma bandı $\delta_{durdB} = 50$ dB



Şekil 4.2.1 *K*-Katlı Optimum FRM yapısı

Yukarıdaki algoritma adımları izlenerek optimum *M* değerleri ve buna bağlı olarak gereken kat sayısı hesaplanır. Bu örnek için kat sayısı 5 olarak bulunur. Optimum kat sayısını ve gerekli alt-süzgeçlerin gereken tüm özellikleri, *OptimumKkatli.m* kodu ile hesaplanmıştır. Program çıktısı Tablo 4.2.3 ile verilmiştir. Tablo 4.2.4'de ise tüm alt-süzgeçlerin band sınırları verilmiştir. Tüm band sınırları ve gerekli süzgeç uzunlukları geleneksel FRM tekniğinde verilen tasarım denklemleri ile bulunur.

5-katli optimum FRM yapısında her katın model süzgeçleri Şekil 4.2.2 ile verilmiştir. Elde edilen çıkış süzgeci 5-katlı FRM süzgecinin genlik cevabı, iletim bandı dalgalanması ve durdurma bandı bastırması Şekil 4.2.3'te görülebilir.

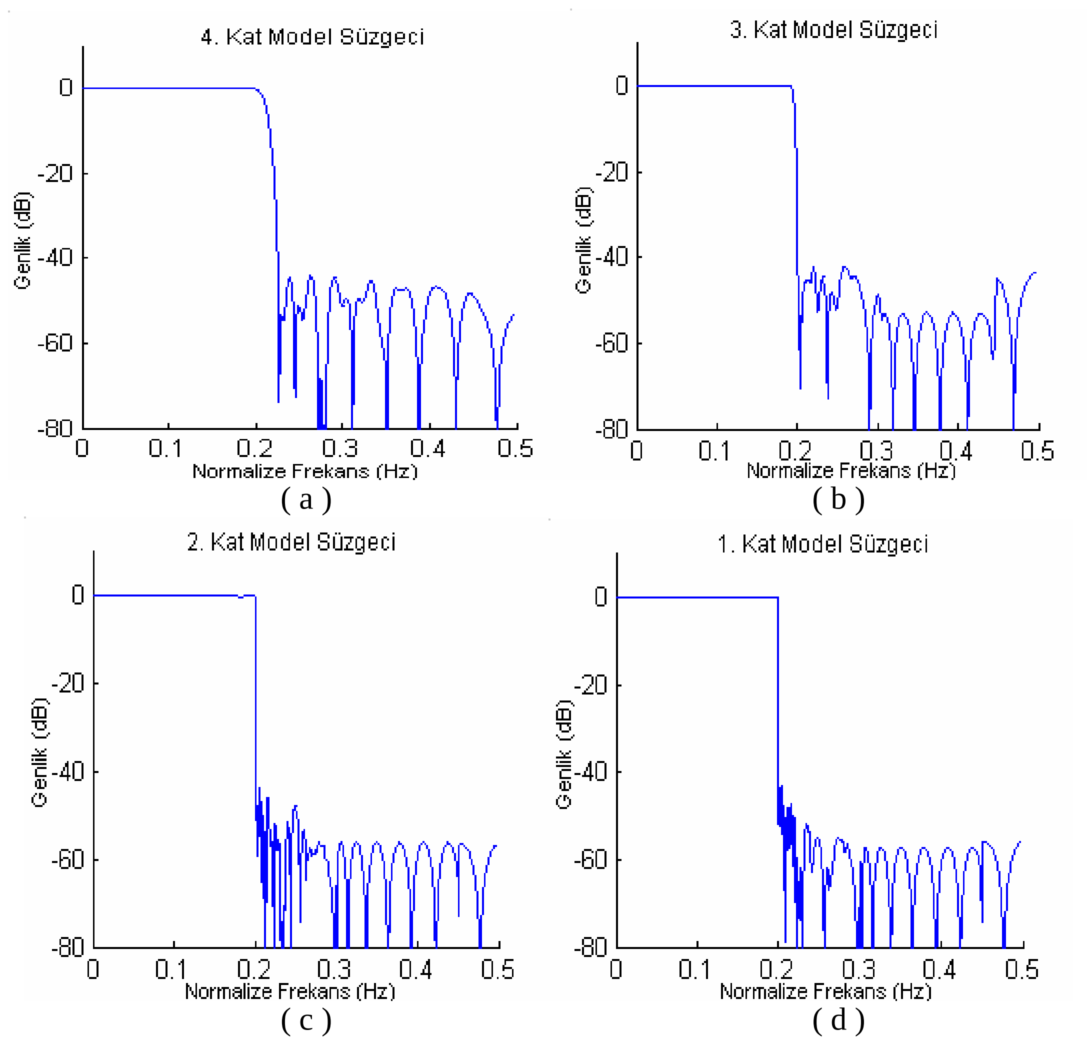
İletim bandı dalgalanması yaklaşık olarak ± 0.03 dB civarındadır. Durdurma bandı bastırması ise -50 dB üzerindedir.

Kat sayısı = 5
$M_{optDizisi}$ = 4 4 4 4 3
M_{opt5} = 3 M_{opt4} = 4 M_{opt3} = 4 M_{opt2} = 4 M_{opt1} = 4
1. Kat En büyük iletim bandı dalgalanması = 0.040564
1. Kat En küçük iletim bandı dalgalanması = -1.666899
1. Kat En küçük durdurma bandı bastırması = -43.052085
Süzgecin en büyük iletim bandı dalgalanması = 0.039345
Süzgecin en küçük iletim bandı dalgalanması = -0.036509
Süzgecin en küçük durdurma bandı bastırması = -50.104453
A_5 süzgecinin uzunlugu = 39
Ma_4 süzgecinin uzunlugu = 27
Mc_4 süzgecinin uzunlugu = 11
Ma_3 süzgecinin uzunlugu = 17
Mc_3 süzgecinin uzunlugu = 27
Ma_2 süzgecinin uzunlugu = 21
Mc_2 süzgecinin uzunlugu = 31
Ma_1 süzgecinin uzunlugu = 21
Mc_1 süzgecinin uzunlugu = 33
Ma_0 süzgecinin uzunlugu = 27
Mc_0 süzgecinin uzunlugu = 29
Tüm Süzgecin Etkin Uzunluk = 38481

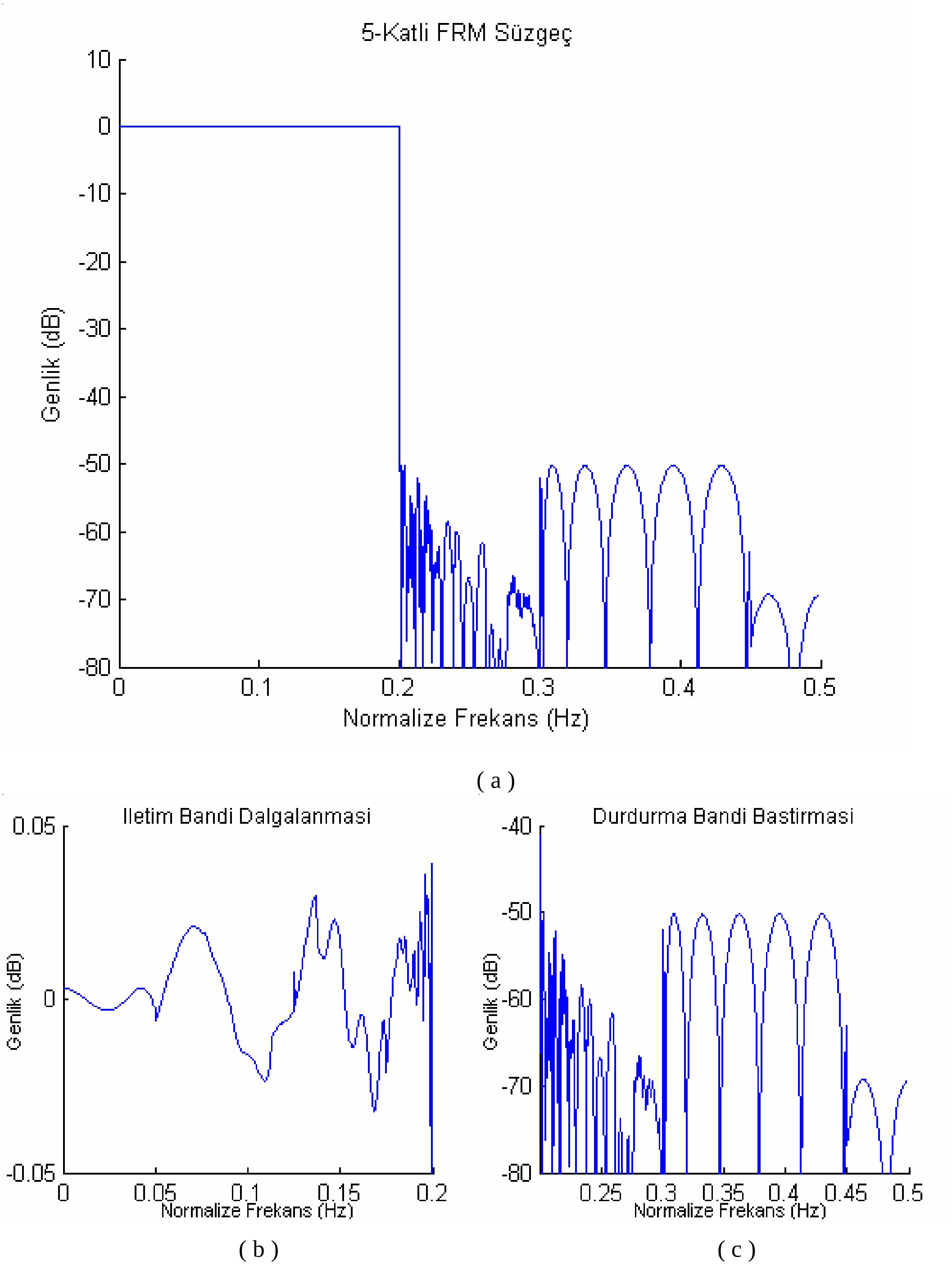
Tablo 4.2.3 *OptimumKkatli.m* Program çıktısı

***K.* Kat**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**Süzgeç**
θ	2.0307	1.2566	1.2667	1.2566	1.2541	-	1.2566 (0.4π)
ϕ	2.5133	1.4175	1.2566	1.2667	1.2566	-	1.2573 (0.4002)
$\omega_{ilet\text{-}Ma}$	-	0.8378	0.3544	0.3142	0.3167	0.3142	-
$\omega_{dur\text{-}Ma}$	-	1.4175	1.2566	1.2667	1.2566	1.2573	-
$\omega_{ilet\text{-}Mc}$	-	1.2566	1.2164	1.2566	1.2541	1.2566	-
$\omega_{dur\text{-}Mc}$	-	2.7713	1.8850	1.8749	1.8850	1.8843	-

Tablo 4.2.4 5. katlı FRM yapısı için tüm alt-süzgeçlerini band sınırları



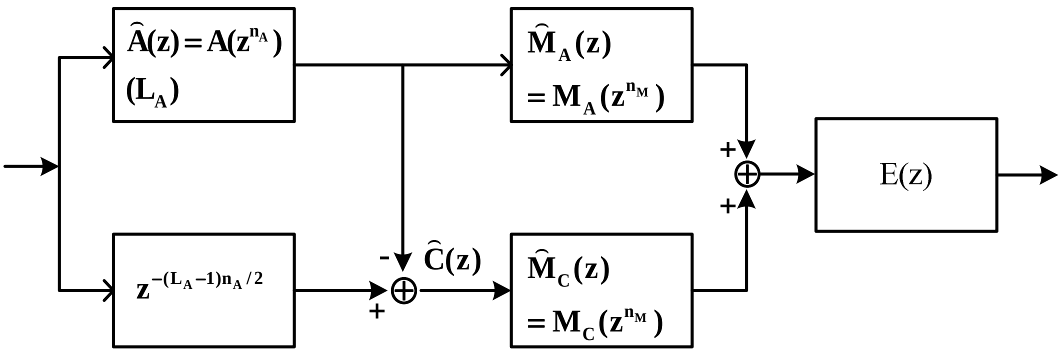
Şekil 4.2.2 Tüm katlar için model süzgeçler (a) 4. kat (b) 3. kat (c) 2. kat (d) 1. kat



Şekil 4.2.3 5-katlı FRM süzgecinin (a) genlik cevabı, (b) iletim bandı dalgalanması (c) durdurma bandı bastırması

4.3 IFIR FRM Tekniği

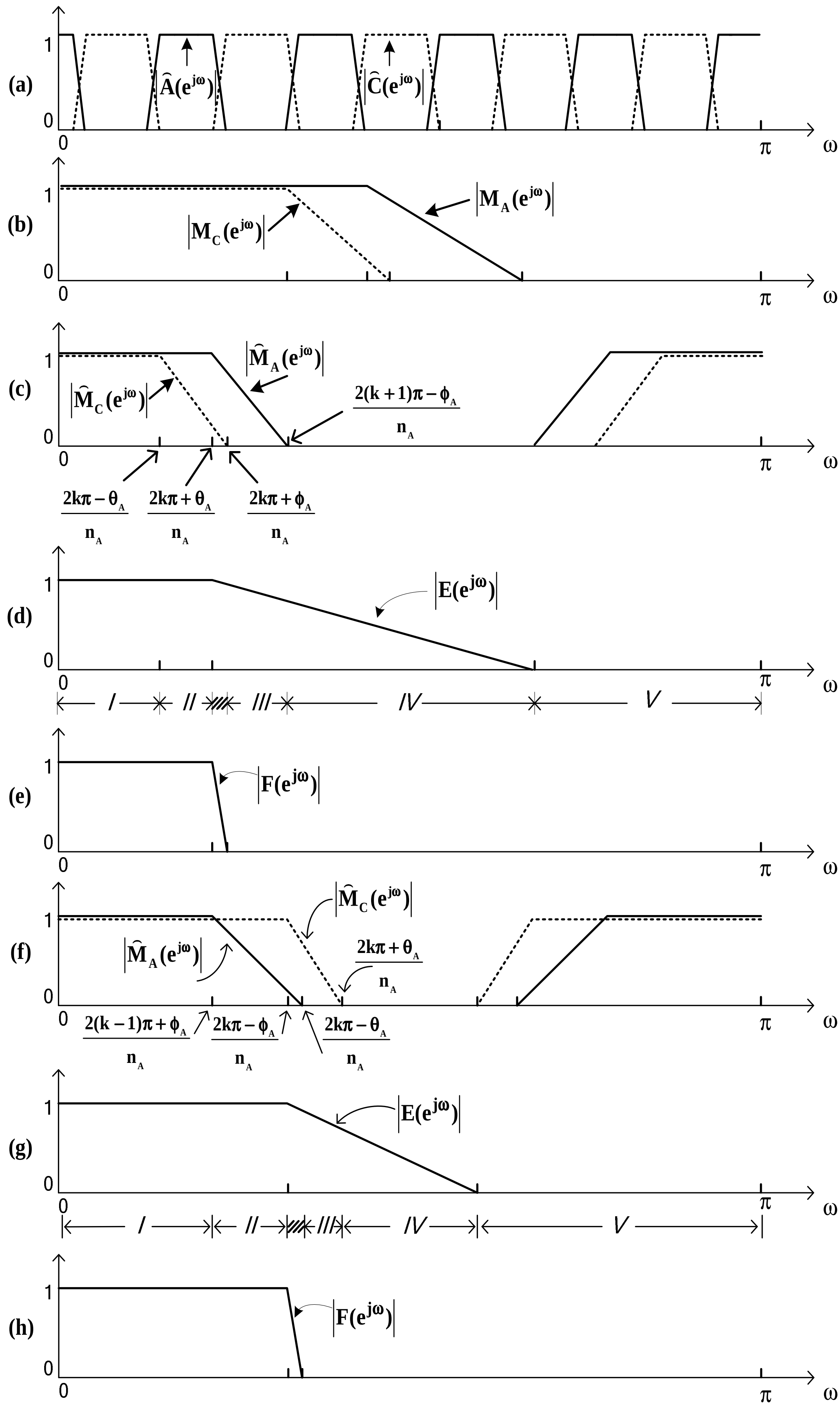
IFIR FRM süzgeçleri, geleneksel FRM süzgeçlerde kullanılan maskeleme süzgeçlerinin ara-değerlenmesi ve oluşan istenmeyen-periyodiklerin bir maskeleme süzgeci ile yok edilmesi ile oluşturulur. Elde edilen bu yeni yapı Şekil 4.3.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.3.1 IFIR FRM yapısı

Geleneksel FRM tekniğinde, frekans maskeleme süzgeçleri M_A ve M_C 'nin geçiş bandları, band kenarı şekillendiren süzgeçten elde edilir. Arzulanan süzgecin geçiş band çok dar ise, n_A çok büyük seçilmelidir. Bu durumda, iki maskeleme süzgeci M_A ve M_C süzgeçlerinin geçiş bandları çok dar olur. Bu geçiş bandını gerçeklemek için yüksek dereceli süzgeçler gereklidir. Bu problemin üstesinden gelmek için, IFIR FRM tekniğinde M_A ve M_C süzgeçleri yeni bir yapıya kavuşturulmuştur. n_M'in tamsayı değerleri için, $\hat{M}_A(z) = M_A(z^{n_M})$ ve $\hat{M}_C(z) = M_C(z^{n_M})$ yapısındadır. Bu durumda, $\hat{M}_A(z)$ ve $\hat{M}_C(z)$ süzgeçlerinin geçiş bandı genişliği, $M_A(z)$ ve $M_C(z)$ süzgeçlerinin geçiş bandından n_M kez daha dardır. Ancak bu kez de, $\hat{M}_A$ ve $\hat{M}_C$ süzgeçleri yüksek frekanslarda istenmeyen periyodikler üretir. Şekil 4.3.2'de görüldüğü gibi $n_M = 2$ alınarak üretilen bir IFIR FRM süzgecinde, bu istenmeyen periyodikler, alçak geçiren bir $E(z)$ süzgeci ile yok edilir. $n_M = 1$ alındığında, E süzgecinin kullanılmasına gerek yoktur ve bu durum geleneksel FRM süzgeci elde etmeye eşdeğerdir. Bir başka deyişle, geleneksel FRM, IFIR FRM'nin özel bir hali olmaktadır [16].

IFIR FRM için süzgeç tasarım problemi, n_M ve n_A belirlendikten sonra dört alt-süzgeç A, M_A, M_C ve E'nin tasarlanması ile çözülür. Böylelikle iletim bandı sınırı ω_{ilet}, durdurma bandı sınırı ω_{dur}, iletim bandı dalgalanması δ_{ilet} ve durdurma bandı bastırması δ_{dur} olan süzgeç tasarlanabilir.



Şekil 4.3.2 IFIR FRM süzgecin elde edilmesi

4.3.1 Alt-süzgeçlerin Band Sınırlarının Belirlenmesi

Şekil 4.3.2(e) ve 4.3.2(h) ‘dan görülebileceği gibi ω_{ilet} ve ω_{dur}, k pozitif tamsayıları için ($2k\pi$ / n_a , $(2k+1)\pi$ / n_a) veya ($(2k-1)\pi$ / n_a , $2k\pi$ / n_a) frekans aralıklarında bulunmalıdır. Burada da geleneksel FRM tasarımında olduğu gibi iki durumla karşılaşırız. Bu durumlar M_a süzgecinin iletim bandının M_c’nin iletim bansından daha geniş ya da daha dar olmasına bağlıdır. Birinci durumda, M_a süzgecinin iletim bandı M_c’nin iletim bandından daha geniştir. İkinci durumda ise, M_c süzgecinin iletim bandı M_a’nin iletim bandından daha geniştir.
Birinci durumda,

$$\frac{2k\pi}{n_A} < \omega_{ilet}\,,\ \omega_{dur} < \frac{(2k+1)\pi}{n_A} \tag{4.3.1}$$

Şekil 4.3.20(c) ve 4.3.20(e) ‘dan açıkça görülebileceği gibi,

$$\frac{\theta_A}{n_A} = \omega_{ilet} - \frac{2k\pi}{n_A} \tag{4.3.2}$$

$$\frac{\phi_A}{n_A} = \omega_{dur} - \frac{2k\pi}{n_A} \tag{4.3.3}$$

$$k = \left\lfloor \frac{\omega_p n_A}{2\pi} \right\rfloor \tag{4.3.4}$$

Burada $\lfloor x \rfloor$, x’den küçük ya da x’e eşit en büyük tamsayıdır. Böylece, aşağıdaki denklemler elde edilebilir.

$$\theta_A = \omega_{ilet} n_A - 2k\pi \tag{4.3.5}$$

$$\phi_A = \omega_{dur} n_A - 2k\pi \tag{4.3.6}$$

$$\Delta_A = n_A \Delta \tag{4.3.7}$$

Benzer şekilde M_a, M_c ve E süzgeçleri için tasarım denklemeleri şöyledir:

$$\theta_{M_a} = \frac{2k\pi + \theta_A}{n_A} n_M = \omega_{ilet} n_M \tag{4.3.8}$$

$$\phi_{M_a} = \frac{2(k+1)\pi - \phi_A}{n_A} n_M \tag{4.3.9}$$

$$\Delta_{M_a} = \left[\frac{2(\pi - \theta_A)}{n_A} - \Delta \right] n_M \tag{4.3.10}$$

$$\theta_{M_c} = \frac{2k\pi - \theta_A}{n_A} n_M \tag{4.3.11}$$

$$\phi_{M_c} = \frac{2k\pi + \phi_A}{n_A} n_M = \omega_{dur} n_M \tag{4.3.12}$$

$$\Delta_{M_c} = \left[\frac{2\theta_A}{n_A} + \Delta \right] n_M \tag{4.3.13}$$

$$\theta_E = \omega_{ilet} \tag{4.3.14}$$

$$\phi_E = \frac{2\pi}{n_M} - \frac{2(k+1)\pi - \phi_A}{n_A} \tag{4.3.15}$$

$$\Delta_E = \frac{2\pi}{n_M} - \frac{2(k+1)\pi - \phi_A}{n_A} - \omega_{ilet} \tag{4.3.16}$$

İkinci durumda ise,

$$\frac{(2k+1)\pi}{n_A} < \omega_{ilet}, \quad \omega_{dur} < \frac{2k\pi}{n_A} \tag{4.3.17}$$

$$k = \left\lceil \frac{\omega_{dur} n_A}{2\pi} \right\rceil \tag{4.3.18}$$

Burada $\lceil x \rceil$, x'den büyük ya da x'e eşit en küçük tamsayıdır. Buna göre dört alt-süzgeç için tasarım denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\theta_A = 2k\pi - \omega_{dur} n_A \tag{4.3.19}$$

$$\phi_A = 2k\pi - \omega_{ilet} n_A \tag{4.3.20}$$

$$\Delta_A = n_A \Delta \tag{4.3.21}$$

$$\theta_{M_a} = \frac{2(k-1)\pi + \phi_A}{n_A} n_M \tag{4.3.22}$$

$$\phi_{M_a} = \frac{2k\pi - \theta_A}{n_A} n_M = \omega_{dur} n_M \tag{4.3.23}$$

$$\Delta_{M_a} = \left[\frac{2(\pi - \theta_A)}{n_A} - \Delta \right] n_M \tag{4.3.24}$$

$$\theta_{M_c} = \frac{2k\pi - \phi_A}{n_A} n_M = \omega_{ilet} n_M \tag{4.3.25}$$

$$\phi_{M_c} = \frac{2k\pi + \theta_A}{n_A} n_M \tag{4.3.26}$$

$$\Delta_{M_c} = \left[\frac{2\theta_A}{n_A} + \Delta \right] n_M \tag{4.3.27}$$

$$\theta_E = \omega_{ilet} \tag{4.3.28}$$

$$\phi_E = \frac{2\pi}{n_M} - \frac{2k\pi + \theta_A}{n_A} \tag{4.3.29}$$

$$\Delta_E = \frac{2\pi}{n_M} - \frac{2k\pi + \theta_A}{n_A} - \omega_{ilet} \tag{4.3.30}$$

Tüm süzgecin frekans cevabı ise şu şekilde tanımlanır:

$$F(e^{j\omega}) = \{\widehat{A}(e^{j\omega})\widehat{M}_a(e^{j\omega}) + [1 - \widehat{A}(e^{j\omega})]\widehat{M}_c(e^{j\omega})\}E(e^{j\omega}) \tag{4.3.31}$$

Bu dört alçak geçiren alt-süzgecin basit ve sade bir yaklaşım olan Parks-McClellan programı [4] ile tasarımı, iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları δ_{ilet} ve δ_{dur}'un 1/5'i ile sınırlandırılarak başarılabilir. Ancak, sonuçlar genel olarak % 15 daha iyi olacaktır.

4.3.2 n_M ve n_A Değerlerinin Seçimi

Tüm süzgecin karmaşıklığı, dört alt-süzgecin uzunlukları toplamı ile belirlenir. Bir FIR süzgecin uzunluğu geçiş bandı genişliği ile ters orantılı olduğundan, karmaşıklık ölçütü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C = \frac{1}{\Delta_E} + \frac{1}{\Delta_{M_A}} + \frac{1}{\Delta_{M_C}} + \frac{1}{\Delta_A} \tag{4.3.32}$$

C karmaşıklık ölçütünü mümkün olabildiğince en küçük yapan n_M ve n_A değerleri seçilir. Optimum n_M ve n_A için analitik bir çözüm bulunmamaktadır. Fakat birbirini izleyen gözlemlerle n_M ve n_A için, iyi bir seçim yapılabilir.

Ek-B'de gösterildiği gibi, n_M ve n_A için olası olan değerler aralıklar halinde aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$1 \le n_M \le \left\lceil \frac{\pi}{\omega_{dur}} \right\rceil - 1 \tag{4.3.33}$$

$$maks\{\frac{\pi}{\omega_{ilet}}, \frac{4n_M\pi}{\pi + \omega_{dur} n_M}\} < n_A < \frac{\pi}{\Delta} \tag{4.3.34}$$

ω_{ilet} ve ω_{dur} band sınırları değerleri, (4.3.1) veya (4.3.17) denklemlerinden birini sağlamalıdır. Basit bir program yazılarak, verilen aralıklar içinde, optimum n_M ve n_A değerleri bulunabilir.

En iyi seçilmiş n_M ve n_A değerlerini kolayca bulmak mümkün olmakla birlikte n_M ve n_A değerlerinin optimumluğu hakkında bir şey söylenemez [16]. Bu yaklaşım ile amaçlanan, belirlenecek dört alt-süzgecin hiçbirinin diğerine belirgin bir biçimde baskın olmamasıdır. n_M ve n_A değerlerini bulmak için uygulanması gereken adımlar şöyledir.

1. $2\pi/n_M$ -$2\omega_{ilet} \approx \Delta_E$ değerinin 0.2π civarında olması için $(1, \lceil \pi / \omega_{dur} \rceil - 1)$ aralığında n_M değeri belirlenir.

2. $\Delta_A \approx 0.5(\Delta_{M_A} + \Delta_{M_C})$ olacak şekilde $n_A = \sqrt{n_A \pi / \Delta}$ olarak alınır.

3. n_A değerleri az miktarda değiştirilir ve $0.5(\pi$-$n_A\Delta)$'a en yakın θ_A değeri alınır. Böylece $\Delta_{Ma} \approx \Delta_{Mc}$ sağlanır.

Literatürde IFIR FRM yapısı olarak, ayrıca band şekillendiren süzgecin IFIR bir yapıya kavuşturulduğu bir yapı daha vardır. Ayrıntıları [17]'de verilen yapıda band sınırı şekillendiren süzgeç, bir periyodik model ve maskeleyiciden oluşmaktadır.

Örneğin, doğrusal-fazlı alçak geçiren bir FIR süzgecin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu düşünelim.

İletim bandı sınırı $\omega_{ilet} = 0.4\pi$

Durdurma bandı sınırı $\omega_{dur} = 0.4002\pi$

İletim bandı dalgalanması $\delta_{ilet} = 0.05$ dB

Durdurma bandı bastırması $\delta_{dur} = -50$ dB

Geleneksel remez yöntemi ile tasarlanan FIR süzgecin boyu 24116 olarak kestirilmektedir.

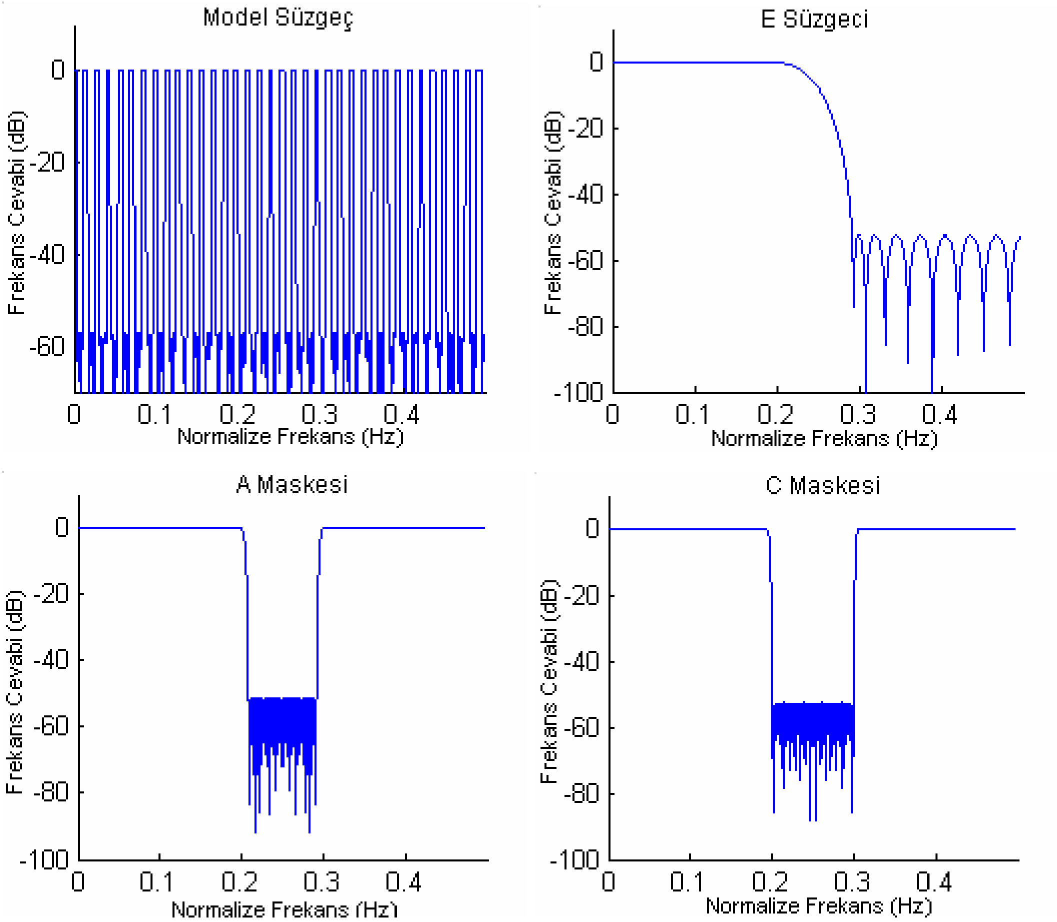
(4.3.33) ve (4.3.34) eşitliklerine göre $1 \leq n_M \leq 2$ ve $5 < n_A < 5000$ olmalıdır. Bu aralık üzerinde yapılan araştırmada $n_M = 2$ ve $n_A = 71$ alınarak minimum C=149.416 olarak hesaplanır. Üstte verilen algoritmaya göre elde edilen tüm alt-süzgeçlerin band sınırları ve gerekli süzgeç uzunlukları Tablo 4.3.1 ile verilmiştir.

$\omega_{ilet} = 0.4\pi$, $\omega_{dur} = 0.4002\pi$, $\delta_{ilet} = 0.05$ dB, $\delta_{dur} = -50$ dB, $n_M = 2$, $n_A = 71$				
	İletim bandı sınırı, θ	İletim bandı sınırı, Φ	Geçiş bandı genişliği, Δ	Süzgeç Uzunluğu
E	0.4π	0.4142π	0.0142π	31
M_A	0.8π	0.833403π	0.033403π	161
M_C	0.777465π	0.8004π	0.022935π	241
A	0.4π	0.4142π	0.0142π	431

Tablo 4.3.1 1-Katlı IFIR FRM örneği

Tüm alt-süzgeçlerin toplamı 864'tür. IFIR FRM tekniği ile tasarlanmış süzgeçteki aritmetik operasyonların sayısını, geleneksel yolla elde edilen süzgeç sayısının yaklaşık olarak % 4'üdür. Hesaplama karmaşıklığında % 96 üzerinde bir kazanç sağlanmıştır. Elde edilen süzgecin etkin uzunluğu ise 31041'dir ve geleneksel remez yöntemi ile tasarlanan süzgeçten sadece %28.7 daha uzundur. Orijinal FRM tasarımına göre ise gerekli toplam süzgeç uzunluğu 1167'dir ve IFIR FRM tekniği ile karşılaştırıldığında % 35 civarı bir ek hesaplama karmaşıklığı gerektirir.

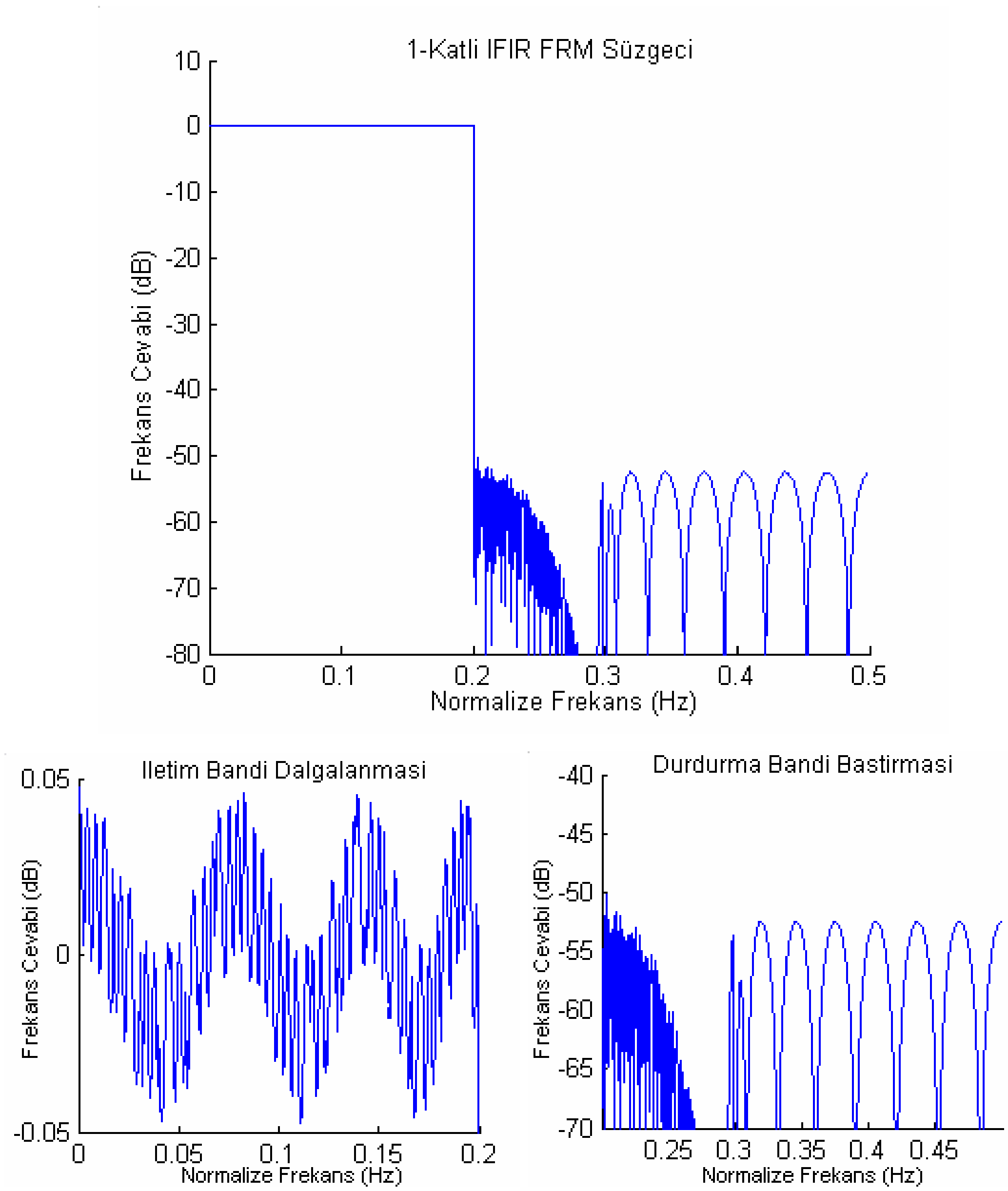
Elde edilen band sınırları ve süzgeç uzunluklarına göre tasarlanan model süzgeç ve maskeleme süzgeçleri Şekil 4.3.3 ile verilmiştir. Elde edilen 1-katlı IFIR FRM süzgece ait *IFIRFRM1Katli.m* dosyasının çıktısı Tablo 4.3.2'de, tüm süzgecin frekans cevabı ile iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları ise Şekil 4.3.4'de görülmektedir.



Şekil 4.3.3 Model süzgeç ve maskeleme süzgeçleri

En büyük iletim bandı dalgalanması 0.047332 En küçük iletim bandı dalgalanması -0.047293 En küçük durdurma bandı bastırması -50.116861 nM su aralıktadır : 1 <= nM <= 2 nA su aralıktadır : 5 <= nM <= 5000 nM 2 dir nA 100 dir Araştırmadan önce tüm süzgecin karmaşıklığı 2580.801915 dir nM nin optimum degeri 2 dir nA nin optimum degeri 71 dir Tüm Süzgecin Karmaşıklığı " 149.416790 " dir E süsgecinin uzunluğu 31 dir mA süsgecinin uzunluğu 161 dir mC süsgecinin uzunluğu 241 dir A süsgecinin uzunluğu 431 dir Toplam Filtre Uzunluğu : 431 + 161 + 241 + 31 = 864 Remez Süzgeç için gerekli süzgeç uzunluğu 24116 dir

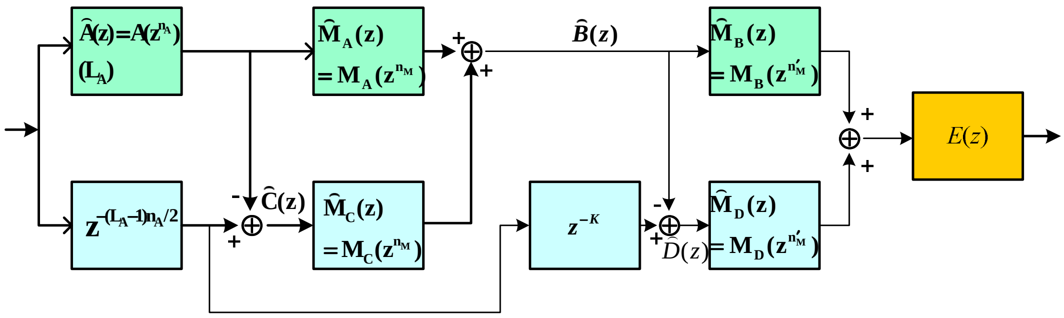
Tablo 4.3.2 *IFIRFRM1Katli.m* çıktısı



Şekil 4.3.4 1-Katlı IFIR FRM süzgecin frekans cevabı, iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları

4.3.3 2-Katlı IFIR FRM Yapısı

1-Katlı IFIR FRM yapısında gösterildiği gibi maskeleme süzgeçleri M_A ve M_C'nin geçiş bandları, $|\hat{A}(e^{j\omega})|$, band sınırı şekillendiren süzgeç tarafından belirlenir. Arzulanan süzgecin geçiş bandı çok dar ise, $|\hat{A}(e^{j\omega})|$ süzgecinin periyodiklerini keskinleştirmek için, n_A çok büyük olmak zorundadır. Model maskeleme süzgeçleri M_A ve M_C'nin geçiş bandları, ara-değerlenmiş $\widehat{M}_A$ ve $\widehat{M}_C$ süzgeçlerinden n_M kez daha geniş olmasına rağmen, n_M faktörü (4.3.33) denkliğine göre üstten [pi/ω_s]-1 sınırlıdır [6]. Bu nedenle Δ_{Ma} ve Δ_{Mc} hala çok küçük olabilir ve M_A ve M_C süzgeçlerinin uzunlukları ise çok uzun olur. Bu durumda, frekans maskeleme işlemi için ikinci kat olarak E süzgecinden önce yeni iki alt süzgeç eklenmelidir. Şekil 4.3.5'de 2-katlı IFIR FRM yapısının blok şeması gösterilmektedir.

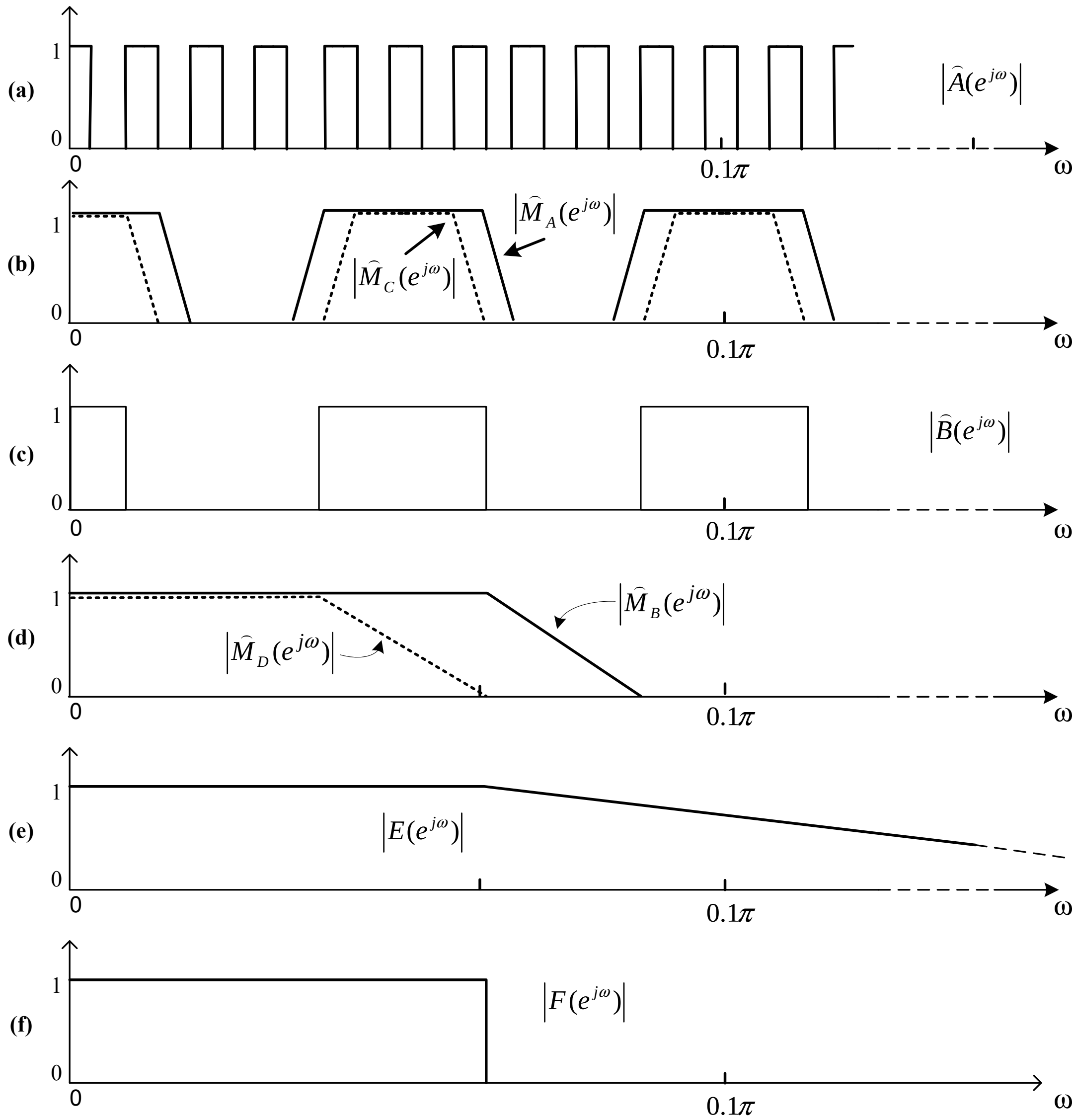


$$K = maks\{\frac{(L_{M_A}-1)n_M}{2}, \frac{(L_{M_C}-1)n_M}{2}\}$$

Şekil 4.3.5 2-katlı IFIR FRM yapısı

Şekil 4.3.6(a)'da çok büyük bir değere sahip olan n_A ile frekans ekseni sıkıştırılmış $\hat{A}$ süzgecinin frekans cevabı gösterilmektedir. $\hat{A}$ süzgeci ve onun tamamlayıcısı, 1-Katlı IFIR FRM yönteminde olduğu gibi iki maskeleme süzgeci $\hat{M}_A$ ve $\hat{M}_C$ tarafından maskelenirler. Ancak bu kez $\hat{M}_A$ ve $\hat{M}_C$ süzgeçleri, model maskeleme süzgeçleri, M_A ve M_C 'den 1-katlı IFIR FRM yönteminde kullanılan n_M değerine göre daha büyük bir n_M değeri ile oluşturulurlar. Bu nedenle $\hat{M}_A$ ve $\hat{M}_C$ süzgeçlerinin geçiş bandları bu durumda daha dardır. Şekil 4.3.6(b)'de, $\hat{M}_A$ süzgecinin geçiş bandının $\hat{M}_C$ süzgecinden geniş olduğu durumu için, bu maskeleme süzgeçlerinin frekans cevapları gösterilmektedir. Band sınırı şekillendiren süzgecin $\hat{M}_A$ süzgeci ile maskelenmesi sonucu Şekil 4.3.6(c)'de görülen $\hat{B}(e^{j\omega})$ elde edilir. $\hat{B}(e^{j\omega})$'nin tamamlayıcısı $\hat{D}(e^{j\omega})$ ise gecikme terimleri de hesaplamaya katılarak şekillendirilir. Görüldüğü gibi $\hat{B}$ ve $\hat{D}$ süzgeçleri ilk kattaki üç alt-süzgeç ($\hat{A}$, $\hat{M}_A$ ve $\hat{M}_C$) tarafından şekillendirilmiş *çıkış süzgeçleri*dir.

Daha sonra $\hat{B}(e^{j\omega})$ ve $\hat{D}(e^{j\omega})$, IFIR FRM yapısının ikinci katını şekillendiren iki maskeleme süzgeci $\hat{M}_B$ ve $\hat{M}_D$ tarafından maskelenirler. $\hat{M}_B$ ve $\hat{M}_D$ süzgeçleri-nin frekans cevapları Şekil 4.3.6(d)'de gösterilmektedir. $\hat{M}_B$ ve $\hat{M}_D$, n'_M ile ara-değerlenmiştir. Bu nedenle, $\hat{M}_B$ ve $\hat{M}_D$ süzgeçlerinin geçiş bandları, model maskele-me süzgeçleri M_B ve M_D'nin geçiş bandlarından n'_M kez daha keskindir. Frekans cevabı Şekil 4.3.6(e)'de verilen E alçak geçiren süzgeci, $\hat{M}_B$ ve $\hat{M}_D$ süzgeçlerinin yüksek frekanslardaki tekrarlarının iletim bandlarını bastırır. Şekil 4.3.6(f)'de ise tüm süzgecin frekans cevabı gösterilmektedir. Sonuç olarak, ikinci kattaki maskeleme de kullanıldığında ara-değerleme faktörü n_M, birinci katta kullanılandan daha büyük bir deger aldığından,. M_A ve M_C süzgeçlerinin uzunlukları azalmıştır. Oysaki, $\widehat{B}$ çıkış süzgecini elde etmek için, uygun p tamsayıları için $n_A = p.n_M$ eşitliği sağlanmalıdır.



Şekil 4.3.6 2-Katlı IFIR FRM süzgecin elde edilmesi

$\widehat{B}$ çıkış süzgeci için de, 1-katlı IFIR FRM yapısında kullanılan gösterime uygun bir gösterim üretmek için, $\widehat{B}$ çıkış süzgeci, geçiş bandı genişliği, *model süzgeci B*'nin geçiş bandı genişliğinden n_M kez daha dar olan bir süzgeç olarak tanımlanır. $\widehat{B}$ çıkış süzgecinin geçiş bandı sınırını $\theta_{\widehat{B}}$ ve durdurma band sınırını $\phi_{\widehat{B}}$'dir. Benzer gösterim, M_B ve M_D alt-süzgeçleri içinde kullanılır.

A, M_A, M_C, M_B, M_D ve E alt-süzgeçlerine ait tasarım parametrelerini belirlemek için, öncelikle ikinci kattan başlanarak sonrasında birinci kata doğru ilerlenir. 1-katlı IFIR FRM için belirlenen iki ayrı durum yine göz önünde tutulmalıdır. Tüm süzgeçlerin band sınırlarını bulma işleminin ayrıntıları burada verilmeyecektir. 2-katlı IFIR FRM tekniğinin tasarım denklemleri, 1-katlı IFIR FRM de ki ile oldukça benzerlik göstermektedir. Tüm alt-süzgeçler için gerekli tasarım denklemleri Tablo 4.3.3'de özetlenmiştir.

İkinci kat için oluşan iki durum :

Durum 1. $$\frac{2k\pi}{n_M} < \omega_{ilet}\,,\ \omega_{dur} < \frac{(2k+1)\pi}{n_M}\,,\ k = \lfloor \omega_{ilet} n_M / 2\pi \rfloor \tag{4.3.35}$$

Durum 2. $$\frac{(2k-1)\pi}{n_M} < \omega_{ilet}\,,\ \omega_{dur} < \frac{2k\pi}{n_M}\,,\ k = \lfloor \omega_{dur} n_M / 2\pi \rfloor \tag{4.3.36}$$

Birinci kat için oluşan iki durum :

Durum 1. $$\frac{2l\pi}{n_A} < \theta_{\hat{B}}\,,\ \phi_{\hat{B}} < \frac{(2l+1)\pi}{n_A}\,,\ l = \lfloor \theta_{\hat{B}} n_A / 2\pi \rfloor \tag{4.3.37}$$

Durum 2. $$\frac{(2l-1)\pi}{n_A} < \theta_{\hat{B}}\,,\ \phi_{\hat{B}} < \frac{2l\pi}{n_A}\,,\ l = \lfloor \phi_{\hat{B}} n_A / 2\pi \rfloor \tag{4.3.38}$$

2-katlı IFIR FRM yapısı için olası durumların sayısı dörttür. Her n'_M, n_M ve n_A seti, bu dört durumdan sadece birini sağlar. 1-katlı IFIR FRM' de olduğu gibi n'_M, n_M ve n_A değerleri uygun seçilerek süzgeç karmaşıklığı minimuma indirilmelidir. Bu durumda tüm süzgecin karmaşıklık ölçütü, altı alt-süzgecin geçiş band genişlikleri toplamıdır. 2-katlı IFIR FRM yapısında, n'_M, n_M ve n_A değerleri için uygun aralıklar aşağıdaki gibidir [16].

$$1 \le n'_M \le \left\lceil \frac{\pi}{\omega_{dur}} \right\rceil - 1 \tag{4.3.39}$$

$$\frac{\pi}{\omega_{ilet}} < n_A < \frac{\pi}{\Delta} \tag{4.3.40}$$

$$1 < p < n_A\,,\quad 1 < p < n_A \tag{4.3.41}$$

Yukarıdaki aralıklar için, 1-katlı IFIR FRM’ de olduğu gibi, optimum n'_M, n_M ve n_A değerlerini araştıran basit bir program yazılabilir.

	1. Durum	2. Durum
θ_B	$\omega_{ilet} n_M - 2k\pi$	$2k\pi - \omega_{dur} n_M$
ϕ_B	$\omega_{dur} n_M - 2k\pi$	$2k\pi - \omega_{ilet} n_M$
Δ_B	$n_M \Delta$	$n_M \Delta$
θ_{M_B}	$\frac{2k\pi + \theta_B}{n_M} n'_M = \omega_{ilet} n'_M$	$\frac{2(k-1)\pi + \phi_B}{n_M} n'_M$
ϕ_{M_B}	$\frac{2(k+1)\pi - \phi_B}{n_M} n'_M$	$\frac{2k\pi - \theta_B}{n_M} n'_M = \omega_{dur} n'_M$
Δ_{M_B}	$[\frac{2(\pi - \theta_B)}{n_M} - \Delta] n'_M$	$[\frac{2(\pi - \theta_B)}{n_M} - \Delta] n'_M$
θ_{M_D}	$\frac{2k\pi - \theta_B}{n_M} n'_M$	$\frac{2k\pi - \phi_B}{n_M} n'_M = \omega_{ilet} n'_M$
ϕ_{M_D}	$\frac{2k\pi + \phi_B}{n_M} n'_M = \omega_{dur} n'_M$	$\frac{2k\pi + \theta_B}{n_M} n'_M$
Δ_{M_D}	$(\frac{2\theta_B}{n_M} + \Delta) n'_M$	$(\frac{2\theta_B}{n_M} + \Delta) n'_M$
θ_E	ω_{ilet}	ω_{ilet}
ϕ_E	$\frac{2\pi}{n'_M} - \frac{2(k+1)\pi - \phi_B}{n_M}$	$\frac{2\pi}{n'_M} - \frac{2k\pi + \theta_B}{n_M}$
Δ_E	$\frac{2\pi}{n'_M} - \frac{2(k+1)\pi - \phi_B}{n_M} - \omega_{ilet}$	$\frac{2\pi}{n'_M} - \frac{2(k+1)\pi - \phi_B}{n_M} - \omega_{ilet}$
θ_A	$\theta_{\hat{B}} n_A - 2l\pi$	$2l\pi - \phi_{\hat{B}} n_A$
ϕ_A	$\phi_{\hat{B}} n_A - 2l\pi$	$2l\pi - \theta_{\hat{B}} n_A$
Δ_A	$n_A \Delta$	$n_A \Delta$
θ_{M_A}	$\frac{2l\pi + \theta_A}{n_A} n_M = \theta_{\hat{B}} n_M$	$\frac{(2l-1)\pi + \phi_A}{n_A} n_M$
ϕ_{M_A}	$\frac{2(l+1)\pi - \phi_A}{n_A} n_M$	$\frac{2l\pi - \theta_A}{n_A} n_M = \phi_{\hat{B}} n_M$
Δ_{M_A}	$[\frac{2(\pi - \theta_A)}{n_A} - \Delta] n_M$	$[\frac{2(\pi - \theta_A)}{n_A} - \Delta] n_M$
θ_{M_C}	$\frac{2l\pi - \theta_A}{n_A} n_M$	$\frac{2l\pi - \phi_A}{n_A} n_M = \theta_{\hat{B}} n_M$
ϕ_{M_C}	$\frac{2l\pi + \phi_A}{n_A} n_M = \phi_{\hat{B}} n_M$	$\frac{2l\pi + \theta_A}{n_A} n_M$
Δ_{M_C}	$(\frac{2\theta_A}{n_A} + \Delta) n_M$	$(\frac{2\theta_A}{n_A} + \Delta) n_M$

Tablo 4.3.3 Tüm alt-süzgeçler için gerekli tasarım denklemleri

n'_M, n_M ve n_A değerleri belirlendikten sonra altı alçak geçiren alt-süzgeç tasarlanabilir. Bu süzgeçler, etkin uzunluğu en küçükten en büyüğe doğru E, M_B

(M_D), M_A (M_C) ve A olarak sıralanır. Bu nedenle, E süzgeci ilk tasarlanmalı, ardından M_B, M_D, daha sonra M_A, M_C ve son olarak da A süzgeci tasarlanmalıdır.

Örneğin, 1-katlı IFIR FRM yapısı için verilen örnekteki doğrusal-fazlı alçak geçiren FIR süzgeci, bu kez 2-katlı IFIR FRM tekniği kullanarak tasarlayalım.

Geleneksel remez yöntemi ile tasarlanan süzgecin uzunluğu 24116 olarak kestirilmektedir. Tüm alt-süzgeçlerin toplamı 468'dir. Bu durumda $n'_M= 2$, $n_M= 21$, $n_A= 231$ olur. Hesaplama karmaşıklığındaki azalma oranı yaklaşık olarak % 98'dir. Süzgecin etkin uzunluğu 34007 ve geleneksel tasarlanan süzgecin etkin uzunluğundan sadece % 41 daha büyüktür. Alt-süzgeçlerin uzunlukları ve band sınırları Tablo 4.3.4'te listelenmiştir.

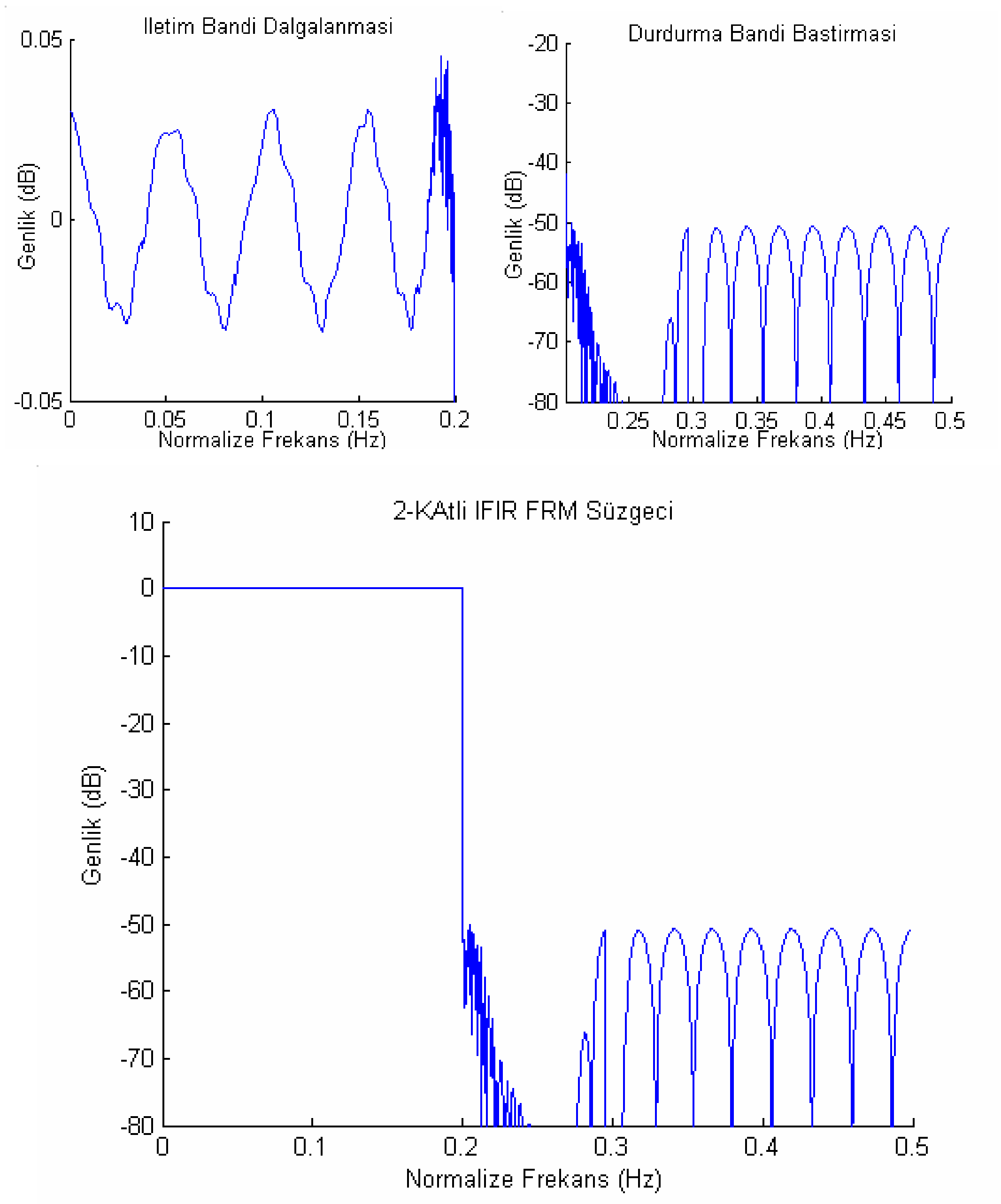
$\omega_{ilet} = 0.4\pi$, $\omega_{dur} = 0.4002\pi$, $\delta_{ilet} = 0.05$ dB, $\delta_{dur} = -50$ dB, $n'_M= 2$, $n_M= 21$, $n_A= 231$				
	İletim bandı sınırı, θ	İletim bandı sınırı, Φ	Geçiş bandı genişliği, Δ	Süzgeç Uzunluğu
E	0.400000π	0.543057π	0.143057π	39
M_B	0.800000π	0.913886π	0.113886π	67
M_D	0.723810π	0.800400π	0.076590π	101
M_A	0.400000π	0.504891π	0.104891π	51
M_C	0.327273π	0.404200π	0.076927π	69
A	0.400000π	0.446200π	0.046200π	141

Tablo 4.3.4 Tüm alt-süzgeçlerin band sınırları ve gerekli süzgeç uzunlukları

Elde edilen 2-katlı IFIR FRM süzgece ait *IFIRFRM2Katli.m* dosyasının çıktısı Tablo 4.3.5'de ve tüm süzgecin frekans cevabı ile iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları ise Şekil 4.3.7'de görülmektedir.

En büyük iletim bandı dalgalanması 0.045344 En küçük iletim bandı dalgalanması -0.035893 En küçük durdurma bandı bastırması -50.193655 nMt nin optimum degeri 2 dir nM nin optimum degeri 21 dir nA nin optimum degeri 231 dir Optimum karmaşıklık degeri = 73.005427 rsMask_dB = 0.0275 rpMask_dB = 0.0250 Süzgecin etkin uzunluğu =140x231 + 68x21 + 100x2 + 39 = 34007	E süsgecinin uzunluğu 39 dir mB süsgecinin uzunluğu 67 dir mD süsgecinin uzunluğu 101 dir mA süsgecinin uzunluğu 51 dir mC süsgecinin uzunluğu 69 dir A süsgecinin uzunluğu 141 dir A nın tamamlayıcı süsgecinin uzunluğu 141 dir Toplam Filtre Uzunluğu = 468 Remez Süzgeç için gerekli süzgeç uzunluğu 24116 dir.

Tablo 4.3.5 *IFIRFRM2Katli.m* dosyasının çıktısı



Şekil 4.3.7 2-katlı IFIR FRM süzgecin frekans cevabı ile iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları

1-katlı ve 2-katlı IFIR FRM süzgecinin tasarlanması sırasında dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır.

1. $\widehat{M}_A$ ve $\widehat{M}_C$ süzgeçlerinin grup gecikmeleri eşit olmak zorundadır. Gecikme terimlerinin eşit olmadığı birçok durumda, gecikmesi az olana artık gecikme terimleri eklenerek grup gecikmeleri eşitlenmelidir.

2. $(L_A-1)n_A$ (La-1), $(L_{M_A}-1)n_M$ ve $(L_{M_C}-1)n_M$ yarım gecikme terimlerinden korunmak için çift olmalıdır.

Buraya kadar sadece ω_{ilet} < 0.5π için alçak geçiren süzgeç tasarımı incelenmiştir. ω_{ilet} > 0.5π için de aynı tasarım geçerlidir. ω_{ilet}, 0.5π civarında değil ise Δ_E küçük bir değer almaz. ω_{ilet}, 0.5π civarında iken ise Δ_E çok küçüktür ve 1-katlı IFIR FRM yapısında $n_M > 1$ için uzunluğu kısa olan bir süzgeç tasarlamak zordur. Ancak 2-katlı IFIR FRM yapısında, $n'_M = 1$ olarak bulunur. Bu nedenle E süzgecini kullanmaya gerek yoktur.

Örneğin iletim bandı sınırı, ω_{ilet}=0.4975π, durdurma bandı sınırı, ω_{dur}= 0.5025π, iletim bandı dalgalanması, δ_{ilet} =0.05 dB ve durdurma bandı bastırması δ_{dur} = -50 dB olan bir süzgeç tasarlayalım. Süzgeç parametreleri Tablo 4.3.6'da, *IFIRFRM2Katli_wilet05.m* çıktısı Tablo 4.3.7'de ve süzgecin frekans cevabı ile iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları Şekil 4.3.8'de görülmektedir.

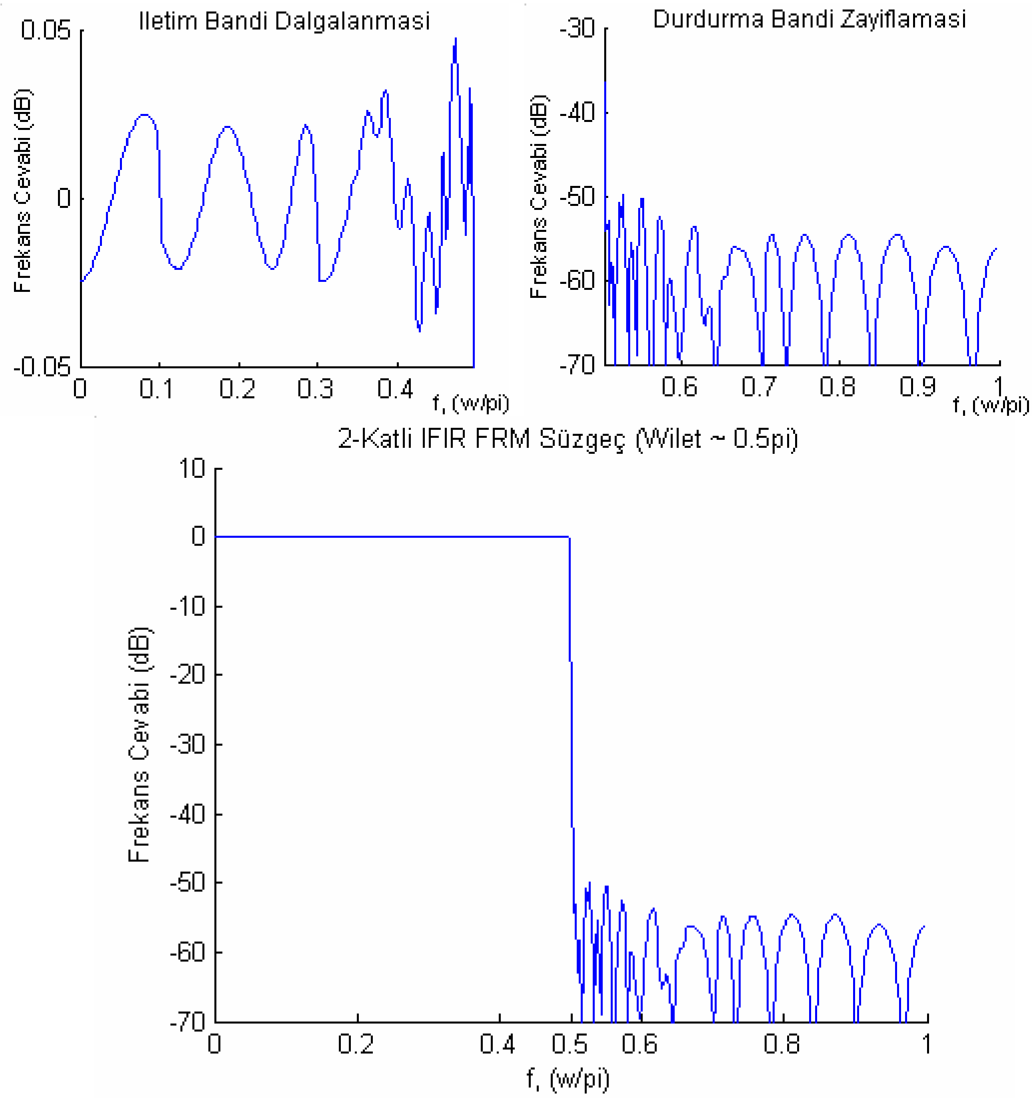
ω_{ilet} =0.4975π, ω_{dur} = 0.5025π, δ_{ilet} = 0.05 dB, δ_{dur} = -50 dB, n'_M=1 , n_M=5, n_A= 25				
	İletim bandı sınırı, θ	İletim bandı sınırı, Φ	Geçiş bandı genişliği, Δ	Süzgeç Uzunluğu
M_B	0.497500π	0.697500π	0.200000π	29
M_D	0.302500π	0.502500π	0.200000π	29
M_A	0.487500π	0.687500π	0.200000π	29
M_C	0.312500π	0.512500π	0.200000π	29
A	0.437500π	0.562500π	0.125000π	49

Tablo 4.3.6 $\omega_{ilet} \approx 0.5\pi$ için 2-katlı IFIR FRM süzgecin parametreleri

Tüm süzgecin karmaşıklığı 29.242236 ve alt-süzgeçlerin toplam uzunluğu 165'tir.

```
nMt su aralıktadır :  1 <= nMt <= 1
nA su aralıktadır :  3 <= nA <= 200
Tüm Süzgecin Karmaşıklığı "  29.242236  " dir
nMt nin optimum degeri 1 dir
nA nin optimum degeri 25 dir
nM nin optimum degeri 5 dir
Optimum karmaşıklık degeri   = 29.242236
mA süsgecinin uzunluğu 29 dir
mC süsgecinin uzunluğu 29 dir
mA süsgecinin uzunluğu 29 dir
mC süsgecinin uzunluğu 29 dir
A süsgecinin uzunluğu 49 dir
A nın tamamlayıcı süsgecinin uzunluğu 49 dir
Toplam Süzgeç Uzunluğu : 49 + 29 + 29 + 29 + 29 = 165
```

Tablo 4.3.7 *IFIRFRM2Katli_wilet05.m* çıktısı

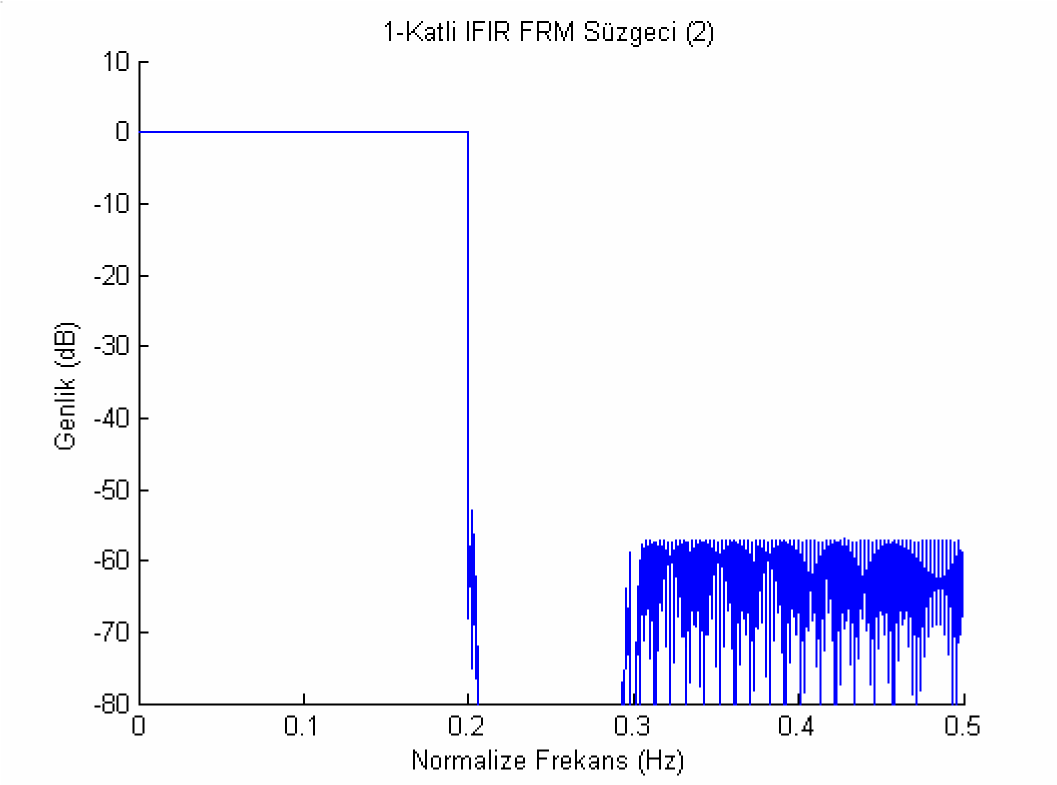


Şekil 4.3.8 2-katli IFIR FRM süzgecin frekans cevabı, iletim ve durdurma bandı dalgalanmaları

4.3.4 IFIR FRM Yapısı için Düşünülen Basitleştirme ve Elde Edilen Farklılıklar

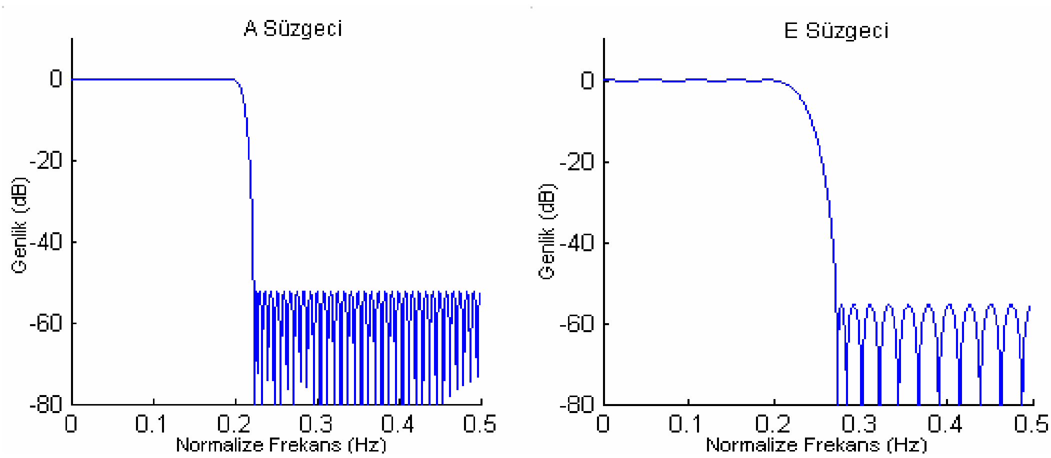
IFIR FRM tekniğinde, son olarak kullanılan *E* maskesini her tasarımda kullanmaya gerek yoktur. Tasarımların çoğunda, gerekli olan *E* maskesi daha önce kullanılan *A*, M_A, M_C, M_D, M_B maskelerinden biriyle çok benzer band sınırlarına sahiptir. *E* maskesi yerine daha önceden birinci ve ikinci maskeleme katlarında kullanılan süzgeçlerden en uygun olanı kullanma düşüncesi, 2-katlı IFIR FRM tekniğine yaklaşık olarak % 10 civarında ek bir hesaplama karmaşıklığı kazancı sağlamaktadır. Bu düşünce için genelleştirilmiş bir tasarım bu tez içerinde bulunmamaktadır.

1-katlı IFIR FRM tekniğinde verilen örnek için *E* süzgeci yerine *A* model süzgeci kullanılırsa, tüm süzgecin uzunluğu % 4 azalmaktadır. Yeni yapı Şekil 4.3.9 ile verilmiştir.



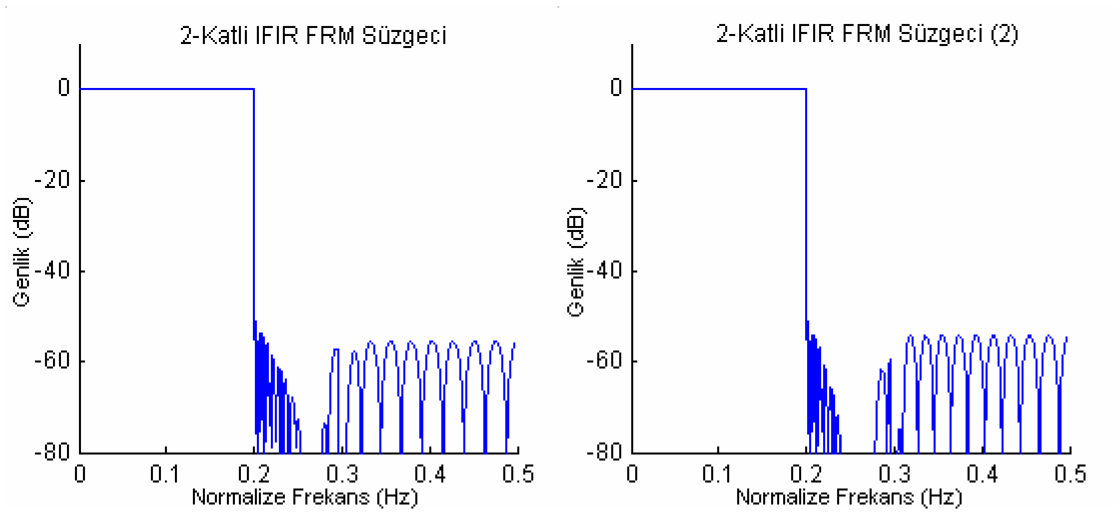
Şekil 4.3.9 *E* süzgeci yerin *A* model süzgeci kullanılarak elde edilen yeni 1-katlı IFIR FRM süzgeç

2-katlı IFIR FRM yapısında da *E* süzgeci yerine *A* model süzgeci kullanıldığında, orijinal IFIR FRM süzgecin yaklaşık olarak aynısı elde edilir. Ancak hesaplama karmaşıklığında yaklaşık % 8 kazanç sağlanır.



Şekil 4.3.10 2-katlı IFIR FRM yapısındaki *A* model ve *E* süzgeci

Şekil 4.3.10'da 2-katlı IFIR FRM yapısındaki kullanılan *A* model süzgeci ile *E* süzgeci görülmektedir. Elde edilen yeni yapı ile orijinal 2-katlı IFIR FRM yapısı karşılaştırılması ise Şekil 4.3.11'de verilmiştir.



(a) (b)

Şekil 4.3.11 Yeni yapı ile orijinal 2-katlı IFIR FRM yapısı karşılaştırılması (a) orijinal 2-katlı IFIR FRM, (b) *E* süzgeci yerine *A* model süzgeci kullanılan 2-katlı IFIR FRM yapısı

Tez boyunca süzgeç dalgalanmalarının iyileştirme işlemi yapılmadığından ve 2-nin katlarına kuantalanmadığından süzgeç uzunlukları literatürde verilen süzgeç yapılarına göre % 1-2 oranında daha uzun olmaktadır. Ancak, 2-katlı IFIR FRM için [16]'da verilen örnek ele alındığında, yeni bir ara-değerleme faktörü bulma programı ile gerekli olan ara-değerleme faktörleri kullanılarak, [16]'da verilen ara-değerleme faktörleri ile bulunan hesaplama karmaşıklığından daha iyi bir süzgeç elde edilmiştir.

[16]'da tasarlanılması istenen süzgeç şöyledir:

İletim bandı sınırı, ω_{ilet}=0.2π,

Durdurma bandı sınırı, ω_{dur}= 0.2005π,

İletim bandı dalgalanması, δ_{ilet} =0.1 dB ve

Durdurma bandı bastırması δ_{dur} = -40 dB

Geleneksel remez yöntemi ile tasarımda arzulanan süzgeç uzunluğu 7609 olarak kestirilir. n'_M, n_M, n_A değerleri [16]'da sırasıyla 3, 32, 192 olarak bulunmuştur. Bunlara karşılık gelen hesaplama karmaşıklığı 48.982919'dır. Gerekli olan alt-süzgeçlerin toplam uzunluğu ise 228'dir. Yeni ara-değerleme faktörü bulma programı ile ise n'_M = 3, n_M = 22, n_A = 132 olarak bulunur. Yeni ara-değerleme faktörlerine karşılık gelen hesaplama karmaşıklığı 47.284109'dur. Gerekli olan alt-süzgeçlerin toplam uzunluğu ise 220'dir. [16]'da verilen süzgeç ve elde edilen süzgeç parametreleri ve uzunlukları Tablo 4.3.8'de verilmiştir.

ω_{ilet} =0.2π, ω_{dur} = 0.2005π, δ_{ilet} = 0.1 dB, δ_{dur} = -40 dB, n'_M=3 , n_M=32, n_A= 192				
	İletim bandı sınırı, θ	İletim bandı sınırı, Φ	Geçiş bandı genişliği, Δ	Süzgeç Uzunluğu
E	0.200000π	0.429667π	0.229667π	19
M_B	0.600000π	0.711000π	0.111000π	39
M_D	0.525000π	0.601500π	0.076500π	57
M_A	0.400000π	0.584000π	0.184000π	29
M_C	0.2666667π	0.416000π	0.149333π	35
A	0.400000π	0.496000π	0.096000π	45
ω_{ilet} =0.2π, ω_{dur} = 0.2005π, δ_{ilet} = 0.1 dB, δ_{dur} = -40 dB, n'_M=3 , n_M=22, n_A= *132*				
	İletim bandı sınırı, θ	İletim bandı sınırı, Φ	Geçiş bandı genişliği, Δ	Süzgeç Uzunluğu
E	0.200000π	0.412621π	0.212621π	23
M_B	0.600000π	0.762136π	0.162136π	29
M_D	0.490909π	0.601500π	0.110591π	47
M_A	0.400000π	0.589000π	0.189000π	23
M_C	0.266667π	0.411000π	0.144333π	33
A	0.400000π	0.466000π	0.066000π	65

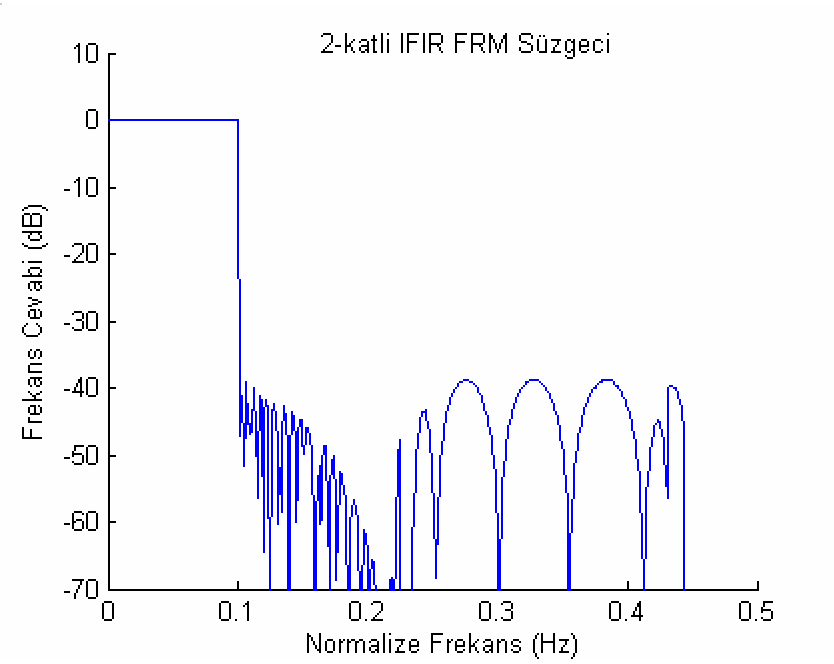
Tablo 4.3.8 Elde edilen süzgeç ve [16]'da verilen süzgeç parametreleri

IFIRFRM2Katliwp2ws2005.m dosyasının çıktısı Tablo 4.3.9'da verilmiştir. Elde edilen süzgeç ile [16]'verilen süzgeçlerin frekans cevapları Şekil 4.3.12 de gösterilmektedir.

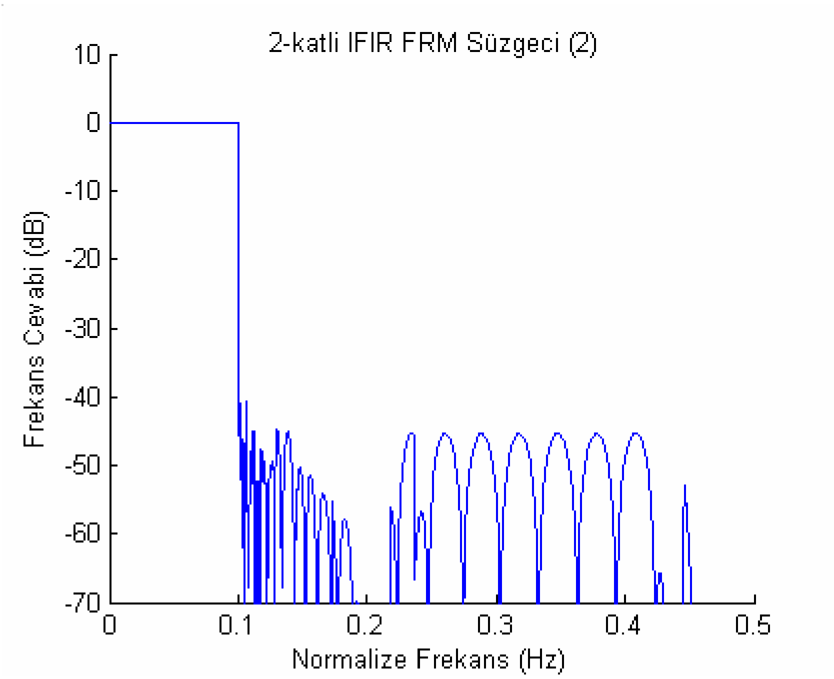
```
E süzgecinin uzunluğu 23 dir
mB süzgecinin uzunluğu 29 dir
mD süzgecinin uzunluğu 47 dir
mA süzgecinin uzunluğu 23 dir
mC süzgecinin uzunluğu 33 dir
A süzgecinin uzunluğu 65 dir
A nın tamamlayıcı süzgecinin uzunluğu 65 dir
Toplam Filtre Uzunluğu : 23 + 29 + 47 + 23 + 33 + 65 = 220
Remez Süzgeç için gerekli süzgeç uzunluğu 7609 dir

En büyük iletim bandı dalgalanması: 0.074801
En küçük iletim bandı dalgalanması: -0.094097
En küçük durdurma bandı bastırması: -40.628928
nMt nin optimum degeri 3 dir
nM nin optimum degeri 22 dir
nA nin optimum degeri 132 dir
```

Tablo 4.3.9 *IFIRFRM2Katliwp2ws2005.m* dosyasının çıktısı



(a)



(b)

Şekil 4.3.12 Elde edilen süzgeç (b) ile [16]'verilen süzgecin (a) frekans cevapları

4.4 FRM Yapıları için Gerekli Donanım Karşılaştırmaları

FRM tekniği, optimum FRM tekniği ve IFIR FRM tekniği ile üretilmiş üç farklı süzgeç için donanım karşılaştırmaları yapılmıştır. Gerekli donanım, çarpıcı sayısına, dolayısıyla süzgeç uzunluğuna bağlıdır. Süzgecin etkin uzunluğu kullanılacak hafıza biriminin boyutunu belirler. Asıl karmaşıklık ölçütü olarak çarpıcı sayısı alınabilir.

Tez boyunca incelenen örnek için elde edilen gerekli donanımlar Tablo 4.4.1’de verilmiştir.

$\Omega_{ilet} = 0.4\pi$ $\omega_{dur} = 0.4002\pi$ $\delta_{ilet} = 0.05$ dB $\delta_{dur} = -50$ dB			
Yöntemler	**Çarpıcı Sayısı**	**Toplayıcı Sayısı**	**Etkin Uzunluk**
Geleneksel Remez Tasarımı	12058	24115	24116
1-Katli FRM Süzgeci	582	1162	30833
2-Katli FRM Süzgeci	338	676	34465
1-Katli IFIR FRM Süzgeci	432	863	31010
2-Katli IFIR FRM Süzgeci	234	467	34007
2-Katlı IFIR FRM Süzgeci (2)	215	429	33968
Optimum K-Katli FRM Süzgeci K=5	141	282	38481

Tablo 4.4.1 Donanım Karşılaştırması 1

2-katlı IFIR FRM süzgeçleri arasında yapılan hesaplama karmaşıklığı ve donanım karşılaştırması Tablo 4.4.2’de verilmiştir.

$\Omega_{ilet} = 0.2\pi$ $\omega_{dur} = 0.2005\pi$ $\delta_{ilet} = 0.1$ dB $\delta_{dur} = -40$ dB						
Yöntemler	**Çarpıcı Sayısı**	**Toplayıcı Sayısı**	**Etkin Uzunluk**	**Optimum Karmaşıklık**	**Hesaplama Karmaşılığındaki Azalma**	**Etkin Uzunluktaki Artış**
Geleneksel Remez Tasarımı	3804	7608	7609	2000	---	---
2-Katli IFIR FRM Süzgeci nMt=3 nM=32 nA= 192	112	224	9931	48.982919	% 97.0557	% 30.5165
2-Katli IFIR FRM Süzgeci nMt=3 nM=22 nA= 132	110	220	9470	47.284109	% 97.1083	% 24.4579
2-Katlı IFIR FRM Süzgeci (2)	99	197	9447	42.5809	% 97.3975	% 24.1556

Tablo 4.4.2 Donanım Karşılaştırması 2

1-katlı ve 2-katlı IFIR FRM süzgeçleri arasında yapılan hesaplama karmaşıklığı ve donanım karşılaştırması Tablo 4.4.3’de verilmiştir.

$\Omega_{ilet} = 0.4\pi$ $\omega_{dur} = 0.402\pi$ $\delta_{ilet} = 0.1$ dB $\delta_{dur} = -60$ dB			
Yöntemler	**Çarpıcı Sayısı**	**Toplayıcı Sayısı**	**Etkin Uzunluk**
Geleneksel Remez Tasarımı	1358	2715	2716
1-Katli FRM Süzgeci	211	422	3840
2-Katli FRM Süzgeci	157	313	4081
1-Katli IFIR FRM Süzgeci	164	327	3874
2-Katli IFIR FRM Süzgeci	128	256	3958

Tablo 4.4.3 Donanım Karşılaştırması 3

5. GÜNÜMÜZDE FRM YAPILARINDAKİ GELİŞMELER

Çift-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç üzerine kurulu FRM yapısı ve ön-süzgeç + dengeleyici türü yeni FRM tasarımları, FRM tekniğinde son yıllarda tasarlanan ve gelişmelere açık olan iki konudur.

5.1 Çift Uzunluklu Band Sınırı Şekillendiren Süzgeç Üzerine Kurulu FRM Yapısı

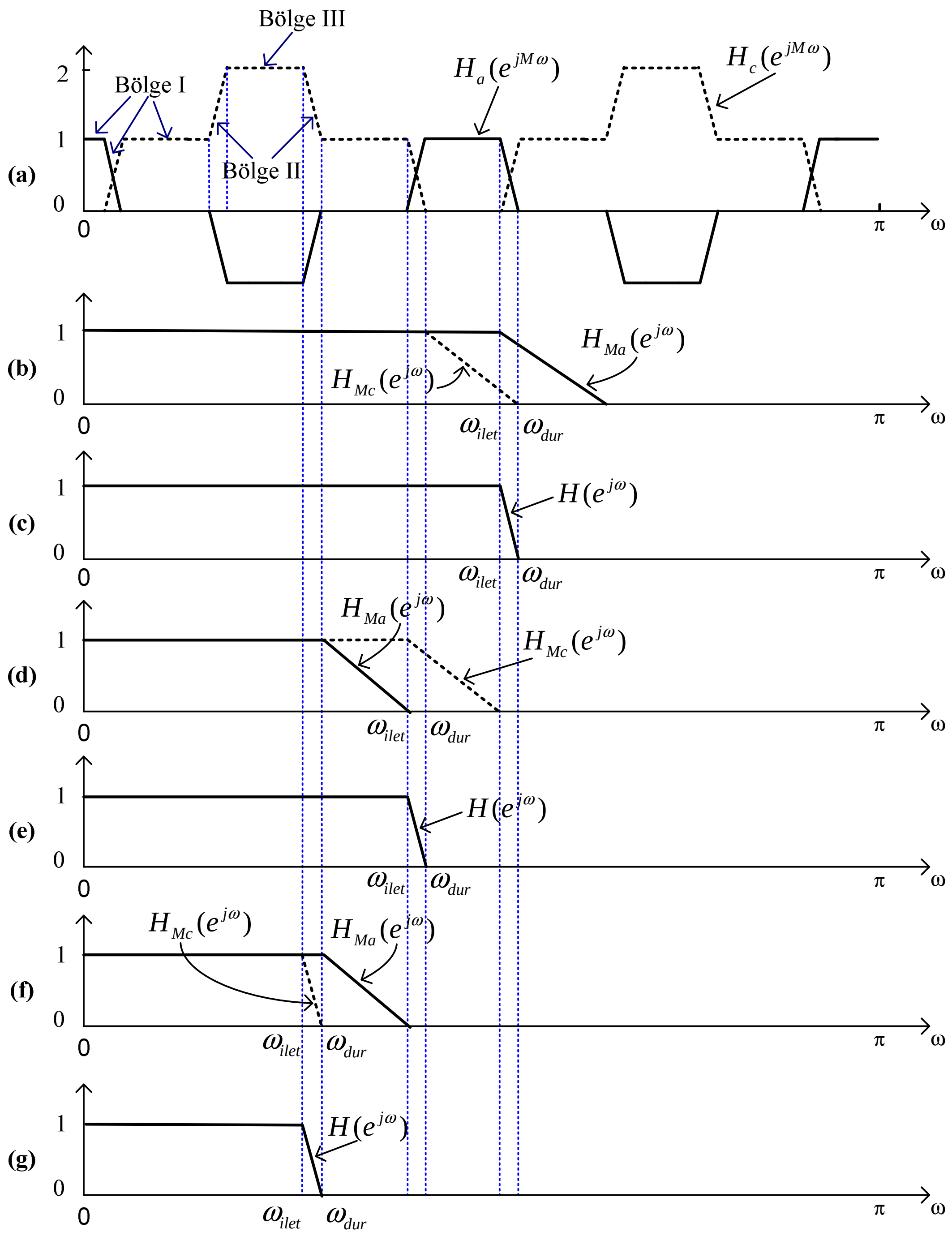
FRM tekniğinde, 2004 yılına kadar band sınırı şekillendiren süzgeç olarak her zaman tek-uzunluklu süzgeç kullanılırdı. Doğrusal-fazlı dört FIR süzgeç tipi düşünüldüğünde FRM yapılarında, çift uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılması iletim ve durdurma bandlarında çok büyük dalgalanmalar yaratır. Ancak tüm alt-süzgeçlerin hep birlikte optimize edilmeleri, dalgalanmaların hep birlikte optimize edilmesi ile çift-uzunluklu süzgeç kullanılarak, en az tek-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılan FRM yapısı kadar iyi bir FRM süzgeci elde edilebilir.

5.1.1 Çift-uzunluklu Band Sınırı Şekillendiren Süzgeç Kullanılan FRM yapısında Dalgalanma İncelemesi

Çift-uzunluklu simetrik bir alçak geçiren FIR süzgecin iletim bandı kazancı ya -1 ya da +1 olabilir. FRM yapısında, band sınırı şekillendiren süzgeç olarak böyle bir süzgeç kullanıldığında, band sınırı şekillendiren süzgecin tamamlayıcısının iletim bandı kazancı 1 veya 2 olur. Burada M ara-değerleme faktörü çift olmalıdır [18].

Çift uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılarak tasarlanmış bir FRM yapısı için, her bir alt-süzgecin frekans cevabı Şekil 5.4.1‘de gösterilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi, tüm süzgecin geçiş bandını yapılandıracak toplam üç farklı geçiş bandı vardır ve bunlar Şekil 5.1.2(c), 5.1.1(e) ve 5.1.1(g)’de görülmektedir. Şekil 5.1.1(c) ve 5.1.1(e)’deki durumlar orijinal FRM tekniğindeki, sırasıyla A ve B durumlarına karşılık düşer. Şekil 5.1.1(g)’de oluşan durum, sadece çift-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılan FRM tasarımı için vardır.

Bu durumu C durumu diye adlandıralım. C durumu, tüm süzgecin (arzulanan süzgeç) geçiş bandı genişliğine sahip bir maskeleme süzgeci gerektirdiğinden pratik bir tasarım gibi gözükmez. C durumu ancak tüm alt-süzgeçlerin tümüne birden uygun bir optimizasyon şeması uygulanması yararlı olabilir.



Şekil 5.1.1 FRM yapısındaki her bir alt-süzgecin frekans cevapları

5.1.2 Tasarım Yöntemi

II. ve III. bölgelerdeki dalgalanmaları azaltmak için, tüm alt-süzgeçlerin hepsini birden optimize edecek bir tasarım yöntemi gereklidir. Arzulanan frekans cevabı $H_d(\omega)$ olsun. Bu durumda hata fonksiyonu şöyle tanımlanır.

$$E(\omega) = \left| H(e^{j\omega}) - H_d(\omega) \right| \tag{5.1.1}$$

Optimizasyon, $\omega_k \in X = [0, \omega_{ilet}] \cup [\omega_{dur}, 0.5]$ frekans setleri üzerinde, $E(\omega_k)$ değerlerinin istenilen özellikleri sağlaması olarak özetlenebilir. Bu, bir çok-amaçlı optimizasyon problemidir. Eğer bir ağırlık fonksiyonu *ağırlık*(ω_k) olarak tanımlanırsa çok-amaçlı optimizasyon problemi tek-amaçlı bir optimizasyon problemine dönüşür. Yeni tek-amaçlı optimizasyon problemi,

$$f = \sum_{\omega_k \in X} ağırlık(\omega_k).E(\omega_k) \tag{5.1.2}$$

Optimizasyonun amacı f 'i minimize etmektir. *ağırlık*(ω_k)'ın başlangıç değeri, iletim bandında 1 ve durdurma bandında $\delta_{ilet} / \delta_{dur}$ 'dır. Bunu başarmak için, bir çok optimizasyon yöntemi kullanılabilir. [18]'da optimizasyon için, Ardışıl Kuadratik Program (SQP) kullanılmıştır. MATLAB programında *fgoalattain* komutu ile bu optimizasyon başarılabilir. Tasarım şu dört adımdan oluşur.

Adım 1. Geleneksel FRM tekniğinde [12]'de anlatılan başlangıç çözümü elde edilir.

Adım 2. (5.1.2)'da verilen f fonksiyonunu minimize etmek için gerekli parametreleri elde etmek için *fgoalattain* komutu çağrılır.

Adım 3. Eğer iletim bandı dalgalanması veya durdurma bandı dalgalanması verilen özelliklerden daha büyük ise, [19]'da sunulan algoritma ile ağırlık vektörü güncellenir.

Adım 4. Eşit dalgalanmalı bir çözüm elde edilene veya çözümlerdeki değişme önceden tanımlanan bir tolerans ε, (örneğin $\varepsilon = 10^{-8}$) değerinden küçük olana kadar 2. adım tekrarlanır.

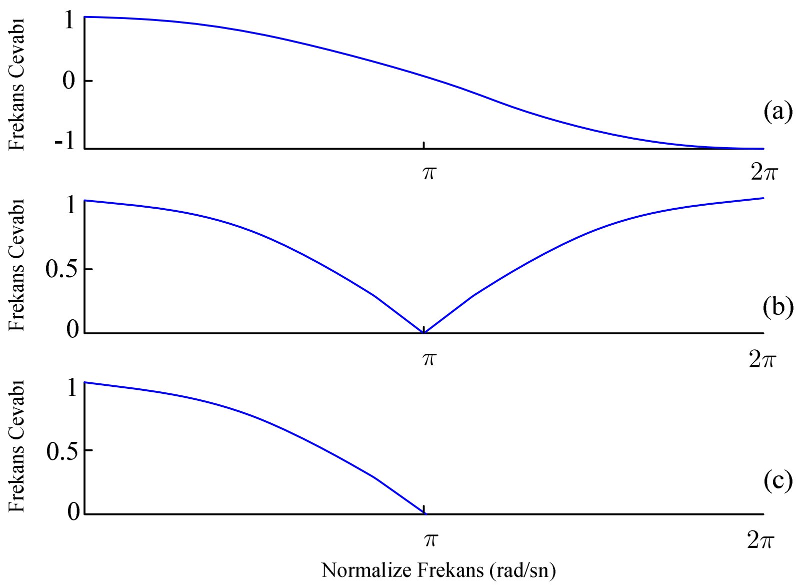
5.2. Ön-süzgeç + dengeleyici türü yeni FRM tasarımı

Frekans Cevabı Maskeleme Tekniğinde, $H_a(z)$ alt-süzgecinin uzunluğu, ara-değerleme faktörü, M arttırılarak azaltılabilir, ancak buna karşılık her iki maskeleme süzgecinin de uzunlukları artar. Eğer tüm süzgecin karmaşıklığı azaltılmak isteniyorsa, yapılması gereken iki maskeleme süzgecinin band sınırları değiştirilmeden ara-değerleme faktörünün arttırılmasıdır. Bu amaçla yeni bir ön-süzgeç + dengeleyici yapısı kullanılabilir.

Birinci dereceden çift-uzunluklu bir süzgeç, $P_1(z) = (1 + z^{-1})$ formunda olsun. Bu süzgecin sıfır-fazlı frekans cevabı şu şekilde tanımlanır [20].

$$\left|P_1(e^{j\omega})\right| = \cos(\frac{\omega}{2}) \tag{5.2.1}$$

Çift uzunluklu simetrik bir süzgeç olduğundan, Şekil 5.2.1(a)'da görüldüğü gibi $P_1(e^{j\omega})$, $[0, \pi]$ aralığında pozitif, $[\pi, 2\pi]$ aralığında negatif değer alır. Eğer $[0, \pi]$ aralığında $P_1(z)$ süzgecine yaklaşan tek-uzunluklu bir $P_2(z)$ süzgeci tasarlanabilir ve bu iki süzgeç paralel bağlanırsa, iletim bandı $P_1(z)$'ye benzeyen ve $[\pi, 2\pi]$ aralığında bir durdurma bandı oluşan yeni bir $P(z)$ süzgeci elde edilebilir. P_1(z), $P_2(z)$ ve $P(z)$ süzgeçleri Şekil 5.2.1'de verilmektedir [21].



Şekil 5.2.1 Ön-süzgeç yapısı (a) P_1(z), (b) $P_2(z)$, (c) $P(z)$ süzgeçleri

Yarım gecikme terimlerinden korunmak için $P_1(z)$ ve $P_2(z)$ süzgeçlerinin gecikme terimleri M çift bir tamsayı olmak üzere, M gecikme terimi ile yer değiştirmelidir. Tüm ön-süzgeç yapısı şöyle tanımlanır:

$$P(z^M) = P_1(z^M) + P_2(z^M) \tag{5.2.2}$$

Ön-süzgeç yapısının iletim bandı 1+ z^{-1} benzeri bir yapıya sahip olduğundan, ön-süzgeç yapısı, kendi yapısına benzer bir $H_{den}(z)$ kolayca üretebilir. Sonuçta arzulanan özelliklere sahip bir ön-süzgeç + dengeleyici yapısı elde edilir.

Elde edilen bu yeni ön-süzgeç + dengeleyici yapısı, FRM yapısında, band sınırı şekillendiren $H_a(z)$ yerine yerleştirilmesiyle, ara-değerleme faktörü arttırılmış fakat maskeleme süzgeçlerinin band sınırlarının değişmediği yeni bir FRM yapısı ortaya çıkar. Bu yeni FRM yapısı için orijinal FRM yapısında kullanılan alt-süzgeçlerin sınırları şu şekilde değiştirilmelidir.

$$m = \lfloor \omega_{ilet} M /(2\pi) \rfloor \tag{5.2.3}$$

$$\omega_{A-ilet} = \omega_{ilet} M - 2\pi m \tag{5.2.4}$$

$$\omega_{A-dur} = \omega_{ilet} M - 2\pi m \tag{5.2.5}$$

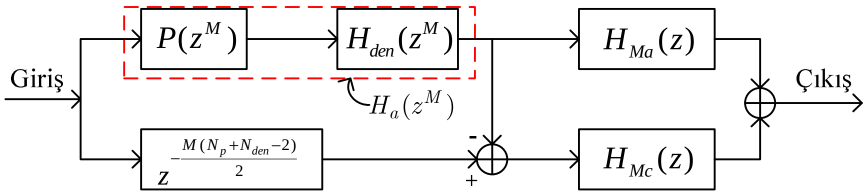
$$\omega_{Ma-ilet} = \omega_{ilet} \tag{5.2.6}$$

$$\omega_{Ma-dur} = \frac{2\pi m + 4\pi - \omega_{A-dur}}{2\pi M} \tag{5.2.7}$$

$$\omega_{Mc-ilet} = \frac{2\pi m - \omega_{A-ilet}}{2\pi M} \tag{5.2.8}$$

$$\omega_{Mc-dur} = \omega_{dur} \tag{5.2.9}$$

Burada $\lfloor x \rfloor$, *x*'den küçük ya da x'e eşit en büyük tamsayıdır. *M*, *P*(*z*) ve $H_{den}(z)$ süzgeçlerinin ara-değerleme faktörüdür. ω_{ilet} ve ω_{dur} tüm süzgecin iletim ve durdurma bandı sınırlarıdır. $\omega_{A\text{-}ilet}$ ve $\omega_{A\text{-}dur}$ ön-süzgeç+dengeleyici yapısı, $P(z)H_{den}(z)$ süzgecinin iletim ve durdurma bandı sınırlarıdır. $\omega_{\text{Ma-ilet}}$, $\omega_{\text{Ma-dur}}$, $\omega_{\text{Mc-ilet}}$ ve $\omega_{\text{Mc-dur}}$ sırasıyla, M_a ve M_c süzgeçlerinin iletim ve durdurma bandı sınırlarıdır. Değiştirilmiş yeni FRM yapısı Şekil 5.2.2'de verilmiştir.



Şekil 5.2.2 Değiştirilmiş yeni FRM yapısı

Yeni Frekans Cevabı Maskeleme tekniğiyle arzulanan bir süzgeci üremek için tavsiye edilen algoritma altı adımdan oluşur:

Adım 1. Tüm süzgecin uzunluğunu minimize eden ara-değerleme faktörü *M* seçilir.

Adım 2. Üç alt-süzgeç, $H_a(z)$, $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ süzgeçlerinin band sınırları (5.2.3)-(5.2.9) denklemlerine göre bulunur.

Adım 3. $H_{Ma}(z)$ ve $H_{Mc}(z)$ süzgeçleri, iletim ve durdurma bandları dalgalanmaları tüm süzgecin iletim ve durdurma bandları dalgalanmalarının % 85'i alınarak tasarlanır.

Adım 4. $H_a(z)$ süzgeci çift-uzunluklu olarak tasarlanır. Daha sonra $H_a(z)$ süzgeci $P(z)H_{den}(z)$ süzgecine dönüştürülür.

Adım 5. $P_1(z)$ ve $H_{den}(z)$ ön-süzgeç olarak alınarak $P_2(z)$ tasarlanır. Böylece ön-süzgeç + dengeleyici yapısı, $H_a(z)$ ile aynı özellikleri taşır.

Adım 6. Elde edilen tüm süzgecin arzulanan özelliklere sahip olup olmadığı kontrol edilir. Değilse, adım 3'e geri dönülerek süzgeç uzunlukları arttırılır.

6. SONUÇLAR

FRM tekniği, düşük güç harcamasına sahip yüksek hızlı doğrusal-fazlı FIR süzgeçleri tasarlamak için kullanılabilecek en uygun yöntemdir. Uzun süzgeçlerin iki bloklu bir yapı ile kısa alt-süzgeçlerle oluşturulması esasına dayanan 1-katlı FRM yapısı ile aritmetik işlem sayısında % 48'i üzerinde kazanç sağlanmıştır. Bu kazanç tasarlanılması istenen süzgecin geçiş bandı arttıkça artmaktadır. Optimum olmayan 2-katlı veya *K*-katlı FRM yapılarında hesaplama karmaşıklığındaki azalma daha da artırılmıştır. Peşi sıra gelen katlarda en uygun ara-değerleme faktörleri kullanılması ile oluşturulan optimum FRM yapısı ile hesaplama karmaşıklığının azaltılması yanında, üç yararlı sonuca da ulaşılmıştır. Birincisi, FRM katlarının sayısı arttıkça *M* ara-değerleme faktörü *e* (doğal logaritma) değerine yaklaşır. İkincisi, *K*-katlı bir optimum tasarım için tüm süzgecin karmaşıklığı, süzgecin geçiş bandının (*K*+1). kare kökü ters orantılıdır. Üçüncüsü ise, FRM tekniği, eğer normalize geçiş bandı genişliği 0.063'den daha küçük ise etkilidir. Son olarak verilen sonuç FRM tekniğinin hangi şartlar altında kullanılması gerektiğini ortaya koymuştur. Model süzgecin ara-değerlenerek band sınırı şekillendiren süzgecin oluşturulmasına ek olarak, maskeleme süzgeçlerinin de ara-değerlenmesi ile oluşturulan üç bloklu 1-katlı IFIR FRM yapısı ile hesaplama karmaşıklığında % 20 ek kazanç sağlanmıştır. Bu yapı ile çarpıcı sayısı % 90'in üzerinde azaltılmıştır. Çok keskin süzgeçlerin çok dar olan geçiş bandlarını gerçeklemek için, üçüncü blokta yer alan maskeleme süzgecinin de hala keskin olması nedeniyle, 1-katlı yapıya iki maskeleme süzgeci ve istenmeyen periyodikleri yok eden bir maskeleme süzgecinden oluşan iki bloğun daha eklenmesiyle 2-katlı bir IFIR FRM yapısı elde edilmiştir. Bu yapı, çarpıcı sayısında %98 oranında azalma sağlamıştır. Bunun yanında, IFIR FRM yapısında, istenmeyen yüksek frekans bileşenlerini yok etmekle görevli olan, 1-katlı yapıdaki üçüncü blok ve 2-katlı yapıdaki beşinci blok maskeleme süzgeci, daha önce tasarlanmış olan alt-süzgeçlerden band sınırları uygun olan biri ile yer değiştirilebilir. Bu durumda, bu bloğu kullanmaya gerek yoktur. Bu çalışmada genelleştirilmeyen bu düşünce ile [16]'da tasarlanan süzgeç için % 13 ek çarpıcı sayısı azalması elde edilmiştir. Bu çalışma boyunca dalgalanma değerleri frekans bandları boyunca sabit alınmış, dalgalanma iyileştirmesi yapılmamıştır. Bu nedenle süzgeç uzunlukları literatürde verilenlerden % 0.5-1 oranında daha uzundur. Ancak aynı yazıda verilen 2-katlı yapı için hiçbir değişiklik yapılmaksızın ara-değerleme bulma programı ile yeni bulunan ara-değerleme faktörleri bulunmuş ve süzgecin karmaşıklığı % 1.4 azaltılmıştır.

Son yıllarda tasarlanan değiştirilmiş FRM yapılarıyla, tek-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılarak üretilen FRM süzgeçlerin, çift-uzunluklu band sınırı şekillendiren süzgeç kullanılarak da üretilebildiği ortaya çıkmıştır. Ayrıca band sınırı şekillendiren süzgecin uzunluğunun, ara-değerleme faktörü değeri arttıkça azaldığı ve keskinleşen geçiş bandı periyodiklerini bastırabilmek için maskeleme süzgeçlerinin derecelerinin arttığı bilindiğinden, band sınırı şekillendiren süzgeç bir ön-süzgeç+dengeleyici yapısı ile yer değiştirilerek, maskeleme süzgeçlerinin band sınırları değiştirilmeden ara-değerleme faktörü M arttırılabilir.

Genel olarak, FRM tekniği katsayı sayısını belirgin bir biçimde azaltır. Çarpıcı sayısındaki azalma ile elde edilen kazanç, geçiş bandının azaltılması ile artar. FRM süzgeçler düşük katsayı duyarlılığına sahiptir ve katsayıları 2’nin katlarına kuantalanırsa karmaşıklığın azalması daha da arttırılabilir. FRM süzgeçleri, seyrek katsayılı olduğundan daha az bit gerektirir. Bu da düşük güç harcanmasını sağlar.

EK-A

$$\Phi_1(\delta_1,\delta_2) = [0.005309\ (\log_{10}\delta_1)^2 + 0.07114\ \log_{10}\delta_1 - 0.4761]\ \log_{10}\delta_2 \\ -[0.00266\ (\log_{10}\delta_1)^2 + 0.5941\ \log_{10}\delta_1 + 0.4278] \tag{A1}$$

$$\Phi_2(\delta_1,\delta_2) = 11.01217 + 0.51244[\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2] \tag{A2}$$

EK-B

Birinci durum ele alındığında, dört alt-süzgeç için (4.3.1)-(4.3.16) arasında verilen tasarım denklemleri için olan sınırlamalar şunlardır.

1. İletim bandları pozitif olmalıdır
2. Durdurma band sınırları π'den küçük olmalıdır.

Bu sınırlamalar, tasarım denklemlerine şöyle uygulanır.

$$\theta_A = \omega_{ilet} n_A - 2k\pi > 0 \tag{B1}$$

$$\phi_A = \omega_{dur} n_A - 2k\pi < \pi \tag{B2}$$

$$\phi_{M_A} = \frac{2(k+1)\pi - \phi_A}{n_A} n_M < \pi \tag{B3}$$

$$\phi_{M_C} = \omega_{dur} n_M < \pi \tag{B4}$$

(B4)'ten $n_M \leq \lceil \pi / \omega_{dur} \rceil - 1$ bulunur. $n_M \geq 1$ alt sınırı da düşünüldüğünde kolayca (4.3.33) denkliğine ulaşılır.

(B2)'den (B1) çıkarılarak $\phi_A = \theta_A + n_M \Delta < \pi$ elde edilir. $\theta_A > 0$ olduğundan (4.3.33) denkliğinin sağı, $n_A < \pi/\Delta$ elde edilir. (B1)'den $\omega_{ilet} n_A > 2k\pi > 2\pi$ olur. Dolayısıyla,

$$n_A > \frac{2\pi}{\omega_{ilet}} \tag{B5}$$

(B2) ve (B3)'den $\phi_{M_A} = (2\pi + 4\pi k / n_A - \omega_{dur}) n_M < \pi$ olarak elde edilir. Aynı şekilde $k \geq 1$ olduğundan,

$$n_A > \frac{2\pi n_M (2k+1)}{\pi + \omega_{dur} n_M} > \frac{6 n_M \pi}{\pi + \omega_{dur} n_M} \tag{B6}$$

(B5) ve (B6) denklemeleri birlikte düşünülürse,

$$n_A > maks\left\{\frac{2\pi}{\omega_{ilet}}, \frac{6n_M\pi}{\pi + \omega_{dur}n_M}\right\} \tag{B7}$$

elde edilir. Aynı şekilde ikinci durum için aynı işlemler tekrarlanırsa,

$$n_A > maks\left\{\frac{\pi}{\omega_{ilet}}, \frac{4n_M\pi}{\pi + \omega_{dur}n_M}\right\} \tag{B8}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Vijay K. M., Dougles B. W**., 1999, Digital Filtering, Digital Signal Processing Handbook, CRC/IEEE Press.

[2] **Kayran, A. H. ve Ekşioğlu E. M.**, 2004, Bilgisayar Uygulamalarıyla Sayısal İşaret İşleme, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[3] **Mitra, S. K., Kaiser, J. F.**, 1993, Handbook for Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, Inc, Canada.

[4] **McClellan, J. H., Parks, T. W. and Rabiner, L. R.,** 1973, A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters, IEEE Transactions on Audio and Eletroacoustics, Vol. AU-21, No.6, 506-526

[5] **Rabiner, R. R.,** 1973, Approximate Design Relationships for Low-pass FIR Digital Filters, IEEE Transactions on Audio and Eletroacoustics, Vol. AU-21, No.5, 456-460

[6] **Diniz, P. S. R, da Silva, E. A. B., Netto, S. L.,** 2002, Digital Signal Processing System Ananlysis and Design, Cambridge University Press, United Kingdom.

[7] **Adams, J. W. ve Wilson A. N.,** 1983, A New Approach to FIR Digital Filters with Fewer Multipliers and Reduced Sensitivity, IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol. CAS-30, No.5, 277-280.

[8] **Neuvo, Y., Dong, C. Y. and Mitra, S.K.,** 1984, Interpolated Finite Impulse Response Filters, IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Processing, Vol.32, 563-570

[9] **Saramaki, T.,Neuvo, Y. and Mitra, S.K.,** 1988, Design of Computationaly Efficient Interpolated FIR Filters, IEEE Trans. Circuit and Systems, Vol.35, 70-88.

[10] **Lyons, R.,** 2003, Interpolated Narrowband Lowpass FIR Filters, IEEE Signal Processing Magazine, No.1053-5888, 50-56.

[11] **Lim, Y.C., Parker, S.R.,** 1983, FIR Filter Design over a Discrete Powers-of-two Coefficient Space, IEEE Trans. Circuit Syst. Vol CAS-30, 963-968.

[12] **Lim, Y. C.,** 1986, Frequency-Response Masking Approach for the Synthesis of Sharp Linear Phase Digital Filters, IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol. CAS-33, 357-364.

[13] **Saramaki, T., Lim, Y.C.,** 1999, Use of the Remez Algorithm for Designing FIR Filters Utilizing the FRM Approach, Circuit and Systems, ISCAS'99, Vol.3, 449-455.

[14] **Lim, Y. C., Lian Y.,** 1993, The Optimum Design of One- and Two-Dimensional FIR Filters Using the Frequency Response Masking Technique, IEEE Transactions on Circuit and Systems-II, Vol. 40, No. 2, 88-95.

[15] Chen, C.K., Lee, J.H., 1996, Design of Sharp-Cutoff FIR Digital Filters with Prescribed Constant Group Delay, IEEE Transactions on Circuit and Systems-II, Vol.43, No.1, 1-13.

[16] **Yang, R. H., Liu, B., Lim, Y. C.,** 1988, A New Structure of Sharp Transition FIR Filters Using Frequency Response Masking, IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol. CAS-35, No. 8, 955-966.

[17] **Lian, Y., Zhang, L. and Ko., C.C.,** 2001, An Improved Frequency Response Masking Approach Designing Sharp FIR Filters, Signal Processing, No.81, 2573-2581.

[18] **Yu, J., Lian, Y.,** 2004, Frequency-Response Masking Based Filters With the Even-Length Bandedge Shaping Filter, Circuit and Systems, ISCAS 2004, Vol. 5, 536-539.

[19] **Lim, Y.C., Lee, J.H. and Chen, C.K.,** 1992, A Weighted Least Squares Algorithms for Quasi-Equiripple FIR and IIR Digital Filter Design, IEEE Trans. Signal Processing, Vol.40, 551-558.

[20] **Lian, Y.,** 2001, A New Frequency-response Masking Structure with Reduced Complexity For FIR Fitler Design, Circuit ans Systems, ISCAS 2001, Vol.2, 609-612.

[21] **Lian, Y.,** 2003, Complexity Reduction For FRM-Based FIR Filters Using The Prefilter-Equalizer Technique, Circuit Systems Signal Processing, Vol. 22, No. 2, 137-155.

ÖZGEÇMİŞ

11 Ocak 1979 tarihinde Çanakkale'de dünyaya geldi. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği programında lisans eğitimine başladı. Lisans eğitiminin ardından, 2002 yılında Telekomünikasyon Mühendisliği Yüksek Lisans programına girdi. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.