

**HOMOGEN OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN
KİRİŞİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh.Coşkun AKTURAN
(501001197)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 MAYIS 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 MAYIS 2003**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan ENGİN
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Necla KADIOĞLU(İ.T.Ü)
Yrd.Doç.Dr. İrfan COŞKUN(Y.T.Ü)**

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında, bana yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN'e, her konuda destek olan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

MAYIS 2003

Coşkun AKTURAN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanımı	1
1.2 Konu ile İlgili Çalışmalar	5
1.3 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı	
2. PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ	6
2.1 Problemin Tanımı	6
2.2 Homogen Zemin Hali	7
2.2.1 Birinci hal $\overline{\Omega}_0^2 < 1$	9
2.2.2 İkinci hal $\overline{\Omega}_0^2 > 1$	10
2.3 Yatak Katsayısının Ani Değişim Hali	11
2.3.1 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ olması hali	18
2.3.2 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ olması hali	19
2.4 Yatak Katsayısının Sürekli Değişim Hali	20
2.5 Rasgele Zorlama Hali	24
2.5.1 Serbest Kiriş Denklemi	24
2.5.2 Orta Noktadan P(t) Kuvveti ile Yüklü Kiriş	28
2.5.3 Kirişin $X = L/3$ de Yüklenmesi Hali	32
3. SAYISAL SONUÇLAR	33
3.1 Yatak Katsayısının Ani Değişim Hali	33
3.2 Yatak Katsayısının Sürekli Değişim Hali	39
3.3 Rasgele Zorlama Hali	46
3.4 Sonuçlar	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1 :Çeşitli zemin türleri için ortalama K_0 değerleri	4
Tablo 2.1 :Serbest kirişe ait doğal frekanslar	27

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 :Elastik zemine oturan kiriş durumu	6
Şekil 2.2 :Homogen hal için elastik zemine oturan kiriş durumu.....	7
Şekil 2.3 :Zemin yatak katsayısının ani olarak değişmesi hali.....	12
Şekil 3.1 : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ olması halinde kiriş elastik eğrisi	34
Şekil 3.2 : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ olması halinde kiriş elastik eğrisi	34
Şekil 3.3 :Moment ve kesme kuvvetinin değişimi	35
Şekil 3.4 : $\lambda = 125$ için homogen zeminde $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	36
Şekil 3.5 : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ olması durumunda $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	37
Şekil 3.6 : $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ olması durumunda $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	38
Şekil 3.7 : $\overline{\Omega}_0^2 = 0,5$ olması halinde kiriş elastik eğrisi	39
Şekil 3.8 : $\overline{\Omega}_0^2 = 3$ olması halinde kiriş elastik eğrisi	41
Şekil 3.9 : $a = -0,5$ için $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	43
Şekil 3.10 : $a = 0,5$ için $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	44
Şekil 3.11 : $a = 5$ için $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi	45
Şekil 3.12 :Serbest kirişin mod şekilleri	46
Şekil 3.13 :Zamana bağlı olarak kiriş elastik eğrisinin değişimi	47
Şekil 3.14 :Kiriş uç ve orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi	48
Şekil 3.15 :Zamana bağlı olarak kiriş elastik eğrisinin değişimi	49
Şekil 3.16 :Kiriş uç ve orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi	49
Şekil 3.17 :Zamana bağlı olarak kiriş elastik eğrisinin değişimi	50

Şekil 3.18	:Kiriş uç ve orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi	51
-------------------	--	-----------

SEMBOL LİSTESİ

E	:Elastisite modülü
I	:Eylemsizlik momenti
L	:Kiriş uzunluğu
Ω	:Zorlama frekansı
w	:Kirişin düşey yer değiştirmesi
k	:Zemin yatak katsayısı
δ	:Dirac deltası
ξ	:Boyutsuz koordinat
t	:Zaman parametresi
P	:Tekil kuvvet şiddeti
A_1, A_2, B_1, B_2	:Diferansiyel denklemlerin bilinmeyen katsayıları
C_1, C_2, D_1, D_2	:Diferansiyel denklemlerin bilinmeyen katsayıları
a	:Zemin yatak katsayısının değişim oranı
k_0	:Başlangıçtaki yatak katsayısı
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	:Zemin yatak katsayısına bağlı boyutsuz parametreler
β	:Doğal frekans
ϕ_n	:Mod fonksiyonu
$\overline{\beta}$	:Zemin yatak katsayısının değişimini gösteren boyutsuz parametre

HOMOGEN OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada homogen olmayan elastik zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir kirişin zorlanmış titreşimleri incelenmiştir.

Birinci bölümde problemin analizi, kullanıldığı alanlar ve çözüm yöntemlerinden söz edilerek genel tanımlar ve açıklamalar yapılmıştır. Daha önceden konu ile ilgili çalışmalarla birlikte , yapılan çalışmanın amaç ve kapsamı verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak homogen zemin hali için kiriş elastik eğrisinin yönetici denklemi verilmiş ve sınır şartlarına bağlı olarak problemin çözümleri yapılmıştır. Zeminin homogen olmaması durumunda zemin yatak katsayısının ani olarak değişimi halinde çözüm homogen zemin halindeki benzer şekilde yapılmıştır. Bu durum için sistem zemin yatak katsayısının ani olarak değiştiği noktadan bölünerek iki ayrı bölgede çözüme gidilmiştir. Sınır ve süreklilik şartları kullanılarak kirişin düşey yer değiştirme genlikleri incelenmiştir. Zemin yatak katsayısının sürekli olarak değişimi halinde öncelikle problemin tanımı yapılmış, temel denklemleri oluşturulmuş, kuvvet serisi yardımıyla da sınır koşullarına bağlı olarak problemin çözümü yapılmıştır. Çözümlerde doğal frekanslarda elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak kirişin rasgele zorlama hali incelenmiştir. Önce genel elastik eğri denklemi verilmiş, bundan yola çıkarak kirişin tekil kuvvetle yüklenmesi hali ele alınmış ve mod fonksiyonları yardımı ile çözümleri yapılmıştır. Yükün sabit olmaması halinde Runge-Kutta tekniği kullanılarak zaman göre sayısal çözüm yapılmıştır.

Sonuçlar bölümünde, ikinci bölümde incelenen durumlar için sayısal örnekler verilmiş, Excel programı yardımı ile elde edilen sonuçlar şekillerle gösterilmiştir.

FORCED VIBRATIONS OF A BEAM ON NON HOMOGENEOUS ELASTIC FOUNDATION

SUMMARY

In this study, the forced vibrations of a finite beam resting on a non homogeneous elastic foundation is studied.

In the first chapter, the problems mostly used areas, analysis and general statements are explained. Also previous studies related to the subject and main purpose of the study is given.

In the second chapter, firstly governing equation and solution for homogeneous case are given. Using the boundary conditions, solutions of the problem are obtained. In non-homogeneous case, the foundation modulus suddenly changes. In this case system is divided into two parts and by using boundary and continuity conditions problem is solved in the same way as in homogeneous case. In the state of continuous change in foundation modulus, first governing equation of the problem is given, then by using power series method solutions of the problem are obtained. In these solutions natural frequencies are also obtained. At the end of this chapter random vibrations case is studied. In this case for unstationary force firstly, Eigen functions of a free beam are obtained. Then using this eigen functions, governing equation is reduced a system of ordinary differential equation. The RungeKutta scheme is used. Then various random forcing, the elastic curve of the beam are obtained related to time.

In the third chapter, numerical and graphical results of the problems are given. The Excel program is used in the numerical process.

1. GİRİŞ

1.1 Problemin Tanımı

Elastik zemin üzerine oturan kirişler uygulamada çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Geçmiş yıllarda havaalanı yapılarında yumuşak filamentlerin kullanımının artması, soğuk bölgelerde yapılan bina çalışmaları ile elastik veya viskoelastik zemine oturan kiriş, plak, veya kabuk problemlerinin çözümüne olan ihtiyaç artmış, uygulama alanının genişliği nedeniyle de bu konuda birçok araştırma yapılmıştır.

Elastik zemin üzerine oturan kirişlerin analizi üç aşamadan oluşmaktadır. Bunlardan birincisi ve en önemlisi yapının davranışı ve zemin tipi ile ilgili temel kabullerin yapılmasıdır. İkinci aşama zemin katsayısı, kiriş boyutu ve malzemesi gibi gerekli büyüklüklerin seçilmesidir. Üçüncü ve son aşama da birinci ve ikinci aşamalardan elde edilen bilgiler kullanılarak problemin matematiksel olarak çözülmesini içerir. Matematiksel metotlar kesin veya yaklaşık olabilir. Yaklaşık metotlar ile günümüze kadar grafik veya sayısal olarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Elastik zemine oturan sonlu kiriş problemlerinin genel matematiksel yolla çözümü yorucu ve güçtür. Sonsuz, yarı sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin davranışını etki çizgileri yardımıyla inceleyen dolaylı çözümler geliştirilmiştir. Ancak bu metotlarla çözüm dolaylı, oldukça yorucu ve zaman alıcı olduğundan ,geniş bir uygulama alanı bulamamışlardır.

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklar problemini ilk Winkler [1] incelemiş, teorisini esaslarını belirlemiş, daha sonra Zimmermann [2] elastik zemine oturan kirişler teorisini demiryolu üst yapılarının hesabına uygulamıştır. Yollarla hava meydanları iniş pistlerinin beton plaklarla inşa edilmeğe başlanması problemin önemini arttırmış ve bu konuda birçok araştırma yapılmıştır. Bunun yanında birçok araştırmacı da elastik zemine oturan kiriş teorisini zemin üstündeki kısımlarına yatay yükler etkileyen kazık ve palplanşların hesabında kullanmışlardır [3].

Elastik zemine oturan kiriş problemini matematiksel bağıntılarla belirlemek için bazı idealleştirmeler yapmak gerekir. Matematiksel çözümler de daima zeminin karışık ve

belirsiz elastik özellikleri, plastik deformasyon yapma olasılıkları ile sınırlanmıştır. Bu yüzden zeminin elastikliği için bazı kabuller yapmak gerekliliği doğmuştur.

Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileri hakkında yapılan hipotez olmuştur. Yani zeminin üzerindeki yapının bünye bağıntılarını yanında zeminin de bünye bağıntılarını ve aralarındaki etkileşimi bilmek gerekmektedir. Zeminin fiziksel ve mekanik özellikleri çeşitli araştırmacılar tarafından değişik şekillerde düşünülmüş ve tanımlanmıştır. Bu çalışmalar içinde en çok kullanılan hipotez Winkler hipotezidir. Bu hipotez, P zemin tepkilerinin y kiriş çökmeleri ile orantılı olduğu kabulüne dayanan $P=K_0y$ bağıntısı ile verilmiştir. K_0 , yatak katsayısı olarak adlandırılır. Bu hipotez yatak ortamının birbirine sonsuz yakın tekil yaylardan ibaret olduğunu belirtir. Zemin basınç deneyleri, yük belli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yükle orantılı olduğunu göstermiştir. Winkler hipotezinde problemin çözümünü oldukça basitleştiren, yatak katsayısının taban basıncı değerinden bağımsız olduğu varsayımıdır. Bunun yanında zeminin homogen olmamasından ötürü yatak katsayısı noktadan noktaya da değişebilir. Bu nedenle bir yatay düzlemin çeşitli noktalarında birbirinden farklı değerler alabileceği gibi, derinliğin artması ile de değişebilir.

Diğer taraftan zemine etkiyen kuvvetler yalnız etkidiği noktada şekil değiştirme oluşturur. Bu durumda zemin birbirinden bağımsız ve birbirine sonsuz yakın yaylardan bileşik olarak göz önüne alınarak bunların yalnız doğrudan doğruya yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Bunun sonucu olarak, zemin tamamen ayrı bir ortam olarak göz önüne alınmış olur. Aslında zeminin fiziksel özellikleri böyle matematiksel bağıntı ile ifade edilmekten daha karışık bir durum gösterir.

Mühendislikte Winkler hipotezine dayanarak iyi sonuçlar veren bazı önemli problemler vardır. Bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir veya iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar bunlara bazı önemli örneklerdir. Özellikle temel sisteminde Winkler hipotezini doğrulayan bazı önemli hususlar görülmüştür. Bu düşüncelerden hareketle, basitliğine rağmen Winkler hipotezinin, gerçek temel zemin durumunu bazı karmaşık

bağıntılarla veren hipotezlere göre daha yakın bir şekilde ifade ettiği sonucuna varılabilir [4].

1.2 Konu ile İlgili Çalışmalar

Uygulamalı mekaniğe ilk Winkler tarafından getirilen ve Zimmermann tarafından bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla kullanılan yatak katsayısının değeri birçok etkene, özellikle zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlıdır. Bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Biot [5] tam elastik ortama oturan yüklü kirişler için yatak katsayısının yalnız kiriş genişliğine değil, bir dereceye kadar kiriş eğilme rijitliğine bağlı olduğunu gösteren bağıntılar sunmuştur.

Terzaghi ve Peck [6], deneysel araştırmalar yaparak, aynı taban basıncı değeri için çökmelerin kiriş genişliğine bağlı olarak değiştiğini saptamışlar, buna dayanarak yatak katsayısının kiriş genişliği ile değişimini gösteren bir bağıntı vermişlerdir.

Sonlu kirişler hesabı en basit etki çizgileri yardımı ile yapılabilir. Çeşitli araştırmacılar bu amaçla ayrıntılı çizelgeler düzenlemişlerdir. En gelişmiş olanları Müllersdorf, Mölfer ve Grasshoff [7] tarafından yayınlananlardır.

Durelli ve Parks [8] tarafından, elastik zemin üzerine oturan sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin fotoelastik incelemesi yapılmıştır. Kirişler bir ve iki noktadan yüklenerek davranışları incelenmiş, bulunan sonuçlar kuramsal çözümle karşılaştırılmıştır.

Iyengar ve Anantharamu [9], elastik zemine oturan kirişlerin davranışlarını seriler yardımıyla incelemiştir.

Orta noktadan tekil yüklü kirişlerle ilgili başka bir çalışmayı da Rao ve Anandokrishan [10] başlangıç değerleri yöntemini kullanarak yapmış, bu kirişlerle ilgili çizelge ve eğriler vermişlerdir.

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli K_0 yatak katsayılarının sayısal değerleri, yayınlanmış gözlemler veya yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçları yardımıyla elde edilebilir. Çeşitli zemin türleri için K_0 yatak katsayılarının ortalama değerleri aşağıdaki tabloda derlenmiştir. (Tablo1.1)

Tablo 1.1 Çeşitli zemin türleri için ortalama K_0 değerleri

ZEMİN TÜRÜ	$K_0(t/m^3)$
BALÇIK, TURBA	<200
KİL, PLASTİK	500-1000
KİL, YARI SERT	1000-1500
KİL, SERT	1500-3000
DOLMA TOPRAK	1000-2000
KUM, GEVŞEK	1000-2000
KUM, ORTA SIKI	2000-5000
KUM, SIKI	5000-10000
KUM-ÇAKIL, SIKI	10000-15000
SAĞLAM ŞİST	<50000
KAYA	<200000

Miranda ve Nair [11], sonlu uzunlukta kirişlerin diferansiyel denkleminin çözümünü özel fonksiyonlarla yaparak buna ait sayısal örnekler vermişlerdir.

Dodge [12], yayınladığı çalışmasında elastik zemine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin davranışlarıyla ilgili etki fonksiyonları ve buna ait eğrileri oluşturmuştur.

Elastik zemine oturan kirişlerin statik/dinamik davranışı konusunda çok sayıda çalışma bulunmaktadır [13-14]. Elastik zemine oturan Euler-Bernoulli kirişlerinin dinamik analizinde analitik çözüm yöntemine ilave olarak sonlu elemanlar yöntemi de kullanılmaktadır. Bu çalışmalarda, Pawlowic ve Vylie [15] zemin modülünün kiriş boyunca doğrusal değişmesi halinde kirişin doğal frekanslarını kuvvet serileri yardımıyla, Karamanlidis ve Prakash [16], iki parametrelili zemine oturan kirişlerde eksenel yükü de gözönüne alarak doğal frekansları analitik ve sonlu elemanlar yöntemleri yardımıyla elde etmişlerdir. Bundan başka Williams ve Kennedy [17], Winkler zeminine oturan kirişlerin dinamik davranışını sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiş, Rosa [18] ise Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetlenme koşulları altında, eksenel kuvvetlerin etkisini de dikkate alarak Hamilton ilkesi yardımıyla titreşimini ve stabilitesini incelemiştir.

Engin, Özdoğan, Coşkun, [19] yalnız basınca çalışan iki parametrelili Pasternak zeminine oturan 2L boyunda homogen bir kirişin orta noktasından harmonik tekil kuvvet etkisi altında titreşimlerini incelemiştir.

Zemin reaksiyonu için Winkler zemin modelinden başka zemin modelleri de bulunmaktadır. Filonenko-Borodich modelinde Winkler yayları yerine zemin yüzeyinin elastik bir zar gibi olduğu göz önüne alınmıştır. Bu modelde sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde gerilme meydana gelir. Vlasov modelinde, diğer zemin modellerinden farklı olarak, elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmıştır. Hetenyi modelinde, Winkler yaylarının üzerinde, iki boyutlu problemler için bir plak, tek boyutlu problemler için elastik bir şerit olduğu kabul edilir. Pasternak modelinde yay elemanları üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan bir kayma tabakası da göz önüne alınmıştır. Bu farklı zemin modelleri üzerinde birçok araştırmacı kiriş ve plakların davranışları hakkında çeşitli çalışmalar yapmışlardır.

1.3 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Elastik zemin üzerine oturan kiriş veya plakların davranışları konusunda yapılan çalışmaların çoğunda Winkler hipotezi kullanılmıştır. Bu hipotez bilindiği gibi, basitliği nedeni ile hesap kolaylığı sağlamaktadır.

Bu çalışmada ilk olarak homogen zemin hali incelenmiş, problemin tanımı yapılmış ve temel denklemler oluşturulmuştur.

Daha sonra zemin yatak katsayısının ani olarak değişimi halinde iç bölgedeki zeminin kuvvetli – dış bölgedeki zeminin zayıf ve iç bölgedeki zeminin zayıf – dış bölgedeki zeminin kuvvetli olması durumları incelenmiştir. Zemin yatak katsayısının değişim oranına bağlı olarak sürekli değişmesi halinde kirişin düşey yer değiştirme genlikleri incelenmiştir. Çözümlerde rezonans durumu da incelenmiştir.

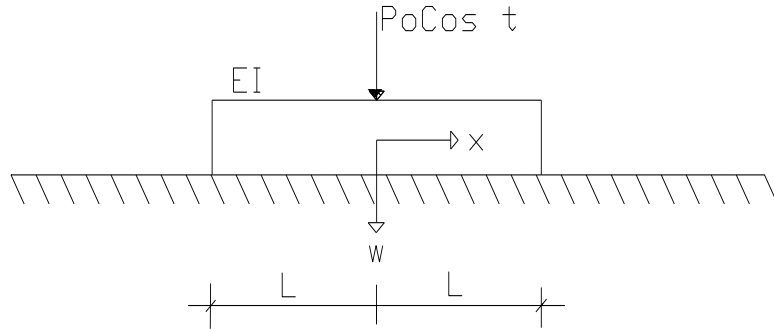
Son olarak rasgele zorlama halinde kirişin $\overline{P}_0(t) = 1$ ve $\overline{P}_0(t) = e^{-t^2}$ tekil kuvvetleri ile yüklenmesi hallerinde problemin çözümü yapılmıştır. Yükün sabit olmaması hali için Runge – Kutta sayısal çözüm yöntemi kullanılmıştır.

Sayısal hesaplarda Excel programı kullanılmıştır.

2. PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

2.1 Problemin Tanımı

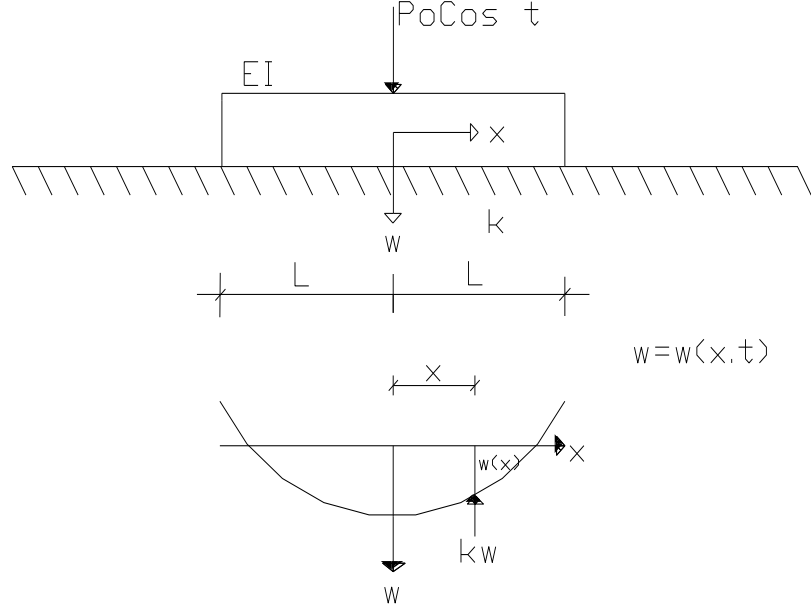
Bu çalışmada, elastik bir zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir kirişin zorlanmış titreşimleri incelenmiştir. Kirişin boyu $2L$, eğilme rijitliği EI , zorlama kuvveti de $P_0 \cos \Omega t$ dir. P_0 zorlama kuvvetinin genliği, Ω da zorlama frekansdır. Diferansiyel denklemler zemin hakkında yapılan çeşitli kabullere göre kurulmuş, sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla bu diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmiştir.



Şekil 2.1 Elastik zemine oturan kiriş durumu

Problemin çözümünde kullandığımız zemin Winkler zeminidir. Dolayısıyla elastik sonlu uzunlukta bir kirişin, elastik bir yatak üzerinde olduğu ve herhangi bir noktasındaki taban basıncının, yük belirli bir değeri aşmadıkça, aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu kabul edilmiştir.

2.2 Homogen Zemin Hali



Şekil 2.2 Homogen hal için elastik zemine oturan kiriş durumu

Şekildeki $2L$ boyundaki kirişin ortasından $P_0 \cos \Omega t$ kuvveti ile zorlanması halinde herhangi bir t anındaki elastik eğri Şekil 2.2 deki gibi olacaktır. x noktasındaki düşey yer değiştirme $w = w(x, t)$ olsun. Bu konumda kiriş zeminden $k w$ tepkisini alacaktır. Buradaki k katsayısı Tablo 1.1 deki katsayının kiriş genişliği ile çarpımı sonucu elde edilen katsayıdır. Kirişin elastik eğrisinin yönetici denklemi;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k \cdot w = -m_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_0 \delta(x) \cos \Omega t \quad (2.1)$$

olarak yazılabilir.

Burada EI kirişin eğilme rijitliğini, m_k kirişin birim boyunun kütlesini, P_0 zorlama genliğini, δ dirac deltasını, Ω da zorlama frekansını göstermektedir.

Birinci mertebe teorisi ile çalıştığımız için harmonik zorlama altında kirişin davranışı da harmonik olacaktır. Buna göre;

$$w(x, t) = W(x) \cos \Omega t \text{ olarak yazılabilir.}$$

Bu ayırma işlemini (2.1) hareket denkleminde uygularsak

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} + kW = m_k \Omega^2 W + P_0 \delta(x) \quad (2.2)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu 4. mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir.

Çözüme geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmaları yapalım.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \lambda = \frac{k L^4}{EI} \quad (2.3)$$

$$\bar{P}_0 = \frac{P_0 \lambda}{k L} \quad \bar{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{m_k}{k}} \cdot \Omega$$

Buna göre yönetici denklem;

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + \lambda (1 - \bar{\Omega}_0^2) W = \bar{P}_0 \delta(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.4)$$

olur.

Simetri nedeni ile kirişin yarısının incelenmesi yeterli olacaktır. Şimdi probleme aşağıdaki gibi bir çözüm alalım.

$$W = Ae^{m\xi} \quad (2.5)$$

(2.5) no lu çözümün (2.4) denkleminde yerine konulması ile

$$m^4 + \lambda(1 - \bar{\Omega}_0^2) = 0 \quad (2.6)$$

denklemini elde edilir.

$$\alpha = -\lambda(1 - \bar{\Omega}_0^2) \quad (2.7)$$

olarak alınırsa denklemin kökleri

$$m_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\mu \sqrt{\alpha}}$$

elde edilir. Bu durumda yönetici denklemin genel çözümü:

$$W = A_1 e^{m_1 \xi} + A_2 e^{m_2 \xi} + A_3 e^{m_3 \xi} + A_4 e^{m_4 \xi} \quad (2.8)$$

şeklinde olacaktır.

Problemin sınır ve süreklilik koşulları aşağıdaki gibidir.

$$i) \quad W'(0) = 0$$

$$ii) \quad W'''(0) = \frac{\bar{P}_0}{2}$$

$$iii) \quad W''(1) = 0$$

$$iv) \quad W'''(1) = 0$$

(2.8) diferansiyel çözüm tipi $1 - \bar{\Omega}_0^2$ nin işareti ile sıkı sıkıya bağlıdır. Aşağıda bu tipler ile ilgili çözümler verilmiştir.

2.2.1 Birinci Hal

$\bar{\Omega}_0^2 < 1$ olması hali

Bu durumda α negatiftir. α nın negatif olduğu durum için $\alpha = -c$ tanımı ile

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\alpha}} = \mu \sqrt{i^4 \sqrt{c}}$$

$$m_{3,4} = \mu i \sqrt{i^4 \sqrt{c}} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) \quad \text{ifadesi yerine yazılır ve } d = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{c} \text{ alınırsa}$$

$$m_{1,2} = \pm d (1 + i)$$

$$m_{3,4} = \pm d (1 - i) \quad \text{karmaşık kökleri elde edilir.}$$

Bu köklere bağlı olarak diferansiyel denklemimizin genel çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$W(\xi) = A \cosh(d\xi) \cos(d\xi) + B \cosh(d\xi) \sin(d\xi) + C \sinh(d\xi) \cos(d\xi) + D \sinh(d\xi) \sin(d\xi) \quad (2.9)$$

Bu durum için sınır şartlarını uygularsak

$$i) \quad W'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad Bd + Cd = 0$$

$$ii) \quad W'''(0) = \frac{\overline{P_0}}{2} \quad \rightarrow \quad 2Bd^3 - 2Cd^3 = \frac{\overline{P_0}}{2}$$

$$iii) \quad W''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad -2Ad^2 \sinh(d) \cdot \sin(d) + 2Bd^2 \sinh(d) \cdot \cos(d) - 2Cd^2 \cosh(d) \cdot \sin(d) + 2Dd^2 \cosh(d) \cdot \cos(d) = 0$$

$$iv) \quad W'''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad -2Ad^3 [\cosh(d) \cdot \sin(d) + \sinh(d) \cdot \cos(d)] + 2Bd^3 [\cosh(d) \cdot \cos(d) - \sinh(d) \cdot \sin(d)] - 2Cd^3 [\sinh(d) \cdot \sin(d) + \cosh(d) \cdot \cos(d)] + 2Dd^3 [\sinh(d) \cdot \cos(d) - \cosh(d) \cdot \sin(d)] = 0$$

Bu eşitliklerden A,B,C,D katsayıları bulunur.

Katsayıların tayin edilmesinden sonra (2.9) bağıntısından çökme, W'' den moment ve W''' den de istenilen herhangi bir noktadaki kesme kuvveti hesaplanabilir.

2.2.2 İkinci Hal

$\overline{\Omega_0}^2 > 1$ olması hali

Bu durumda α pozitifdir. α nın pozitif olduğu durum için

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\alpha}} \rightarrow \text{İki kök gerçel}$$

$$m_{3,4} = \pm \sqrt{-\sqrt{\alpha}} \rightarrow \text{İki kök sanal}$$

olarak elde edilir.

$b = \sqrt[4]{\alpha}$ olarak tanımlanması halinde diferansiyel denklemin çözümü

$$W(\xi) = A \cosh(b\xi) + B \sinh(b\xi) + C \cos(b\xi) + D \sin(b\xi) \quad (2.10)$$

olur. A, B, C, D bilinmeyen katsayılar olup sınır koşullarından tayin edileceklerdir.

Bu durum için sınır şartlarını uygularsak

$$i) \quad W'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad Bb + Db = 0$$

$$ii) \quad W'''(0) = \frac{\overline{P_0}}{2} \quad \rightarrow \quad Bb^3 - Db^3 = \frac{\overline{P_0}}{2}$$

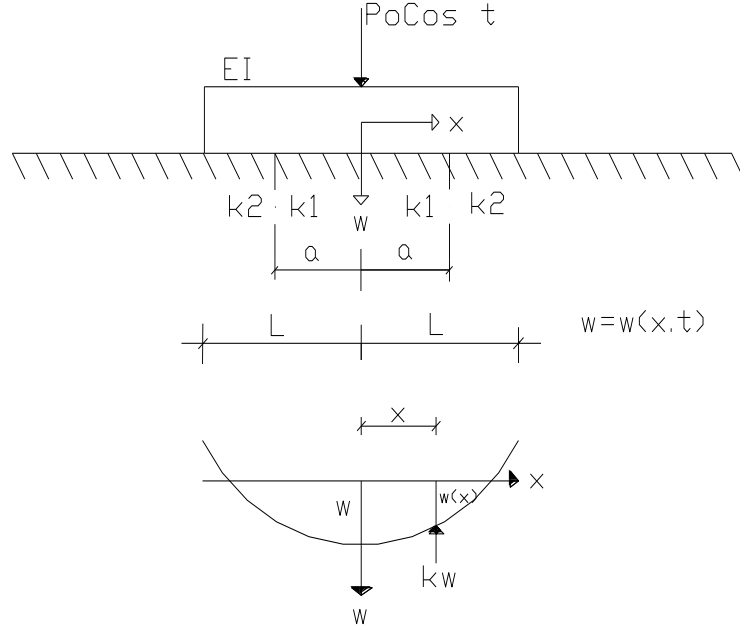
$$iii) \quad W''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad Ab^2 \cosh(b) + Bb^2 \sinh(b) - Cb^2 \cos(b) - Db^2 \sin(b) = 0$$

$$iv) \quad W'''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad Ab^3 \sinh(b) + Bb^3 \cosh(b) + Cb^3 \sin(b) - Db^3 \cos(b) = 0$$

Katsayıların tayin edilmesinden sonra (2.10) bağıntısından çökme, W'' den moment ve W''' den de istenilen herhangi bir noktadaki kesme kuvveti hesaplanabilir.

2.3 Yatak Katsayısının Ani Değişim Hali

Şekil 2.3'de görüldüğü gibi Winkler zeminine oturan , orta noktasından düşey doğrultuda $P_0 \cos \Omega t$ tekil kuvveti ile yüklü $2L$ boyunda homojen bir kiriş göz önüne alalım. Herhangi t anında kirişin elastik eğrisi şekildeki gibi olacaktır. Zeminin yatak katsayısı $x = a$ gibi bir noktada ani olarak değişmektedir.



Şekil 2.3 Zemin yatak katsayısının ani olarak değişmesi dali

$$-a \leq x \leq a \quad \text{ için } k = k_1$$

$$-L \leq x \leq -a, \quad a \leq x \leq L \quad \text{ için } k = k_2 \neq k_1$$

Simetri nedeniyle bundan sonra yalnız $0 \leq x \leq L$ bölgesi incelenecektir.

Yatak katsayısındaki bu ani değişim nedeni ile kiriş elastik eğrisi aşağıdaki gibi olur.

$$a) \quad w_1 = w_1(x_1, t) \quad 0 \leq x_1 \leq a$$

$$b) \quad w_2 = w_2(x_2, t) \quad a \leq x_2 \leq L$$

1.Bölgedeki yönetici denklem

$$EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + k_1 w_1 = -m_k \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + P_0 \delta(x_1) \cos \Omega t \quad 0 \leq x_1 \leq a \quad (2.11)$$

2.Bölgedeki yönetici denklem

$$EI \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + k_2 w_2 = -m_k \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \quad a \leq x_2 \leq L \quad (2.12)$$

Burada EI kirişin eğilme rijitliğini, m_k kirişin birim boyunun kütlesini, P_0 zorlama genliğini, δ dirac deltasını, Ω zorlama frekansını göstermektedir.

Zorlama harmonik olduğuna göre, kiriş ve zeminin davranışı da harmonik olacaktır. Buna göre;

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \cos \Omega t \quad i = 1, 2$$

ayrıştırmasını yapabiliriz.

Çözüme geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmaları yapalım.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{L} & \lambda_1 &= \frac{k_1 L^4}{EI} \\ \xi_2 &= \frac{x_2}{L} & \lambda_2 &= \frac{k_2 L^4}{EI} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\bar{P}_0 = \frac{P_0 \lambda_1}{k_1 L} \quad \bar{a} = \frac{a}{L}$$

$$\bar{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{m_k}{k_1}} \cdot \Omega$$

Buna göre yönetici denklemler:

$$\frac{d^4 W_1}{d\xi_1^4} + \lambda_1 (1 - \bar{\Omega}_0^2) W_1 = 0 \quad 0 \leq \xi_1 \leq \bar{a} \quad (2.14)$$

$$\frac{d^4 W_2}{d\xi_2^4} + \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \bar{\Omega}_0^2 \right) W_2 = 0 \quad \bar{a} \leq \xi_2 \leq 1 \quad (2.15)$$

olurlar.

Problemin sınır ve süreklilik koşulları aşağıdaki gibidir.

$$i) \quad W_1'(0) = 0$$

$$ii) \quad W_1'''(0) = \frac{\overline{P}_0}{2}$$

$$iii) \quad W_1(\bar{a}) = W_2(\bar{a})$$

$$iv) \quad W_1'(\bar{a}) = W_2'(\bar{a})$$

$$v) \quad W_1''(\bar{a}) = W_2''(\bar{a})$$

$$vi) \quad W_1'''(\bar{a}) = W_2'''(\bar{a})$$

$$vii) \quad W_2''(1) = 0$$

$$viii) \quad W_2'''(1) = 0$$

simetri nedeni ile kirişin yarısının incelenmesi yeterli olacaktır.

Birinci bölgedeki yönetici denklemi çözelim

$$\frac{d^4 W_1}{d\xi^4} + \lambda_1(1 - \overline{\Omega}_0^2)W_1 = 0 \quad 0 \leq \xi_1 \leq \bar{a} \quad (2.16)$$

probleme aşağıdaki gibi bir çözüm alırsak

$$W_1 = Ae^{m\xi_1}$$

$$m^4 + \lambda_1(1 - \overline{\Omega}_0^2) = 0$$

denklemini elde ederiz.

$$M^2 + \lambda_1(1 - \bar{\Omega}_0^2) = 0$$

$$M_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda_1(\bar{\Omega}_0^2 - 1)}$$

$$\alpha = \lambda_1(\bar{\Omega}_0^2 - 1) \quad \text{alınırsa denklemin kökleri}$$

$$m_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\mu \sqrt{\alpha}} \quad \text{olur.}$$

Burada ;

$\bar{\Omega}_0^2 > 1$ ve $\bar{\Omega}_0^2 < 1$ olması halleri için iki ayrı çözüm söz konusudur.

$\bar{\Omega}_0^2 > 1$ olması hali ;

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\alpha}} \rightarrow \text{Kökler gerçel}$$

$$m_{3,4} = \pm \sqrt{-\sqrt{\alpha}} \rightarrow \text{Kökler sanal}$$

$b = \sqrt[4]{\alpha}$ olarak tanımlanması halinde diferansiyel denklemin çözümü

$$W_1(\xi_1) = A_1 \cosh(b\xi_1) + B_1 \sinh(b\xi_1) + C_1 \cos(b\xi_1) + D_1 \sin(b\xi_1) \quad (2.17)$$

olur.

$\bar{\Omega}_0^2 < 1$ olması hali;

Bu durumda α negatiftir. α nın negatif olduğu durum için $\alpha = -c$ tanımı ile ;

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\alpha}} = \mu \sqrt{i \sqrt[4]{c}}$$

$$m_{3,4} = \mu \sqrt{i \sqrt[4]{c}} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ifadesi yerine yazılır ve $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{c}$ alınırsa;

$$m_{1,2} = \pm d (1+i)$$

$$m_{3,4} = \pm d (1-i)$$

karmaşık kökleri elde edilir.

Bu köklere bağlı olarak diferansiyel denklemimizin çözümü şu halde olur.

$$W_1(\xi_1) = A_1 \cosh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + B_1 \cosh(d\xi_1) \sin(d\xi_1) + C_1 \sinh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + D_1 \sinh(d\xi_1) \sin(d\xi_1) \quad (2.18)$$

İkinci bölgedeki yönetici denklemi çözelim;

$$\frac{d^4 W_2}{d\xi_2^4} + \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \bar{\Omega}_0^2 \right) W_2 = 0 \quad \bar{a} \leq \xi_2 \leq 1 \quad (2.19)$$

probleme aşağıdaki gibi bir çözüm alırsak;

$$W_2 = A e^{r\xi_2}$$

$$r^4 + \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \bar{\Omega}_0^2 \right) = 0$$

denklemini elde ederiz.

$$\beta = \lambda_1 (\bar{\Omega}_0^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) \quad \text{olarak tanımlanması durumunda denklemin kökleri}$$

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\mu} \sqrt{\beta} \quad \text{olur.}$$

Burada ;

$$\bar{\Omega}_0^2 > \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{ve} \quad \bar{\Omega}_0^2 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{olması halleri için iki ayrı çözüm söz konusudur.}$$

$$\bar{\Omega}_0^2 > \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{ olması hali ;}$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\beta}} \rightarrow \text{Kökler gerçel}$$

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{-\sqrt{\beta}} \rightarrow \text{Kökler sanal}$$

$e = \sqrt[4]{\beta}$ olarak tanımlanması halinde diferansiyel denklemin çözümü:

$$W_2(\xi_2) = A_2 \cosh(e\xi_2) + B_2 \sinh(e\xi_2) + C_2 \cos(e\xi_2) + D_2 \sin(e\xi_2) \quad (2.20)$$

olur.

$$\bar{\Omega}_0^2 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{ olması durumu;}$$

Bu durumda β negatiftir. β nın negatif olduğu durum için $\beta = -f$ tanımı ile

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{+\sqrt{\beta}} = \mu \sqrt{i} \sqrt[4]{f}$$

$$r_{3,4} = \mu i \sqrt{i} \sqrt[4]{f} \text{ olarak elde edilir.}$$

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \text{ ifadesi yerine yazılır ve } g = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{f} \text{ alınırsa}$$

$$r_{1,2} = \pm g (1+i)$$

$$r_{3,4} = \pm g (1-i)$$

karmaşık kökleri elde edilir.

Bu köklere bağlı olarak diferansiyel denkleminizin çözümü

$$W_2(\xi_2)=A_2\text{Cosh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+B_2\text{Cosh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2)+C_2\text{Sinh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+D_2\text{Sinh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2) \quad (2.21)$$

 olur.

2.3.1 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ olması hali

Bu durumda iç bölgedeki zemin zayıf ve dış bölgedeki zemin ise daha kuvvetlidir.

$$\alpha = \lambda_1(\bar{\Omega}_0^2 - 1) \quad \text{ve} \quad \beta = \lambda_1(\bar{\Omega}_0^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})$$

olmak üzere denklem çözümü için aşağıdaki üç hal söz konusudur.

$$1.\text{hal} \quad \bar{\Omega}_0^2 < 1, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0$$

m_i ler ve r_j lerin hepsi karmaşıktır.

$$W_1(\xi_1)=A_1\text{Cosh}(d\xi_1)\text{Cos}(d\xi_1)+B_1\text{Cosh}(d\xi_1).\text{Sin}(d\xi_1)+C_1\text{Sinh}(d\xi_1)\text{Cos}(d\xi_1)+D_1\text{Sinh}(d\xi_1).\text{Sin}(d\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2)=A_2\text{Cosh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+B_2\text{Cosh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2)+C_2\text{Sinh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+D_2\text{Sinh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2)$$

$$2.\text{hal} \quad \bar{\Omega}_0^2 > 1, \quad \bar{\Omega}_0^2 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0$$

m_i lerin ikisi gerçel ikisi sanal, r_j ler karmaşıktır.

$$W_1(\xi_1)=A_1\text{Cosh}(b\xi_1)+B_1\text{Sinh}(b\xi_1)+C_1\text{Cos}(b\xi_1)+D_1\text{Sin}(b\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2)=A_2\text{Cosh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+B_2\text{Cosh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2)+C_2\text{Sinh}(g\xi_2)\text{Cos}(g\xi_2)+D_2\text{Sinh}(g\xi_2).\text{Sin}(g\xi_2)$$

$$3.\text{hal} \quad \overline{\Omega_0}^2 > \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

m_i lerin ve r_j lerin ikisi gerçel ikisi sanaldır.

$$W_1(\xi_1) = A_1 \cosh(b\xi_1) + B_1 \sinh(b\xi_1) + C_1 \cos(b\xi_1) + D_1 \sin(b\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2) = A_2 \cosh(e\xi_2) + B_2 \sinh(e\xi_2) + C_2 \cos(e\xi_2) + D_2 \sin(e\xi_2)$$

2.3.2 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ olması hali

Bu durumda iç bölgedeki zemin kuvvetli ve dış bölgedeki zemin ise zayıftır.

Burada aşağıdaki üç hal söz konusudur.

$$1.\text{hal} \quad \overline{\Omega_0}^2 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \alpha < 0, \quad \beta < 0$$

m_i ler ve r_j lerin hepsi karmaşıktır.

$$W_1(\xi_1) = A_1 \cosh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + B_1 \cosh(d\xi_1) \sin(d\xi_1) + C_1 \sinh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + D_1 \sinh(d\xi_1) \sin(d\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2) = A_2 \cosh(g\xi_2) \cos(g\xi_2) + B_2 \cosh(g\xi_2) \sin(g\xi_2) + C_2 \sinh(g\xi_2) \cos(g\xi_2) + D_2 \sinh(g\xi_2) \sin(g\xi_2)$$

$$2.\text{hal} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \overline{\Omega_0}^2 < 1, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0$$

m_i ler karmaşık r_j lerin ikisi gerçel ikisi sanaldır.

$$W_1(\xi_1) = A_1 \cosh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + B_1 \cosh(d\xi_1) \sin(d\xi_1) + C_1 \sinh(d\xi_1) \cos(d\xi_1) + D_1 \sinh(d\xi_1) \sin(d\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2) = A_2 \cosh(e\xi_2) + B_2 \sinh(e\xi_2) + C_2 \cos(e\xi_2) + D_2 \sin(e\xi_2)$$

$$3.\text{hal } \bar{\Omega}_0^2 > 1 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \beta > 0$$

m_i lerin ve r_j lerin ikisi gerçel ikisi sanaldır.

$$W_1(\xi_1)=A_1\text{Cosh}(b\xi_1)+B_1\text{Sinh}(b\xi_1)+C_1\text{Cos}(b\xi_1)+D_1\text{Sin}(b\xi_1)$$

$$W_2(\xi_2)=A_2\text{Cosh}(e\xi_2)+B_2\text{Sinh}(e\xi_2)+C_2\text{Cos}(e\xi_2)+D_2\text{Sin}(e\xi_2)$$

2.4 Yatak Katsayısının Sürekli Değişimi Hali

Bu kısımda yatak katsayısının kiriş boyunca $k(x)=k_0(1+ax)$ şeklinde sürekli olarak değişmesi hali ele alınmıştır.

Yukarıdaki ifadede k_0 başlangıçtaki yatak katsayısını ve a 'da değişim oranını göstermektedir. Simetri nedeni ile $x \geq 0$ bölgesi incelenecektir.Yönetici denklem aşağıdaki gibidir.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_0 (1+ax)w = -m_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_0 \delta(x) \text{Cos}\Omega t \quad (2.22)$$

$$w(x, t)=W(x).\text{Cos}\Omega t$$

Çözüme geçmeden önce şu boyutsuzlaştırmaları yapalım

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} & \bar{\Omega}_0 &= \sqrt{\frac{m_k}{k_0}} \Omega \\ \bar{P}_0 &= \frac{P_0 \lambda}{k_0 L} & \bar{\beta} &= aL & \lambda &= \frac{k_0 L^4}{EI} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Buna göre yönetici denklem;

$$W^{(4)} + \lambda [(1 + \bar{\beta} \xi) - \bar{\Omega}_0^2] W = 0 \quad (2.24)$$

olur.

Kuvvet Serisi Yardımıyla Çözüm:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n \quad \text{dersek;} \quad (2.25)$$

ve yukarıdaki ifadenin türevlerini alıp yönetici denklemde uygun yerlerine koyarsak;

$$\sum_{n=4}^{\infty} A_n .n.(n-1)(n-2)(n-3). \xi^{n-4} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n + \lambda \bar{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^{n+1} - \lambda \bar{\Omega}_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n \equiv 0 \quad (2.26)$$

(2.26) ifadesinde ilk terimde $n \rightarrow n+5$, ikinci terimde $n \rightarrow n+1$, üçüncü terimde $n \rightarrow n$ ve dördüncü terimde $n \rightarrow n+1$ konulup düzenleme yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_{n+5} (n+5)(n+4)(n+3) + (n+2) + \lambda A_{n+1} + \lambda \bar{\beta} A_n - \lambda \bar{\Omega}_0^2 A_{n+1}] \xi^{n+1} \equiv 0 \quad (2.27)$$

ifadesi elde edilir.

$A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ serbest değişkenler olmak üzere

Rekürans Formülü;

$$A_{n+5} = \frac{\lambda (\bar{\Omega}_0^2 - 1)}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} A_{n+1} - \frac{\lambda \bar{\beta}}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} A_n \quad (2.28)$$

olarak elde edilir.

Çökme ifadesi (2.25) ifadesinde şu şekilde tanımlanmıştı

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + \dots + A_n \xi^n + \dots$$

Sistemin sınır koşulları şu şekildedir.

$$W'(0) = 0$$

$$W'''(0) = \frac{\overline{P_0}}{2}$$

$$W''(1) = 0$$

$$W'''(1) = 0$$

Birinci sınır koşulundan

$$W'(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0 \quad (2.29)$$

İkinci sınır koşulundan

$$W'''(0) = \frac{\overline{P_0}}{2} \rightarrow A_3 = \frac{\overline{P_0}}{12} \quad (2.30)$$

(2.26) ifadesinde $n=4$ için ξ^0 ın katsayısı sıfıra eşitlenirse A_4 katsayısı şu şekilde bulunur.

$$A_4 = \frac{\lambda(\overline{\Omega_0}^2 - 1)}{4.3.2.1} A_0 \quad (2.31)$$

Rekürans formülünde $n=0,1,2,3,\dots$ alınarak katsayılar " A_0, A_2, A_3 " cinsinden bulunabilir.

Rekürans bağıntısındaki her $A_n, n>3$ katsayısını A_0, A_2 ve A_3 katsayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi parçalayalım.

$$A_n = h_{n0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0}^2, \overline{\beta}) A_0 + h_{n2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0}^2, \overline{\beta}) A_2 + g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0}^2, \overline{\beta}) A_3 \quad (2.32)$$

h_{n0} ve h_{n2} ifadeleri rekürans bağıntısı yardımıyla kolaylıkla bulunabilir.

Şimdi çözüm ;

$$w(\xi) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} h_{n_0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \xi^n + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} h_{n_2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \xi^n + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \xi^n \text{ olur.} \quad (2.33)$$

denkleme sınır koşullarını uygularsak;

$$W''(1) = 0$$

$$A_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) h_{n_0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] + A_2 \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) h_{n_2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] + A_3 \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] = 0 \quad (2.34)$$

$$W'''(1) = 0$$

$$A_0 \left[\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) h_{n_0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] + A_2 \left[\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) h_{n_2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] + A_3 \left[\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \right] = 0 \quad (2.35)$$

Görüldüğü üzere sınır koşulları A_0 , A_2 ve A_3 cinsinden çıkmaktadır. A_3 değeri direk $\overline{P_0}$ ye bağlı olduğu için bilinen bir sayıdır. A_3 sayı olarak yerine koyulduğunda sistem ;

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) h_{n_0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) h_{n_2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \\ \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) h_{n_0}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) & \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) h_{n_2}(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \\ - \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) g_n(n, \lambda, \overline{\Omega_0^2}, \overline{\beta}) \end{vmatrix} [A_3]$$

yukarıdaki gibi bir denklem takımı haline gelmektedir. Buradan A_0 ve A_2 katsayıları bulunarak çökme ifadesi elde edilmiş olunur.

2.5 Rasgele Zorlama Hali

2.5.1 Serbest Kiriş Denklemi

Önce yük taşımayan serbest kirişe ait hareket denklemini ele alalım;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.36)$$

Burada aşağıdaki ayırma yapılırsa:

$$w = \phi(x).T(t)$$

Bu eşitliği (2.36) denkleminde yerine koyarsak;

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} T + m_k \phi \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad (2.37)$$

ve (2.37) eşitliğini ϕT ye bölersek;

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} \frac{1}{\phi} = -m_k \frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T} \quad (2.38)$$

buluruz. (2.38) ifadesinde sol taraf yalnız x 'in sağ taraf ise yalnız t zamanının fonksiyonu olduğundan

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} \frac{1}{\phi} = -m_k \frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T} = \lambda^4$$

alınabilir. Buradan

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} - \lambda^4 \phi = 0$$

olur ve $\xi = \frac{x}{L}$ boyutsuz koordinatı kullanılarak

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} - \lambda^4 \phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} - \frac{\lambda^4 L^4}{EI} \phi = 0$$

$$\frac{\lambda^4 L^4}{EI} = \beta^4 \text{ alınarak;}$$

$$\frac{d^4 \phi}{d\xi^4} - \beta^4 \phi = 0 \quad (2.39)$$

denklemini elde edilir.

$\phi = e^{\alpha \xi}$ tipinde bir çözüm alıp bu çözümün (2.39) deki diferansiyel denkleme konulması ile

$$\phi(\xi) = C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi + C_3 \sinh \beta \xi + C_4 \cosh \beta \xi \quad (2.40)$$

çözümü elde edilir. Buradaki C_1, C_2, C_3, C_4 integrasyon sabitleridir.

Kiriş uçlarında moment ve kesme kuvveti olmadığından, ϕ fonksiyonu aşağıdaki sınır koşullarını sağlamalıdır.

$$\phi''(0) = 0 \quad \phi''(1) = 0$$

$$\phi'''(0) = 0 \quad \phi'''(1) = 0$$

C_1, C_2, C_3, C_4 bilinmeyenleri için sınır koşulları yazılacak olursa;

$$\phi''(0) = 0 \rightarrow C_2 = C_4 \quad (2.41)$$

$$\phi''(1) = 0 \rightarrow -C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta + C_3 \sinh \beta + C_4 \cosh \beta = 0 \quad (2.42)$$

$$\phi'''(0) = 0 \rightarrow C_1 = C_3 \quad (2.43)$$

$$\phi'''(1) = 0 \rightarrow -C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta + C_3 \cosh \beta + C_4 \sinh \beta = 0 \quad (2.44)$$

(2.41) ve (2.43) denklemleri (2.42) denkleminde yerlerine koyulursa

$$C_1 (\sinh \beta - \sin \beta) + C_2 (\cosh \beta - \cos \beta) = 0 \quad (2.45)$$

denklemini elde edilir.

(2.41) ve (2.43) denklemleri (2.44) denkleminde yerlerine koyulursa

$$C_1 (\cosh \beta - \cos \beta) + C_2 (\sinh \beta + \sin \beta) = 0 \quad (2.46)$$

denklemini elde edilir.

(2.45) ve (2.46) denklemleri

$$\begin{vmatrix} (\sinh \beta - \sin \beta) & (\cosh \beta - \cos \beta) \\ (\cosh \beta - \cos \beta) & (\sinh \beta + \sin \beta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

biçimine dönüştürülüp çözüme gidilirse (2.47) den

$$\sinh^2 \beta - \sin^2 \beta - (\cosh \beta - \cos \beta)^2 = 0$$

veya

$$\cos \beta \cdot \cosh \beta = 1 \quad (2.48)$$

bulunur. Bu denklemin kökleri bize serbest kirişe ait doğal frekansları verecektir.

(2.48) denklemini sağlayan β_n ler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1 Serbest kirişe ait doğal frekanslar

β_1	4,73004
β_2	7,85320
β_3	10,99561
β_4	14,12717
β_5	17,27876
β_6	20,42035
β_7	23,56194
β_8	26,70354
β_9	29,84513
β_{10}	32,98672

(2.46) denkleminde

$$C_1 = -C_2 \frac{\sinh\beta + \sin\beta}{\cosh\beta - \cos\beta} \text{ elde edilir.}$$

$$\gamma = \frac{\sinh\beta + \sin\beta}{\cosh\beta - \cos\beta} \text{ olarak tanımlanırsa}$$

$$C_1 = -C_2\gamma \text{ ve } C_3 = -C_2\gamma$$

olur.

Elde edilen frekanslara göre (2.40) de tanımlanan mod fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\phi_n(\xi) = C_2[(\cos\beta_n\xi + \cosh\beta_n\xi) - \gamma_n(\sin\beta_n\xi + \sinh\beta_n\xi)] \quad (2.49)$$

$$\int_0^1 \phi_1^2 d\xi = 1 \rightarrow C_2=1 \text{ olarak bulunur.}$$

Bu durumda (2.49) denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$\phi_n(\xi) = [(\cos\beta_n\xi + \cosh\beta_n\xi) - \gamma_n(\sin\beta_n\xi + \sinh\beta_n\xi)] \quad (2.50)$$

Mod fonksiyonları birbiri ile ortogonal olup

$$\int_0^1 \phi_n \phi_m d\xi = 0 \quad m \neq n$$

ortogonallik koşulunu sağlarlar. (2.48) denkleminin sonsuz sayıda kökü olması nedeniyle

$w = \phi(\xi).T(t)$ çözümü;

$$w(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi) T_n(t) \quad (2.51)$$

şeklinde yazılacaktır.

2.5.2 Orta Noktadan P(t) Kuvveti ile Yüklü Kiriş

L uzunluğunda orta noktasından P(t) tekil kuvvetini taşıyan kirişe ait yönetici denklem;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw = -m_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t) \delta(x - \frac{L}{2}) \quad (2.52)$$

şeklindedir.

(2.52) denkleminde (2.51) ifadesi kullanılıp

$\xi = \frac{x}{L}$ ve $\overline{P}_0(t) = \frac{P(t)}{P_0}$ boyutsuzlaştırmaları yapılırsa kirişin hareket denklemi;

$$\frac{EI}{L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^4(\xi) T_n(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi) T_n(t) + m_k \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi) \ddot{T}_n(t) = \overline{P}_0 \delta(\xi - \frac{1}{2}) \quad (2.53)$$

olur.

Burada $\phi_n^4 = \beta_n^4 \phi_n$ ifadesi (2.53) denkleminde yerine konur, denklemin her iki tarafı ϕ_m fonksiyonu ile çarpılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 \int_0^1 \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi T_n(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi T_n(t) \\ & + m_k \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi T_n(t) = \overline{P_0} \left[\int_0^1 (\phi_m(\xi) \delta(\xi - \frac{1}{2})) d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ortogonalite koşulu kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$\left(\frac{EI}{m_k L^4} \beta_m^4 + \frac{k}{m_k} \right) T_m + T_m = \frac{\overline{P_0}}{m_k} \phi_m(1/2) \quad (2.55)$$

elde edilir.

$$\left(\frac{EI}{m_k L^4} \beta_m^4 + \frac{k}{m_k} \right) = \Omega_m^2 \quad \text{olarak tanımlanırsa (2.55) denklemi}$$

$$T_m + \Omega_m^2 T_m = \frac{\overline{P_0}}{m_k} \phi_m(1/2) \quad (2.56)$$

olur.

$$i) \overline{P_0}(t) = 1 \text{ olması hali;}$$

Başlangıç koşulları :

$$i) T(0) = 0$$

$$ii) T'(0) = 0$$

(2.56) denkleminin çözümü

$$T_m(t) = C_1 \sin(\Omega_m t) + C_2 \cos(\Omega_m t) + \frac{\phi_m(1/2)}{m_k \Omega_m^2} \quad (2.57)$$

elde edilir.

Birinci sınır koşulundan
$$C_2 = -\frac{\phi_m(1/2)}{m_k \Omega_m^2}$$

İkinci sınır koşulundan $C_1 = 0$ bulunur.

C_1 ve C_2 katsayıları (2.57) denkleminde yerlerine koyulduğunda (2.57) denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$T_m(t) = \frac{\phi_m(1/2)}{m_k \Omega_m^2} (1 - \cos(\Omega_m t)) \quad (2.58)$$

ii) $\overline{P_0}(t) = e^{-t^2}$ olması hali;

Bu durumun çözümü için Runge-Kutta sayısal çözüm yöntemi kullanılmıştır.

$$T_m'' + \Omega_m^2 T_m = \frac{e^{-t^2}}{m_k} \phi_m(1/2) \quad (2.59)$$

Başlangıç koşulları :

i) $T(0) = 0$

ii) $T'(0) = 0$

(2.59) denklemini öncelikle birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürmemiz gerekir.

$z = T'$ dersek;

$z' = T''$ ve $z(0) = T'(0) = 0$ olur.

Bu durumda (2.59) diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$z' = \frac{e^{-t^2}}{m_k} \phi_m(1/2) - \Omega_m^2 T \quad (2.60)$$

$$f(t, T, z) = z$$

$$g(t, T, z) = \frac{e^{-t^2}}{m_k} \phi_m(1/2) - \Omega_m^2 T$$

olarak tanımlanması durumunda sistemimizi aşağıdaki şekilde çözebiliriz.

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.61)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (2.62)$$

burada,

$$k_1 = hf(t_n, T_n, z_n)$$

$$l_1 = hg(t_n, T_n, z_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, T_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1)$$

$$l_2 = hg(t_n + \frac{1}{2}h, T_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1)$$

$$k_3 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, T_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2) \quad (2.63)$$

$$l_3 = hg(t_n + \frac{1}{2}h, T_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, T_n + k_3, z_n + l_3)$$

$$l_4 = hg(t_n + h, T_n + k_3, z_n + l_3) \text{ dır.}$$

Denklemimizin çözümünde h tanım aralığını $h=0,0008$ olarak aldığımızda yeterli yaklaşımın sağlandığı görülmüştür.

2.5.3 Kirişin $X = L/3$ de Yüklenmesi Hali

Bu bölümde çözümün kirişin orta noktadan yüklenmesi haline benzer şekilde yapılmasıyla (2.56) denklemi

$$T_m + \Omega_m^2 T_m = \frac{\overline{P_0}}{m_k} \phi_m(1/3) \quad (2.64)$$

halini alır.

3. SAYISAL SONUÇLAR

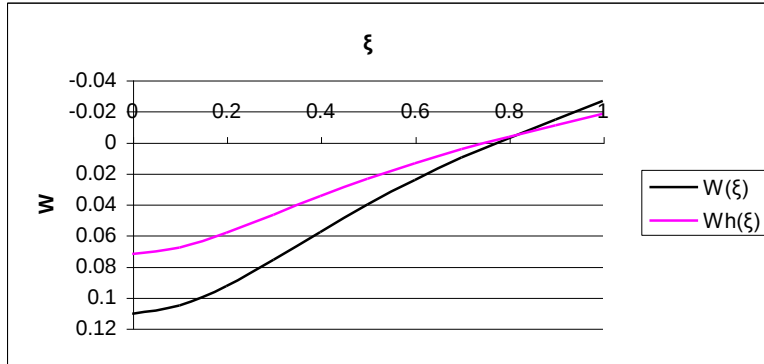
Bu bölümde, ikinci bölümde elde edilen denklem takımlarının çözümü yapılarak sonuçlar grafikler yardımıyla verilmiştir. Bu denklem takımlarının sayısal çözümleri ve grafiksel gösterimleri Excel programı kullanılarak yapılmıştır.

3.1 Yatak Katsayısının Ani Değişim Hali

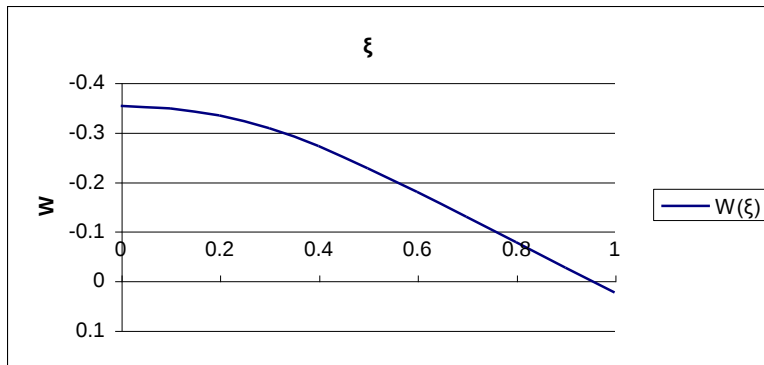
$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ olması hali

Bu duruma ait yer değiştirme grafikleri aşağıdaki gibidir. Aşağıdaki hallerde zemin yatak katsayısının ani değişimi $\xi = 0,4$ olarak alınmıştır.

$W_h(\xi)$ = homogen zemin üzerindeki yer değiştirme

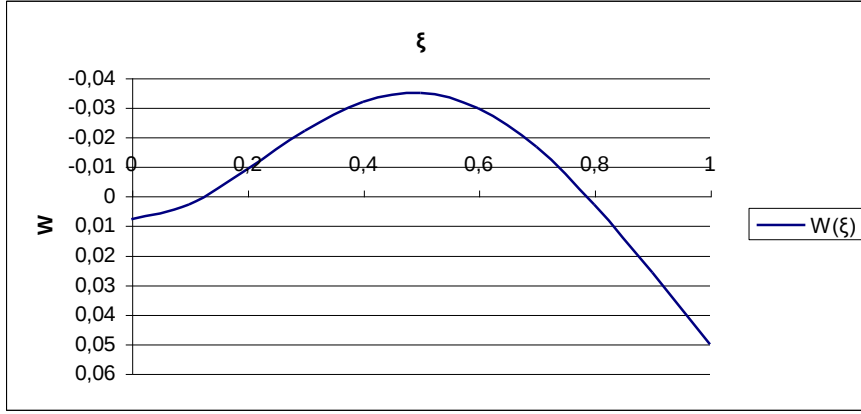


(a)



(b)

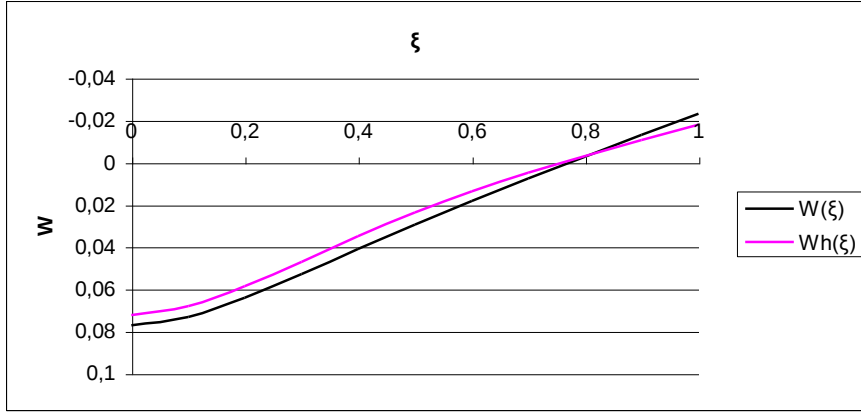
Şekil 3.1 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ olması halinde (a) $\overline{\Omega}_0 = 0,5$ (b) $\overline{\Omega}_0 = 1,25$ (c) $\overline{\Omega}_0 = 2,5$ kiriş elastik eğrisi



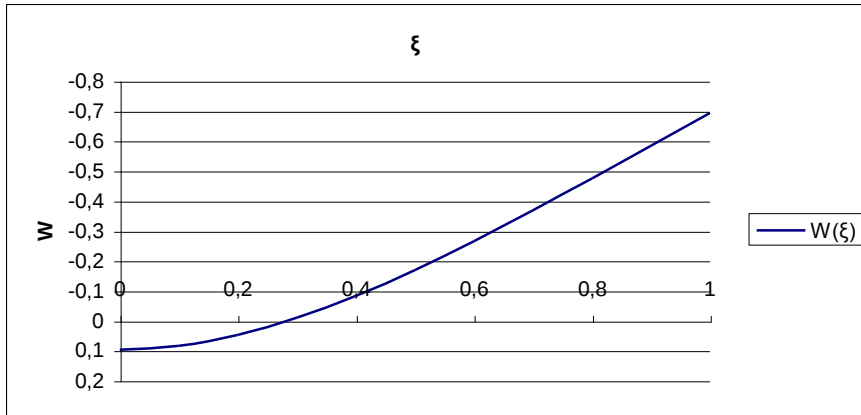
(c)

Şekil 3.1 (Devam) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ olması halinde (a) $\overline{\Omega}_0 = 0,5$ (b) $\overline{\Omega}_0 = 1,25$ (c) $\overline{\Omega}_0 = 2,5$ iken kiriş elastik eğrisi

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ olması hali

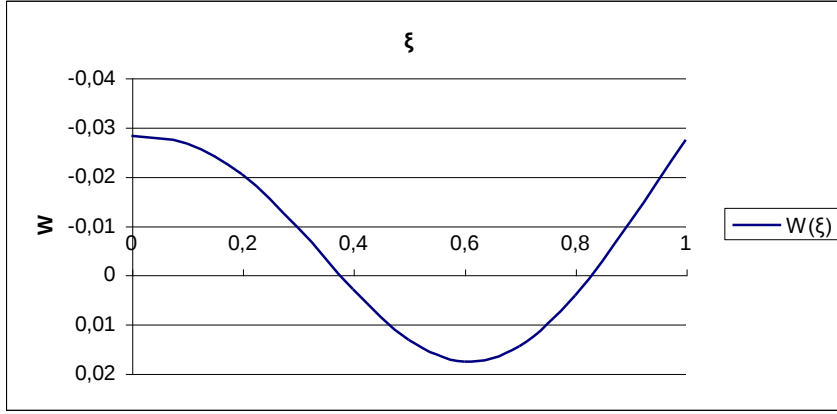


(a)



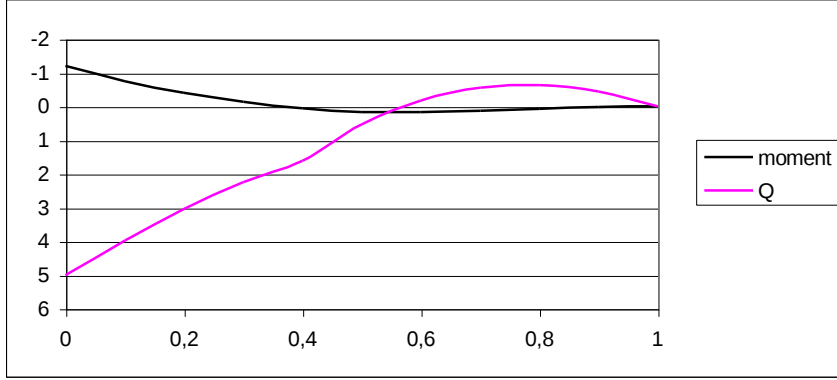
(b)

Şekil 3.2 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ olması halinde (a) $\overline{\Omega}_0 = 0,5$ (b) $\overline{\Omega}_0 = 0,75$ (c) $\overline{\Omega}_0 = 2,5$ iken kiriş elastik eğrisi

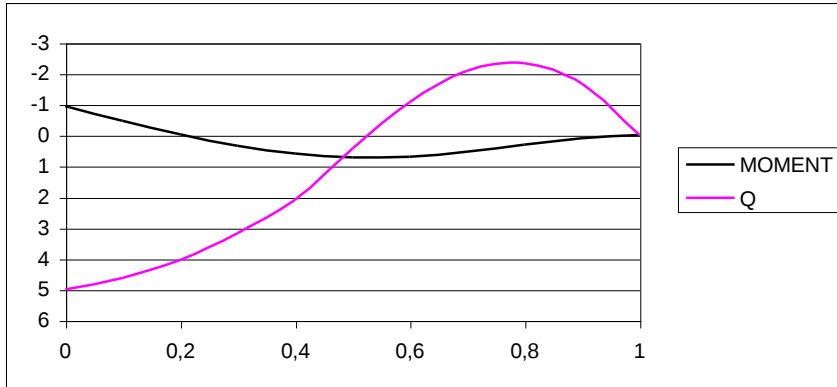


(c)

Şekil 3.2 (Devam) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ olması halinde (a) $\overline{\Omega}_0 = 0,5$ (b) $\overline{\Omega}_0 = 0,75$
 $\overline{\Omega}_0 = 2,5$ iken kiriş elastik eğrisi

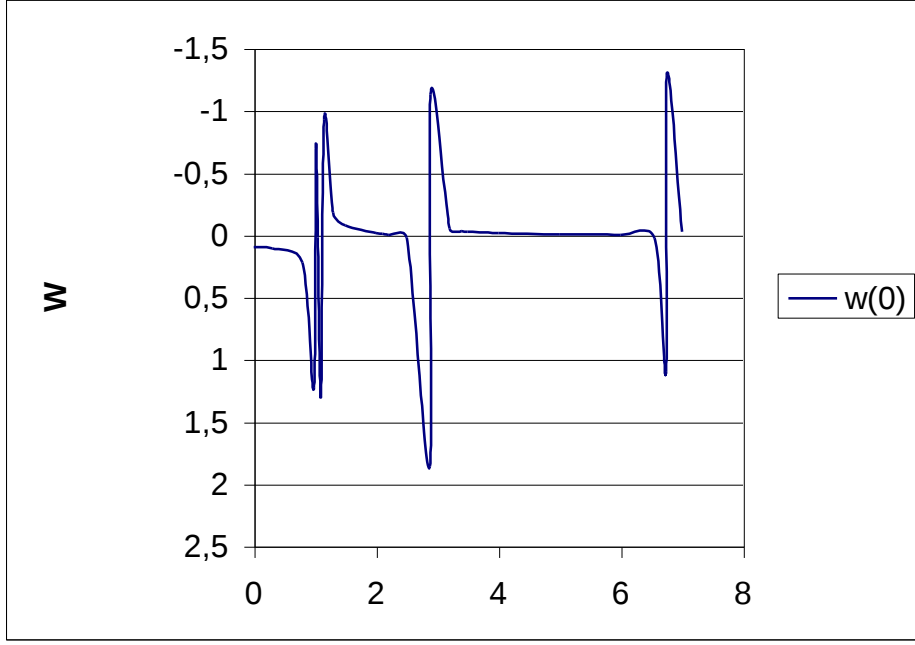


(a)

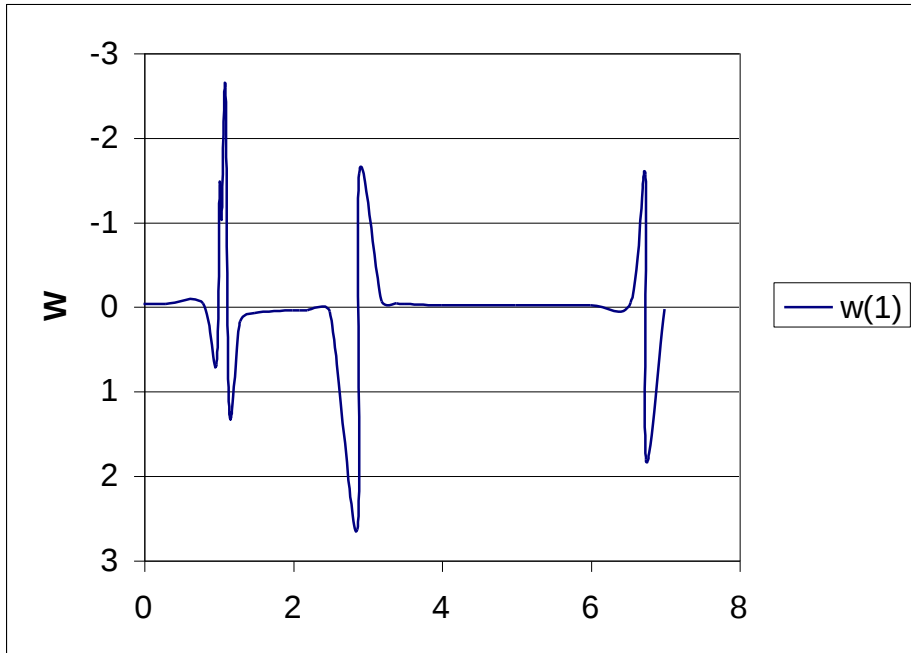


(b)

Şekil 3.3 (a) $\overline{\Omega}_0 = 0,5$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ (b) $\overline{\Omega}_0 = 1,5$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ iken moment ve kesme
kuvvetinin değişimi

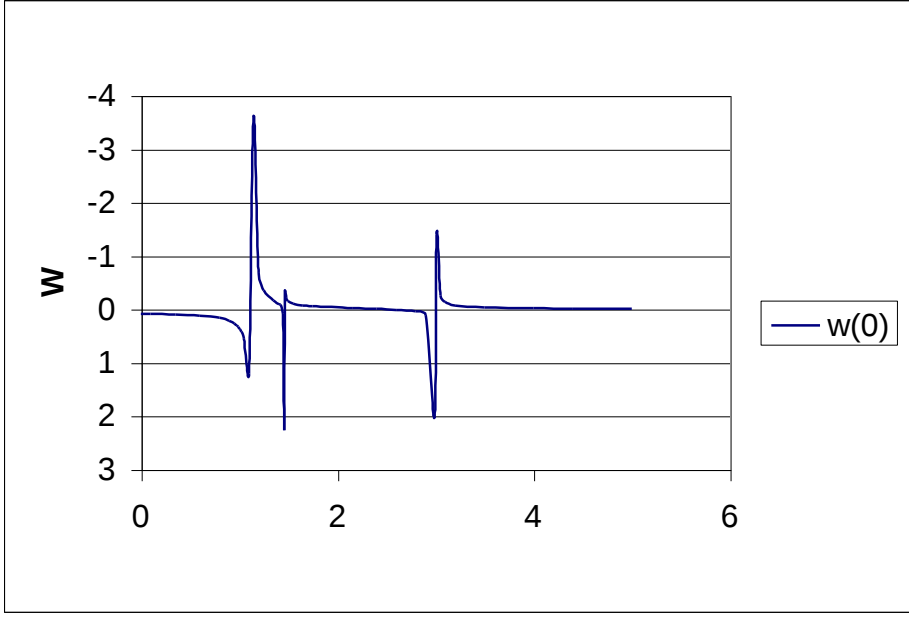


(a)



(b)

Şekil 3.4 $\lambda = 125$ için homojen zeminde (a) giriş orta noktasının (b) giriş uç noktasının $\overline{\Omega_0}$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

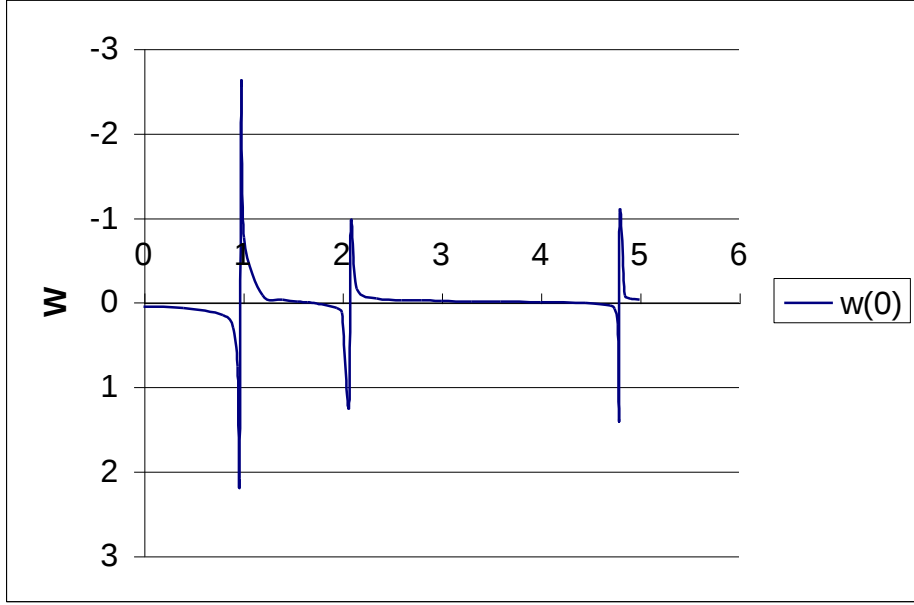


(a)

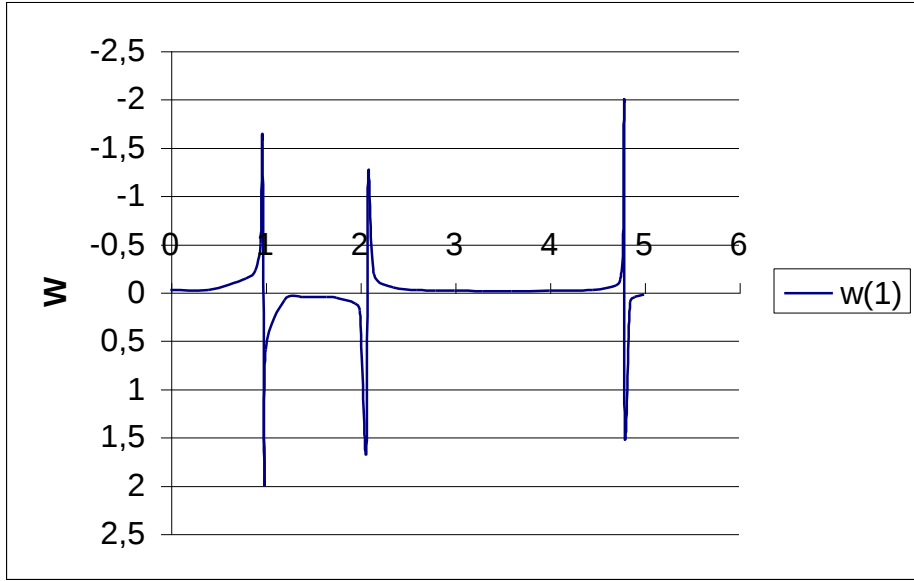


(b)

Şekil 3.5 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ olması durumunda (iç zemin zayıf, dış zemin kuvvetli)
 (a) giriş orta noktasının (b) giriş uç noktasının
 $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi



(a)

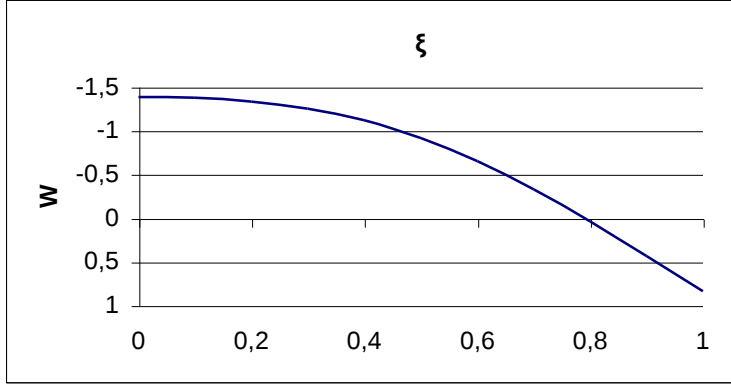


(b)

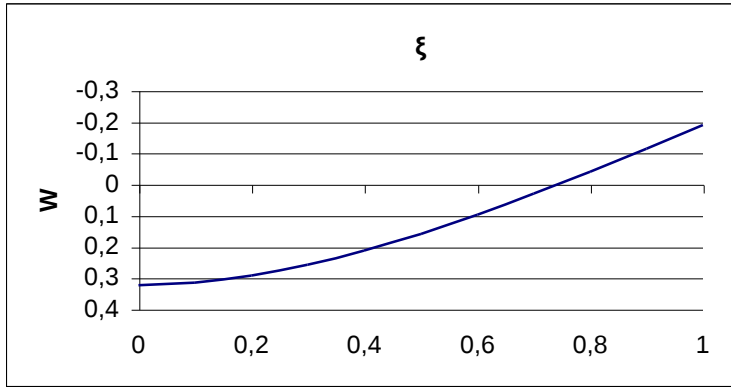
Şekil 3.6 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,5$ olması durumunda (iç zemin kuvvetli, dış zemin zayıf)
 (a) kiriş orta noktasının (b) kiriş uç noktasının
 $\overline{\Omega}_0$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

3.2 Yatak Katsayısının Sürekli Değişim Hali

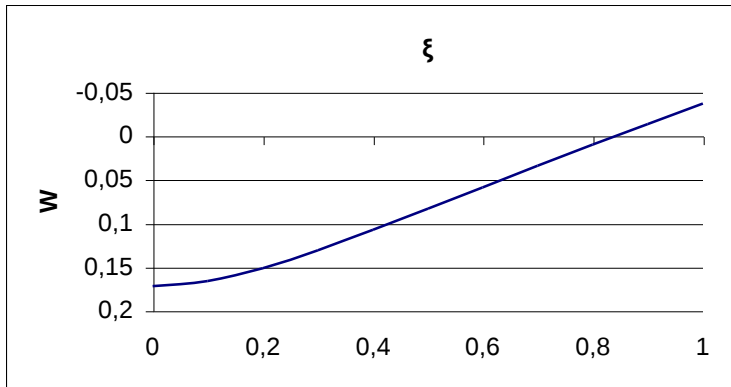
Bu kısımda (2.22) de tanımlanan yönetici denklemde yatak katsayısının kiriş boyunca a değişim oranına bağlı olarak sürekli değişmesi halinde kirişin düşey yer değiştirme genlikleri incelenmiştir.



(a)



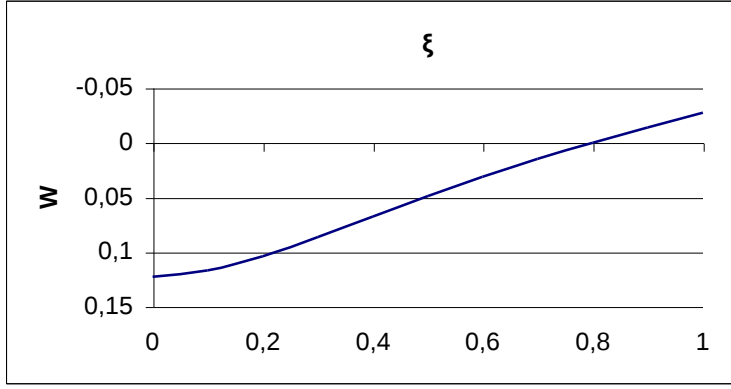
(b)



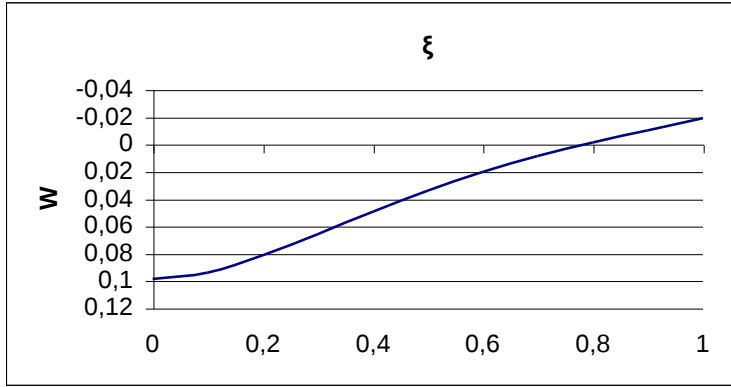
(c)

Şekil 3.7 $\overline{\Omega_0}^2 = 0,5$ olması halinde

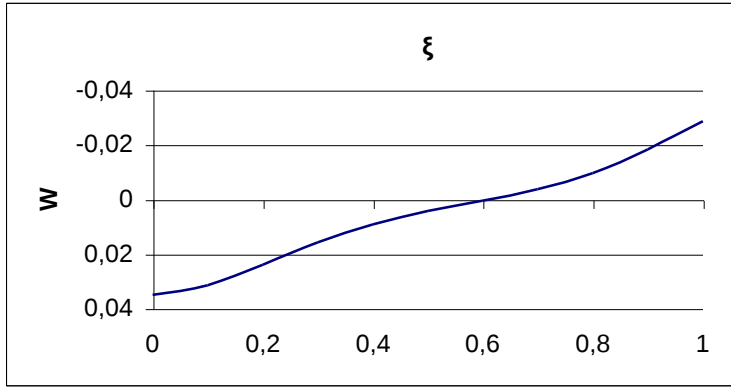
(a) $a = -0,5$ (b) $a = -0,25$ (c) $a = 0$ (d) $a = 0,25$ (e) $a = 0,5$ (f) $a = 5$
iken kiriş elastik eğrisi



(d)



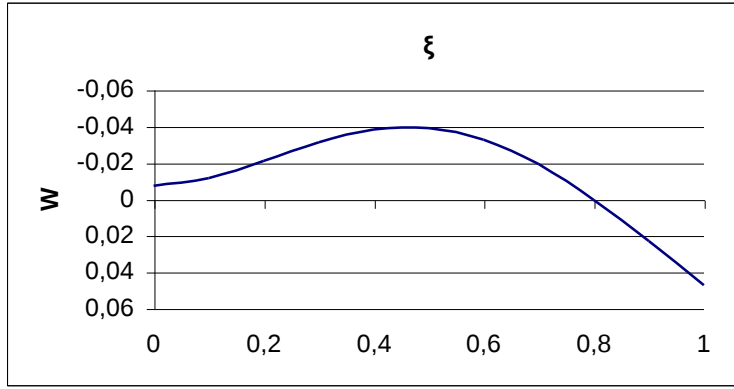
(e)



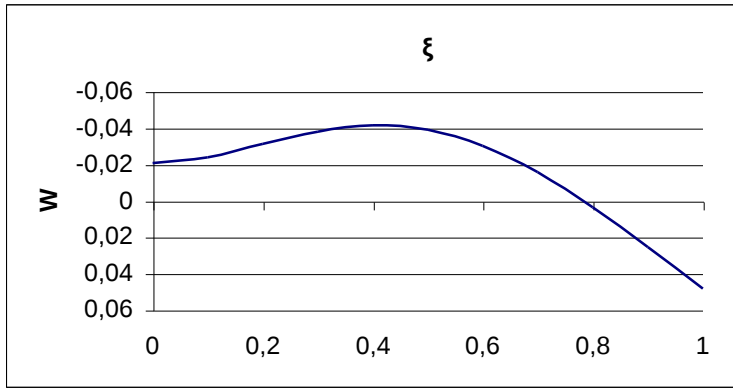
(f)

Şekil 3.7 (Devam) $\overline{\Omega}_0^2 = 0,5$ olması halinde

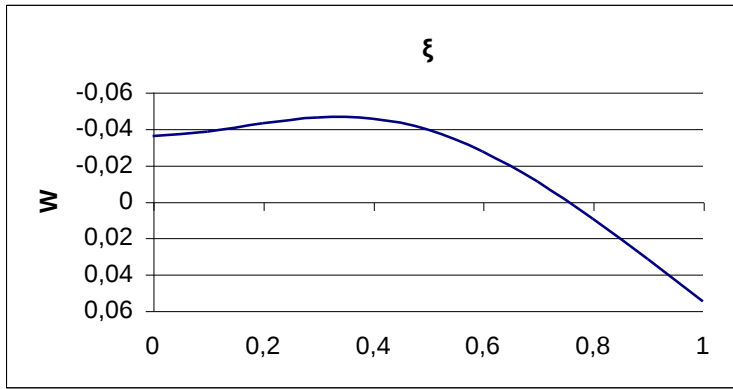
(a) $a = -0,5$ (b) $a = -0,25$ (c) $a = 0$ (d) $a = 0,25$ (e) $a = 0,5$ (f) $a = 5$
iken kiriş elastik eğrisi



(a)



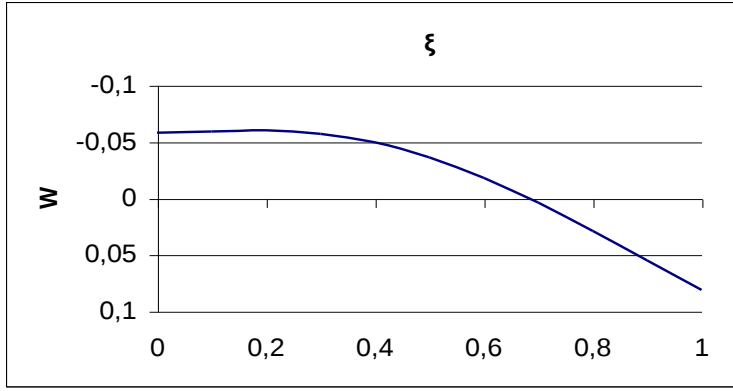
(b)



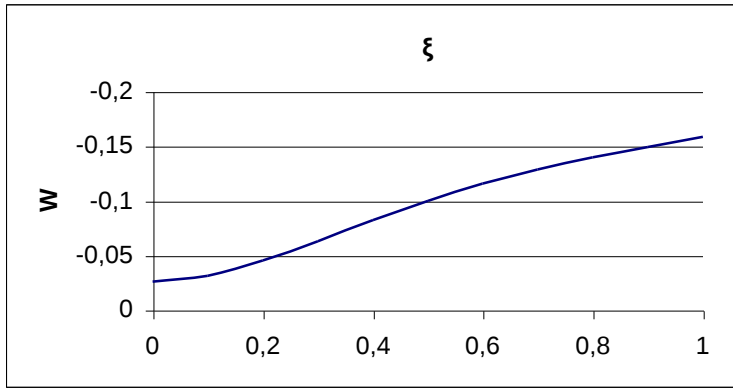
(c)

Şekil 3.8 $\overline{\Omega_0}^2 = 3$ olması halinde

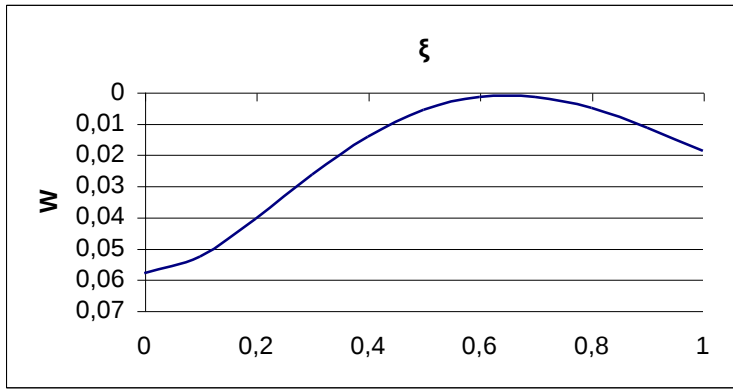
(a) $a = -0,5$ (b) $a = -0,25$ (c) $a = 0$ (d) $a = 0,25$ (e) $a = 0,5$ (f) $a = 5$
iken kiriş elastik eğrisi



(d)



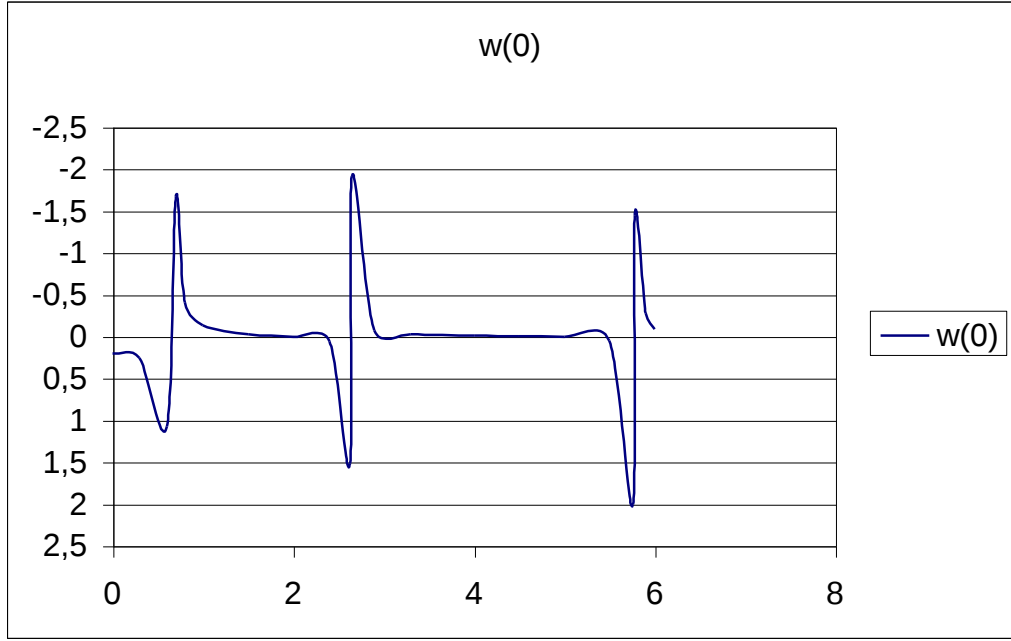
(e)



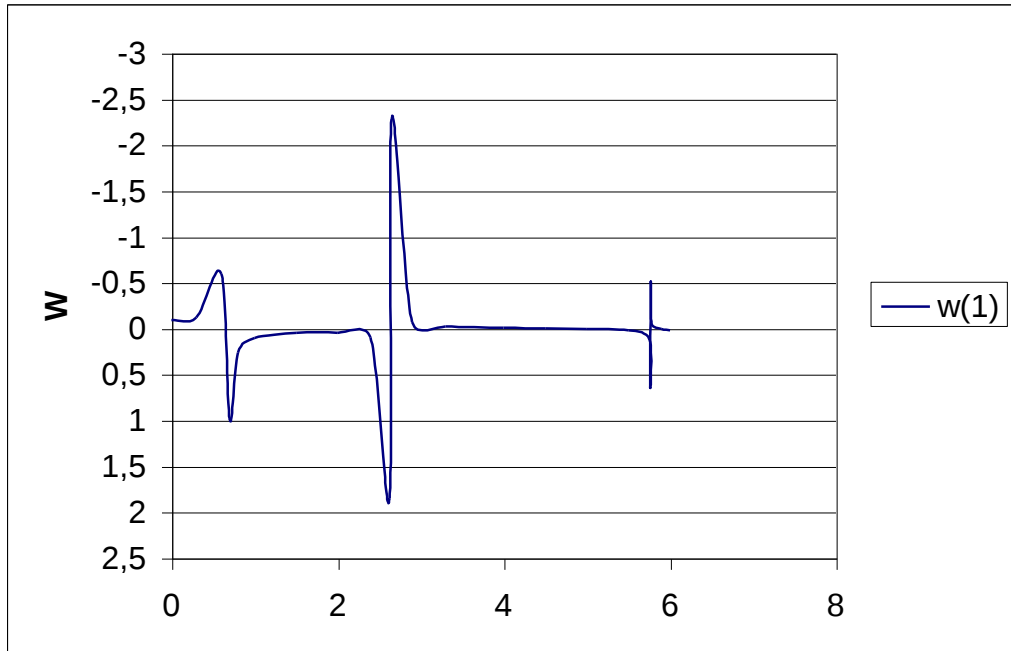
(f)

Şekil 3.8 (Devam) $\overline{\Omega}_0^2 = 3$ olması halinde

(a) $a = -0,5$ (b) $a = -0,25$ (c) $a = 0$ (d) $a = 0,25$ (e) $a = 0,5$ (f) $a = 5$
iken kiriş elastik eğrisi

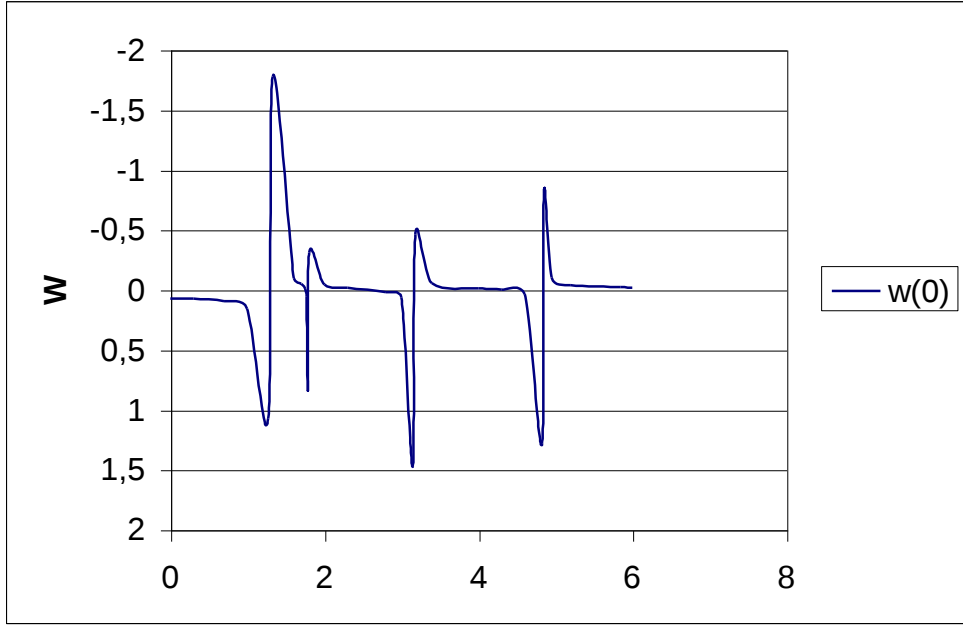


(a)

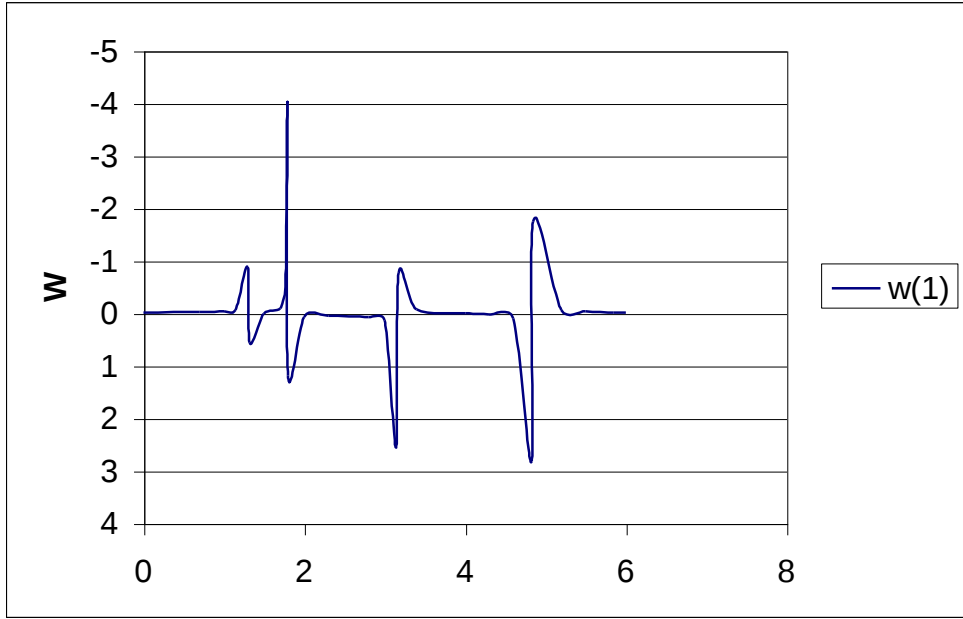


(b)

Şekil 3.9 $a = -0,5$ için (a)kiriş orta noktasının (b) kiriş uç noktasının $\overline{\Omega_0}$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

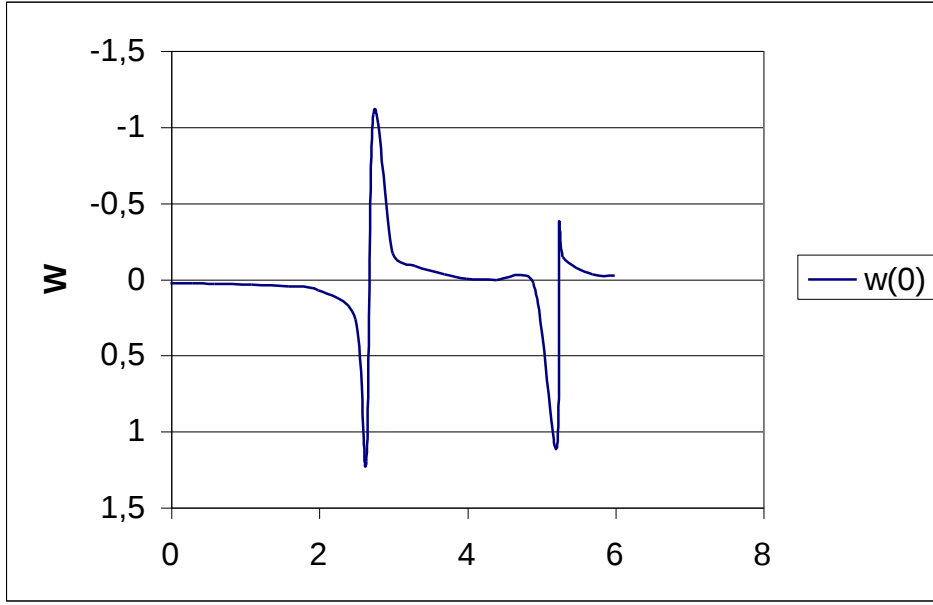


(a)

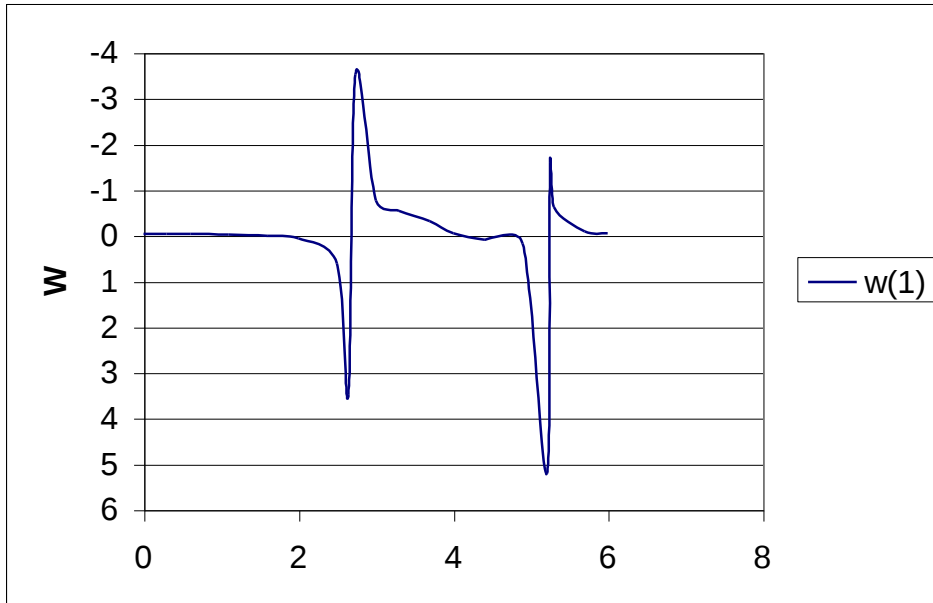


(b)

Şekil 3.10 $a = 0,5$ için (a) giriş orta noktasının (b) giriş uç noktasının $\overline{\Omega_0}$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi



(a)

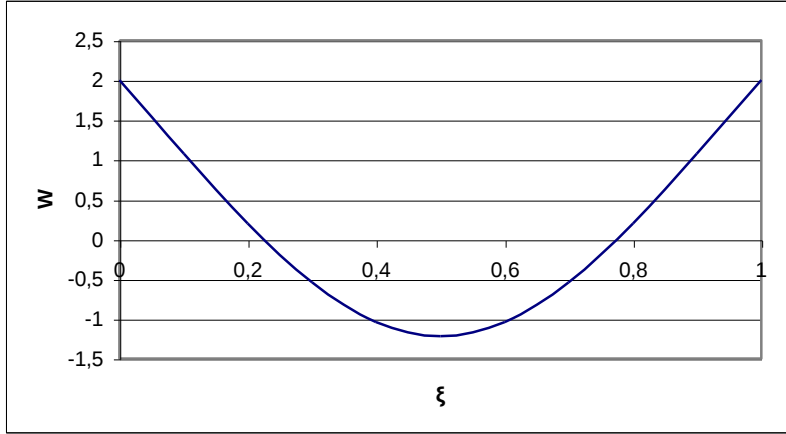


(b)

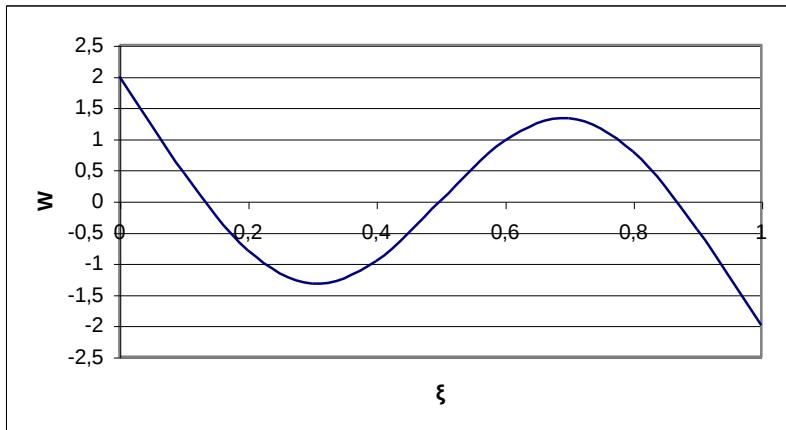
Şekil 3.11 $a = 5$ için (a) kiriş orta noktasının (b) kiriş uç noktasının $\overline{\Omega_0}$ değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

3.3 Rasgele Zorlama Hali

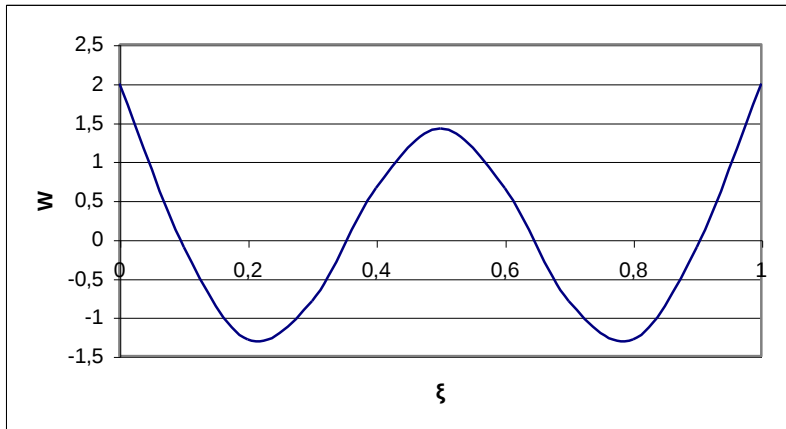
Bu bölümde kirişin orta noktasından $\overline{P}_0(t)$ kuvveti ile zorlanması halinde çeşitli t değerlerine bağlı olarak düşey yer değiştirme genlikleri incelenmiştir. Kiriş boyu L olarak alınmıştır.



(a)



(b)



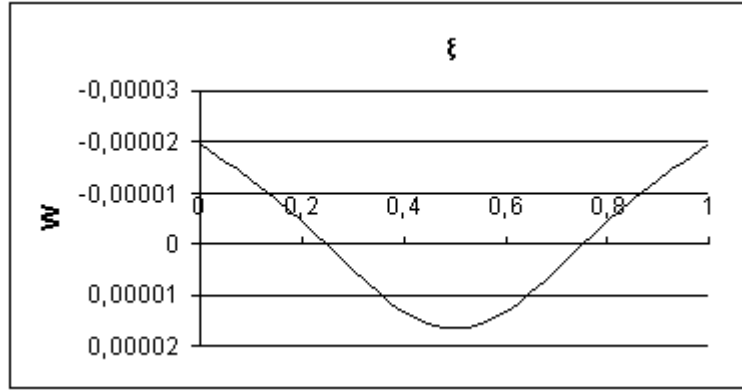
(c)

Şekil 3.12 Serbest kirişin mod şekilleri
(a) 1.mod (b) 2.mod (c) 3.mod

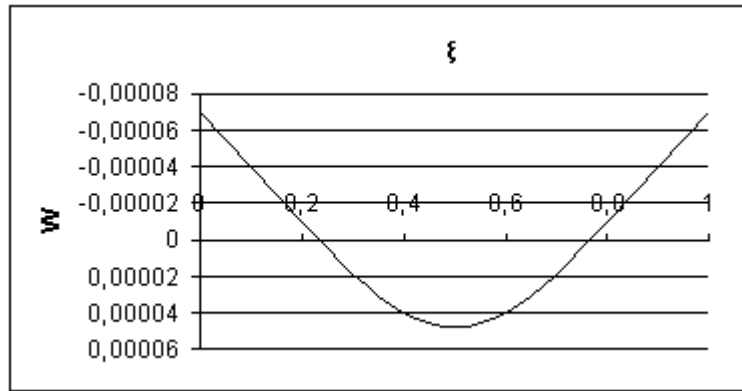
Burada

$EI = 8.10^5 \text{ kNm}^2$ $m_k = 0,125 \text{ t/m}^3$ $k = 2500 \text{ t/m}^2$ $L = 10\text{m}$
olarak alınmıştır.

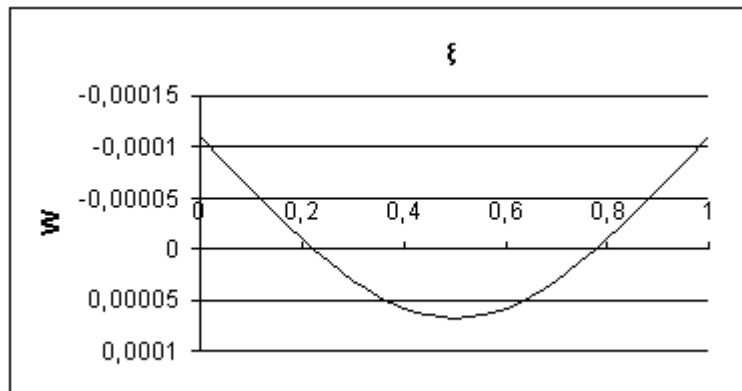
i) $\overline{P}_0(t) = 1$ olması hali



(a)

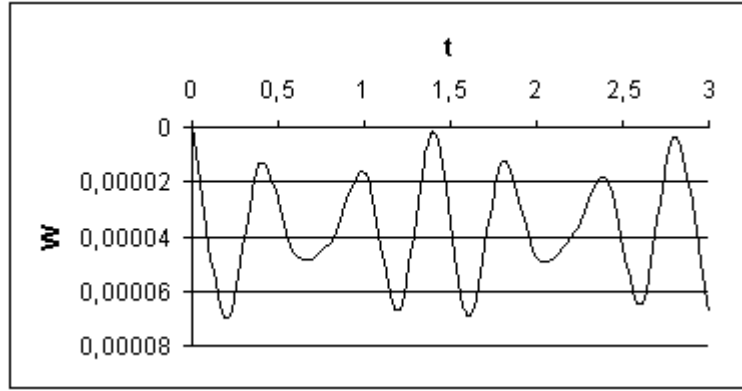


(b)

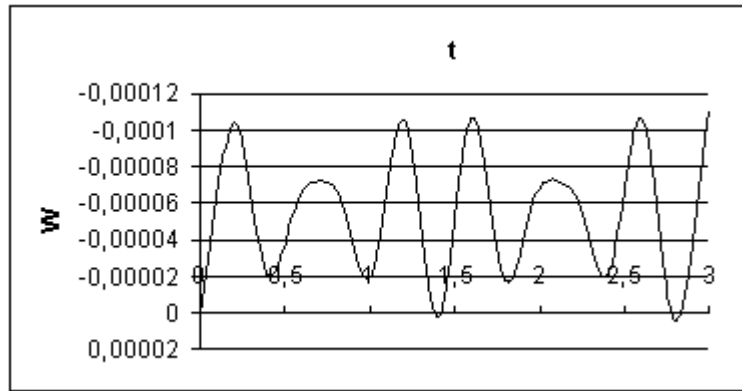


(c)

Şekil 3.13 (a) $t = 1\text{s}$ (b) $t = 2\text{s}$ (c) $t = 3\text{s}$ için kiriş elastik eğrisi



(a)



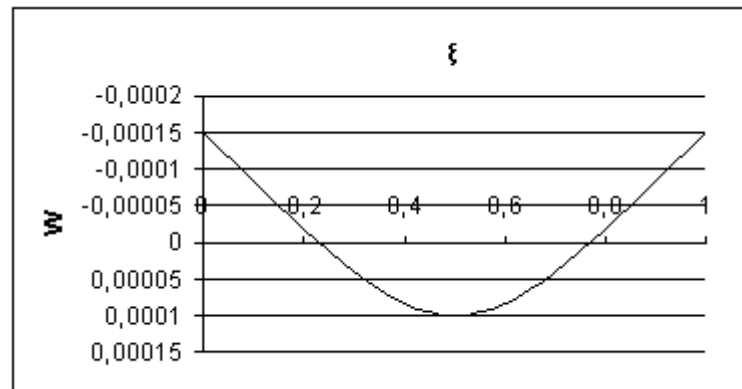
(b)

Şekil 3.14 (a) Kiriş orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi
(b) Kiriş uç noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi

ii) $\overline{P}_0(t) = e^{-t^2}$ olması hali

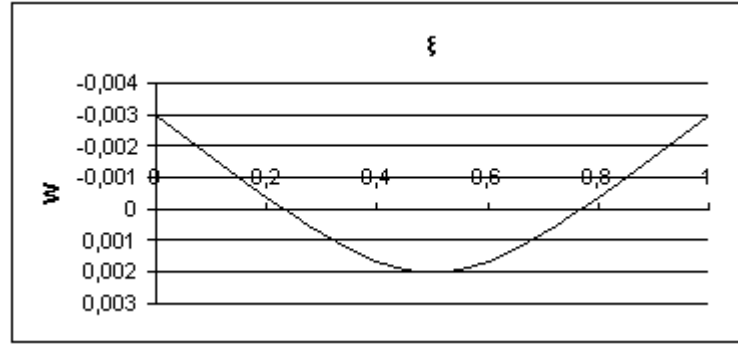
Bu durum için Runge-Kutta sayısal çözüm yöntemi kullanılmıştır.

a) Kirişin $X = L/2$ de yüklenmesi hali

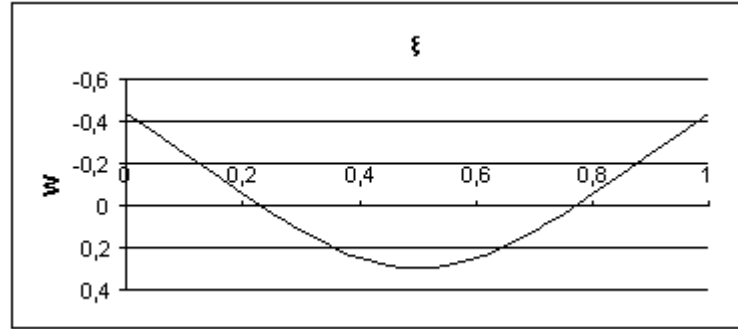


(a)

Şekil 3.15 (a) $t = 1s$ (b) $t = 2s$ (c) $t = 3s$ için kiriş elastik eğrisi

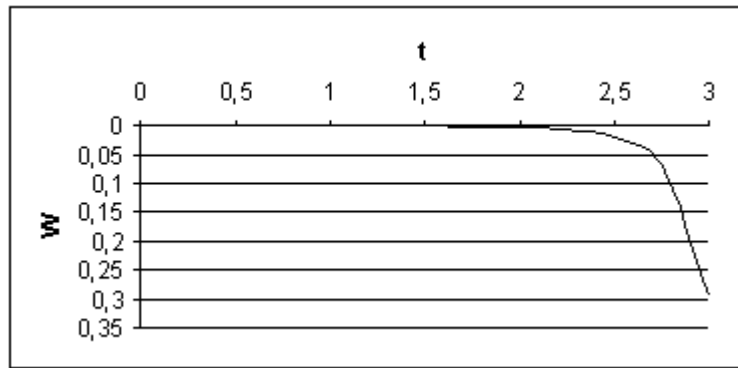


(b)

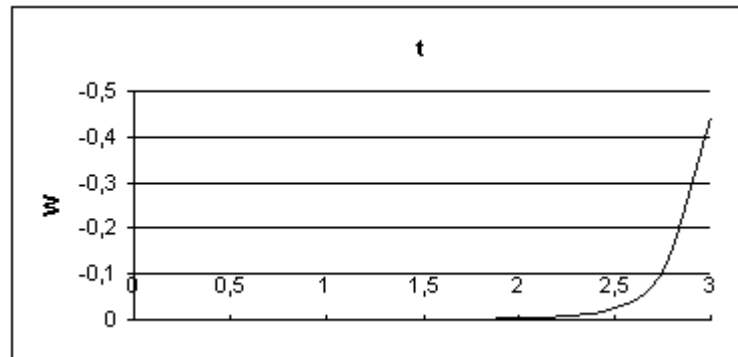


(c)

Şekil 3.15 (Devam) (a) $t = 1s$ (b) $t = 2s$ (c) $t = 3s$ için kiriş elastik eğrisi



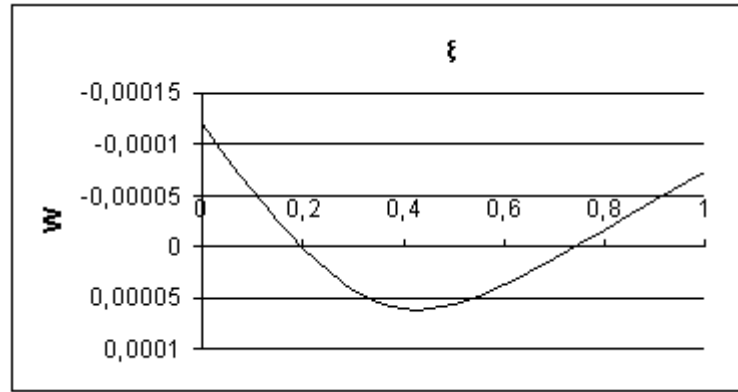
(a)



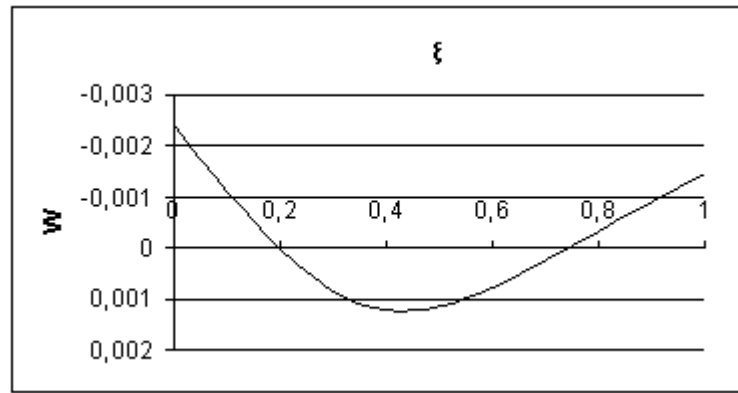
(b)

Şekil 3.16 (a) Kiriş orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi
(b) Kiriş uç noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi

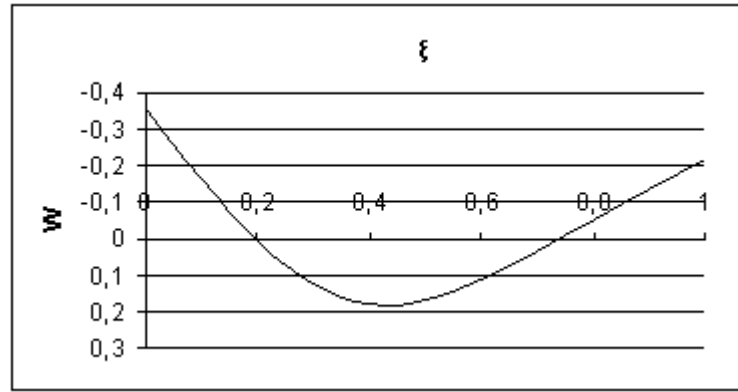
b) Kirişin $X = L/3$ de yüklenmesi hali



(a)

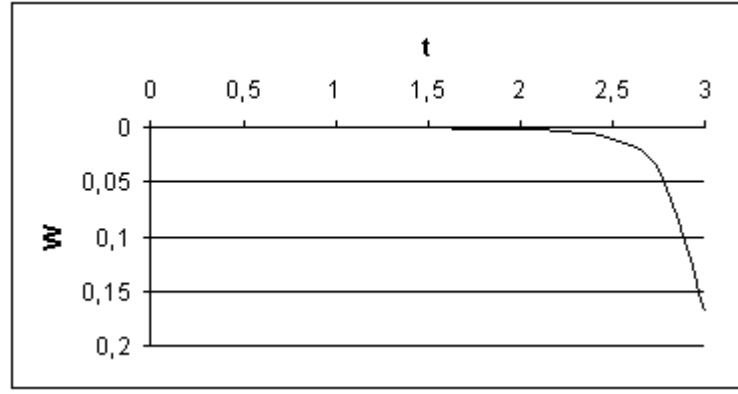


(b)

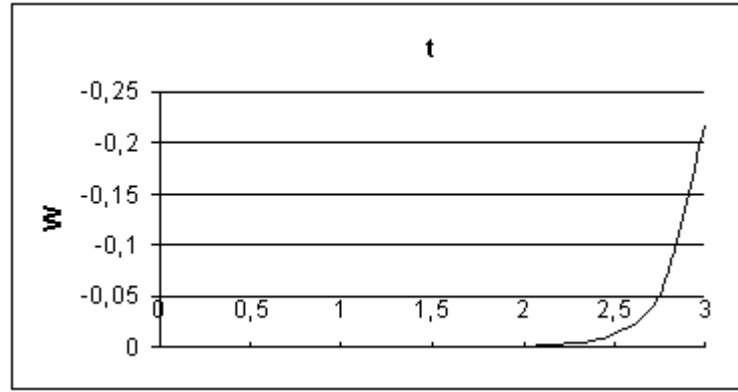


(c)

Şekil 3.17 (a) $t = 1s$ (b) $t = 2s$ (c) $t = 3s$ için kiriş elastik eğrisi



(a)



(b)

Şekil 3.18 (a) Kiriş orta noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi
(b) Kiriş uç noktasının düşey yer değiştirme genliğinin zamanla değişimi

3.4 SONUÇLAR

Bu çalışmada ilk olarak yatak katsayısının ani olarak değişmesi halinde harmonik zorlama etkisi altında $2L$ boyundaki kirişin davranışı incelenmiştir. Zorlama genliğinin çeşitli değerleri için birinci ve ikinci bölgedeki zemin katsayılarının çeşitli oranları için elastik eğriler homogen hal ile karşılaştırıldı. Birinci bölgedeki katsayının küçük olması halinde çökmeler homogen hale göre daha büyük olmaktadır. Şekil 3.1, 3.2 Spektrum eğrileri homogen hal ile katsayıların değişmesi hallerindeki öz frekanslar Şekil 3.4, 3.5, 3.6 Eğrilerde katsayılar ile spektrum eğrilerinin değişimi açık olarak görülmektedir.

Bölüm 3.2 de yatak katsayısının kiriş ortasından itibaren sürekli olarak lineer şekilde değişmesi halinde kiriş davranışı incelenmiştir. Şekil 3.7 de a katsayısının $-0,5$ ile 5 arasında değişmesi halinde elastik eğriler verilmiştir. a 'nın büyümesi (zeminin sertleşmesi) halinde çökmelerin azaldığı görülmüştür. Şekil 3.9, 3.10 ve 3.11 de a nın çeşitli değerleri için spektrum eğrileri verilmiştir. Bu eğrilerde zeminin sertleşmesi ile öz frekansların arttığı görülmüştür.

Bölüm 3.3 de L boyundaki kirişin rasgele zorlanması incelenmiştir. Önce kirişin öz fonksiyonları elde edilmiş, bunların ortogonal olmaları koşulundan da zamana bağlı davranış bir adi diferansiyel denklem sistemi olarak elde edilmiştir. Bu denklem takımının çözümünde Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Seride ilk üç terim kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar Şekil 3.12 – 3.18 de verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Winkler, E.**, Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prague, Czecheslovakia,
(1867)
- [2] **Zimmermann, H.**, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, Second Edition, Berlin, Germany, (1888)
- [3] **Keskinel, F., Kumbasar, N.**, Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, İTÜ Müh. ve Mim. Fak., İstanbul (1976)
- [4] **Keskinel, F.**, Elastik Zeminde Oturan Sonlu Kirişlerin Tesir Çizgileri ve Sürekli Temellerin Çözümüne Uygulanması, İstanbul, 1970
- [5] **Biot, A.M.**, Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics, (1937)
- [6] **Terzaghi, K., Peck, R.B.**, Soil Mechanics in Engineering Practice, J.Wiley, Newyork, (1948)
- [7] **Grasshoff, H.**, Influence of Flexural Rigidity on Superstructure on the Distribution of Contact Press and Bending Moments of an Elastic Combined Footing, Proc.4, Intern. Conf. of Soil Mech. and Eng. Foundation, London, (1957)
- [8] **Durelli, A.J., Parks, V.J., Mok, C.K.C.**, Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, j. Struc. Div. Proc. ASCE, August, 1969
- [9] **Iyengar, S.R., Anantharamu, S.**, Beams on Elastic Foundation, J.Struc. Div. Proceedings ASCE, June, (1960)
- [10] **Rao, N.S.V.K., Das, Y.C., Anandokrishan, M.**, Variational Approach to Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proc. ASCE, April, 1971
- [11] **Miranda, C.K., Nair, K.**, Finite Beams on Elastic Foundation, J.Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp.1713-1725, (1966)
- [12] **Dodge, A.**, Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J.Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp.63-101, (1964)

- [13] **Vlasov, V.Z. and Leontev, U.N.**, Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Jerusalem, (1966)
- [14] **Hentenyi, M.**, Bems on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (1946)
- [15] **Pawlowic, M.N., and Wylie, G.B.**, Vibration of Beams on Non-Homegeneous Elastic Foundations, Earth.Eng.Struct.dyn. vol.11, pp.797-808, (1983)
- [16] **Karamanlidis, D. and Prakash, V.**, Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half Space, Earth.Eng.Struct.dyn. vol.16, pp. 1103-1114, (1988)
- [17] **Williams, F.W. and Kennedy, D.**, Exact dynamic Member Stifnesses for a Beam on an Elastic Foundation, Earth.Eng.Struct.dyn. vol.15, pp. 133-136, (1987)
- [18] **De Rosa, M.A.**, Stability and Dynamics of Beams on Winkler Foundation, Earth. Eng. Struct .dyn. vol.18, pp. 377-388, (1989)
- [19] **Engin, H., Özdoğan, M.G., Coşkun, İ.**, Yalnız basınç Aktaran Pasternak Zeminine Oturan bir Kirişin Zorlanmış Titreşimleri, IX.Ulusal Mekanik Kongresi Ürgüp, pp. 542-551, (Eylül 1995)
- [20] **Graff, F., Karl**, Wave Motion in Elastic Solids, (1975)

ÖZGEÇMİŞ

Coşkun AKTURAN, 1978 yılında Trabzon’da doğdu. İlk öğrenimini Fikret Yüzatlı İlkokulunda, Orta öğrenimini Kültür Kolejinde, Lise öğrenimini de Kültür Özel Fen Lisesinde tamamladı. 1996 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı. 2000 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik programında yüksek lisans öğrenimine başladı.