

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI MODEL
PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Aydın KIZILKAYA

Anabilim Dalı: ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı: ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

ŞUBAT 2006

**İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI MODEL
PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Aydın KIZILKAYA
(504982110)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Eylül 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 09 Şubat 2006**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Ümit AYGÖLÜ (İTÜ.)

Doç.Dr. Aydın AKAN (İ.Ü.)

Doç.Dr. Mehmet Ertuğrul ÇELEBİ (İTÜ.)

Doç.Dr. Hakan Ali ÇIRPAN (İ.Ü.)

ŞUBAT 2006

ÖNSÖZ

Uzun ve yoğun bir çalışma sonunda doktora tezimi nihayet tamamlamayı başardım. Bu başarımda büyük pay sahibi ve gerektiğinde bir arkadaş gerektiğinde bir yol gösterici olan, her zaman problemlere farklı bakışı ile düşünce ufkumu genişleten, bilgisinden çokça yararlandığım, hazırladığımız makaleleri defalarca inceleme zahmetinden çekinmeyen, sağladığı güzel çalışma ortamı ile akademik yaşamımda hep örnek alacağım sevgili hocam Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN'a, tez izleme komitesinde ve tez jürisinde bulunarak beni onurlandıran, çalışma tarzı ve disiplinine hayran olduğum değerli hocam Prof. Dr. Ümit AYGÖLÜ'ne, çalışmalarımnda değerli zamanını ve bilgisini esirgemeyen tez izleme komitesi ve tez jürisinde bulunan kıymetli hocam Doç. Dr. Aydın AKAN'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Aralarında fazla yabancılık çekmediğim ve yardımlarını esirgemeyen Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği programındaki tüm arkadaşlarıma ve özellikle zor ve sıkıntılı anlarımda bana destek olan Arş. Gör. Hacı İLHAN'a, Yrd. Doç. Dr. Ender Mete EKŞİOĞLU'na, Arş. Gör. Erkan YÜCE'ye ayrıca teşekkür ederim.

Benimle gurur duyan, sevgilerini ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili babam Mehmet İlhan KIZILKAYA'ya, sevgili annem Mesrure KIZILKAYA'ya, kardeşlerim Emin ve Mehmet KIZILKAYA ve Türkan KELEKÇİO'ya, ve yeğenlerime sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Çalışmalarımnda karşılaşmış olduğum zorlukların verdiği sıkıntıları aşmamda ilgilerini esirgemeyen sevgili kayınpederim ve kayınvalidem Ali ve Şenay TEFİR'e, kardeşlerim Mehmet ve Melike TEFİR'e sabır ve anlayışlarından dolayı özellikle teşekkür ederim. Hepsinden özel ve fazla olarak, sevgisi ve ilgisi ile daima ayakta kalmamı sağlayan sevgili eşim Kamuran KIZILKAYA'ya, ondan esirgediğim zaman için özürlerimi sunar ve gösterdiği sabır ve destek için sonsuz teşekkür ederim.

Yaptığım çalışmanın Türkçe bir kaynak olarak ilgili araştırmacılara faydalı olmasını dilerim.

EYLÜL 2005

Aydın KIZILKAYA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	xii
ÖZET	xiv
SUMMARY	xviii
1. GİRİŞ	1
1.1. 1-B ARMA Model Parametrelerinin Kestirimi Üzerine Yapılan Çalışmalar	3
1.1.1. Birinci Gruba Dahil Olan Çalışmalar	5
1.1.1.1. Yüksek Mertebeden AR veya MA Model ile ARMA Modelin Temsil Edilmesi Fikrine Dayalı Yöntemler	5
1.1.1.2. En Küçük Karelere Dayalı Yöntemler	6
1.1.1.3. Kafes Süzgeç Yapısını Kullanan Yöntemler	9
1.1.1.4. Araç Değişken Yöntemleri	13
1.1.1.5. Diğer Yöntemler	14
1.1.2. İkinci Gruba Dahil Olan Çalışmalar	19
1.1.2.1. En Küçük Karelere Dayalı Yöntemler	20
1.1.2.2. Kafes Süzgeç Yapısını Kullanan Yöntemler	22
1.2. 2-B ARMA Model Parametrelerinin Kestirimi Üzerine Yapılan Çalışmalar	24
1.3. Amaç, Kapsam, ve Katkılar	37
1.4. Çalışmanın Genel Akışı	38
2. KULLANILAN MODEL ve YAPILAN VARSAYIMLAR	39
2.1. Giriş	39
2.2. Parametre Kestirimi İçin Önerilen Yöntemlerde Yapılan Varsayımlar	41
3. EŞDEĞER ÖZBAĞLANIMLI (EAR) MODEL YAKLAŞIMI İLE 2-B ARMA MODEL PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ	42
3.1. Giriş	42
3.2. 2-B EAR Model Parametrelerinin Kestirimi	43
3.3. 2-B ARMA Modelin AR ve MA Parametrelerinin Kestirimi	46
3.3.1. MA Parametrelerinin Kestirimi	48
3.3.2. AR Parametrelerinin Kestirimi	49
3.4. Önerilen Yöntemin Özeti ve Yöntem Hakkındaki Düşünceler	50
4. ARMA-CEPSTRUM ÖZYİNELEME YAKLAŞIMI İLE 2-B ARMA MODEL PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ	52

4.1. Giriş	52
4.2. 2-B ARMA Modelin AR Parametrelerinin Kestirimi	53
4.3. Cepstrum Katsayılarının Kestirimi	53
4.4. 2-B ARMA Modelin MA Parametrelerinin Kestirimi	58
4.4.1. Önerilen Yöntem	58
4.4.1.1. $1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi	59
4.4.1.2. $1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi	61
4.4.1.3. $m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi	62
4.4.2. Önerilen Yöntemin Değişik Durumu	63
4.5. Önerilen Yöntemin Özeti ve Yöntem Hakkındaki Düşünceler	67
5. ÖNERİLEN YÖNTEMLERİN PARAMETRE KESTİRİM BAŞARIMLARINI DEĞERLENDİRMEK İÇİN KULLANILAN KARŞILAŞTIRMA ÖLÇÜTLERİ	70
5.1. Itakura-Saito Mesafe Ölçütü	70
5.2. Gerçek ve Kestirilen AR ve MA Katsayı Matrislerine İlişkin Fark Matrislerinin Normu	71
5.3. Veri Boyutunun Parametre ve İzge Kestirimleri Üzerindeki Etkisi	72
5.4. İzgelere İlişkin Genlik Görüntüleri ve Eşyüzey Eğrileri	72
6. BİLGİSAYAR BENZETİMLERİ: ÖNERİLEN YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI ve SONUÇLARIN YORUMLANMASI	73
6.1. Giriş	73
6.2. Bölüm 3'te Önerilen Yöntem ve Zhang (1991) Yöntemi ile Gerçekleştirilen Bilgisayar Benzetimleri	75
6.2.1. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçlar	76
6.2.2. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması	88
6.3. Bölüm 4'te Önerilen Yöntem ve Zhang (1991) Yöntemi ile Gerçekleştirilen Bilgisayar Benzetimleri	90
6.3.1. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçlar	91
6.3.2. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması	102
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	103
KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ	116

KISALTMALAR

- 1-B** : Bir-boyutlu
2-B : İki-boyutlu
AR : Özbağlanımlı (Autoregressive)
MA : Kayan Ortalamalı (Moving average)
ARMA : Özbağlanımlı Kayan Ortalamalı (Autoregressive moving average)
BGG : Beyaz Gauss Gürültüsü
ÇD : Çeyrek Düzlem
DZD : Doğrusal Zamanla Değişmeyen
EAR : Eşdeğer Özbağlanımlı (Equivalent autoregressive)
YW : Yule-Walker
DYW : Değiştirilmiş Yule-Walker
HFD : Hızlı Fourier Dönüşümü
I-S : Itakura-Saito
GİY : Güç İzge Yoğunluk

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1: Önerilen yöntem için; $(1 \leq m \leq q_1 ; 1 \leq n \leq q_2)$, $(1 \leq m \leq q_1 ; n = 0)$ ve $(m = 0 ; 1 \leq n \leq q_2)$ tanım aralıklarına karşı düşen MA parametrelerinin kestirim aşamaları.....	65
Tablo 4.2: Önerilen yöntemin değişik durumu için; $(1 \leq m \leq q_1 ; 1 \leq n \leq q_2)$, $(1 \leq m \leq q_1 ; n = 0)$ ve $(m = 0 ; 1 \leq n \leq q_2)$ tanım aralıklarına karşı düşen MA parametrelerinin kestirim aşamaları.....	66
Tablo 6.1: Bölüm 3'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.	78
Tablo 6.2: Tablo 6.1'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	78
Tablo 6.3: Bölüm 3'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.	82
Tablo 6.4: Tablo 6.3'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	83
Tablo 6.5: Bölüm 3'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.....	87
Tablo 6.6: Tablo 6.5'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	88
Tablo 6.7: Geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için, 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.....	91
Tablo 6.8: Bölüm 4'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.....	92
Tablo 6.9: Tablo 6.7 ve Tablo 6.8'de verilen istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	92
Tablo 6.10: Dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için, 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.....	94
Tablo 6.11: Bölüm 4'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.....	95
Tablo 6.12: Tablo 6.10 ve Tablo 6.11'de verilen istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	95
Tablo 6.13: Karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli için, 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.....	98

Tablo 6.14: Bölüm 4’te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin karma- tip ARMA(2,2,2,2) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.....	98
Tablo 6.15: Tablo 6.13 ve Tablo 6.14 ’de verilen istatistiklerin başarımlarını ölçütlerine göre değerlendirmesi.....	99

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Parametrik modelden rastgele süreç üretimini sağlayan yapının blok diyagramı.....	1
Şekil 1.2: Gözlem verisinin doğrudan doğruya ARMA model parametreleri ile temsiline yönelik literatürdeki çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.....	4
Şekil 1.3: Gözlem verisinin ARMA izge parametreleri ile temsiline yönelik literatürdeki çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.....	5
Şekil 1.4: 1-B ARMA model parametreleri için uyarlamalı parametre kestirimcinin blok diyagramı.....	7
Şekil 1.5: Ters süzgeçleme (inverse filtering) işleminin blok diyagramı.....	8
Şekil 1.6: 1-B ARMA kafes kestirimcinin blok diyagramı.....	10
Şekil 1.7: İki-çarpanlı kafes hücresi.....	10
Şekil 1.8: İki-kanallı AR kafes modeli ile ARMA modelleme.....	11
Şekil 1.9: Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından yeniden tanımlanan en küçük kareler probleminin blok diyagramı.....	11
Şekil 1.10: Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından geliştirilen 1-B ARMA kafes yapısının blok diyagramı.....	12
Şekil 1.11: 1-B ARMA parametrelerinin kestirimi için Li ve diğ., (1989) tarafından önerilen karma yapı.....	17
Şekil 1.12: ARMA modeli tanılamak için Pasquato ve diğ., (1999)'nin önerdiği karma FIR-IIR uyarlamalı süzgeç modeli.....	18
Şekil 1.13: Martinelli ve diğ., (1984) tarafından ARMA izge kestirimi için önerilen kafes süzgeç yapısı.....	23
Şekil 1.14: Çeyrek-düzlem destek bölgeleri: (a) Birinci çeyrek-düzlem; (b) İkinci çeyrek-düzlem; (c) Üçüncü çeyrek-düzlem; (d) Dördüncü çeyrek-düzlem.....	25
Şekil 1.15: Simetrik olmayan yarı-düzlem destek bölgeleri.....	26
Şekil 1.16: Mikhael ve diğ., (1991) tarafından önerilen 2-B ARMA sistem modelleme için blok diyagramı.....	32
Şekil 1.17: Mikhael ve diğ., (1995)'nin 2-B ARMA sistem tanılama için, 3-B zaman-uzamsal giriş ve çıkış işaretleri ile temsil edilen 2-B sistem modeli.....	33

Şekil 1.18:	Şekil 1.17'deki bilinmeyen sistem $H_d(z_1, z_2)$ 'yi modellemek için kullanılan 2-B denklem-hata modelinin blok şeması.....	34
Şekil 1.19:	İki-kanallı 2-B AR kafes modeli ile 2-B ARMA modelleme.....	35
Şekil 1.20:	Ekşioğlu ve diğ., (2005) tarafından tasarlanan kafes-merdiven yapısı.....	38
Şekil 2.1:	DZD 2-B ARMA modelin parametreleri için ÇD destek bölgesi ve model parametrelerinin kestirimi için sıralama düzeni.....	40
Şekil 2.2:	2-B ARMA süreç örneklerinin üretimini sağlayan yapının blok diyagramı.....	40
Şekil 3.1:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin parametrelerini kestirmek amacıyla önerilen EAR model yaklaşımına dayalı yöntemin akış diyagramı.....	51
Şekil 4.1:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.....	59
Şekil 4.2:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ aralığı için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.....	61
Şekil 4.3:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.....	62
Şekil 4.4:	MA süreç üretiminin blok diyagramı.....	64
Şekil 4.5:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemin akış diyagramı.....	68
Şekil 4.6:	ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemin değişik durumu için akış diyagramı.....	69
Şekil 6.1:	(6.1)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$	76
Şekil 6.2:	(6.1)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$	77
Şekil 6.3:	$(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (4, 4)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	79
Şekil 6.4:	$(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (5, 5)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	80

Şekil 6.5:	(6.2)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$	81
Şekil 6.6:	(6.2)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$	81
Şekil 6.7:	$(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 2)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	84
Şekil 6.8:	$(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 3)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	85
Şekil 6.9:	(6.3)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$	86
Şekil 6.10:	(6.3)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$	86
Şekil 6.11:	$(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 6)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	89
Şekil 6.12:	$(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (8, 8)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.....	90
Şekil 6.13:	$(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.....	93
Şekil 6.14:	$(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.....	94
Şekil 6.15:	$(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.....	96

- Şekil 6.16:** $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi..... 97
- Şekil 6.17:** $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi..... 100
- Şekil 6.18:** $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GIY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi..... 101

SEMBOL LİSTESİ

$a_{k,l}$: AR parametreleri
$b_{h,i}$: MA parametreleri
$d_{i,j}$: EAR model parametreleri
p_1, p_2	: 2-B ARMA modelin AR kısmının mertebeleri
q_1, q_2	: 2-B ARMA modelin MA kısmının mertebeleri
L_1, L_2	: 2-B EAR model mertebeleri
$H(z_1, z_2)$: 2-B ARMA modelin transfer fonksiyonu
$B(z_1, z_2)$: 2-B ARMA modelin transfer fonksiyonunun pay polinomu
$A(z_1, z_2)$: 2-B ARMA modelin transfer fonksiyonunun payda polinomu
$x(n_1, n_2)$: 2-B ARMA süreci (Gözlem verisi)
$y(n_1, n_2)$: 2-B MA süreci
$w(n_1, n_2)$: 2-B BGG süreci
σ_w^2	: BGG sürecinin varyansı
N_1, N_2	: 2-B gözlem verisinin boyutları
$P(e^{jw_1}, e^{jw_2})$: 2-B ARMA modele ilişkin GİY işlevi
$ x $: x 'in mutlak değeri
$E[x]$: x 'in beklenen değeri
$\delta(l, m)$: Birim dürtü işlevi
h_{k_1, k_2}	: DZD modelin dürtü yanıtı
$r_{xx}(i, j)$: Gözlem verisi x 'in (i, j) . özilinti katsayısı
\mathbf{R}	: Gözlem verisi x 'in özilinti matrisi
\mathbf{R}_k	: \mathbf{R} özilinti matrisini oluşturan alt özilinti matrisleri
\mathbf{d}	: EAR model parametrelerinin oluşturduğu sütun vektörü
ξ	: İlk bileşeni σ_w^2 , diğer bileşenleri sıfırdan oluşan sütun vektörü
\mathbf{f}	: \mathbf{R}^{-1} matrisinin ilk sütunundaki değerlerden oluşan sütun vektörü
$\mathbf{D}_{k,j}$: EAR model parametrelerinin oluşturduğu (k, j) . katsayı matrisi
$\mathbf{D}_{k,j}(k_1, k_2)$: $\mathbf{D}_{k,j}$ matrisinin (k_1, k_2) . bileşeni
\mathbf{A}	: AR parametrelerinin oluşturduğu katsayı matrisi
$\mathbf{O}_{i \times j}$: $i \times j$ boyutlu sıfır matrisi
ε	: Karesel hata değeri

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$: ε işlevinin x 'e göre kısmi türevi
C	: EAR model yaklaşımında MA parametrelerinin kestirimi için oluşturulan katsayı matrisi
$C_{p,r,s,t}$: C katsayı matrisinin (p, r, s, t) . bileşeni
b	: MA parametrelerinin oluşturduğu sütun vektörü
ζ	: EAR model yaklaşımında MA parametrelerinin kestirimi için oluşturulan sütun vektörü
$\zeta_{p,r}$: ζ sütun vektörünün (p, r, s, t) . bileşeni
$\hat{x}(n_1, n_2)$: Gözlem verisi $x(n_1, n_2)$ 'nin cepstrumu
$X(z_1, z_2)$: $x(n_1, n_2)$ 'nin 2-B z -dönüşümü
$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$: $x(n_1, n_2)$ 'nin 2-B ayrık Fourier dönüşümü
$P_e(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$: Gözlem verisi $\{x(n_1, n_2)\}$ 'nin parametrik olmayan güç izge kestirimi
$\ln(x)$: x 'in doğal logaritması
$F^{-1}\{x\}$: x 'in ters Fourier dönüşümü
$\text{fix}(x)$: x 'in tamsayı kısmını üretir
$\text{fft2}(x, N_1, N_2)$: $(N_1 \times N_2)$ -noktalı 2-B x dizisinin hızlı Fourier dönüşümü
$d_{l-s}(P_K, P_G)$: Gerçek ve kestirilen GİY işlevleri arasındaki mesafe ölçüsü
$(L_{1\min}, L_{2\min})$: EAR model mertebelerinin en küçük değeri
$(L_{1\max}, L_{2\max})$: EAR model mertebelerinin en büyük değeri
$c_{i,j}^x$: Gözlem verisi $x(n_1, n_2)$ 'nin örneklerinden hesaplanan cepstrum katsayıları
$c_{i,j}^y$: MA süreç $y(n_1, n_2)$ 'nin örneklerinden hesaplanan cepstrum katsayıları

İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI MODEL PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

ÖZET

Hızlı Fourier dönüşümü (HFD) gibi parametrik olmayan yöntemlerin izge kestiriminde kullanımının düşük çözünürlüklü sonuçlar üretmesi araştırmacıları, parametrik model tabanlı yöntemler geliştirmeye yöneltmiştir. Bunun için, gözlem verisini veya rastgele alanı karakterize etmek amacıyla rasyonel yapıya sahip özbağlanımlı (AR), kayan ortalamalı (MA) ve özbağlanımlı kayan ortalamalı (ARMA) modeller yaygın olarak kullanılmıştır. AR ve MA model yapıları, ARMA modelin özel hali olup rastgele alanları modellemede kullanılan en genel model ARMA'dır.

AR modeller, Değiştirilmiş Yule-Walker (DYW) denklemleri olarak adlandırılan doğrusal denklemler kümesinin doğrudan veya yinelemeli çözümüyle parametrelerinin hesaplanmasındaki kolaylıktan dolayı hem bir-boyutlu (1-B) hem de iki-boyutlu (2-B) rastgele alanların modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Diğer taraftan ARMA ve MA modeller için parametre kestirim işleminin daha zor olması, işlemsel yoğunluk, ve yakınsama gibi sorunların varlığı, bu modellere ilişkin parametrelerin kestirimine dayalı yapılan çalışmaların sınırlı kalmasına neden olmuştur. Çünkü, MA parametrelerinin kestirimi doğası gereği doğrusal olmayan denklemlerin çözümünü gerektirir. Tüm bu olumsuzluklara rağmen ARMA modeller, rasyonel transfer fonksiyonuna sahip doğrusal süzgeçlerle olan ilişkisinden ve gürültüye benzer davranışı doğru bir biçimde benzetim yeteneğine sahip olmasından dolayı çok sık tercih edilirler.

Güç izge yoğunluğunun kestirimi anlamında, ARMA modeller AR ve MA modellere göre daha iyi olan yüksek çözünürlüklü izge kestirimleri üretirler. Başka bir deyişle, ARMA modeller güç izgesindeki hem tepeleri (yoğunlaşma) ve hem de vadileri (yayılmayı) karakterize edebilirken, AR modeller sadece yoğunlaşmayı, MA modeller ise sadece yayılmayı temsil edebilirler. Bu yüzden, bir çok rastgele zaman serisini ARMA modeller daha doğru karakterize edebilir.

Parametrik gösterim açısından ARMA modeller, durağan rastgele alanların en etkili doğrusal modelini sağlarlar ve bu yüzden AR ve MA modellere tercih edilirler: AR ve MA modellerle karşılaştırıldığında, ARMA modeller daha az sayıda parametre ile durağan rastgele alanları daha doğru olarak modelleyebilirler.

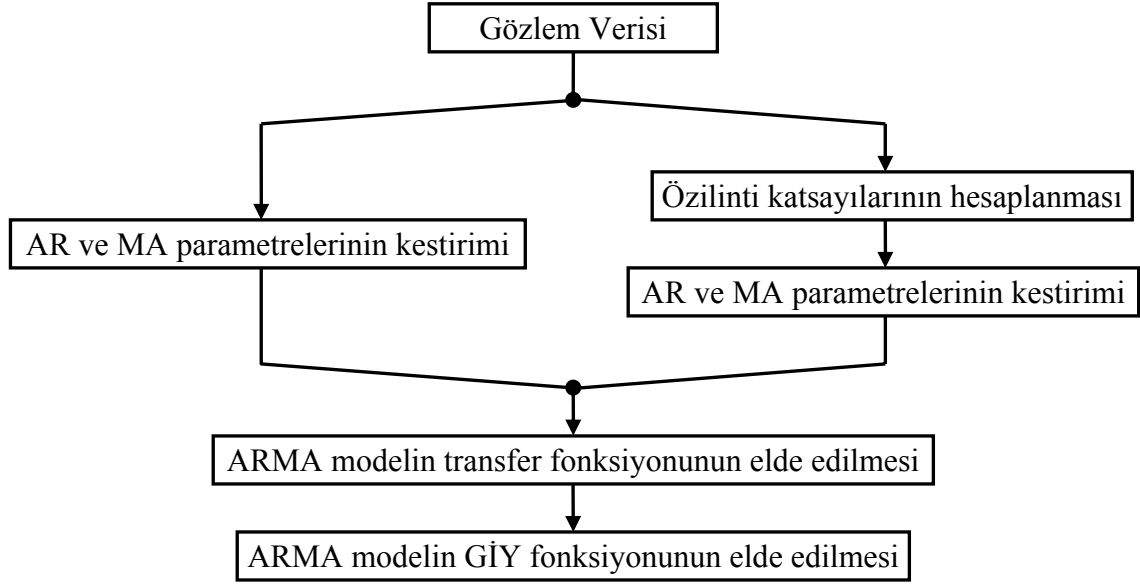
1-B ve 2-B verileri karakterize etmek amacıyla literatürde mevcut olan ARMA model tabanlı parametre kestirim yöntemlerinde izlenen adımlar, aşağıdaki gibi iki ana grup altında toplanmıştır:

I- Bu gruba giren çalışmalarda, veri kümesinden veya bu veriye ilişkin istatistiklerden AR ve MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmektedir. Böylece, ya bu parametrelerle ya da bu parametreleri kullanarak elde edilen ARMA güç izge yoğunluk (GİY) fonksiyonu ile veri kümesinin temsili sağlanmaktadır (Şekil 1).

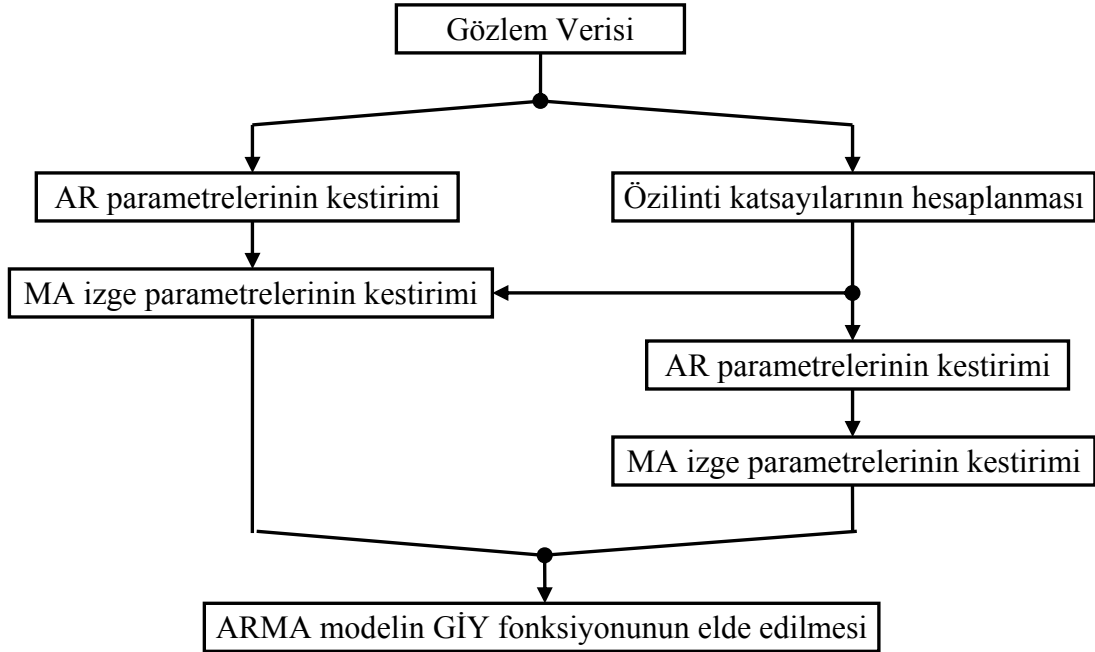
II- Doğrudan doğruya ARMA modelin GİY işlevinin esas alındığı bu çalışmalarda, gözlem verisi örneklerinden veya bu gözlem verisine ilişkin ikinci mertebeden istatistiklerden AR parametreleri kestirilmekte ve daha sonra bu AR parametrelerini ve

ikinci mertebeden istatistikleri kullanarak MA izge parametrelerinin hesabı gerçekleştirilmektedir. Böylece, ARMA modelin GİY işlevi ile veri kümesinin temsili sağlanmaktadır (Şekil 2).

Dikkat edilirse, birinci grupta yer alan yöntemlerde MA parametreleri açıkça kestirilebilirken ikinci gruba dahil olan çalışmalarda MA parametreleri yerine daha kolay olan MA izge parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmektedir.



Şekil 1. Gözlem verisinin doğrudan doğruya ARMA model parametreleri ile temsiline yönelik literatürde yapılan çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.



Şekil 2. Gözlem verisinin ARMA izge parametreleri ile temsiline yönelik literatürde yapılan çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.

Bu şekilde iki ana grupta toplanan ARMA modelin esas alındığı çalışmalar, mühendislik, ekonomi, iktisat ve biometri gibi bir çok alanda geniş uygulamalar bulmaktadır.

Bu tez çalışmasında, ÇD destek bölgesi doğrusal zamanla değişmeyen (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modelin parametrelerini $(N_1 \times N_2)$ noktalı gözlem verisinden kestirmek amacıyla *Eşdeğer AR (EAR) model yaklaşımı* ve *ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımı* olarak adlandırılan iki yeni yöntem önerilmektedir. Önerilen bu yöntemlerin gelecekte; görüntü işleme, 2-B yüksek çözünürlüklü izge kestirimi ve sınırlı uzunluktaki veri kümelerinin modellenmesi gibi uygulama alanlarında oldukça tatmin edici sonuçlar verebilen simetrik olmayan destek bölgesi ARMA modelin parametrelerinin kestirimi probleminin çözümüne temel oluşturması beklenmektedir.

1-B ARMA model parametrelerinin kestirimine yönelik bir çok çalışma literatürde mevcuttur. Ancak işlemsel yoğunluğun fazla olması, doğrusal olmayan eniyileme gerektirmesi ve yakınsama gibi sorunların varlığı, 2-B ARMA model için yapılan çalışmaların sınırlı kalmasına neden olmuştur. Önerilen yöntemler sayesinde, ARMA model parametrelerinin kestirimi ve doğal olarak MA model parametrelerinin kestirimi problemlerine kolay ve optimizasyon gerektirmeyen çözümler sunulmuştur. Ayrıca değişik mekanizmalarla, önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımları iyileştirilmeye çalışılmıştır.

EAR model yaklaşımı, transfer fonksiyonları arasındaki ilişki (1) eşitliği ile verilen (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modelin sonsuz mertebeden 2-B AR modele eşdeğer olduğu düşüncesinden yola çıkılarak türetilmiştir.

$$\frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (1)$$

Gerçeklenebilirlik açısından, (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden ARMA modelin küçük hatalarla (L_1, L_2) . mertebeden bir EAR modeliyle

$$\frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \cong \frac{1}{\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (2)$$

biçiminde temsil edilebileceği düşünülerek ÇD destek bölgesi ARMA modelin sırasıyla $\{a_{k,l}; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2, (k, l) \neq (0,0)\}$ ve $\{b_{h,i}; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2, (h, i) \neq (0,0)\}$ ile tanımlanan AR ve MA parametrelerinin, $\{d_{i,j}; 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2\}$ ile tanımlanan EAR model katsayılarından kestirimi için doğrusal denklemler türetilmiştir. EAR model katsayıları, $(N_1 \times N_2)$ noktalı gözlem verisinden hesaplanan özilinti katsayılarının oluşturduğu 2-B DYW denklemlerinin çözümüyle elde edilmiştir.

Önerilen EAR model yaklaşımından farklı olarak ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımında, $(N_1 \times N_2)$ noktalı gözlem verisinden kestirilen cepstrum katsayılarını ve

AR parametrelerini kullanarak ÇD destek bölgesi ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimini sağlayan özyinelemeli denklemler türetilmiştir. Bu denklemler, incelenen ARMA modelin kararlı olduğunu varsayarak (3) ile tanımlanan eşitliğe göre türetilmiştir.

$$\ln \left\{ \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} - a_{0,0}} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (3)$$

ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemde, MA parametrelerinin $\{b_{h,i}\}$ kestirimi için gereken cepstrum katsayıları $\{c_{m,n}\}$ ve AR parametreleri $\{a_{k,l}\}$, sırasıyla periodogram tekniğinden ve 2-B DYW denklemlerinin çözümünden faydalanarak elde edilmiştir.

Önerilen her iki algoritmada, genelliği bozmaksızın, $a_{0,0} = 1$ ve $b_{0,0} = 1$ olduğu varsayılmıştır.

Önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımları, bilgisayar benzetimleri sınanmıştır. Bunun için, önerilen her bir yöntemin literatürdeki yöntemle eşzamanlı çalıştırılması sonucunda üretilen parametre kestirimleri ve bu parametrelere karşı düşen izge kestirimleri çeşitli başarımlar ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, önerilen yöntemlerle oldukça iyi ve tatmin edici sonuçlara ulaşılmıştır.

NEW APPROACHES FOR THE ESTIMATION OF TWO-DIMENSIONAL AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE MODEL PARAMETERS

SUMMARY

In power spectrum estimation problems, the use of nonparametric methods such as Fast Fourier Transform (FFT) yield low-resolution results. To overcome this resolution problem, many researchers have developed methods based on parametric models. For the purpose of characterizing the observation data or a random field, autoregressive (AR), moving average (MA), and autoregressive moving average (ARMA) models are used extensively. AR and MA models correspond to the special case of ARMA models. The most general models used in modeling the random fields are the ARMA models.

In modeling of both one-dimensional (1-D) and two-dimensional (2-D) random fields, AR models have been widely used since their parameters are estimated with ease by solving the set of linear equations called as Modified Yule-Walker (MYW) equations, directly or recursively. On the other hand, the parameter estimation procedures for the MA and ARMA models are so difficult since these procedures require heavy computational burden and there are convergence problems for the estimated parameters of these models. All of these reasons and intrinsic nonlinearity of estimating MA parameters cause restriction on making studies based upon MA and ARMA models. In spite of these difficulties, ARMA models are preferred frequently because of their relations with the linear filters having rational transfer function and their abilities on simulating the behavior similar to the noise correctly.

From the viewpoint of power spectral density (PSD) estimation, ARMA models perform higher-resolution spectral estimates rather than the AR and MA models. In other words, ARMA models can characterize both the peaks (concentration) and the valleys (dispersion) in the power spectrum, while the AR and MA models are able to represent mainly the concentration and dispersion, respectively. Thus, many random time series can be modeled correctly by the ARMA models.

From the parameter parsimony point of view, ARMA models usually provide the most effective linear model of the homogeneous random fields and are therefore preferable over its AR or MA counterparts: As compared to the AR and MA models, ARMA models can perform more accurate modeling of the stationary random fields with a few numbers of parameters.

For the aim of modeling both 1-D and 2-D random fields, steps followed in the existing ARMA model-based parameter estimation methods are classified into two main groups:

I- In this group of studies, AR and MA parameters of the ARMA model are estimated explicitly from the data set or its statistics. Thus, the given data set is characterized by either the transfer function of ARMA model or the PSD function of ARMA model obtained using the estimated AR and MA parameters (see Figure 1).

II- Here, the estimation processes are realized on the basis of the PSD function of the ARMA model. AR parameters are estimated explicitly from the given data record or its statistics, and then the MA spectrum parameters are calculated by using the estimated

AR parameters and the second-order statistics of the given data record. Hence, the observation data are characterized by the ARMA model PSD function obtained by the estimated AR parameters and MA spectrum parameters (see Figure 2).

It is worthwhile to note that while the MA parameters are estimated explicitly in the first group of methods, the methods involving to the second group obtain the MA spectrum parameters rather than estimating the MA parameters explicitly.

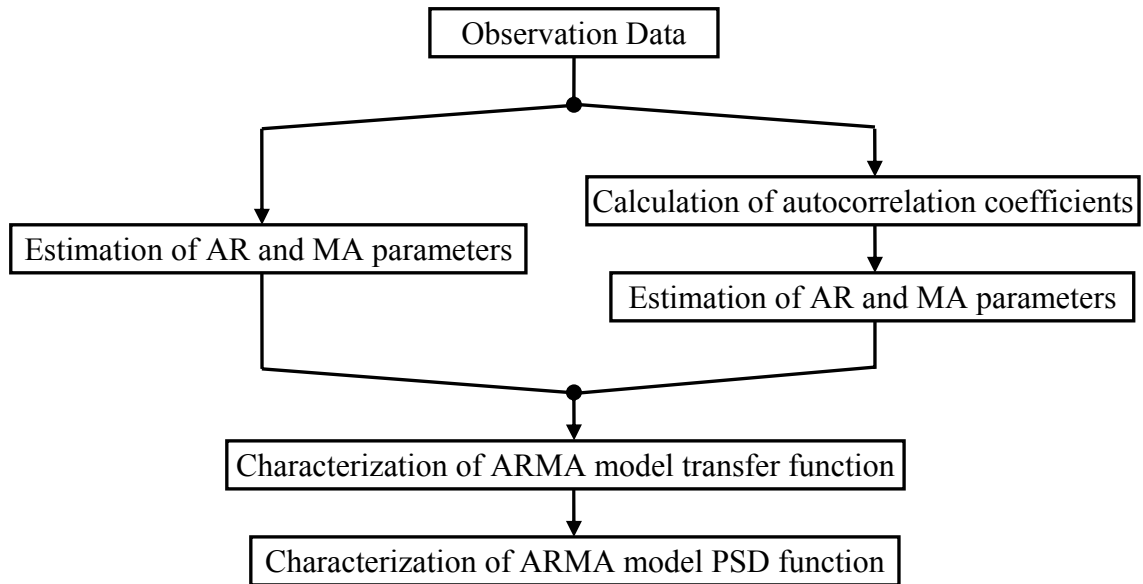


Figure 1. Block diagram of the steps followed in the studies available in the literature, for the characterization of observation data by the ARMA model parameters.

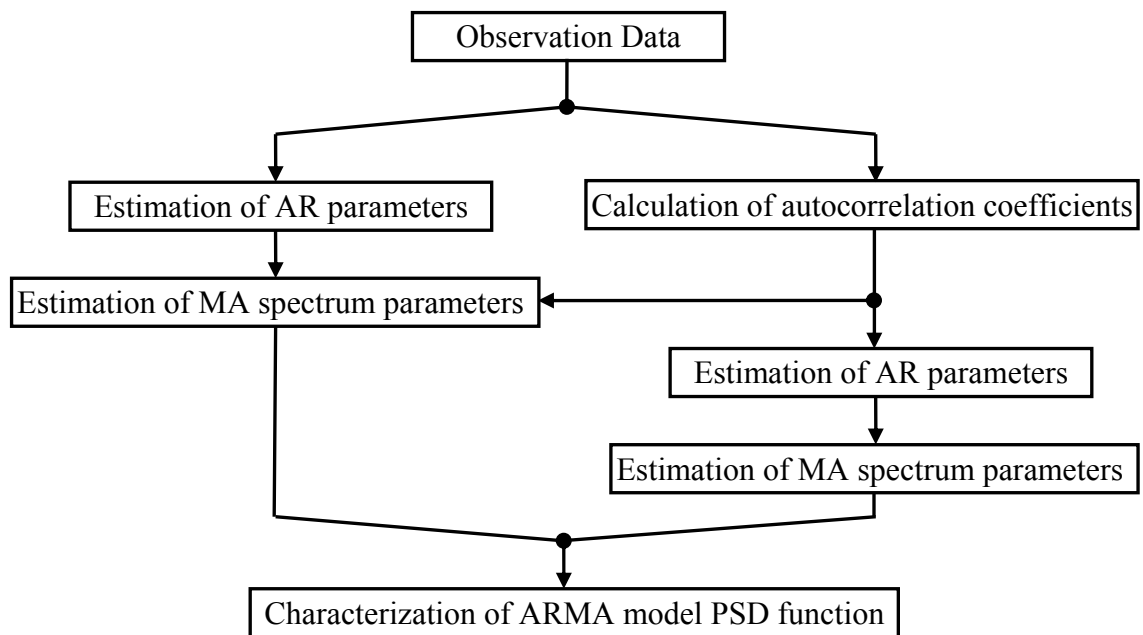


Figure 2. Block diagram of the steps followed in the studies available in the literature, for the characterization of observation data by the ARMA spectrum parameters.

Studies classified with above block diagrams have found wide applications in the areas such as engineering, economy, and biometry.

In this thesis, two new methods called as *Equivalent AR (EAR) model approach* and *ARMA-Cepstrum recursion approach* are proposed for the purpose of estimating the parameters of QP linear time-invariant 2-D ARMA model of order (p_1, p_2, q_1, q_2) , from the given $(N_1 \times N_2)$ -point observation data. In the future, it is expected that these developed methods will be the basis of solving the parameter estimation problem of nonsymmetrical half-plane 2-D ARMA models that may give satisfactory results in the applications such as image processing, high resolution spectral estimation of 2-D random time series, modeling of 2-D data records.

In the literature, there are extensive studies associated with estimating the parameters of 1-D ARMA model. However, it is not possible to conclude the same for 2-D ARMA models since the parameter estimation process requires non-linear optimization and heavy computational complexity, and there are convergence problems for estimating the MA parameters of these models. Thus, by the suggested methods, simple solutions to the problems of estimating the parameters of MA and ARMA models are presented without requiring any optimization and heavy computational burden. Furthermore, the parameter estimation accuracies of the proposed methods are improved by the some variations.

EAR model approach is based on the relation given in (1). Thus, this approach is derived by using the equivalence between the transfer functions of 2-D ARMA and 2-D AR models, which are of order (p_1, p_2, q_1, q_2) and (∞, ∞) , respectively.

$$\frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (1)$$

For physical applications, the relation between ARMA (p_1, p_2, q_1, q_2) and EAR (∞, ∞) models can be performed approximately by a sufficiently high-order 2-D EAR model:

$$\frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \cong \frac{1}{\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (2)$$

Based on the relationship given in (2), we derived the required expressions so as to estimate the AR parameters $\{a_{k,l}; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2, (k, l) \neq (0,0)\}$ and the MA parameters $\{b_{h,i}; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2, (h, i) \neq (0,0)\}$ of an ARMA model, from the EAR model parameters $\{d_{i,j}; 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2\}$. Here, the EAR model parameters are obtained by solving the 2-D MYW equations composed of autocorrelation coefficients that is calculated from the $(N_1 \times N_2)$ -point observation data.

Different from the EAR model approach, in the ARMA-Cepstrum recursion approach, recursive equations are derived, which provide the estimation of the MA parameters of 2-D ARMA model by using the estimated cepstral coefficients and AR parameters of

the given $(N_1 \times N_2)$ -point observation data. On the basis of supposing the considered ARMA model is stable, these equations are derived according to the expression given by

$$\ln \left\{ \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} - a_{0,0}} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (3)$$

In the method based on the ARMA-Cepstrum recursion approach, the cepstral coefficients $\{c_{m,n}\}$ and the AR parameters $\{a_{k,l}\}$ required for the estimation of the MA parameters $\{b_{h,i}\}$ are obtained through the periodogram technique and the solution of MYW equations, respectively.

Without loss of generality, in both developed methods, it is assumed that $a_{0,0} = 1$ and $b_{0,0} = 1$.

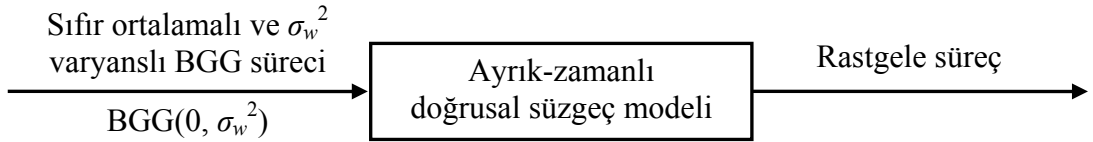
The parameter estimation performances of the suggested methods are analyzed via computer simulations. The parameter and the spectral estimates resulting from the simultaneous running of each proposed method with the method available in the literature are then compared with respect to some performance criteria. Consequently, quite well and satisfactory results are achieved by the proposed methods.

1. GİRİŞ

Model terimi; kendisini karakterize eden parametrelere bağılı olarak üretilen fiziksel veriyi oluşturduğu, yönlendirdiği veya sınırladığı kabul edilen bilinmeyen kuralları açıklayabilmek amacıyla kullanılabilecek olan bir hipotezi temsil etmektedir.

Rastgele bir sürecin veya sınırlı uzunlukta verilen herhangi bir veri kümesinin bir model yardımıyla temsil edilebileceği fikri ilk olarak Yule (1927) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmada, yıllara göre aylık ölçümlerle elde edilen güneş lekelerinin sayısına ilişkin veri kümelerinin ikinci mertebeden özbağımlı (AR(2)) model ile başarılı bir biçimde temsil edilebileceği gösterilmiştir. Böylece AR model kavramı, ilk olarak literatüre bu çalışma ile girmiştir. Daha sonra Walker (1931), Avustralya'nın Darwin limanındaki mevsimlik hava basıncına ait verileri modellemek için daha yüksek mertebeden bir AR model kullanılması gerektiğini düşünerek daha önce Yule (1927) tarafından başka bir veri kümesi için kullanılan AR(2) model yaklaşımını p . mertebeden AR model için genelleştirmiştir. Sonuçta, günümüzde de yaygın olarak kullanılan ve işaret işlemede büyük çığır açan Yule-Walker (YW) denklemleri kavramı ortaya çıkmıştır. Böylece, bu denklemler sayesinde AR model veya ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin doğrusal denklem takımları ile kestiriminin önü açılmıştır.

Buna göre, birbiriyle yüksek derecede ilişkili gözlemlerden oluşan bir-boyutlu (1-B) veya iki-boyutlu (2-B) bir veri alanı, Şekil.1.1'de gösterildiği gibi istatistiksel bağımsız, dolayısıyla ilişkisiz impulsların model olarak alınan doğrusal bir süzgeç girişine uygulanmasıyla elde edilebilir.



Şekil 1.1: Parametrik modelden rastgele süreç üretimini sağlayan yapının blok diyagramı.

Burada ifade edilen impulslar, genelde sıfır ortalamalı ve yaklaşık olarak sabit bir değişime (varyansa) sahip olduğu kabul edilen Gauss dağılımlı rastgele sürecin

örneklerine karşı düşer. Böyle bir örnek kümesi, genel olarak beyaz Gauss gürültüsü (BGG) olarak adlandırılır.

Şekil 1.1 ile üretilen rastgele süreç, doğrusal bir süreç olarak adlandırılır. Bu doğrusal sürecin yapısını, kullanılan doğrusal süzgeç modeli belirler. Literatürde, hem 1-B hem de 2-B işaret işleme alanında çeşitli amaçlar için kullanılan tüm-sıfır (all-zero), tüm-kutup (all-pole), ve kutup-sıfır (pole-zero) olmak üzere en genel üç süzgeç modeli mevcuttur. Bu süzgeç modellerinin sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG süreciyle uyarımı sonucu elde edilen rastgele süreçler ise, sırasıyla özbağımlı (AR), kayan ortalamalı (MA), ve özbağımlı kayan ortalamalı (ARMA) süreçler olarak adlandırılır. Sonuç olarak, parametrik anlamda rastgele alanları modellemek için kullanılan üç temel model; AR, MA, ve ARMA modelleridir. AR ve MA modelleri ARMA modelin özel halleri olup rastgele alanları modellemede kullanılan en genel model ARMA'dır.

Doğrusal denklemler kümesinin (YW denklemleri) doğrudan veya yinelemeli olarak çözülmesiyle parametrelerinin hesaplanmasındaki kolaylıktan dolayı AR modeller hem 1-B hem de 2-B rastgele alanların modellenmesinde yaygın olarak kullanılmıştır. Saf AR modellerle karşılaştırıldığında, ARMA ve MA modeller için parametre kestirim işleminin daha zor olması, işlemsel yoğunluk, ve yakınsama gibi sorunların varlığı MA ve ARMA model parametrelerinin kestirime dayalı yapılan çalışmaların sınırlı kalmasına neden olmuştur. Çünkü, doğası gereği MA parametrelerinin kestirimi, doğrusal olmayan denklemlerin çözümünü gerektirir.

Tüm bu olumsuzluklara rağmen, rasyonel transfer fonksiyonuna sahip doğrusal süzgeçlerle olan ilişkisinden ve gürültüye benzer (rastgele giriş dizisinden dolayı) davranışı doğru bir biçimde benzetim yeteneğine sahip olmasından dolayı ARMA modeller çok sık tercih edilir. Parametrik gösterim açısından ARMA modeller, durağan rastgele alanların en etkili doğrusal modelini sağlarlar. Güç izge yoğunluğu anlamında, ARMA modeller AR ve MA modellere göre daha iyi ve çözünürlüğü daha yüksek olan izge kestirimleri üretirler. Çünkü, frekans bölgesinde ARMA modeller yoğunlaşma (tepe) ve yayılmayı (vadiler) belirlerken AR modeller sadece yoğunlaşmayı, MA modeller ise sadece yayılmayı temsil edebilirler (Cadzow, 1982). Bu yüzden, ARMA modeller ile bir çok rastgele zaman serisi daha doğru modellenebilir. Bu konuda, hem 1-B hem de 2-B işaret işleme alanında bir çok çalışma yapılmıştır.

1.1. 1-B ARMA Model Parametrelerinin Kestirimi Üzerine Yapılan Çalışmalar

1-B durum için, Şekil 1.1’de model olarak kullanılan en genel ayrık-zamanlı doğrusal süzgeç yapısı p tane kutup ve q tane sıfırdan oluşan kutup-sıfır modeli olup

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}} \quad (1.1)$$

rasyonel transfer fonksiyonu ile tanımlıdır. Girişi, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örnekleriyle uyarılan bu en genel süzgeç yapısının çıkışından elde edilen örnekler, 1-B ARMA sürece ilişkin örnekleri temsil eder. Sonuç olarak (1.1) ile verilen ifade, aynı zamanda (p, q) . mertebeden 1-B ARMA modeline karşı düşer. Burada p ve q sırasıyla, 1-B ARMA modelin AR ve MA kısımlarının mertebelerini belirtir. Bu modelin ürettiği örneklere ilişkin rastgele zaman serisi ise

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \sum_{j=0}^q b_j w(n-j) \quad (1.2)$$

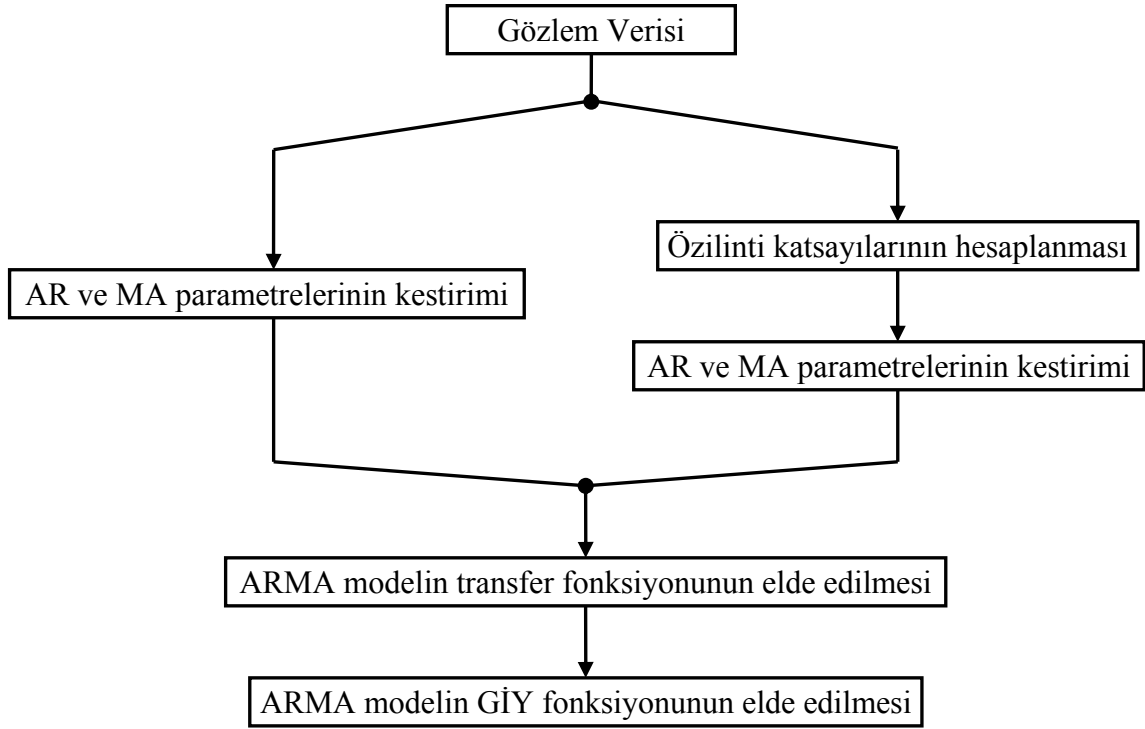
giriş-çıkış fark denklemi ile verilir. Burada, $x(n)$ gözlem verisi olarak da adlandırılan ARMA sürece ilişkin örnekleri yani çıkışı, $w(n)$ ise sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecine karşı düşen rastgele beyaz gürültü örneklerini yani girişi temsil eder. $\{a_i; 1 \leq i \leq p\}$ ve $\{b_j; 0 \leq j \leq q\}$ sırasıyla, 1-B ARMA modelin AR ve MA kısımlarını karakterize eden parametrelerdir. (1.2) ile tanımlanan 1-B ARMA zaman serisine ilişkin güç izge yoğunluk (GİY) fonksiyonu

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 \left| \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} + \dots + b_q e^{-jq\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_p e^{-jp\omega}} \right|^2 \quad (1.3)$$

ifadesi ile verilir. Buna göre parametrik modellemedeki problem, verilen N uzunluklu veri kümesini (bu veri kümesi (1.2) eşitliği ile de üretilmiş olabilir) modellemek için kullanılacak olan (1.1)’deki gibi bir transfer fonksiyonuna sahip ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestiriminin gerçekleştirilmesi olarak tanımlanabilir.

Yukarıda yapılan tanımlamaların ışığında, N uzunluklu veri kümelerini modellemek amacıyla kullanılan literatürdeki ARMA model tabanlı parametre kestirim yöntemlerinde izlenen adımlar iki ana grup altında toplanabilir:

I- Bu gruba giren çalışmalarda, veri kümesinden veya bu veriye ilişkin hesaplanan ikinci mertebeden istatistiklerden AR ve MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmektedir. Böylece, ya bu parametrelerle ya da bu parametreleri (1.3)'de yerine koyarak elde edilen ARMA GİY fonksiyonu ile veri kümesinin temsili sağlanmaktadır (Şekil 1).

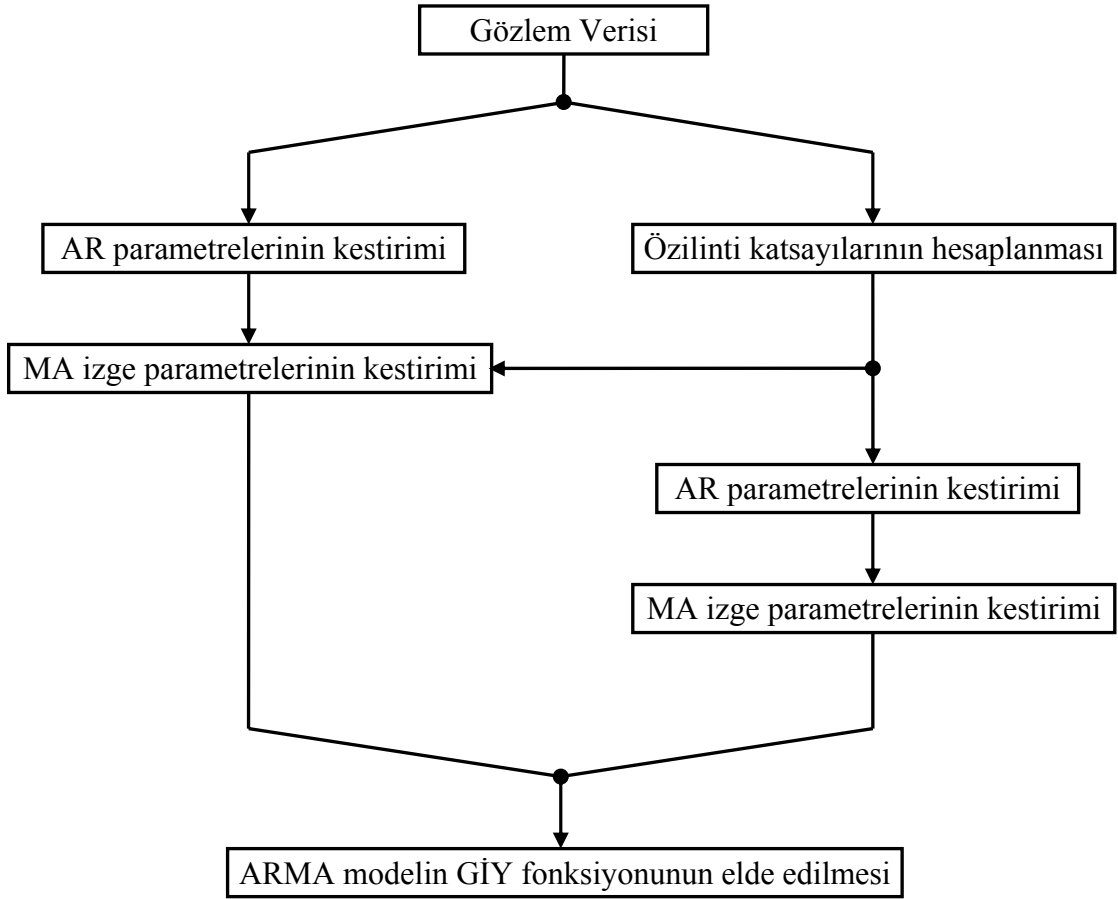


Şekil 1.2: Gözlem verisinin doğrudan doğruya ARMA model parametreleri ile temsiline yönelik literatürdeki çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.

II- Doğrudan doğruya (1.3) eşitliği ile tanımlanan ARMA modelin GİY işlevinin esas alındığı bu çalışmalarda, gözlem verisi örneklerinden veya bu gözlem verisine ilişkin ikinci mertebeden istatistiklerden AR parametreleri kestirilmekte ve daha sonra bu AR parametrelerini ve ikinci mertebeden istatistikleri kullanarak MA izge parametrelerinin hesabı gerçekleştirilmektedir. Böylece, ARMA modelin GİY işlevi ile veri kümesinin temsili sağlanmaktadır (Şekil 2).

Dikkat edilirse, birinci grupta yer alan yöntemlerde MA parametreleri açıkça kestirilebilirken ikinci gruba dahil olan çalışmalarda MA parametreleri yerine daha kolay olan MA izge parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmektedir.

Bu şekilde gruplandırılan ARMA modelin esas alındığı çalışmalar; mühendislik, ekonomi, iktisat ve biometri gibi bir çok alanda geniş uygulama alanları bulmaktadır.



Şekil 1.3: Gözlem verisinin ARMA izge parametreleri ile temsiline yönelik literatürdeki çalışmalarda izlenen adımların blok diyagramı.

Şekil 1.2 ve Şekil 1.3'deki gruplandırmaları dikkate alarak literatürde mevcut olan ARMA model tabanlı çalışmaların bazıları, kullandıkları yaklaşımlara göre sınıflandırılmıştır.

1.1.1. Birinci Gruba Dahil Olan Çalışmalar

1.1.1.1. Yüksek Mertebeden AR veya MA Model ile ARMA Modelin Temsil Edilmesi Fikrine Dayalı Yöntemler

Bir ARMA model, sonsuz uzunluktaki bir AR veya MA modele eşdeğerdir. Sonuçta, bu ARMA modele yeterince yüksek mertebeden bir AR yada MA modeli ile yaklaşılabılır. ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi için gereken doğrusal olmayan optimizasyon yöntemlerinin getirdiği hesapsal yük ve yakınsama problemlerinin üstesinden gelmek amacıyla yüksek mertebeden AR model ile ARMA modelin temsili fikri Graupe ve diğ., (1975), Martinelli ve diğ., (1985), ve Shufang ve diğ., (2000) tarafından kullanılmıştır. Bu çalışmalarda, $ARMA(p, q) = AR(\infty)$ ilişkisine karşı düşen

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}} \quad (1.4)$$

ifadesine göre sonsuz tane AR katsayısı yerine, gerçekleştirilebilirlik açısından, küçük hatalarla (1.4) eşitliğini yaklaşık olarak sağlayan sonlu mertebeden (L . mertebeden) bir AR model ile (p, q). mertebeden ARMA model arasında eşleme yapılmıştır. Bu eşleme işlemi, $a_0 = 1$ ve $b_0 = 1$ varsayımlarını dikkate alarak ARMA model parametreleri $\{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q\}$ ile (1.4) eşitliğini yaklaşık olarak sağlayan L . mertebeden AR model katsayıları $\{d_1, d_2, \dots, d_L\}$ arasında oluşturulan

$$\varepsilon = \left| \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}} - \frac{1}{\sum_{k=0}^L d_k z^{-k}} \right|^2 \quad (1.5)$$

eşitliği ile verilmektedir. Yüksek mertebeden AR katsayıları $\{d_1, d_2, \dots, d_L\}$ ile ARMA model parametreleri $\{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q\}$ arasındaki hatanın karesini en küçükmeye dayanan bu eşleme işlemi sonucunda elde edilen doğrusal denklemlerin çözümüyle, MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmiştir. Eşleme işleminin ürettiği denklemden yararlanarak, kestirilen MA parametrelerinden $\{b_i\}$ ve ARMA modeli yaklaşık olarak temsil eden yüksek mertebeden AR katsayılarından $\{d_k\}$ ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin $\{a_j\}$ hesaplanması sağlanmıştır.

1.1.1.2. En Küçük Karelere Dayalı Yöntemler

Sistem tanılamada genel olarak bir zaman dizisi, girişi beyaz gürültü dizisi ile uyarılmış kutup-sıfır modelinin çıkışı ile temsil edilir ve bu çıkış dizisi de ARMA süreci olarak adlandırılır. Ancak çoğu zaman uygulamada, kestirimi yapılacak ARMA sürecin mertebeleri (p, q) bilinmez. Sistem tanılama, muhtemel ARMA mertebelerine karşı düşen AR ve MA katsayılarının kestirimini ve uygun (p, q) mertebelerinin seçimini gerektirir. Bu amaçla Zhang ve diğ., (1985), en küçük kareler kestirimine dayanan merite yinelenmeli bir algoritma önermişlerdir. Ancak bu algoritma, çıkış bilgisinin yanında giriş bilgisinden de yararlanarak parametre kestirimlerini gerçekleştirmekte ve başlangıç kestirimlerine de ihtiyaç duymaktadır. Şöyle ki,

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_p, b_0, b_1, b_2, \dots, b_q]^T \quad (1.6)$$

ile verilen ARMA modele ilişkin parametre vektörünün en küçük kareler kestirimleri,

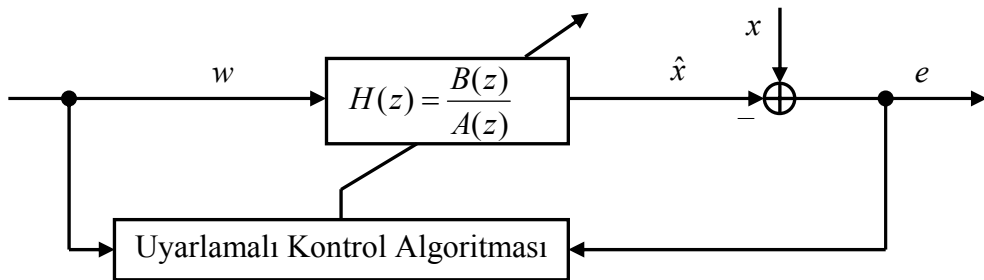
$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T x \quad (1.7)$$

ifadesi ile hesaplanmakta ve elde edilen parametreler başlangıç değerleri olarak kullanılmaktadır. (1.7)'deki Φ matrisi, $(p + q + 1) \times N$ boyutlu olup N uzunluklu giriş ve çıkış verilerinin örneklerinden oluşmaktadır. x ise, çıkış verisine ilişkin örneklerin oluşturduğu N uzunluklu sütun vektörüne karşı düşmektedir. Parametre kestirimleri,

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{LS} - \hat{\theta}_{BIAS} \quad (1.8)$$

eşitliği ile her bir iterasyonda yenilenmekte ve bu işlem bir önceki iterasyonda elde edilen parametre değerleri ile yeni üretilen her bir parametre kestirimleri arasındaki fark en az 0.001 olana kadar devam ettirilmektedir. (1.8)'deki $\hat{\theta}_{BIAS}$ terimi, yanlış kestirime karşı düşmekte olup verilen gözlem verisi ile her bir iterasyonda elde edilen parametre kestirimlerinin ürettiği çıkış verilerinin arasındaki farka bağlı olarak üretilmektedir. Sonuç olarak, Zhang ve diğ., (1985)'nin önerdiği bu algoritmanın yakınsaklık problemi yaşamaması olasıdır.

ARMA model parametrelerinin kestirimi için giriş ve çıkış bilgisinin kullanıldığı diğer bir çalışma, Kothapalli ve diğ., (1998) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmadaki yaklaşım, blok diyagramı Şekil 1.4'deki gibi verilen yinelemeli parametre kestirimci ile ARMA model parametrelerinin uyarlamalı (adaptive) kestirimini gerçekleştirir.



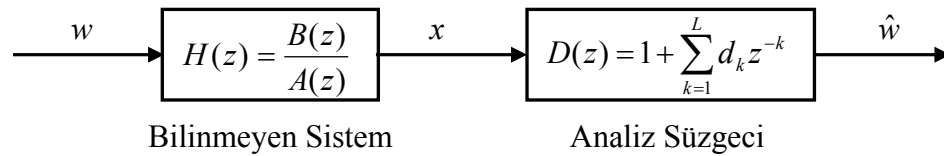
Şekil 1.4: 1-B ARMA model parametreleri için uyarlamalı parametre kestirimcinin blok diyagramı.

Şekil 1.4'deki ayarlama mekanizması, orijinal ve kestirilen çıkış verileri arasındaki farka $e = x - \hat{x}$ ve giriş verisine göre parametre kestirimlerini yenilemekte ve yineleme

işlemi hata fonksiyonu e 'nin karesel ortalamasının en küçük olduğu belirlenen bir eşik değerine kadar devam etmektedir. Ancak, Zhang ve diğ., (1985)'nin algoritmasında olduğu gibi, uygulamada giriş bilgisinin genelde bilinmiyor olması Kothapalli ve diğ., (1998)'nin önermiş olduğu algoritmayı sınırlayan bir etken olarak gözükmektedir.

Kestirim için giriş verisine ihtiyaç duymayan ve Zhang ve diğ., (1985)'nin önerdiği yöntemin değişik bir sürümü olan etkin bir algoritma Zhang ve diğ., (1987) tarafından geliştirilmiştir. Sadece çıkış verisini kullanarak ARMA izge kestirimini elde edilebildiği bu yöntemde en küçük karelere dayalı analiz, AR parametrelerinin yüksek doğrulukta kestirimlerini elde etmek amacına hizmet etmektedir. MA parametrelerinin kestirimi ise, yinelemeli olarak gerçekleştirilmekte ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için Newton-Raphson algoritmasından faydalanılmaktadır.

Uygulamada giriş bilgisinin genelde bilinmiyor olması, sistem tanılama algoritmasını sınırlayan bir özelliktir. Bu özellik, araştırmacıları, öncelikle giriş bilgisinin kestirimini elde etmeye yöneltmiştir. Mikhael ve diğ., (1986)'nin geliştirdiği iki-katlı kutup-sıfır kestirimci ile Paarmann ve diğ., (1992)'nin önermiş olduğu ARMA modelin giriş ve çıkış işaretleri arasındaki diklik (orthogonality) ilişkisinden yola çıkarak model hatasını en küçükleyen ARMA model parametrelerinin yinelemeli kestirimini gerçekleyen yapılarda, bilinmeyen sistemin ürettiği gözlem verisi ilk olarak yüksek mertebeden (L . mertebeden) bir AR modele eşlenmektedir. Daha sonra, en küçük kareler (least squares) anlamında elde edilen optimum AR parametre kestirimleriyle $\{d_k\}$ bilinmeyen sistemin ürettiği gözlem verisi $\{x\}$ 'in ters süzgeçlenmesi sonucu giriş bilgisinin kestirimi $\{\hat{w}\}$ elde gerçekleştirilmektedir. Bu işlem adımı, Şekil 1.5'deki blok diyagramı özetlenmiştir. Böylece, kestirilen giriş bilgisinin gerçek işaret verisi (gözlem verisi) ile kullanımı sonucunda ARMA model parametrelerinin yinelemeli kestirimi sağlanmaktadır.



Şekil 1.5: Ters süzgeçleme (inverse filtering) işleminin blok diyagramı.

En küçük karelere dayalı diğer bir yöntem Fan ve diğ., (1992) tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde, ARMA model parametrelerinin kestirimi için doğrusal olmayan

eniyleme ile öngörü hatasının en küçüklenmesi sağlanarak AR ve MA parametrelerinin eşzamanlı kestirimi gerçekleştirilmiştir. Buna göre, bu yöntemde

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w^2(k) \quad (1.9)$$

ile tanımlanan performans ölçütünün en küçüklenmesi amaçlanmıştır. (1.9) ifadesindeki $\boldsymbol{\theta}$, b_0 parametresinin dahil olmadığı (1.6) ile verilen parametre vektörüne karşı düşmektedir. $w(k)$ ise öngörü hatası olup, (1.2) eşitliğinden

$$w(k) = x(k) + \sum_{i=1}^p a_i x(k-i) - \sum_{j=1}^q b_j w(k-j) \quad (1.10)$$

biçiminde verilmektedir. Buna göre $w(k); w(k-1), w(k-2), \dots, w(k-q)$ 'nin $w(k-1)$ ise; $w(k-2), w(k-3), \dots, w(k-q-1)$ 'in işlevi olacaktır. Sonuçta $\{w(k); 1 \leq k \leq N\}$, (1.6) ile tanımlanan parametre vektörünün doğrusal olmayan bir işlevi olacaktır. Yani, $\boldsymbol{w} = F(\boldsymbol{\theta})$. Fan ve diğ., (1992), (1.10)'daki ifadeyi esas alarak

$$\min\{J(\boldsymbol{\theta})\} = \min\{(\boldsymbol{w}^T)^{(n+1)} (\boldsymbol{w})^{(n+1)}\} \quad (1.11)$$

ile $(n + 1)$. iterasyonda (1.9)'da tanımlanan $J(\boldsymbol{\theta})$ işlevini en küçükleyen parametre kestirimlerinin elde edilmesini sağlayan doğrusal olmayan yinelemeli bir algoritma önermişlerdir. Doğrusal olmayan en küçük karelere dayalı bu algoritmanın, gürültü dağılımına (Gauss ve Gauss olmayan) duyarsız olması ve en büyük olabilirlik (maximum likelihood) yöntemlerine yakın sonuçlar üretmesi gibi üstünlüklerinin yanında Paarmann ve diğ., (1992)'nin algoritmasındaki gibi model parametrelerinin elde edilmesi için gerekli olan başlangıç kestirimleriyle doğruluk ve yakınsama hızının etkilenmesi algoritmanın tek kusuru olarak gözükmemektedir. Sonuçta, en büyük olabilirlikli yöntemlerde de gerekli olan başlangıç kestirimlerinin klasik yöntemlerle doğru bir biçimde belirlenmesi ile bu sorunun üstesinden gelinebileceği aşikardır. Ancak bu ise, ek bir işlem adımı gerektirmekte ve hesapsal yoğunluğun artması anlamına gelmektedir.

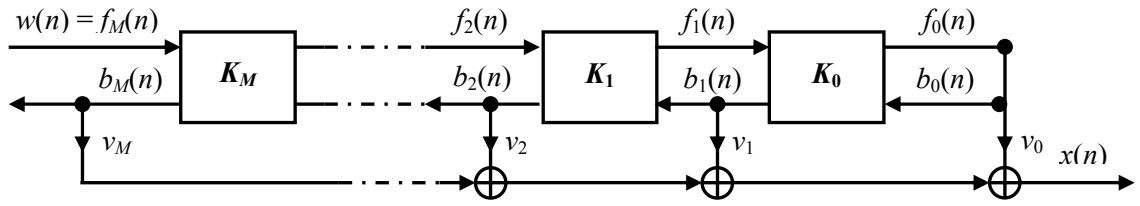
1.1.1.3. Kafes Süzgeç Yapısını Kullanan Yöntemler

Kuantalama (nicemleme) ve yuvarlatma hatalarına olan gürbüzlükleri ve gürültüye duyarsız olmaları, kafes süzgeç yaklaşımının işaret işleme alanında yaygın olarak

kullanımını beraberinde getirmiştir. Özellikle konuşma işaretlerinin analizi ve sentezinde 1-B kafes süzgeçler geniş bir uygulama alanı bulmuş ve 1-B ARMA kafes filtrelerin konuşma işaretlerinin analizinde, sentezinde, ve sınıflandırılmasında AR kafes süzgeçlerine göre mükemmel sonuçlar verdiği fark edilmiştir (Miyanaga ve diğ., 1982; Kwan ve diğ., 2000; Kwan ve diğ., 2001).

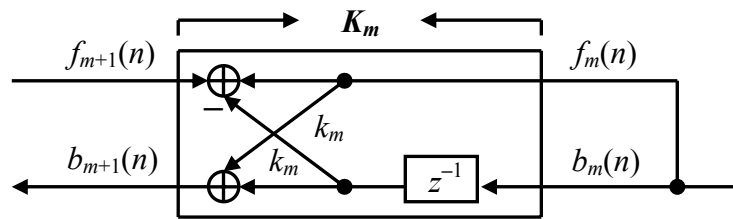
Kafes süzgeç yaklaşımının sağladığı en büyük kolaylık, dikgenlik özelliğidir. Bu özellik sayesinde, daha düşük dereceli süzgeç katsayılarını hesaplamaksızın süzgeç mertebesi güncellenebilmektedir. Dikgenliğin sağladığı diğer bir üstünlük; birinci mertebeden kafes hücrelerinin ardışık (cascade) bağlanması ile kafes süzgeç yapısının elde edilebilmesine imkan tanınmasıdır. Hücresel yapıya sahip olmaları, kafes süzgeçlerin hem donanım hem de yazılım olarak gerçekleştirilebilmeleri açısından önemlidir. Bu amaçla, ARMA modelleme için etkin kafes algoritmaları önerilmiştir.

Gray ve diğ., (1973), eşit sayıdaki AR ve MA parametrelerinin kestirimi için, blok diyagramı Şekil 1.6'daki gibi verilen ARMA kafes kestirimci yapısını türetmişlerdir.



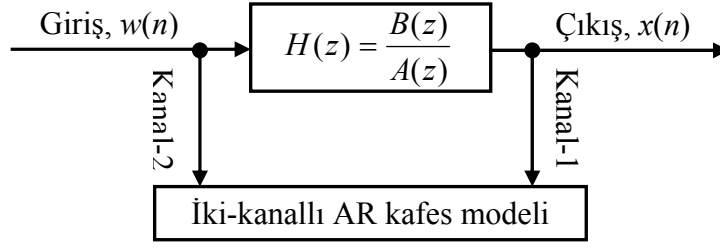
Şekil 1.6: 1-B ARMA kafes kestirimcinin blok diyagramı.

Gray ve diğ., (1973)'nin çalışmasında, Şekil 1.6 ile verilen ARMA kafes kestirimciyi oluşturan her bir AR kafes hücrelerinin değişik gerçeklemeleri (tek-çarpanlı, iki-çarpanlı, üç-çarpanlı) sunulmuştur. İki-çarpanlı kafes hücrelerinin yapısı Şekil 1.7'de verilmiştir.



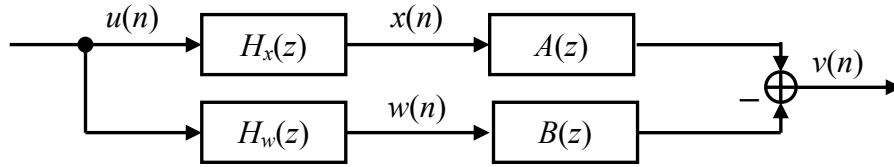
Şekil 1.7: İki-çarpanlı kafes hücresi.

Şekil 1.6'daki gibi, AR kafes süzgeç yapısından türetilmiş daha başka ARMA kafes yapıları da mevcuttur (Lee ve diğ., 1982; Lim ve diğ., 1984). ARMA modelleme için geliştirilen bu yapılarda, iki-kanallı AR kafes modeli esas alınmıştır (Şekil 1.8).



Şekil 1.8: İki-kanallı AR kafes modeli ile ARMA modelleme.

Verilen rastgele gözlem verisini modellemek amacıyla kullanılan ARMA modelin parametrelerinin yinelemeli kestirimi için kafes süzgeç gerçekleştirilmesine dayanan bir çalışma, Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha önce bahsedilen kafes algoritmalarından farklı olarak – ki bu algoritmalar AR kafes yapısından türetilen geleneksel ARMA kafes süzgeçleridir, Miyanaga ve diğ., (1987) AR ve MA tipi temel (elementer) kafes hücreleri tasarlamış ve bu hücrelerin bileşiminden yeni bir ARMA kafes yapısı türetmişlerdir. Bu ARMA kafes yapısı ve bu yapıyı oluşturan AR ve MA temel hücrelerinin tasarımı, ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen en küçük karelere dayalı ölçütten keşfedilmiştir. Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından önerilen ölçütün temeli, Şekil 1.9 ile verilen blok diyagramını esas almaktadır.



Şekil 1.9: Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından yeniden tanımlanan en küçük kareler probleminin blok diyagramı.

Şekil 1.9'daki rastgele değişken $u(n)$, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örneklerini; $A(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots+a_pz^{-p}$ ve $B(z)=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\dots+b_qz^{-q}$, kestirimi yapılacak AR ve MA parametrelerinden oluşan p . ve q . mertebeden polinomları; $H_w(z)$ ve $H_x(z)$ ise, kararlı transfer fonksiyonlarına ilişkin referans modellerini temsil etmektedir. Buna göre, Şekil 1.9'dan yararlanarak aşağıdaki ölçüt tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
 V_{p,q} &= \frac{\sigma_u^2}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |H_x(z^{-1})A(z^{-1}) - H_w(z^{-1})B(z^{-1})|^2 \frac{dz}{z} \\
 &= E[(A(z^{-1})x(n) - B(z^{-1})w(n))^2] \\
 &= E[(x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_px(n-p) - b_0w(n) + b_1w(n-1) + \dots + b_qw(n-q))^2] \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

(1.12) ile tanımlanan ölçütü en küçükleme, $v(n)^2$ 'nin ortalama değerini en küçükleyen $A(z)$ ve $B(z)$ 'in parametrelerini hesaplamaya karşı düşer. Parametre kestirimleri ise

$$[1 \quad \mathbf{a}_{p,q} \mid b_0 \quad \mathbf{b}_{p,q}] \mathbf{R}_{p,q} = [\min\{V_{p,q}\} \quad \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (1.13)$$

ifadesi ile elde edilmektedir. (1.13)'deki $\min\{V_{p,q}\}$, $V_{p,q}$ 'nun en küçük değeri olup diğer terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

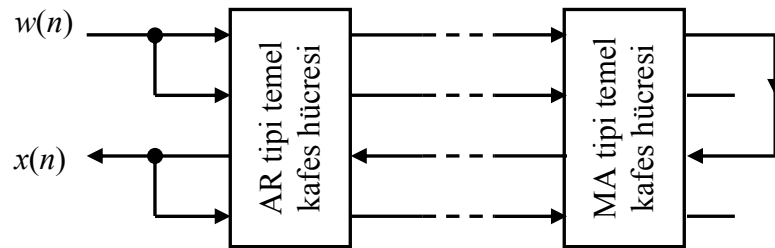
$$\mathbf{a}_{p,q} = [a_1, a_2, \dots, a_p]; \quad \mathbf{b}_{p,q} = [b_1, b_2, \dots, b_q]; \quad \mathbf{R}_{p,q} = E[\mathbf{h}_{p,q}(n)^T \mathbf{h}_{p,q}(n)]$$

$$\mathbf{h}_{p,q}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p) \mid -w(n), -w(n-1), \dots, -w(n-q)]$$

Kestirimi yapılacak olan ARMA model transfer fonksiyonu, $V_{p,q}$ 'yu en küçükleyen referans modellerini kullanarak aşağıdaki ifade ile elde edilmektedir.

$$H(z) = \frac{H_x(z)}{H_w(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Miyanaga ve diğ., (1987), referans modellerini gerçekleyen AR ve MA tipi temel kafes yapılarını geliştirmişlerdir. Bu kafes yapılarının Şekil 1.10'daki gibi ardışık bağlanması ile, daha önceki kafes yapılarını genelleyen ARMA kafes süzgeç yapısına ulaşılmıştır.



Şekil 1.10: Miyanaga ve diğ., (1987) tarafından geliştirilen 1-B ARMA kafes yapısının blok diyagramı.

Değiştirilmiş Yule-Walker (DYW) denklemlerinin doğrudan çözümüyle elde edilen parametre kestirimleriyle karşılaştırıldığında, küçük veri boyutlarında ve özellikle gürültü gibi bozucu etkenlerin varlığında, kafes süzgeçleri ile etkin, tutarlı, ve kararlılığı sağlayan ARMA model parametre kestirimlerinin elde edilebildiği gözlenmiştir (Miyanaga ve diğ., 1987; Li ve diğ., 1988). Kafes süzgeçlerinin sahip oldukları üstün özellikler, normal kafes süzgeçlerindeki gecikme elemanı z^{-1} 'in (Şekil 1.7) yerine tüm-kutup süzgeç yapısının kullanıldığı değişik kafes yapılarının önerilmesini de beraberinde getirmiştir (Vural ve diğ., 1989; Sharma, 1989).

Son zamanlarda ARMA kafes yapısı, sonsuz dürtü yanıtı (IIR: Infinite Impulse Response) sayısal süzgeçlerin gerçekleştirilmesinde de kullanılmıştır (Kwan, 2002; Kwan, 2003). Bu çalışmalarda, çeşitli IIR sayısal süzgeç karakteristiklerinin en az sayıda katsayı ve gecikme elemanı kullanarak ARMA kafes süzgeçlerle gerçekleştirilebileceği üzerinde durulmuştur.

1.1.1.4. Araç Değişken Yöntemleri

YW denklemlerine dayalı olarak AR parametrelerinin kestirimi, özellikle küçük veri kümeleri ve gürültünün varlığında doğruluğu düşük ve yanlı kestirimlerin elde edilmesine neden olmaktadır. Bunun üstesinden gelmek için *araç değişken* (instrumental variable) yöntemine dayalı yinelemeli algoritmalar önerilmiştir (Friedlander, 1982a; Friedlander, 1983).

Giriş $w(n)$ ve çıkış $x(n)$ verilerinden $\{a_i\}$ ve $\{b_j\}$ parametrelerini kestirmek için araç değişken yöntemi

$$\hat{\theta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{x} \quad (1.14)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $\hat{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q]^T$, kestirilmek istenen parametre vektörüne; $\mathbf{x} = [x(1), x(2), \dots, x(N)]^T$ ise, N uzunluklu gözlem bilgisine karşı düşmektedir. \mathbf{X} matrisi ve araç değişken matrisi \mathbf{Z} , giriş ve çıkış işaretlerinin örneklerinden oluşmuştur.

Friedlander (1982a), (1.14) ile verilen araç değişkenlerine dayalı kestirim işlemini gerçekleştirmek için yinelemeli bir algoritma önermiştir. Friedlander (1982a), AR parametrelerinin kestirimi için kullanılan DYW denklemlerinin sistem tanılamada kullanılan *araç değişken* yönteminin özel durumuna karşı düştüğü sonucuna varmıştır.

Friedlander (1983), (1.14) ile tanımlanan parametre kestirim işlemini hızlı bir biçimde gerçekleyen yinelemeli bir algoritma ve bu algoritmanın kafes filtre yapılarıyla gerçekleştirilmesini sağlamıştır. Bu çalışmada, bilinen YW denklemleri yaklaşımından farklı olarak, araç değişken yönteminin hem küçük veri kayıtları hem de düşük işaret/gürültü oranları için yansız ve tutarlı kestirimler ürettiği gerçekleştirilen istatistiksel analizlerde gösterilmiştir. Yöntemin temelini oluşturan araç değişkenlerinin seçiminin ve kullanılan araç değişkeni sayısının, kestirimlerin doğruluğunu artırmak açısından önemli olduğu gözlenmiştir.

1.1.1.5. Diğer Yöntemler

Çok büyük veri kümelerinin kullanımında yansız kestirimler üreten en büyük olabilirlikli yöntemlerin doğrudan kullanımının çok yoğun hesapsal karmaşıklığa neden olması, bu yöntemlerin pratikte kullanımını sınırlı kılmıştır. Ayrıca, verilen sonlu uzunluktaki gözlem verisini özilinti matrisini elde etmek amacıyla kullanan ve bu özilinti matrisinden parametre kestirimlerini elde etmeye yönelik yapılan çalışmalarda (Kaveh, 1979; Kay, 1980; Cadzow, 1980), sonlu sayıdaki özilinti katsayı kestirimlerinin yeterince doğru istatistiksel bilgiyi yansıtamaması araştırmacıları, doğrudan doğruya veri bilgisini kullanan, an be an verileri işleyen yinelemeli yöntemler bulmaya yöneltmiştir. Bu amaçla Friedlander (1982b), parametre kestirimine dayalı ARMA izge kestirim için yinelemeli en büyük olabilirlik yöntemi önermiştir. Buna göre, $\theta = [a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q]^T$ ile tanımlanan parametre vektörü

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \mathbf{P}(n)\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) \quad (1.15)$$

eşitliği ile yinelemeli olarak hesaplatılmaktadır. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = x(n) - \boldsymbol{\varphi}(n)^T \hat{\theta}(n-1)$, öngörü hatasına; $\boldsymbol{\varphi}(n) = [-x(n-1), \dots, -x(n-p), e(n-1), \dots, e(n-q)]^T$, veri kümesine; $\boldsymbol{\psi}(n) = [-\hat{x}(n-1), \dots, -\hat{x}(n-p), \hat{e}(n-1), \dots, \hat{e}(n-q)]^T$ ise, süzgeçlenmiş veri kümesine karşı düşmektedir. $e(n) = x(n) - \boldsymbol{\varphi}(n)^T \hat{\theta}(n)$ kalıntı hatası (residual error) olup (1.15) eşitliğindeki hata kovaryans matrisi, aşağıdaki tanımlanan ifade ile hesaplatılmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n) = & [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\psi}(n)^T \mathbf{P}(n-1) / (\lambda(n) - \boldsymbol{\psi}(n)^T \mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\psi}(n))] / \lambda(n) \\ & + [\lambda(n) - \boldsymbol{\psi}(n)^T \mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\psi}(n)] \end{aligned}$$

Ağırlaştırma katsayısı (forgetting factor) $\lambda(n)$, $\lambda = 0.99$ ve $\lambda(0) = 0.95$ değerlerinin $\lambda(n+1) = \lambda\lambda(n) + (1-\lambda)$ eşitliğinde kullanımıyla yinelemeli olarak elde edilmektedir. n anında süzgeçlenmiş veri kümesinin bileşenleri ve süzgeçleme işlemini yerine getiren süzgeç transfer fonksiyonu, $0 \leq k \leq 1$ için aşağıdaki ifadelerle elde edilmektedir:

$$\hat{x}(n) = (1/\hat{B}(kz^{-1}))x(n)$$

$$\hat{e}(n) = (1/\hat{B}(kz^{-1}))e(n)$$

$$\hat{B}(kz^{-1}) = 1 + kb_1(n)z^{-1} + \dots + k^q b_q(n)z^{-q}$$

Algoritmada kullanılan başlangıç koşulları ise; $P(0) = \alpha I$, $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\psi(0) = \mathbf{0}$ ile verilmektedir. Burada α , varyansın başlangıç kestirimini; I , birim matrisi; $\mathbf{0}$ ise, $(p + q)$ uzunluklu sıfır vektörünü temsil etmektedir. En büyük entropi (maximum entropy) yöntemiyle karşılaştırıldığında, Friedlander (1982b)'ın önerdiği yöntem ile çözünürlüğü yüksek izge kestirimlerine ulaşıldığı benzetimlerle gösterilmiştir.

Geniş-bantlı süreçlerde ARMA modelin AR parametrelerinin kestirimi için DYW denklemlerinin kullanımı, kestirim başarımının çoğu zaman düşmesine neden olur. Bilindiği gibi AR parametrelerinin birinci bileşeni daima 1'e eşittir ($a_0 = 1$). Diğer AR parametreleri ise, DYW denklemlerinden elde edilen özilinti matrisinin birinci satır ve birinci sütununun silinmesi ile kestirilir. Başka bir deyişle, (1.2) eşitliğinin her iki yanını $x(n - q - l)$ ile çarpıp elde edilen sonucun beklenen değeri alınırsa

$$r(q+l) + a_1 r(q+l-1) + a_2 r(q+l-2) + \dots + a_p r(q+l-p) = 0; \quad l \geq 0 \quad (1.16)$$

normal denkleme ulaşılır.

$r(k) = E\{x(n)x(n-k)\}$ biçiminde tanımlı olup k . özilinti katsayısını temsil eder. Sürecin durağan olduğu varsayımını kullanarak, $r(k) = r(-k)$ yazılabilir. Buna göre, (1.16) ile tanımlanan doğrusal denklem ifadesi $1 \leq l \leq p$ için matris yapısında oluşturulursa,

$$\begin{bmatrix} r(q) & r(q-1) & r(q-2) & \dots & r(q-p) \\ r(q+1) & r(q) & r(q-1) & \dots & r(q+1-p) \\ r(q+2) & r(q+1) & r(q) & \dots & r(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(q+p) & r(q+p-1) & r(q+p-2) & \dots & r(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 b_0 b_q \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

elde edilir. AR parametrelerinin $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ kestirimi için, eşitliğin solundaki matrisin birinci satırı silinip sonuç matrisinin birinci sütunu eşitliğin sağına geçirilirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r(q) & r(q-1) & \dots & r(q+1-p) \\ r(q+1) & r(q) & \dots & r(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(q+p-1) & r(q+p-2) & \dots & r(q) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} r(q+1) \\ r(q+2) \\ \vdots \\ r(q+p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \quad (1.18)$$

DYW denklemleri olarak adlandırılan doğrusal denklemler kümesine ulaşılır. (1.18)'de tanımlanan denklem sistemi, $q = 0$ için YW denklemleri olarak adlandırılır. (1.18)'de

AR parametrelerinin kestiriminde kullanılan özilinti katsayıları genelde pratikte hazır olarak verilmez, belli değildir. O yüzden, verilen gözlem verisi örneklerinden bu katsayıların kestiriminin yapılması gerekir. N uzunluklu gözlem verisinin örneklerine ilişkin ilinti katsayılarının yansız kestirimi,

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N x(n)x(n-k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k) \quad (1.19)$$

ifadesi ile hesaplanır. Sonuç olarak (1.17)'deki orijinal özilinti matrisinin birinci satır ve sütunundaki özilinti katsayılarının kestirim işlemi esnasında kullanılmamasının, AR parametre kestirimlerinin doğruluğunu geniş-bantlı süreçler için büyük oranda etkilediği görülmüştür (Bruzzone, 1982). Friedlander ve diğ., (1984a) bu olumsuzluğun üstesinden gelmek amacıyla düşük mertebeden özilinti katsayılarının da kullanıldığı, frekans alanında kestirim işlemi yapan doğrusal olmayan optimizasyonun kullanıldığı özyinelemeli bir yöntem önermişlerdir. Friedlander ve diğ., (1984a)'nin önerdiği algoritma

$$V(a_1, a_2, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{T-1} \left[S_x(e^{j\omega_l}) - \hat{S}_x(e^{j\omega_l}) \right]^2 \quad (1.20)$$

eşitliği ile tanımlanan bedel (cost) işlevinin (1.6)'daki ARMA model parametrelerine göre en küçüklenmesine dayanır. (1.20) eşitliğindeki $S_x(e^{j\omega_l})$ terimi, $0 \leq l \leq T-1$ için $\omega_l = (2\pi l / T)$ olmak üzere tanımı (1.3)'de verilen ARMA GİY işlevine ilişkin terim olup $\hat{S}_x(e^{j\omega_l})$ ise,

$$\hat{S}_x(e^{j\omega_l}) = r(0) + 2 \sum_{k=1}^T w_k r(k) \cos(\omega_l k)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada w_k , pencere fonksiyonuna karşı düşmektedir. Yüksek kestirim doğruluğu ve tutarlılığın sağlanmasının yanında, DYW denklemleri yaklaşımından daha karmaşık olması ve yineleme işlemi için başlangıç kestirimlerine ihtiyaç duyması, algoritmanın sakıncaları olarak sayılabilir.

1-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için geçici ve sürekli durum analizine dayanan bir yöntem Alengrin ve diğ., (1987) tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde; geçici durumda AR parametreleri, Li ve diğ., (1986) tarafından önerilen bir-adımlı

öngörücüye ilişkin doğrusal denklemlerin çözümüyle elde edilmiş ve sürekli durumda ise geçici durumda kestirilen AR parametrelerini de kullanarak MA parametrelerinin kestirimi için gerekli ifadeler türetilmiştir.

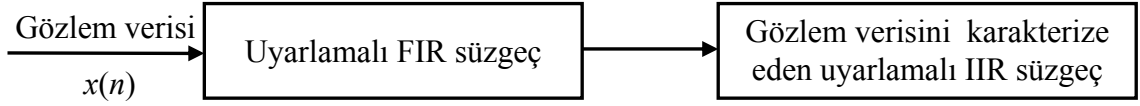
Li ve diğ., (1989), ARMA model parametrelerinin kestirimi için Graupe ve diğ., (1975) ile Li ve diğ., (1986) (1988) tarafından önerilen doğrusal yöntemlerin karşılaştırmasını yapmışlardır. Bu çalışmada, MA parametrelerinin kestirimi için Graupe ve diğ., (1975)'nin, AR parametrelerinin kestirimi için ise Li ve diğ., (1986) (1988)'nin önerdiği yöntemler birleştirilerek ARMA model parametrelerinin kestirimini gerçekleyen karma (hybrid) bir yöntem sunulmuştur (Şekil 1.11). Bu karma yöntem sayesinde, yüksek doğruluklu ve tutarlı AR ve MA parametre kestirimlerinin elde edilebildiği bilgisayar benzetimleri ile gösterilmiştir.



Şekil 1.11: 1-B ARMA parametrelerinin kestirimi için Li ve diğ., (1989) tarafından önerilen karma yapı.

ARMA model yapısının tanınması amacıyla diğer bir karma yöntem, Pasquato ve diğ., (1999) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem uyarlamalı yapıya sahip olup, sonlu ve sonsuz dürtü yanıtına (FIR-IIR) sahip uyarlamalı süzgeç yapılarının bilinen en iyi karakteristiklerini (FIR uyarlamalı süzgeçler daima kararlı bir davranış gösterirler ve bu süzgeçlere ilişkin hata performans yüzeyle her zaman tek bir minimumun varlığını garanti eder. Uyarlamalı IIR süzgeçler ise çok uzun dürtü yanıtlarını az sayıda süzgeç katsayısı ile temsil edebilme yeteneğine sahiptir.) birleştirmeyi amaçlamıştır. İşleyiş biçimi Şekil 1.12'de verilen algoritmada, bilinmeyen sistemin ürettiği veri kümesi ilk olarak yüksek mertebeden bir FIR süzgece eşlenmekte ve FIR süzgeç katsayıları uyarlamalı olarak yinelemeli en küçük kareler (RLS) algoritması ile elde edilmektedir. Daha sonraki adımda, elde edilen FIR süzgeç katsayılarından verilen gözlem verisini daha az sayıda parametre ile karakterize eden kutup-sıfır IIR sisteminin parametrelerinin uyarlamalı kestirimi gerçekleştirilmektedir.

Sistem tanılama amaçlı tasarlanan geleneksel kutup-sıfır IIR uyarlamalı süzgeçlerle karşılaştırıldığında, Pasquato ve diğ., (1999)'nin önerdiği yapı ile daha iyi sonuçlara ulaşıldığı gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde gözlenmiştir.



Şekil 1.12: ARMA modeli tanılamak için Pasquato ve diğ., (1999)'nin önerdiği karma FIR-IIR uyarlamalı süzgeç modeli.

GİY işlevinin çarpanlarına ayrılması (spectral factorization) probleminin çözümüne sağladığı kolaylık, cepstrum yöntemlerinin 1-B ARMA modellemede kullanımını cazip kılmış ve bu konuda yapılan çalışmalar literatürde yerini almıştır. Kaderli ve diğ., (2000), cepstrum yöntemiyle çarpanlarına ayrılmış GİY fonksiyonundan yararlanarak doğrusal olmayan işlem gerektiren MA parametrelerinin kestirimi problemini yinelemeli ARMA-cepstrum algoritmasıyla çözmüşlerdir. Bu çalışmada, ARMA sürecin cepstrum katsayıları ile ARMA model parametreleri arasındaki ilişkiyi kullanan basit bir özyinelemeli denklem türetilmiştir. Türetilen bu denklem ile, ARMA süreçten elde edilen cepstrum katsayıları ve AR parametrelerini kullanarak MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmiştir. Buna göre, MA parametrelerinin kestirimini yinelemeli olarak gerçekleştiren denklem ifadesi

$$\ln(H(z)) = \ln \left(\frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^p a_j z^{-j}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \quad (1.21)$$

ile tanımlanan ilişkiye dayanarak türetilmiştir. Türetilen denklemde kullanılacak olan AR parametrelerinin kestirimi, (1.2) ile tanımlanan süreç ifadesinden elde edilen

$$r(l) = -\sum_{i=1}^p a_i r(l-i) \quad (1.22a)$$

eşitliğinin $l \geq q + 1$ için

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r(q) & r(q-1) & \cdots & r(q+1-p) \\ r(q+1) & r(q) & \cdots & r(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(M-1) & r(M-2) & \cdots & r(M-p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} r(q+1) \\ r(q+2) \\ \vdots \\ r(M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}; \quad M \geq p+q \quad (1.22b)$$

matris yapısında $M > p + q$ ile oluşturulan genişletilmiş YW denklemler kümesinin

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{r} \quad (1.22c)$$

biçiminde en küçük kareler çözümüyle gerçekleştirilmektedir. Cepstrum katsayıları ise

$$c_k = F^{-1} \{ \ln(\hat{S}_x(e^{j\omega})) \} \quad (1.23)$$

işlem adımı ile elde edilmektedir. (1.23) eşitliğindeki $\hat{S}_x(e^{j\omega})$ terimi, verilen gözlem verisinin parametrik olmayan GİY işlevi kestirimine karşı düşmektedir.

Hem parametrik hem de parametrik olmayan yaklaşımları içerisinde barındıran ilginç ve etkin bir çalışma Liu ve diğ., (1999) tarafından önerilmiştir. Yüksek çözünürlüklü ve gürültüye karşı gürbüz olan bu yöntemde ARMA parametrelerinin kestirimi, tekil değer ayrışımına (SVD) dayalı olarak gerçekleştirilmektedir.

1.1.2. İkinci Gruba Dahil Olan Çalışmalar

Radar işaretlerinin işlenmesi, uyarlamalı süzgeçleme, konuşma işaretlerinin analizi, deprem işaretlerinin değerlendirilmesi, deniz altı akustiği, ekonomi, ve finans gibi bir çok işaret işleme uygulamalarında, geniş-anlamda durağan zaman serilerinin istatistiksel özelliklerinin kestirimi arzu edilir ve bu anlamda GİY işlevinin kestirimi istatistiksel davranışın analizi için en güvenilir bilgiyi sağlar (Haykin ve diğ., 1982). Çünkü zaman serilerinin doğal davranışı, en iyi frekans bölgesinde gözlenir. Genel olarak bu türden problemler için

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n) e^{-j\omega n} \quad (1.24)$$

ile verilen GİY işlevinin kestirimi üzerinde durulur. (1.24)'deki GİY ifadesi, zaman serisine ilişkin özilinti katsayılarının Fourier dönüşümü olarak tanımlanır. Burada,

$$r(k) = E\{x(n) x^*(n-k)\} \quad (1.25)$$

ile tanımlı olup, $x(n)$ verisinin özilinti katsayılarının hesaplanmasına karşı düşer.

(1.24) eşitliğinde görüldüğü üzere GİY işlevinin tam olarak tanımlanması, genel olarak sonsuz sayıda özilinti katsayısının bilinmesini gerektirir. Ancak, izge kestirim uygulamalarında GİY işlevinin verilen gözlemlerden kestirimi arzu edilir. Genelliği bozmaksızın, gözlem kümesinin $x(1), x(2), \dots, x(N)$ biçiminde birbirine yakın ardışık

örneklerden oluştuğu varsayılır. Başka bir deyişle, sonlu sayıdaki gözlem örneklerini kullanarak gerçekleştirilecek izge kestirimi ile sonsuz sayıdaki özilinti katsayılarına dayalı olarak GİY işlevinin elde edilmesi arasında temel bir uyumsuzluk vardır. Tipik olarak bu uyumsuzluk, ilgili sürecin parametrik gösterimi ile çözülür. En yaygın olarak kullanılan gösterim, (1.3) ile tanımlanan rasyonel (kesirli) izge modelidir. Bu rasyonel model, (p, q) . mertebeden bir ARMA modelin GİY işlevine karşı düşmektedir.

GİY fonksiyonunun kestirimi için ARMA model yapısının seçilmesinin nedeni; geniş-bantlı bir süreç, ARMA modelin MA kısmı ile daha iyi modellenirken dar-bantlı bir süreç ARMA modelin AR kısmı ile daha iyi modellenebilir (Palmer ve diğ., 1989). Yani, bir sürece ilişkin izgedeki vadiler (çukurlar) ve tepeler ARMA modelin sırasıyla MA ve AR kısımlarıyla aynı anda modellenenebilir. Böylece sürece ilişkin tüm izge, sonlu sayıdaki sıfır ve kutupların oluşturduğu ARMA model ile etkin bir biçimde daha iyi modellenenebilir. Çeşitli izge kestirimlerinde performansta gözlenen değişimler, çoğunlukla varsayılan modelin analiz edilen süreci ne derece iyi modelleyebildiğine bağlıdır. Farklı modeller benzer sonuçlar üretebilirler, ancak bazı modeller daha az parametre kullanarak aynı süreci daha iyi karakterize edebilir. ARMA modeller bu sınıfa giren en genel model türüdür (Marple, 1989). Bu konuda yapılan çalışmalar parametrik gösterim açısından ARMA modellerin, AR ve MA modellere göre daha iyi izge kestirimleri ürettiğini göstermiştir. Doğrudan doğruya (1.3)'de tanımlanan GİY fonksiyonunu elde etmeye dayalı birçok çalışma yapılmıştır. ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimindeki zorluklardan dolayı bu çalışmalarda, MA parametrelerini açıkça kestirmek yerine MA izge katsayılarının kestirimi üzerinde durulmuş ve değişik yöntemler geliştirilmiştir. Kullandıkları yaklaşımlara göre bu çalışmalar aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır:

1.1.2.1. En Küçük Karelere Dayalı Yöntemler

Bu sınıfa giren çalışmalarda AR parametrelerini kestirmek için kullanılan YW denklemleri üzerinde durulmuş, kestirim doğruluğunu ve tutarlılığını artırmak amacıyla çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Kaveh (1979) ve Kay (1980), AR parametrelerinin kestirimi için (1.22b)'deki gibi tanımlanan genişletilmiş YW denklemlerinden faydalanmışlar ve bu denklemlerin (1.22c) ifadesi ile verilen en küçük kareler çözümünden AR parametrelerinin kestirimini gerçekleştirmişlerdir. Kaveh (1979) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, MA izge parametreleri $\{C_i\}$, kestirilen AR parametreleri $\{a_i\}$ ve gözlem verisine ilişkin özilinti katsayılarının $\{r(k)\}$ kullanıldığı

$$S_x(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=-q}^q C_k \cos(\omega k)}{A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega})} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r(|i|)e^{-j\omega i}; \quad A(e^{j\omega}) = 1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-jp\omega} \quad (1.26)$$

ilişkisinden türetilen

$$C_k = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_i a_j r(|i - j - k|) \quad (1.27)$$

ifadesi ile elde edilmiştir. Böylece, sırasıyla (1.22c) ve (1.27) eşitlikleri ile hesaplanan AR parametrelerini ve MA izge katsayılarını (1.26)'da kullanarak ARMA model tabanlı izge kestirim işlemi gerçekleştirilmiştir. Ancak MA izge parametrelerinin hesaplanması için gerekli olan özilinti katsayılarına ilişkin kestirimlerin kullanımı, çoğu zaman negatif izgelerin elde edilmesine neden olur. Bu sorunun üstesinden gelmek için Kay (1980), MA izge parametrelerinin pencereleme yöntemiyle elde edilmesine yönelik (1.28)'deki gibi tanımlanan alternatif bir denklem ifadesi önermiştir:

$$C_k = W(k) \frac{1}{N-p} \left[\sum_{t=p+1}^{N-k} e(t)e(t+k) + \sum_{t=1}^{N-p-k} f(t)f(t+k) \right]; \quad 0 \leq k \leq q \quad (1.28a)$$

$$C_k = C_{-k}; \quad -q \leq k \leq -1 \quad (1.28b)$$

Burada, pencere fonksiyonu $W(k)$

$$W(k) = 1 - \frac{k}{q+1}; \quad 0 \leq k \leq q$$

biçiminde tanımlanmıştır. (1.28a) eşitliğindeki $e(t)$ ve $d(t)$, aşağıda verilen hesaplama adımları ile elde edilmektedir:

$$e(t) = \sum_{k=0}^p a_k x(t-k); \quad p+1 \leq t \leq N$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^p a_k x(t+k); \quad 1 \leq t \leq N-p$$

YW denklemleriyle tutarlı AR parametre kestirimleri elde etmek amacıyla Cadzow (1980), monoton azalan ağırlık katsayılarına ($w_a(m)$) dayalı olarak AR parametrelerinin en küçük kareler çözümünü gerçekleştiren ilginç bir çalışma sunmuştur. AR parametre

kestirimlerinin doğruluğu ve tutarlılığı, MA kısmının etkin ve doğru bir biçimde elde edilebilmesi açısından önemlidir.

Cadzow (1980)'un önerdiği algoritmada, AR parametre vektörü $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$

$$\mathbf{R}^H \mathbf{W} \mathbf{R} \mathbf{a} = -\text{Re}\{\mathbf{R}^H \mathbf{W} \mathbf{r}\} \quad (1.29)$$

ile tanımlanan p adet denklem takımına karşı düşen denklemler kümesinin çözümüyle elde edilmektedir. Burada \mathbf{W} ağırlık matrisi, $(N-q-1) \times (N-q-1)$ boyutlu köşegen matris olup köşegendeki değerler $w_a(m) \geq w_a(m+1)$ olacak şekilde $1 \leq m \leq N-q-1$ için $w_a(q+m) = N-m$ bileşenlerinden oluşur. \mathbf{R} ise, $(N-q-1) \times p$ boyutlu özilinti matrisi olup bu matrisin (k, i) . bileşeni, $r(q+k-i)$ özilinti katsayılarında oluşur. \mathbf{r} sütun vektörünü ise, giriş ve çıkış bilgisinden hesaplanan çapraz-tilinti katsayıları oluşturur. Sonuçta Kaveh (1979) ve Kay (1980)'in çalışmalarındaki gibi Cadzow (1980)'un çalışmasında da MA izge parametrelerinin hesaplanması için AR parametre kestirimlerinden faydalanılmaktadır.

Cadzow (1980)'un çalışmasında, MA izge parametrelerinin kestirimi için gözlem verisine ilişkin özilinti katsayılarının dolayısıyla GİY işlevinin toplamsal olarak ayrıştırılmasına dayalı hayli ilginç ve bir o kadar da kolay etkin bir yöntem önerilmiştir. Önerilen bu yöntemde MA izge parametrelerinin hesabı, aşağıdaki eşitlikle sağlanmaktadır:

$$C_k = r(k) + \sum_{i=1}^k a_i r(k-i); \quad 0 \leq k \leq q \quad (1.30)$$

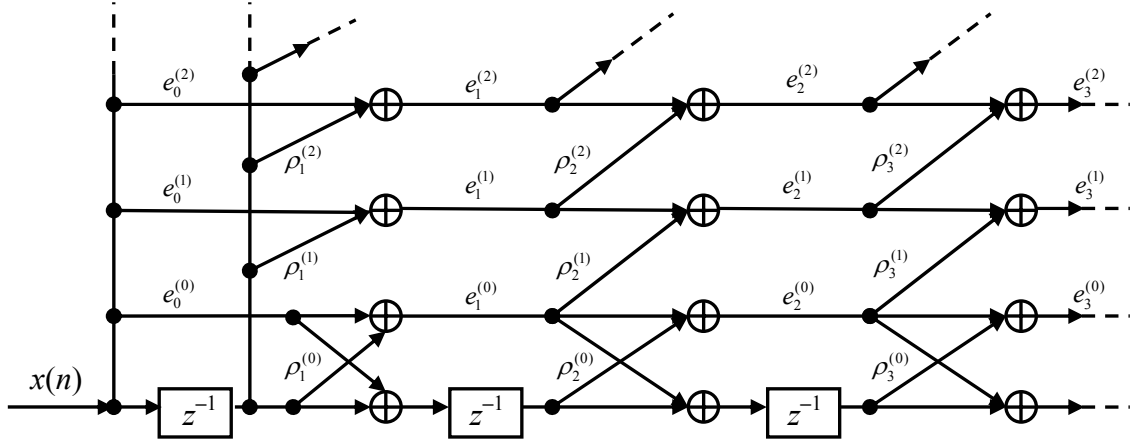
AR parametre kestirimleri için uygun ağırlık katsayılarının seçimini gerektirmesi, bu çalışmanın sakıncası olarak göze çarpmaktadır. Bu sorunun üstesinden gelmek amacıyla Cadzow (1982), özellikle gürültünün varlığında daha iyi ve tutarlı AR parametre kestirimleri elde etmek için DYW denklemlerinin çözümünü tekil değer ayrışımı (SVD) tekniği ile gerçekleyen bir çalışma sunmuştur. Fazla hesapsal yük gerektirmesi, pratik gerçeklemeler için yöntemin tek sakıncası olarak gözükmemektedir.

1.1.2.2. Kafes Süzgeç Yapısını Kullanan Yöntemler

Kafes süzgeçlerin sahip olduğu üstünlükler, onların doğrudan doğruya (1.3)'deki gibi tanımlanan 1-B ARMA GİY fonksiyonu üzerinden izge parametrelerinin kestiriminde

de etkin bir biçimde kullanılmasını sağlamıştır. Nitekim Friedlander (1982c), AR, MA ve ARMA süreçlerin izge parametrelerinin kestirimi için kullanılan kafes yöntemlerinin kapsamlı bir karşılaştırmasını yapmış ve ARMA kafes model yapısı ile yüksek çözünürlüklü izge kestirimlerinin elde edildiğini bilgisayar benzetimleriyle göstermiştir.

Martinelli ve diğ., (1984), geleneksel AR kafes yapısını ek kafes parametreleriyle birlikte kullanarak ARMA modelin GİY işlevinin kestirimi için blok diyagramı Şekil 1.13'deki gibi verilen değişik bir kafes yapısı önermişlerdir.



Şekil 1.13: Martinelli ve diğ., (1984) tarafından ARMA izge kestirimi için önerilen kafes süzgeç yapısı.

Şekil 1.13'deki kafes yapısında, ilk olarak $e_1^{(0)}(n)$ ve kısmi özilinti katsayısı $\rho_1^{(0)}$ bilinen yöntemlerle (Burg yöntemi gibi) elde edilmekte ve $i = 1, 2, \dots, q$ için

$$\rho_1^{(i)} = -\frac{\sum_{n=i+2}^N x(n)x(n-i-1)}{\sum_{n=i+2}^N x(n-1)x(n-i-1)} \quad \text{ve} \quad e_1^{(i)}(n) = x(n) + \rho_1^{(i)}x(n-1)$$

kestirimleri elde edilmektedir. Bu kestirimler, $k = 2, 3, \dots, p$ için

$$\rho_k^{(i)} = -\frac{\sum_{n=k+i+1}^N e_{k-1}^{(i)}(n)x(n-k-i)}{\sum_{n=k+i+1}^N e_{k-1}^{(i-1)}(n-1)x(n-k-i)} \quad \text{ve} \quad e_k^{(i)}(n) = e_{k-1}^{(i)}(n) + \rho_k^{(i)}e_{k-1}^{(i-1)}(n-1)$$

ifadeleri ile yenilenmekte ve ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin kestirimi, $A_p^{(q)}$ ile elde edilmektedir. $k = 2, 3, \dots, p$ için AR parametrelerinin kestirimi

$$\mathbf{A}_k^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \rho_k^{(i)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}_{k-1}^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

hesaplama adımlarıyla gerçekleştirilmektedir. ARMA modelin GİY işlevinin pay kısmı ise, $e_p^{(q)}(n)$ dizisinin frekans spektrumu ile karakterize edilmektedir. Martinelli ve diğ., (1984) tarafından önerilen algoritmada, kafes yapıya özgü dikgenlik özelliğinin korunduğu görülmektedir.

Moses ve diğ. (1985) ARMA modelleme için hesaplama yoğunluğu düşük, hızlı ve yinelemeli bir kafes süzgeç yöntemi geliştirmişlerdir. İki adımdan oluşan bu yöntemde, AR parametreleri hızlı kafes algoritmasıyla kestirilmekte ve bu kafes algoritmasının ürettiği ileri öngörü hata dizilerinden (1.3)'deki GİY işlevinin pay polinomunu oluşturan MA izge parametrelerinin hesabı yapılmaktadır.

1.2. İki-boyutlu (2-B) ARMA Model Parametrelerinin Kestirimi Üzerine Yapılan Çalışmalar

1-B işaret işleme teorisinden farklı olarak 2-B durum için Şekil 1.1'deki ayrık-zamanlı doğrusal süzgecin yapısı, seçilen destek bölgelerine göre farklılık arz eder. Öngörü destek bölgelerine göre, çeşitli nedensel modeller mevcuttur. Çeyrek-düzlem (Şekil 1.14) ve simetrik olmayan yarı-düzlem (Şekil 1.15) destek bölgelerine sahip modeller, en çok kullanılan model yapılarıdır. Buna göre, Şekil 1.14 veya Şekil 1.15'deki gibi destek bölgelerine sahip doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) iki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalamalı (2-B ARMA) model için transfer fonksiyonu

$$H(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{(h,i) \in S_b} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{(k,l) \in S_a - (0,0)} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \quad (1.31)$$

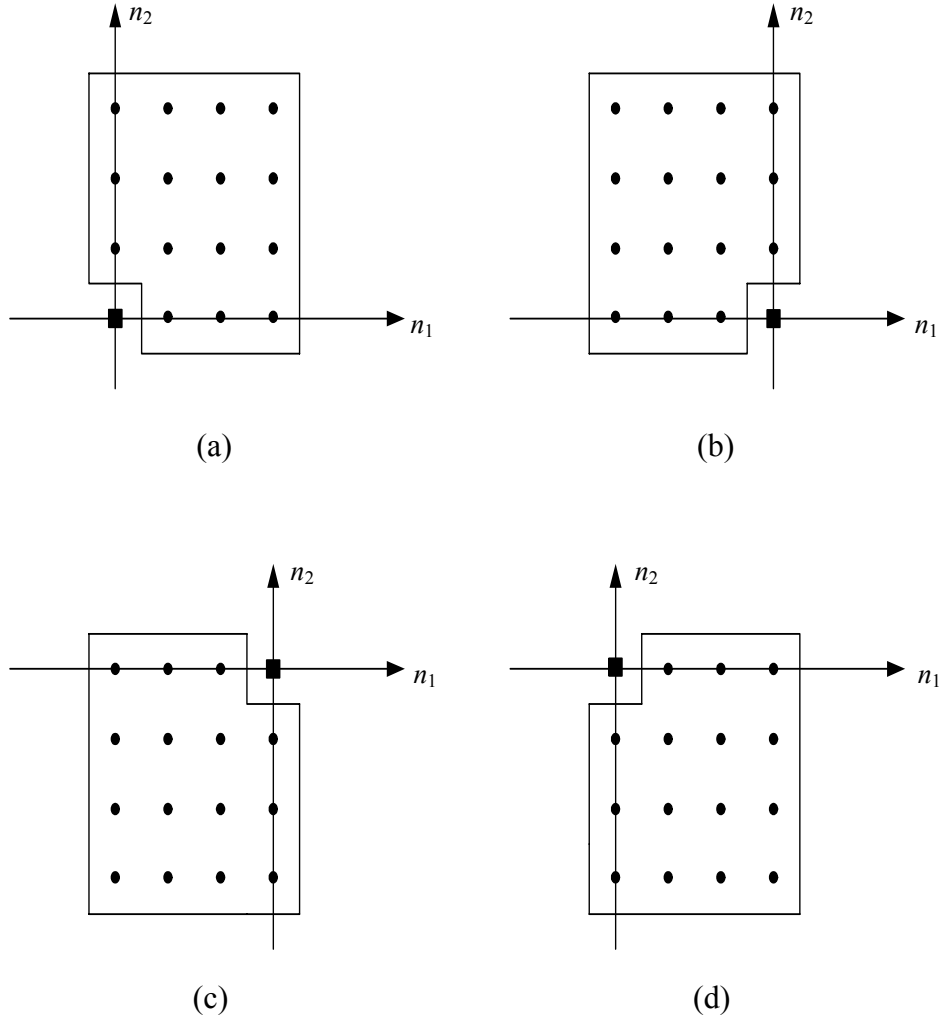
ile tanımlanır. Burada $S_a - (0, 0)$ ve S_b , 2-B ARMA modelin sırasıyla AR ve MA parametrelerinin tanımlı olduğu destek bölgelerine karşı düşer.

Girişi, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örnekleriyle uyarılan (1.31)'deki model yapısının çıkışından elde edilen örnekler 2-B ARMA sürece ilişkin örnekleri temsil eder.

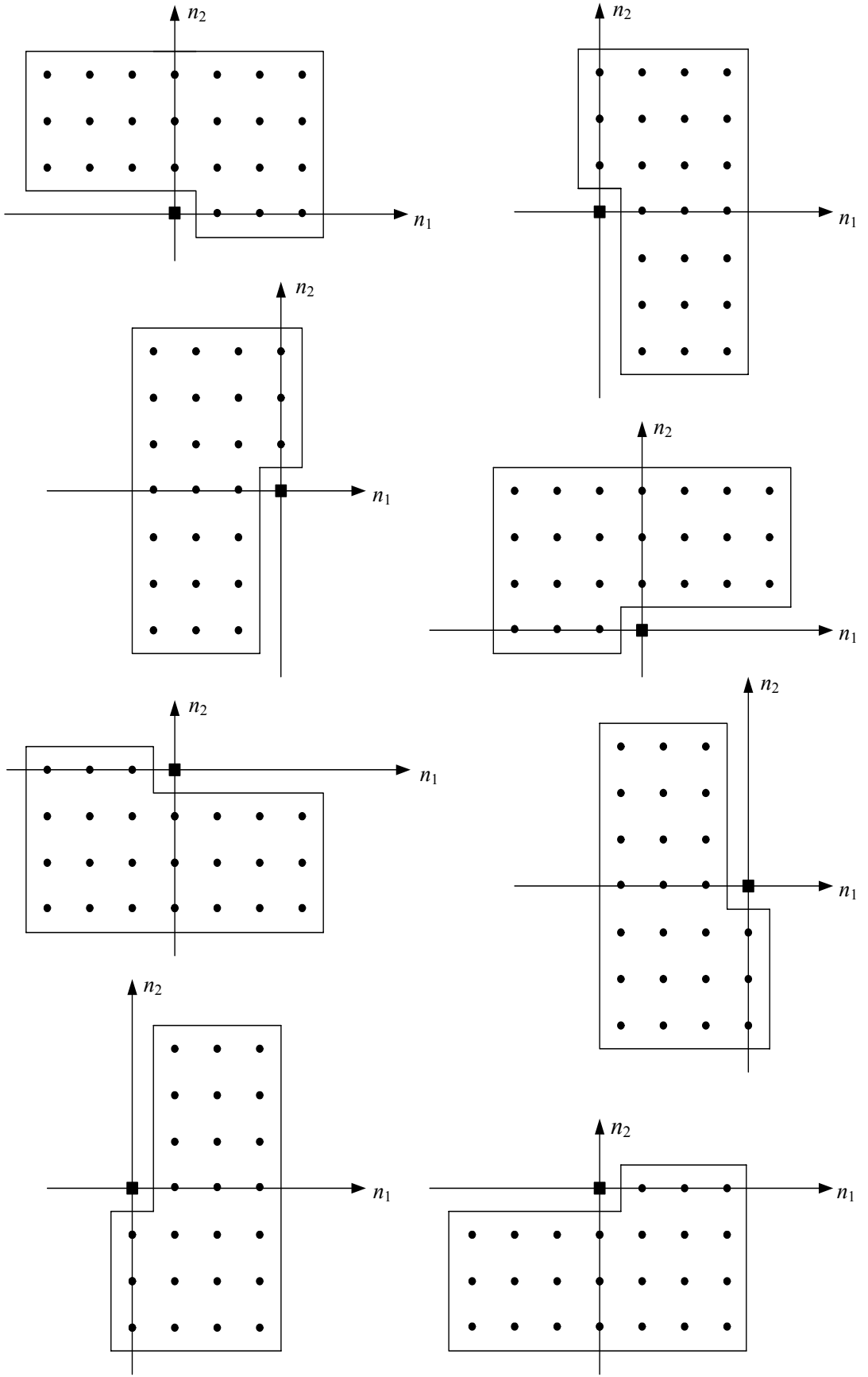
Şekil 1.14 ve Şekil 1.15’de verilen destek bölgeleri üzerinden, (1.31)’de tanımlanan modelin ürettiği örneklere ilişkin zaman serisinin en genel hali

$$x(n_1, n_2) = - \sum_{(k,l) \in S_a - (0,0)} a_{k,l} x(n_1 - k, n_2 - l) + \sum_{(h,i) \in S_b} b_{h,i} w(n_1 - h, n_2 - i) \quad (1.32)$$

doğrusal giriş-çıkış fark denklemi ile verilir. (1.32)’deki $x(n_1, n_2)$, gözlem verisi olarak da adlandırılan 2-B ARMA süreç örneklerini yani çıkışı; $w(n_1, n_2)$, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örneklerini yani girişi; sırasıyla $\{a_{k,l} ; (k, l) \in S_a - (0, 0)\}$ ve $\{b_{h,i} ; (h, i) \in S_b\}$ ise, 2-B ARMA modelin AR ve MA kısmını karakterize eden parametreleri temsil eder.



Şekil 1.14: Çeyrek-düzlem destek bölgeleri: (a) Birinci çeyrek-düzlem; (b) İkinci çeyrek-düzlem; (c) Üçüncü çeyrek-düzlem; (d) Dördüncü çeyrek-düzlem.



Şekil 1.15: Simetrik-olmayan yarı-düzlem destek bölgeleri.

1-B durumda olduğu gibi, rasyonel ifadeye sahip 2-B ARMA model için GİY işlevi

$$S_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sigma_w^2 \frac{|B(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|^2}{|A(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|^2} = \sigma_w^2 \left| \frac{\sum_{(h,i) \in S_b} b_{h,i} e^{-j(\omega_1 h + \omega_2 i)}}{1 + \sum_{(k,l) \in S_a - (0,0)} a_{k,l} e^{-j(\omega_1 k + \omega_2 l)}} \right|^2 \quad (1.33)$$

ifadesi ile verilir. Sonuç olarak, 2-B parametrik modellemedeki problem, verilen herhangi bir $(N_1 \times N_2)$ boyutlu veri kümesini veya rastgele alanı modellemek amacıyla kullanılacak olan (1.31)'deki gibi bir transfer fonksiyonuna sahip 2-B ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestirimi olarak tanımlanabilir.

Yapıları Şekil 1.14 ve Şekil 1.15'de verilen destek bölgelerine sahip ARMA modeller ile $(N_1 \times N_2)$ boyutlu gözlem verisini veya rastgele veri alanını modellemek amacıyla gerçekleştirilen çalışmalar, 1-B ARMA modelde olduğu gibi iki grupta toplanabilir. Bu şekilde iki ana grupta toplanan 2-B ARMA modele dayalı yapılan çalışmalar, görüntü ve işaret işleme konularında uygulama alanları bulmuştur (Shomit ve diğ., 1994; Nijim ve diğ., 1997).

Bölüm 1.1'de ifade edildiği gibi, gözlem verisini karakterize etmek amacıyla 1-B ARMA modelin esas alındığı birçok çalışma gerçekleştirilmiştir. Ancak 2-B ARMA model için yapılan çalışmalar fazla çeşitlilik göstermemiştir. Yapılan çalışmalarda, kolaylığından dolayı, daha çok 2-B AR model yapısı tercih edilmiştir.

1-B ARMA modelde olduğu gibi 2-B ARMA model için de MA parametrelerinin kestirimi, zor bir problemdir. Bu zorluk araştırmacıları, MA parametrelerini açıkça kestirmek yerine (1.33) eşitliğinin MA kısmını (pay kısmını) karakterize eden izge parametrelerinin kestirimini elde etmeye yönelik çalışmalar yapmaya itmiştir. Bu çalışmalardan biri Cadzow ve diğ., (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. Burada, gözlem verisini modellemek için kullanılan çeyrek-düzlem (ÇD) destek bölgesi ARMA modelin GİY işlevinin elde edilmesi amaçlanmıştır. AR parametrelerinin kestirimi ise, YW denklemleri yaklaşımından farklı bir yordam ile elde edilmiştir. Buna göre,

$$\begin{aligned} e(k_1, k_2, n_1, n_2) &= \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{k,m} x(n_1 - k, n_2 - m) x^*(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{m=0}^{q_2} b_{k,m} w(n_1 - k, n_2 - m) x^*(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \end{aligned} \quad (1.34)$$

eşitliği ile tanımlanan model hatasına bağlı olarak

$$f(\mathbf{a}) = \sum_{k_1=q_1+1}^{N_1-1} \sum_{k_2=q_2+1}^{N_2-1} w_a(k_1, k_2) \left| \sum_{n_1=k_1+1}^{N_1-1} \sum_{n_2=k_2+1}^{N_2-1} e(k_1, k_2, n_1, n_2) \right|^2 \quad (1.35)$$

fonksiyonunu en küçükleyen parametreler, AR parametre kestirimlerini vermektedir. (1.35)'deki $w_a(k_1, k_2)$ terimi, monoton azalan negatif olmayan ağırlık katsayılarına karşı düşmektedir ve

$$w_a(k_1, k_2) = (N_1 - k_1)(N_2 - k_2); \quad p_1 + 1 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \quad p_2 + 1 \leq k_2 \leq N_2 - 1$$

biçiminde seçilmiştir. Sonuçta (1.35) ile tanımlanan fonksiyonu en küçükleyen AR parametreleri $\mathbf{a} = [a_{0,1}, \dots, a_{0,p_2}, \dots, a_{p_1,0}, \dots, a_{p_1,p_2}]^T$, doğrudan doğruya gözlem verisine ilişkin örneklerin kullanıldığı, YW denklemlerinden farklı bir yapıya sahip doğrusal denklemler kümesinin çözümüyle elde edilmiştir. GİY işlevinin pay polinomu $S_{res}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ ise, gözlem verisi örnekleri ve kestirilen AR katsayılarından üretilen

$$res(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{k,m} x(n_1 - k, n_2 - m) = \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{m=0}^{q_2} b_{k,m} w(n_1 - k, n_2 - m)$$

kalıntı dizisinin örneklerinin kullanımıyla parametrik olmayan Welch izge kestirim yönteminden yararlanarak elde edilmiştir. Böylece,

$$S_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \frac{S_{res}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{|A(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|^2} \quad (1.36)$$

ile ifade edilen, gözlem verisini modellemede kullanılan ARMA model GİY işlevinin elde edilmesi sağlanmıştır.

AR parametrelerinin kestirimi için gereken ağırlık katsayılarının seçimi, işlemsel yoğunluğun fazla olması, ve GİY işlevinin pay polinomunun belirlenmesinde kullanılan parametrik olmayan Welch periodogram yönteminin çözünürlüğü düşürmesi, Cadzow ve diğ., (1981)'nin önermiş olduğu algoritmanın olumsuz yanlarını teşkil etmektedir.

ÇD destek bölgesi ARMA model GİY fonksiyonunun elde edilmesine yönelik diğer bir çalışma, Zhang ve diğ., (1991) tarafından sunulmuştur. Cadzow ve diğ., (1981)'nin önerdiği algoritmadan farklı olarak bu çalışmada AR parametreleri,

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a_{i,j} r(q_1 + l - i, q_2 + m - j) = b_{0,0} b_{q_1, q_2} \sigma_w^2 \delta(l, m); \quad 0 \leq l \leq p_1, \quad 0 \leq m \leq p_2$$

ile tanımlanan DYW denklemlerinin çözümüyle elde edilmektedir. Cadzow ve diğ., (1981)'nin çalışmasında olduğu gibi, Zhang ve diğ., (1991)'nin çalışmasında da MA parametrelerinin açıkça kestirimi gerçekleştirilememiştir. Bunun yerine, ÇD destek bölgesi için (1.33)'deki eşitliğe karşı düşen GİY işlevinin pay polinomunu tanımlayan ve MA izge parametreleri olarak adlandırılan $\{C_{k,m}; D_{k,m}\}$ katsayılarının kestirimi yapılmıştır. Bunun için pay polinomu,

$$\begin{aligned} S_x(z_1, z_2) &= \sigma_w^2 \frac{B(z_1, z_2)B(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{A(z_1, z_2)A(z_1^{-1}, z_2^{-1})} \\ &= \frac{C(z_1, z_2) + D(z_1, z_2^{-1}) + D(z_1^{-1}, z_2) + C(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{A(z_1, z_2)A(z_1^{-1}, z_2^{-1})} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan parametrik GİY işlevi ile, gözlem verilerinin özilinti katsayılarını $\{r(l, k)\}$ kullanarak karakterize edilen GİY işlevi arasında aşağıdaki gibi bir eşleme yapılmıştır:

$$\frac{C(z_1, z_2) + D(z_1, z_2^{-1}) + D(z_1^{-1}, z_2) + C(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{A(z_1, z_2)A(z_1^{-1}, z_2^{-1})} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(l, k) z_1^{-k} z_2^{-l} \quad (1.37)$$

Bu eşleme işlemi sonucunda elde edilen MA izge parametrelerini $\{C_{k,m}; D_{k,m}\}$ ve kestirilen AR parametrelerini $\{a_{k,m}\}$ kullanarak, (1.33) ile verilen ARMA model GİY fonksiyonu ÇD destek bölgesi için aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$S_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 2 \frac{\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{m=0}^{q_2} C_{k,m} \cos(\omega_1 k + \omega_2 m) + \sum_{k=1}^{q_1} \sum_{m=1}^{q_2} D_{k,m} \cos(\omega_1 k - \omega_2 m)}{\left| \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{k,m} e^{-j(\omega_1 k + \omega_2 m)} \right|^2}, \quad a_{0,0} = 1$$

Zhang ve diğ., (1991)'nin algoritmasında hem AR parametrelerinin hem de MA izge katsayılarının kestiriminin doğrudan doğruya gözlem verisinin özilinti katsayılarına bağlı olması, kestirilecek olan GİY işlevinin doğruluğunu etkiler ve sonuç olarak özilinti katsayılarının yüksek doğrulukta elde edilmesini gerektirir. Ayrıca Cadzow ve diğ., (1981)'nin çalışmasında olduğu gibi, MA parametrelerinin açıkça kestirilememesi algoritmanın uygulama alanının kısıtlayan bir etken olarak gözükmektedir.

MA parametrelerinin açıkça kestirimini sağlayan bir yaklaşım, Zhang (1991) tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada, ÇD destek bölgesi ARMA modelin MA parametrelerini kestirmek için Newton-Raphson yöntemine dayalı iteratif bir algoritma sunulmuştur. AR parametrelerinin kestiriminin ise, daha önce yukarıda bahsedilen doğrudan doğruya gözlem verisine dayalı yöntem (Cadzow ve diğ., 1981) ile veya gözlem verisine ilişkin ikinci mertebeden istatistiklerin kullanıldığı DYW denklemi yaklaşımı (Zhang ve diğ., 1991) ile elde edilebileceği belirtilmiştir.

$\mathbf{b} = [b_{0,0}, \dots, b_{0,q_2}, b_{1,0}, \dots, b_{1,q_2}, \dots, b_{q_1,0}, \dots, b_{q_1,q_2}]^T$ ile tanımlanan MA parametre vektörünün $(i + 1)$. iterasyondaki kestirimi

$$\mathbf{b}^{(i+1)} = \mathbf{b}^{(i)} - \mathbf{F}^+ \mathbf{f} \quad (1.38)$$

ifadesi ile elde edilmiştir. Bu kestirim işlemi,

$$\left| \frac{\mathbf{b}^{(i+1)} - \mathbf{b}^{(i)}}{\mathbf{b}^{(i+1)}} \right| \leq 0.05$$

ile tanımlanan koşulun sağlanması durumunda sonlandırılmakta ve böylece $(i + 1)$. iterasyonda elde edilen değerler, MA parametre kestirimleri olarak kaydedilmektedir.

(1.38) eşitliğindeki \mathbf{f} sütun vektörü, hem MA izge parametreleri $\{C_{km}; D_{km}\}$ hem de i . iterasyonda kestirilen MA parametrelerinin ile elde edilen kestirim hata bileşenlerinin $\{f_{i,j}\}$ oluşturduğu kestirim hata vektörü olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathbf{f} = [f_{0,0}, \dots, f_{0,q_2}, f_{1,0}, \dots, f_{1,q_2}, f_{q_1+1,q_2+1}, \dots, f_{q_1+1,2q_2}, \dots, f_{2q_1,q_2+1}, \dots, f_{2q_1,2q_2}]^T$$

Newton-Raphson yöntemini kullanarak türetilen ve

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,0}}{\partial b_{0,0}} & \dots & \frac{\partial f_{0,0}}{\partial b_{0,q_2}} & \dots & \frac{\partial f_{0,0}}{\partial b_{q_1,0}} & \dots & \frac{\partial f_{0,0}}{\partial b_{q_1,q_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{q_1,q_2}}{\partial b_{0,0}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1,q_2}}{\partial b_{0,q_2}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1,q_2}}{\partial b_{q_1,0}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1,q_2}}{\partial b_{q_1,q_2}} \\ \hline \frac{\partial f_{q_1+1,q_2+1}}{\partial b_{0,0}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1+1,q_2+1}}{\partial b_{0,q_2}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1+1,q_2+1}}{\partial b_{q_1,0}} & \dots & \frac{\partial f_{q_1+1,q_2+1}}{\partial b_{q_1,q_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2q_1,2q_2}}{\partial b_{0,0}} & \dots & \frac{\partial f_{2q_1,2q_2}}{\partial b_{0,q_2}} & \dots & \frac{\partial f_{2q_1,2q_2}}{\partial b_{q_1,0}} & \dots & \frac{\partial f_{2q_1,2q_2}}{\partial b_{q_1,q_2}} \end{bmatrix}$$

ile elde edilen $[(2q_1+1) \times (q_2+1)(q_2+1)(q_1+1)]$ boyutlu kestirim hata matrisi F , kestirilen AR parametreleri ve i . iterasyonda bulunan MA parametrelerinden oluşmaktadır. F^+ ise, F 'nin genelleştirilmiş tersi olup $F^+ = (F^T F)^{-1} F^T$ ile hesaplanmaktadır.

MA parametrelerini açıkça kestirebilme üstünlüğüne rağmen hesapsal karmaşıklığın fazla olması, kestirim için yapılan iteratif işlemin zaman alması ve hatta yakınsama problemiyle karşılaşma olasılığı Zhang (1991) tarafından önerilen algoritmanın sakıncalarından bazıları olarak göze çarpmaktadır.

Değiştirilmiş en küçük kareler ölçütünü kullanarak doğrusal olmayan bir problem olan rasyonel model yaklaşımını doğrusal yaklaşıma dönüştüren bir çalışma, Chaparro ve diğ., (1982) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, transfer fonksiyonu (1.31)'deki gibi tanımlanan rasyonel bir modelin ÇD destek bölgesi için $\{a_{k,l}\}$ ve $\{b_{h,i}\}$ parametrelerinin hesaplanması amacıyla

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(z_1, z_2)A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2; \quad z_i = e^{j\omega_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1.39)$$

ile tanımlanan hata ölçüsünü en küçüklemeye dayanan bir algoritma önerilmiştir. Buna göre (1.39)'da verilen hata ölçüsünü en küçükleleyen $\{a_{k,l}\}$ ve $\{b_{h,i}\}$ parametrelerinin, dürtü yanıtı $\{h(m, n)\}$ ve gözlem verisinin özilinti katsayılarından $\{r(l, k)\}$ elde edilmesi sağlanmıştır. Önerilen algoritma, görüntü onarma ve sistem tanılama problemlerine uygulanmış ve tatmin edici sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür. Diğer taraftan (1.31)'deki transfer fonksiyonunu karakterize eden parametrelerin Chaparro ve diğ., (1982)'nin önerdiği algoritma ile elde edilebilmesi için, özilinti katsayı kestirimlerinin yanında dürtü yanıtı bilgisine de ihtiyaç vardır.

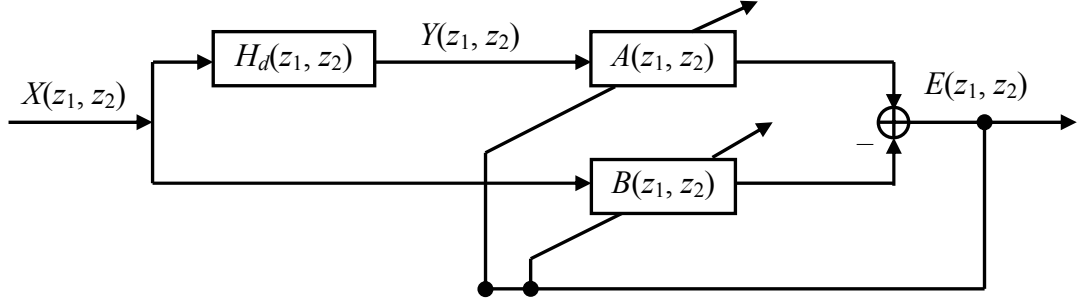
En küçük kareler yaklaşımına dayanan, ancak Chaparro ve diğ., (1982)'nin çalışmasından farklı olarak 2-B ARMA modeli karakterize eden $\{a_{k,l}\}$ ve $\{b_{h,i}\}$ parametrelerinin kestirimini ayrık Fourier dönüşümünü kullanarak gerçekleştiren çeşitli algoritmalar (Mikhael ve diğ., 1991; Mikhael ve diğ., 1994; Zhang ve diğ., 1997) önerilmiştir.

Mikhael ve diğ., (1991), bilinmeyen bir sisteme en küçük kareler anlamında eşlenebilen ve blok diyagramı Şekil 1.16'daki gibi verilen yinelemeliye benzer bir yapı önermişlerdir. Bu yapı, 2-B frekans bölgesinde gerçekleştirilmektedir. Buna göre, arzulanan transfer fonksiyonu $H_d(z_1, z_2)$ 'ye en küçük kareler anlamında yaklaşan

(1.31)'deki ARMA transfer fonksiyonunun ($H(z_1, z_2)$) kestirimi için, Şekil 1.16'daki blok diyagramından

$$E(z_1, z_2) = X(z_1, z_2)[H_d(z_1, z_2)A(z_1, z_2) - B(z_1, z_2)] \quad (1.40)$$

biçiminde elde edilen hata işlevinden yararlanılmıştır.



Şekil 1.16: Mikhael ve diğ., (1991) tarafından önerilen 2-B ARMA sistem modelleme için blok diyagramı.

(1.40)'da verilen hata işlevinin (k_1, k_2) anındaki değerlerinin mutlak karelerinin toplamı, $\{z_1 = e^{j\omega_{k_1}}; 0 \leq \omega_{k_1} < 2\pi, 0 \leq k_1 \leq N_1-1\}$ ve $\{z_2 = e^{j\omega_{k_2}}; 0 \leq \omega_{k_2} < 2\pi, 0 \leq k_2 \leq N_2-1\}$ için hata ölçüsü olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\varepsilon = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} |X(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}})[H_d(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}})A(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}}) - B(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}})]|^2 \quad (1.41)$$

$(N_1 \times N_2)$ -noktalı ayrık Fourier dönüşümünden yararlanarak (1.41) ile tanımlanan hata ölçüsünü en küçükleyen optimum ARMA model parametreleri $\{a_{k,l}; 0 \leq (k, l) \leq L\}$ ve $\{b_{h,i}; 0 \leq (h, i) \leq R\}$ 'nin hesabı, türetilen doğrusal denklemlerin çözümünden elde edilmektedir. Elde edilen bu optimum parametre değerleri, (1.31)'de yerine koyularak 2-B ARMA model transfer fonksiyonu $H(z_1, z_2)$ 'nin elde edilmesi sağlanmaktadır.

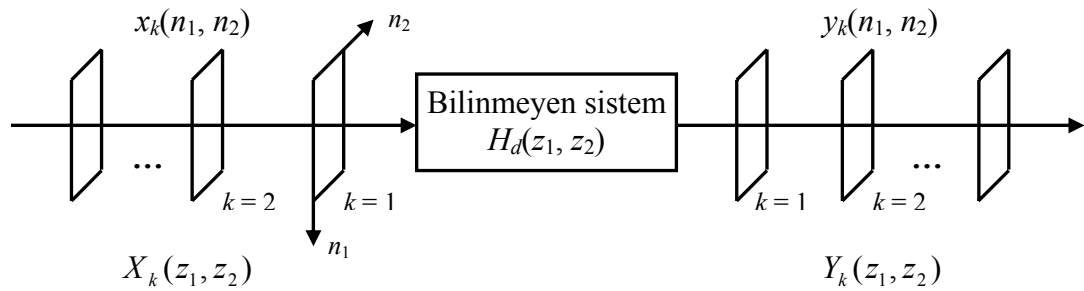
Mikhael ve diğ., (1991)'nin önermiş olduğu algoritmanın yakınsaklığının ve cebirsel açıdan değerlendirmesinin yapıldığı geniş bir çalışma Mikhael ve diğ., (1994) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada, daha önce Mikhael ve diğ., (1991) tarafından önerilen algoritmanın işlem adımları daha açık bir biçimde türetilmiştir. Ayrıca, sistem tanılama, 2-B işaret modelleme ve 2-B sayısal görüntüdeki gürültünün yok edilmesi gibi benzetim örnekleriyle Mikhael ve diğ., (1991)'nin önerdiği algoritmanın etkinliği gösterilmeye çalışılmıştır.

Mikhael ve diğ., (1991) (1994)'nin algoritmasında, parametrelerin kestiriminde kullanılan ve ağırlık işlevi olarak adlandırılan $X(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}})$ 'nin seçiminin neye göre yapıldığı belirgin değildir. Örneğin, Mikhael ve diğ., (1991)'nin çalışmasındaki benzetim örneklerinde $0 \leq k_1 \leq N_1$ ve $0 \leq k_2 \leq N_2$ için $X(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}}) = 1$ olarak seçilirken, Mikhael ve diğ., (1994)'nin çalışmasında gerçekleştirilen benzetimlerde ise $X(e^{j\omega_{k_1}}, e^{j\omega_{k_2}})$ 'nin BGG süreci örneklerinden oluştuğu varsayılmıştır.

Mikhael ve diğ., (1991) (1994) tarafından önerilen algoritmanın radar işaretlerinin işlenmesinde de kullanılabilirliğini sağlamak amacıyla Zhang ve diğ., (1997), bu algoritmanın geliştirilmiş biçimi üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir.

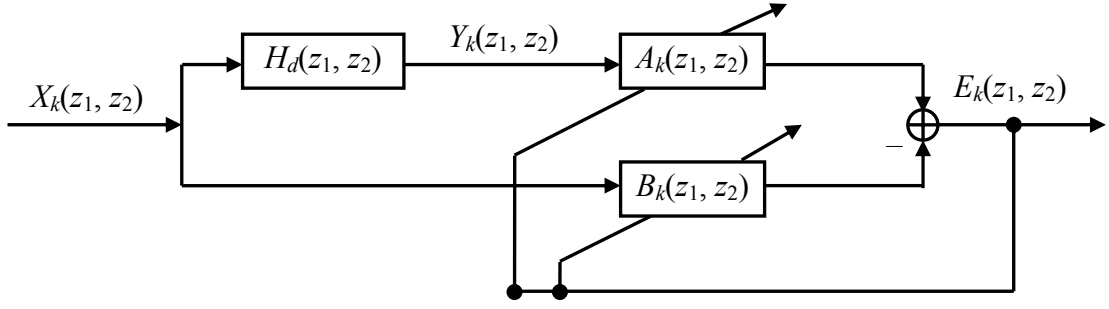
Buna göre Zhang ve diğ., (1997), her iki boyutta eşit model mertebesine sahip reel katsayılardan $\{a_{k,l}; 0 \leq (k, l) \leq L\}$ ve $\{b_{h,i}; 0 \leq (h, i) \leq R\}$ oluşan 2-B ARMA model $ARMA(L, L, R, R)$ ile gerçek-değerli verilerin modellenmesini sağlayan Mikhael ve diğ., (1991) (1994)'nin algoritmasını, karmaşık değerli veriler ve daha genel ARMA modeli $ARMA(p_1, p_2, q_1, q_2)$ için geliştirmişler ve model mertebeleri $p_1, p_2, q_1,$ ve q_2 'nin belirlenmesi amacıyla bir yordam önermişlerdir. Sistem tanılama amacıyla önerilen algoritmalarda (Mikhael ve diğ., (1991) (1994)) olduğu gibi Zhang ve diğ., (1997)'nin algoritmasında da giriş bilgisine ihtiyaç vardır.

Problem tanımı Şekil 1.17'deki blok diyagramı ile verilen, bilinmeyen 2-B sistemi 3-B zaman-uzamsal giriş ve çıkış bilgisinden frekans bölgesinde tanılamak amacıyla uyarlamalı bir algoritma Mikhael ve diğ., (1995) tarafından önerilmiştir.



Şekil 1.17: Mikhael ve diğ., (1995)'nin 2-B ARMA sistem tanılama için, 3-B zaman-uzamsal giriş ve çıkış işaretleri ile temsil edilen 2-B sistem modeli.

Mikhael ve diğ., (1995) Şekil 1.17'deki bilinmeyen sistemi modellemek için, blok diyagramı Şekil 1.18'de verilen yapıyı kullanmıştır. Aslında bu yapı, tek bir giriş/çıkış veri kümesi için Şekil 1.16'daki problem çözümüne eşdeğerdir.



Şekil 1.18: Şekil 1.17’deki bilinmeyen sistem $H_d(z_1, z_2)$ modellemek için kullanılan 2-B denklem-hata modelinin blok şeması.

Bilinmeyen 2-B uzamsal sistem $H_d(z_1, z_2)$ ’i tanılamak amacıyla her bir iterasyondaki ($k = 1, 2, \dots$) giriş ve çıkış veri kümesine, transfer fonksiyonu

$$H_k(z_1, z_2) = \frac{B_k(z_1, z_2)}{A_k(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^R \sum_{j=0}^R b_{i,j}^k z_1^{-i} z_2^{-j}}{1 + \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^R \sum_{j=0}^R a_{i,j}^k z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (1.42)$$

ile tanımlanan 2-B ARMA modeli eşlenmektedir. Bu modele ilişkin $\{a_{i,j}^k\}$ ve $\{b_{i,j}^k\}$ parametrelerini elde etmek amacıyla Şekil 1.18’deki yapıdan faydalanarak

$$E_k(z_1, z_2) = Y_k(z_1, z_2)A_k(z_1, z_2) - X_k(z_1, z_2)B_k(z_1, z_2)$$

hata işlevi tanımlanmıştır. Bu hata işlevi $\{z_1 = e^{j\omega_{n_1}}; 0 \leq \omega_{n_1} < 2\pi, 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1\}$ ve $\{z_2 = e^{j\omega_{n_2}}; 0 \leq \omega_{n_2} < 2\pi, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$ için frekans bölgesinde

$$\mathcal{E}_k = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |Y_k(e^{j\omega_{n_1}}, e^{j\omega_{n_2}})A_k(e^{j\omega_{n_1}}, e^{j\omega_{n_2}}) - X_k(e^{j\omega_{n_1}}, e^{j\omega_{n_2}})B_k(e^{j\omega_{n_1}}, e^{j\omega_{n_2}})|^2 \quad (1.43)$$

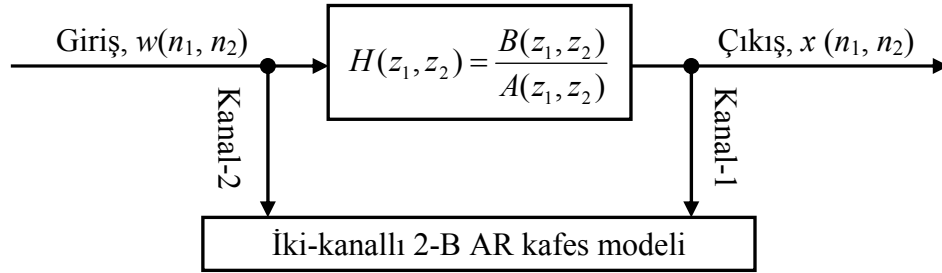
biçiminde ifade edilmiştir. Mikhael ve diğ., (1995)’nin algoritması, (1.43)’deki hata işlevini en küçük kareler anlamında her bir iterasyon için $\{a_{i,j}^k\}$ ve $\{b_{i,j}^k\}$ parametrelerine göre en küçüklemeyi esas almaktadır. Bunun için, 2-B ayrık Fourier dönüşümünden faydalanarak her bir iterasyon için $\{a_{i,j}^k\}$ ve $\{b_{i,j}^k\}$ parametrelerinin kestirimi bayır-iniş (steepest descent) algoritması ile uyarlamalı (adaptive) olarak elde edilmektedir.

Mikhael ve diğ., (1991) (1994) ve Zhang ve diğ., (1997)'nin algoritmalarında olduğu gibi Mikhael ve diğ., (1995)'nin algoritmasında da giriş bilgisine ihtiyaç vardır. Ayrıca parametre kestirimleri için tasarlanan uyarlama algoritması, parametrelerin başlangıç kestirimlerinin bilinmesini gerektirmektedir.

1-B işaret işleme teorisinde olduğu gibi, nicemleme ve yuvarlatma hatalarına olan gürbüzlükleri ve kararlılıkları ve ayrıca modüler yapıya sahip olmaları kafes süzgeç yapılarının 2-B işaret işleme alanında da kullanımını beraberinde getirmiştir. 1-B işaret işlemede olduğu gibi, 2-B AR modele dayalı kafes süzgeç yapılarının kullanıldığı birçok çalışma gerçekleştirilmiştir (Parker ve diğ., 1984; Kayran, 1996a; Kayran ve diğ., 1997; Kayran ve diğ., 2004)

Kafes süzgeçlerin sahip olduğu üstünlükler, araştırmacıları 2-B rastgele alanları etkin modelleme yeteneğine sahip olan 2-B ARMA modellerin tanılanması ve gerçekleşmesine yönelik kafes süzgeç tabanlı çalışmalar (Kayran, 1996b; Sarı ve diğ., 2005; Ekşioğlu ve diğ., 2005) yapmaya itmiştir.

Kayran (1996b), 2-B sayısal sistemlerin (L, L, R, R) . mertebeden ARMA model kafes gerçekleştirmesini elde etmek amacıyla iki-kanallı AR kafes yaklaşımına dayanan bir çalışma sunmuştur. Bunun için, giriş ve çıkış verisini aynı anda kullanan blok diyagramı Şekil 1.19'daki gibi verilen bir kafes yapısı geliştirilmiştir.



Şekil 1.19: İki-kanallı 2-B AR kafes modeli ile 2-B ARMA modelleme.

Kayran (1996b) tarafından önerilen kafes yapısı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_p^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{K}_{p-n}^{(n)T} \\ \bar{\mathbf{K}}_p^{(n)T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_p^{(n-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

ile tanımlanan ileri ve geri yönde öngörü hatalarını esas alarak eşit AR ve MA mertebeleri $(L = R)$ için türetilmiş olup $\mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) = [f_{u_{p-n}}^{(n)}(k_1, k_2) \ f_{t_{p-n}}^{(n)}(k_1, k_2)]^T$ ve

$\mathbf{b}_p^{(n)}(k_1, k_2) = [b_{u_p}^{(n)}(k_1, k_2) \ b_{l_p}^{(n)}(k_1, k_2)]^T$ ifadeleri sırasıyla ileri ve geri yönde öngörü hata vektörlerini temsil etmektedir.

Daha önce bahsedilen kafes yapılarını ve algoritmalarını da dikkate alarak, Kayran (1996b) tarafından önerilen yapının ($L = R$) için türetilmiş olmasının kullanım alanını (örneğin radar işaretlerinin modellenmesi gibi) kısıtlayan bir özellik olduğunu söylemek yanlış olmaz. Bu amaçla Sarı ve diğ., (2005), Kayran (1996b) tarafından önerilen yapıyı ($L \neq R$) için sağlayan ve Kayran (1996b)'nin yapısını da içine alan 2-B ARMA modelleme için yeni bir kafes yapısı geliştirmişlerdir.

Sarı ve diğ., (2005), ($L \neq R$) için ARMA(L, L, R, R) model parametrelerinin kestirimini sağlayan, tanım denklemleri sırasıyla (1.44) ve (1.45) ile verilen iki-kanallı ve tek-kanallı kafes yapılarını birleştiren karma bir kafes yapısı önermişlerdir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u_{p-n}}^{(n)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_{u_p}^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{b_p}^{(n)} \\ k_{f_{p-n}}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u_{p-n}}^{(n-1)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_{u_p}^{(n-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Kayran (1996b)'nin çalışmasında olduğu gibi kestirim için giriş verisine ilişkin örneklerin bilinmesine gerek duyması, Sarı ve diğ., (2005)'nin önerdiği algoritmanın olumsuz yanını teşkil etmektedir.

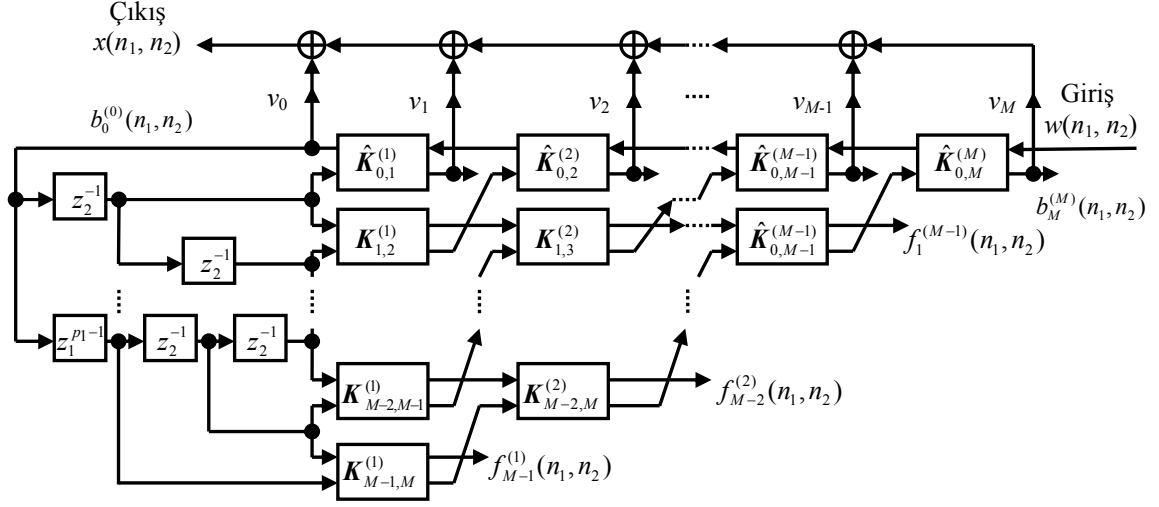
Yukarıda anlatılan 2-B ARMA modelleme çalışmalarından farklı olarak, 2-B ARMA model transfer fonksiyonuna sahip sayısal süzgecin kafes yapısı ile gerçekleştirilmesine yönelik bir çalışma Ekşioğlu ve diğ., (2005) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada, tanımı (1.31)'deki gibi verilen bir 2-B ARMA model transfer fonksiyonunu gerçeklemek amacıyla uyarlamalı süzgeçleme uygulamaları için kullanışlı olabilecek Şekil 1.20'deki gibi bir kafes-merdiven yapısı ve bu yapıyı tanımlayan katsayıların hesaplanması için uyarlamalı bir algoritma önerilmiştir.

Ekşioğlu ve diğ., (2005) tarafından önerilen bu kafes-merdiven yapısında, ARMA sistemin çıkışı

$$x(n_1, n_2) = \sum_{p=0}^M v_p b_p^{(n)}(n_1, n_2) \quad (1.46)$$

ifadesiyle tanımlanan, ağırlaştırılmış geriye doğru öngörü hatalarının $b_p^{(n)}(n_1, n_2)$ doğrusal bileşiminden oluşmaktadır. (1.46) eşitliğindeki v_p katsayıları, kestirilen merdiven (ladder) parametrelerini temsil etmektedir. ARMA (p_1, p_2, q_1, q_2) modeli için

$p_1 = q_1$ ve $p_2 = q_2$ olmak üzere $M = p_1 p_2 - 1 = q_1 q_2 - 1$ biçiminde tanımlanmıştır. Şekil 1.20'deki $K_{i,j}^{(l)}$ ve $\hat{K}_{i,j}^{(l)}$, sırasıyla FIR ve IIR kafes hücrelerine karşı düşmektedir.



Şekil 1.20: Ekşioğlu ve diğ., (2005) tarafından tasarlanan kafes-merdiven yapısı.

1.3. Amaç, Kapsam ve Katkıları

Bu tez çalışmasında, ÇD destek bölgesi doğrusal zamanla değişmeyen (p_1, p_2, q_1, q_2) mertebeden 2-B ARMA modelin parametrelerini ($N_1 \times N_2$) noktalı gözlem verisinden kestirmek amacıyla Eşdeğer AR (EAR) model yaklaşımı ve ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımı olarak adlandırılan iki yeni yöntem önerilmektedir. Önerilen bu yöntemlerin gelecekte; görüntü işleme, 2-B yüksek çözünürlüklü izge kestirimi ve sınırlı uzunluktaki veri kümelerinin modellenmesi gibi uygulama alanlarında oldukça tatmin edici sonuçlar verebilen simetrik olmayan destek bölgesi ARMA modelin parametrelerinin kestirimi probleminin çözümüne temel oluşturması beklenmektedir.

Önerilen yöntemler sayesinde, doğası gereği çözümü hayli zor olan ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin kestirimi ve doğal olarak MA model parametrelerinin kestirimi problemlerine kolay ve optimizasyon gerektirmeyen çözümler sunulmuştur. Buna ek olarak, değişik mekanizmalarla önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımları artırılmaya çalışılmıştır.

Önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımları, bilgisayar benzetimleri sınanmıştır. Bunun için, önerilen her bir yöntemin literatürdeki yöntemle eşzamanlı çalıştırılması sonucunda üretilen parametre kestirimleri ve bu parametrelere karşı düşen

izge kestirimleri çeşitli başarımlar ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, önerilen yöntemlerle oldukça iyi ve tatmin edici sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür.

1.4. Çalışmanın Genel Akışı

Tez çalışması yedi ana bölümden oluşmaktadır:

- Birinci bölümde, tez çalışması hakkında bilgi verilmiş ve 1-B ve 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için literatürde şu ana kadar yapılmış olan çalışmalar sınıflandırılmaya çalışılmıştır.
- İkinci bölümde, önerilen yöntemlerde kullanılan modelin yapısı tanıtılmış ve kullanılan varsayımlara yer verilmiştir.
- Üçüncü bölümde, tezin ana konusunu teşkil eden 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi probleminin çözümü için önerilen *Eşdeğer Özbağlanımlı (EAR) model yaklaşımı* ayrıntılarıyla anlatılmış ve ARMA modele ilişkin AR ve MA parametrelerinin kestirim adımları türetilmiştir. Ayrıca, önerilen yöntem hakkında gerekli değerlendirmeler de yapılmıştır.
- Dördüncü bölümde ise, yine tezin esas konusunu teşkil eden 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi problemi incelenmiş ve ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi için *ARMA-Cepstrum özyineleme* yaklaşımına dayanan yeni bir yöntem önerilmiştir. Bölüm sonunda, önerilen yöntem hakkında gerekli değerlendirmeler ayrıca verilmiştir.
- Beşinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde sunulan yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını değerlendirmek amacıyla kullanılan başarımlar ölçütleri hakkında kısa ve özet bilgilere yer verilmiştir.
- Altıncı bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümlerde sunulan yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını beşinci bölümde verilen başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmek amacıyla çeşitli sistem modelleri üzerinden bilgisayar benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, önerilen her bir yöntemin literatürde mevcut olan yöntemle eşzamanlı koşumundan elde edilen sonuçlar ayrı ayrı karşılaştırılmıştır.
- Yedinci bölümde ise, tez çalışmasında yapılanlar kısaca özetlenerek elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar hakkında kapsamlı bilgiler verilmiştir.

2. KULLANILAN MODEL ve YAPILAN VARSAYIMLAR

2.1. Giriş

Parametre kestirimi için önerilen algoritmalarda kullanılan model, biçimi Şekil 2.1’de verilen ÇD destek bölgesi için tanımlı olan doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modeli olup bu modele ilişkin transfer fonksiyonu

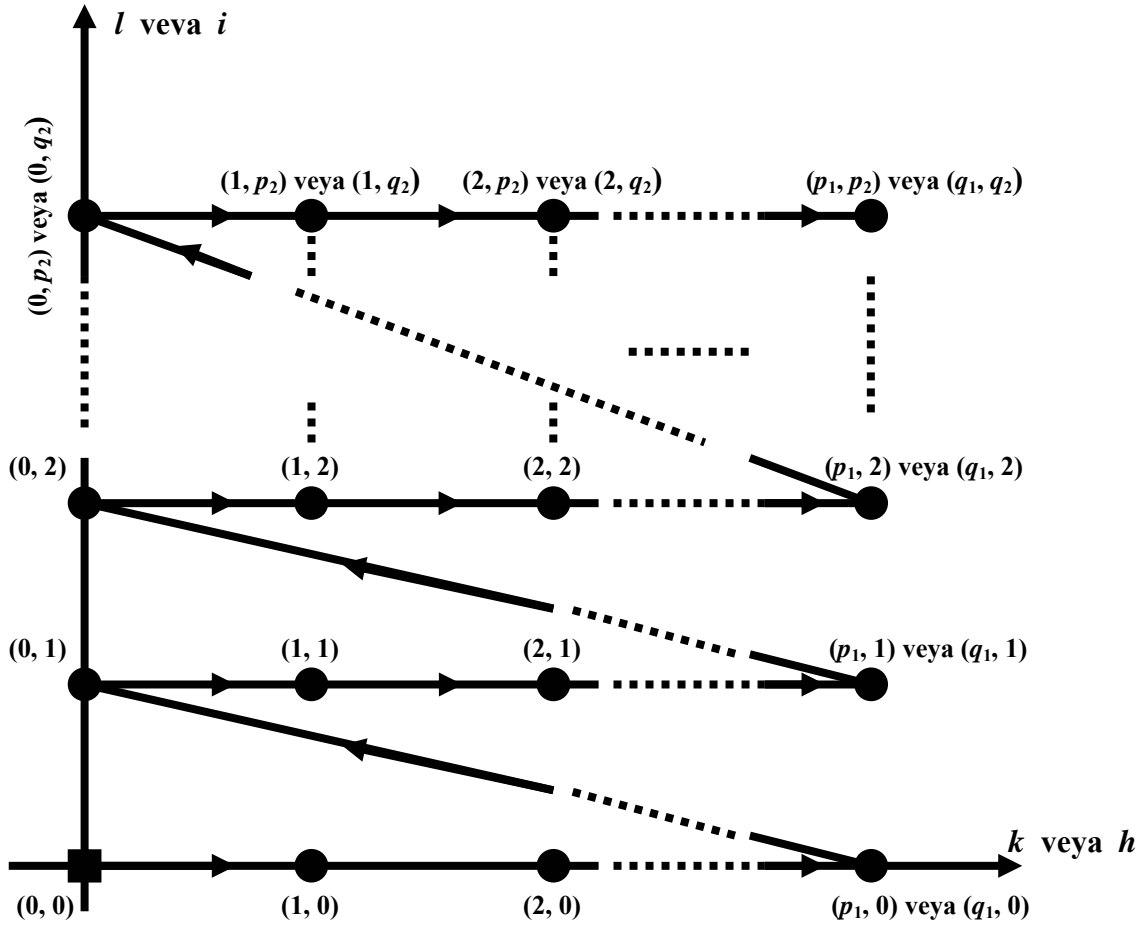
$$H(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \quad (2.1)$$

ifadesi ile tanımlıdır. Parametrik açıdan 2-B ARMA model genel olarak, durağan rastgele alanların en etkili doğrusal gösterimini sağlar (Cadzow ve diğ., 1981; Zhang ve diğ., 1991; Zhang, 1991). Spektral alanda, ARMA modeller yoğunlaşma (concentration) ve yayılmayı (dispersion) karakterize ederken AR modeller sadece yoğunlaşmayı MA modeller ise sadece yayılmayı temsil edebilirler. Bu yüzden, rastgele alanların modellenmesinde tek başına AR veya MA model kullanmak yerine ARMA modelin kullanılması tercih edilir. Ancak MA katsayılarının kestiriminin doğrusal olmayan işlem gerektirmesinden dolayı, ARMA veya MA model parametrelerinin kestirimi AR model parametrelerinin kestirim işleminden daha zordur.

(2.1)’de verilen modelin tanımladığı sürecin (n_1, n_2) . örneği

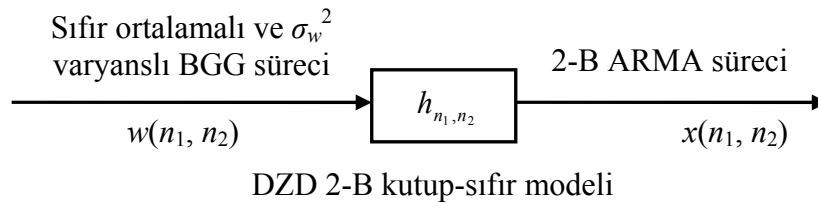
$$x(n_1, n_2) = - \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} x(n_1 - k, n_2 - l) + \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} w(n_1 - h, n_2 - i) \quad (2.2)$$

doğrusal fark denklemiyle ifade edilir. Bu fark denklemi aynı zamanda; girişi, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG süreci $w(n_1, n_2)$ ile uyarılmış olan sonsuz dürtü yanıtına sahip nedensel DZD ayırık-zamanlı 2-B kutup-sıfır süzgecinin çıkışı tanımlar.



Şekil 2.1: DZD 2-B ARMA modelin parametreleri için ÇD destek bölgesi ve model parametrelerin kestirimi için sıralama düzeni.

(2.2) eşitliğinde tanımlanan çıkış bilgisini üreten yapının blok diyagramı Şekil 2.2’de verilmiştir. (2.1) ve (2.2)’deki AR katsayıları $\{a_{k,l} ; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2, (k, l) \neq (0,0)\}$ ve MA katsayıları $\{b_{h,i} ; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2\}$, biçimi Şekil 2.1’de verilen ÇD destek bölgesi için 2-B ARMA modeli ve modele karşı düşen süreci karakterize etmektedir.



Şekil 2.2: 2-B ARMA süreç örneklerinin üretimini sağlayan yapının blok diyagramı.

Fark denklemi (2.2) eşitliği ile verilen genel parametrik ARMA sürecine ilişkin GİY işlevi, transfer fonksiyonu (2.1)’de tanımlanan ÇD destek bölgesi ARMA modeli uyarmada kullanılan σ_w^2 varyanslı BGG süreci için

$$P(e^{jw_1}, e^{jw_2}) = \sigma_w^2 \left| \frac{B(e^{jw_1}, e^{jw_2})}{A(e^{jw_1}, e^{jw_2})} \right|^2 = \sigma_w^2 \left| \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} e^{-j(w_1 h + w_2 i)}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} e^{-j(w_1 k + w_2 l)}} \right|^2 \quad (2.3)$$

ifadesi ile verilir.

Parametre kestirim için kullanılan modelin nedenselliği ve yapısından dolayı ÇD destek bölgesi 2-B ARMA rastgele sürecine ilişkin örnekler, $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ve $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ için (2.2) ile tanımlanan fark denkleminde elde edilir. Buna göre, giriş ve çıkış süreçlerine ilişkin örnekler sırasıyla

$$w(n_1, n_2) = \begin{cases} w(n_1, n_2) & ; (n_1, n_2) \in [0,0] \times [N_1 - 1, N_2 - 1] \\ 0 & ; (n_1, n_2) \notin [0,0] \times [N_1 - 1, N_2 - 1] \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} x(n_1, n_2) & ; (n_1, n_2) \in [0,0] \times [N_1 - 1, N_2 - 1] \\ 0 & ; (n_1, n_2) \notin [0,0] \times [N_1 - 1, N_2 - 1] \end{cases} \quad (2.4b)$$

biçiminde tanımlıdır. (2.4)'deki gösterimlere uygun olarak, verilen veya (2.2) eşitliği ile üretilen $(N_1 \times N_2)$ -noktalı gözlem verisi kümelerinin $\{x(n_1, n_2)\}$ önerilen algoritmalarda kullanımı sonucu 2-B rastgele alanı modelleyen ÇD destek bölgesi ARMA modele ilişkin parametrelerin kestirimi gerçekleştirilmektedir.

2.2. Parametre Kestirimi İçin Önerilen Yöntemlerde Yapılan Varsayımlar

(V1) (2.1) eşitliği ile tanımlanan 2-B ARMA modeli karakterize eden AR (payda) ve MA (pay) kısımlarının mertebelerine karşı düşen p_1, p_2 ve q_1, q_2 değerlerinin bilindiği varsayılmaktadır.

(V2) (2.1) ve (2.2) eşitliklerinde, $a_{0,0} = 1$ ve $b_{0,0} = 1$ olduğu varsayılmaktadır.

(V3) İncelenen 2-B ARMA model ve bu model karşı düşen sürecin ÇD destek bölgesinde tanımlı olduğu varsayılmaktadır.

(V4) Şekil 2.2'deki DZD ayrık-zamanlı 2-B kutup-sıfır modelinin girişini süren $w(n_1, n_2)$ işaretinin, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örneklerinden oluştuğu varsayılmaktadır.

3. EŞDEĞER ÖZBAĞLANIMLI (EAR) MODEL YAKLAŞIMI İLE 2-B ARMA MODEL PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, transfer fonksiyonu (2.1)'de tanımlanan ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin parametreleri ile bu modeli yaklaşık olarak temsil edebilecek AR modelin parametreleri arasındaki ilişkiyi kullanarak 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için hesaplama yoğunluğu düşük yeni bir yöntem önerilmektedir. Önerilen yöntem, 1-B işaret işleme teorisindeki (p, q) . mertebeden bir ARMA modelin mertebe olarak sonsuz uzunlukta bir AR veya MA modele eşdeğer (Hayes, 1996; Haykin, 2002; Manolakis ve diğ., 2000; Martinelli ve diğ., 1985; Shufang ve diğ., 2000) olduğu teorisine dayanmaktadır.

1-B durumda olduğu gibi (Martinelli ve diğ., 1985; Shufang ve diğ., 2000), durağan ve tersi alınabilir (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden bir 2-B ARMA model sonsuz mertebeden bir 2-B AR veya MA modele eşdeğerdir. Başka bir deyişle, bu üç temel parametrik model arasında $ARMA(p_1, p_2, q_1, q_2) = AR(\infty, \infty) = MA(\infty, \infty)$ ilişkisi mevcuttur. Sonuç olarak, küçük hatalarla bir 2-B ARMA modele yeterince uzun bir AR veya MA model ile yaklaşmak mümkündür. AR model parametrelerinin kestirimi için yapılan işlemlerin hesapsal yoğunluğunun düşük olması ve doğrusal denklemler kümesinin çözümüyle kolay bir biçimde elde edilebilmesinden dolayı, önerilen yöntemde 2-B ARMA modelin AR model ile temsil edilmesi tercih edilmiştir. Benzer yaklaşım, Martinelli ve diğ., (1985) tarafından 1-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için kullanılmıştır.

Önerilen yöntem üç aşamadan oluşmakta olup, her bir aşama bir sonrakini destekler yapıdadır (Kızılkaya ve diğ., 2005a):

Aşama 1: $(N_1 \times N_2)$ boyutundaki $\{x(n_1, n_2); 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$ veri kümelerini kullanarak, 2-B ARMA modeli yaklaşık olarak temsil eden eşdeğer özbağlanımlı (EAR) modelin parametreleri kestirilir. Bunun için, 2-B ARMA modelin AR parametrelerini elde etmek amacıyla Zhang ve diğ., (1991) tarafından yeni formda türetilen DYW denklemleri önerilen algoritmaya uyumlu hale getirilerek kullanılmıştır.

Aşama 2: 1. aşamada elde edilen 2-B EAR model parametrelerini önerilen yöntemde kullanarak, 2-B ARMA modelin MA katsayıları kestirilir.

Aşama 3: 1. ve 2. aşamalarda elde edilen EAR ve MA parametrelerini kullanarak 2-B ARMA modelin AR katsayılarının kestirimi gerçekleştirilir.

Böylece, verilen 2-B gözlem verisini karakterize eden 2-B ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestirim işlemi tamamlanmış olur.

3.2. 2-B EAR Model Parametrelerinin Kestirimi

ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modeli karakterize eden AR ve MA parametrelerinin kestirimi için önerilen yöntemde ilk olarak, yöntemin esasını oluşturan EAR model parametrelerinin kestirimi probleminin incelenmesi gerekir.

2-B ARMA modele eşdeğer bir AR model, (2.1) eşitliğinin tersinin asimtotik açılımı olarak ifade edilebilir:

$$\frac{1}{H(z_1, z_2)} = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (3.1)$$

(3.1) eşitliğindeki $\{d_{i,j}\}$ katsayıları, ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modeli temsil eden 2-B EAR modelin parametreleridir. (3.1) ile tanımlanan eşitliğe, yeterince yüksek mertebeden bir EAR modeli kullanarak küçük hatalarla yaklaşmak mümkündür. (2.1) ve (3.1) ile tanımlanan eşitliklerden yararlanarak herhangi bir L_1 ve L_2 değeri için

$$\frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \cong \frac{1}{\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (3.2)$$

yaklaşımı yapılabilir. Bu durumda, (3.2)'de tanımlanan (L_1, L_2) . mertebeden 2-B EAR modele karşı düşen fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} x(n_1 - i, n_2 - j) = w(n_1, n_2) \quad (3.3)$$

eşitliği ile verilir. Nedensellik koşulu altında $l \geq 0$ ve $m \geq 0$ için (3.3) eşitliğinin her iki yanını $x(n_1 - l, n_2 - m)$ terimi ile çarpılıp, elde edilen ifadenin beklenen değeri alınırsa

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r_{xx}(l-i, m-j) = E[w(n_1, n_2)x(n_1-l, n_2-m)] \quad (3.4)$$

eşitliğine ulaşılır. **(V3)** varsayımından dolayı, incelenen ARMA model nedenseldir. Bu durumda, (3.4) eşitliğinin sağ tarafı $(l, m) = (0, 0)$ dışında sifıra eşit olur ve

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r_{xx}(l-i, m-j) = E[w(n_1, n_2)x(n_1-l, n_2-m)] \delta(l, m) \quad (3.5)$$

biçiminde yeniden ifade edilebilir. (3.5) eşitliğindeki $\delta(l, m)$ terimi, 2-B birim dürtü işlevi olup aşağıdaki tanıma sahiptir:

$$\delta(l, m) = \begin{cases} 1 & ; (l, m) = (0, 0) \\ 0 & ; (l, m) \neq (0, 0) \end{cases}$$

(3.5)'deki $x(n_1-l, n_2-m)$ terimi, incelenen modelin DZD oluşundan yararlanarak yeniden elde edilebilir. Şekil 2.2'deki yapıyı kullanarak katlama (convolution) toplamından

$$x(n_1-l, n_2-m) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} w(n_1-l-k_1, n_2-m-k_2) \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.6) eşitliğinin her iki yanını $w(n_1, n_2)$ terimi ile çarpılıp elde edilen sonucun beklenen değeri alınır

$$E[w(n_1, n_2)x(n_1-l, n_2-m)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} E[w(n_1, n_2)w(n_1-l-k_1, n_2-m-k_2)] \quad (3.7)$$

elde edilir. Bölüm 2'de verilen **(V4)** varsayımından yararlanarak, (3.7) eşitliği

$$E[w(n_1, n_2)x(n_1-l, n_2-m)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} \sigma_w^2 \delta(l+k_1, m+k_2) = \sigma_w^2 h_{-l, -m} \quad (3.8)$$

biçiminde yazılabilir. İncelenen modelin nedenselliğinden ve $(l, m) \geq (0, 0)$ koşulundan yararlanarak (3.8)'in sağ tarafı, sadece $(l, m) = (0, 0)$ için sifırdan farklı olacaktır. **(V2)** varsayımından dolayı $h_{0,0} = 1$ yazılabilir. Böylece, (3.5) ve (3.8) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r_{xx}(l-i, m-j) = \sigma_w^2 \delta(l, m) \quad (3.9)$$

sonucuna ulaşılır. (3.9)'da elde edilen eşitlik, 2-B DYW denklemi (normal denklemi) olarak da adlandırılır. Benzer çıkarım, 2-B ARMA modelin AR parametrelerinin kestirimi amacıyla Zhang ve diğ., (1991) tarafından yapılmıştır. (3.9) denklemi, $\{d_{i,j}\}$ parametrelerinin kestirimi için matrisel yapıda aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\mathbf{R}d = \xi \quad (3.10)$$

Burada \mathbf{R} , EAR modele karşı düşen sürecin özilinti matrisini tanımlar. Bu ilinti matrisi, $(L_2 + 1) \times (L_2 + 1)$ boyutlu blok-Toeplitz matris yapısında olup

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} \begin{matrix} \downarrow \\ m = 0 \\ m = 1 \\ \vdots \\ m = L_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ j = 0 & j = 1 & \dots & j = L_2 \end{matrix} \\ \mathbf{R} = & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \dots & \mathbf{R}_{-L_2} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \dots & \mathbf{R}_{-L_2+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L_2} & \mathbf{R}_{L_2-1} & \dots & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir. (3.11)'deki \mathbf{R}_k alt matrislerinin her biri de $(L_1 + 1) \times (L_1 + 1)$ boyutlu Toeplitz matris yapısına sahiptir:

$$\mathbf{R}_k = \begin{matrix} \begin{matrix} \downarrow \\ l = 0 \\ l = 1 \\ \vdots \\ l = L_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ i = 0 & i = 1 & \dots & i = L_1 \end{matrix} \\ \mathbf{R}_k = & \begin{bmatrix} r_{xx}(0, k) & r_{xx}(-1, k) & \dots & r_{xx}(-L_1, k) \\ r_{xx}(1, k) & r_{xx}(0, k) & \dots & r_{xx}(-L_1 + 1, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(L_1, k) & r_{xx}(L_1 - 1, k) & \dots & r_{xx}(0, k) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.12)$$

(3.10) eşitliğindeki d ve ξ terimleri, $(L_1 + 1)(L_2 + 1)$ bileşenden oluşan sütun vektörlerini temsil etmekte olup (3.11) ve (3.12)'deki yapılar dikkate alınarak

$$\mathbf{d} = [d_{0,0}, d_{1,0}, \dots, d_{L_1,0}, d_{0,1}, d_{1,1}, \dots, d_{L_1,1}, \dots, d_{0,L_2}, d_{1,L_2}, \dots, d_{L_1,L_2}]^T \quad (3.13)$$

$$\xi = [\sigma_w^2, 0, 0, \dots, 0]^T \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanmışlardır. (3.12)'de tanımlanan alt matrislerin bileşenlerini oluşturan $\{r_{xx}(i, j)\}$ katsayıları, $(N_1 \times N_2)$ boyutundaki veri kümesi $\{x(n_1, n_2)\}$ 'ye ait özilinti katsayılarıdır. Durağan rasgele alanlar için bu katsayıların değeri

$$r_{xx}(i, j) = \frac{1}{(N_1 - i)(N_2 - j)} \sum_{n_1=0}^{N_1-1-i} \sum_{n_2=0}^{N_2-1-j} x(n_1, n_2)x(n_1 + i, n_2 + j)$$

$$r_{xx}(-i, -j) = r_{xx}(i, j); \quad (i, j) \geq (0, 0) \text{ için}$$

$$r_{xx}(i, -j) = \frac{1}{(N_1 - i)(N_2 - j)} \sum_{n_1=0}^{N_1-1-i} \sum_{n_2=0}^{N_2-1-j} x(n_1, n_2 + j)x(n_1 + i, n_2)$$

$$r_{xx}(-i, j) = r_{xx}(i, -j); \quad (i, j) \geq (1, 1) \text{ için}$$

hesaplama adımları ile elde edilir (Zhang ve diğ., 1991).

Sonuç olarak, (3.13) ile tanımlanan 2-B EAR model parametrelerinin kestirimi (3.10) eşitliğinin $\mathbf{d} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ çözümüyle elde edilir. (3.14)'de tanımlanan sütun vektörü $\boldsymbol{\xi}$ 'nin ilk bileşeni dışındaki değerler sıfır olduğundan dolayı $\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ çarpımını yapmak yerine, \mathbf{R}^{-1} matrisinin ilk sütununu oluşturan değerlerle $\boldsymbol{\xi}$ vektörünün ilk bileşenini çarpmak çözüm için yeterli olacaktır. Yani,

$$\mathbf{d} = \sigma_w^2 \mathbf{f} \quad (3.15)$$

(3.15) eşitliğindeki \mathbf{f} vektörü,

$$\mathbf{f} = [f_{0,0}, f_{1,0}, \dots, f_{L_1,0}, f_{0,1}, f_{1,1}, \dots, f_{L_1,1}, \dots, f_{0,L_2}, f_{1,L_2}, \dots, f_{L_1,L_2}]^T \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlı sütun vektörü olup, bileşenleri \mathbf{R}^{-1} 'in ilk sütunundaki değerlerden oluşmaktadır.

(V2) varsayımına göre \mathbf{d} vektörünün ilk bileşeni $d_{0,0} = 1$ olacaktır. Bu bilgiden yararlanarak, 2-B ARMA modeli uyarmada kullanılan BGG sürecinin varyansı σ_w^2 'yi hesaplamak mümkündür. (3.13), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden BGG sürecinin varyansı

$$\sigma_w^2 = \frac{d_{0,0}}{f_{0,0}} = \frac{1}{f_{0,0}} \quad (3.17)$$

ifadesi ile elde edilir. Böylece, (3.16) ve (3.17) ile bulunan değerleri (3.15) eşitliğinde yerine koyarak 2-B EAR model parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmiş olur.

3.3. 2-B ARMA Modelin AR ve MA Parametrelerinin Kestirimi

Önerilen EAR model yaklaşımına dayalı yöntemde EAR modelin parametreleri ile ARMA modelin parametreleri arasındaki ilişki, $b_{0,0} = 1$ varsayımını dikkate alarak

oluşturulmuştur. Buna göre, ARMA modelin AR kısmının MA kısmına bölümüyle elde edilen her bir katsayı EAR model katsayısına eşlenmektedir. Bölme işlemi, tam bir eşleme için aslında teorik olarak sonsuza kadar devam eder. Ancak önerilen yöntemde bu eşleme işlemi, (L_1, L_2) . mertebeden EAR model için yapılmaktadır ve sonuçta eşleme için $(L_1 + 1)(L_2 + 1)$ adet bölme işlemi yapmak yeterlidir. Örneğin, ARMA(1,1,1,1) modeli için bu bölme ve eşleme işlemi, aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} &= \frac{1 + a_{0,1}z_2^{-1} + a_{1,0}z_1^{-1} + a_{1,1}z_1^{-1}z_2^{-1}}{1 + b_{0,1}z_2^{-1} + b_{1,0}z_1^{-1} + b_{1,1}z_1^{-1}z_2^{-1}} \\ &= \underbrace{1}_{d_{0,0}} + \underbrace{(a_{0,1} - b_{0,1})}_{d_{0,1}}z_2^{-1} + \underbrace{(a_{1,0} - b_{1,0})}_{d_{1,0}}z_1^{-1} + \underbrace{(-a_{0,1}(a_{0,1} - b_{0,1}))}_{d_{0,2}}z_2^{-2} + \dots \quad (3.18) \end{aligned}$$

ARMA(1,1,1,1) modeli için EAR ve ARMA parametreleri arasındaki ilişki, (3.18)'deki bölme işleminin bölüm kısmında gösterilmektedir.

Genel olarak ARMA(p_1, p_2, q_1, q_2) modeli için (3.18)'deki gibi bir bölme işlemi yapıp bölüm sonucu EAR(L_1, L_2) model parametrelerine eşlendiğinde, **(V2)** varsayımını dikkate alarak $\{a_{k,l}; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2\}$, $\{b_{h,i}; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2, (h, i) \neq (0, 0)\}$, ve $\{d_{i,j}; 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2\}$ parametreleri arasındaki ilişki

$$\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0} = -\mathbf{D}_{0,0} + \mathbf{A} \quad (3.19a)$$

ifadesi ile verilebilir. Bu eşitlikteki $\mathbf{D}_{k,j}$ ve \mathbf{A} , her biri $(L_1 + 1) \times (L_2 + 1)$ boyutlu matrisler olup

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,p_2} & \mathbf{O}_{(p_1+1) \times (L_2-p_2)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{p_1,0} & \dots & a_{p_1,p_2} & \\ \hline \mathbf{O}_{(L_1-p_1) \times (p_2+1)} & & \mathbf{O}_{(L_1-p_1) \times (L_2-p_2)} & \end{bmatrix} \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{D}_{k,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k \times j} & & \mathbf{O}_{k \times (L_2-j+1)} & \\ \hline \mathbf{O}_{(L_1-k+1) \times j} & d_{0,0} & \dots & d_{0,L_2-j} \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ & d_{L_1-k,0} & \dots & d_{L_1-k,L_2-j} \end{bmatrix} \quad (3.19c)$$

biçiminde oluşturulmuştur. (3.19)'da türetilen eşitlikler $(L_1, L_2) = (\infty, \infty)$ için de geçerlidir. Ancak uygulanabilirlik açısından sonlu L_1 ve L_2 değerleri için (3.19)'daki ifadeler kullanılarak, (3.15) ile elde edilen EAR model katsayılarından ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestirimi yapılacaktır.

Kestirilecek parametrelerin sayısı; z_1 -boyutunda $(p_1 + q_1)$, z_2 -boyutunda $(p_2 + q_2)$ 'dir. Bunun anlamı şudur: L_1 ve L_2 mertebeleri $L_1 = (p_1 + q_1)$ ve $L_2 = (p_2 + q_2)$ değerlerinin altında seçilemez. Teorik olarak L_1 ve L_2 mertebelerinin sırasıyla $(p_1 + q_1)$ ve $(p_2 + q_2)$ değerlerinden daha büyük seçilmesi mantıklı olacağından dolayı (3.19a)'da türetilen formüller yapıdaki $\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0}$ ve $\mathbf{A} - \mathbf{D}_{0,0}$ matrisleri arasındaki eşleme, bu matrislerin farkının karesini AR ve MA parametrelerine göre en küçükleyerek elde edilir. AR ve MA parametrelerinin reel sayılar kümesinin elemanlarından oluştuğu varsayarak, bu en küçükleme işlemi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0} + \mathbf{D}_{0,0} - \mathbf{A} \right)^2 \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial b_{h,i}} = 0; \quad 0 \leq h \leq q_1, \quad 0 \leq i \leq q_2, \quad (h,i) \neq (0,0) \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial a_{k,l}} = 0; \quad 0 \leq k \leq p_1, \quad 0 \leq l \leq p_2, \quad (k,l) \neq (0,0) \quad (3.20c)$$

ifadeleri ile gerçekleştirilir. (3.20)'de tanımlanan en küçükleme işlemi sonucunda AR parametreleri için, $p_1 p_2 + p_1 + p_2$; MA parametreleri için ise, $q_1 q_2 + q_1 + q_2$ kadar doğrusal denklem kümelerine ulaşılır. Bu denklem sistemlerinin ayrı ayrı çözülmesiyle AR ve MA parametre kestirimlerinin elde edilmesi sağlanacaktır.

3.3.1. MA Parametrelerinin Kestirimi

(3.20b) tanımlanan MA parametrelerine göre en küçükleme sonucunda elde edilen doğrusal denklemler kümesi, matrisel yapıda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{C}\mathbf{b} = \boldsymbol{\zeta} \quad (3.21a)$$

(3.21a)'daki eşitlikte \mathbf{C} , $(q_1 q_2 + q_1 + q_2) \times (q_1 q_2 + q_1 + q_2)$ boyutlu matrise; \mathbf{b} ve $\boldsymbol{\zeta}$ ise, $(q_1 q_2 + q_1 + q_2)$ bileşenli sütun vektörlerine karşı düşmektedir ve

$$\mathbf{b} = [b_{0,1}, \dots, b_{0,q_2}, b_{1,0}, \dots, b_{1,q_2}, \dots, b_{q_1,0}, \dots, b_{q_1,q_2}]^T \quad (3.21b)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_{0,1}, \dots, \zeta_{0,q_2}, \zeta_{1,0}, \dots, \zeta_{1,q_2}, \dots, \zeta_{q_1,0}, \dots, \zeta_{q_1,q_2}]^T \quad (3.21c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{0,1,0,1} & \cdots & C_{0,1,0,q_2} & | & C_{0,1,1,0} & \cdots & C_{0,1,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{0,1,q_1,0} & \cdots & C_{0,1,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots & \cdots & \vdots & | & \cdots & | & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{0,q_2,0,1} & \cdots & C_{0,q_2,0,q_2} & | & C_{0,q_2,1,0} & \cdots & C_{0,q_2,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{0,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{0,q_2,q_1,q_2} \\ \hline C_{1,0,0,1} & \cdots & C_{1,0,0,q_2} & | & C_{1,0,1,0} & \cdots & C_{1,0,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{1,0,q_1,0} & \cdots & C_{1,0,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots & \cdots & \vdots & | & \cdots & | & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1,q_2,0,1} & \cdots & C_{1,q_2,0,q_2} & | & C_{1,q_2,1,0} & \cdots & C_{1,q_2,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{1,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{1,q_2,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots & \cdots & \vdots & | & \cdots & | & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline C_{q_1,0,0,1} & \cdots & C_{q_1,0,0,q_2} & | & C_{q_1,0,1,0} & \cdots & C_{q_1,0,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{q_1,0,q_1,0} & \cdots & C_{q_1,0,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots & \cdots & \vdots & | & \cdots & | & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{q_1,q_2,0,1} & \cdots & C_{q_1,q_2,0,q_2} & | & C_{q_1,q_2,1,0} & \cdots & C_{q_1,q_2,1,q_2} & | & \cdots & | & C_{q_1,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{q_1,q_2,q_1,q_2} \end{bmatrix} \quad (3.21d)$$

biçimlerinde tanımlanmışlardır. (3.21b)'deki sütun vektörü, istenen MA parametre kestirimlerini içerir ve bu kestirimler (3.21a) eşitliğinin

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\zeta} \quad (3.21e)$$

çözümüyle elde edilir. (3.19)'da türetilen ifadelerden yararlanarak, sırasıyla (3.21c) ve (3.21d)'de tanımlanan $\boldsymbol{\zeta}$ vektörü ve \mathbf{C} matrisinin bileşenleri

$$C_{p,r,s,t} = \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{i=p_2+1}^{L_2} \mathbf{D}_{p,r}(k,i) \mathbf{D}_{s,t}(k,i) + \sum_{j=p_1+1}^{L_1} \sum_{l=0}^{L_2} \mathbf{D}_{p,r}(j,l) \mathbf{D}_{s,t}(j,l) \quad (3.21f)$$

$$\zeta_{p,r} = - \left(\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{i=p_2+1}^{L_2} \mathbf{D}_{0,0}(k,i) \mathbf{D}_{p,r}(k,i) + \sum_{j=p_1+1}^{L_1} \sum_{l=0}^{L_2} \mathbf{D}_{0,0}(j,l) \mathbf{D}_{p,r}(j,l) \right) \quad (3.21g)$$

ifadeleri ile hesaplanır. Burada, $0 \leq (p, s) \leq q_1$ ve $0 \leq (r, t) \leq q_2$ 'dir. Ancak belirtmekte fayda var: aynı anda $(p, r) \neq (0, 0)$ veya $(s, t) \neq (0, 0)$ 'dir. Yani örneğin $C_{0,0,1,1}$ veya $C_{1,0,0,0}$ tanımlı değildir.

3.3.2. AR Parametrelerinin Kestirimi

Aslında (3.20c)'deki en küçükleme işlemi, (3.19a) eşitliğinde tanımlanan ilişkiyi kullanarak AR parametrelerinin elde edilmesine karşı düşer.

Sonuç olarak, sırasıyla (3.15) ve (3.21e) eşitliklerinin üretmiş olduğu EAR ve MA parametre kestirimlerini (3.19a)'da kullanarak incelenen ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin kestirimi

$$a_{m,n} = d_{m,n} + \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j}(m,n) b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0}(m,n) b_{h,0} \quad (3.22)$$

ifadesi ile kolaylıkla elde edilebilir. Burada, $0 \leq m \leq p_1$ ve $0 \leq n \leq p_2$ 'dir. (3.22)'deki eşitlik, Bölüm 2'de verilen (V2) varsayımı için $d_{0,0} = 1$ sonucunu üretecektir. Bu sonuç, (3.17)'de BGG varyansının elde edilmesi için türetilen denklemi doğrulamaktadır.

(3.21f), (3.21g) ve (3.22) eşitliklerindeki $\mathbf{D}_{k,j}(k_1, k_2)$ ifadeleri, (3.19c)'de tanımlanan $\mathbf{D}_{k,j}$ matrislerinin (k_1, k_2) . bileşenini temsil etmektedir.

3.4. Önerilen Yöntemin Özeti ve Yöntem Hakkındaki Düşünceler

ÇD destek bölgesi (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modelin parametrelerini kestirmek amacıyla önerilen EAR model yaklaşımına dayalı yöntemin işleyiş biçimi, aşağıdaki hesaplama adımlardan oluşmaktadır:

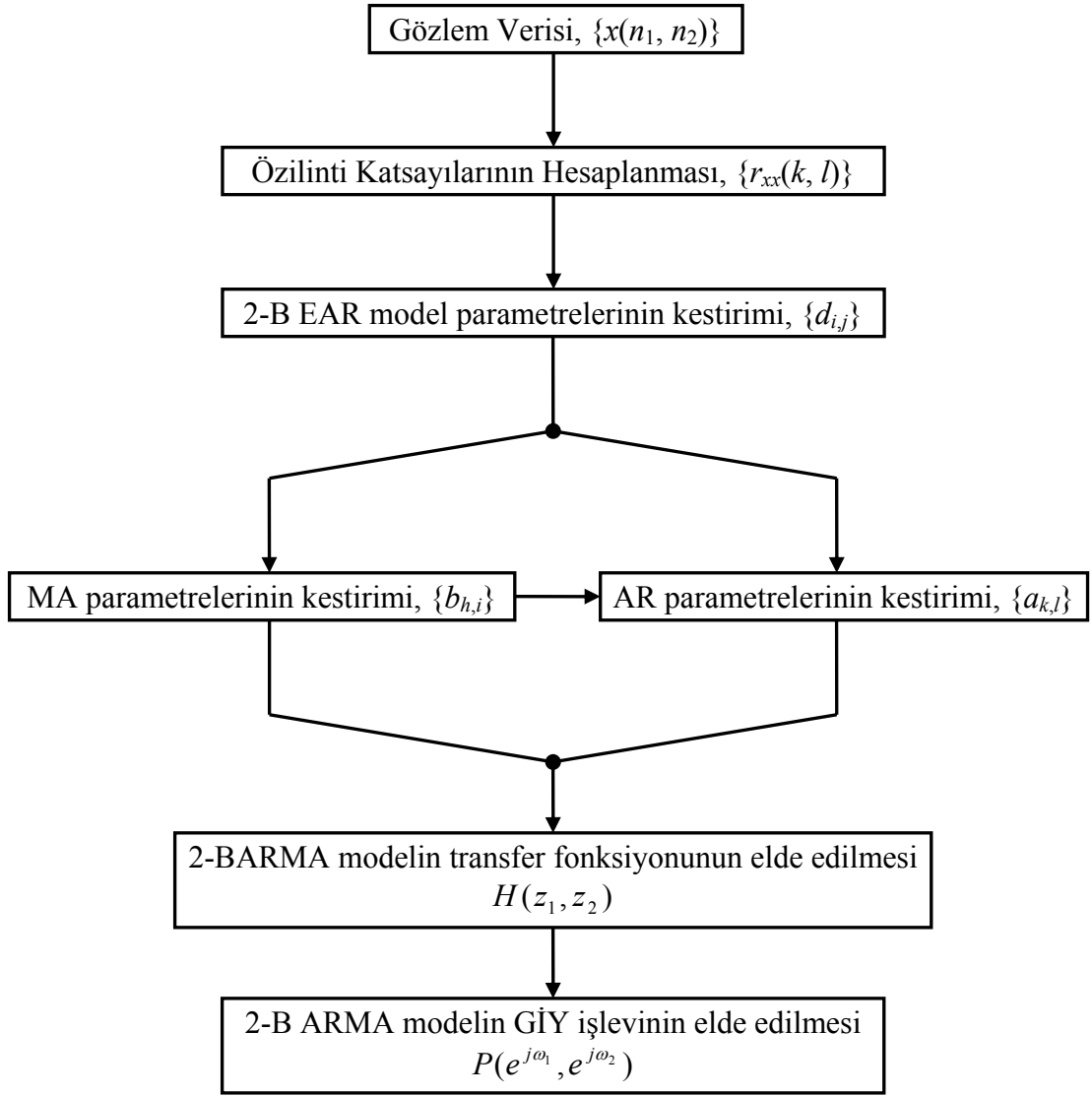
Adım 1: (2.1) ile tanımlanan 2-B ARMA modeli yaklaşık olarak temsil eden 2-B EAR modelin parametreleri $\{d_{i,j}\}$, (3.15)-(3.17) eşitlikleri ile elde edilir.

Adım 2: Adım 1'de elde edilen EAR model katsayılarını $\{d_{i,j} ; 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2\}$ kullanarak, (3.19c)'de $\{0 \leq k \leq q_1\}$ ve $\{0 \leq j \leq q_2\}$ aralıkları için tanımlanan $\mathbf{D}_{k,j}$ matrisleri oluşturulur.

Adım 3: Adım 2'de elde edilen $\mathbf{D}_{k,j}$ matrislerini (3.21f) ve (3.21g) eşitliklerinde kullanarak \mathbf{C} matrisi ve ζ vektörünün bileşenleri hesaplanır. Hesaplanan bu değerlerle, sırasıyla (3.21c) ve (3.21d)'deki ζ sütun vektörü ve \mathbf{C} matrisi oluşturulur ve (3.21e) eşitliği ile 2-B ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir.

Adım 4: EAR model katsayılarını $\{d_{i,j}\}$, kestirilen MA parametrelerini $\{b_{i,j}\}$, ve $\mathbf{D}_{k,j}$ matrislerini (3.22) eşitliğinde kullanarak ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin $\{a_{m,n}\}$ kestirimi gerçekleştirilir.

Bu bölümde önerilen yöntemin işleyiş biçimine ilişkin akış diyagramı, Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin parametrelerini kestirmek amacıyla önerilen EAR model yaklaşımına dayalı yöntemin akış diyagramı.

Önerilen Algoritma Hakkındaki Düşünceler:

- Eğer incelenen model, ARMA değil de AR model olsaydı, (3.19a) eşitliği ile tanımlanan denklemden $A = D_{0,0}$ yazmak mümkündür. Bu durumda EAR model parametreleri, doğrudan doğruya incelenen AR modelin parametrelerine karşı düşecektir. Yani, $0 \leq i \leq p_1$ ve $0 \leq j \leq p_2$ için $a_{i,j} = d_{i,j}$ olur.
- 1-B durumda olduğu gibi (Martinelli ve diğ., 1985), eğer (L_1, L_2) . mertebeden EAR model parametreleri hatasız bir biçimde tam olarak kestirilebilirse bu durumda L_1 ve L_2 'yi sırasıyla $(p_1 + q_1)$ ve $(p_2 + q_2)$ seçmek, (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden ARMA model parametrelerinin hatasız bir biçimde kestirimi için yeterli olacaktır. (3.19a)'da türetilen denklem, bu fikri destekler niteliktedir.

4. ARMA-CEPSTRUM ÖZYİNELEME YAKLAŞIMI İLE 2-B ARMA MODEL PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ

4.1. Giriş

2-B rastgele alanlar, AR model ile kolay bir biçimde *kısmen* modellenebilir. Bu kolaylık, rastgele alanı modellemek için kullanılan AR model parametrelerinin kestirimi için yapılan işlemin doğrusal olması ve hesapsal karmaşıklığı düşük işlemler gerektirmesinin bir sonucudur. 2-B rastgele alanların ÇD ve simetrik olmayan yarı-düzlem destek bölgesi AR kafes süzgeçler ile modellenmesine yönelik çalışmalar; Kayran (1996a), Kayran ve diğ., (1997, 2004) tarafından gerçekleştirilmiştir.

AR modellerle karşılaştırıldığında, ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin kestirim işlemi, hesapsal karmaşıklığı yoğun olan doğrusal olmayan denklem sistemlerinin çözümünü gerektirir ve bu yüzden AR modelin parametrelerinin kestirim işleminden daha zordur. Bu nedendir ki, 2-B rastgele alanların ARMA model ile temsiline ilişkin yapılan çalışmalar sınırlı kalmıştır. Ancak, daha önce de ifade edildiği gibi, hem kutup hem de sıfırları kullanarak bilinmeyen süreci veya zaman serisini etkili bir biçimde modelleme yeteneklerinden dolayı ARMA modeli esas alarak parametre kestirimlerini gerçekleştiren öngörücüler daha fazla tercih edilirler.

Bölüm 3'de sunulan yöntemden farklı olarak bu bölümde, transfer fonksiyonu (2.1)'deki gibi verilen ÇD destek bölgesi ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestirimi için doğrudan doğruya ARMA model yapısını kullanan yeni bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem, ARMA model parametreleri ile bu modelin cepstrum katsayıları arasında oluşturulan özyineleme ilişkisini kullanmaktadır. Verilen ya da (2.2) eşitliği üretilen $(N_1 \times N_2)$ boyutlu veri kümesinden kestirilen cepstrum katsayılarını ve AR parametrelerini, türetilen denklemlerde kullanarak ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi yinelemeli olarak gerçekleştirilmektedir. Cepstrum katsayılarını elde etmek için, periodogram olarak adlandırılan parametrik olmayan izge kestirim yönteminden faydalanılmıştır. AR parametreleri ise, Zhang ve diğ., (1991) tarafından 2-B ARMA modelin AR parametrelerinin hesaplanması amacıyla yeni formda türetilen 2-B DYW denklemlerinin çözümüyle kestirilmektedir.

ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin yinelemeli kestirimi için bu bölümde önerilen yaklaşım, Kaderli ve diğ., (2000)'nin 1-B ARMA modelin MA parametrelerinin hesabı için önerdiği yöntemin 2-B duruma genişletilmiş olarak yorumlanabilir.

Önerilen yöntem üç aşamadan oluşmaktadır (Kızılkaya ve diğ., 2005b):

Aşama 1: Zhang ve diğ., (1991)'nin çalışmasında verilen 2-B DYW denklemlerinden faydalanarak ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin AR parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir.

Aşama 2: $(N_1 \times N_2)$ boyutundaki $\{x(n_1, n_2); 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$ gözlem verisine, parametrik olmayan izge kestirim yöntemlerinden biri uygulanarak 2-B gözlem verisine ilişkin cepstrum katsayılarının kestirimi gerçekleştirilir. Parametrik olmayan izge kestirimi için, 2-B Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) tabanlı periodogram tekniğinden faydalanılmıştır.

Aşama 3: Sırasıyla 1. ve 2. aşamalarda elde edilen AR parametrelerini ve cepstrum katsayılarını türetilen yinelemeli denklem yapılarında kullanarak, 2-B ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir.

Böylece, verilen 2-B gözlem verisini karakterize etmek amacıyla kullanılan 2-B ARMA modeli tanımlayan AR ve MA parametrelerinin kestirimi tamamlanmış olur.

4.2. 2-B ARMA Modelin AR Parametrelerinin Kestirimi

ÇD destek bölgesi ARMA modelin AR parametrelerinin kestirim işlemi, Zhang ve diğ., (1991) tarafından yeni formda türetilen 2-B DYW denklemlerinin çözümüyle gerçekleştirilmektedir. Bu yüzden AR parametrelerinin kestirim adımları, bu bölümde tekrardan ele alınmamıştır. AR parametrelerinin kestirimi, Şekil 2.1'de verilen sıralama düzenine göre yapılmaktadır.

4.3. Cepstrum Katsayılarının Kestirimi

Cepstrum terimi ilk olarak Bogert ve diğ., (1963) tarafından ortaya atılmış olup bu kavram, herhangi bir işaretin GİY işlevinin doğal logaritmasının ters Fourier dönüşümü olarak 1-B ve çok-boyutlu işaret işleme problemlerinin çözümünde geniş ilgi ve çalışma alanı bulmuştur. Bu çalışmalar genel olarak; sistem tanılamada önem arz eden ters katlama (deconvolution) problemlerinin çözümü, süzgeç tasarımı, GİY işlevinin

çarpanlarına ayrılması (spectral factorization) probleminin çözümü, kararsız olan sistemin kararlı hale getirilmesi şeklinde sınıflandırılabilir. İfade edilen bu problemlerin çözümünde cepstrum yönteminin sağladığı kolaylık ve yöntemin uygulama alanı, 1-B ve çok-boyutlu işaretler için farklılık arz etmektedir.

1-B işaretler için cepstrum tabanlı analiz, yukarıda ifade edilen problemlerin çözümünü gerçekleştirebilmesinin yanında daha çok ters katlama problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır (Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990). Konuşma işaretlerinin, iyileştirilmesi - gürültü ve yankının belirlenip ortadan kaldırılması, tanılanması ve kodlanması (Makhoul, 1975; Oppenheim ve diğ., 1975; Mansour ve diğ., 1989; Khare ve diğ., 1992), doğrusal öngörücü kodlama (linear predictive coding) yöntemi ile konuşma işaretlerinin analizi (Martin, 1999; Byrnes ve diğ., 2001) gibi çalışmalar, 1-B işaret işleme teorisinde cepstrum yönteminin geniş uygulama alanı bulduğu çalışmalara örnek olarak verilebilir. Daha basit yöntemlerin varlığından dolayı, 1-B süzgeç tasarımı uygulamalarında ve kararsız süzgeçlerin kararlı hale getirilmesi işlemlerinde cepstrum yöntemini kullanmak fazla cazip değildir (Lim, 1990).

Çok-boyutlu işaret işleme teorisinde ise cepstrum analizi, büyük oranda hem ters katlama problemlerinin çözümünde hem de sonsuz dürtü yanıtına sahip süzgeçlerin tasarımında kullanılmaktadır (Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990). Sonsuz dürtü yanıtına sahip 2-B süzgeçlerin tasarımında ve 2-B rastgele alanların modellenmesinde karşılaşılan en zor problemlerden biri, GİY fonksiyonunun çarpanlarına ayrılabilmesi problemi (Oppenheim ve diğ., 1968; Ekstrom ve diğ., 1976). Cepstrum yöntemi, bu problemin çözümü için oldukça kullanışlı olan bir yaklaşım sağlar (Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990). Ayrıca cepstrum yöntemini, sonsuz dürtü yanıtına sahip çok-boyutlu sayısal süzgeçlerin kararlılık analizinde (Ekstrom ve diğ., 1977; King ve diğ., 1987) ve kararsız süzgeçlerin kararlı hale getirilmesinde (Lim, 1990) kullanmak mümkündür. Gürültüye ve ani değişimlere karşı gürbüz olmasından dolayı, 2-B rastgele alanların modellenmesi ve görüntü işleme alanlarında da cepstrum tabanlı analiz yöntemleri geniş uygulama alanı bulmuştur (Solo, 1986; Lehmann ve diğ., 1996; Cho, 2000; Cho, 2001).

Her 2-B $x(n_1, n_2)$ dizisi cepstruma sahip değildir. Cepstrumun varolabilmesi için bu dizinin z -dönüşümünün doğal logaritmasının, $\ln\{X(z_1, z_2)\}$, herhangi bir yakınsaklık bölgesinde analitik olması gerekir (Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990).

$x(n_1, n_2)$, yakınsaklık bölgesi R' 'de tanımlı $X(z_1, z_2)$ ile ifade edilen z -dönüşümüne sahip bir 2-B dizi olsun. Bu dizinin cepstrumu

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \oint\oint_R \ln\{X(z_1, z_2)\} z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-1} dz_1 dz_2 \quad (4.1)$$

ifadesi ile hesaplanır (Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990). Yukarıda tanımlanan tümlev (integral) ifadesinin hesaplanabilmesi için $\ln\{X(z_1, z_2)\}$ işlevinin, yakınsaklık bölgesi R 'de analitik olması gerekir. Başka bir deyişle $\ln\{X(z_1, z_2)\}$ 'nin; sürekli, periyodik ve türevi alınabilir bir fonksiyon olması gerekir (Dudgeon ve diğ., 1984).

Çevrim tümlevlerinin $|z_1| = |z_2| = 1$ olmak üzere birim küre etrafında alınması durumunda (4.1) ile tanımlanan cepstrum ifadesi

$$\hat{x}(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\{X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\} e^{jn_1\omega_1} e^{jn_2\omega_2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.2)$$

biçiminde Fourier dönüşümünü kullanarak da hesaplanabilir. (4.2)'deki $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, $x(n_1, n_2)$ 'nin ayrık Fourier dönüşümü olup periyodu $4\pi^2$ 'dir. Buna göre, (4.2) ile tanımlanan cepstrumun elde edilebilmesi için

$$\begin{aligned} \hat{X}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \ln\{X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\} \\ &= \ln\{|X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|\} + j\theta(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ile tanımlanan ayrık Fourier dönüşümü ifadesinde

- $\hat{X}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, sürekli ve türevi alınabilir olmalıdır. Bu koşulun sağlanabilmesi için de, $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ işlevinin sonlu olması ve tüm (ω_1, ω_2) frekanslarında sıfırdan farklı olması gerekir.
- $\hat{X}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, hem ω_1 hem de ω_2 'de periyodik olmalıdır. Bunun için, $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ işlevinin fazına karşı düşen $\theta(\omega_1, \omega_2)$ 'nin de hem ω_1 hem de ω_2 'de periyodik olması ve süreksizlik içermemesi gerekir. (4.3) eşitliğine göre $(\omega_1, \omega_2) \in [0, 2\pi]$ aralığında $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ işlevinin fazı genel olarak, $[0, 2\pi]$ veya $[-\pi, \pi]$ rad/sn temel faz değerleri arasında sıkıştırılmış halde gözükür. Bu ise, bazı frekanslarda faz yanıtının süreksiz olması anlamına gelir. Temel faz değerlerinin kullanımından dolayı oluşan yapay süreksizlikleri önlemek için, faz açma (phase unwrapping) işleminin yapılması gerekir. 1-B durum için faz açma işlemine bir örnek, (Lim, 1990, syf. 294)'de verilmektedir.

2-B $x(n_1, n_2)$ dizisinin cepstrum hesabı için, yaygın olarak kullanılan iki temel yöntem mevcuttur (Dudgeon, 1977):

1. yöntem:

Bu yöntem, (4.2) eşitliği ile $|z_1| = |z_2| = 1$ olmak üzere birim küre etrafında tanımlanan iki-katlı tümlev ifadesinin yaklaşık hesabında gerekli olan Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü işlemleri için HFD ile gerçekleştirilen ayrık Fourier dönüşümünü kullanır. Temel faz değerlerinin kullanımından dolayı faz yanıtında oluşan süreksizlikleri önlemek amacıyla, bu yöntemde ayrıca faz açma algoritmasına da ihtiyaç vardır. Faz açma işlemi için, literatürde değişik yöntemler mevcuttur (Bhanu, 1982; Dudgeon ve diğ., 1984; Lim, 1990).

2. yöntem:

1.yöntemden farklı olarak bu yöntem, ÇD destek bölgesinde tanımlı 2-B $x(n_1, n_2)$ dizisinin cepstrumunu tam olarak hesaplayan yinelemeli bir yapı kullanır. Eğer $x(n_1, n_2)$ dizisi minimum-fazlı değilse, bu durumda hesaplama için kullanılan yineleme işlemi sonsuza kadar sürer. Bu ise, arzu edilmeyen bir durumdur.

Bu bölümde önerilen yöntem, temelde 2-B ARMA modele ilişkin GİY işlevinin cepstrum yöntemini kullanarak çarpanlarına ayrılması fikrine dayandığından dolayı verilen 2-B veri kümesinin cepstrumunu hesaplamak yerine bu verinin GİY işlevine ilişkin cepstrum katsayılarının hesaplanmasına ihtiyaç vardır (Kızılkaya ve diğ., 2005b). 1-B durum ile karşılaştırıldığında (Kaderli ve diğ., 2000), 2-B durum için cepstrum hesabı biraz farklıdır. Bu farklılık, kestirim için kullanılan modelin temsil ettiği destek bölgesinden kaynaklanmaktadır. Buna göre, MA parametrelerinin kestiriminde kullanılacak olan cepstrum katsayılarının da ilgilenilen destek bölgesine karşı düşmesi gerekir. Bu düşünce ışığında, 2-B veri kümesine ilişkin cepstrum katsayılarının *MATLAB*® gösteriminde hesabı aşağıdaki adımlar türetilmiştir (Kızılkaya ve diğ., 2005b):

$$C_1 = F^{-1} \{ \ln(P_e(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})) \} \quad (4.4a)$$

$$C_2 = \text{real}\{C_1\} \quad (4.4b)$$

$$C_3 = \text{fftshift}\{C_2\} \quad (4.4c)$$

$$c_{m,n} = C_3(\text{fix}\{N_1/2\} + 1 : N_1, \text{fix}\{N_2/2\} + 1 : N_2) \quad (4.4d)$$

(4.4a)'daki $F^{-1}\{.\}$, 2-B ters HFD işlevini temsil etmektedir. (4.4b)'deki *real* fonksiyonu, ters HFD sonucunda elde edilen verinin gerçel kısmını üretir. (4.4c)'deki *fftshift* işlevi ise, (4.4b) ile elde edilen katsayılar kümesinin uzamsal olarak doğru konumlara kaydırılmasını sağlar. Böylece, her bir çeyrek-düzleme (toplam 4 adet çeyrek düzlem mevcuttur, Şekil 1.14) ilişkin cepstrum katsayılarının belirlenmesi sağlanır. Biçimi Şekil 2.1'de verilen ÇD destek bölgesine ait cepstrum katsayılarına $\{c_{m,n}\}$ ulaşmak için, (4.4c) ile elde edilen C_3 matrisinin hangi bileşenlerinin alınacağı (4.4d) eşitliğinde gösterilmiştir. (4.4d)'deki $fix\{N_1/2\} + 1$ ve $fix\{N_2/2\} + 1$ ifadeleri, C_3 matrisinin temsil ettiği 2-B katsayılar kümesinin orta noktasını verir. Bunun için kullanılan *fix* işlevi, $(N_1/2)$ ve $(N_2/2)$ ile elde edilen sayısal sonuçların tamsayı olmasını garanti eder (indis değerleri tamsayı olmak zorundadır). (4.4a) eşitliğindeki $P_e(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ terimi ise, 2-B veri kümesi $\{x(n_1, n_2)\}$ 'nin parametrik olmayan GİY kestirimine karşı düşer. Önerilen ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemde parametrik olmayan GİY kestirimi için, 2-B HFD yönteminden faydalanılmıştır. *MATLAB* gösteriminde $P_e(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 'nin hesabı, $|X|^2 / N_1 N_2$ işlem adımı ile edilir. Burada X , $(N_1 \times N_2)$ -noktalı $\{x(n_1, n_2)\}$ veri kümesinin $(N_1 \times N_2)$ -noktalı HFD'ne karşı düşer ve *MATLAB* gösteriminde $X = fft2(x, N_1, N_2)$ işlem adımı elde edilir (Kızılkaya ve diğ., 2005b).

Dikkat edilirse, 2-B veri kümesine ilişkin GİY işlevinin cepstrum katsayılarını hesaplamak için faz açma işlemine gerek yoktur: GİY işlevi $P_e(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, daima reel ve pozitif değerli olacağından dolayı, $\theta(\omega_1, \omega_2) = 0$ olacaktır.

Örnek olarak, (4.4)'de tanımlanan işlem adımlarını aşağıdaki gibi verilen bir 2-B veri üzerine uygulayalım ve (4.4) eşitliği ile tanımlanan ifadeleri adım adım elde edelim:

$$x = \begin{bmatrix} -0.5496 & 1.0464 & -0.3394 & 0.1712 & 0.1015 \\ -1.8211 & 0.9122 & 0.6063 & 1.1859 & -1.3331 \\ -0.2371 & -0.3528 & -0.5791 & 0.3956 & 0.6033 \\ -0.2122 & 0.3011 & 1.9564 & 0.2156 & 1.6434 \\ -1.2314 & -0.0054 & -0.3119 & -0.4939 & -0.7352 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} -0.6362 & 0.0086 & -0.0397 & -0.0397 & 0.0086 \\ -0.0394 & -0.2014 & 0.0613 & -0.2499 & -0.5130 \\ 0.0896 & 0.1320 & -0.1544 & -0.3836 & -0.0667 \\ 0.0896 & -0.0667 & -0.3836 & -0.1544 & 0.1320 \\ -0.0394 & -0.5130 & -0.2499 & 0.0613 & -0.2014 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -0.1544 & 0.1320 & \mathbf{0.0896} & -0.0667 & -0.3836 \\ 0.0613 & -0.2014 & \mathbf{-0.0394} & -0.5130 & -0.2499 \\ \mathbf{-0.0397} & \mathbf{0.0086} & \mathbf{-0.6362} & \mathbf{0.0086} & \mathbf{-0.0397} \\ -0.2499 & -0.5130 & \mathbf{-0.0394} & -0.2014 & 0.0613 \\ -0.3836 & -0.0667 & \mathbf{0.0896} & 0.1320 & -0.1544 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow n \\ \\ \end{matrix}$$

m

Sonuç olarak, 2-B veri kümesi x' e karşı düşen cepstrum katsayıları ilgili ÇD destek bölgesi için aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_{0,0} = -0.6362; \quad c_{0,1} = 0.0086; \quad c_{0,2} = -0.0397$$

$$c_{1,0} = -0.0394; \quad c_{1,1} = -0.2014; \quad c_{1,2} = 0.0613$$

$$c_{2,0} = 0.0896; \quad c_{2,1} = 0.1320; \quad c_{2,2} = -0.1544$$

4.4. 2-B ARMA Modelin MA Parametrelerinin Kestirimi

MA parametrelerinin kestirimini gerçeklemek amacıyla tasarlanan yöntem, kendi içerisinde

- Önerilen yöntem
- Önerilen yöntemin değişik durumu

şeklinde iki grupta ele alınmaktadır (Kızılkaya ve diğ., 2005b).

4.4.1. Önerilen Yöntem

Çok-boyutlu işaret işleme teorisinde çözümü hayli zor bir problem olan GİY işlevinin çarpanlarına ayrılması probleminin çözümüne sağladığı kolaylık dikkate alınarak, 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi için önerilen yöntemde cepstrum analiz tekniğinden yararlanılmıştır (Kızılkaya ve diğ., 2005b). Benzer yaklaşım, daha önce 1-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi için kullanılmıştır (Kaderli ve diğ., 2000).

MA parametrelerinin kestirimi için önerilen yöntem, 2-B ARMA model parametreleri ile bu modelin cepstrum katsayıları arasında oluşturulan özyineleme ilişkisini kullanmaktadır. Buna göre, 2-B ARMA sürece ilişkin kestirilen cepstrum katsayılarını ve AR parametrelerini türetilen denklem ifadelerinde kullanarak ÇD destek bölgesi ARMA modelin MA parametreleri yinelemeli olarak kestirilebilmektedir.

Sistem modellerine karşı düşen her bir transfer fonksiyonunun cepstrumu olmayabilir. 1-B sistemler için geçerli olan bu durum, 2-B işaret işleme teorisinde de geçerlidir. Buna göre 2-B ARMA modeli temsil eden $H(z_1, z_2)$ transfer fonksiyonuna ilişkin cepstrumun tanımlanabilmesi için, bu transfer fonksiyonunun doğal logaritmasına karşı düşen $\ln\{H(z_1, z_2)\}$ 'nin belirli bir yakınsaklık bölgesinde analitik olması gerekir. Eğer transfer fonksiyonu $H(z_1, z_2)$ minimum-fazlı ise bu durumda $\ln\{H(z_1, z_2)\}$, $|z_1| = |z_2| = 1$ ile birim küre üzerinde analitik bir fonksiyon olacaktır (Dudgeon, 1975). Böylece, 1-B durumda olduğu gibi, $\ln\{H(z_1, z_2)\}$ Laurent açılımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\ln\{H(z_1, z_2)\} = \ln\left\{ \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} - a_{0,0}} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (4.5)$$

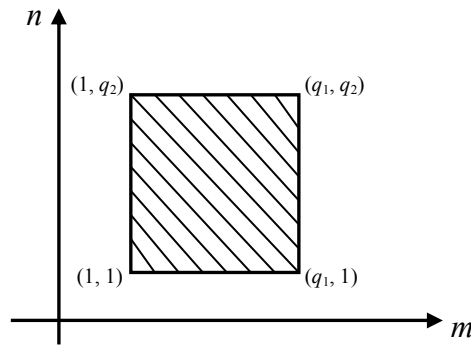
(4.5) ile tanımlanan ifade analitik olduğundan dolayı, her iki yanının türevi alınabilir. İşlemlerde kolaylık olması açısından $z_1^{-1} = u$ ve $z_2^{-1} = v$ dönüşümü yapılır:

$$\ln\left\{ \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} u^h v^i}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} u^k v^l - a_{0,0}} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} u^m v^n \quad (4.6)$$

ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi, (4.6) eşitliği esas alınarak üç ayrı bölge için türetilen denklemlerle gerçekleştirilmektedir.

4.4.1.1. $1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi

Şekil 4.1'de tanımlanan bölge için MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilecektir.



Şekil 4.1: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $(1 \leq m \leq q_1)$ ve $(1 \leq n \leq q_2)$ aralıkları için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.

(4.6) ifadesinin her iki yanının ilk olarak u 'ya göre türevi alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} mc_{m,n} u^{m-1} v^n = \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} hb_{h,i} u^{h-1} v^i}{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} u^h v^i} - \frac{\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} ka_{k,l} u^{k-1} v^l}{\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} u^k v^l} \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. (4.7)'de paydalar eşitlenip içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} mc_{m,n} b_{h,i} a_{k,l} u^{h+k+m-1} v^{i+l+n} \\ &= \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} hb_{h,i} a_{k,l} u^{h+k-1} v^{i+l} - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} ka_{k,l} b_{h,i} u^{h+k-1} v^{i+l} \end{aligned} \quad (4.8)$$

ifadesine ulaşılır. Son olarak, (4.8) eşitliğinin her iki yanının v 'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} (i+l+n) mc_{m,n} b_{h,i} a_{k,l} u^{h+k+m-1} v^{i+l+n-1} \\ &= \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} (i+l) hb_{h,i} a_{k,l} u^{h+k-1} v^{i+l-1} - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} (i+l) ka_{k,l} b_{h,i} u^{h+k-1} v^{i+l-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) eşitliğinin her iki yanındaki üsleri eşit olan u ve v katsayıları birbirine eşlenirse, 2-B cepstrum katsayıları olarak tanımlanan $c_{m,n}$ için

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \frac{1}{mna_{0,0}b_{0,0}} \left\{ \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^n hn(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} knc_{k,l} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s} - \sum_{k=1}^{m-1} knc_{k,n} \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ifadesine ulaşılır. MA parametrelerini $\{b_{m,n}\}$ elde etmek için (4.10)'daki eşitlik, Bölüm 2'de verilen (V2) varsayımını dikkate alarak $h = m$ ve $i = n$ için yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \frac{1}{mn} \left\{ mn(b_{m,n} - a_{m,n}) + \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} hn(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) \right. \\ & \quad + \sum_{h=1}^{m-1} hn(b_{h,n} a_{m-h,0} - a_{h,n} b_{m-h,0}) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} knc_{k,l} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s} \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{m-1} knc_{k,n} \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

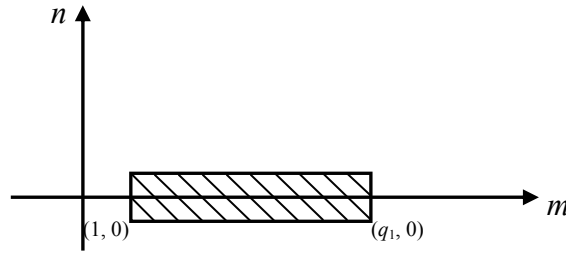
(4.11) eşitliğinden $b_{m,n}$ terimi çekilirse, $1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralıkları için 2-B ARMA modelin MA parametrelerini kestirmek amacıyla kullanılacak olan yinelemeli eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}
b_{m,n} = & c_{m,n} + a_{m,n} - \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} h(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) \right. \\
& + \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,n} a_{m-h,0} - a_{h,n} b_{m-h,0}) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} kc_{k,l} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s} \\
& \left. - \sum_{k=1}^{m-1} kc_{k,n} \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Şekil 2.1'deki sıralama düzenine göre kestirim işleminin tamamlanabilmesi ve (4.12) ile türetilen denklemde parametrelerin yinelemeli kestirimi için ($1 \leq m \leq q_1, n = 0$) ve ($m = 0, 1 \leq n \leq q_2$) aralıklarındaki MA parametrelerinin önceden hesaplanmış olması gerekir.

4.4.1.2. $1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi

Şekil 4.2'deki bölgeyi tanımlayan MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilecektir.



Şekil 4.2: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ aralığı için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.

Bunun için, (4.6) denkleminin her iki yanının u 'ya göre türevi alınır. Türev işlemi sonucunda, daha önce (4.7) ve (4.8) ile verilen eşitliklere ulaşılır. (4.8) eşitliğinin her iki yanındaki üsleri eşit olan u ve v katsayıları birbirine eşlenirse, (V2) varsayımını göz önüne alarak 2-B cepstrum katsayıları olarak tanımlanan $c_{m,n}$ için (4.10)'daki ifadeye benzer bir özyinelemeli denkleme ulaşılır:

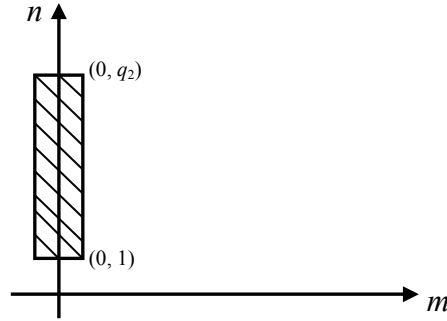
$$\begin{aligned}
c_{m,n} = & \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^n h(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} kc_{k,l} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s} \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{m-1} kc_{k,n} \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse, (4.10)'dan farklı olarak (4.13)'deki terimlerde n çarpanı ortadan kalkmıştır. İlgili MA parametrelerini $\{b_{m,n}\}$ elde etmek için (4.13)'deki birinci toplam teriminde $h = m$ ve $i = n$ için düzenleme yapılır ve $b_{m,n}$ terimi çekilirse, $1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ için 2-B ARMA modelin MA parametrelerini hesaplayan yinelemeli denkleme ulaşılır:

$$b_{m,0} = c_{m,0} + a_{m,0} - \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,0} a_{m-h,0} - a_{h,0} b_{m-h,0}) - \sum_{k=1}^{m-1} k c_{k,0} \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\} \quad (4.14)$$

4.4.1.3. $m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ tanım aralığı için MA parametrelerinin kestirimi

Şekil 4.3'deki bölgeyi tanımlayan MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilecektir.



Şekil 4.3: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin, $m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı için kestirimi yapılacak MA parametrelerinin 2-B düzlemde tanımlı olduğu bölge.

(4.6) ifadesinin her iki yanının ilk olarak v 'ye göre türevi alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n c_{m,n} u^m v^{n-1} = \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} i b_{h,i} u^h v^{i-1}}{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} u^h v^i} - \frac{\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} l a_{k,l} u^k v^{l-1}}{\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} u^k v^l} \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir. (4.15)'de paydalar eşitlenip içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} n c_{m,n} b_{h,i} a_{k,l} u^{h+k+m} v^{i+l+n-1} \\ & = \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} i b_{h,i} a_{k,l} u^{h+k} v^{i+l-1} - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} l a_{k,l} b_{h,i} u^{h+k} v^{i+l-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

ifadesine ulaşılır. (4.16) eşitliğinin her iki yanındaki üsleri eşit olan u ve v katsayıları birbirine eşlenirse, (V2) varsayımını dikkate alarak 2-B cepstrum katsayıları olarak tanımlanan $c_{m,n}$ için

$$c_{m,n} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{h=0}^m \sum_{i=1}^n i (b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^n l c_{k,l} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s} \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^{n-1} l c_{m,l} \sum_{s=0}^{n-l} b_{0,s} a_{0,n-l-s} \right\} \quad (4.17)$$

eşitliği elde edilir. İlgili MA parametrelerini elde etmek amacıyla (4.17) ifadesindeki birinci toplam teriminde $h = m$ ve $i = n$ için düzenleme yapılır ve $b_{m,n}$ terimi çekilirse, $m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ için 2-B ARMA modelin MA parametrelerini hesaplayan özyinelemeli denkleme ulaşılır:

$$b_{0,n} = c_{0,n} + a_{0,n} - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} i (b_{0,i} a_{0,n-i} - a_{0,i} b_{0,n-i}) - \sum_{l=1}^{n-1} l c_{0,l} \sum_{s=0}^{n-l} b_{0,s} a_{0,n-l-s} \right\} \quad (4.18)$$

Sonuç olarak, verilen 2-B veri kaydı için kestirilen AR parametrelerini ve cepstrum katsayılarını (4.12), (4.14), ve (4.18) denklemlerinde kullanarak ÇD destek bölgesi (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirim işlemi tamamlanmış olur.

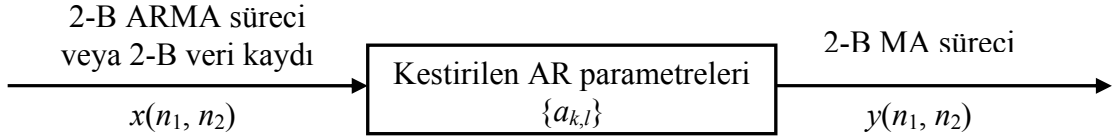
4.4.2. Önerilen Yöntemin Değişik Durumu

Türetilen (4.12), (4.14) ve (4.18) denklemlerinde de görüldüğü üzere, 2-B ARMA modelin MA parametrelerini kestirmek amacıyla önerilen yöntemin başarımı, AR parametrelerinin ve cepstrum katsayılarının kestirim doğruluğuna bağlıdır.

Cepstrum katsayılarının kestirimi için periodogram tekniğinin kullanımı, bu yöntemin sebep olabileceği yumuşatma etkisinden dolayı özellikle dar-bantlı ARMA süreçlerin tanılanması ve keskin tepelerden oluşan izgelere sahip süreçlerin modellenmesinde MA parametrelerinin kestirim doğruluğunun azalmasına neden olabilir. Bu tip süreçler için ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin kestiriminde meydana gelebilecek olumsuzluğun etkisini en aza indirmek amacıyla, doğrudan doğruya ARMA sürecin cepstrumunu hesaplamak yerine MA sürecin cepstrumunun hesaplanması tercih edilebilir. Benzer yaklaşım, daha önce Kaderli ve diğ., (2000) tarafından 1-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestiriminde de kullanılmıştır.

Buna göre, önerilen yöntemde yapılan değişiklik aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Verilen 2-B veri kaydı, kestirilen AR parametreleri $\{a_{k,l}\}$ ile ters süzgeçlenerek MA süreci elde edilir. Bu işlem adımı, aşağıdaki blok diyagramı ile ifade edilmeye çalışılmıştır:



Şekil 4.4: MA süreç üretiminin blok diyagramı.

Şekil 4.4 ile anlatılmak istenen aslında analitik olarak

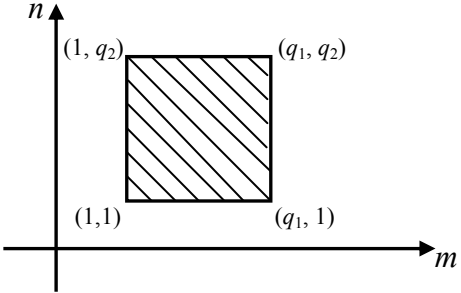
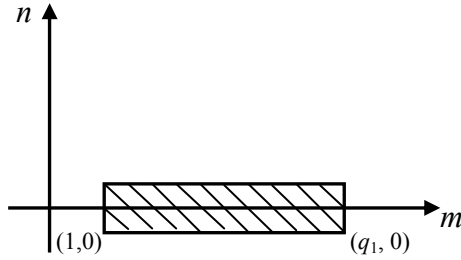
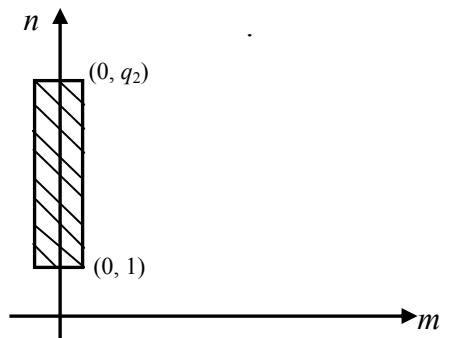
$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} x(n_1 - k, n_2 - l) \quad (4.19)$$

işlemine eşdeğerdir. Burada $\{a_{k,l}\}$, kestirilen AR parametrelerini göstermektedir.

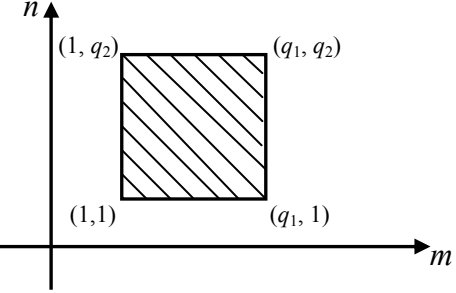
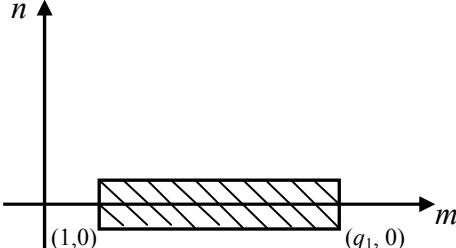
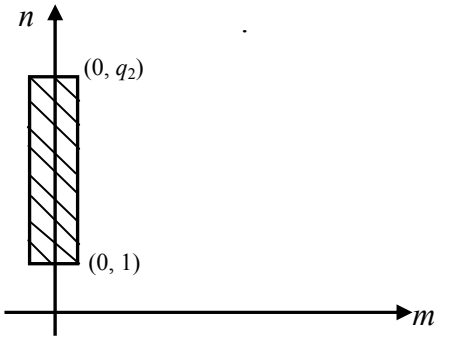
- (4.4) ile verilen işlem adımlarında, ARMA süreç örneklerinin $\{x(n_1, n_2)\}$ yerine (4.19) eşitliği ile üretilen MA süreç örneklerini $\{y(n_1, n_2)\}$ kullanarak cepstrum katsayılarının kestirimi gerçekleştirilir.
- (4.12), (4.14), ve (4.18) denklemlerinde $a_{0,0} = 1$ ve $(m, n) \neq (0,0)$ için $a_{m,n} = 0$ alarak, ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir.

Gözlem verisi $x(n_1, n_2)$ 'yi ve MA süreç örnekleri $y(n_1, n_2)$ 'yi kullanarak gerçekleştirilen MA parametre kestirim adımlarının tümü, önerilen yöntem ve bu yöntemin değişik durumu için Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de özetlenmiştir. Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'deki $c_{i,j}^x$ ve $c_{i,j}^y$ terimleri, sırasıyla gözlem verisi $x(n_1, n_2)$ ve MA süreci $y(n_1, n_2)$ örneklerinden hesaplanan cepstrum katsayılarını temsil etmektedir.

Tablo 4.1: Önerilen yöntem için; $(1 \leq m \leq q_1 ; 1 \leq n \leq q_2)$, $(1 \leq m \leq q_1 ; n = 0)$ ve $(m = 0 ; 1 \leq n \leq q_2)$ tanım aralıklarına karşı düşen MA parametrelerinin kestirim aşamaları.

Kestirilecek MA parametrelerinin tanımladığı bölge	Kestirim işlemini gerçekleştiren denklem ifadeleri
<p style="text-align: center;">$1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı</p> 	$b_{m,n} = c_{m,n}^x + a_{m,n}$ $- \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} h(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) \right.$ $+ \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,n} a_{m-h,0} - a_{h,n} b_{m-h,0})$ $- \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} k c_{k,l}^x \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s}$ $\left. - \sum_{k=1}^{m-1} k c_{k,n}^x \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\}$
<p style="text-align: center;">$1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ aralığı</p> 	$b_{m,0} = c_{m,0}^x + a_{m,0}$ $- \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,0} a_{m-h,0} - a_{h,0} b_{m-h,0}) \right.$ $\left. - \sum_{k=1}^{m-1} k c_{k,0}^x \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\}$
<p style="text-align: center;">$m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı</p> 	$b_{0,n} = c_{0,n}^x + a_{0,n}$ $- \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} i(b_{0,i} a_{0,n-i} - a_{0,i} b_{0,n-i}) \right.$ $\left. - \sum_{l=1}^{n-1} l c_{0,l}^x \sum_{s=0}^{n-l} b_{0,s} a_{0,n-l-s} \right\}$

Tablo 4.2: Önerilen yöntemin değişik durumu için; $(1 \leq m \leq q_1 ; 1 \leq n \leq q_2)$, $(1 \leq m \leq q_1 ; n = 0)$ ve $(m = 0 ; 1 \leq n \leq q_2)$ tanım aralıklarına karşı düşen MA parametrelerinin kestirim aşamaları.

Kestirilecek MA parametrelerinin tanımladığı bölge	Kestirim işlemini gerçekleştiren denklem ifadeleri
<p style="text-align: center;">$1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı</p> 	$b_{m,n} = c_{m,n}^y$ $- \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} h(b_{h,i} a_{m-h,n-i} - a_{h,i} b_{m-h,n-i}) \right.$ $+ \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,n} a_{m-h,0} - a_{h,n} b_{m-h,0})$ $- \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} k c_{k,l}^y \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{n-l} b_{r,s} a_{m-k-r,n-l-s}$ $\left. - \sum_{k=1}^{m-1} k c_{k,n}^y \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\}$
<p style="text-align: center;">$1 \leq m \leq q_1$ ve $n = 0$ aralığı</p> 	$b_{m,0} = c_{m,0}^y$ $- \frac{1}{m} \left\{ \sum_{h=1}^{m-1} h(b_{h,0} a_{m-h,0} - a_{h,0} b_{m-h,0}) \right.$ $\left. - \sum_{k=1}^{m-1} k c_{k,0}^y \sum_{r=0}^{m-k} b_{r,0} a_{m-k-r,0} \right\}$
<p style="text-align: center;">$m = 0$ ve $1 \leq n \leq q_2$ aralığı</p> 	$b_{0,n} = c_{0,n}^y$ $- \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} i(b_{0,i} a_{0,n-i} - a_{0,i} b_{0,n-i}) \right.$ $\left. - \sum_{l=1}^{n-1} l c_{0,l}^y \sum_{s=0}^{n-l} b_{0,s} a_{0,n-l-s} \right\}$

4.5. Önerilen Yöntemin Özeti ve Yöntem Hakkındaki Düşünceler

ÇD destek bölgesi (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi amacıyla önerilen ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntem, aşağıdaki kestirim adımlarından oluşmaktadır:

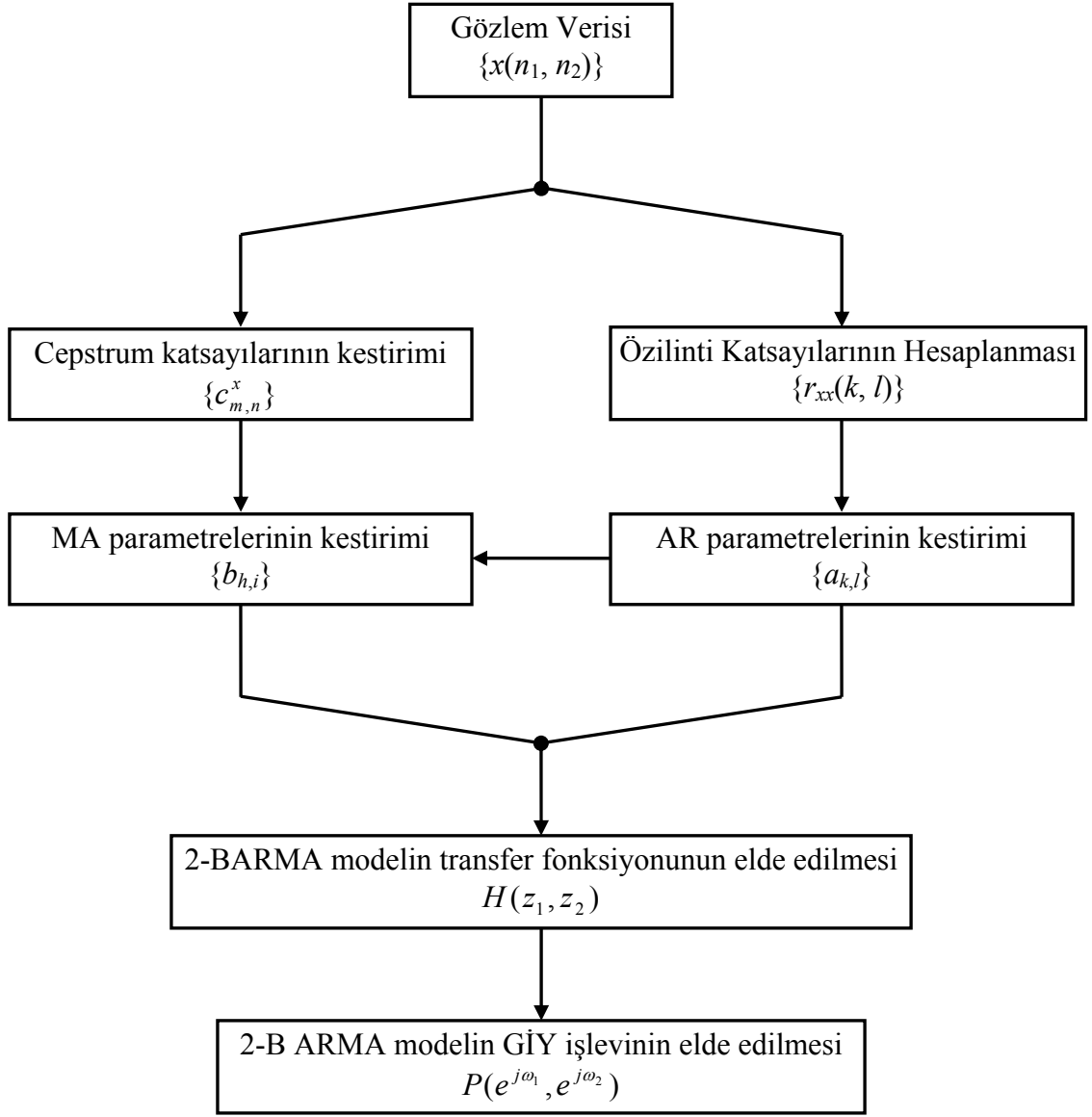
Adım 1: Zhang ve diğ., (1991)'nin yeni formda türetmiş olduğu DYW denklemlerinin çözümü ile, ARMA modelin AR parametreleri $\{a_{m,n}; 0 \leq m \leq p_1, 0 \leq n \leq p_2, (m, n) \neq (0, 0)\}$ kestirilir.

Adım 2: (4.4)'de verilen işlem adımlarını kullanarak 2-B veri kaydına ilişkin cepstrum katsayıları kestirilir.

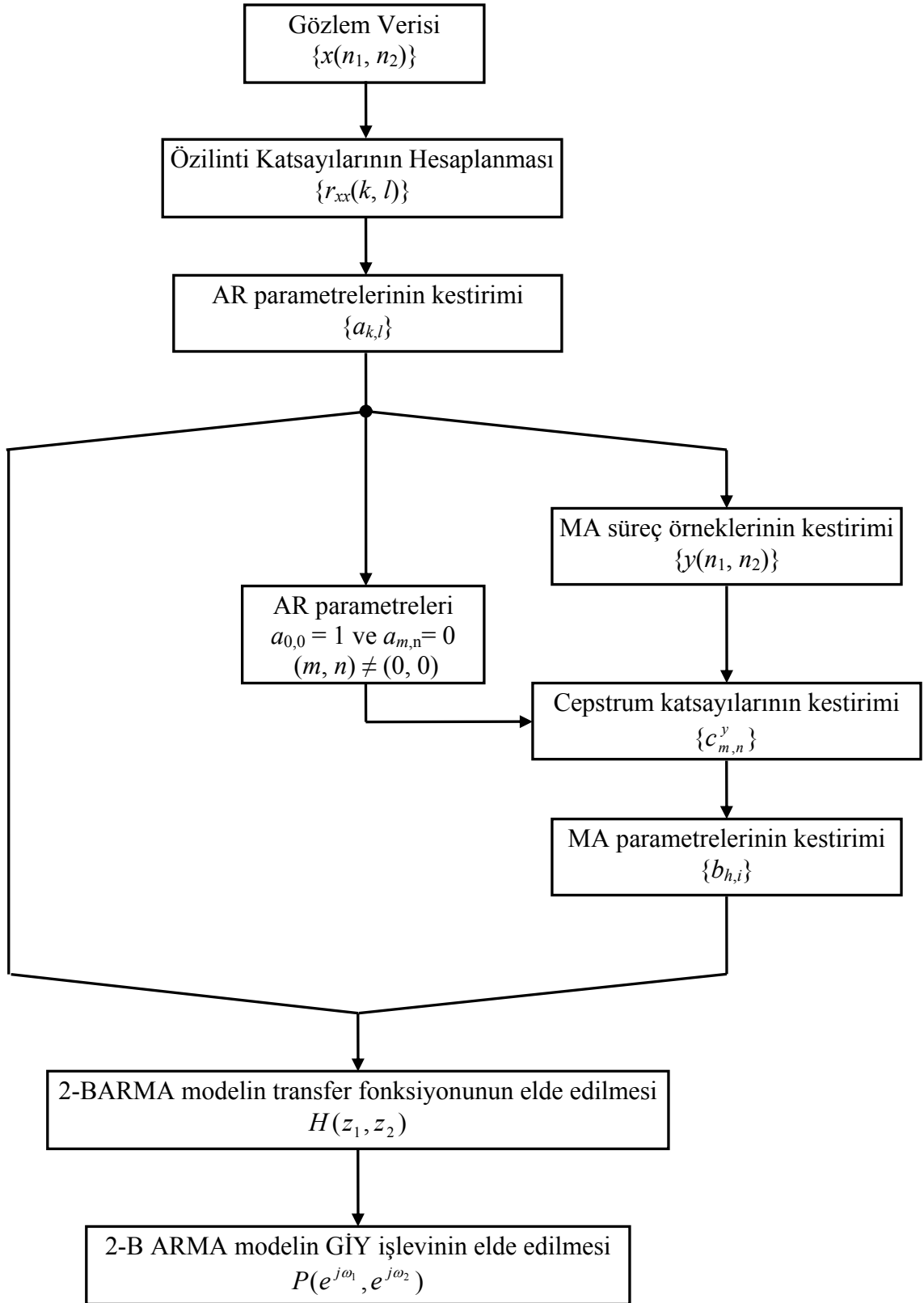
Adım 3: Adım 1 ve Adım 2'de elde edilen AR parametrelerini ve cepstrum katsayılarını sırasıyla (4.14), (4.18) ve (4.12) eşitliklerinde kullanarak, Şekil 2.1'deki sıralama düzenine göre 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin $\{b_{m,n}; 0 \leq m \leq q_1, 0 \leq n \leq q_2, (m, n) \neq (0, 0)\}$ kestirimi gerçekleştirilir. Yani yinelemeli olarak MA parametrelerinin kestirilebilmesi için, ilk olarak (4.14) ve (4.18) eşitlikleri ile $(1 \leq m \leq q_1, n = 0)$ ve $(m = 0, 1 \leq n \leq q_2)$ aralıklarına ilişkin MA parametrelerinin önceden hesaplanmış olması gerekir. Daha sonra bu değerleri de kullanarak (4.12) eşitliği ile, $1 \leq m \leq q_1$ ve $1 \leq n \leq q_2$ için MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir. Böylece, ÇD destek bölgesine sahip 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirim işlemi tamamlanmış olur.

Adım 4: 2-B veri kaydının dar-bantlı ARMA süreçten üretilmiş olması veya izgesinin keskin tepeler içermesi durumunda, Adım 2'de doğrudan ARMA sürecin cepstrumunu hesaplamak yerine MA sürecin cepstrumu hesaplanabilir. MA sürecin örnekleri $\{y(n_1, n_2); 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$, gözlem verisine ilişkin örneklerden $\{x(n_1, n_2)\}$ yararlanılarak Adım 1'de kestirilen AR parametrelerinin (4.19) eşitliğinde kullanımı ile üretilir. Sonuç olarak sırasıyla (4.14), (4.18) ve (4.12) eşitliklerinde, AR parametrelerini $a_{0,0} = 1$ dışında sıfır alarak ve MA süreç örneklerine ilişkin hesaplanan cepstrum katsayılarını kullanarak 2-B gözlem verisi $\{x(n_1, n_2)\}$ 'yi modellemek amacıyla kullanılan ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirim işlemi önerilen algoritmanın değişik durumu için gerçekleştirilmiş olur.

Bu bölümde önerilen yöntemin kendisi ve değişik durumu için kestirim adımlarının özetlendiği akış diyagramları, sırasıyla Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 da verilmiştir.



Şekil 4.5: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemin akış diyagramı.



Şekil 4.6: ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen ARMA-Cepstrum öz yineleme yaklaşımına dayalı yöntemin değişik durumu için akış diyagramı.

5. ÖNERİLEN YÖNTEMLERİN PARAMETRE KESTİRİM BAŞARIMLARINI DEĞERLENDİRMEK İÇİN KULLANILAN KARŞILAŞTIRMA ÖLÇÜTLERİ

Bölüm 3 ve Bölüm 4’de önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını sınamak ve literatürdeki ARMA parametre kestirim yöntemi (Zhang, 1991) ile karşılaştırmasını yapmak amacıyla çeşitli başarımlar ölçütleri kullanılmıştır. Bu başarımlar ölçütleri;

- İncelenen model yapılarına ilişkin gerçek ve kestirilen GİY işlevleri arasındaki benzerliğin ölçüsünü veren Itakura-Saito (I-S) mesafe ölçütü,
- Benzetimlerde kullanılan modellerin gerçek ve kestirilen parametreleri arasındaki benzerliğin ölçüsünü veren norm değerleri; L_∞ -normu, L_2 -normu, L_1 -normu, ve *Frobenius*-normu,
- Veri boyutunun parametre ve izge kestirimleri üzerindeki etkisi,
- Gerçek ve kestirilen model parametrelerinden elde edilen GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş yüzey eğrileri,

şeklinde sınıflandırılmıştır. Benzer ölçütlerden bazıları, kestirilen parametrelerin ve bu parametrelerden elde edilen GİY işlevlerinin karşılaştırılması amacıyla daha önce Kayran ve diğ., (1998) tarafından da kullanılmıştır.

5.1. Itakura-Saito Mesafe Ölçütü

Itakura-Saito (I-S) mesafe ölçütü, iki GİY fonksiyonu arasındaki benzerliğin bir ölçüsünü verir (El-Jaroudi ve diğ., 1991, Wei ve diğ., 2000). P_G ve P_K sırasıyla, incelenen modele ilişkin gerçek ve kestirilen GİY fonksiyonlarını temsil etsin. Bu durumda, 2-B ayrık-zamanlı işaret ve sistemlerin gerçek ve kestirilen GİY fonksiyonları için I-S mesafe ölçüsünün değeri

$$d_{I-S}(P_K, P_G) = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} \left(\frac{P_G(i, j)}{P_K(i, j)} - \log \left(\frac{P_G(i, j)}{P_K(i, j)} \right) \right) - 1 \quad (5.1)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada gerçek ve kestirilen güç izgeleri, $(M_1 \times M_2)$ frekans noktaları için tanımlıdır. Bu mesafe değeri, daima pozitifdir ve ancak tüm frekans

bölgesinde $P_K = P_G$ olması durumunda sifıra eşittir. Yani $P_K = P_G$ için, (5.1) ile tanımlanan mesafe ölçüsü en küçük değerlerini alır. Bu değerden sapma ne kadar fazla ise, gerçek ve kestirilen izgeler arasındaki farklılıklar da o derece büyük olur. Bu ise, kestirilen izgeleri oluşturan model parametrelerinin kestirim doğruluğunun düşük olması ve dolayısıyla önerilen yöntemin parametre kestirim başarımının iyi olmadığı anlamına gelir.

5.2. Gerçek ve Kestirilen AR ve MA Katsayı Matrislerine İlişkin Fark Matrislerinin Normu

Bir vektörün normu, onun büyüklüğünün bir ölçüsüdür ve bu büyüklük her bir vektör değerinin karelerinin toplamının karekökü sonucunda elde edilen değere eşittir. Ancak vektörden farklı olarak, bir matris için tek bir norm tanımı yoktur: birçok norm tanımı yapılabilir. Literatürde yaygın olarak kullanılan norm tanımlarından L_∞ -normu, L_2 -normu, L_1 -normu, ve *Frobenius*-normu, gerçek ve kestirilen AR ve MA parametrelerinin farkını alarak elde edilen katsayı matrislerinin norm değerlerini hesaplamak için kullanılmıştır. Burada amaç, gerçek ve kestirilen parametre değerleri arasındaki benzerliğin ölçüsünü belirlemektir. Sonuçta, norm değerleri ne kadar küçükse parametre kestirimlerini gerçekleştiren yöntemin başarımı o derece iyidir kararına varılır. Bu amaç için kullanılan normlara ilişkin tanımlar, aşağıda verilmiştir (Meyer, 2000):

F , gerçek ve kestirilen AR veya MA katsayılarının farkını alarak elde edilen fark matrisi olsun. Bu durumda,

L_∞ -normu: F matrisinin mutlak değerinin en büyük satır toplamı olarak tanımlanır ve *MATLAB*® gösteriminde F matrisinin L_∞ -normu'nun hesabı,

$$\max(\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{F}^T)))$$

işlem adımı ile gerçekleştirilir.

L_2 -normu: F matrisinin en büyük tekil değeri olarak tanımlanır. *MATLAB*® gösteriminde F matrisinin L_2 -normu,

$$\max(\text{svd}(\mathbf{F}))$$

işlem adımı ile hesaplanır. Bir matrisin tekil değerleri, matrisin evriği (transpose) ile kendisinin çarpımından üretilen yeni matrisin öz değerlerinin kareköküne karşı düşer.

L_1 -normu: F matrisinin mutlak değerinin en büyük sütün toplamı olarak tanımlanır ve *MATLAB*® gösteriminde F matrisinin L_1 -normu'nun hesabı,

$$\max(\text{sum}(\text{abs}(F)))$$

işlem adımı ile gerçekleştirilir.

***Frobenius*-normu:** F matrisinin evriği ile kendisinin çarpımından elde edilen yeni matrisin ana köşegenindeki değerlerin toplamının kareköküne karşı düşer. *MATLAB*® gösteriminde

$$\text{sqrt}(\text{sum}(\text{diag}(F^T F)))$$

işlem adımı ile F matrisinin *Frobenius*-normu elde edilir.

5.3. Veri Boyutunun Parametre ve İzge Kestirimleri zerindeki Etkisi

Model parametrelerinin kestirimde kullanılan veri kaydının boyutu, parametre ve dolayısıyla izge kestirimlerinin doğruluğunu etkileyen en önemli unsurlardan birisidir. Verilen herhangi bir veri kümesini karakterize etmek amacıyla kullanılan modelin parametrelerini kestirmek için önerilen yöntemin tutarlılığını ve etkinliğini kestirimde kullanılan veri kümesinin boyutuna göre değerlendirmek, yöntemin parametre kestirim başarımını sınamak açısından önemlidir.

Önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını değerlendirmek amacıyla bu tez çalışmasında gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde, $(N_1 \times N_2) = (32 \times 32)$ ve $(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ olmak üzere iki farklı veri boyutu kullanılmıştır.

5.4. İzgelere İlişkin Genlik Görüntüleri ve Eşyüzey Eğrileri

Benzetimlerde kullanılan model örneklerine ilişkin GİY fonksiyonları, (2.3) eşitliği ile verilen ifadenin σ_w^2 'ye normalize edilmesiyle elde edilebilir. İncelenen her bir model için gerçek ve kestirilen parametreleri normalize GİY fonksiyonlarında yerine koyarak, her bir model için gerçek ve kestirilen GİY işlevlerine ulaşılır. Gerçek ve kestirilen GİY işlevlerinin birbirine olan benzerliğini görsel olarak değerlendirmek amacıyla, bu izgelere ilişkin genlik görüntülerinden ve eş-yüzey eğrilerinden faydalanılmıştır.

6. BİLGİSAYAR BENZETİMLERİ: ÖNERİLEN YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI ve SONUÇLARIN YORUMLANMASI

6.1. Giriş

Bölüm 5'te sunulan başarımlar ölçütleri üzerinden, önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını değerlendirmek ve önerilen her bir yöntemin literatürdeki 2-B ARMA parametre kestirim yöntemi (Zhang, 1991) ile karşılaştırmasını yapmak amacıyla üç farklı ARMA model için bilgisayar benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Bu model örnekleri,

- Alçak geçiren yapıya sahip geniş-bantlı ARMA(1, 1,1,1) modeli,
- Yüksek geçiren yapıya sahip dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli,
- Karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli

olarak seçilmiştir. Bilgisayar benzetimlerinde, bu üç model tipine ilişkin parametrelerin kestirimi ve bu parametrelere karşı düşen GİY işlevlerinin farklı veri boyutlarına göre elde edilmesi problemi incelenmektedir. Bunun için ilk olarak incelenen modellerin parametrelerini (2.2) eşitliğinde kullanarak, her bir modele karşı düşen ARMA rastgele süreç örneklerinin üretimi gerçekleştirilmiştir. İncelenen model türlerine göre bu süreçler; geniş-bantlı, dar-bantlı, ve karma-tip ARMA süreçler olarak adlandırılmıştır. Bu süreçlere ilişkin $(N_1 \times N_2)$ boyutlu $\{x(n_1, n_2)\}$ veri kümeleri, $(N_1, N_2) = (32, 32)$ ve $(N_1, N_2) = (64, 64)$ seçilerek ayrı ayrı $0 \leq n_1, n_2 \leq 31$ ve $0 \leq n_1, n_2 \leq 63$ için her bir bilgisayar koşumunda (2.2)'deki ifade ile yapay olarak üretilmiştir.

Önerilen yöntemlerin yapısından dolayı her bir süreç için veri kayıtları, kendi içerisinde karşılaştırması yapılacak olan yöntemler için ayrı ayrı üretilmiştir. Yani, Bölüm 3'te sunulan yöntem ile Zhang (1991) yönteminin karşılaştırılması amacıyla yukarıda bahsedilen süreçlerin her birinden rastgele üretilen süreç örnekleri bu yöntemlere eşzamanlı olarak uygulanmıştır. Benzer şekilde, Bölüm 4'te verilen yöntem ile Zhang (1991) yöntemini karşılaştırmak için, süreçlerin her birinden yeniden üretilen veriler bu yöntemlere eşzamanlı olarak uygulanmıştır. Karşılaştırması yapılan yöntemlere göre her bir model için en son ulaşılan parametre değerleri, yöntemlerin birbirinden bağımsız

100 koşumuyla kestirilen parametre değerlerinin ortalamasını alarak elde edilmiştir. Kestirimlerin tutarlılığını gormek amacıyla, 100 bilgisayar koşumundan elde edilen her bir parametrenin standart sapması da ayrıca hesaplatılmıştır.

Karşılaştırmalar için yontemler arasında uyumluluğun sağlanması açısından, Zhang (1991) yontemi ile elde edilen MA parametreleri, kestirilen $b_{0,0}$ değeri ile normalize edilmiştir. Bolyece, Zhang (1991) ile elde edilen $b_{0,0}$ parametresinin yeni değeri 1'e eşitlenmiştir. Hatırlanacağı uzere onerilen yontemler, $b_{0,0} = 1$ varsayımı altında turetilmiştir. Bolum 4'de sunulan yontem ile Zhang (1991)'in yonteminde AR parametrelerinin kestirimi için aynı yol izlendiğinden dolayı, bu yontemler için karşılaştırma işlemi yalnızca kestirilen MA parametreleri uzzerinden yapılmıştır. Ayrıca karşılaştırmalara, Bolum 4'de onerilen yontemin değişik durumu ile elde edilen sonuçlar da dahil edilmiştir.

Gerçek ve kestirilen model parametrelerini (2.3) eşitliğinde kullanarak elde edilen GİY fonksiyonları, BGG varyansı σ_w^2 'ye normalize edilerek çizdirilmiştir. Gerçek ve kestirilen GİY fonksiyonlarının Bolum 5'te tanımlanan I-S mesafe ölçütüne göre karşılaştırılabilmesi için frekans noktalarının sayısına karşı dufen M_1 ve M_2 'nin değerlerine ihtiyaç vardır. Burada incelenen model tiplerinin tümünde normalize GİY işlevleri, $[-\pi, \pi]$ frekans aralığında $\pi/180$ aralıklarla oneklenerek çizdirilmiştir. Buna göre, incelenen her bir modele ilişkin gerçek ve kestirilen izgelerin çizdirilmesi için $(M_1 \times M_2) = (361 \times 361)$ frekans noktası kullanılmıştır.

Bilgisayar benzetimlerinde, yontemlerin parametre kestirim başarımlarını sınamak amacıyla kullanılan ÇD destek bolyeli ARMA modellere ilişkin transfer fonksiyonları

$$H_{GB}(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.22 \\ 0.28 & 0.355 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.13 \\ -0.05 & -0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \end{bmatrix}} \quad (6.1)$$

$$H_{DB}(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.13 \\ -0.125 & 0.193 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & z_1^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.17 \\ 0.2 & -0.28 \\ -0.16 & 0.14 \\ 0.075 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \end{bmatrix}} \quad (6.2)$$

$$H_{KT}(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{[1 \quad z_1^{-1} \quad z_1^{-2}] \begin{bmatrix} 1 & 0.20 & 0.23 \\ 0.15 & 0.18 & 0.16 \\ 0.175 & 0.24 & 0.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ z_2^{-2} \end{bmatrix}}{[1 \quad z_1^{-1} \quad z_1^{-2}] \begin{bmatrix} 1 & 0.15 & 0.06 \\ 0.08 & -0.10 & 0.053 \\ -0.05 & 0.13 & 0.115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ z_2^{-2} \end{bmatrix}} \quad (6.3)$$

eşitlikleriyle verilmektedir: (6.1) ve (6.2) sırasıyla, alçak-geçiren ve yüksek geçiren yapılara sahip geniş-bant ve dar-bant ARMA süreçleri üretimde kullanılan ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modellerin transfer fonksiyonlarıdır. (6.3)'deki transfer fonksiyonu $H_{KT}(z_1, z_2)$ ise, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modelini temsil etmektedir. Bilgisayar benzetimlerinden de görüleceği üzere, (6.3) ile verilen modelin tanımladığı süreç hem geniş-bantlı ve hem de dar-bantlı ARMA süreçlerin bir bileşimi olarak yorumlanabilir.

(6.1)-(6.3) eşitliklerinde tanımlanan modellerin parametrelerini kestirmek amacıyla gerçekleştirilen bilgisayar benzetimleri, kendi içerisinde karşılaştırması yapılacak olan yöntemler için ayrı ayrı incelenmiştir.

6.2. Bölüm 3'te Önerilen Yöntem ve Zhang (1991) Yöntemi ile Gerçekleştirilen Bilgisayar Benzetimleri

Bölüm 3'te önerilen yöntem ile parametre kestirimlerini gerçekleyebilmek için, öncelikle EAR model mertebelerinin belirlenmesi gerekir. Aynı formüller yapıyı farklı modeller için $(N_1 \times N_2) = (60 \times 60)$ veri boyutuyla kullanarak daha önce gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde (Kızılkaya ve diğ., 2003a; Kızılkaya ve diğ., 2003c), EAR model mertebeleri keyfi olarak seçilmişti. Bu çalışmada ise optimum EAR model mertebeleri L_1 ve L_2 , tanımı (5.1)'de verilen I-S mesafe ölçütüne göre deneysel olarak belirlenmiştir. Bu amaçla, L_1 ve L_2 mertebeleri için bir değer aralığı seçilmiştir: $(L_{1min}, L_{2min}) - (L_{1max}, L_{2max})$. (L_{1min}, L_{2min}) ve (L_{1max}, L_{2max}) sırasıyla, en küçük ve en büyük L_1 ve L_2 değerlerini temsil etmektedir. Bölüm 3'te ifade edildiği gibi, EAR model için seçilebilecek en küçük mertebeler $(L_{1min}, L_{2min}) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ 'dir. L_1 ve L_2 için en büyük değerler ise, deneysel olarak $(L_{1max}, L_{2max}) = (3L_{1min}, 3L_{2min})$ seçilmiştir. Sonuç olarak $(L_{1min}, L_{2min}) - (L_{1max}, L_{2max})$ değer aralığında en küçük I-S mesafe ölçüsünü veren L_1 ve L_2 değerleri, optimum değerler olarak alınmıştır. Bu optimum değerleri belirlemek amacıyla, öncelikle verilen değer aralığındaki L_1 ve L_2 'nin her bir değeri için I-S mesafe ölçüleri hesaplatılmış ve bu değerler i değişkeninin

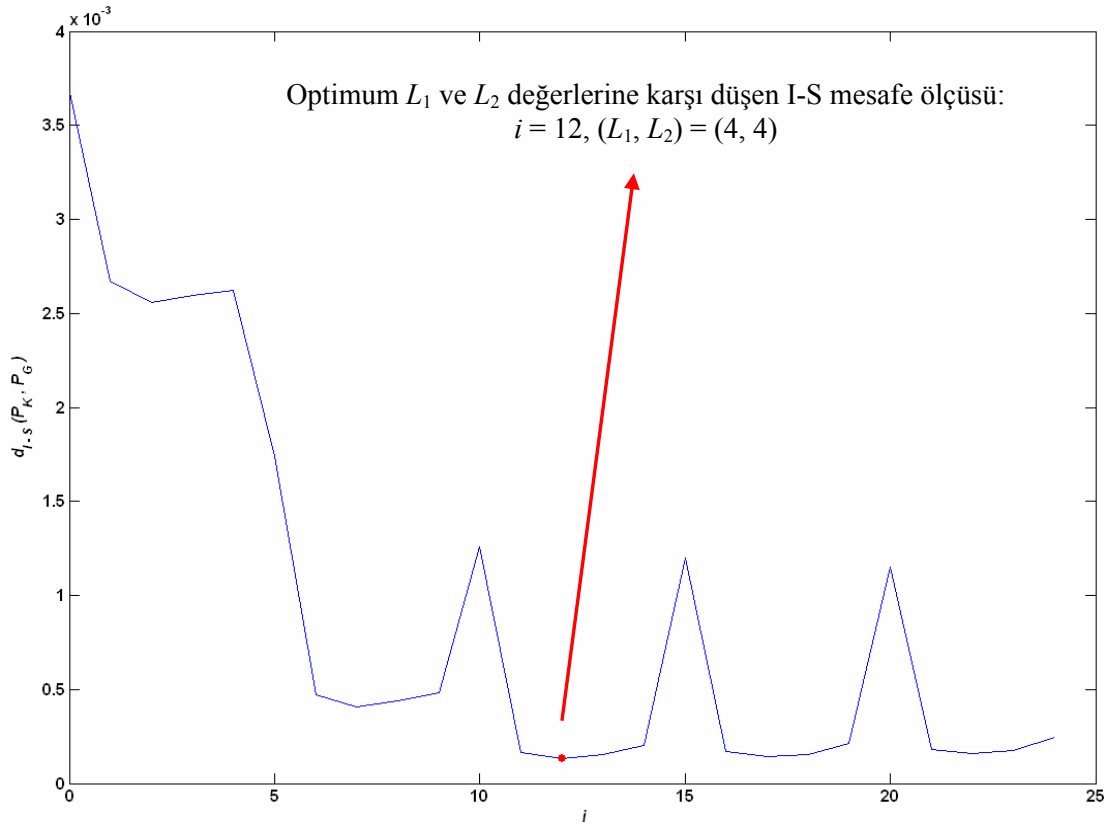
fonksiyonu olarak saklanmıştır, $d_{I-S}(i)$. Bu mesafe ölçülerinin hangi L_1 ve L_2 değerlerine ait olduğunu belirleyen i , $i = L_1 - L_{1\min} + L_2 - L_{2\min} + (L_{2\max} - L_{2\min})(L_1 - L_{1\min})$ ifadesi ile hesaplatılmaktadır. En küçük mesafe ölçüsüne karşı düşen i . mesafe ölçüsünü sağlayan L_1 ve L_2 değerleri, optimum EAR mertebeleri olarak seçilmiştir.

6.2.1. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçlar

EAR model yaklaşımına dayalı yöntemde, EAR model mertebe aralıkları,

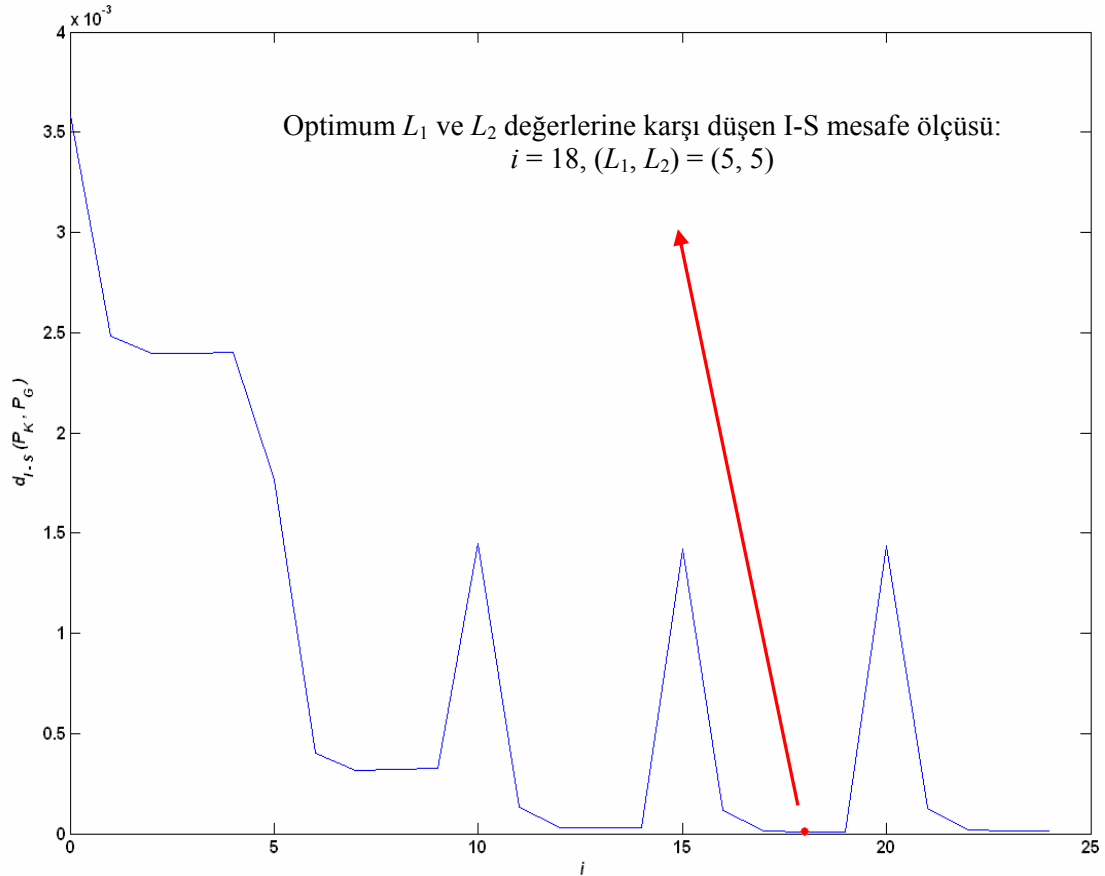
- geniş-bantlı ARMA model (6.1) için $(L_{1\min}, L_{2\min}) - (L_{1\max}, L_{2\max}) = (2, 2) - (6, 6)$
- dar-bantlı ARMA model (6.2) için $(L_{1\min}, L_{2\min}) - (L_{1\max}, L_{2\max}) = (4, 2) - (12, 6)$
- karma-tip ARMA model (6.3) için $(L_{1\min}, L_{2\min}) - (L_{1\max}, L_{2\max}) = (4, 4) - (12, 12)$

biçiminde seçilmiştir. L_1 ve L_2 için belirlenen bu değer aralıkları dikkate alınarak gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde, her bir model için her iki veri boyutunda farklı optimum EAR mertebelerine ulaşılmıştır (Şekil 6.1, 6.2, 6.5, 6.6, 6.9 ve 6.10). Önerilen yöntemlerin başarımını kendi içerisinde de değerlendirmek amacıyla en küçük ve optimum (L_1, L_2) değerleri için elde edilen sonuçlar, Tablo 6.1-6.6'da verilmiştir.



Şekil 6.1: (6.1)'deki model için, en küçük I-S ölçüsünü veren optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$.

Önerilen yöntemi kullanarak geniş-bantlı ARMA model parametrelerinin yüksek doğrulukta kestirimini sağlayan optimum EAR model mertebelerinin belirlenmesi işlemi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$ ve $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için Şekil 6.1 ve Şekil 6.2’de gösterilmiştir. Bu şekillerden de görüldüğü üzere, L_1 ve L_2 için belirlenen en küçük ve en büyük değer aralığında en küçük I-S mesafe ölçüleri sırasıyla $(L_1, L_2) = (4, 4)$ ve $(L_1, L_2) = (5, 5)$ EAR model mertebeleri ile elde edilmiştir.



Şekil 6.2: (6.1) eşitliği ile tanımlanan model için, en küçük I-S mesafe ölçüsünü veren optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$.

Tablo 6.1 ve Tablo 6.2’de, her iki veri boyutu için $(L_{1min}, L_{2min}) = (2, 2)$ ve optimum EAR model mertebeleri ile elde edilen sonuçlar verilmiştir. Tablolardaki sonuçlar, her iki veri boyutunda da $(L_1, L_2) = \{(2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$ EAR model mertebeleri için önerilen yöntemle ulaşılan I-S mesafe ölçülerinin Zhang (1991) ile ulaşılan mesafe ölçülerine göre daha küçük olduğunu göstermektedir. Kestirilen parametreler ve izge yoğunlukları anlamında en iyi sonuçlar, önerilen yöntemin optimum EAR model mertebeleriyle koşumundan elde edilmiştir: parametre kestirimleri, gerçek değerlerine yüksek doğrulukta yakınsamaktadır. Tablo 6.2’deki norm değerlerinden bu sonucu

çıkarmak mümkündür. Ayrıca, Tablo 6.2'deki I-S mesafe ölçüleri ve Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'deki izge görüntüleri de bu düşünceyi destekler niteliktedir.

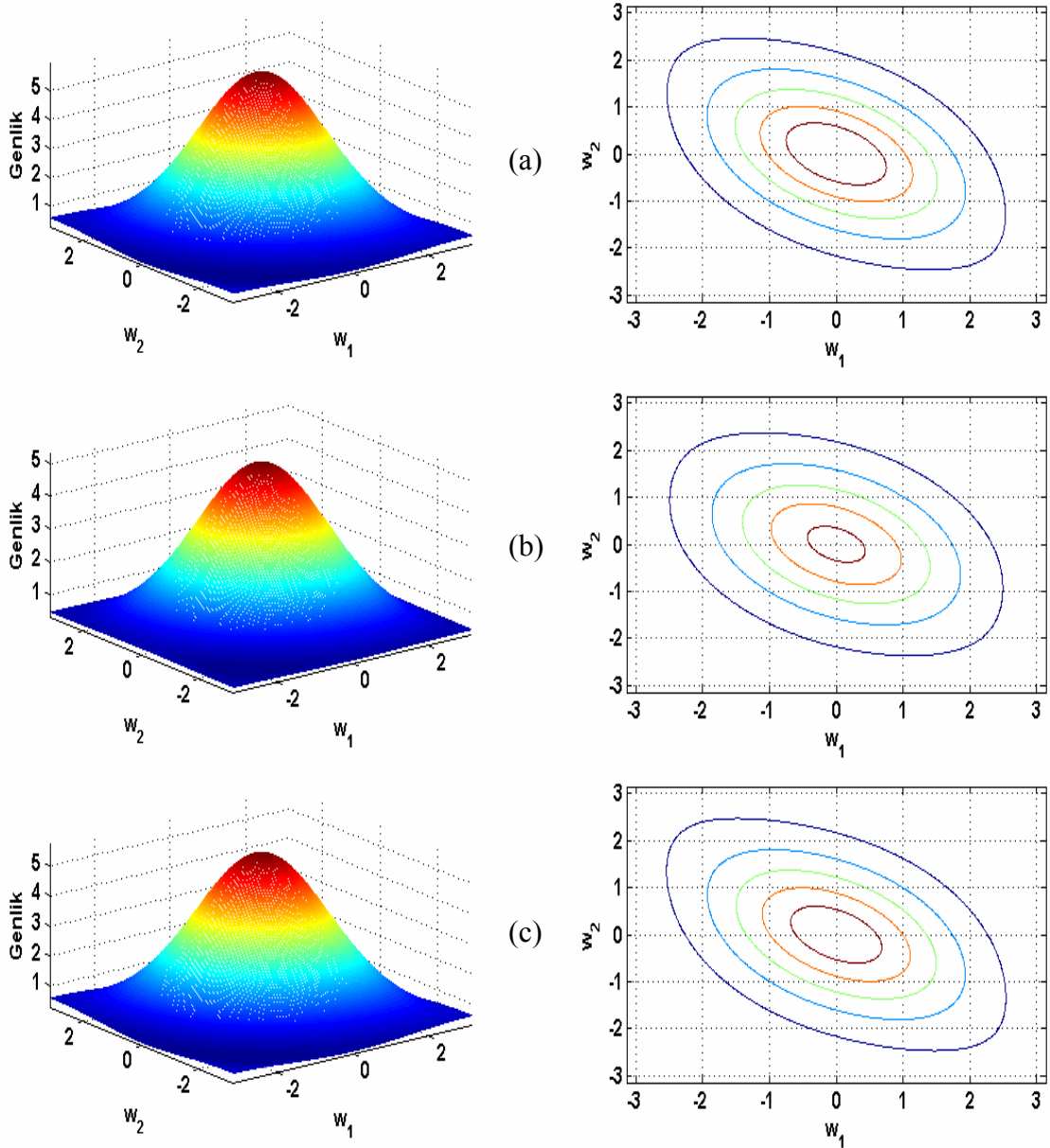
Tablo 6.1: Bölüm 3'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)		
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	
$(N_1, N_2) = (32, 32)$							
$(L_1, L_2) = (2, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (4, 4) \text{ (opt.)}$				
$a_{0,1} =$	-0.1300	-0.1352	0.0688	-0.1137	0.0629	-0.1173	0.1307
$a_{1,0} =$	-0.0500	-0.0769	0.0641	-0.0393	0.0663	-0.0462	0.1216
$a_{1,1} =$	-0.0600	-0.1009	0.0732	-0.0674	0.0669	-0.0532	0.1409
$b_{0,1} =$	0.2200	0.2062	0.0636	0.2329	0.0600	0.2490	0.0975
$b_{1,0} =$	0.2800	0.2332	0.0610	0.2822	0.0674	0.2696	0.0915
$b_{1,1} =$	0.3550	0.2711	0.0574	0.3528	0.0549	0.2833	0.0802
$\sigma_w^2 =$	1.0000	0.9820		0.9490		-	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$							
$(L_1, L_2) = (2, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (5, 5) \text{ (opt.)}$				
$a_{0,1} =$	-0.1300	-0.1529	0.0333	-0.1271	0.0358	-0.1363	0.0523
$a_{1,0} =$	-0.0500	-0.0845	0.0387	-0.0494	0.0335	-0.0443	0.0600
$a_{1,1} =$	-0.0600	-0.0964	0.0352	-0.0636	0.0307	-0.0541	0.0596
$b_{0,1} =$	0.2200	0.1915	0.0302	0.2231	0.0359	0.2489	0.0418
$b_{1,0} =$	0.2800	0.2320	0.0377	0.2799	0.0337	0.2863	0.0492
$b_{1,1} =$	0.3550	0.2718	0.0274	0.3549	0.0244	0.2883	0.0357
$\sigma_w^2 =$	1.0000	1.0037		0.9822		-	

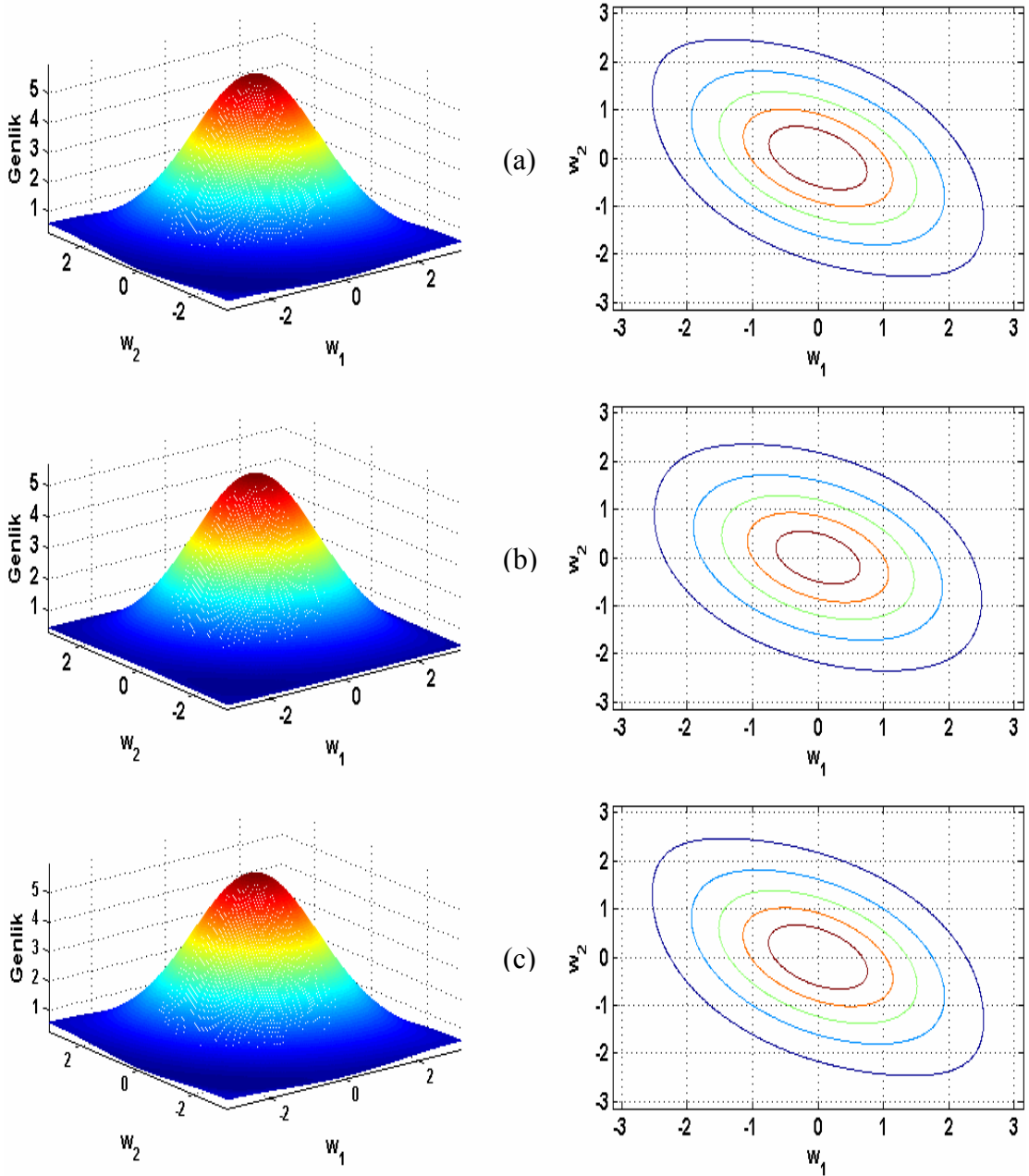
Tablo 6.2: Tablo 6.1'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirilmesi.

Başarım Ölçütleri	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)	
	AR	MA	AR	MA	AR	MA
$(N_1, N_2) = (32, 32)$						
$(L_1, L_2) = (2, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (4, 4) \text{ (opt.)}$			
L_1 -normu	0.0461	0.0977	0.0237	0.0151	0.0195	0.1007
L_2 -normu	0.0492	0.0968	0.0186	0.0131	0.0145	0.0780
L_∞ -normu	0.0678	0.1307	0.0181	0.0129	0.0127	0.0822
<i>Frobenius</i> -normu	0.0492	0.0970	0.0209	0.0133	0.0149	0.0781
I – S mesafe ölçüsü	0.0037000000		0.0001306000		0.0087000000	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$						
$(L_1, L_2) = (2, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (5, 5) \text{ (opt.)}$			
L_1 -normu	0.0593	0.1117	0.0065	0.0032	0.0122	0.0957
L_2 -normu	0.0531	0.0993	0.0046	0.0031	0.0097	0.0730
L_∞ -normu	0.0709	0.1313	0.0041	0.0031	0.0117	0.0730
<i>Frobenius</i> -normu	0.0551	0.1002	0.0046	0.0031	0.0104	0.0730
I – S mesafe ölçüsü	0.0036000000		0.0000084068		0.0091000000	

Tablo 6.1'den görüldüğü üzere, kestirilen parametrelere ilişkin standart sapma değerleri büyük veri boyutu için küçülmektedir. Bu ise, küçük veri boyutlarında DYW denklemi yaklaşımının dolayısıyla yöntemlerin tutarsız sonuçlar ürettiği anlamına gelmektedir. Hatırlanacağı üzere önerilen yöntemde EAR model parametreleri, Zhang (1991) yönteminde ise AR parametreleri, DYW denklemlerinin çözümüyle elde edilmektedir. Sonuç olarak, EAR ve AR parametrelerinin kullanımıyla elde edilen diğer parametre kestirimlerinin tutarlılığı da bu olumsuz durumdan etkilenmektedir.

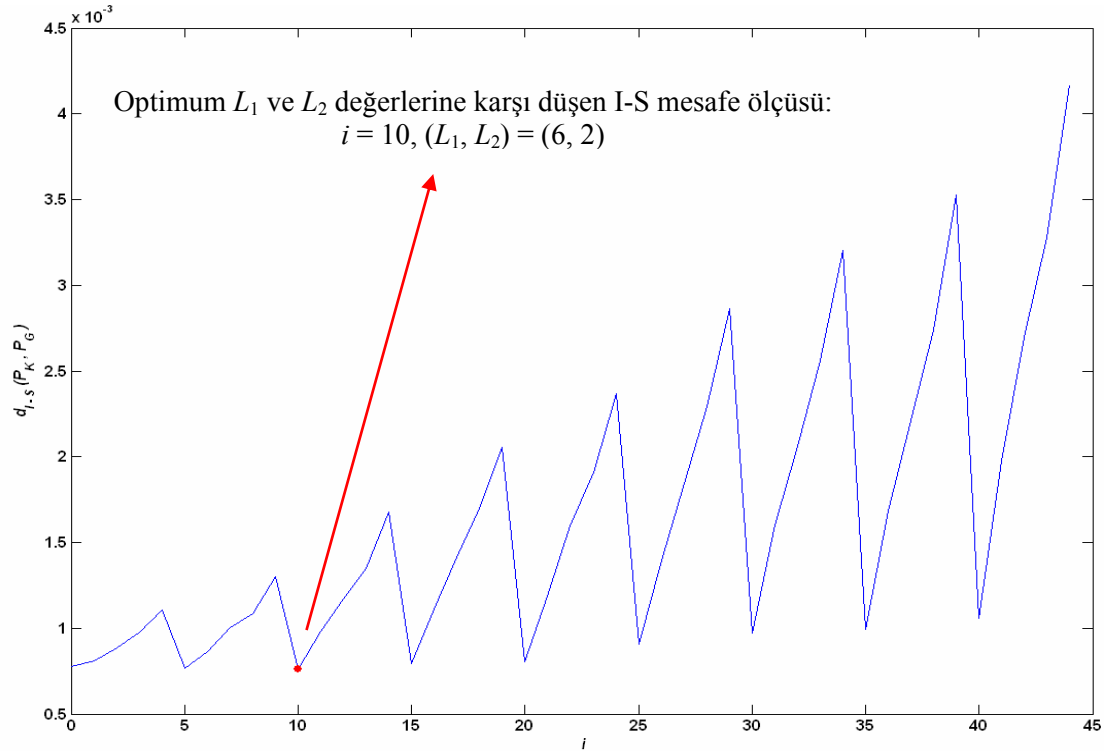


Şekil 6.3: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (4, 4)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.

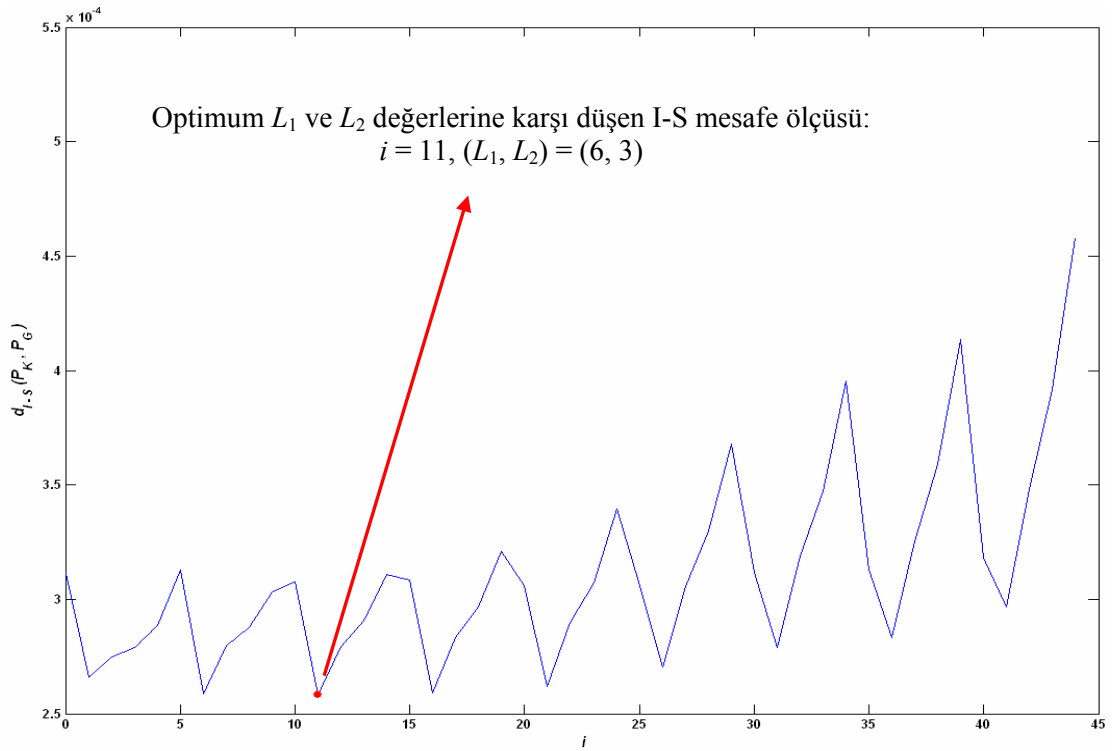


Şekil 6.4: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (5, 5)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.

Bilgisayar benzetimlerinde $(3,1,1,1)$. mertebeden dar-bantlı ARMA modelin parametrelerinin kestirimi, önerilen yöntem için $(L_1, L_2) = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$ EAR model mertebeleri ile gerçekleştirilmiştir. $(L_1, L_2) = \{(6, 2), (6, 3)\}$ değerleri, önerilen yöntemde kullanılan optimum EAR model mertebeleri olup Şekil 6.5 ve Şekil 6.6'da da gösterildiği üzere bu mertebeler için sırasıyla $(N_1 \times N_2) = (32 \times 32)$ ve $(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ veri boyutlarında en küçük I-S mesafe ölçülerine ulaşılmıştır.



Şekil 6.5: (6.2)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$.



Şekil 6.6: (6.2)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$.

Zhang (1991) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, geniş-bantlı ARMA modelden farklı olarak dar-bantlı ARMA model için, önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$ EAR model mertebeleri ile koşumundan her iki veri boyutlarında tatmin edici sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir. Tablo 6.3’de verilen parametre kestirimlerinden ve Tablo 6.4’deki başarımlar ölçütlerinden bu sonuçları çıkarmak mümkündür: hem AR hem de MA parametreleri için, önerilen yöntem ile elde edilen kestirime ilişkin norm değerleri ve I-S mesafe ölçüleri Zhang (1991) ile elde edilenlere göre oldukça küçüktür. Bu ise arzu edilen bir durumdur.

Tablo 6.3: Bölüm 3’te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.

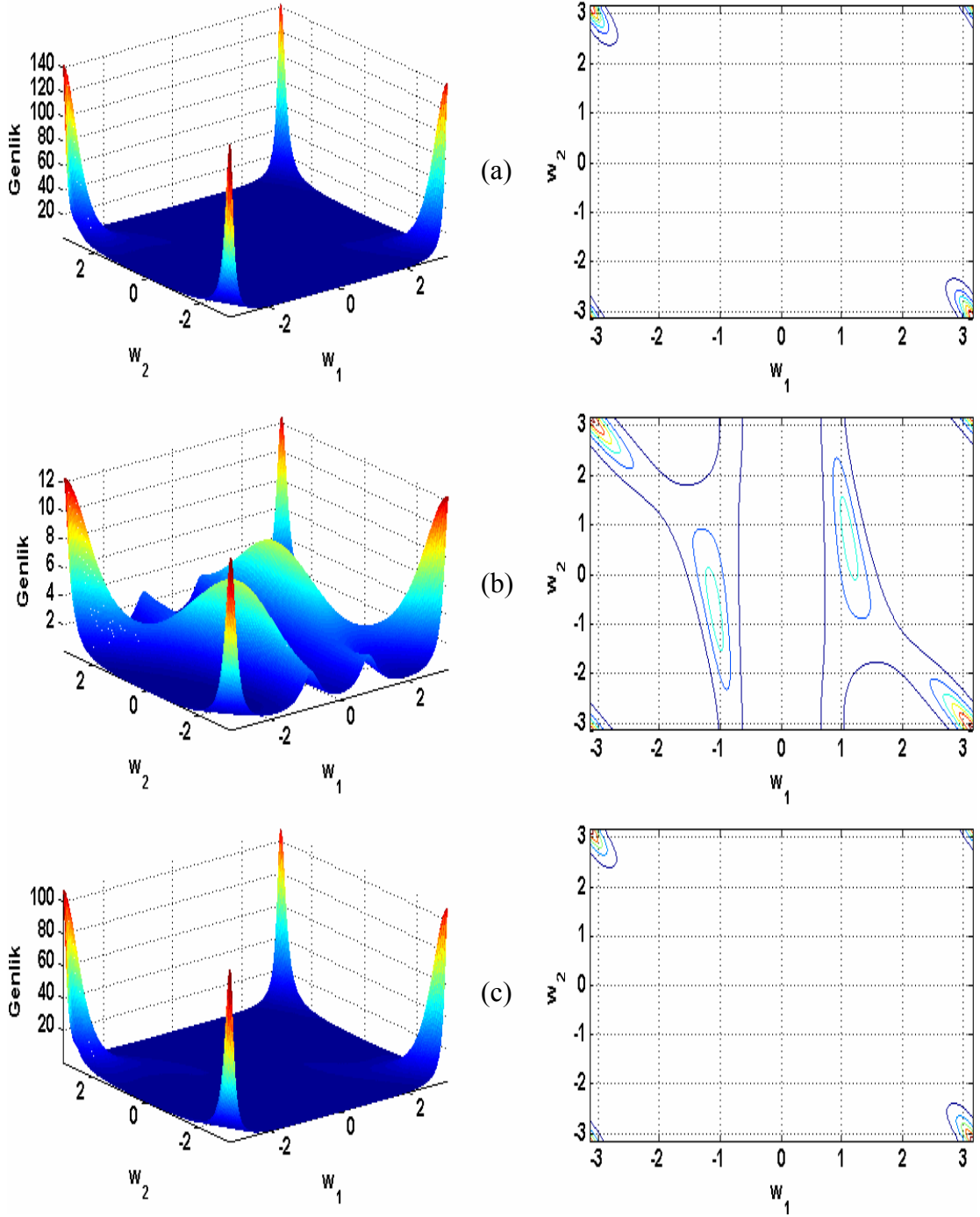
Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)		
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	
$(N_1, N_2) = (32, 32)$							
$(L_1, L_2) = (4, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (6, 2) \text{ (opt.)}$				
$a_{0,1}$	= 0.1700	0.1488	0.0581	0.1472	0.0551	0.1661	0.2340
$a_{1,0}$	= 0.2000	0.1979	0.1977	0.1891	0.1793	-0.4107	7.2505
$a_{1,1}$	= -0.2800	-0.3072	0.0721	-0.3006	0.0731	-0.2855	0.6084
$a_{2,0}$	= -0.1600	-0.1571	0.0675	-0.1612	0.0626	0.2342	4.6085
$a_{2,1}$	= 0.1400	0.1366	0.0977	0.1430	0.0879	0.4824	3.8923
$a_{3,0}$	= 0.0750	0.0687	0.0406	0.0689	0.0408	0.1762	1.2510
$a_{3,1}$	= 0.1250	0.1250	0.0383	0.1239	0.0390	-0.2132	3.7932
$b_{0,1}$	= 0.1300	0.1272	0.0619	0.1251	0.0590	0.0878	0.0742
$b_{1,0}$	= -0.1250	-0.1130	0.1931	-0.1216	0.1783	-0.0784	0.3448
$b_{1,1}$	= 0.1930	0.1772	0.0649	0.1829	0.0666	0.1387	0.0842
σ_w^2	= 1.0000	0.9372		0.9282		-	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$							
$(L_1, L_2) = (4, 2) \text{ (min.)}$			$(L_1, L_2) = (6, 3) \text{ (opt.)}$				
$a_{0,1}$	= 0.1700	0.1529	0.0293	0.1704	0.0343	0.1632	0.0368
$a_{1,0}$	= 0.2000	0.1943	0.0961	0.1826	0.0939	0.1640	0.2730
$a_{1,1}$	= -0.2800	-0.3018	0.0373	-0.2836	0.0406	-0.2908	0.0575
$a_{2,0}$	= -0.1600	-0.1586	0.0313	-0.1630	0.0322	-0.0853	0.2401
$a_{2,1}$	= 0.1400	0.1397	0.0462	0.1467	0.0446	0.1583	0.1266
$a_{3,0}$	= 0.0750	0.0731	0.0196	0.0738	0.0194	0.0993	0.0949
$a_{3,1}$	= 0.1250	0.1254	0.0199	0.1257	0.0215	0.0836	0.1341
$b_{0,1}$	= 0.1300	0.1234	0.0291	0.1431	0.0348	0.0949	0.0452
$b_{1,0}$	= -0.1250	-0.1249	0.0978	-0.1370	0.0945	-0.1278	0.2353
$b_{1,1}$	= 0.1930	0.1715	0.0337	0.1862	0.0370	0.1547	0.0508
σ_w^2	= 1.0000	0.9681		0.9635		-	

Tablo 6.4: Tablo 6.3'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirilmesi.

Başarım Ölçütleri	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)	
	AR	MA	AR	MA	AR	MA
$(N_1, N_2) = (32, 32)$						
	$(L_1, L_2) = (4, 2)$ (min.)		$(L_1, L_2) = (6, 2)$ (opt.)			
L_1 -normu	0.0518	0.0186	0.0474	0.0150	1.1061	0.0965
L_2 -normu	0.0346	0.0199	0.0318	0.0116	0.7553	0.0793
L_∞ -normu	0.0293	0.0277	0.0314	0.0135	0.7366	0.1009
<i>Frobenius</i> -normu	0.0354	0.0200	0.0333	0.0117	0.8776	0.0831
I - S mesafe ölçüsü	0.00076590		0.00076023		0.82410000	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$						
	$(L_1, L_2) = (4, 2)$ (min.)		$(L_1, L_2) = (6, 3)$ (opt.)			
L_1 -normu	0.0396	0.0282	0.0215	0.0200	0.1350	0.0734
L_2 -normu	0.0281	0.0225	0.0179	0.0165	0.0870	0.0520
L_∞ -normu	0.0274	0.0216	0.0210	0.0189	0.0930	0.0411
<i>Frobenius</i> -normu	0.0284	0.0225	0.0193	0.0191	0.0984	0.0520
I - S mesafe ölçüsü	0.00031143		0.00025831		0.01100000	

İlginçtir ki geniş-bantlı ARMA modelden farklı olarak dar-bantlı ARMA model için, önerilen yöntemin her iki veri boyutunda üretmiş olduğu parametre kestirimleri ve bu parametrelere ilişkin başarımlar ölçütleri arasında çok büyük farklar olmadığı görülmektedir. Ancak beklendiği gibi en iyi kestirimler, yine optimum EAR model mertebelerinin kullanımıyla elde edilmiştir. Tablo 6.3 ve Tablo 6.4'deki sayısal sonuçlar ve Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'deki izge görüntüleri de bu düşünceleri destekler niteliktedir.

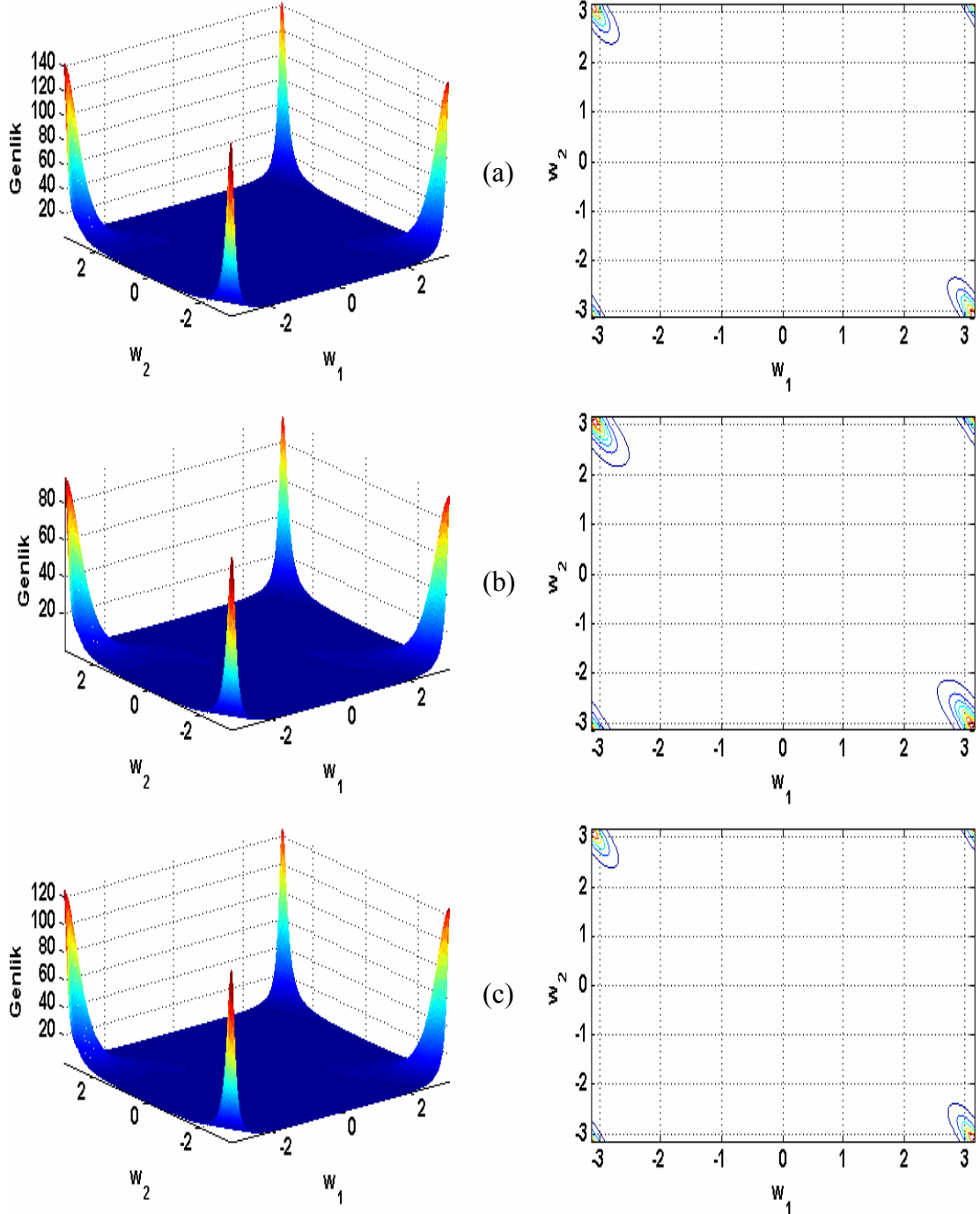
$(N_1 \times N_2) = (32 \times 32)$ ve $(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ veri boyutlarında geniş-bantlı ve dar-bantlı ARMA modeller için Zhang (1991) yönteminin ürettiği sonuçlar karşılaştırılırsa, büyük veri boyutlarında dar-bantlı ARMA model için daha iyi sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir. Tablo 6.3 ve Tablo 6.4'de verilen sayısal değerlerden ve Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'deki izge görüntülerinden iyileşmeyi görebilmek mümkündür. AR parametrelerinin kestiriminde DYW denklemini yaklaşımının kullanımı, küçük veri boyutunda Zhang (1991) ile üretilen kestirimlerin doğruluğunun düşük olmasına sebep olarak gösterilebilir. 1-B AR ve ARMA model parametrelerinin kestirimine yönelik yapılan çalışmalar (Friedlander ve diğ., 1984b; Friedlander ve diğ., 1985; Li ve diğ., 1986) da bu düşünceleri doğrulamaktadır. Sonuç olarak, çok-boyutlu durumda da AR parametrelerinin kestirimi için DYW yaklaşımını kullanmanın özellikle küçük veri kümeleriyle elde edilen kestirimlerde doğruluğun ve tutarlılığın ciddi oranlarda düşmesine sebep olduğunu söylemek yanlış olmaz.



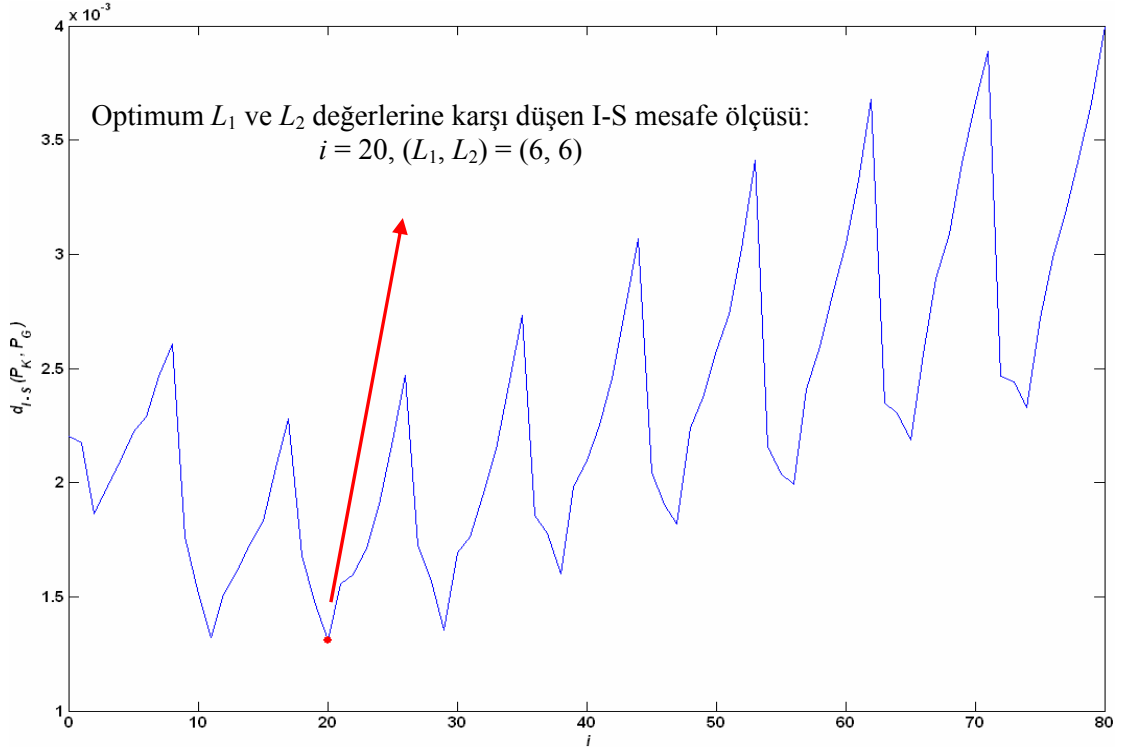
Şekil 6.7: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 2)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.

(6.3) eşitliği ile tanımlanan karma-tip ARMA modele ilişkin parametrelerin önerilen yöntem ile kestirimi, $(L_{1\min}, L_{2\min}) = (4, 4)$ ve $(L_1, L_2) = \{(6, 6), (8, 8)\}$ EAR model mertebeleri için gerçekleştirilmiştir. Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da gösterildiği gibi $(L_1, L_2) = (6, 6)$ ve $(L_1, L_2) = (8, 8)$ değerleri sırasıyla $(N_1 \times N_2) = (32 \times 32)$ ve

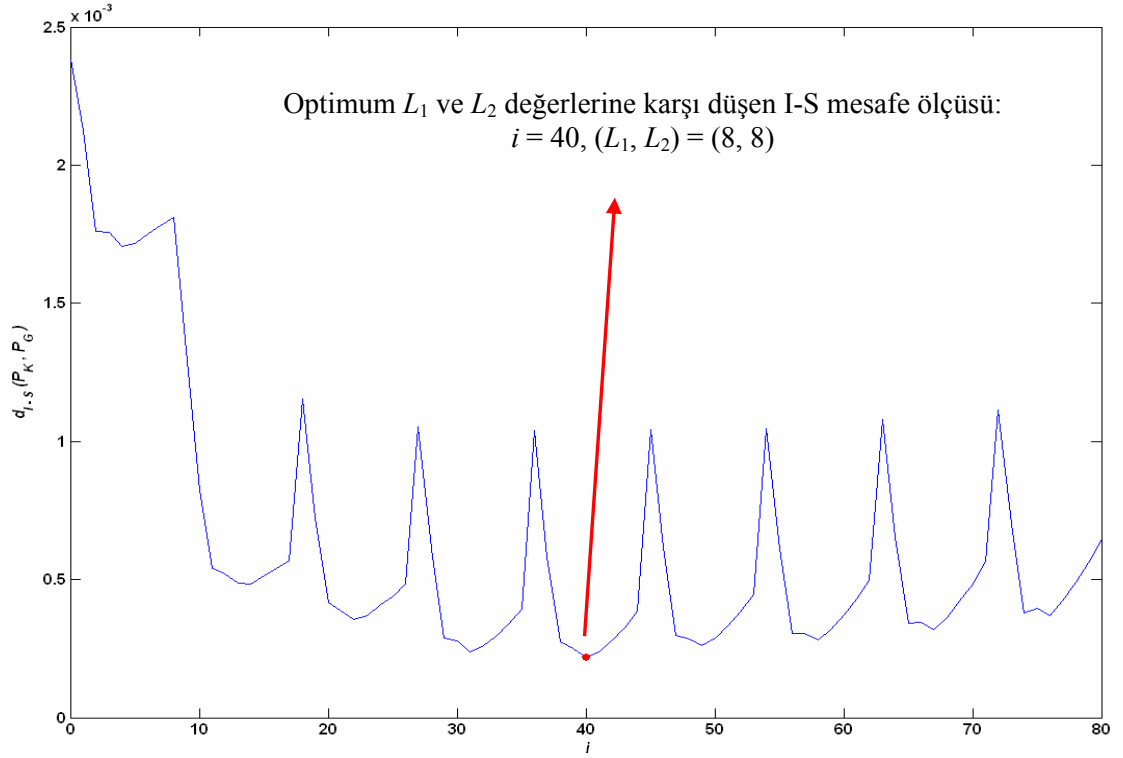
$(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ boyutlu veri kümeleri için, önerilen yöntemin en küçük I-S mesafe ölçülerini ürettiği optimum EAR model mertebelerine karşı düşmektedir. Karma-tip ARMA model için, yöntemlerle elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların çeşitli başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi Tablo 6.5 ve Tablo 6.6'da verilmiştir



Şekil 6.8: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 3)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.



Şekil 6.9: (6.3)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (32, 32)$.



Şekil 6.10: (6.3)'deki model için en küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebesinin belirlenmesi, $(N_1, N_2) = (64, 64)$.

Tablo 6.5: Bölüm 3’te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli için ürettiği parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)		
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	
	(N_1, N_2) = (32, 32)						
		(L_1, L_2) = (4, 4) (min.)		(L_1, L_2) = (6, 6) (opt.)			
$a_{0,1}$ =	0.1500	0.1244	0.1410	0.0802	0.1159	0.2359	1.4157
$a_{0,2}$ =	0.0600	0.0305	0.1244	0.0445	0.0922	0.0245	0.5711
$a_{1,0}$ =	0.0800	0.1312	0.1369	0.0688	0.0980	0.0510	1.1804
$a_{1,1}$ =	-0.1000	-0.0773	0.1234	-0.0715	0.1009	-0.1510	1.0988
$a_{1,2}$ =	0.0530	0.0416	0.1269	0.0518	0.0953	-0.0217	0.7737
$a_{2,0}$ =	-0.0500	-0.0565	0.1069	-0.0423	0.0872	-0.0342	0.8428
$a_{2,1}$ =	0.1300	0.0905	0.1179	0.1015	0.0892	0.2103	0.7221
$a_{2,2}$ =	0.1150	0.0911	0.1070	0.0693	0.0857	0.1364	0.9381
$b_{0,1}$ =	0.2000	0.1696	0.1413	0.1222	0.1192	0.1561	0.2841
$b_{0,2}$ =	0.2300	0.1894	0.1190	0.2079	0.0893	0.1453	0.1716
$b_{1,0}$ =	0.1500	0.1999	0.1407	0.1345	0.1057	0.1428	0.3243
$b_{1,1}$ =	0.1800	0.2009	0.1233	0.2039	0.0997	0.1147	0.2140
$b_{1,2}$ =	0.1600	0.1431	0.1169	0.1421	0.0904	0.1309	0.1307
$b_{2,0}$ =	0.1750	0.1579	0.1004	0.1754	0.0862	0.1910	0.1638
$b_{2,1}$ =	0.2400	0.1982	0.1237	0.1969	0.0954	0.1724	0.1343
$b_{2,2}$ =	0.3000	0.2561	0.1043	0.2480	0.0917	0.1449	0.1162
σ_w^2 =	1.0000	0.9696		0.9300		-	
		(N_1, N_2) = (64, 64)					
		(L_1, L_2) = (4, 4) (min.)		(L_1, L_2) = (8, 8) (opt.)			
$a_{0,1}$ =	0.1500	0.1702	0.0703	0.1201	0.0566	0.1916	0.1804
$a_{0,2}$ =	0.0600	0.0287	0.0639	0.0506	0.0398	0.0798	0.1404
$a_{1,0}$ =	0.0800	0.1079	0.0571	0.0641	0.0480	0.1276	0.1765
$a_{1,1}$ =	-0.1000	-0.0618	0.0659	-0.0819	0.0509	-0.1235	0.1589
$a_{1,2}$ =	0.0530	0.0516	0.0552	0.0616	0.0408	0.0465	0.1206
$a_{2,0}$ =	-0.0500	-0.0803	0.0525	-0.0445	0.0441	-0.0476	0.1555
$a_{2,1}$ =	0.1300	0.0840	0.0601	0.1162	0.0458	0.1075	0.1403
$a_{2,2}$ =	0.1150	0.0762	0.0549	0.0897	0.0454	0.1412	0.1475
$b_{0,1}$ =	0.2000	0.2242	0.0708	0.1703	0.0561	0.2919	0.1526
$b_{0,2}$ =	0.2300	0.1929	0.0624	0.2193	0.0398	0.2280	0.0894
$b_{1,0}$ =	0.1500	0.1805	0.0562	0.1328	0.0474	0.2476	0.1259
$b_{1,1}$ =	0.1800	0.2156	0.0646	0.1929	0.0498	0.1901	0.1216
$b_{1,2}$ =	0.1600	0.1587	0.0506	0.1608	0.0412	0.1563	0.0750
$b_{2,0}$ =	0.1750	0.1380	0.0509	0.1788	0.0434	0.2099	0.1066
$b_{2,1}$ =	0.2400	0.1922	0.0550	0.2171	0.0438	0.2059	0.0831
$b_{2,2}$ =	0.3000	0.2451	0.0550	0.2764	0.0450	0.2111	0.0565
σ_w^2 =	1.0000	1.0023		0.9751		-	

İlk iki modelde olduğu gibi karma-tip ARMA model için de parametre ve izge kestirimleri anlamında en iyi sonuçlara, önerilen yöntemle ulaşılmıştır. Tablo 6.5 ve Tablo 6.6’daki sayısal değerler ve Şekil 6.11 ve Şekil 6.12’deki izge görüntüleri de bu

düşünceyi doğrulamaktadır. Dikkat edilirse küçük veri boyutunda, $(L_1, L_2) = (4, 4)$ ve $(L_1, L_2) = (6, 6)$ mertebeleri için parametre kestirimlerinin birbirine yakın olduğu ancak standart sapmalar karşılaştırıldığında, optimum EAR mertebesi $(L_1, L_2) = (6, 6)$ ile daha küçük değerlere ulaşıldığı görülmektedir. Veri boyutunun artmasıyla, $(L_1, L_2) = (4, 4)$ ve $(L_1, L_2) = (8, 8)$ mertebeleri ile önerilen yöntemin ürettiği değerler arasındaki farklılığın belirginleştiği görülmektedir. Yani, $(L_1, L_2) = (8, 8)$ ile daha iyi sonuçlara ulaşıldığı Tablo 6.6'daki norm değerlerinden ve I-S mesafe ölçülerinden görülmektedir.

Tablo 6.6: Tablo 6.5'deki istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirilmesi.

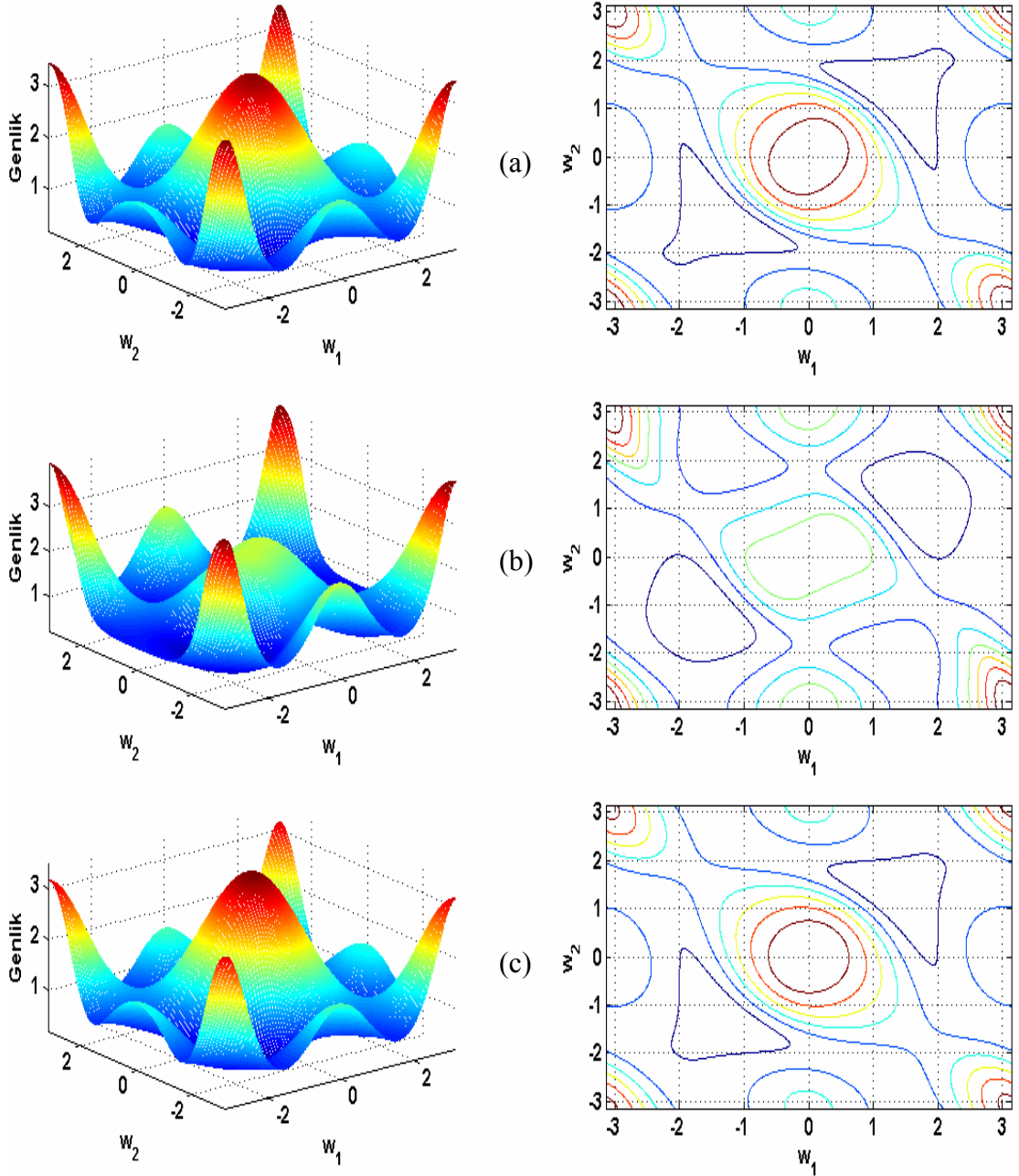
Başarım Ölçütleri	Önerilen Yöntem				Zhang (1991)	
	AR	MA	AR	MA	AR	MA
$(N_1, N_2) = (32, 32)$						
	$(L_1, L_2) = (4, 4)$ (min.)		$(L_1, L_2) = (6, 6)$ (opt.)			
L_1 -normu	0.0877	0.1014	0.1268	0.1448	0.2172	0.2689
L_2 -normu	0.0660	0.0810	0.0872	0.1016	0.1331	0.2022
L_∞ -normu	0.0852	0.1028	0.0853	0.0999	0.1547	0.2387
<i>Frobenius</i> -normu	0.0834	0.0987	0.0949	0.1106	0.1575	0.2077
I - S mesafe ölçüsü	0.00220000		0.00130000		0.05960000	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$						
	$(L_1, L_2) = (4, 4)$ (min.)		$(L_1, L_2) = (8, 8)$ (opt.)			
L_1 -normu	0.1044	0.1076	0.0618	0.0654	0.0876	0.1360
L_2 -normu	0.0787	0.0895	0.0455	0.0464	0.0618	0.1179
L_∞ -normu	0.1151	0.1397	0.0445	0.0502	0.0776	0.1578
<i>Frobenius</i> -normu	0.0904	0.1040	0.0500	0.0505	0.0787	0.1684
I - S mesafe ölçüsü	0.00240000		0.00021650		0.02860000	

6.2.2. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması

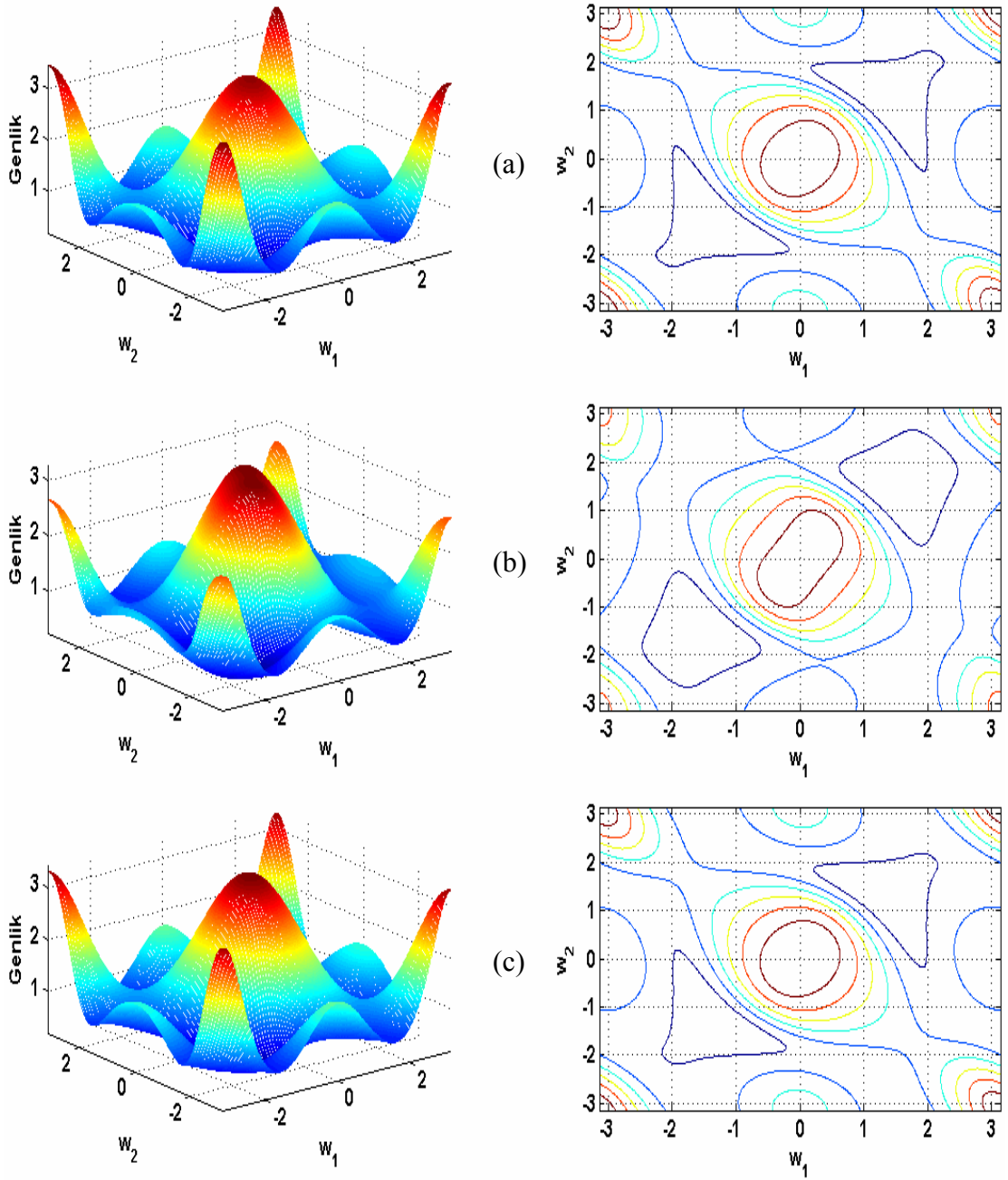
(6.1)-(6.3)'deki modellerden üretilen $\{(N_1 \times N_2)\} = \{(32 \times 32), (64 \times 64)\}$ boyutlu veri kümelerinin Bölüm 3'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminde eşzamanlı kullanımı ile gerçekleştirilen benzetimlerde ulaşılan sonuçlar, aşağıdaki gibi verilebilir:

- Zhang (1991) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında incelenen model tiplerinin tümünde en iyi parametre kestirimleri, önerilen yöntemin optimum EAR model mertebeleri ile koşumundan elde edilmiştir. Önerilen yöntemde kullanılan optimum EAR model mertebeleri, her bir model için farklı değerlere sahiptir. Bu değerler, I-S mesafe ölçütüne göre belirlenmiştir.
- Yöntemlerin tutarlılığını görmek açısından incelenen modellerin kestirilen her bir parametresi için, standart sapmalar da hesaplatılmıştır. Standart sapmaların küçük

olması, her bir bilgisayar koşumunda yöntemlerin ürettiği parametre kestirimlerinin birbirine yakın olduğu anlamına gelir ki bu ise arzu edilen bir sonuçtur. Bu durumda, parametre kestirim için tasarlanan yöntemin tutarlılığı yüksektir denir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, incelenen model tiplerinin tümünde, önerilen yöntem ile kestirilen parametrelere ilişkin standart sapmaların oldukça küçük olduğu gözlenmiştir.



Şekil 6.11: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (6, 6)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.



Şekil 6.12: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin $(L_1, L_2) = (8, 8)$ EAR model mertebesi ile ürettiği güç izgesi.

6.3. Bölüm 4'te Önerilen Yöntem ve Zhang (1991) Yöntemi ile Gerçekleştirilen Bilgisayar Benzetimleri

(6.1)-(6.3) eşitlikleri ile verilen ÇD destek bölgesi ARMA modeller, Bölüm 4'de sunulan ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemin parametre kestirim

başarımını değerlendirmek amacıyla bilgisayar benzetimlerinde yeniden kullanılmıştır. Karşılaştırma için, ilgili modeller üzerinden yeniden üretilen veri kümeleri hem Bölüm 4’de önerilen yöntemde hem de Zhang (1991) yöntemine eşzamanlı olarak uygulanmıştır. Bölüm 4’de önerilen yöntemin başarımı, daha önce farklı modeller için $(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ veri boyutuyla gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde kısmen değerlendirilmiştir (Kızılkaya ve diğ., 2003b; Kızılkaya ve diğ., 2003d).

Bu bölümde birbiriyle karşılaştırılacak olan yöntemlerde, AR parametrelerinin kestirimi için aynı yaklaşım kullanıldığından dolayı karşılaştırma işlemi yalnızca MA parametre kestirimleri üzerinden yapılmıştır. MA parametrelerinin bulunması için gerekli olan AR parametre değerleri, Zhang ve diğ., (1991) tarafından 2-B ARMA modelin AR parametrelerinin kestirimi için yeni formda türetilen DYW denklemini yaklaşımından faydalanarak elde edilmiştir. MA parametre kestirimlerine AR parametrelerinin etkisini görmek amacıyla, AR parametrelerine ilişkin istatistiklere de tablolarda yer verilmiştir. Ayrıca, Bölüm 4’de önerilen yöntemde cepstrum katsayılarının elde edilmesi esnasında kullanılan periodogram tekniğinin MA parametre kestirimlerine etkisini görmek amacıyla, karşılaştırmalara Bölüm 4’de sunulan yöntemin değişik durumu ile elde edilen sonuçlar da dahil edilmiştir.

6.3.1. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçlar

Geniş-bantlı ARMA model için, $(N_1 \times N_2) = (32 \times 32)$ ve $(N_1 \times N_2) = (64 \times 64)$ boyutlu veri kümeleriyle 2-B DYW denklemini kullanarak birbirinden bağımsız 100 bilgisayar koşumundan elde edilen AR parametre kestirimlerinin ortalaması ve standart sapması Tablo 6.7’de verilmiştir. Önerilen yöntem ve bu yöntemin değişik durumu ile Zhang (1991) yönteminin ürettiği MA parametre kestirimlerine ilişkin ortalama ve standart sapma değerleri ve bu değerlere ilişkin başarımlar ölçütleri ise Tablo 6.8 ve Tablo 6.9’da verilmiştir.

Tablo 6.7: Geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için, 2-B DYW denklemini kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	$(N_1, N_2) = (32, 32)$		$(N_1, N_2) = (64, 64)$	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
$a_{0,1} = -0.1300$	-0.1127	0.1109	-0.1333	0.0581
$a_{1,0} = -0.0500$	-0.0527	0.1219	-0.0533	0.0623
$a_{1,1} = -0.0600$	-0.0560	0.1215	-0.0551	0.0677

Tablo 6.8: Bölüm 4'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.

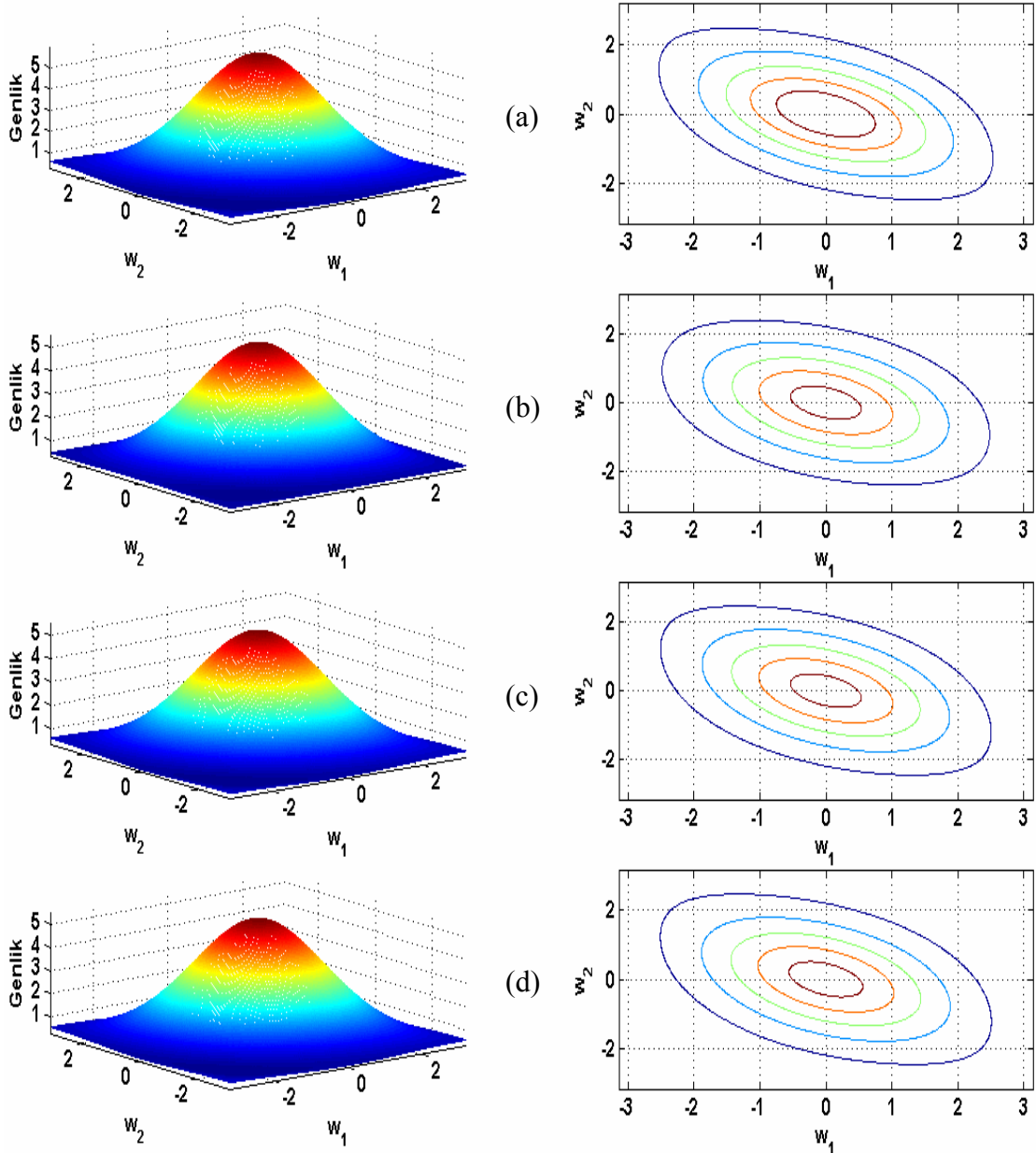
Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem		Önerilen Yöntem (Değişik Durum)		Zhang (1991)		
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	
$(N_1, N_2) = (32, 32)$							
$b_{0,1} =$	0.2200	0.2283	0.1160	0.2307	0.1106	0.2600	0.0875
$b_{1,0} =$	0.2800	0.2661	0.1231	0.2664	0.1190	0.2752	0.0949
$b_{1,1} =$	0.3550	0.3253	0.1033	0.3300	0.0957	0.2852	0.0761
$(N_1, N_2) = (64, 64)$							
$b_{0,1} =$	0.2200	0.2126	0.0631	0.2145	0.0618	0.2480	0.0508
$b_{1,0} =$	0.2800	0.2739	0.0643	0.2743	0.0634	0.2794	0.0507
$b_{1,1} =$	0.3550	0.3424	0.0477	0.3461	0.0464	0.2865	0.0390

Tablo 6.9: Tablo 6.7 ve Tablo 6.8'de verilen istatistiklerin başarımlarına göre değerlendirilmesi.

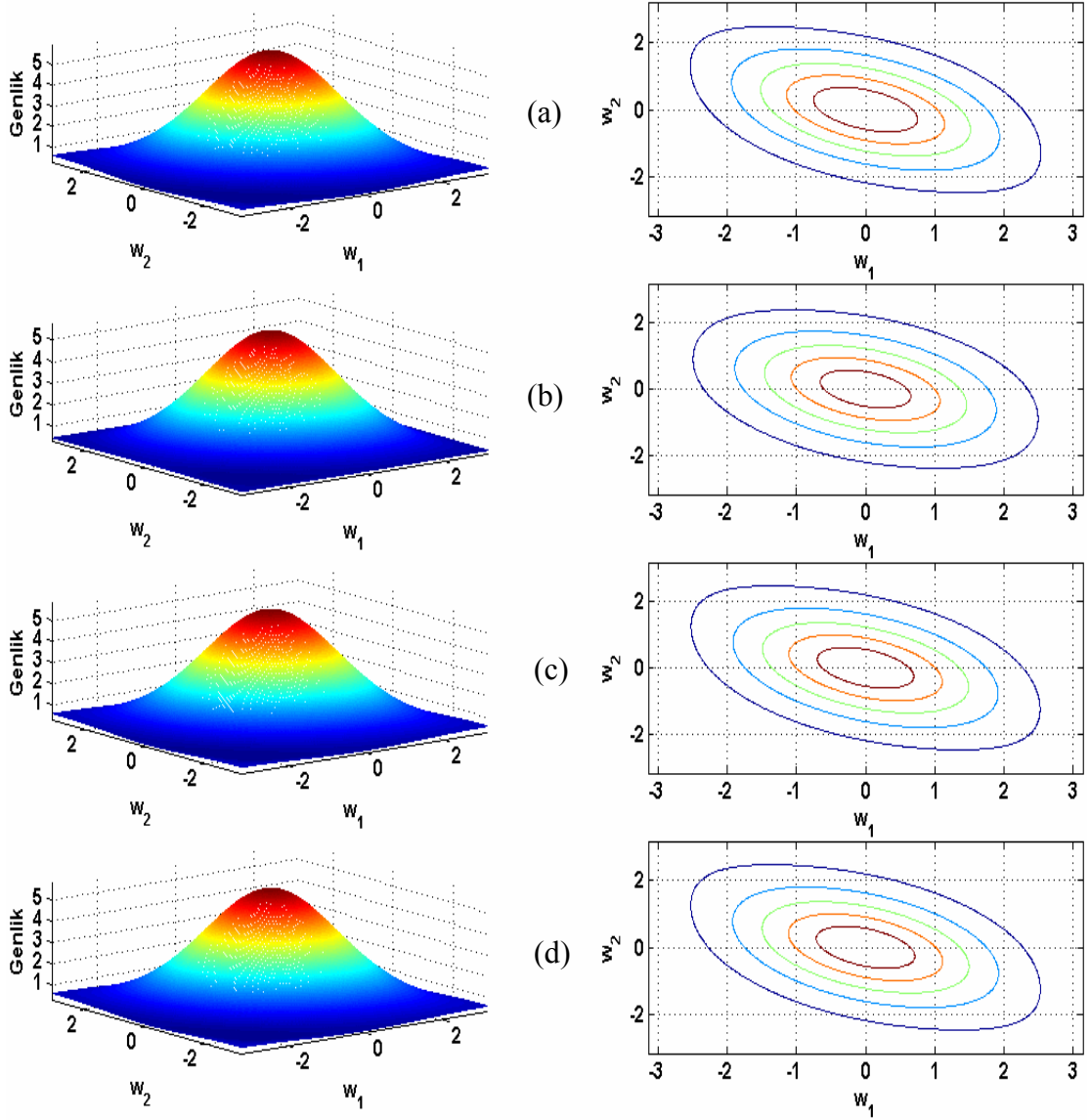
Başarımlar Ölçütleri	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem (Değişik Durum)	Zhang (1991)	2-B DYW Yaklaşımı
	MA	MA	MA	AR
$(N_1, N_2) = (32, 32)$				
L_1 -normu	0.0380	0.0357	0.1098	0.0212
L_2 -normu	0.0336	0.0300	0.0806	0.0177
L_∞ -normu	0.0436	0.0385	0.0746	0.0173
<i>Frobenius</i> -normu	0.0338	0.0304	0.0806	0.0179
I - S mesafe ölçüsü	0.001573	0.001235	0.008794	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$				
L_1 -normu	0.0200	0.0144	0.0965	0.0082
L_2 -normu	0.0156	0.0116	0.0740	0.0066
L_∞ -normu	0.0187	0.0146	0.0691	0.0082
<i>Frobenius</i> -normu	0.0159	0.0119	0.0740	0.0068
I - S mesafe ölçüsü	0.000261	0.000150	0.008522	

Zhang (1991) yöntemi ile ulaşılan sonuçlarla karşılaştırıldığında her iki veri boyutu için, önerilen yöntem ve önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen MA parametre kestirimlerinin ve GİY işlevlerinin gerçek değerlere yüksek doğrulukta yakınsadığı görülmektedir. Tablo 6.8'de verilen parametre kestirimleri, Tablo 6.9'daki norm değerleri ve I-S mesafe ölçüleri, ve Şekil 6.13 ve Şekil 6.14'deki izge görüntüleri bu düşüncüyü destekler niteliktedir. Dikkat edilirse önerilen yöntemin değişik durumunun, geniş-bantlı model parametrelerinin kestiriminde etkisini fazla hissettirmediği görülmektedir. Başka bir deyişle, önerilen yöntem ve önerilen yöntemin değişik durumu hemen hemen birbirine yakın sonuçlar üretmiştir, Tablo 6.8 ve Tablo 6.9.

Dar-bantlı ARMA model için, AR parametre kestirimlerine ilişkin istatistikler Tablo 6.10’da verilmiştir. Her bir bilgisayar koşulunda elde edilen AR parametre kestirimlerinin, önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminde eşzamanlı kullanımı ile elde edilen MA parametrelerine ilişkin istatistikler Tablo 6.11’deki gibidir. Tablo 6.12’de ise, Tablo 6.10 ve Tablo 6.11’deki AR ve MA parametre kestirimlerinin ve bu parametrelere karşı düşen GİY işlevlerinin gerçeklerine olan yakınlığını analiz etmek amacıyla kullanılan norm değerlerine ve I-S mesafe ölçülerine yer verilmiştir.



Şekil 6.13: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.



Şekil 6.14: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.

Tablo 6.10: Dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için, 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	$(N_1, N_2) = (32, 32)$		$(N_1, N_2) = (64, 64)$	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
$a_{0,1} = 0.1700$	0.1683	0.1512	0.1692	0.0370
$a_{1,0} = 0.2000$	0.1570	1.0003	0.2289	0.5377
$a_{1,1} = -0.2800$	-0.2782	0.2724	-0.2733	0.0952
$a_{2,0} = -0.1600$	-0.0571	1.0593	-0.1670	0.4926
$a_{2,1} = 0.1400$	0.1707	0.4497	0.1278	0.2501
$a_{3,0} = 0.0750$	0.1133	0.3943	0.0674	0.1898
$a_{3,1} = 0.1250$	0.0630	0.5965	0.1317	0.3162

Tablo 6.11: Bölüm 4’te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem		Önerilen Yöntem (Değişik Durum)		Zhang (1991)	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
$(N_1, N_2) = (32, 32)$						
$b_{0,1} = 0.1300$	0.1004	0.1579	0.1031	0.0948	0.0953	0.0887
$b_{1,0} = -0.1250$	-0.1705	0.9936	-0.1429	0.3943	-0.0900	0.3310
$b_{1,1} = 0.1930$	0.1631	0.2129	0.1640	0.1028	0.1441	0.0917
$(N_1, N_2) = (64, 64)$						
$b_{0,1} = 0.1300$	0.1161	0.0414	0.1253	0.0376	0.1101	0.0414
$b_{1,0} = -0.1250$	-0.0981	0.5402	-0.1132	0.2076	-0.0727	0.1813
$b_{1,1} = 0.1930$	0.1764	0.0820	0.1879	0.0445	0.1732	0.0461

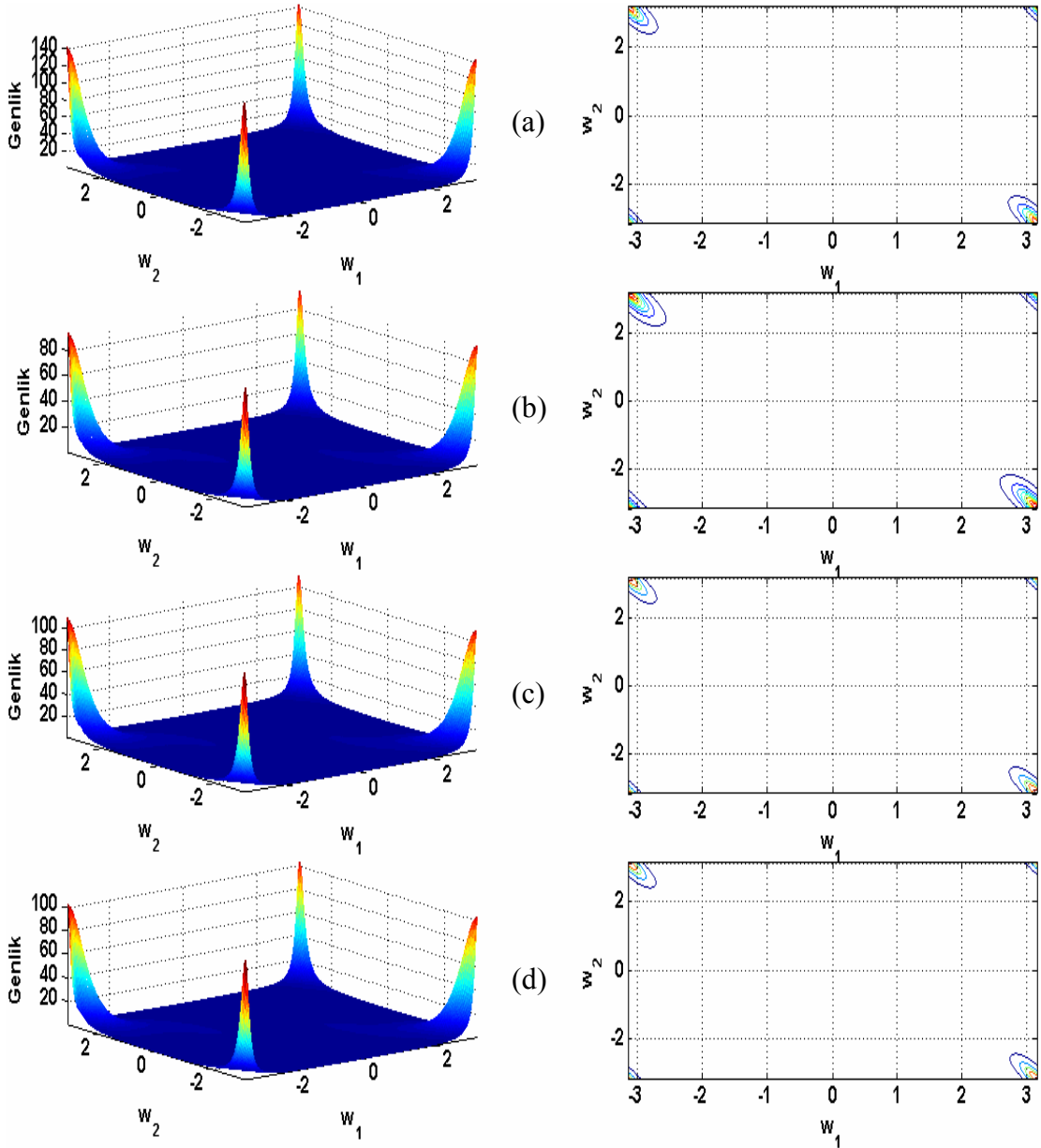
Tablo 6.12: Tablo 6.10 ve Tablo 6.11 ’de verilen istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirmesi.

Başarım Ölçütleri	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem (Değişik Durum)	Zhang (1991)	2-B DYW Yaklaşımı
	MA	MA	MA	AR
$(N_1, N_2) = (32, 32)$				
L_1 -normu	0.0594	0.0560	0.0836	0.1842
L_2 -normu	0.0573	0.0419	0.0670	0.1181
L_∞ -normu	0.0753	0.0469	0.0840	0.1335
<i>Frobenius</i> -normu	0.0619	0.0434	0.0694	0.1367
I - S mesafe ölçüsü	0.017843	0.017282	0.024896	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$				
L_1 -normu	0.0305	0.0118	0.0523	0.0435
L_2 -normu	0.0326	0.0130	0.0564	0.0317
L_∞ -normu	0.0435	0.0169	0.0721	0.0355
<i>Frobenius</i> -normu	0.0345	0.0137	0.0593	0.0343
I - S mesafe ölçüsü	0.001120	0.000657	0.002357	

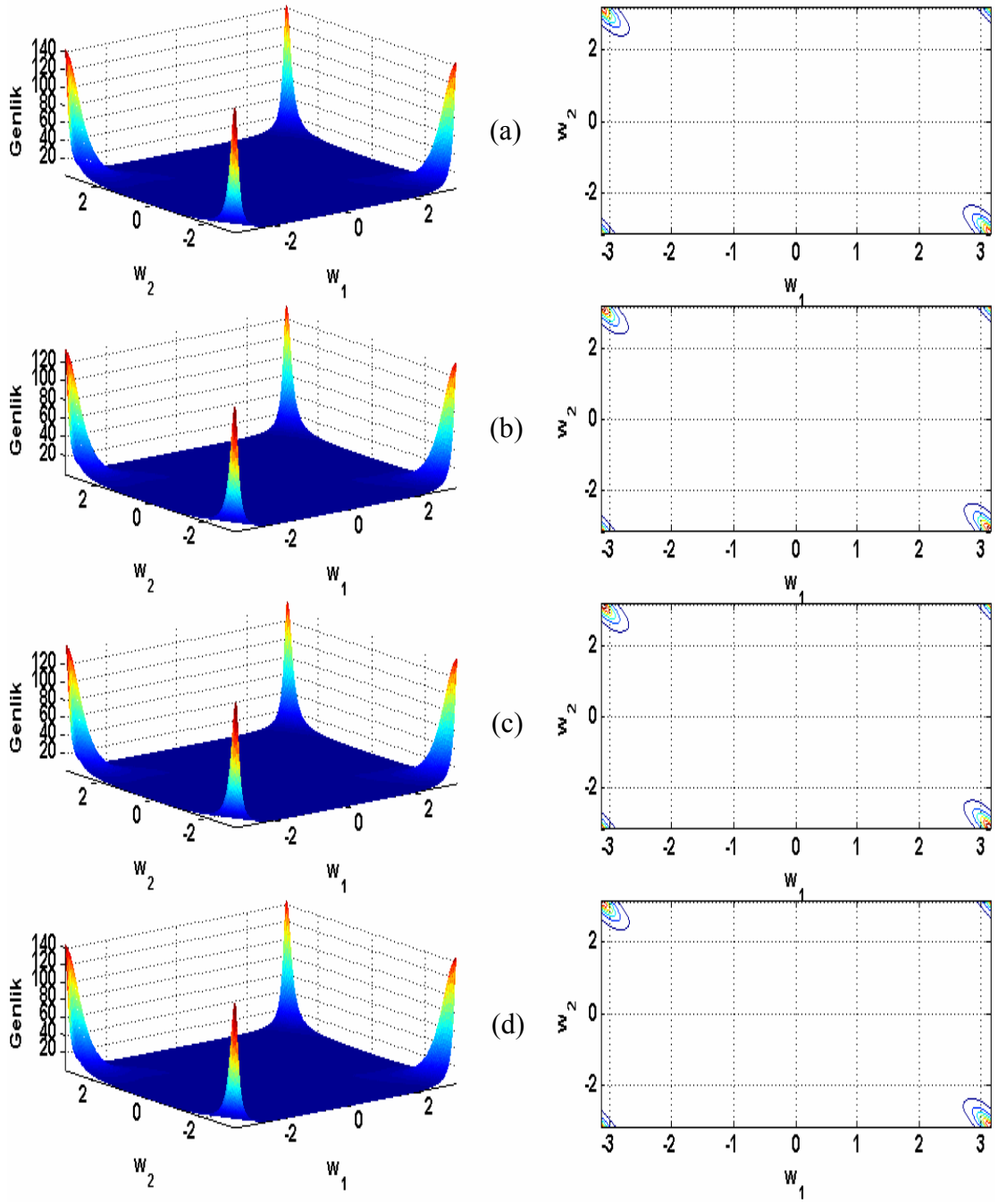
Tablo 6.12’deki norm değerleri ve I-S mesafe ölçüleri göstermektedir ki önerilen yöntemlerle elde edilen kestirimler gerçeklerine, Zhang (1991) ile elde edilenlerden daha yakındır. Bu yakınlığı, Şekil 6.15 ve Şekil 6.16’da verilen izge görüntülerinden de görebilmek mümkündür.

Tablo 6.8, Tablo 6.9, Şekil 6.13 ve Şekil 6.14’den de görüleceği üzere önerilen yöntem ve önerilen yöntemin değişik durumu, geniş-bantlı ARMA model için hemen hemen birbirine yakın sonuçlar üretmişti: HFD’nün MA parametre kestirimlerine etkisi fazla değildir. Ancak dar-bantlı model için bu etkinin varlığını, her iki veri boyutu için Tablo 6.11’deki standart sapma değerlerinden görmek mümkündür. Ayrıca Tablo 6.12’de

$(N_1, N_2) = (64, 64)$ için hesaplanan norm değerlerinden ve I-S mesafe ölçülerinden, önerilen yöntemin değişik durumunun sağladığı iyileşme kolaylıkla görülebilir. Buna göre, dar-bantlı süreçleri karakterize eden model parametrelerinin kestiriminde çözünürlüğün azalmasına neden olan HFD'nün yumuşatma etkisi, önerilen yöntemin değişik durumuyla çözülmeye çalışılmıştır. Özellikle küçük veri boyutunda, MA parametrelerinin kestirim doğruluğu ve tutarlılığının AR parametre kestirimleriyle yüksek oranda etkilendiğini söylemek yanlış olmaz (Tablo 6.10 ve Tablo 11).



Şekil 6.15: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.



Şekil 6.16: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.

Bölüm 4’de önerilen yöntem ve Zhang (1991) yöntemini kullanarak geniş-bantlı ve dar-bantlı modeller için gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde izlenen yol, son olarak (6.3)’deki karma-tip ARMA model için de tekrarlanmıştır. Karma-tip ARMA modeli için 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimlerine ilişkin istatistikler, Tablo 6.13’de verilmiştir.

Tablo 6.13: Karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli için, 2-B DYW denklemi yaklaşımını kullanarak elde edilen AR parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	$(N_1, N_2) = (32, 32)$		$(N_1, N_2) = (64, 64)$	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
$a_{0,1} = 0.1500$	0.1605	0.5347	0.1551	0.1502
$a_{0,2} = 0.0600$	0.0803	0.6076	0.0651	0.1166
$a_{1,0} = 0.0800$	0.1084	0.6029	0.0768	0.1406
$a_{1,1} = -0.1000$	-0.1604	0.3339	-0.1121	0.1329
$a_{1,2} = 0.0530$	0.0098	0.3387	0.0510	0.1289
$a_{2,0} = -0.0500$	-0.0327	0.4499	-0.0445	0.1430
$a_{2,1} = 0.1300$	0.1634	0.3786	0.1306	0.1249
$a_{2,2} = 0.1150$	0.1794	0.4630	0.1279	0.1258

Tablo 6.14: Bölüm 4'te önerilen yöntem ve Zhang (1991) yönteminin karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeli için ürettiği MA parametre kestirimleri.

Gerçek Değerler	Önerilen Yöntem		Önerilen Yöntem (Değişik Durum)		Zhang (1991)	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
$(N_1, N_2) = (32, 32)$						
$b_{0,1} = 0.2000$	0.2132	0.5354	0.1793	0.2908	0.1892	0.2784
$b_{0,2} = 0.2300$	0.2286	0.6004	0.1853	0.2146	0.1692	0.1512
$b_{1,0} = 0.1500$	0.1765	0.6071	0.1175	0.2785	0.1447	0.2537
$b_{1,1} = 0.1800$	0.0962	0.3308	0.0947	0.2058	0.1127	0.1937
$b_{1,2} = 0.1600$	0.1035	0.3415	0.1298	0.1432	0.1317	0.1174
$b_{2,0} = 0.1750$	0.1685	0.4305	0.1607	0.2126	0.1744	0.1705
$b_{2,1} = 0.2400$	0.2493	0.3042	0.1924	0.1480	0.1700	0.1265
$b_{2,2} = 0.3000$	0.3106	0.3669	0.2371	0.1669	0.1683	0.1166
$(N_1, N_2) = (64, 64)$						
$b_{0,1} = 0.2000$	0.2048	0.1491	0.2032	0.1436	0.2787	0.1306
$b_{0,2} = 0.2300$	0.2266	0.1123	0.2216	0.1063	0.2138	0.0873
$b_{1,0} = 0.1500$	0.1429	0.1382	0.1432	0.1334	0.2143	0.1395
$b_{1,1} = 0.1800$	0.1567	0.1296	0.1594	0.1228	0.1890	0.1152
$b_{1,2} = 0.1600$	0.1483	0.1120	0.1454	0.1041	0.1434	0.0913
$b_{2,0} = 0.1750$	0.1682	0.1389	0.1708	0.1301	0.2133	0.1003
$b_{2,1} = 0.2400$	0.2292	0.1192	0.2207	0.1109	0.2076	0.0871
$b_{2,2} = 0.3000$	0.2953	0.0903	0.2850	0.0831	0.2120	0.0603

Geniş-bantlı ve dar-bantlı ARMA modellerden farklı olarak, karma-tip ARMA model için en iyi parametre ve izge kestirimleri, Bölüm 4'de önerilen yöntemin kendisi ile elde edilmiştir. Tablo 6.14'deki parametre kestirimlerinden ve bu parametrelere ilişkin Tablo 6.15'deki norm değerlerinden bu sonuca ulaşmak mümkündür. Gerçek ve kestirilen izge

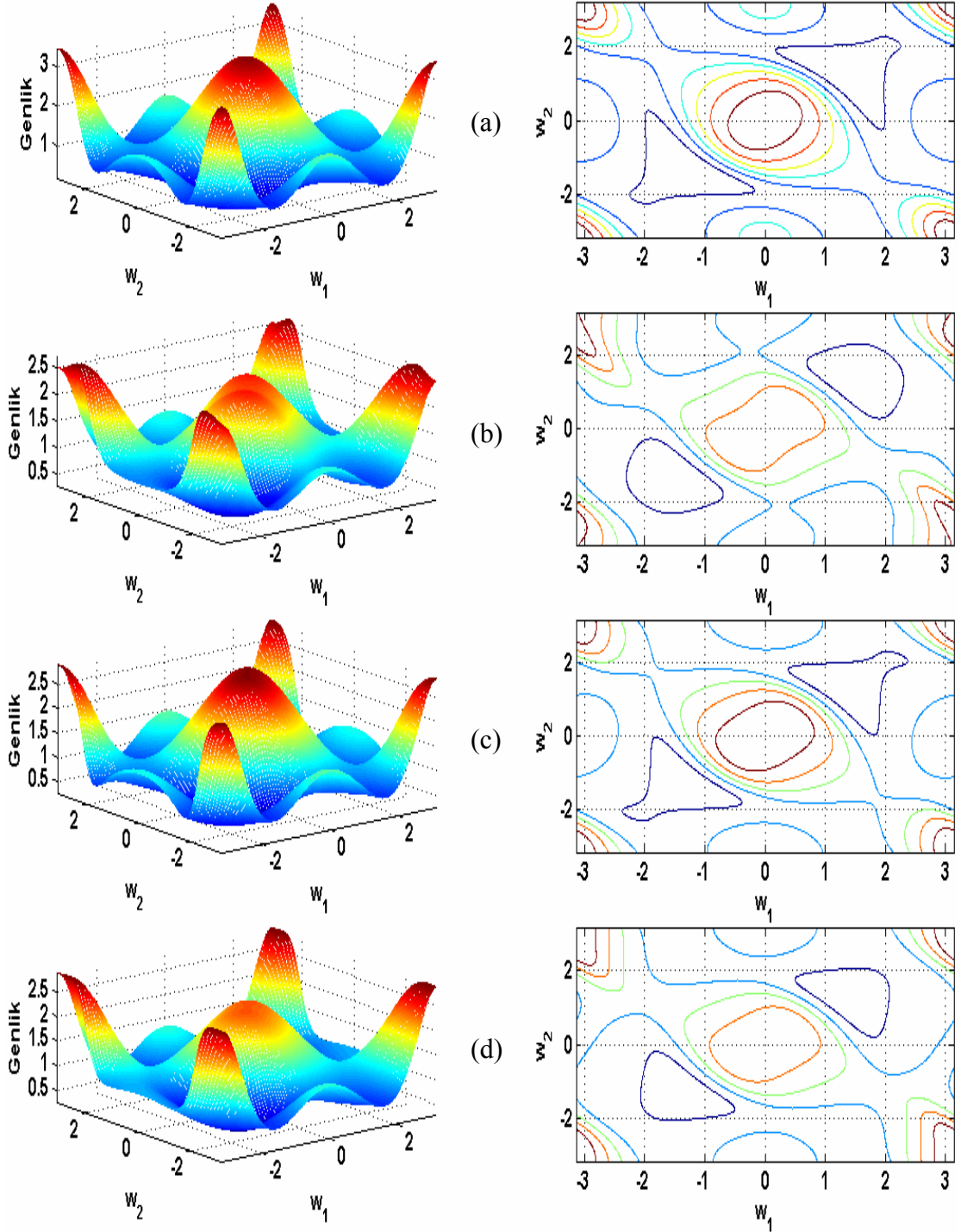
örneklerinden hesaplanan Tablo 6.15'deki I-S mesafe ölçüleri de bu sonucu desteklemektedir.

Tablo 6.15: Tablo 6.13 ve Tablo 6.14 'de verilen istatistiklerin başarımlar ölçütlerine göre değerlendirilmesi.

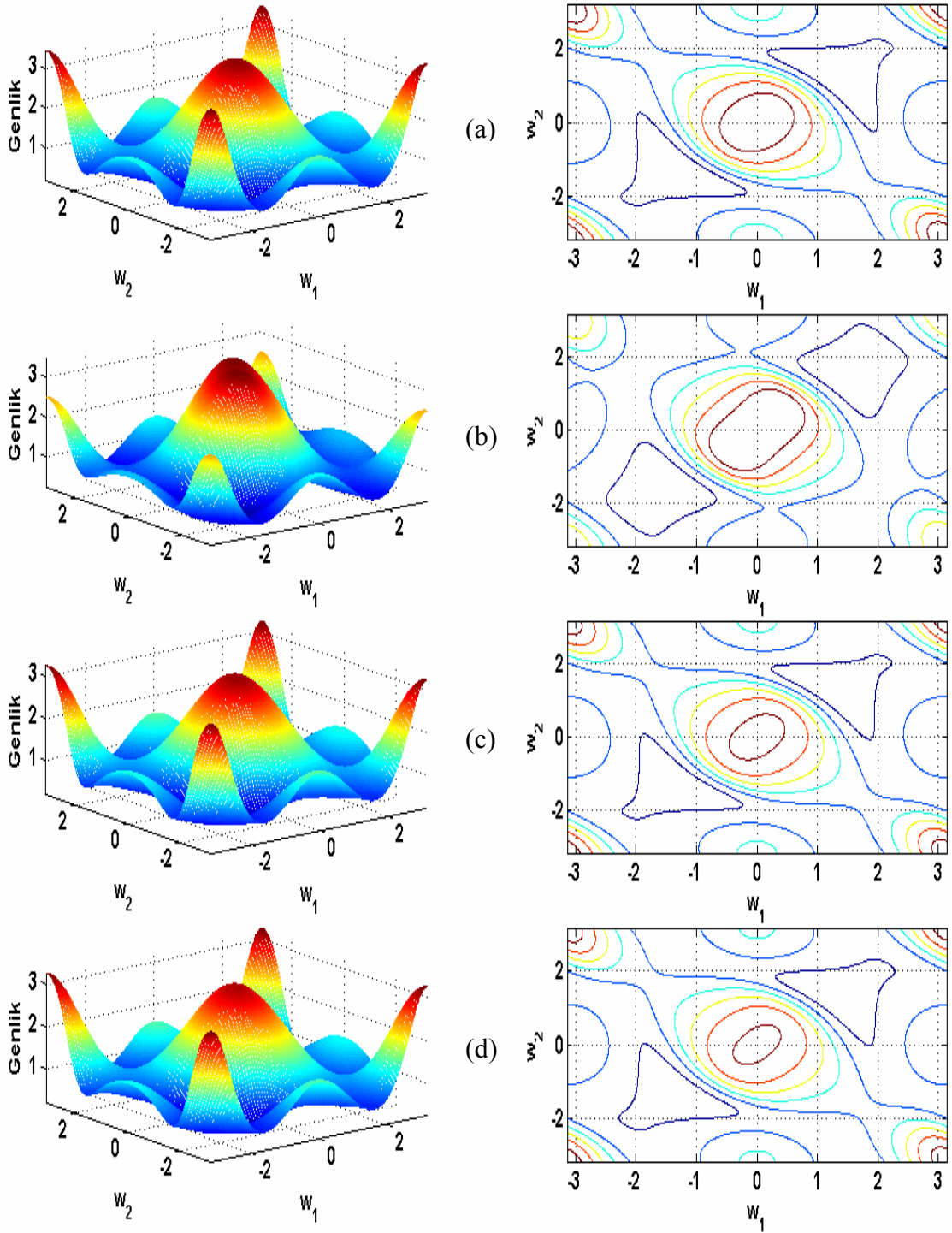
Başarımlar Ölçütleri	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem (Değişik Durum)	Zhang, (1991)	2-B DYW Yaklaşımı
	MA	MA	MA	AR
$(N_1, N_2) = (32, 32)$				
L_1 -normu	0.1063	0.1536	0.2208	0.1279
L_2 -normu	0.1060	0.1270	0.1702	0.1037
L_∞ -normu	0.1668	0.1480	0.2022	0.1320
<i>Frobenius</i> -normu	0.1065	0.1346	0.1772	0.1113
I - S mesafe ölçüsü	0.004638	0.026060	0.047480	
$(N_1, N_2) = (64, 64)$				
L_1 -normu	0.0388	0.0431	0.1209	0.0199
L_2 -normu	0.0302	0.0361	0.1099	0.0166
L_∞ -normu	0.0420	0.0420	0.1588	0.0189
<i>Frobenius</i> -normu	0.0308	0.0371	0.1457	0.0202
I - S mesafe ölçüsü	0.000706	0.001333	0.030685	

Benzetim sonuçları göstermektedir ki dar-bantlı ARMA modelde olduğu gibi karma-tip ARMA modelde de MA parametre kestirimlerinin doğruluğu ve tutarlılığı, AR parametre kestirimleriyle doğrudan etkilenmektedir. Özellikle küçük veri boyutunda, bu durum açıkça görülmektedir. Tablo 6.13'de $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için elde edilen AR parametre kestirimlerinin standart sapma değerleri, $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için elde edilenlere göre oldukça yüksektir. Benzer şekilde, bu değerlere karşı düşen, önerilen yöntemin kendisi ile elde edilen Tablo 6.14'deki MA parametre kestirimlerinin de standart sapmaları $(N_1, N_2) = (64, 64)$ veri boyutu ile elde edilenlere göre oldukça yüksektir. $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için ilginçtir ki önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen parametre kestirimlerinin standart sapmaları, önerilen yöntemin kendisi ile elde edilen standart sapma değerlerinden oldukça küçüktür, hemen hemen yarısına denktir. Ancak, yine ilginçtir ki veri boyutu arttığında yani $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, önerilen yöntemin kendisi ve değişik durumu ile elde edilen MA parametre kestirimlerinin standart sapma değerleri arasında çok belirgin bir farkın olmadığı Tablo 6.14'deki sonuçlardan görülmektedir. Çünkü, büyük veri boyutunda AR parametre kestirimlerinin de tutarlılığı (consistency) artmaktadır: standart sapma değerleri küçülmektedir.

Şekil 6.17 ve Şekil 6.18’de verilen güç izge yoğunluk kestirimleri incelendiğinde her iki veri boyutunda da, önerilen yöntemin daha iyi sonuçlar ürettiği görülmektedir. Tablo 6.15’deki I-S mesafe ölçüleri de bu düşüncüyü desteklemektedir.



Şekil 6.17: $(N_1, N_2) = (32, 32)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.



Şekil 6.18: $(N_1, N_2) = (64, 64)$ için, karma-tip ARMA(2,2,2,2) modeline ilişkin GİY işlevlerinin genlik görüntüleri ve eş-yüzey eğrileri: (a) Gerçek güç izgesi; (b) Zhang (1991) yönteminin ürettiği güç izgesi; (c) Önerilen yöntemin ürettiği güç izgesi; (d) Önerilen yöntemin değişik durumu ile elde edilen güç izgesi.

6.3.2. Bilgisayar Benzetimleri ile Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması

(6.1)-(6.3)'teki modellerden üretilen $\{(N_1 \times N_2)\} = \{(32 \times 32), (64 \times 64)\}$ boyutlu veri kümelerini, Bölüm 4'te önerilen yöntemde ve Zhang (1991) yönteminde eşzamanlı

kullanarak gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Karma-tip ARMA model hariç diğer modeller için hem izge hem de parametre kestirimleri anlamında en iyi sonuçlara, önerilen yöntemin değişik durumu ile ulaşıldığı görülmektedir. Karma-tip ARMA model için en iyi parametre ve izge kestirimleri ise, Bölüm 4’de önerilen yöntemin kendisi ile elde edilmiştir.
- MA parametre kestirimlerinin standart sapmaları incelendiğinde, karşılaştırılan yöntemlerle elde edilen MA parametre kestirimlerine ilişkin standart sapmaların AR parametre kestirimleriyle doğrudan doğruya etkilendiği görülmektedir. Örneğin, geniş-bantlı ARMA model için AR parametre kestirimlerine karşı düşen standart sapmaların oldukça küçük olduğu görülmektedir. Buna karşılık MA parametreleri için hesaplanan standart sapmalar da küçüktür. Benzer şekilde dar-bantlı ARMA modelin kestirilen AR parametrelerinden $a_{1,0}$ parametresine ilişkin standart sapma değeri, diğerlerine göre oldukça yüksektir. Buna karşılık, kestirilen MA parametrelerinden $b_{1,0}$ parametresine ilişkin standart sapma değerinin de diğerlerine göre yüksek olduğu görülmektedir. Karma-tip ARMA modelde ise özellikle küçük veri boyutunda, önerilen yöntemin kendisi ile elde edilen MA parametre kestirimlerine ilişkin standart sapmaların AR parametre kestirimleriyle doğrudan doğruya etkilendiği açıkça görülmektedir.

Sonuç olarak karşılaştırılan yöntemler için, MA parametre kestirimlerinin tutarlılığının ve gerçek değerlere yakınlığının her bir bilgisayar koşumunda elde edilen AR parametre kestirimlerinin tutarlılığı ve gerçek değerlere yakınlığı ile doğrudan doğruya etkilendiği gözlenmiştir.

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

ARMA model parametrelerinin kestirimindeki en büyük zorluk, doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümünü gerektirmesinden dolayı MA parametrelerinin kestirimi problemidir. Bu çalışmada ÇD destek bölgesine sahip doğrusal zamanla değişmeyen 2-B ARMA model parametrelerinin verilen $(N_1 \times N_2)$ boyutlu gözlem verisinden kestirimi amacıyla iki yeni yöntem önerilmiştir. Önerilen her iki yöntem, üç-aşamalı olup bu yöntemlerden biri EAR model yaklaşımına diğeri ise ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayanmaktadır. EAR model yaklaşımı, (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modelin sonsuz mertebeden 2-B bir AR modele eşdeğer olduğu düşüncesinden yola çıkarak türetilmiştir. Buna göre, gerçekleştirilebilirlik açısından, (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden 2-B ARMA modelin küçük hatalarla (L_1, L_2) . mertebeden bir 2-B EAR modeliyle temsil edilebileceği düşünülerek ARMA model parametrelerinin kestirimi için gerekli olan ifadeler türetilmiştir. MA ve AR parametrelerinin kestirimi için türetilen bu ifadelerde, EAR model parametrelerine ihtiyaç vardır. Bu parametreler ise, verilen $(N_1 \times N_2)$ boyutlu gözlem verisinden hesaplanan özilinti katsayılarının oluşturduğu 2-B DYW denkleminin çözümüyle elde edilmektedir. EAR model yaklaşımına dayalı yöntemden farklı olarak, ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemde, doğrudan doğruya ARMA model yapısı üzerinden modele ilişkin kestirilen cepstrum katsayılarını ve AR parametrelerini kullanarak ÇD destek bölgesine sahip 2-B ARMA modelin MA parametrelerinin kestirimini gerçekleyen özyinelemeli denklemler türetilmiştir. MA parametrelerinin kestirimi için gereken cepstrum katsayıları ve AR parametreleri, sırasıyla periodogram tekniği ve Zhang ve diğ., (1991) tarafından türetilen 2-B DYW denklemi yaklaşımından faydalanarak elde edilmiştir.

Önerilen yöntemlerin başarımı, bilgisayar benzetimleri ile sınanmıştır. Bunun için, çeşitli mertebeden 2-B ARMA model yapıları kullanılmıştır. Kullanılan sistem modellerinde MA kısmına ilişkin ilk parametrelerin $b_{0,0} = 1$ olduğu varsayılmıştır. Çünkü önerilen yöntemlerdeki ifadeler, bu varsayım dikkate alınarak türetilmiştir. Bilgisayar benzetimlerinde, Bölüm 5'te verilen başarımlar ölçütleri üzerinden, önerilen her

bir yöntemin Zhang (1991) yöntemi ile ayrı ayrı karşılaştırması yapılmıştır: geniş-bantlı, dar-bantlı, ve karma-tip 2-B ARMA model yapılarını kullanarak üretilen ($N_1 \times N_2$) boyutlu veri kümeleri, birbirleriyle karşılaştırılan yöntemlere eşzamanlı olarak uygulanmıştır. Elde edilen parametre ve izge kestirimleri karşılaştırıldığında, önerilen yöntemlerle daha iyi sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür.

Yapısından dolayı, Zhang (1991) algoritmasıyla gerçekleştirilen parametre kestirim işleminde çoğu zaman yakınsama problemiyle karşılaşmıştır. Giriş bölümünde de bahsedildiği gibi Zhang (1991) algoritmasında MA parametrelerinin kestirimi işlemi, bir önceki ve o anki parametre kestirimleri arasındaki mutlak hata $\varepsilon \leq 0.05$ şartını sağlayana kadar devam etmektedir. Yani, bu şart gerçekleşinceye kadar algoritmanın koşumuna devam edilmektedir. Her bir koşumda kestirim işlemleri tekrar edilmekte ve matris tersine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ise, işlemsel karmaşıklığın artması ve yakınsama için zaman harcayan işlemlerin yapılması anlamına gelmektedir. Önerilen yöntemlerde, bu şekilde bir yakınsama probleminin olmaması ve Zhang (1991)'deki gibi matris tersine ihtiyaç duyulmaması, önerilen yöntemler için bir üstünlük olarak yorumlanabilir.

Bu tez çalışmasında ÇD destek bölgeli 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen yöntemler, basit bir düzenleme ile 2-B MA rasgele alanların modellenmesi amacıyla da kullanılabilir. Bu durumda önerilen yöntemlerde, $a_{0,0} = 1$ dışındaki tüm AR parametreleri sıfır alınmalıdır.

Önerilen yöntemlerin parametre kestirim başarımlarını artırmak ve bu yöntemleri çeşitli uygulama alanlarında kullanmak amacıyla gelecekte yapılabilecek bazı çalışmalar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1- EAR model yaklaşımına dayalı parametre kestirimci ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin yüksek doğrulukta kestirimi, EAR model katsayılarına bağlıdır. Bu çalışmada, ARMA sürece ilişkin EAR katsayılarını kestirmek amacıyla 2-B DYW denklemi yaklaşımından faydalanılmıştır. Ancak, 1-B durumda olduğu gibi, DYW denklemleri yaklaşımına dayalı olarak EAR model katsayılarının kestirimi küçük veri kayıtları için ve gürültü gibi bozucu etkenlerin varlığında hem parametre kestirimleri hem de tutarlılık anlamında tatmin edici sonuçlar üretmeyebilir (Friedlander ve diğ., 1984b; Friedlander ve diğ., 1985; Li ve diğ., 1986). Bu durumda kafes tabanlı algoritmaların kullanımı, daha iyi sonuçların elde edilmesini sağlayabilir. Bunun için, literatürdeki ÇD destek bölgesi için uygun olan etkin kafes yapıları kullanılabilir

(Parker ve diğ., 1984; Kayran, 1996a; Kayran ve diğ., 1997). Literatürdeki bu kafes yapıları, 2-B rasgele alanların AR modellenmesi için tasarlanmış olup ARMA sürece uygulanması durumunda EAR model katsayılarının elde edilmesi sağlanmış olacaktır.

2- EAR model yaklaşımına dayalı parametre kestiriminde (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden ÇD destek bölge 2-B ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin yüksek doğrulukta kestirimi için gerekli olan EAR model parametrelerinin sayısına karşı düşen ve EAR model mertebeleri olarak adlandırılan L_1 ve L_2 'nin optimum değerinin belirlenmesi gerekir. Daha öncede ifade edildiği gibi L_1 ve L_2 'nin alabileceği en küçük değerler, $L_1 = p_1 + q_1$ ve $L_2 = p_2 + q_2$ idi. Ancak, bu değerlerle elde edilen kestirimler çoğu zaman iyi sonuçlar vermez. Bilgisayar benzetimlerinde L_1 ve L_2 'nin optimum değerleri, gerçek ve kestirilen GİY işlevlerinin örneklerinden hesaplanan I-S mesafe ölçülerine göre deneysel olarak belirlenmiştir. En küçük I-S ölçüsünü veren L_1 ve L_2 değerleri, optimum EAR model mertebeleri olarak seçilmiştir. L_1 ve L_2 'nin optimum değerinin otomatik olarak belirlenebilmesi, uygulamada kullanılabilirlik açısından önemli olacaktır.

3- ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımına dayalı yöntemde MA parametrelerinin kestirim doğruluğu, cepstrum katsayılarının ve AR parametrelerinin kestiriminde kullanılan yöntemlerin başarımına bağlıdır. Verilen gözlem verisinden cepstrum katsayılarının kestirimi için, ayrıntıları Bölüm 4'te bahsedilen parametrik olmayan izge kestirim yöntemlerinden birisi olan periodogram yönteminden faydalanılmıştır. Periodogram yöntemi, dikdörtgen pencerelenmiş gözlem verisinin $((N_1 \times N_2)$ boyutlu veri kümesi) HFD'nün hesaplanmasına karşı düşer (Hayes, 1996). Cepstrum katsayılarının kestiriminde kullanılan periodogram yöntemindeki HFD'nün sebep olduğu yumuşatmanın olumsuz etkisinin fazlaca hissedilebileceği durumlara önlem olarak ayrıca, önerilen yöntemin değişik bir durumu da türetilmiştir. Önerilen yöntemin değişik durumunda da, cepstrum katsayıları için periodogram yönteminden faydalanılmıştır. Parametre kestirim başarımını artırmak amacıyla aynı periodogram yöntemi; *Bartlett*, *Hanning*, *Hamming*, ve *Blackman* gibi farklı pencereleme teknikleri ile beraber kullanılabilir. Ayrıca, parametrik olmayan izge kestirimi için periodogramın değişik türevlerine karşı düşen *Bartlett*, *Welch*, veya *Blackman-Tukey* gibi daha başka yöntemlerden (Hayes, 1996) de faydalanılabilir ve her biri ile elde edilen MA parametre kestirimlerinin bir karşılaştırması yapılabilir.

4- EAR model yaklaşımında EAR model parametrelerinin kestiriminde olduğu gibi, ARMA-Cepstrum özyineleme yaklaşımında da AR parametrelerinin kestirimi için

DYW denklemi yönteminden faydalanılmıştır. Daha öncede ifade edildiği gibi, küçük veri boyutu için ve gürültünün varlığında DYW denklemlerinin çözümünden ARMA modelin AR parametrelerinin elde edilmesi genellikle düşük doğruluklu ve çoğu zaman yanlış ve tutarsız sonuçlar üretir. DYW denklemlerinin çözümünde gerekli olan özilinti katsayılarının yüksek doğrulukta elde edilememesi, bu olumsuzlukların ana nedeni olarak düşünülebilir. Bunun üstesinden gelmek amacıyla 1-B ARMA modelin AR parametrelerinin gürbüz ve tutarlı kestirimleri için literatürde çeşitli algoritmalar önerilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları; kafes yapılarına dayalı yöntemler (Li ve diğ., 1986; Li ve diğ., 1988), araç değişken (instrumental variable) yaklaşımına dayalı yöntemler (Friedlander, 1983; Friedlander, 1984; Stoica ve diğ., 1985; Zou ve diğ., 1991) olarak verilebilir. Küçük veri boyutları için ve gürültünün varlığında önerilen yöntemlerle tutarlılığı ve doğruluğu yüksek EAR ve AR parametre kestirimleri elde etmek amacıyla, literatürdeki bu 1-B yöntemlerin 2-B ARMA model için geliştirilmesine yönelik çalışmalar üzerinde durulabilir.

5- Çoğu zaman uygulamada, verilen 2-B veri kümesinin varsayılan modelden üretilmemiş olduğu durumlarla karşılaşmaktadır. Örnek olarak, toplamsal BGG ile bozulmuş n adet 2-B sinüsün toplamına karşı düşen zaman serisinden üretilen 2-B veri kümesi verilebilir. Böyle bir veriyi modellemek için tek çeyrek düzleme sahip 2-B ARMA modelin kullanımı durumunda, kestirilen model parametrelerinden elde edilen GİY işlevlerinin hem çözünürlüğü düşük olur hem de sinüsler doğru frekans yerlerinde modellenemeyebilir. Bu sorunun üstesinden gelmek için birçok araştırmacı (Jackson ve diğ., 1979; Therrien ve diğ., 1989; Rouquette ve diğ., 1999), birden fazla çeyrek düzleme ilişkin izgelerin harmonik ortalamasına karşı düşen birleştirilmiş izge kestiriminin elde edilmesi üzerinde durmuştur. Sonuç olarak, birbirini tamamlayan iki çeyrek düzleme ((1.çeyrek ve 2.çeyrek) veya (1.çeyrek ve 4.çeyrek) veya (2.çeyrek ve 3.çeyrek) veya (3.çeyrek ve 4.çeyrek)) ilişkin parametre kestirimlerinden bulunan izgelerin harmonik ortalamasıyla elde edilen yeni izgenin, sinüsleri daha iyi modelleyebildiğini göstermişlerdir (Jackson ve diğ., 1979; Therrien ve diğ., 1989; Rouquette ve diğ., 1999). Buna göre diğer bir çeyrek düzleme karşı düşen model parametrelerinin kestirimi için, önerilen yöntemler yeniden türetilebilir. Böylece, önerilen yöntemlerle iki çeyrek-düzlem için elde edilecek olan izge kestirimlerinin harmonik ortalamasına karşı düşen yeni izgenin sinüsleri modelleme yeteneği sınanabilir.

6- Bu tez çalışmasında önerilen yöntemler, görüntü işleme ve yüksek çözünürlüklü izge kestirim uygulamaları için elverişli olan simetrik olmayan yarı-düzlem destek bölgesine sahip 2-B ARMA model yapısı için genişletilebilir.

7- Parametre kestirim yöntemlerinin tutarlılığı hakkında bir karara varabilmek için kullanılan en genel ölçüt Cramer-Rao (C-R) alt sınırıdır. C-R alt sınırı, yansız bir kestirimci ile kestirilen her bir parametrenin varyansı veya standart sapması için bir alt sınır verir. Buna göre herhangi bir parametre kestirimcisinin yapabileceğinin en iyisi, C-R alt sınırını sağlamasıdır. Parametre kestiriminde kullanılan verinin uzunluğuna göre, literatürde tanımlanan iki alt sınır mevcuttur: asimtotik ve kesin (exact) C-R alt sınırları. Eğer kestirim için kullanılan veri kaydı yeterince büyükse (sonsuzaya yakın), bu durumda kestirimcinin performans analizi için asimtotik C-R alt sınırı göz önüne alınır. Ancak uygulamaların çoğunda, kestirim işlemleri küçük veri kayıtları üzerinden yapılır. Bu durumlarda asimtotik C-R alt sınırının kullanımı, kestirimci başarımını değerlendirmek için doğru ve güvenilir bir ölçüt sağlamaz. Kestirim için küçük veri kayıtlarının kullanılması durumunda kestirilen parametrelerin tutarlılığının analizi, kesin (exact) C-R alt sınır ölçütü ile sağlanır. Literatürde, 1-B ARMA model parametrelerinin C-R alt sınırının hesaplanması sağlayan birçok algoritma mevcuttur. Ancak, 2-B ARMA model parametrelerinin kesin C-R alt sınırını veren hemen hemen hiçbir çalışma literatürde mevcut değildir. Bu amaçla, Kızılkaya ve diğ., (2004) tarafından nedensel 1-B ARMA model parametrelerinin kesin (exact) C-R alt sınırının hesabı için türetilen algoritmanın ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model için genişletilmesi üzerine çalışmalar devam etmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Aydın Kızılkaya 1972 yılında doğdu. İlk öğrenimini Almanya’da, orta öğrenimini ise Denizli’nin Tavas ilçesinde tamamladıktan sonra, lisans diplomasını Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü’nden aldı. Yüksek lisans öğrenimini Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Elektrik ve Elektronik Mühendisliği anabilim dalında tamamlayan Aydın Kızılkaya, 1995 yılında Pamukkale Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı’nda doktora sınavını kazanarak 1 yıl İngilizce Hazırlık öğreniminden sonra, 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı’nda doktora çalışmalarına başladı. 2002 yılının Mart ayında Y.Ö.K.’ün ilgili kanunu gereği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde araştırma görevlisi olarak görevlendirildi ve halen bu görevini sürdürmektedir.