

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİZ BOŞLUK İÇEREN YARIM UZAYIN
HARMONİK TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Cem SELEK**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2006

**İKİZ BOŞLUK İÇEREN YARIM UZAYIN
HARMONİK TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Cem SELEK
(Enstitü No: 501031105)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2006**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan ENGİN
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. A. Yalçın AKÖZ (Maltepe Üniversitesi)
Doç.Dr. Abdül HAYIR**

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında gerekli mesaiyi ayıran, bilgi ve tecrübesine müracaat ettiğim danışman hocam sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN' e şükranlarımı sunarım. Bununla birlikte yardımlarını esirgemeyen İnş. Yük. Müh. Aydın ÖZMUTLU' ya teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyuca desteklerini esirgemeyen, eğitimimdeki katkılarından dolayı, başta babam İnş. Müh. Mehmet SELEK olmak üzere aileme de müteşekkirim.

Mayıs 2006

Cem SELEK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER	6
3. ANALİTİK ÇÖZÜM	10
3.1 Formülasyon ve Çözüm	10
3.2 Sınır Koşullarını Sağlatılması	23
3.2.1 1.Dairesel Oyuk Üzerinde Sınır Koşulları	23
3.2.2 2.Dairesel Oyuk Üzerinde Sınır Koşulları	30
3.2.3 Serbest Yüzey Üzerinde Sınır Koşulları	37
3.3 Radyasyon Koşulu	38
4. SAYISAL UYGULAMALAR	40
4.1 Sayısal Veriler	40
4.2 Sonuçlar	40
5.TARTIŞMA	43
KAYNAKLAR	45
EK A	48
EK B	78
ÖZGEÇMİŞ	81

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler.....	6
Şekil 3.1 : Problemin geometrisi.....	10
Şekil 3.2 : Kutupsal koordinatlardaki yerdeğiştirme bileşenleri.....	15
Şekil 3.3 : Kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri.....	17
Şekil 3.4 : 1. Dairesel oyuk üzerinde sınır koşulları.....	23
Şekil 3.5 : 2. Dairesel oyuk üzerinde sınır koşulları.....	30
Şekil 3.6 : Radyasyon koşulunda iç ve dış bölge.....	38
Şekil A.1 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	48
Şekil A.2 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	49
Şekil A.3 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi.....	49
Şekil A.4 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	50
Şekil A.5 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_r^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	50
Şekil A.6 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	51
Şekil A.7 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	51
Şekil A.8 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	52
Şekil A.9 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	52
Şekil A.10 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	53
Şekil A.11 : $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	53
Şekil A.12 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	54
Şekil A.13 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	54
Şekil A.14 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	55
Şekil A.15 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	55
Şekil A.16 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	56
Şekil A.17 : $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	56

Şekil A.18	: $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	57
Şekil A.19	: $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	57
Şekil A.20	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	58
Şekil A.21	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	58
Şekil A.22	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi.....	59
Şekil A.23	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	59
Şekil A.24	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	60
Şekil A.25	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	60
Şekil A.26	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	61
Şekil A.27	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	61
Şekil A.28	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	62
Şekil A.29	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	62
Şekil A.30	: $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	63
Şekil A.31	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	63
Şekil A.32	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	64
Şekil A.33	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	64
Şekil A.34	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	65
Şekil A.35	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	65
Şekil A.36	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	66
Şekil A.37	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	66
Şekil A.38	: $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	67
Şekil A.39	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	67
Şekil A.40	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	68
Şekil A.41	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	68
Şekil A.42	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	69
Şekil A.43	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	69
Şekil A.44	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	70

Şekil A.45	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	70
Şekil A.46	: $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	71
Şekil A.47	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	71
Şekil A.48	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	72
Şekil A.49	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi.....	72
Şekil A.50	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	73
Şekil A.51	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_r^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	73
Şekil A.52	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi.....	74
Şekil A.53	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	74
Şekil A.54	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	75
Şekil A.55	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	75
Şekil A.56	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	76
Şekil A.57	: $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(2)}$ gerilmesinin değişimi.....	76
Şekil A.58	: $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için $x=0$, $y=10$ noktasında u_x yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	77
Şekil A.59	: $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için $x=0$, $y=10$ noktasında u_y yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	77

SEMBOL LİSTESİ

ω	: Zorlama frekansı
t	: Zaman
p_i	: Harmonik iç basınç
p_0	: Harmonik iç basınç genliği
ρ	: Yarı sonsuz ortamın kütle yoğunluğu
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	: Şekildeğiştirme bileşenleri
ε_{xy}	: Kayma şekildeğiştirmesi
e	: Düzlemsel hacim değiştirme oranı
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
λ, μ	: Lamé sabitleri
n_x	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün x bileşeni
n_y	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün y bileşeni
$\hat{t}_x$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin x bileşeni
$\hat{t}_y$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin y bileşeni
$\hat{U}$	: Yerdeğiştirme vektörü
$\hat{U}_x$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin x bileşeni
$\hat{U}_y$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin y bileşeni
U_x	: Yerdeğiştirmenin x bileşeni
U_y	: Yerdeğiştirmenin y bileşeni
$U_r^{(1)}$	: Yerdeğiştirmenin 1.Kutupsal koordinatlarda radyal doğrultudaki bileşeni
$U_r^{(2)}$	: Yerdeğiştirmenin 2.Kutupsal koordinatlarda radyal doğrultudaki bileşeni
$U_\theta^{(1)}$	: Yerdeğiştirmenin 1.Kutupsal koordinatlarda açısal doğrultudaki bileşeni
$U_\theta^{(2)}$	: Yerdeğiştirmenin 2.Kutupsal koordinatlarda açısal doğrultudaki bileşeni
u_x	: Yerdeğiştirmenin genliğinin x bileşeni
u_y	: Yerdeğiştirmenin genliğinin y bileşeni
$u_r^{(1)}$	: Yerdeğiştirmenin genliğinin 1.Kutupsal koordinatlarda radyal doğrultudaki bileşeni
$u_r^{(2)}$	: Yerdeğiştirmenin genliğinin 2.Kutupsal koordinatlarda radyal doğrultudaki bileşeni

$u_{\theta}^{(1)}$	: Yerdeğiştirmenin genliğinin 1.Kutupsal koordinatlarda açısıl doğrultudaki bileşeni
$u_{\theta}^{(2)}$	: Yerdeğiştirmenin genliğinin 2.Kutupsal koordinatlarda açısıl doğrultudaki bileşeni
φ_1, ψ_1	: 1. kutupsal koordinatlarda yerdeğiştirme potansiyelleri
φ_2, ψ_2	: 2. kutupsal koordinatlarda yerdeğiştirme potansiyelleri
H	: Silindirik oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği
d	: 1. Dairesel oyuk ile 2. Dairesel oyuk arasındaki mesafe
a_1	: 1. Dairesel oyuk yarıçapı
a_2	: 2. Dairesel oyuk yarıçapı
r_1, θ_1	: 1.Kutupsal koordinatlar
r_2, θ_2	: 2.Kutupsal koordinatlar
$\sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(1)}, \tau_{r\theta}^{(1)}$	: 1.Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_{rr}^{(2)}, \sigma_{\theta\theta}^{(2)}, \tau_{r\theta}^{(2)}$	: 2.Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_{r_1r_1}, \sigma_{\theta_1\theta_1}, \tau_{r_1\theta_1}$	: 1.Kutupsal koordinatlarda dönüşüm bağıntıları kullanılarak elde edilen gerilme bileşenleri
$\sigma_{r_2r_2}, \sigma_{\theta_2\theta_2}, \tau_{r_2\theta_2}$	: 1.Kutupsal koordinatlarda dönüşüm bağıntıları kullanılarak elde edilen gerilme bileşenleri
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	: Kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
k_1	: Boyuna dalga sayısı
k_2	: Enine dalga sayısı
c_1	: Boyuna dalga hızı
c_2	: Enine dalga hızı
J_n	: Birinci nevi Bessel fonksiyonu
Y_n	: İkinci nevi Bessel fonksiyonu
$H_n^{(1)}$	: Birinci nevi Hankel fonksiyonu
$H_n^{(2)}$	: İkinci nevi Hankel fonksiyonu

İKİZ BOŞLUK İÇEREN YARIM UZAYIN HARMONİK TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Literatürde, boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışı, matematik modellemesinin kolay olması dolayısıyla geniş olarak incelenmiştir. Halbuki yarı sonsuz ortam modeli sonsuz ortam modeline göre uygulamaya daha elverişli olmasına karşın sınır koşullarının sağlatılmasında bazı güçlükler ortaya çıkmaktadır. Günümüz bilgisayar teknolojisinin gelişmesine paralel olarak geliştirilen yazılımlarla karmaşık matematik problemleri çözülebilir hale gelmiş bu da ilginin yarı sonsuz ortam modeli üzerinde artmasını sağlamıştır.

Bu çalışmada, harmonik iç basınçla zorlanan homogen, izotrop ve lineer elastik, ikiz dairesel boşluk içeren yarım uzayın davranışı incelendi.

Birinci bölümde, problem tanıtarak literatürde bulunan bu konuyla ilgili önceki çalışmalardan ve bu çalışmada kullanılan yöntemden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çözüm için kullanılan temel denklemlerin çıkarılışı gösterilmiştir. Newton'un ikinci yasasından faydalanan hareket denklemleri yazılmış, homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli bünye bağıntıları kullanılarak Navier denklemleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, çözüm yöntemi anlatılmıştır. Kupla hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri iki ayrı yerel eksen takımında Bessel – Trigonometrik çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler oyuk yüzeyleri ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Her iki oyuk yerel eksenleri arasındaki dönüşümde Graff Ekleme Teoremi bağıntılarından yararlanılmıştır. Böylece oyuk yüzeylerinde sınır koşulları kesin olarak sağlatılmıştır. Serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenleri her noktada sıfır olmalıdır. Ancak serbest yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması, çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle birden fazla çözüm elde edilecektir. En uygun çözümü bulmak amacı ile çeşitli denemeler yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda serbest yüzeyde incelenen bölgenin uç ve orta kesimlerinde yoğunlaşmış nokta seçimiyle, yüzey boyunca gerilme bileşenleriyle ilgili koşullar yaklaşık olarak sağlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Mathematica 4.2 paket programı kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış, oyuk yüzeyindeki ve serbest yüzey boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre grafiksel değişimleri değerlendirilmiştir.

Beşinci bölümde, çözüm tekniğinin ve sonuçların kısa bir yorumu yapılmıştır.

HARMONIC VIBRATIONS OF A HALF – SPACE WHICH INCLUDE TWIN CAVITIES

SUMMARY

Behavior of an elastic medium, which consists of a cavity or a material, under the dynamic effects has been subject of recent studies. Investigations dealing with tunneling, underground pipelining, underwater pipelining and constructing underground power plants are namely the basics of this topic. Also, there are many applications of these problems in acoustics and optics.

In the literature, the response of an infinite medium under the dynamic effects is easy for researchers because mathematical modeling is easy and therefore one may find widely. On the other hand mathematical modeling of semi-infinite medium is not that easy even it is more applicable in practice. Satisfying the boundary conditions is complex in semi-infinite medium and that makes the subject more complicated. Recent improvements in processors technology and which in parallel in software makes it easy to solve the complex mathematical problems and that makes the semi-infinite medium modeling is more interesting for the researchers.

In this study, the response of a homogeneous, isotropic and linear elastic semi-infinite medium, which includes twin circular cylindrical cavities, is investigated when subjected to harmonic inner pressure.

In the first part of the study, problem is presented simply and investigations on the same topic found in literature including the methods used before is given.

In the second part, derivation of basic equations is given. Equations of motion that is written based on Newton's second law and then Navier's equations are derived using constitutive equations for homogeneous, isotropic and linear elastic medium.

In the third part, method for solving the equation is explained. Coupled equation of motions is reduced into two wave equations by use of Helmholtz potentials in polar coordinates. These reduced wave equations are solved in two local coordinates by using the Bessel – Trigonometric multiplication series. Unknown coefficients are calculated by applying boundary conditions on the cavity and free surface conditions. Transformations of the local coordinate systems of between the cavities is benefited Graff's Addition Theorem. Thus, Boundary conditions on the cavity surface are satisfied exactly. On each point of the free surface, components of stresses must be equal to zero. There is infinite number of conditions on free surface. We have to cut these series in a finite number. In this case there are obviously many solutions. Many combinations have been tried to find best point selections. As a result of these researches conditions related to the components of stress on the surface are approximately provided by concentrated point selection in the middle and the tip of the investigated part on the free surface.

In the fourth part, “Mathematica (ver 4.2)” is used to reach the numerical solutions. Graphical variation of displacement and stress components on cavity and free surface are evaluated with respect to various parameters.

In the fifth part, the technique of solution and results are discussed briefly.

1. GİRİŞ

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Literatürde, boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışı, matematik modellemesinin kolay olması nedeniyle geniş olarak incelenmiştir. (Eringen ve Şuhubi [1], Graff [2]). Sonsuz ortamla ilgili birçok çalışma olmasına rağmen yarı sonsuz ortamdaki yapıların dinamik etkiler altındaki davranışıyla ilgili çalışmalar yakın zamana kadar yapılmamaktaydı. Sınır koşullarının sağlatılmasında ortaya çıkan güçlük nedeniyle yarı sonsuz ortam modeli sonsuz ortam modeline göre uygulamaya daha elverişli olmasına karşın geçmişte daha az ele alınmıştır. Hızla gelişen bilgisayar teknolojisine paralel olarak bilgisayar programları da gelişmiştir. Böylelikle karmaşık matematik problemler çözülebilir hale gelmiş bu da ilginin yarı sonsuz ortam modeli üzerinde artmasını sağlamıştır.

Datta ve arkadaşları [3] pek çok çalışmalarında elastik yarım uzayda bulunan silindirik kabuk gibi yapıların düzlem veya Rayleigh dalgaları altındaki davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmalarda yarım uzayda bulunan silindirik kabuğun harmonik dalga altındaki davranışı, asimptotik açılımların birbiri ile uyuşturulması ve ardışık yansımalar yöntemleri kullanılarak incelenmiştir.

Yarı sonsuz elastik bir ortamdaki gömülü boruların dinamik davranışını Datta, Shah ve Wong [4] incelemişlerdir. Bu çalışmada gerçek durum homogen bir zemine gömülü boru hattının etrafının farklı bir malzemeye doldurulması hali göz önüne alınarak modellenmeye çalışılmıştır. Bessel fonksiyonlarıyla modelin davranışı temsil edilmiş, serbest yüzey ve dolgu bölgesi yüzeyinden dalgaların ardışık yansımaları göz önüne alınmıştır. Bir başka çalışmada ise Wong, Shah ve Datta [5]

boru geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması halini göz önüne almışlardır. Çalışmada dış bölgede analitik çözüm teknikleri kullanılırken, iç bölgede sonlu eleman modellemesi yapılmıştır.

Balendra ve arkadaşları [6,7] tarafından yeraltı tünellerindeki kararlı titreşimlerin, tünel-zemin-yapı etkileşim sistemleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Tünel ve yerüstü yapısının temelini rijit cisim, ortam zeminini viskoelastik olarak kabul etmişlerdir. Serbest yüzey üzerinde sonlu sayıda sınır koşulu alınmış ve sınır koşulları sayısı bilinmeyen sayısından fazla olduğu için Trefftz yöntemi uygulanmıştır. Çalışmada çözüm fonksiyonları olarak Hankel – trigonometrik fonksiyon serileri kullanılmıştır.

Zamana bağlı yüzey kuvvetleri etkisindeki sonsuz uzunluktaki silindirik boşluğun bulunduğu homogen, izotrop ve elastik yarım uzay ortamının davranışı Thiruvengkatachar ve Viswanathan [8] incelemişlerdir. Çözümde ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılmış olup çözüm fonksiyonları olarak alınan Hankel – trigonometrik fonksiyon serileri simetrik ve asimetrik kısımlara ayrılarak sınır koşulları boşluk ve serbest yüzey üzerinde sağlatılıp hata azaltılmaya çalışılmıştır.

Kabuk eksenine eğik açıyla gelen düzlem dalgalar etkisinde, yatay katmanlı viskoelastik yarım uzayda gömülü sonsuz uzun silindirik kabuğun üç eksenli davranışını Luco ve Barros [9,10] incelemişlerdir. Bu çalışmada, dış bölgede viskoelastik yarım uzay için dolaylı bir integral ifadesinin birleşmesinden elde edilen çözüm fonksiyonları, boru hattını veya tüneli içeren iç bölgede ise basitleştirilmiş Donnell kabuk teorisi kullanılmıştır. Dolaylı integral hareketli Green fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir.

Guan ve Moore [11] derin gömülü ikiz boşluk içeren viskoelastik ortamın hareketli yük etkisi altında üç boyutlu davranışı incelemişlerdir. Boşlukların birbiriyle etkileşimi eksen takımı dönüşümü ile hesaplanmıştır. Diğer çalışmalarında ise [12] ardışık yansımalar yöntemi kullanılarak sismik yükleme etkisindeki sonsuz ortama gömülü ikiz tünellerin üç eksenli davranışı için bir formül geliştirilmiştir.

Bayıroğlu [13] lineer elastik ve homogen, izotrop bir yarım uzayda gömülü farklı tip malzemeden yapılmış, harmonik iç zorlama etkisindeki silindirik kabuğun ve yarım uzayın davranışını incelenmiştir. Çalışmada ortamın davranışı Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla ifade edilmiştir. Serbest yüzeydeki sınır koşulları

yaklaşık olarak sağlatılmış, analitik yoldan elde edilen sonuçlar sonlu elamanlar yöntemiyle kontrol edilmiştir.

Davis, Lee ve Bardet [14], yeraltındaki silindirik boşlukların SV kayma dalgalarına bağlı enine davranışını araştırmışlardır. Elastik yarım uzayda gömülü boşlukların, Fourier – Bessel serileri ve yarım uzayın serbest yüzeyinde convex yaklaşımlar kullanılarak analitik çözümü yapılmıştır. Analitik çözümler, boşluk çapından daha büyük dalga boyuna sahip düşük frekanslı dalgaların boşluk yüzeyine çarpmasıyla oluşan, radyala dik doğrultudaki gerilmelerin hesaplanması için yaklaşık çözüm formüllerine genişletilmiş, varolan nümerik çözümler yaklaşık çözümle karşılaştırılarak 1994 Northridge depreminde sarsılan bükülebilir gömülü boruların dinamik davranışının tahmin edilmesinde kullanılmıştır.

Engin ve Coşkun [15] dairesel silindirik bir boşluk içeren bir elastik yarım uzayda harmonik titreşimleri incelemişlerdir. Kutupsal koordinatlarda yazılan hareket denklemleri, Helmholtz potansiyellerinin kullanılmasıyla iki adet ayrık dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonlar çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Yuan ve Liao [16,17], silindirik alüvyonlu bir vadiden ve tepeden iki eksenli düzlem SH dalgası saçılımının kapalı form çözümünü dalga fonksiyonu açılım yöntemini kullanarak vermişlerdir. Graff Ekleme teoreminin dış bölge biçimi kullanılarak çözüm, çözülebilir sonsuz doğrusal cebrik denklem takımına indirgenmiştir.

Liu, He ve Fan, [18] iki farklı malzemeden oluşan bir ortamda ara yüzey üzerinde boşluk olması halinde SH dalgalarının yayılmasını incelemişlerdir.

Elastisite teorisinde karşılaşılan çeşitli sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı altı yöntem vardır. Bunlar;

- Ters Yöntem: Diferansiyel denklem takımı çözülerek probleme cevap bulunacak yerde, ters olarak, denklem takımını sağlayan bir takım fonksiyonlar içinden sınır koşullarını sağlayan çözüm olarak seçilir.
- Yarı Ters Yöntem: Bilinmeyenlerin tümü yerine bir kısmına uygun fonksiyonlar seçilir ve diğer kısmının ise bazı diferansiyel denklemleri ve sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmesine çalışılır.

- Direkt Yöntem: Belirli sınır değer problemini oluşturan ilgili diferansiyel denklem takımının tümü, doğrudan doğruya integre edilerek çözümler bulunduktan sonra sınır koşullarının sağlatılmasına çalışılır.
- Enerji Yöntemi: Fiziksel anlamı enerji olan belirli bir integralin ekstrem yapılmasına çalışılmaktadır.
- Sayısal Yöntemler: İncelenen cisim sonlu bir takım parçalara ayrılarak belirli noktalarda yaklaşık çözüm elde edilmesine çalışılır.
- Deneysel Yöntemler: Gerek form gerekse sınır koşulları bakımından karışık problemlerde başvurulmuş bir yöntemdir.

Bu çalışmada ele alınan problemin geometrisine uygunluğu nedeniyle Direkt yöntem kullanılmıştır. Bir elastisite probleminin direkt yöntemle incelenmesi, problemin diferansiyel denklem takımının belirli sınır koşulları altında doğrudan doğruya çözülmesini amaçlar. Bu açıdan problem, ya altı gerilme bileşenini esas alan Beltrami – Michell uygunluk denklemlerinin denge denklemleri ile birlikte belirli sınır koşulları altındaki çözümüne veya yerdeğiştirme bileşenlerini esas alan Navier denklemlerinin yine belirli sınır koşullarını gerçekleyen çözümünün bulunmasına getirilebilmektedir. Belirli sınır koşulları altında birden fazla kısmi diferansiyel denklemin simültane olarak çözümünde ortaya çıkan güçlük nedeniyle çözümü gerçekleştirebilmek için bir takım yardımcı fonksiyonların kullanılması düşünülmüştür. Elastisite teorisinde gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri, kullanılan yardımcı fonksiyonların çeşitli mertebelerden kısmi türevleri yardımıyla tanımlanmaktadır. Çözülmesi istenen takım Beltrami denklemleriyse tanımlanan fonksiyonlar gerilme fonksiyonları adını alır. Buna karşılık Navier denklemleri çözülmek istenirse kullanılan fonksiyonlara yerdeğiştirme fonksiyonları denir. Bu tür yardımcı fonksiyonlar potansiyel fonksiyonlar olarak adlandırılıp, denge halinde bulunan gerilme sistemlerini doğuran potansiyeller ve yerdeğiştirmeleri üreten potansiyeller olmak üzere iki tip potansiyel tanımlanmaktadır.

Çalışmada, harmonik iç basınç etkisi altındaki ikiz dairesel boşluk içeren homogen, izotrop ve lineer elastik yarım uzayın davranışı incelendi. Silindirik boşlukların eksen boyunda geometri, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmemesi nedeniyle düzlem şekil değiştirme hali göz önüne alındı.

Çözümde, kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri iki ayrı kutupsal koordinat takımında Bessel –Fourier serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. İkinci nevi Bessel fonksiyonlarının özellikle büyük mertebelerinde küçük argüman halinde ekstrem değerler alması dolayısıyla seri sonlu sayıda terim alarak kesilmiştir.

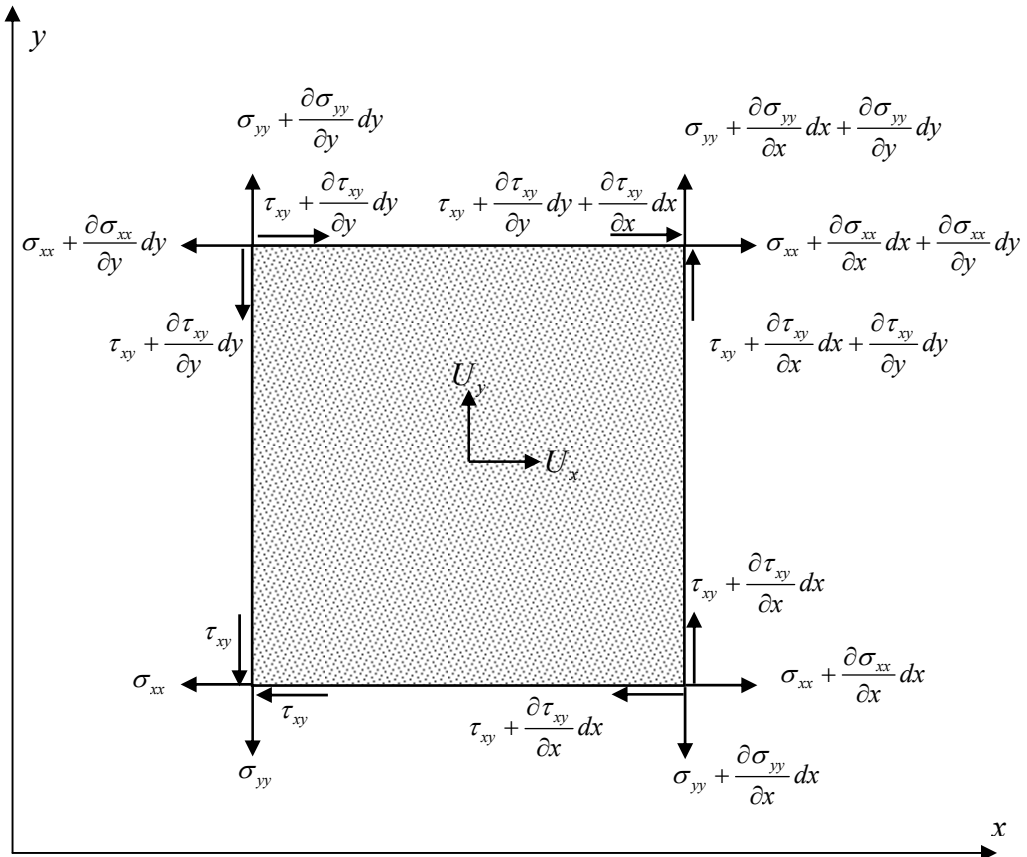
Analitik çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler oyuk yüzeylerinde ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Oyuk yüzeylerinde sınır koşullarının tam olarak sağlatılmasında Bessel fonksiyonları için dönüşüm bağıntıları (Graff ekleme teoremi) kullanılarak bu koşullar kesin sağlatılmıştır. Serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenleri her noktada sıfır olmalıdır. Ancak serbest yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması, çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle birden fazla çözüm elde edilecektir. Birçok çözüm içinden en iyi çözümü bulmak amacı ile çeşitli nokta seçim alternatifleri denenmiştir. Sonuçta serbest yüzey üzerinde seçilen aralıkta uç ve orta bölgeler de daha sık nokta seçmenin en iyi alternatif olduğu görölmüş ve buna göre nokta seçimi yapılmıştır.

Sayısal işlemlerde Mathematica 4.2 paket programı kullanılarak oyuk yüzeyindeki ve serbest yüzey boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre değişimleri grafiklerle gösterilmiştir.

2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde iki boyutlu homogen, izotrop ve lineer elastik bir ortam göz önüne alınmıştır. Bu ortamdan bir yüzey elemanını alınarak üzerine etki eden kuvvet sistemine Newton' un ikinci hareket kanunu tatbik etmek suretiyle düzlem elastisitenin temel denklemleri elde edildi. Söz konusu ortam için geçerli olan bünye bağıntıları, elde edilen bu denklemlerde kullanılarak yerdeğiştirmeler cinsinden alan denklemleri olan Navier denklemleri elde edildi.

Şekil 2.1 de görüldüğü gibi iki boyutlu homogen, izotrop ve lineer elastik bir ortamdan alınan diferansiyel bir alan elemanında kütle kuvvetlerini ihmal ederek Newton' un ikinci hareket kanunu uygulayalım.



Şekil 2.1 Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler

Bu elamanın kenarlarına etkiyen kuvvetleri ve ivme bileşenlerini göz önüne alalım. Levha kalınlığını birim olarak alıp x eksenini doğrultusundaki hareket denklemini yazacak olursak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \right) + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dy - \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \right) + \sigma_{xx} \right] dy \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \right] dx - \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) + \tau_{xy} \right] dx \\ & = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} dx dy \end{aligned}$$

(2.1.a)

ifadesi elde edilir. Hareket denklemini bir kez de y eksenini doğrultusunda yazarsak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) \right] dx - \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dx \right) + \sigma_{yy} \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \right] dy - \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) + \tau_{xy} \right] dy \\ & = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} dx dy \end{aligned}$$

(2.1.b)

ifadesi elde edilir. Gerekli kısaltmalar ve düzenlemelerden yapıldıktan sonra aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.2.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.2.b)$$

Burada σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} gerilme tansörünün, U_x ve U_y yerdeğiştirmenin kartezyen koordinatlardaki bileşenleridir. ρ kütle yoğunluğunu, t ise zamanı göstermektedir.

Gerilmeler cinsinden sınır koşulları:

$$\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y = \hat{t}_x \quad (2.3.a)$$

$$\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = \hat{t}_y \quad (2.3.b)$$

Burada n_x ve n_y sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün bileşenleri $\hat{t}_x$ ve $\hat{t}_y$ ise sınırdaki etki eden dış gerilmenin bileşenleridir.

Yerdeğiştirmeler cinsinden sınır koşulları:

$$U_x = \hat{U}_x \quad (2.4.a)$$

$$U_y = \hat{U}_y \quad (2.4.b)$$

Burada $\hat{U}_x$ ve $\hat{U}_y$ sınırdaki yerdeğiştirmenin belirli olan bileşenleridir. Lineer elastik ve homogen, izotrop ortamlardaki bünye bağıntısı indis gösterimiyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

λ ve μ Lamé değişmezleri olup, bu değişmezler E Elastisite modülü ve ν Poisson oranı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.6.a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6.b)$$

Hacim değiştirme oranı olan ε_{kk} ise düzlem şekildeğiştirme hali için aşağıdaki gibidir.

$$e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (2.7)$$

Kartezyen koordinatlardaki şekildeğiştirme – yerdeğiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad (2.8.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (2.8.b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \quad (2.8.c)$$

(2.8) bağıntıları (2.5) bünye bağıntısı ile birlikte (2.2) hareket denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa kartezyen koordinatlarda yerdeğiştirmeler cinsinden Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu \nabla^2 U_x = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.9.a)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial x} \right) + \mu \nabla^2 U_y = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.9.b)$$

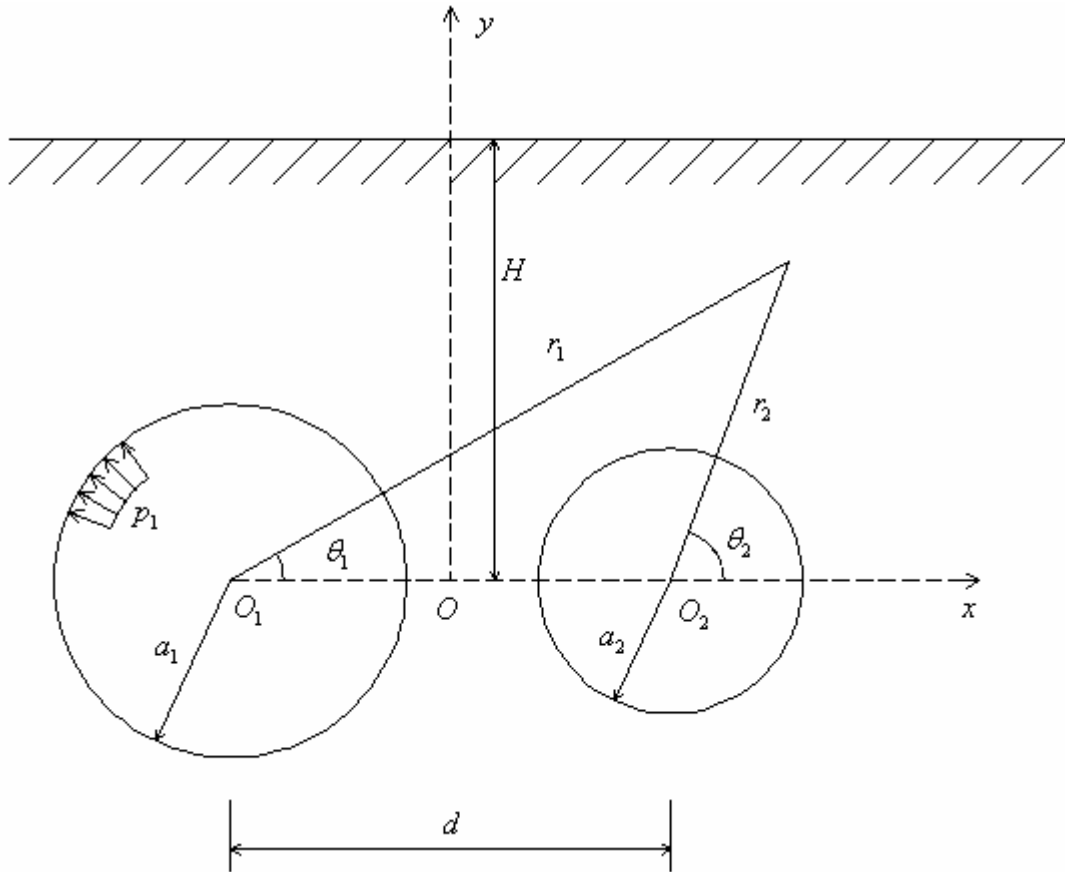
(2.9) Navier denklemlerindeki, ∇^2 kartezyen koordinatlarda Laplasyen olup ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1 FORMÜLASYON ve ÇÖZÜM

Yarı sonsuz ortamda serbest yüzeyden H kadar derinlikte, a_1 ve a_2 yarıçaplı, aralarındaki uzaklık $d > a_1 + a_2$ olan iki dairesel boşluk Şekil 3.1’de görüldüğü gibi iç yüzeyleri boyunca $p_1 = p_0 e^{-i\omega t}$ ve $p_2 = 0$ harmonik zorlamaları etkisinde olsun. z , eksenini boyunca ortamın geometrisi, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmediği kabul edilirse, problem bir düzlem şekildeğiştirme hali olarak göz önüne alınabilir. Problemin geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygundur.



Şekil 3.1 Problemin geometrisi

Yönetici denklemimiz olan (2.9) denklemi aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{U} + \mu\nabla^2\vec{U} = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Burada $\vec{U}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, t)$ yerdeğiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu λ ve μ Lamé değişmezlerini, ∇ Nabla operatörünü, t' de zamanı göstermektedir. r_i ve θ_i kutupsal koordinatlardır.

Yarı sonsuz ortamda bulunan a_1 yarıçaplı dairesel boşluğun iç yüzeyine p_0 genlik, ω açısal frekans, t' de zaman olmak üzere

$$p_1 = p_0 e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

şeklinde değişen, iç basıncın etkidiği düşünülürse, yerdeğiştirme ve gerilme fonksiyonları da 1. mertebe teorisinin kullanılması sonucu aynı şekilde harmonik fonksiyonlarla ifade edilebilir.

$$U_r^{(i)}(r_i, \theta_i, t) = u_r^{(i)}(r_i, \theta_i) e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.a)$$

$$U_\theta^{(i)}(r_i, \theta_i, t) = u_\theta^{(i)}(r_i, \theta_i) e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.b)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r_i, \theta_i, t) = \sigma_{rr}^{(i)}(r_i, \theta_i) e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r_i, \theta_i, t) = \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r_i, \theta_i) e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.b)$$

$$\tau_{r\theta}^{(i)}(r_i, \theta_i, t) = \tau_{r\theta}^{(i)}(r_i, \theta_i) e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.c)$$

Burada $u_r^{(i)}$ ve $u_\theta^{(i)}$ yerdeğiştirme vektörünün, $\sigma_{rr}^{(i)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$ ve $\tau_{r\theta}^{(i)}$ gerilme tansörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleridir. $e^{-i\omega t}$ ifadesindeki i pür sanal i olup $i^2 = -1$ dir.

Yerdeğiştirmelere ait (3.3) ifadeleri, (3.1) Navier denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\vec{u} + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\omega^2\vec{u} = 0 \quad (3.5)$$

Yerdeğiştirmeyi, φ ve $\vec{\psi}$ Helmholtz potansiyelleri cinsinden yazıp, bu potansiyelleri de aşağıdaki gibi iki parçaya ayırıyoruz. İki adet oyuk olması nedeni ile bu potansiyelleri O_1 ve O_2 noktaları için ayrı ayrı yazıp $\varphi(r_1, \theta_1; r_2, \theta_2) = \varphi(r_1, \theta_1) + \varphi(r_2, \theta_2)$ ve $\vec{\psi}(r_1, \theta_1; r_2, \theta_2) = \vec{\psi}(r_1, \theta_1) + \vec{\psi}(r_2, \theta_2)$ şeklinde alabiliriz. Bu durumda yerdeğiştirme vektörü aşağıdaki gibi olur.

$$\vec{u} = \vec{\nabla}[\varphi_1(r_1, \theta_1) + \varphi_2(r_2, \theta_2)] + Rot[\{\psi_1(r_1, \theta_1) + \psi_2(r_2, \theta_2)\}\vec{e}_z] \quad (3.6)$$

Burada, tek çözüm elde edilebilmesi için $\vec{\psi}$ vektörel potansiyelinin diverjansı sıfır olmalıdır, yani;

$$\vec{\nabla} \cdot ((\psi_1(r_1, \theta_1) + \psi_2(r_2, \theta_2))\vec{e}_z) = 0$$

Potansiyel fonksiyonlarla yazılan yerdeğiştirme vektörüne ait (3.6) ifadesi (3.5) Navier denkleminde yerine yazılırsa bu ayırma işleminin sonunda indirgenmiş dalga denklemi olarak,

$$\nabla^2 \varphi_i + k_1^2 \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.7.a)$$

$$\nabla^2 \psi_i + k_2^2 \psi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.7.b)$$

denklemleri elde edilmektedir. ∇^2 kutupsal koordinatlarda Laplasyen olup

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2}, \quad i = 1, 2$$

ile ifade edilmektedir. İndirgenmiş dalga denklemindeki

$$k_1 = \omega / c_1 \quad \text{Boyuna dalga sayısı,}$$

$$k_2 = \omega / c_2 \quad \text{Enine dalga sayısı,}$$

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$$

Boyuna dalga hızı,

$$c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$$

Enine dalga hızı,

olarak tanımlanmaktadır.

Yerdeğiştirme vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri potansiyel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$u_r^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.8.a)$$

$$u_\theta^{(i)} = \frac{1}{r_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.8.b)$$

Gerilme bileşeni genliklerinin Helmholtz potansiyelleri cinsinden ifadeleri de aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{rr}^{(i)} = \lambda \nabla^2 \varphi_i + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r_i^2} + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i} \right) \right], \quad i = 1, 2 \quad (3.9.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \lambda \nabla^2 \varphi_i + \frac{2\mu}{r_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r_i \partial \theta_i} \right), \quad i = 1, 2 \quad (3.9.b)$$

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r_i \partial \theta_i} - \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} \right) + \left[\frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_i^2} - r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial r_i} \right) \right] \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (3.9.c)$$

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla (3.7) dalga denklemlerinin çözümü Bessel – trigonometrik fonksiyonlar serisi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\varphi_i(r_i, \theta_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(A_n^{(i)} J_n(k_1 r_i) + B_n^{(i)} Y_n(k_1 r_i)) \cos n\theta_i + (C_n^{(i)} J_n(k_1 r_i) + D_n^{(i)} Y_n(k_1 r_i)) \sin n\theta_i \right], \quad i = 1, 2 \quad (3.10.a)$$

$$\psi_i(r_i, \theta_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(E_n^{(i)} J_n(k_2 r_i) + F_n^{(i)} Y_n(k_2 r_i)) \cos n\theta_i + (G_n^{(i)} J_n(k_2 r_i) + H_n^{(i)} Y_n(k_2 r_i)) \sin n\theta_i \right], \quad i = 1, 2 \quad (3.10.b)$$

Bessel fonksiyonlarının indislerinin tam sayı olması nedeniyle $J_{-n} = (-1)^n J_n$ ve $Y_{-n} = (-1)^n Y_n$ eşitliklerini kullanarak bu sonsuz seriler $(-\infty, \infty)$ yerine $(0, \infty)$ aralığında yazılabilir. Böylece $\varphi(r_i, \theta_i)$ ve $\psi(r_i, \theta_i)$ fonksiyon serileri,

$$\varphi_i(r_i, \theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(A_n^{(i)} J_n(k_1 r_i) + B_n^{(i)} Y_n(k_1 r_i)) \cos n\theta_i + (C_n^{(i)} J_n(k_1 r_i) + D_n^{(i)} Y_n(k_1 r_i)) \sin n\theta_i \right], \quad i=1,2 \quad (3.11.a)$$

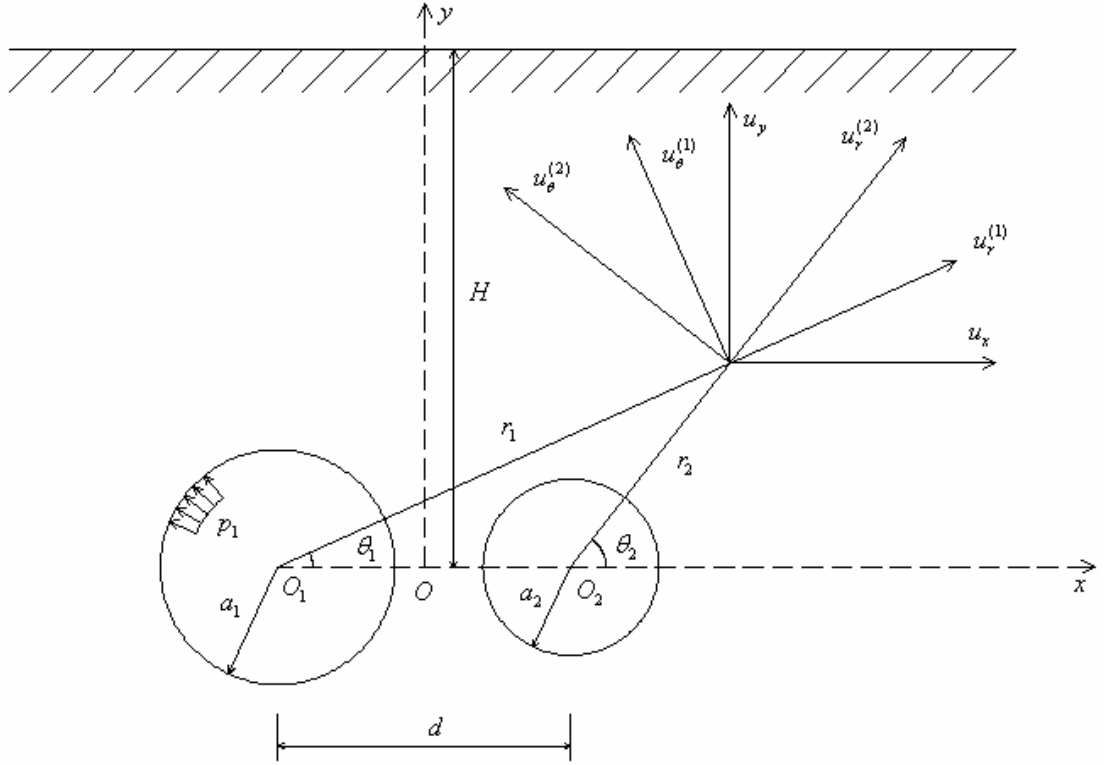
$$\psi_i(r_i, \theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(E_n^{(i)} J_n(k_2 r_i) + F_n^{(i)} Y_n(k_2 r_i)) \cos n\theta_i + (G_n^{(i)} J_n(k_2 r_i) + H_n^{(i)} Y_n(k_2 r_i)) \sin n\theta_i \right], \quad i=1,2 \quad (3.11.b)$$

şeklini alır. Burada $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, E_n^{(i)}, F_n^{(i)}, G_n^{(i)}, H_n^{(i)}$ bilinmeyen değişmezler olup, sınır koşullarının sağlatılmasıyla elde edilecektir. $J_n(x)$ ve $Y_n(x)$ birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonlarıdır. Bu, (3.11) çözüm fonksiyonlarının (3.8) yerdeğiştirme ifadelerinde yerine yazılmasıyla yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_r^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[A_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} J_n(k_1 r_i) - k_1 J_{n+1}(k_1 r_i) \right) + B_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} Y_n(k_1 r_i) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r_i) \right) + G_n^{(i)} \frac{n}{r_i} J_n(k_2 r_i) + H_n^{(i)} \frac{n}{r_i} Y_n(k_2 r_i) \right] \cos n\theta_i + \left[C_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} J_n(k_1 r_i) - k_1 J_{n+1}(k_1 r_i) \right) + D_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} Y_n(k_1 r_i) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r_i) \right) - E_n^{(i)} \frac{n}{r_i} J_n(k_2 r_i) - F_n^{(i)} \frac{n}{r_i} Y_n(k_2 r_i) \right] \sin n\theta_i \right\}, \quad i=1,2 \quad (3.12.a)$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[-A_n^{(i)} \frac{n}{r_i} J_n(k_1 r_i) - B_n^{(i)} \frac{n}{r_i} Y_n(k_1 r_i) - G_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} J_n(k_2 r_i) - k_2 J_{n+1}(k_2 r_i) \right) \right. \right. \\
\left. \left. - H_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} Y_n(k_2 r_i) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r_i) \right) \right] \sin n\theta_i \right. \\
\left. + \left[C_n^{(i)} \frac{n}{r_i} J_n(k_1 r_i) + D_n^{(i)} \frac{n}{r_i} Y_n(k_1 r_i) - E_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} J_n(k_2 r_i) - k_2 J_{n+1}(k_2 r_i) \right) \right. \right. \\
\left. \left. - F_n^{(i)} \left(\frac{n}{r_i} Y_n(k_2 r_i) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r_i) \right) \right] \cos n\theta_i \right\}, \quad i=1,2 \quad (3.12.b)
\end{aligned}$$

Herhangi bir noktadaki kutupsal koordinatlardaki yerdeğiştirme bileşenleri ise Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Kutupsal koordinatlardaki yerdeğiştirme bileşenleri

Bu yerdeğiştirme bileşenlerinin kartezyen eksen takımındaki bileşenlere dönüşümü ise aşağıdaki bağıntılar yardımı ile yapılabilir.

$$u_x = u_r^{(1)} \cos \theta_1 + u_r^{(2)} \cos \theta_2 - u_{\theta}^{(1)} \sin \theta_1 - u_{\theta}^{(2)} \sin \theta_2 \quad (3.13.a)$$

$$u_y = u_r^{(1)} \sin \theta_1 + u_r^{(2)} \sin \theta_2 + u_{\theta}^{(1)} \cos \theta_1 + u_{\theta}^{(2)} \cos \theta_2 \quad (3.13.b)$$

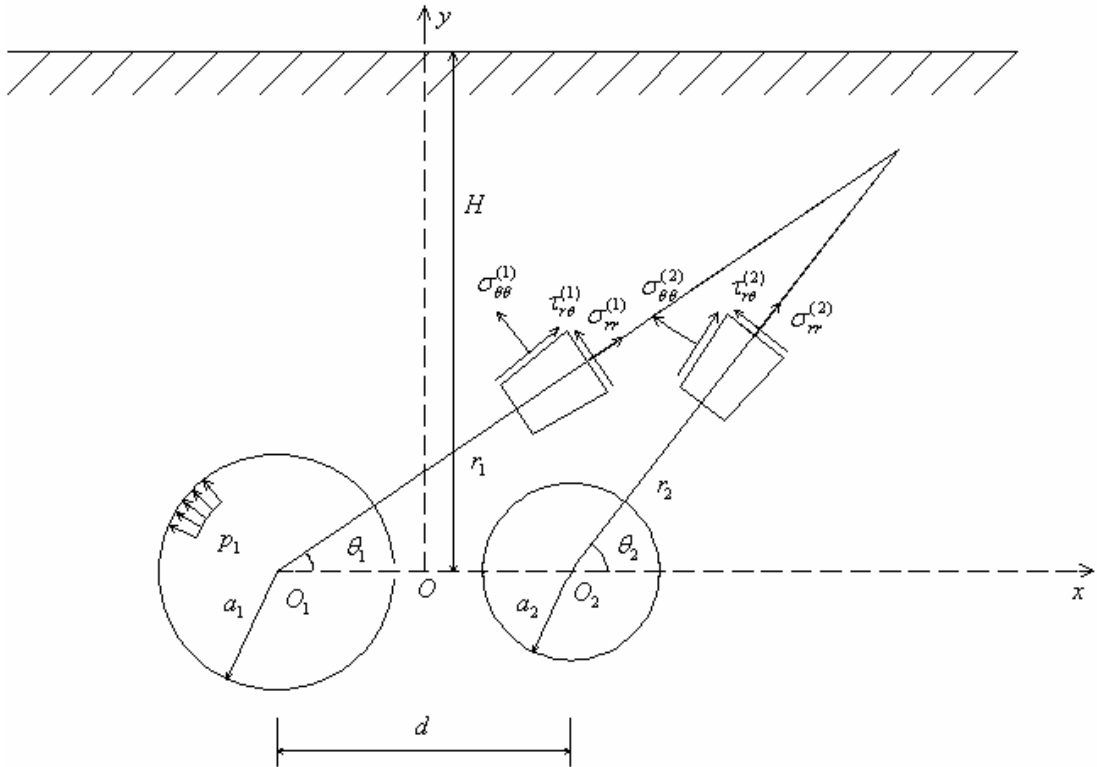
Çözümüne ait (3.11) bağıntılarını, kutupsal koordinatlardaki (3.9) gerilme bağıntılarında yerine yazarsak, gerilme bileşenlerinin Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} = \frac{2\mu}{r_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg[& \left\{ A_n^{(i)} \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_i^2) J_n(k_1 r_i) + k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\ & + B_n^{(i)} \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_i^2) Y_n(k_1 r_i) + k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\ & + G_n^{(i)} \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r_i) - nk_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\ & + H_n^{(i)} \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r_i) - nk_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \bigg\} \cos n\theta_i \\ & + \left\{ C_n^{(i)} \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_i^2) J_n(k_1 r_i) + k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\ & + D_n^{(i)} \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_i^2) Y_n(k_1 r_i) + k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\ & + E_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 r_i) + nk_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\ & \left. + F_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 r_i) + nk_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \right\} \sin n\theta_i \bigg], \quad i = 1, 2 \quad (3.14.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{2\mu}{r_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg[& \left\{ A_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + k_1^2 r_i^2 - 0.5k_2^2 r_i^2) J_n(k_1 r_i) - k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\ & + B_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + k_1^2 r_i^2 - 0.5k_2^2 r_i^2) Y_n(k_1 r_i) - k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\ & + G_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 r_i) + nk_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\ & + H_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 r_i) + nk_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \bigg\} \cos n\theta_i \\ & + \left\{ C_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + k_1^2 r_i^2 - 0.5k_2^2 r_i^2) J_n(k_1 r_i) - k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\ & + D_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + k_1^2 r_i^2 - 0.5k_2^2 r_i^2) Y_n(k_1 r_i) - k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\ & + E_n^{(i)} \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r_i) - nk_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\ & \left. + F_n^{(i)} \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r_i) - nk_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \right\} \sin n\theta_i \bigg], \quad i = 1, 2 \quad (3.14.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta}^{(i)} = \frac{2\mu}{r_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg[& \left\{ A_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 r_i) + n k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\
& + B_n^{(i)} \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 r_i) + n k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\
& + G_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_i^2) J_n(k_2 r_i) - k_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\
& + H_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_i^2) Y_n(k_2 r_i) - k_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \bigg\} \sin n\theta_i \\
& + \left\{ C_n^{(i)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 r_i) - n k_1 r_i J_{n+1}(k_1 r_i) \right] \right. \\
& + D_n^{(i)} \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 r_i) - n k_1 r_i Y_{n+1}(k_1 r_i) \right] \\
& + E_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_i^2) J_n(k_2 r_i) - k_2 r_i J_{n+1}(k_2 r_i) \right] \\
& \left. \left. + F_n^{(i)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_i^2) Y_n(k_2 r_i) - k_2 r_i Y_{n+1}(k_2 r_i) \right] \right\} \cos n\theta_i \right], \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.14.c}$$

Herhangi bir noktadaki kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri Şekil 3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri

Bu gerilme bileşenlerinin ise kartezyen eksen takımındaki bileşenlere dönüşümü aşağıdaki bağıntılar yardımı ile yapılabilir.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = & \frac{\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{2} + \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{2} \cos 2\theta_1 + \tau_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta_1 \\ & + \frac{\sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{2} + \frac{\sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{2} \cos 2\theta_2 + \tau_{r\theta}^{(2)} \sin 2\theta_2\end{aligned}\quad (3.15.a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} = & \frac{\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{2} - \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{2} \cos 2\theta_1 - \tau_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta_1 \\ & + \frac{\sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{2} - \frac{\sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{2} \cos 2\theta_2 - \tau_{r\theta}^{(2)} \sin 2\theta_2\end{aligned}\quad (3.15.b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{2} \sin 2\theta_1 - \tau_{r\theta}^{(1)} \cos 2\theta_1 + \frac{\sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{2} \sin 2\theta_2 - \tau_{r\theta}^{(2)} \cos 2\theta_2 \quad (3.15.c)$$

Kutupsal koordinatlarda elde etmiş olduğumuz (3.14) gerilme bağıntılarını yukarıdaki (3.15) dönüşüm formüllerinde yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa serbest yüzeydeki σ_{xx} , σ_{yy} ve τ_{xy} gerilme bileşenleri Bessel – trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekliyle ifade edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_1^2 - 0.5k_2^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_1 \right] \cos n\theta_1 + \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 r_1) + nk_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + B_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_1^2 - 0.5k_2^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_1 \right] \cos n\theta_1 + \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 r_1) + nk_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + G_n^{(1)} \left\{ \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + H_n^{(1)} \left\{ \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + C_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_1^2 - 0.5k_2^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_1 \right] \sin n\theta_1 + \left[(n^2 - n) J_n(k_1 r_1) - nk_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \\
& + D_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_1^2 - 0.5k_2^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_1 \right] \sin n\theta_1 + \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 r_1) - nk_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \\
& + E_n^{(1)} \left\{ \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 r_1) + nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \\
& + F_n^{(1)} \left\{ \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 r_1) + nk_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \\
& + \frac{2\mu}{r_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_2^2 - 0.5k_2^2 r_2^2) J_n(k_1 r_2) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_2^2) J_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_2 \right] \cos n\theta_2 + \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 r_2) + nk_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right\} \\
& + B_n^{(2)} \left\{ \left[(0.5k_1^2 r_2^2 - 0.5k_2^2 r_2^2) Y_n(k_1 r_2) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_2^2) Y_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \right. \\
& + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \left. \left. \left. \right] \cos 2\theta_2 \right] \cos n\theta_2 + \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 r_2) + nk_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_n^{(2)} \left\{ \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right\} \\
& + H_n^{(2)} \left\{ \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right\} \\
& + C_n^{(2)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2) J_n(k_1 r_2) + \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2) J_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \right] \sin n\theta_2 + \left[(n^2 - n) J_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \Big\} \\
& + D_n^{(2)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2) Y_n(k_1 r_2) + \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2) Y_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \right] \sin n\theta_2 + \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \Big\} \\
& + E_n^{(2)} \left\{ \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \\
& + F_n^{(2)} \left\{ \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \tag{3.16.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) - \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \right] \cos n\theta_1 - \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 r_1) + n k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \Big\} \\
& + B_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) - \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \right] \cos n\theta_1 - \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 r_1) + n k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \Big\} \\
& + G_n^{(1)} \left\{ - \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r_1) - n k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& - \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_1^2) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + H_n^{(1)} \left\{ - \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r_1) - n k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& - \left. \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_1^2) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \\
& + C_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) - \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_1^2) J_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \right] \sin n\theta_1 - \left[(n^2 - n) J_n(k_1 r_1) - n k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \Big\} \\
& + D_n^{(1)} \left\{ \left[(0.5 k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) - \left[(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_1^2) Y_n(k_1 r_1) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \right] \sin n\theta_1 - \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 r_1) - n k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \Big\}
\end{aligned}$$

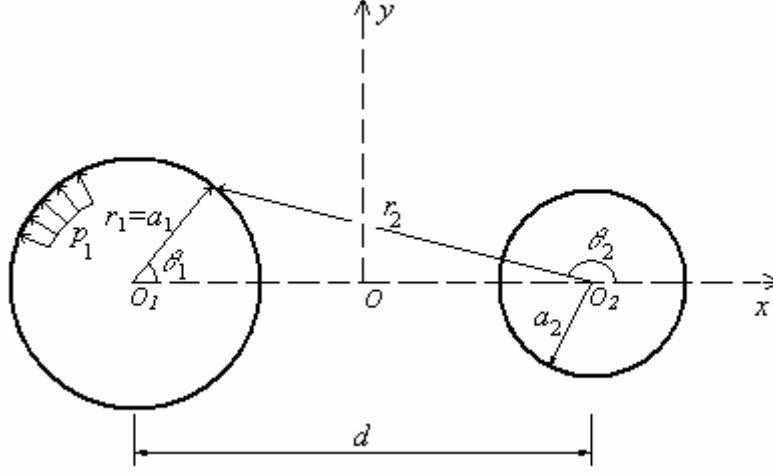
$$\begin{aligned}
& + C_n^{(2)} \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 r_2^2 - 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) - \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \right] \sin n\theta_2 - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r_2) - nk_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \\
& + D_n^{(2)} \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 r_2^2 - 0.5k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) - \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \right] \sin n\theta_2 - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r_2) - nk_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \\
& + E_n^{(2)} \left\{ - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_2) + nk_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& \left. - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \\
& + F_n^{(2)} \left\{ - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_2) + nk_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& \left. - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right\} \tag{3.16.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r_1) + nk_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \right. \\
& + B_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r_1) + nk_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \right. \\
& + G_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \right. \\
& + H_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right\} \right. \\
& + C_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r_1) - nk_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \right. \\
& + D_n^{(1)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r_1) - nk_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \right. \\
& + E_n^{(1)} \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_1) + nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& \left. \left. - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_n^{(1)} \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_1) + n k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \sin 2\theta_1 \sin n\theta_1 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \cos 2\theta_1 \cos n\theta_1 \left. \right\} \\
& - \frac{2\mu}{r_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r_2) + n k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \left. \right\} \\
& + B_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r_2) + n k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \left. \right\} \\
& + G_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \left. \right\} \\
& + H_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \cos n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \sin n\theta_2 \left. \right\} \\
& + C_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \left. \right\} \\
& + D_n^{(2)} \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \left. \right\} \\
& + E_n^{(2)} \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \left. \right\} \\
& + F_n^{(2)} \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \sin 2\theta_2 \sin n\theta_2 \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \cos 2\theta_2 \cos n\theta_2 \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.16.c}$$

3.2 SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

3.2.1 1. DAİRESEL OYUK ÜZERİNDE SINIR KOŞULLARI



Şekil 3.4 1. Dairesel oyuk üzerinde sınır koşulları

1. Dairesel oyuk üzerindeki sınır koşulları

$$\left. \sigma_{rr} \right|_{r_1=a_1} = -p_0 \quad \left. \tau_{r\theta} \right|_{r_1=a_1} = 0 \quad (3.17)$$

şeklinde. Özellikle sınır koşullarının sağlatılmasında sağladığı kolaylık nedeni ile r_1 , θ_1 ve r_2 , θ_2 kutupsal koordinatlarında yazılan büyüklüklerin birbiri cinsinden yazılmasında fayda vardır. Herhangi bir noktada r_2 , θ_2 cinsinden yazılmış olan ifadelerin Bessel fonksiyonlarının r_1 , θ_1 cinsinden karşılıkları aşağıdaki gibidir [19].

$$J_n(k_i r_2) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_2 \\ \sin n\theta_2 \end{Bmatrix} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(k_i r_1) \left\{ \pm [J_{m+n}(k_i d) \pm (-1)^n J_{m-n}(k_i d)] \right\} \begin{Bmatrix} \cos m\theta_1 \\ \sin m\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (3.18.a)$$

$$Y_n(k_i r_2) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_2 \\ \sin n\theta_2 \end{Bmatrix} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(k_i r_1) \left\{ \pm [Y_{m+n}(k_i d) \pm (-1)^n Y_{m-n}(k_i d)] \right\} \begin{Bmatrix} \cos m\theta_1 \\ \sin m\theta_1 \end{Bmatrix} \quad (3.18.b)$$

Burada

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.19)$$

dir. Buna göre potansiyel fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \varphi(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(A_n^{(1)} J_n(k_1 r_1) + B_n^{(1)} Y_n(k_1 r_1)) \cos n\theta_1 + (C_n^{(1)} J_n(k_1 r_1) + D_n^{(1)} Y_n(k_1 r_1)) \sin n\theta_1 \right] \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(\alpha_{cjmn} A_n^{(2)} J_m(k_1 r_1) + \alpha_{cymn} B_n^{(2)} J_m(k_1 r_1)) \cos m\theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha_{sjmn} C_n^{(2)} J_m(k_1 r_1) + \alpha_{symn} D_n^{(2)} J_m(k_1 r_1)) \sin m\theta_1 \right] \right\} \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(E_n^{(1)} J_n(k_2 r_1) + F_n^{(1)} Y_n(k_2 r_1)) \cos n\theta_1 + (G_n^{(1)} J_n(k_2 r_1) + H_n^{(1)} Y_n(k_2 r_1)) \sin n\theta_1 \right] \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(\bar{\alpha}_{cjmn} E_n^{(2)} J_m(k_2 r_1) + \bar{\alpha}_{cymn} F_n^{(2)} J_m(k_2 r_1)) \cos m\theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\alpha}_{sjmn} G_n^{(2)} J_m(k_2 r_1) + \bar{\alpha}_{symn} H_n^{(2)} J_m(k_2 r_1)) \sin m\theta_1 \right] \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada kullanılan kısaltma ifadeleri

$$\alpha_{cjmn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{m+n}(k_1 d) + (-1)^n J_{m-n}(k_1 d) \right] \quad (3.22.a)$$

$$\alpha_{cymn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{m+n}(k_1 d) + (-1)^n Y_{m-n}(k_1 d) \right] \quad (3.22.b)$$

$$\alpha_{sjmn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[-J_{m+n}(k_1 d) + (-1)^n J_{m-n}(k_1 d) \right] \quad (3.22.c)$$

$$\alpha_{symn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[-Y_{m+n}(k_1 d) + (-1)^n Y_{m-n}(k_1 d) \right] \quad (3.22.d)$$

$$\bar{\alpha}_{cjmn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{m+n}(k_2 d) + (-1)^n J_{m-n}(k_2 d) \right] \quad (3.22.e)$$

$$\bar{\alpha}_{cymn} = (-1)^n \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{m+n}(k_2 d) + (-1)^n Y_{m-n}(k_2 d) \right] \quad (3.22.f)$$

$$\bar{\alpha}_{sjmn} = (-1)^n \frac{\mathcal{E}_m}{2} \left[-J_{m+n}(k_2 d) + (-1)^n J_{m-n}(k_2 d) \right] \quad (3.22.g)$$

$$\bar{\alpha}_{symn} = (-1)^n \frac{\mathcal{E}_m}{2} \left[-Y_{m+n}(k_2 d) + (-1)^n Y_{m-n}(k_2 d) \right] \quad (3.22.h)$$

şeklindedir. Bu potansiyelleri kullanarak gerilmeleri yazacak olursak,

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1 r_1} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\ & + B_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \\ & + G_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\ & + H_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_1) - nk_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \cos n\theta_1 \\ & + \left\{ C_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\ & + D_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) + k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \\ & + E_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_1) + nk_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\ & + F_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_1) + nk_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \sin n\theta_1 \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \alpha_{cjmn} \left[\left(m^2 - m - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\ & + B_n^{(2)} \alpha_{cymn} \left[\left(m^2 - m - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\ & + G_n^{(2)} \bar{\alpha}_{sjmn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_1) - mk_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\ & + H_n^{(2)} \bar{\alpha}_{symn} \left[\left(m^2 - m \right) Y_m(k_2 r_1) - mk_2 r_1 Y_{m+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \cos m\theta_1 \\ & + \left\{ C_n^{(2)} \alpha_{sjmn} \left[\left(m^2 - m - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\ & + D_n^{(2)} \alpha_{symn} \left[\left(m^2 - m - 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) + k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\ & + E_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cjmn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_1) + mk_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\ & + F_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) Y_m(k_2 r_1) + mk_2 r_1 Y_{m+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \sin m\theta_1 \left. \right] \quad (3.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta_1 \theta_1} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) - k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \\
& + G_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_1) + n k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\
& + H_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_1) + n k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \cos n\theta_1 \\
& + \left\{ C_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\
& + D_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_1 r_1) - k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \\
& + E_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_1) - n k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\
& + F_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_1) - n k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \sin n\theta_1 \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \alpha_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(2)} \alpha_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\
& + G_n^{(2)} \bar{\alpha}_{sjmn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_1) + m k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\
& + H_n^{(2)} \bar{\alpha}_{symn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_1) + m k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \cos m\theta_1 \\
& + \left\{ C_n^{(2)} \alpha_{sjmn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\
& + D_n^{(2)} \alpha_{symn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_1^2 - 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_1 r_1) - k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\
& + E_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cymn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_1) - m k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\
& + F_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cymn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_1) - m k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \sin m\theta_1 \left. \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$\sigma_{r_1 r_1}$ ve $\sigma_{\theta_1 \theta_1}$ gerilmeleri elde edilir. $\tau_{r_1 \theta_1}$ ifadesi de

$$\begin{aligned}
\tau_{r_1 \theta_1} = & \frac{2\mu}{r_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r_1) + n k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r_1) + n k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right] \\
& + G_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\
& + H_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \left. \right\} \sin n\theta_1 \\
& + \left\{ C_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r_1) - n k_1 r_1 J_{n+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\
& + D_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r_1) - n k_1 r_1 Y_{n+1}(k_1 r_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +E_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{n+1}(k_2 r_1) \right] \\
& +F_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) Y_n(k_2 r_1) - k_2 r_1 Y_{n+1}(k_2 r_1) \right] \Big\} \cos n\theta_1 \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \alpha_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_1 r_1) + m k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \right. \\
& \quad + B_n^{(2)} \alpha_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_1 r_1) + m k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\
& \quad + G_n^{(2)} \bar{\alpha}_{symn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\
& \quad + H_n^{(2)} \bar{\alpha}_{symn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \Big\} \sin m\theta_1 \\
& \quad + \left\{ C_n^{(2)} \alpha_{symn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_1 r_1) - m k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \right. \\
& \quad + D_n^{(2)} \alpha_{symn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_1 r_1) - m k_1 r_1 J_{m+1}(k_1 r_1) \right] \\
& \quad + E_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \\
& \quad \left. \left. + F_n^{(2)} \bar{\alpha}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_1^2 \right) J_m(k_2 r_1) - k_2 r_1 J_{m+1}(k_2 r_1) \right] \right\} \cos m\theta_1 \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

olur. Bu tür seri çözümlerinde pratik olarak sonsuz terim almak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle serilerin belli N ve M gibi sonlu sayılarda kesilmesi gerekmektedir.

Elde edilen bu gerilme ifadelerinde öncelikle $\sigma_{r_1 r_1}$ gerilmesine ait sınır koşulunu yazıp trigonometrik terimlerin katsayılarına göre gruplayacak olursak

$\cos(0.\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mu}{a_1^2} \left\{ A_0^{(1)} \left[-0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_1(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad + B_0^{(1)} \left[-0.5k_2^2 a_1^2 Y_0(k_1 a_1) + k_1 a_1 Y_1(k_1 a_1) \right] \\
& \quad + \sum_{m=0}^M \left\{ \alpha_{cy0m} A_m^{(2)} \left[-0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_1(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_{cy0m} B_m^{(2)} \left[-0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_1(k_1 a_1) \right] \right\} \right\} = -p_0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde bir adet bağıntı elde ederiz. Yine aynı şekilde gruplamaya devam edecek olursak

$\cos(n\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& A_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) J_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + B_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) Y_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 Y_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + G_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a_1) - nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + H_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 a_1) - nk_2 a_1 Y_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\alpha_{cynm} A_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) J_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad + \alpha_{cynm} B_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) Y_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 Y_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& \quad + \bar{\alpha}_{synm} G_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a_1) - nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\alpha}_{synm} H_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 a_1) - nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$\sin(n\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& C_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) J_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + D_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) Y_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 Y_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + E_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a_1) + nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + F_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 a_1) + nk_2 a_1 Y_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\alpha_{synm} C_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) J_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad + \alpha_{synm} D_m^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_1^2 \right) Y_n(k_1 a_1) + k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& \quad + \bar{\alpha}_{cynm} E_m^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a_1) + nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\alpha}_{cynm} F_m^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 a_1) + nk_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.28)
\end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz. Böylece $2N+1$ adet bağıntı elde etmiş oluruz. $\tau_{r_1 \theta_1}$ gerilmesine ait sınır koşulunu kullanacak olursak;

$\cos(0.\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& E_0^{(1)} \left[0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_1(k_2 a_1) \right] + F_0^{(1)} \left[0.5k_2^2 a_1^2 Y_0(k_2 a_1) + k_2 a_1 Y_1(k_2 a_1) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\bar{\alpha}_{cj0m} E_m^{(2)} \left[0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_1(k_2 a_1) \right] \right. \\
& \quad \left. + \bar{\alpha}_{cy0m} F_m^{(2)} \left[0.5k_2^2 a_1^2 J_0(k_2 a_1) + k_2 a_1 J_1(k_2 a_1) \right] \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

bir adet bağıntı elde ederiz.

$\cos(n\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& C_n^{(1)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_1) - n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + D_n^{(1)} \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a_1) - n k_1 a_1 Y_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + E_n^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + F_n^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) Y_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 Y_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\alpha_{sjnm} C_m^{(2)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_1) - n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad + \alpha_{synm} D_m^{(2)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_1) - n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& \quad + \bar{\alpha}_{cjnm} E_m^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\alpha}_{cynm} F_m^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.30}$$

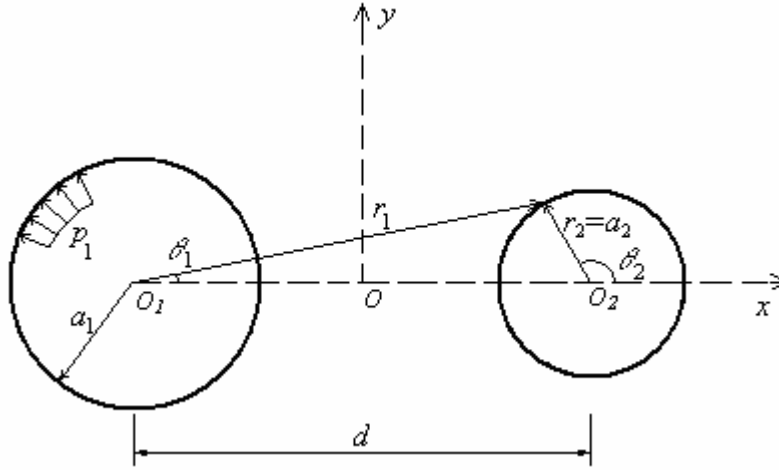
$\sin(n\theta_1)$ için

$$\begin{aligned}
& A_n^{(1)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a_1) + n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + B_n^{(1)} \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 a_1) + n k_1 a_1 Y_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& + G_n^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + H_n^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) Y_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 Y_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\alpha_{cynm} A_m^{(2)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a_1) + n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \right. \\
& \quad + \alpha_{synm} B_m^{(2)} \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a_1) + n k_1 a_1 J_{n+1}(k_1 a_1) \right] \\
& \quad + \bar{\alpha}_{sjnm} G_m^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\alpha}_{synm} H_m^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_1^2) J_n(k_2 a_1) - k_2 a_1 J_{n+1}(k_2 a_1) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$2N$ adet bağıntı elde edilmiş olur. Teğetsel gerilmeye ait sınır koşullarından $2N+1$ adet bağıntı elde etmiş oluruz

Böylece 1. oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından toplam $4N+2$ adet bağıntı elde etmiş oluruz.

3.2.2 2. DAİRESEL OYUK ÜZERİNDE SINIR KOŞULLARI



Şekil 3.5 2. Dairesel oyuk üzerinde sınır koşulları

2. Dairesel oyuk üzerindeki sınır koşulları

$$\left. \sigma_{rr} \right|_{r_2=a_2} = 0 \quad \left. \tau_{r\theta} \right|_{r_2=a_2} = 0 \quad (3.32)$$

şeklindedir. Herhangi bir noktada r_1 , θ_1 cinsinden yazılmış olan ifadelerin Bessel fonksiyonlarının r_2 , θ_2 cinsinden karşılıkları aşağıdaki gibidir.

$$J_n(k_i r_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(k_i r_2) [J_{n-m}(k_i d) \pm (-1)^m J_{m+n}(k_i d)] \begin{Bmatrix} \cos m\theta_2 \\ \sin m\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$Y_n(k_i r_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} J_m(k_i r_2) [Y_{n-m}(k_i d) \pm (-1)^m Y_{m+n}(k_i d)] \begin{Bmatrix} \cos m\theta_2 \\ \sin m\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Buna göre potansiyel fonksiyonları

$$\begin{aligned}\varphi(r_2, \theta_2) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(A_n^{(2)} J_n(k_1 r_2) + B_n^{(2)} Y_n(k_1 r_2)) \cos n\theta_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (C_n^{(2)} J_n(k_1 r_2) + D_n^{(2)} Y_n(k_1 r_2)) \sin n\theta_2 \right] \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(\beta_{cjmn} A_n^{(1)} J_m(k_1 r_2) + \beta_{cymn} B_n^{(1)} Y_m(k_1 r_2)) \cos m\theta_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\beta_{sjmn} C_n^{(1)} J_m(k_1 r_2) + \beta_{symn} D_n^{(1)} Y_m(k_1 r_2)) \sin m\theta_2 \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}\psi(r_2, \theta_2) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(E_n^{(2)} J_n(k_2 r_2) + F_n^{(2)} Y_n(k_2 r_2)) \cos n\theta_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (G_n^{(2)} J_n(k_2 r_2) + H_n^{(2)} Y_n(k_2 r_2)) \sin n\theta_2 \right] \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(\bar{\beta}_{cjmn} E_n^{(1)} J_m(k_2 r_2) + \bar{\beta}_{cymn} F_n^{(1)} J_m(k_2 r_2)) \cos m\theta_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\bar{\beta}_{sjmn} G_n^{(1)} J_m(k_2 r_2) + \bar{\beta}_{symn} H_n^{(1)} J_m(k_2 r_2)) \sin m\theta_2 \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.36)$$

olarak yazılabilir. Burada kullanılan kısaltma ifadeleri

$$\beta_{cjmn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{n-m}(k_1 d) + (-1)^m J_{m+n}(k_1 d) \right] \quad (3.37.a)$$

$$\beta_{cymn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{n-m}(k_1 d) + (-1)^m Y_{m+n}(k_1 d) \right] \quad (3.37.b)$$

$$\beta_{sjmn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{n-m}(k_1 d) - (-1)^m J_{m+n}(k_1 d) \right] \quad (3.37.c)$$

$$\beta_{symn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{n-m}(k_1 d) - (-1)^m Y_{m+n}(k_1 d) \right] \quad (3.37.d)$$

$$\bar{\beta}_{cjmn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{n-m}(k_2 d) + (-1)^m J_{m+n}(k_2 d) \right] \quad (3.37.e)$$

$$\bar{\beta}_{cymn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{n-m}(k_2 d) + (-1)^m Y_{m+n}(k_2 d) \right] \quad (3.37.f)$$

$$\bar{\beta}_{sjmn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[J_{n-m}(k_2 d) - (-1)^m J_{m+n}(k_2 d) \right] \quad (3.37.g)$$

$$\bar{\beta}_{symn} = \frac{\varepsilon_m}{2} \left[Y_{n-m}(k_2 d) - (-1)^m Y_{m+n}(k_2 d) \right] \quad (3.37.h)$$

şeklindedir.

(3.37) potansiyellerini kullanarak gerilmeleri yazacak olursak $\sigma_{r_2 r_2}$ ve $\sigma_{\theta_2 \theta_2}$ gerilmelerini

$$\begin{aligned} \sigma_{r_2 r_2} = & \frac{2\mu}{r_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\ & + B_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \\ & + G_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\ & + H_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \cos n \theta_2 \\ & + \left\{ C_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\ & + D_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) + k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \\ & + E_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\ & + F_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \sin n \theta_2 \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(m^2 - m - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\ & + B_n^{(1)} \beta_{symn} \left[\left(m^2 - m - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\ & + G_n^{(1)} \bar{\beta}_{symn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_2) - m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\ & + H_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_2) - m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \cos m \theta_2 \\ & + \left\{ C_n^{(1)} \beta_{symn} \left[\left(m^2 - m - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\ & + D_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(m^2 - m - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) + k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\ & + E_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_2) + m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\ & + F_n^{(1)} \bar{\beta}_{symn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_2) + m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \sin m \theta_2 \left. \right] \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta_2 \theta_2} = & \frac{2\mu}{r_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) - k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \\
& + G_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\
& + H_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r_2) + n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \cos n\theta_2 \\
& + \left\{ C_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\
& + D_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_1 r_2) - k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \\
& + E_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\
& + F_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r_2) - n k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \sin n\theta_2 \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\
& + G_n^{(1)} \bar{\beta}_{sjmn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_2) + m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\
& + H_n^{(1)} \bar{\beta}_{symn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_2 r_2) + m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \cos m\theta_2 \\
& + \left\{ C_n^{(1)} \beta_{sjmn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\
& + D_n^{(1)} \beta_{symn} \left[\left(-m^2 + m + k_1^2 r_2^2 - 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_1 r_2) - k_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\
& + E_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_2) - m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\
& + F_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_2 r_2) - m k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \sin m\theta_2 \left. \right] \quad (3.39)
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. $\tau_{r_2 \theta_2}$ gerilmesi de

$$\begin{aligned}
\tau_{r_2 \theta_2} = & \frac{2\mu}{r_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r_2) + n k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\
& + B_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r_2) + n k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right] \\
& + G_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\
& + H_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \left. \right\} \sin n\theta_2 \\
& + \left\{ C_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 J_{n+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\
& + D_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r_2) - n k_1 r_2 Y_{n+1}(k_1 r_2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +E_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{n+1}(k_2 r_2) \right] \\
& +F_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) Y_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_{n+1}(k_2 r_2) \right] \Big] \cos n\theta_2 \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_1 r_2) + mk_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \right. \\
& \quad + B_n^{(1)} \beta_{cymn} \left[\left(-m^2 + m \right) J_m(k_1 r_2) + mk_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\
& \quad + G_n^{(1)} \bar{\beta}_{sjmn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\
& \quad + H_n^{(1)} \bar{\beta}_{symn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \Big\} \sin m\theta_2 \\
& \quad + \left\{ C_n^{(1)} \beta_{sjmn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_1 r_2) - mk_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \right. \\
& \quad + D_n^{(1)} \beta_{symn} \left[\left(m^2 - m \right) J_m(k_1 r_2) - mk_1 r_2 J_{m+1}(k_1 r_2) \right] \\
& \quad + E_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \\
& \quad \left. \left. + F_n^{(1)} \bar{\beta}_{cymn} \left[\left(-m^2 + m + 0.5k_2^2 r_2^2 \right) J_m(k_2 r_2) - k_2 r_2 J_{m+1}(k_2 r_2) \right] \right\} \cos m\theta_2 \right] \Big]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olur. Elde edilen bu gerilme ifadelerinde 1. oyukta olduğu gibi öncelikle $\sigma_{r_2 r_2}$ gerilmesine ait sınır koşulunu yazıp trigonometrik terimlerin katsayılarına göre gruplayacak olursak

$\cos(0.\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& A_0^{(2)} \left[-0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_1(k_1 a_2) \right] + B_0^{(2)} \left[-0.5k_2^2 a_2^2 Y_0(k_1 a_2) + k_1 a_2 Y_1(k_1 a_2) \right] \\
& \sum_{m=0}^M \left\{ \beta_{cj0m} A_m^{(1)} \left[-0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_1(k_1 a_2) \right] \right. \\
& \quad \left. + \beta_{cy0m} B_m^{(1)} \left[-0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_1(k_1 a_2) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde bir adet bağıntı elde ederiz. Yine aynı şekilde devam edecek olursak

$\cos(n\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& A_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + B_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) Y_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 Y_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + G_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a_2) - nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + H_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 a_2) - nk_2 a_2 Y_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\beta_{cym} A_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \right. \\
& \quad + \beta_{cym} B_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& \quad + \bar{\beta}_{sym} G_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a_2) - nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\beta}_{sym} H_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a_2) - nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$\sin(n\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& C_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + D_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) Y_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 Y_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + E_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a_2) + nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + F_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 a_2) + nk_2 a_2 Y_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\beta_{sym} C_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \right. \\
& \quad + \beta_{sym} D_m^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_1 a_2) + k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& \quad + \bar{\beta}_{cym} E_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a_2) + nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\beta}_{cym} F_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a_2) + nk_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.43}$$

bağıntılarını elde ederiz böylece $2N+1$ adet bağıntı elde etmiş oluruz.

$\tau_{r_2\theta_2}$ gerilmesine ait sınır koşulunu kullanacak olursak;

$\cos(0.\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& E_0^{(2)} \left[0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_1(k_2 a_2) \right] \\
& + F_0^{(2)} \left[0.5k_2^2 a_2^2 Y_0(k_2 a_2) + k_2 a_2 Y_1(k_2 a_2) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left\{ \bar{\beta}_{ej0m} E_m^{(1)} \left[0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_1(k_2 a_2) \right] \right. \\
& \quad \left. + \bar{\beta}_{cy0m} F_m^{(1)} \left[0.5k_2^2 a_2^2 J_0(k_2 a_2) + k_2 a_2 J_1(k_2 a_2) \right] \right\}, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

bir adet bağıntı elde edilir.

$\cos(n\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& C_n^{(2)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_2) - n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + D_n^{(2)} \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a_2) - n k_1 a_2 Y_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + E_n^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_2^2) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + F_n^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_2^2) Y_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 Y_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\beta_{sjnm} C_m^{(1)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_2) - n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \right. \\
& \quad + \beta_{synm} D_m^{(1)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a_2) - n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& \quad + \bar{\beta}_{ejnm} E_m^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_2^2) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\beta}_{cynm} F_m^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a_2^2) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{3.45}
\end{aligned}$$

$\sin(n\theta_2)$ için

$$\begin{aligned}
& A_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 a_2) + n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + B_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 a_2) + n k_1 a_2 Y_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& + G_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + H_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a_2^2 \right) Y_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 Y_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& + \sum_{m=0}^M \left[\beta_{cym} A_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 a_2) + n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \right. \\
& \quad + \beta_{sym} B_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 a_2) + n k_1 a_2 J_{n+1}(k_1 a_2) \right] \\
& \quad + \bar{\beta}_{sym} G_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \\
& \quad \left. + \bar{\beta}_{sym} H_m^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a_2^2 \right) J_n(k_2 a_2) - k_2 a_2 J_{n+1}(k_2 a_2) \right] \right] = 0, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (3.46)
\end{aligned}$$

2N adet bağıntı elde edilmiş olur. 2. oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından da toplam 4N+2 adet bağıntı elde edilmiş olur. Sonuç olarak her iki oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından toplam 8N+4 adet bağıntı elde edilmiş olur. n=0 için $C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, G_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}, G_n^{(2)}, H_n^{(2)}$ bilinmeyenleri özdeş olarak sıfırdır. Bu bilinmeyenlerin özdeş olarak sıfır olmasıyla çözüm fonksiyonlarına ait ifadelerdeki toplam bilinmeyen sayısı 16N+8 olmaktadır. Oyukların üzerinde yazılan sınır koşullarından bilinmeyenlerin yarısı kadar denklem elde edilmiş oldu, geri kalan denklemler ise serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşullarından elde edilecektir.

3.2.3 SERBEST YÜZEY ÜZERİNDE SINIR KOŞULLARI

Serbest yüzey üzerinde sınır koşulları;

$$\left. \sigma_{yy} \right|_{y=H} = 0 \quad \left. \tau_{xy} \right|_{y=H} = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde yazılabilir. Oyuk üzerindeki sınır koşulların sağlatılması sonucu geriye kalan 8N+4 adet bilinmeyen serbest yüzey üzerindeki (3.47) koşullarından sağlatılarak bulunacaktır. Serbest yüzey üzerinde her noktanın sınır koşullarını sağlaması gerekir fakat çözüm serileri sonlu bir sayıda kesilmektedir. Çözüm için 8N+4 tane denkleme ihtiyacımız var. Serbest yüzeyde seçeceğimiz her noktada biri σ_{yy} ve diğeri τ_{xy} için olmak üzere 2 tane denklem yazmamız mümkün. Dolayısıyla

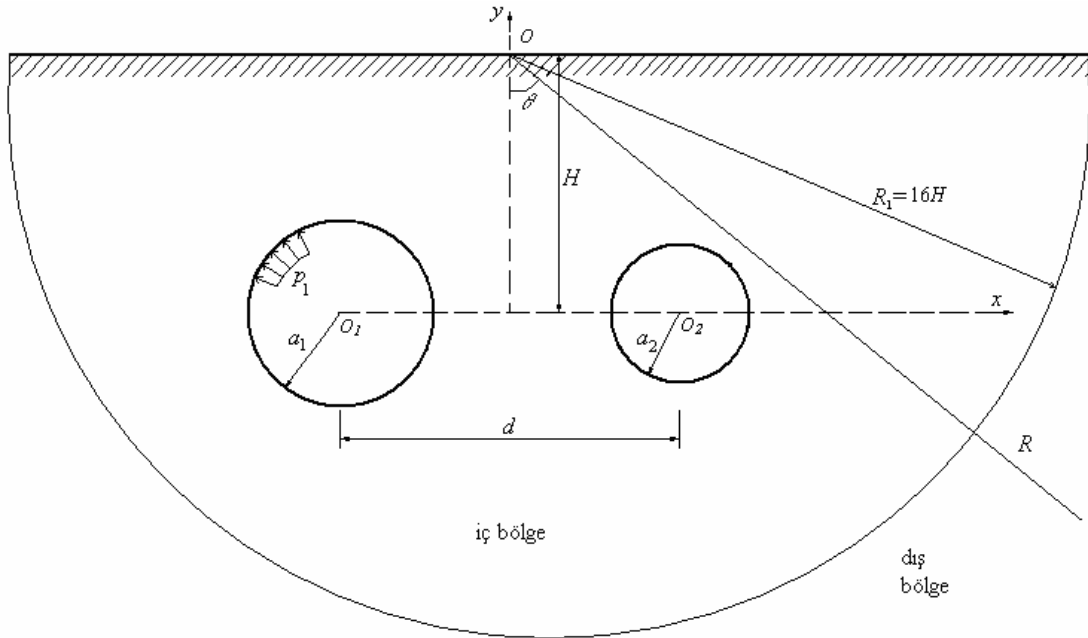
serbest yüzey üzerinde $4N+2$ tane nokta seçmemiz gerekiyor. Bu noktaları seçerken sonsuz sayıda alternatifimiz var. En iyi sonucu veren nokta seçim alternatifini bulmak için çeşitli denemeler yaptıktan sonra seçtiğimiz 330 m lik serbest yüzey üzerinde orta ve uç kısımlarda yoğunlaştırılmış nokta seçim alternatifinin en iyi sonucu verdiğini gördük. Denklemleri bu seçilen noktalardan elde ettik.

3.3 RADYASYON KOŞULU

Bilindiği gibi tam uzay veya yarım uzay titreşim problemlerinde çözüm fonksiyonlarının,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\bar{t}_{(\vec{n})}^{(1)} + \rho c_1 \frac{\partial \bar{U}^{(1)}}{\partial t} \right] = 0 \quad (3.48)$$

radyasyon koşullarını sağlaması gerekmektedir. Sayısal işlemlerde serbest yüzey üzerinde her iki yönde $16H$ uzaklığa kadar ancak gidilebilmektedir. Serbest yüzey üzerindeki O odak noktalı $R = 16H$ yarıçaplı bir bölgenin dışını dış bölge olarak adlandırırsak



Şekil 3.6 Radyasyon koşulunda iç ve dış bölge

bu bölgede φ ve ψ fonksiyonlarını

$$\varphi_{\text{Dış}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_1 R) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (3.49.a)$$

$$\psi_{\text{Dış}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_2 R) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (3.49.b)$$

olarak alabiliriz. Burada $H_n^{(1)}$ 1. nevi Hankel fonksiyonudur ve radyasyon koşullarını sağlamaktadır. $R = R_I$ iç ve dış bölge sınırı boyunca $U_{rr\text{İç}} = U_{RR\text{Dış}}$, $U_{\theta\theta\text{İç}} = U_{\theta\theta\text{Dış}}$, $U_{\theta\theta\text{İç}} = U_{\theta\theta\text{Dış}}$, $\sigma_{rr\text{İç}} = \sigma_{rr\text{Dış}}$, $\tau_{r\theta\text{İç}} = \tau_{r\theta\text{Dış}}$ şeklinde dört koşul yazılarak $\varphi_{\text{Dış}}$ ve $\psi_{\text{Dış}}$ fonksiyonlarının katsayıları diğerleri cinsinden hesaplanabilir.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 SAYISAL VERİLER

Seçilen p_0 iç basınç genliği, ω zorlama frekansı, a_1 1.oyuk yarıçapı, a_2 2.oyuk yarıçapı, H oyuk merkezlerinin serbest yüzeye olan derinliği, malzeme sabitleri, N ve M sayısı için istenilen herhangi bir noktada yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri hesaplanabilir. Sayısal uygulama için kütle yoğunluğu $\rho = 2665 \text{ kg/m}^3$, Elastisite modülü $E = 7.567 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, Poisson oranı $\nu = 0.25$, iç basınç genliği $p_0 = 1000 \text{ Pa}$ alınmış, 1.dairesel silindirik oyuğun yarıçapı $a_1 = 5 \text{ m}$, 2.dairesel silindirik oyuğun yarıçapı $a_2 = 3 \text{ m}$, oyuk merkezlerinin serbest yüzeye olan derinliği $H = 10 \text{ m}$, iki dairesel oyuğun merkezleri arasındaki mesafe $d=10$ seçilmiş ve sayısal hesaplamalarda N ve M sayısının 10 alınmasının yeterli yaklaşıklığı sağladığı görülmüştür. Çözüm serileri $n = m = 0$ dan başlatıldığı için bulunması gereken toplam $16 \times N + 16 = 176$ adet bilinmeyen katsayı oldu. $C_0^{(1)}, D_0^{(1)}, G_0^{(1)}, H_0^{(1)}, C_0^{(2)}, D_0^{(2)}, G_0^{(2)}, H_0^{(2)}$ bilinmeyen katsayıları özdeş olarak sıfır olduğundan toplam bilinmeyen sayısı $16 \times N + 8 = 168$ adete indi. Oyuk yüzeylerindeki sınır koşullarından $8 \times N + 4 = 84$ adet bağıntı elde edildi. Geriye kalan bilinmeyenleriyse serbest yüzey de yazılan $8 \times N + 4 = 84$ adet sınır koşulundan elde edilen bağıntılar yardımıyla çözülmüştür.

4.2 SONUÇLAR

Mathematica 4.2 paket programı yardımı ile yukarıdaki veriler kullanılarak bilinmeyen sabitler, ω zorlama frekansı değişimine bağlı olarak hesaplanmıştır. Hesap sonunda, serbest yüzey üzerinde ve oyuk yüzeyi boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin zorlama frekansına göre değişimleri incelenmiştir.

Sayısal uygulama için, 1. dairesel oyuguğun iç çeperi boyunca p_0 yayılı yükünün etkidiği durum göz önüne alınmış ve buna göre sonuçlar elde edilmiştir.

Şekil A.1 – A.4 de zorlama frekansının $\omega = 20$ rad/s için serbest yüzeydeki u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ile σ_{yy}, τ_{xy} gerilmelerinin yüzey boyunca değişimi verilmiştir. Yerdeğiştirmelerin başlangıçtan farklı olarak uzaklıkla hızlı bir şekilde arttığı görülmüştür. Serbest yüzey üzerinde σ_{yy}, τ_{xy} gerilmelerinin sıfır olması gerekmektedir. Ancak yapılan yaklaşık çözüm nedeniyle bu yüzeyde gerilmeler sıfır olmayıp yüklemeye göre oldukça düşüktür. Hata %2 mertebesindedir.

Şekil A.5 de zorlama frekansının $\omega = 20$ rad/s için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinin çevre üzerindeki değişimi verilmiştir. Burada olması gerektiği gibi p_0 değerini vermiştir. Hata %0,2 mertebesindedir.

Şekil A.6 ve A.7 de zorlama frekansının $\omega = 20$ rad/s için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ ve 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmelerinin çevre üzerindeki değişimi verilmiştir.

Şekil A.8 ve A.11 de zorlama frekansının $\omega = 20$ rad/s için 1. ve 2. oyuk yüzeyi üzerinde hesaplanan $u_r^{(1)}, u_r^{(2)}, u_\theta^{(1)}, u_\theta^{(2)}$ yerdeğiştirmelerin değişimi verilmiştir.

Şekil A.12 – A.19 da zorlama frekansının $\omega = 40$ rad/s, şekil A.31 – A.38 de $\omega = 80$ rad/s, şekil A.39 – A.46 da $\omega = 100$ rad/s için u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ile $u_r^{(1)}, u_r^{(2)}, u_\theta^{(1)}, u_\theta^{(2)}$ yerdeğiştirmelerinin ve $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmelerinin oyuklar çevresi boyunca değişimi verilmiştir. Zorlama frekansı büyüdükçe $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin arttığı görülmüştür.

Şekil A.20 – A.30 de zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, şekil A.47 – A.57 de zorlama frekansının $\omega = 120$ rad/s için u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ve σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin serbest yüzey boyunca değişimi ile $u_r^{(1)}, u_r^{(2)}, u_\theta^{(1)}, u_\theta^{(2)}$ yerdeğiştirmelerinin ve $\sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin oyuk çevresi boyunca değişimi verilmiştir. Bu zorlama frekansları için serbest yüzeydeki σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinde hata %1,5 mertebesindedir. 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinde de hata %0,2 mertebesindedir.

Şekil A.58 – A.59 da $x=0$, $y=10$ noktasındaki u_x , u_y yerdeğiştirmelerinin zorlama frekansına göre değişimleri verilmiştir. Düşük frekanslarda yerdeğiştirmelerin daha fazla olduğu görölmüştür.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada serbest yüzeyden H kadar derinlikte a_1 ve a_2 yarıçaplı iki dairesel oyuk içeren yarım düzlemin, a_1 yarıçaplı oyuk yüzeyinden harmonik zorlaması altındaki davranışı incelenmiştir. Zorlama olarak oyuk çeperine yayılı iç basınç göz önüne alınmıştır.

Elde edilen kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir ve indirgenmiş dalga denklemleri iki ayrı kutupsal koordinat takımında Bessel – Fourier serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Denklemlerin kapalı olarak çözülmesine karşılık sınır koşullarının sağlatılmasında güçlük ortaya çıkmıştır. Oyuk yüzeylerinde sınır koşullarının sağlatılmasında Bessel fonksiyonları için dönüşüm bağıntıları (Graff Ekleme Teoremi) kullanıldı. Bu koşulların sağlatılmasında en büyük hata %0,5 mertebesindedir. Serbest yüzey üzerindeki sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir. Çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi ancak serbest yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması nedeniyle serbest yüzey üzerindeki sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir. En büyük hata %8 mertebesindedir.

ω zorlama frekansının çeşitli değerlerine göre yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimleri grafikler yardımı ile verilmiştir.

Serbest yüzey üzerinde, her iki tarafta derinliğin ortalama olarak 5 katı gibi bir bölgeden sonra yerdeğiştirmelerin beklenmedik bir şekilde arttığı görülmüştür. Bunun nedenin yaklaşık çözüm olduğuna karar verilmiştir. Çözüm serisindeki terim sayısının artırılması ile bu hatanın azalacağı tahmin edilmektedir. Ancak bilgisayar hesap zamanının çok uzun olması nedeniyle şimdilik 10 terim alınabilmektedir. Yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin, zorlama frekansının büyümesi ile azaldığı görülmüştür.

Bu problemin devamı olabilecek çalışmalar;

1. Zorlamanın çevre ve zaman üzerinde rastgele olması,
2. Zorlamanın oyuk eksenı boyunca değışken olması,
3. Ortamın homogen olmaması,
4. Ortamın viskoelastik olması,
5. Serbest yüzeyin herhangi bir şekilde olması,
6. Oyuk çevresinin daireden farklı olması,
7. Ortamın 2 değışik malzemedenden olması, olarak özetlenebilir.

KAYNAKLAR

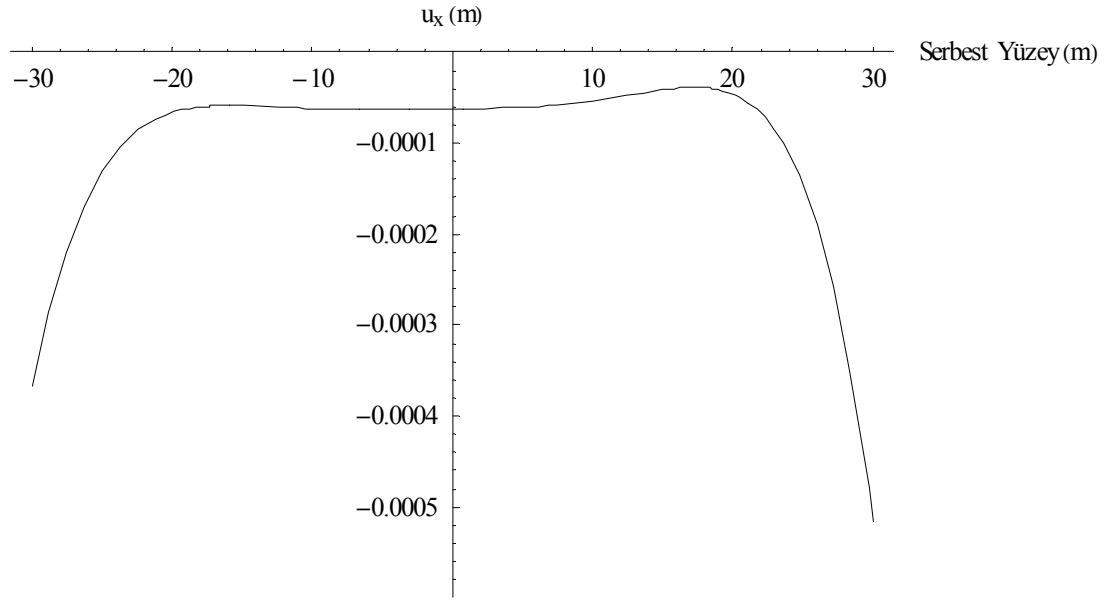
- [1] **Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S.**, Elastodynamics, Vol II, Academic Press, New York, 1975.
- [2] **Graff, K.F.**, Wave motion in elastic solids, Clarendon press, Oxford, 1975
- [3] **El – Akily, N. and Datta, S.K.**, 1981. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space – Numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **9**, 477-487.
- [4] **Datta, S.K., Shah A.H., Wong K.C.**, 1984. Dynamic stresses and displacements in buried pipe, *Journal of Engineering Mechanics*, **110**, 1451-1466.
- [5] **Wong K.C., Shah A.H. and Datta, S.K.**, 1985. Dynamic stresses and displacements in a buried tunnel, *Journal of Engineering Mechanics*, **111**, 218-234.
- [6] **Balendra T., Chua K.H., Lo K.W. and Lee S.L.**, 1989. Steady – state vibration of subway – soil – building system, *Journal of Engineering Mechanics*, **115**, 145-162.
- [7] **Balendra T., Koh C.G., Ho Y.C.**, 1991. Dynamic response of buildings due to trains in underground tunnels, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 275-291.
- [8] **Thiruvenkatachar V.R. and Viswanathan K.**, 1965. Dynamic response of an elastic half space with cylindrical cavity to time – dependent surface tractions over the boundary of the cavity, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **14**, 541-571.
- [9] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – I: Formulation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**, 553-567.

- [10] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – II: Validation and numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**, 569-580.
- [11] **Guan, F., Moore, I. D.**, 1994. Three-Dimensional dynamic response of twin cavities due to traveling loads, *Journal of Engineering Mechanics*, 120, 637-7-56.651.
- [12] **Guan, F., Moore, I.D.**, 1996. Three – Dimensional dynamic response of lined tunnels due to incident seismic waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, 357-369.
- [13] **Bayıroğlu, H.**, 1995. Yarı düzlemde gömülü yapıların zorlanmış titreşimleri, *Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.*
- [14] **Davis, A.C., Lee, V.W., Bardet, J.P.**, 2001. Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **30**, 383-410.
- [15] **Engin, H. Coşkun, İ.**, 2001. Boşluk içeren yarım uzayda zorlanmış titreşimler, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya, 10-14 Eylül*, s. 365-374.
- [16] **Yuan, X., Liao, Z.P.**, 1995. Scattering of plane SH waves by a cylindrical alluvial valley of circular – arc cross – section, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24, 1303-1313.
- [17] **Yuan, X., Liao, Z.P.**, 1996. Surface motion of a cylindrical hill of Scattering of circular – arc cross – section for incident plane SH waves, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15, 189-199.
- [18] **Liu, Y. J., He, Z. Y., Fan, H., M.**, 2004. Scattering of SH – waves by an interface cavity, *Acta Mechanica*, 170, 47-56.
- [19] **Watson, G.N.**, 1958. A treatise of the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, London
- [20] **Akpınar, M.**, 2000. Harmonik basınç etkisindeki dairesel boşluklu yarım düzlem problemi, *Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.*

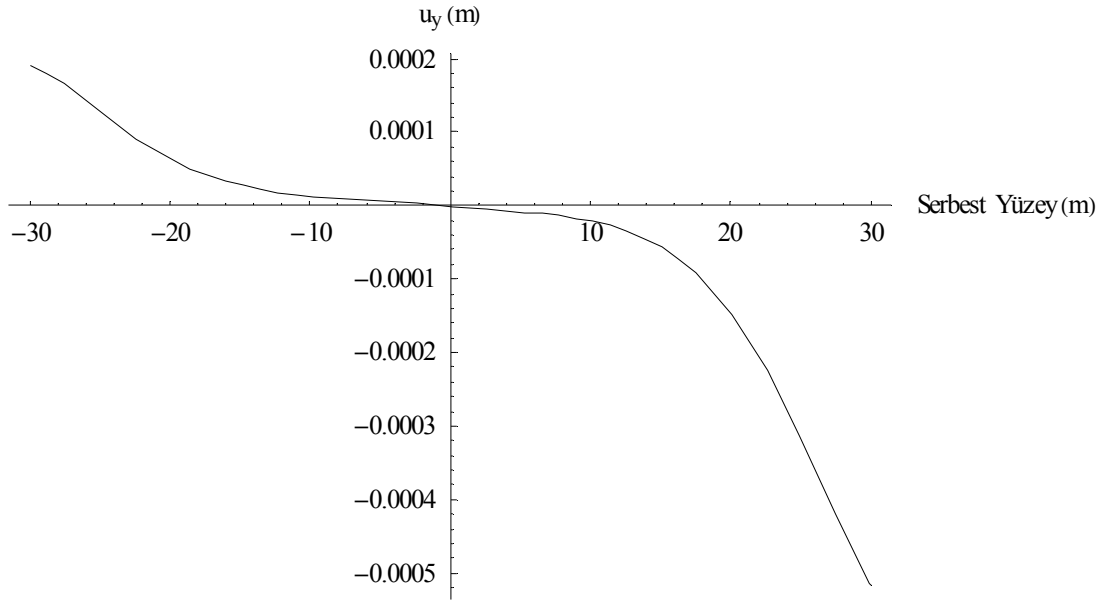
- [20] **Hildebrand, F.B.**, Advanced Calculus for Applications, Prentice – Hall,
New Jersey, 1962.
- [21] **İnan, M.**, Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı: 750, İstanbul,
1969.
- [22] **Tameroğlu, S.**, Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı: 1434, İstanbul, 1991.
- [23] **Tranter, C.J.**, Bessel Functions with Some Physical Applications, The English
Universities Press, London, 1968.

EK A

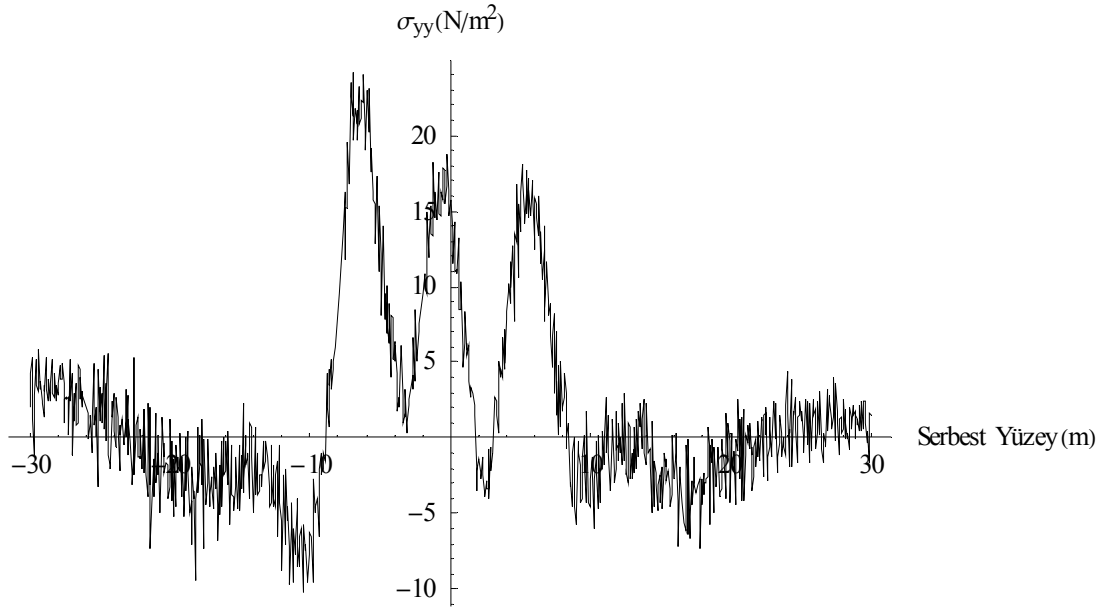
1. DELİĞİN İÇ BASINÇ İLE YÜKLÜ OLMASINA AİT GRAFİKLER



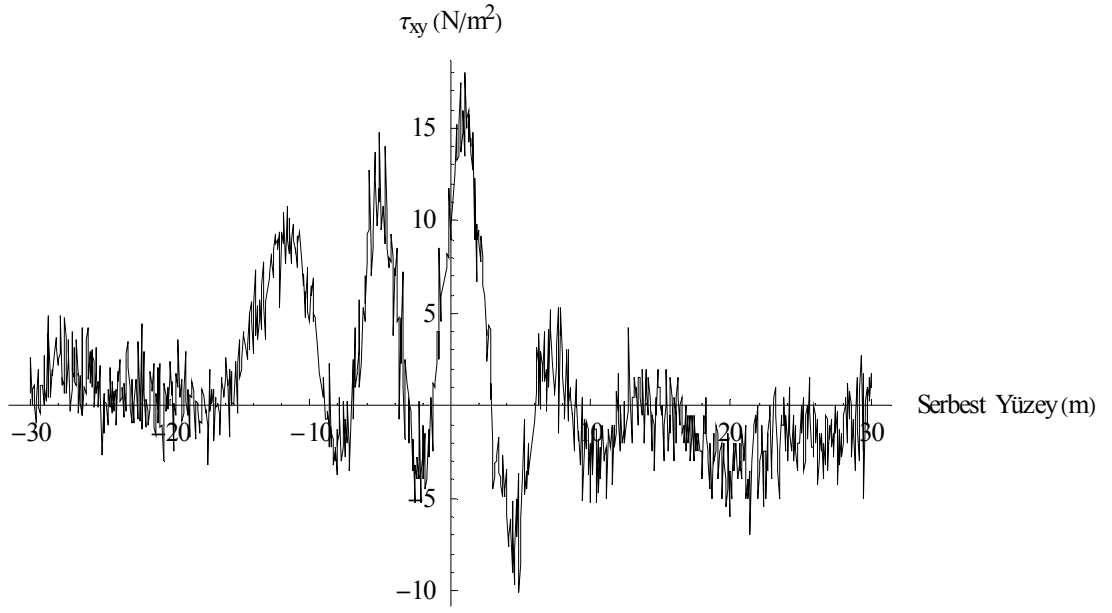
Şekil A.1 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



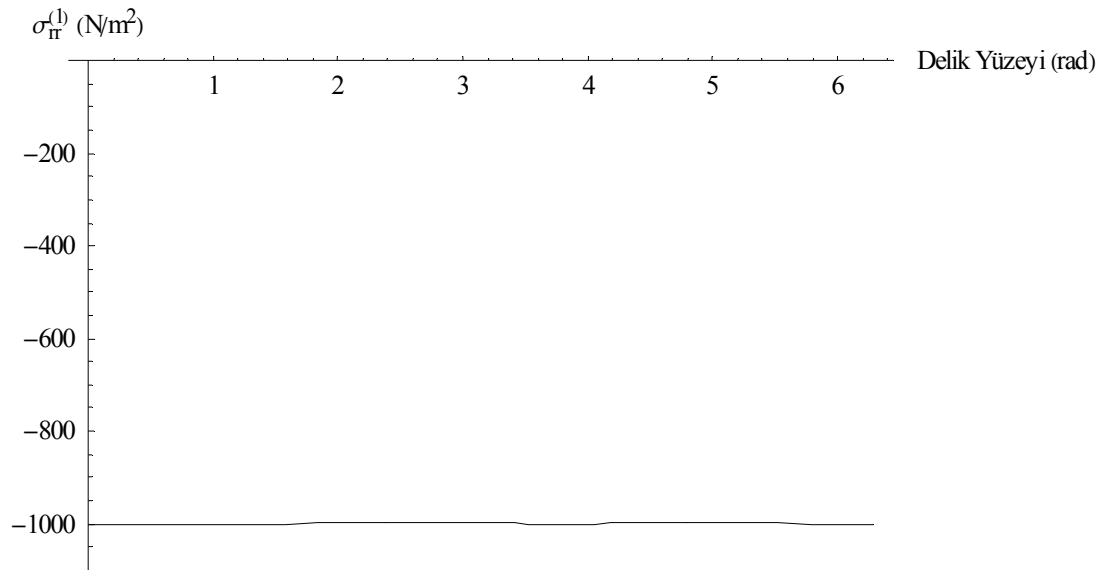
Şekil A.2 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



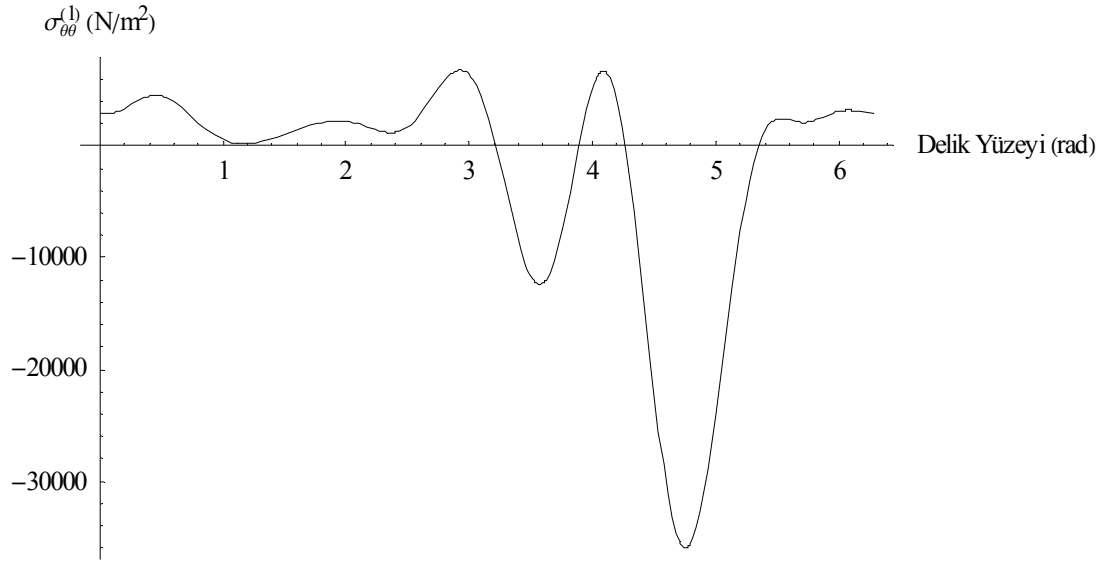
Şekil A.3 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi



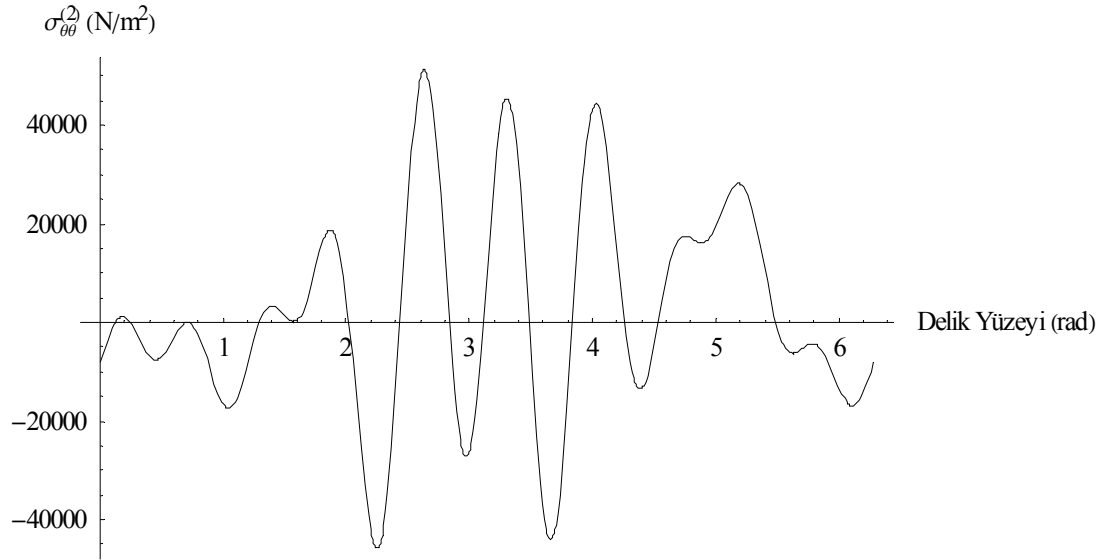
Şekil A.4 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



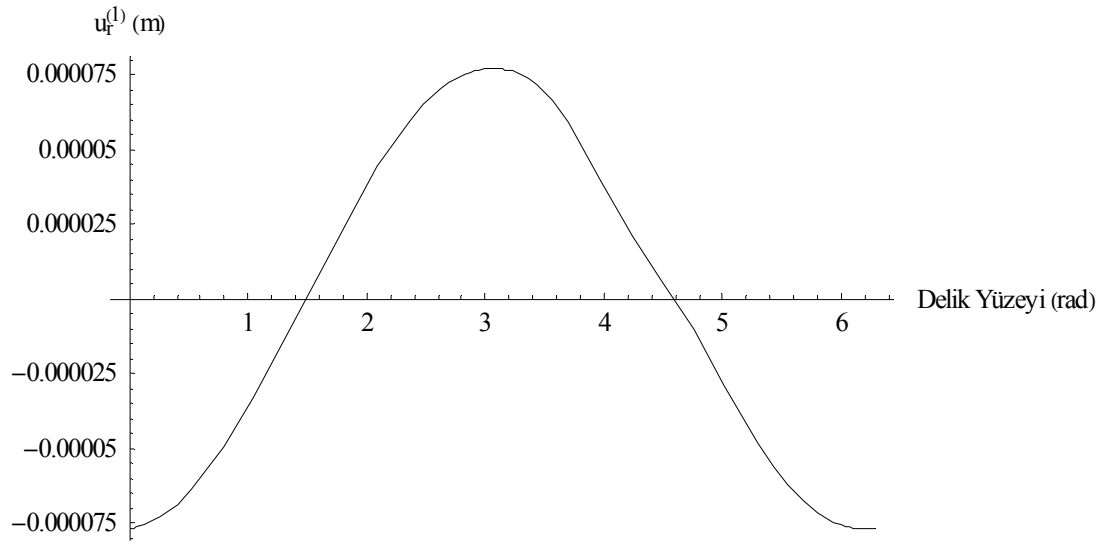
Şekil A.5 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



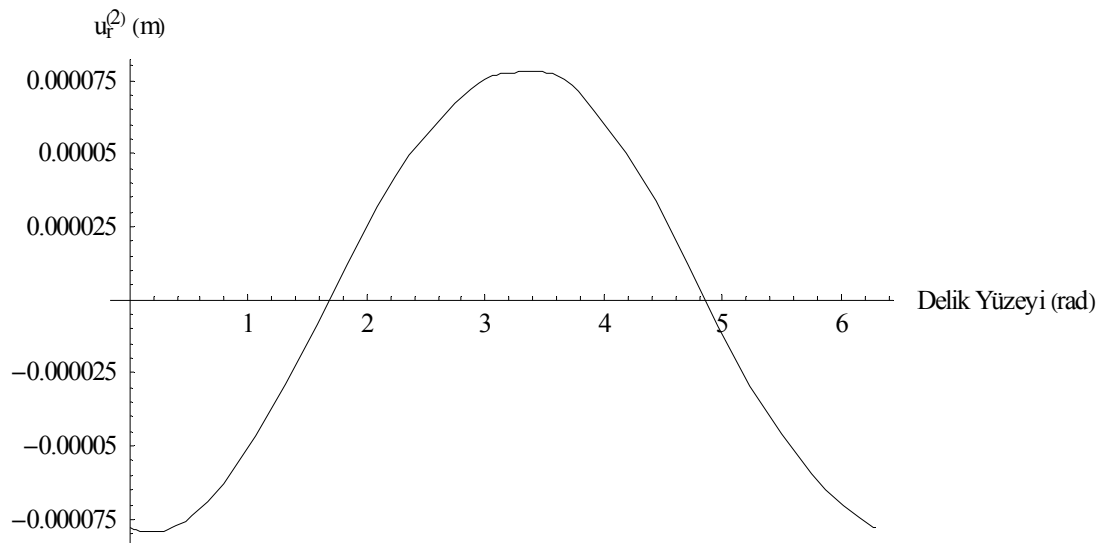
Şekil A.6 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



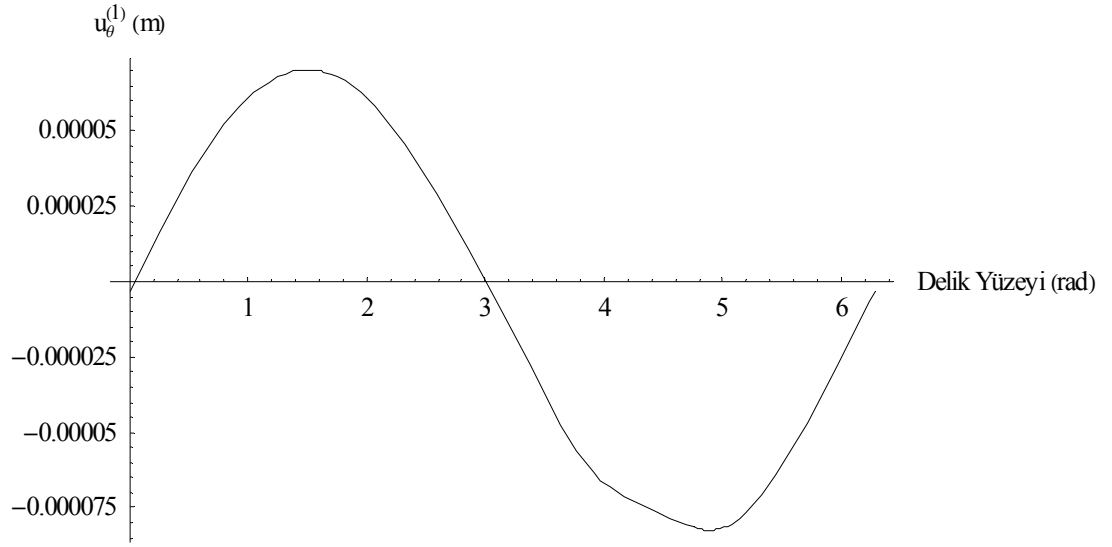
Şekil A.7 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



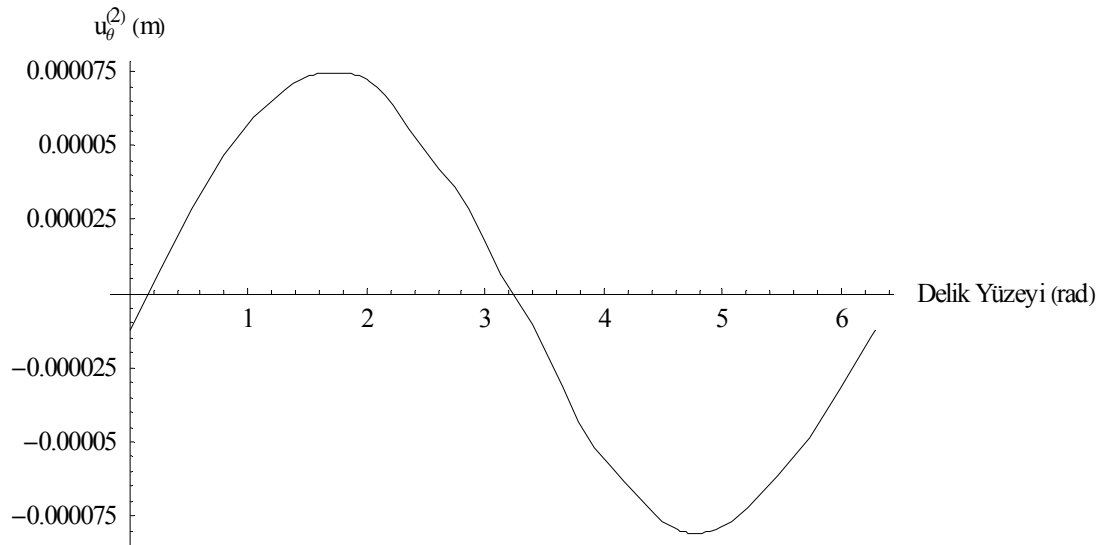
Şekil A.8 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



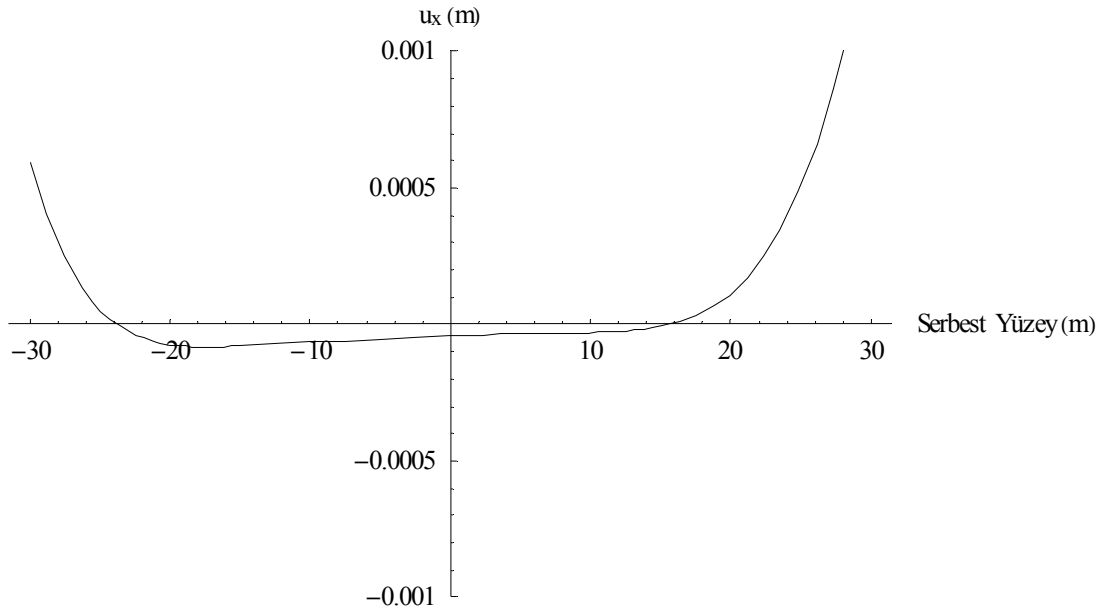
Şekil A.9 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



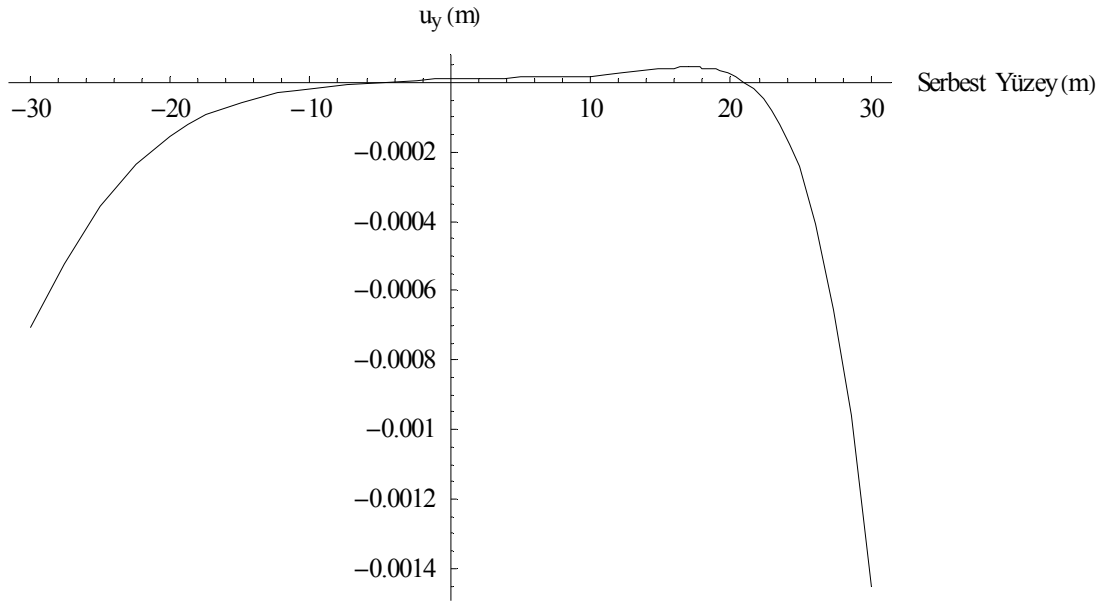
Şekil A.10 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



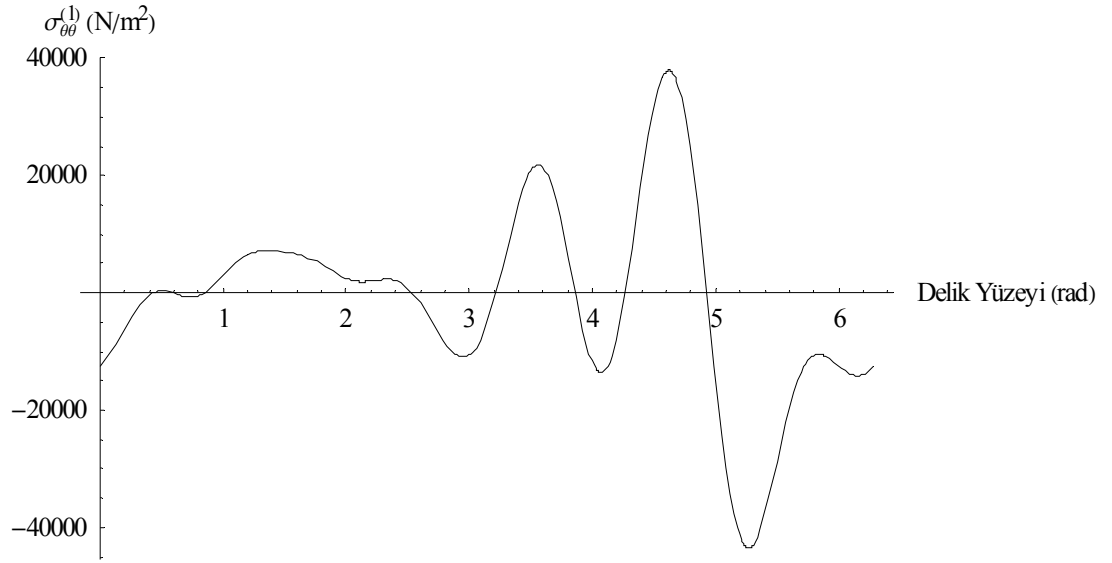
Şekil A.11 $\omega=20$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



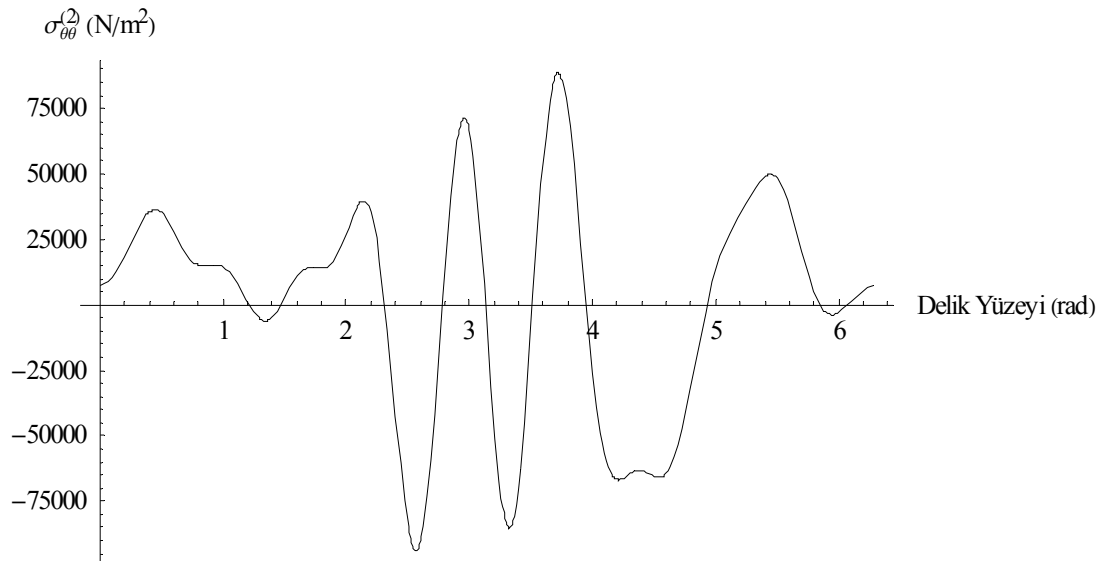
Şekil A.12 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



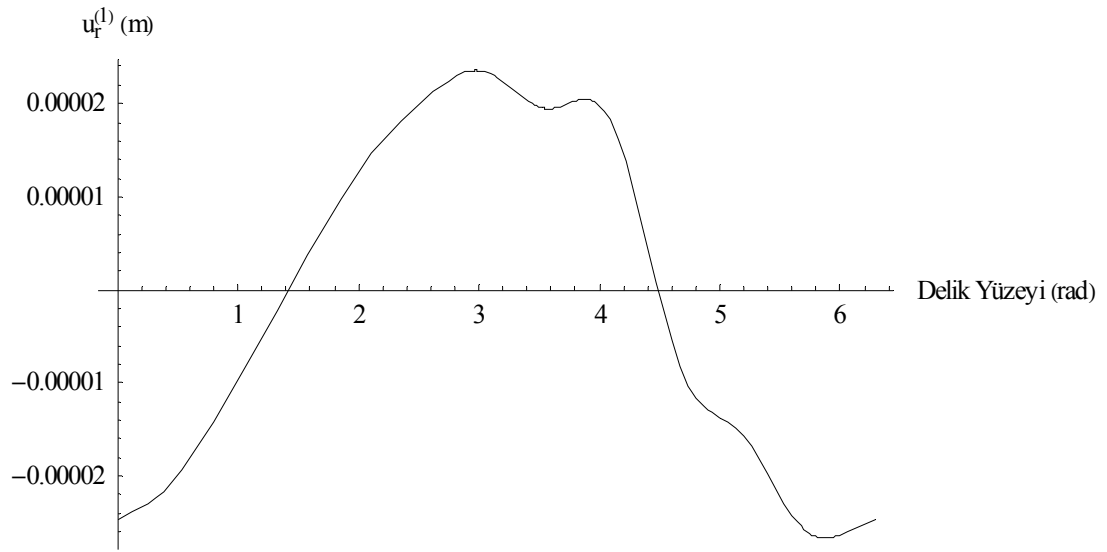
Şekil A.13 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



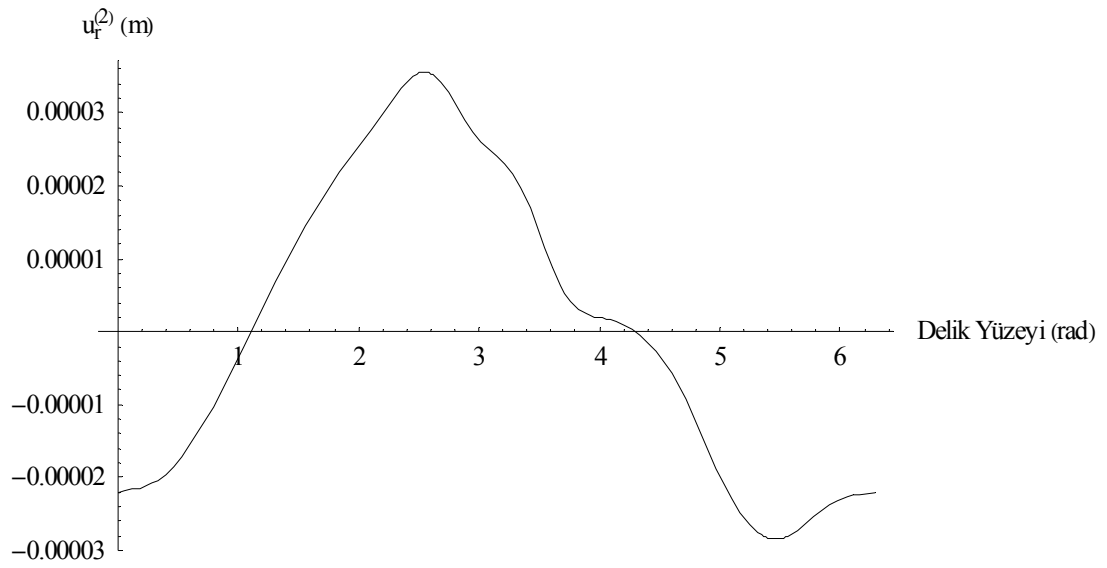
Şekil A.14 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



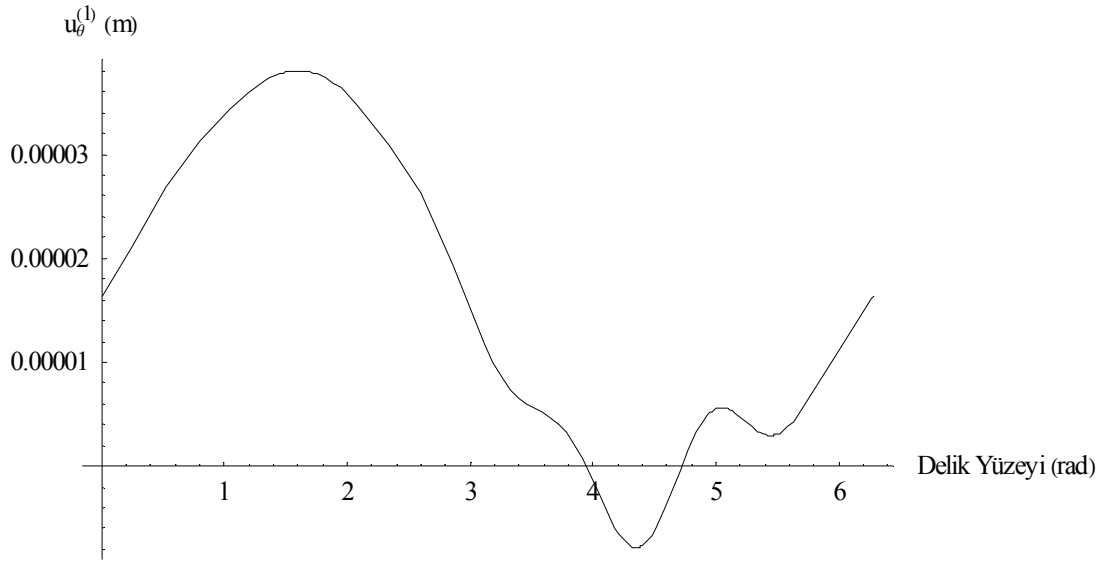
Şekil A.15 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



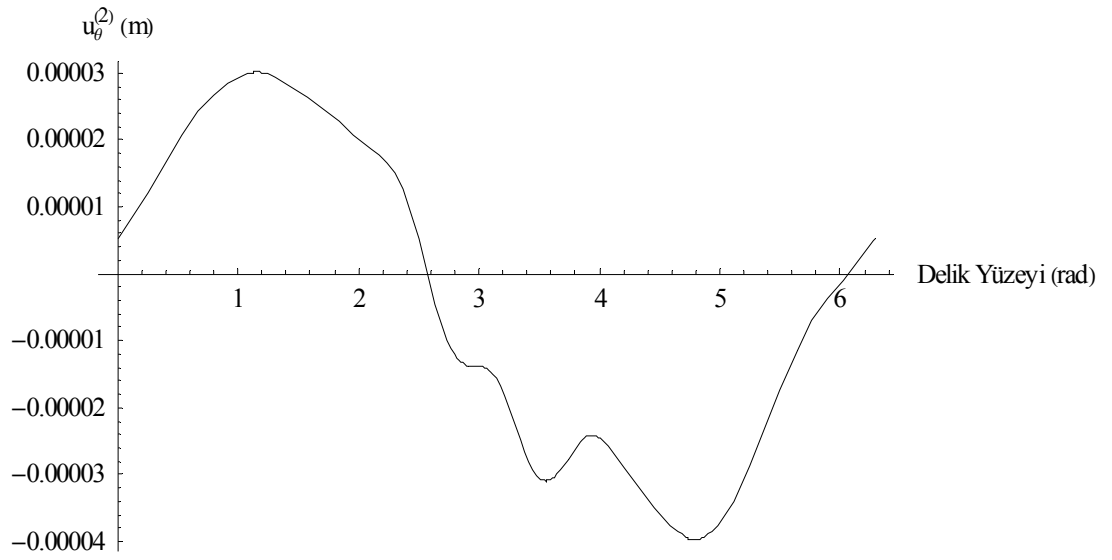
Şekil A.16 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



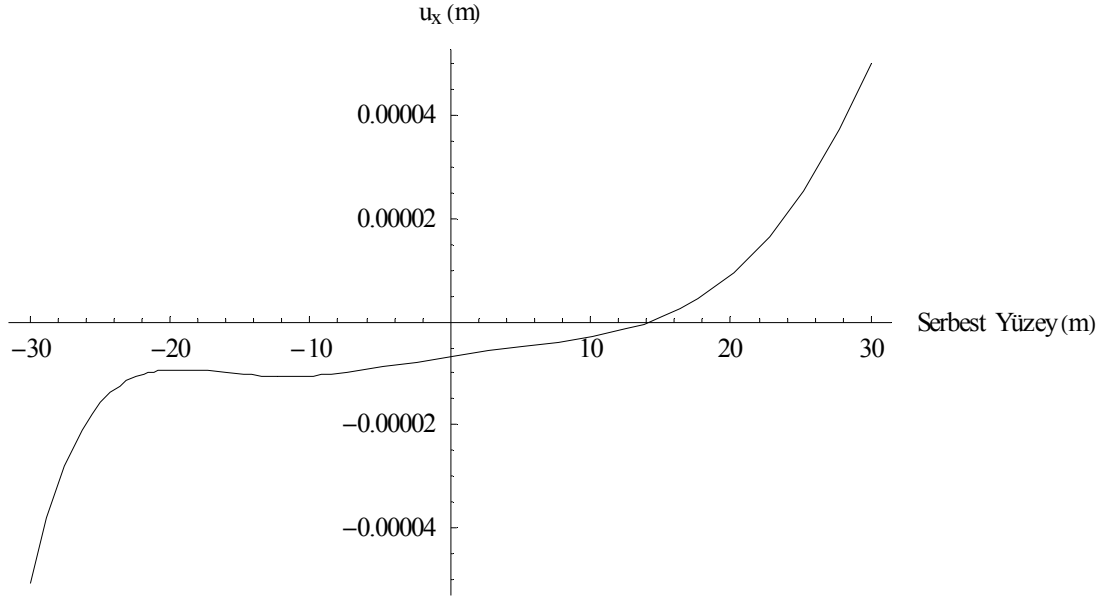
Şekil A.17 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



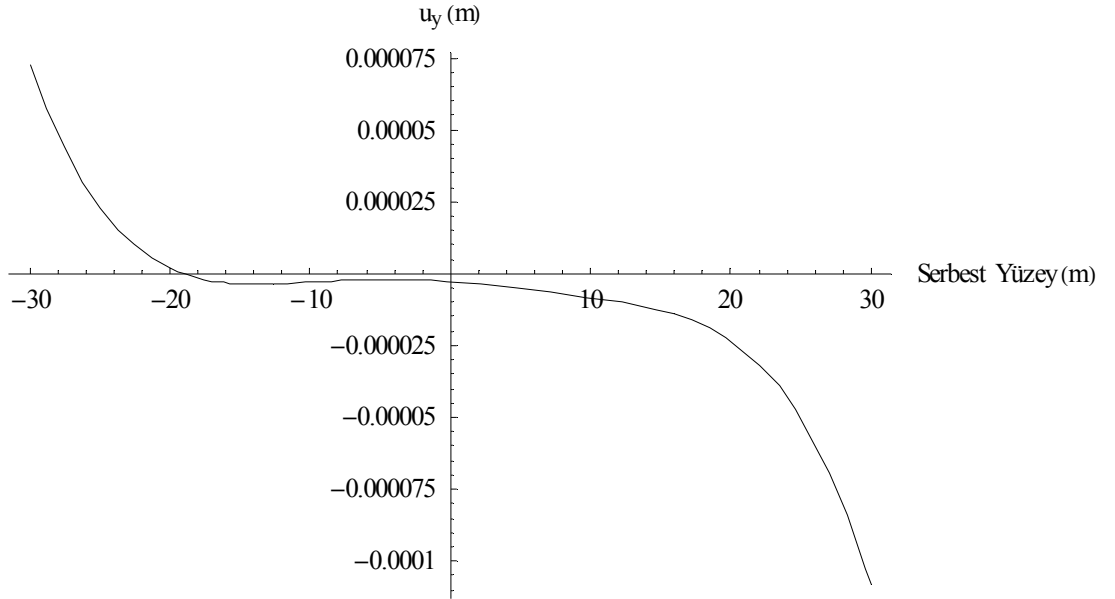
Şekil A.18 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



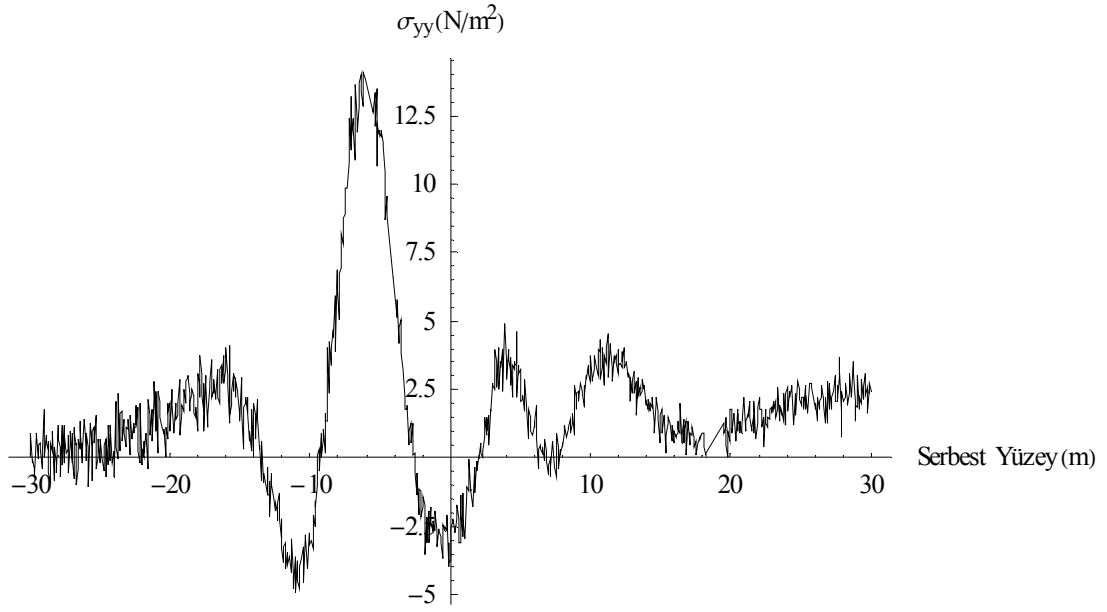
Şekil A.19 $\omega=40$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



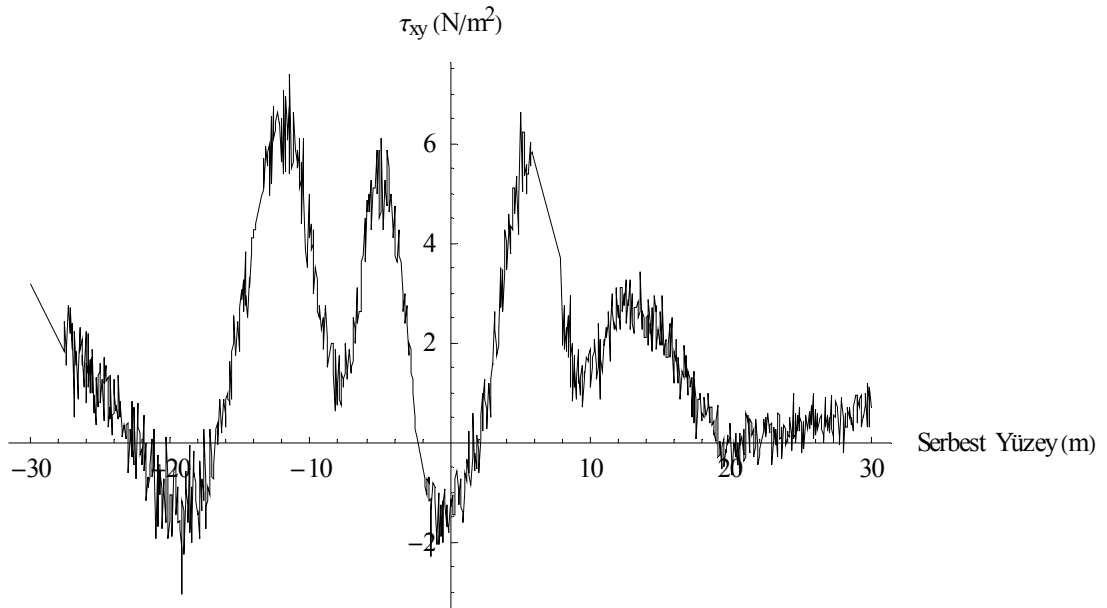
Şekil A.20 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



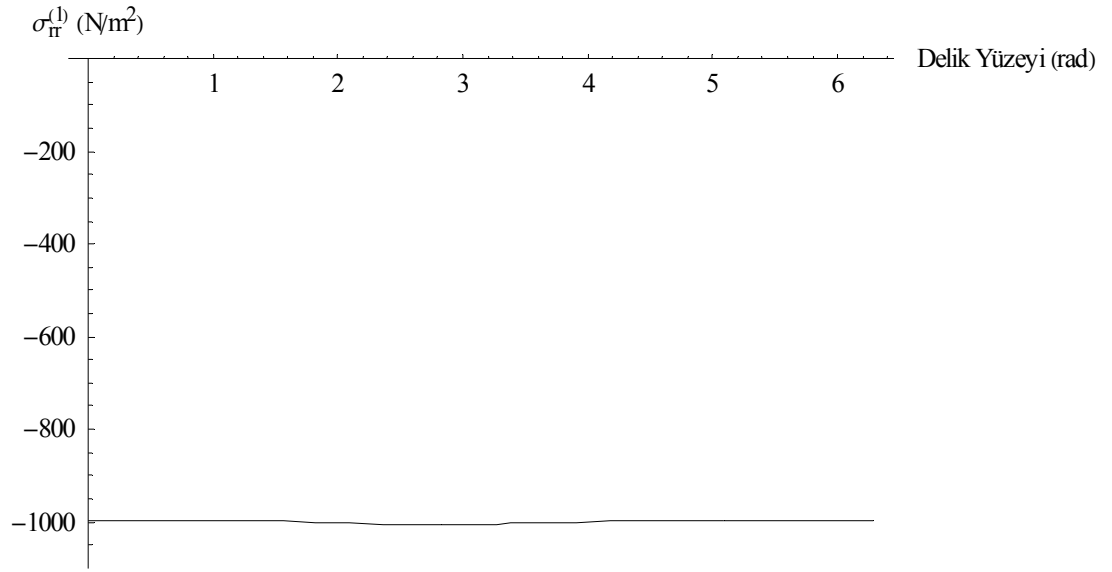
Şekil A.21 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



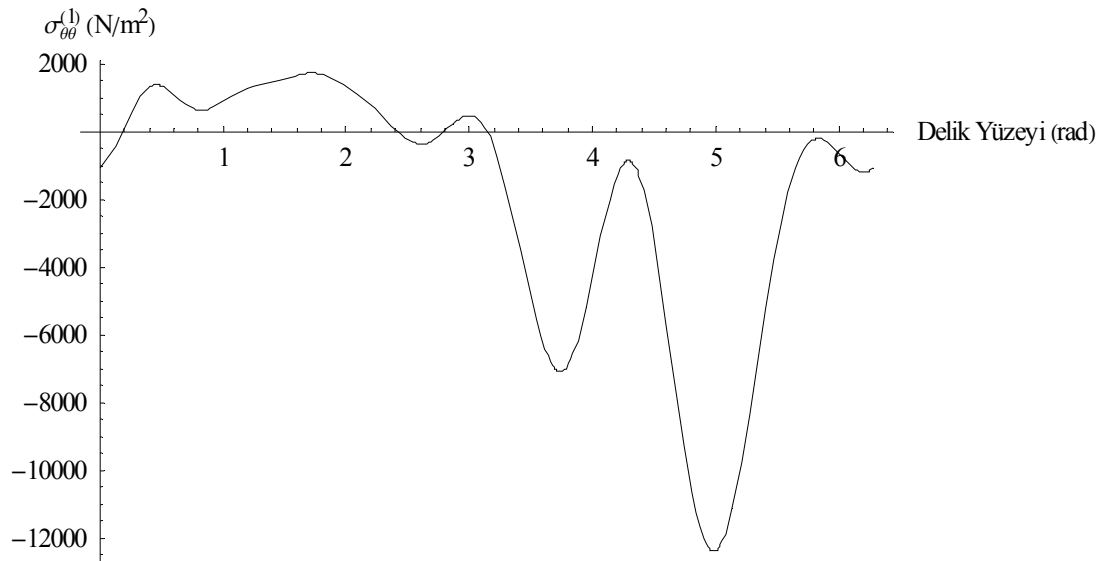
Şekil A.22 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi



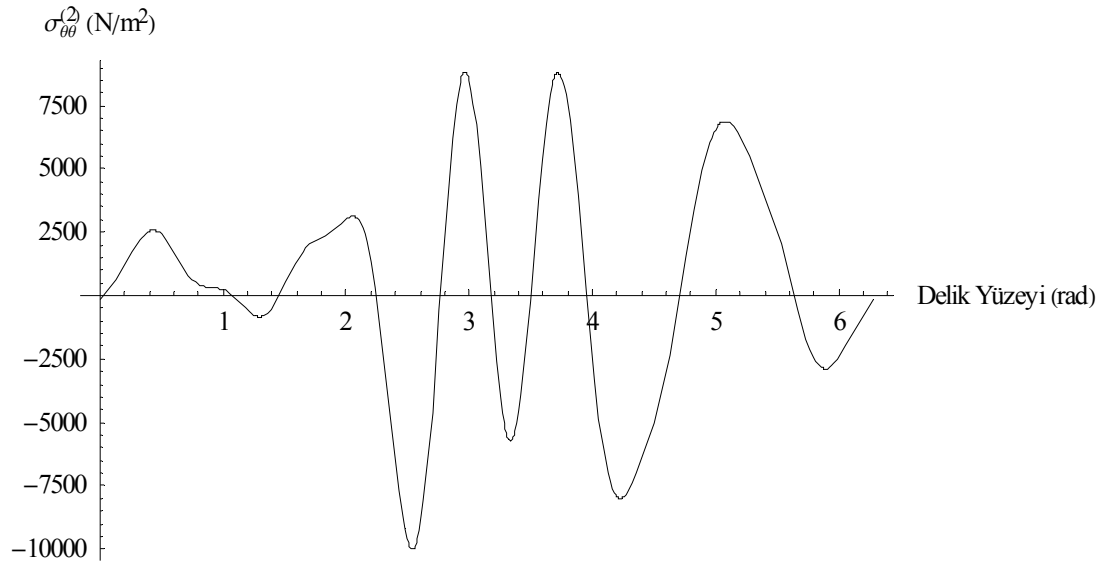
Şekil A.23 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



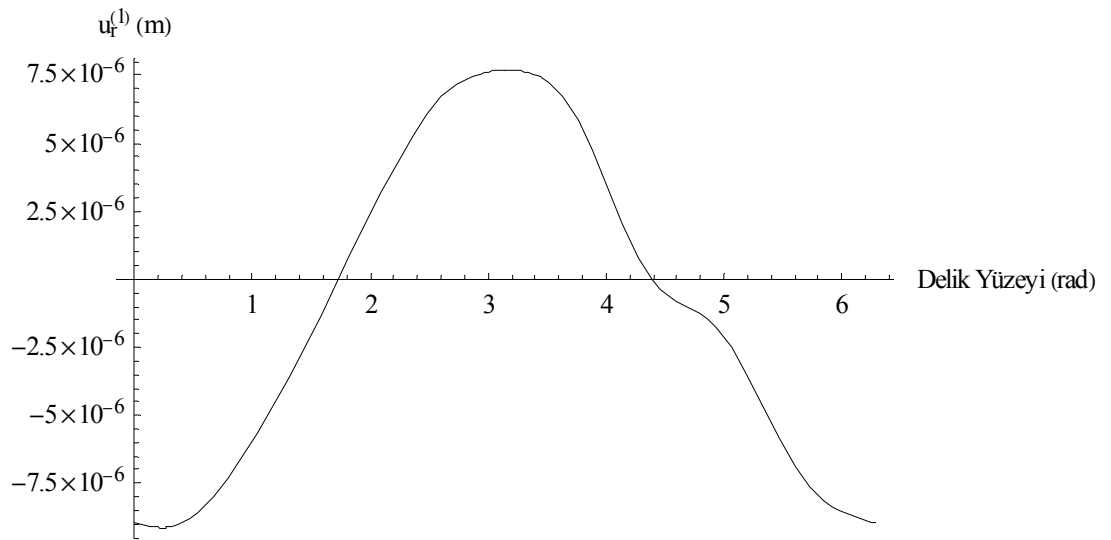
Şekil A.24 $\omega=60 \text{ rad/s}$, $a_1=5 \text{ m}$, $a_2=3 \text{ m}$, $H=10 \text{ m}$ ve $d=10 \text{ m}$ için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



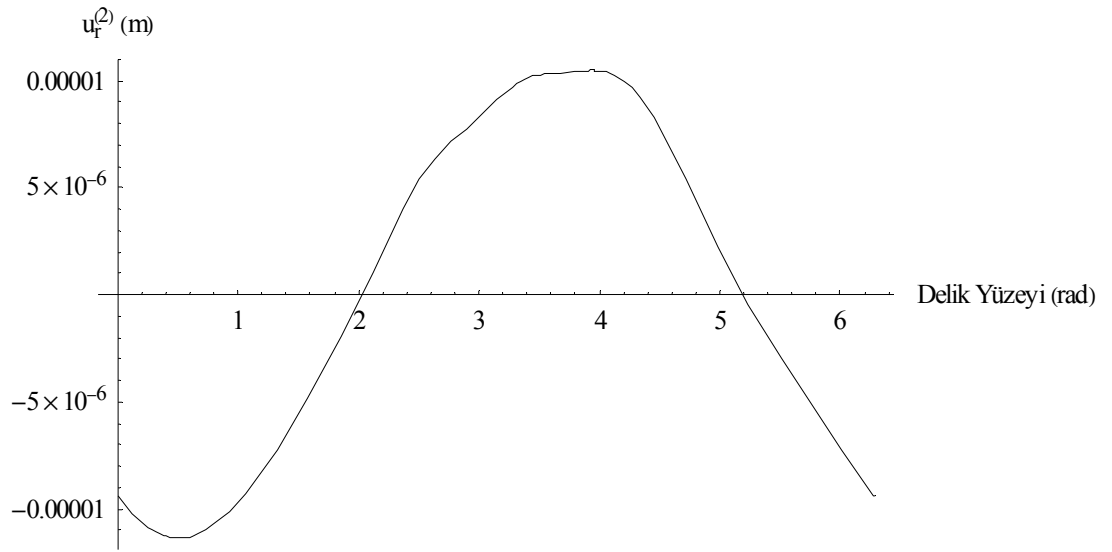
Şekil A.25 $\omega=60 \text{ rad/s}$, $a_1=5 \text{ m}$, $a_2=3 \text{ m}$, $H=10 \text{ m}$ ve $d=10 \text{ m}$ için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



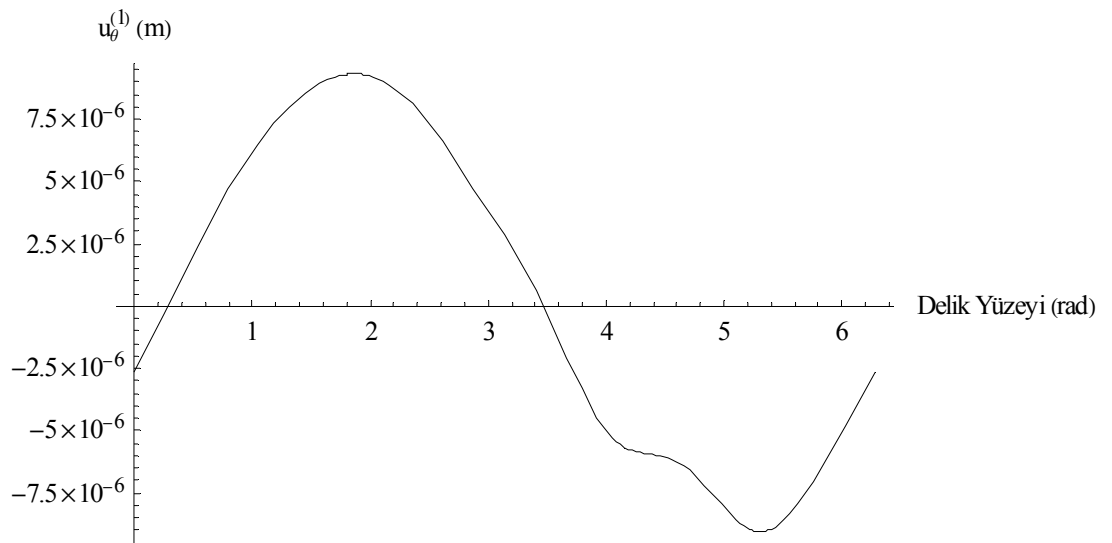
Şekil A.26 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



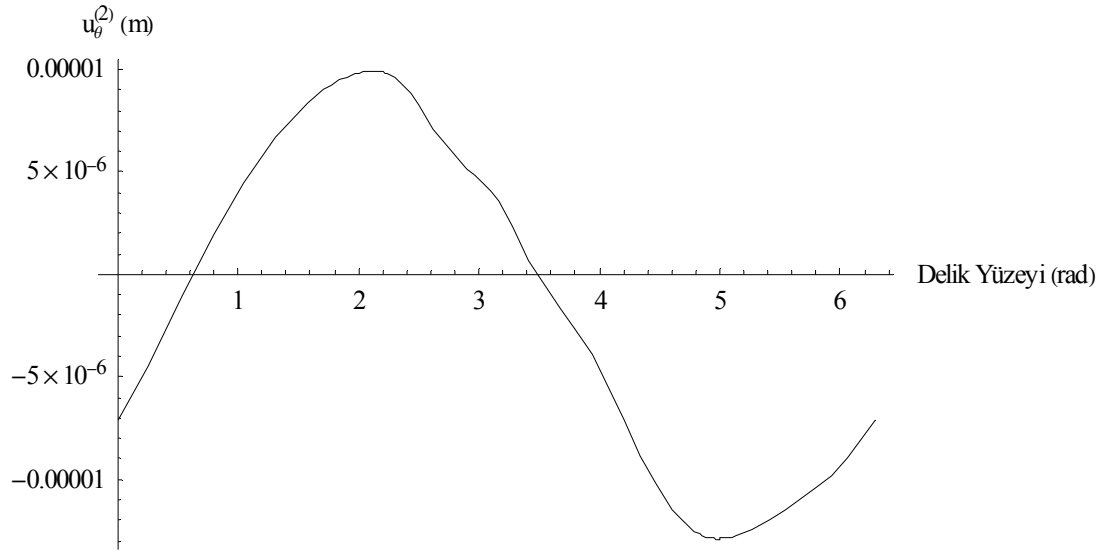
Şekil A.27 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



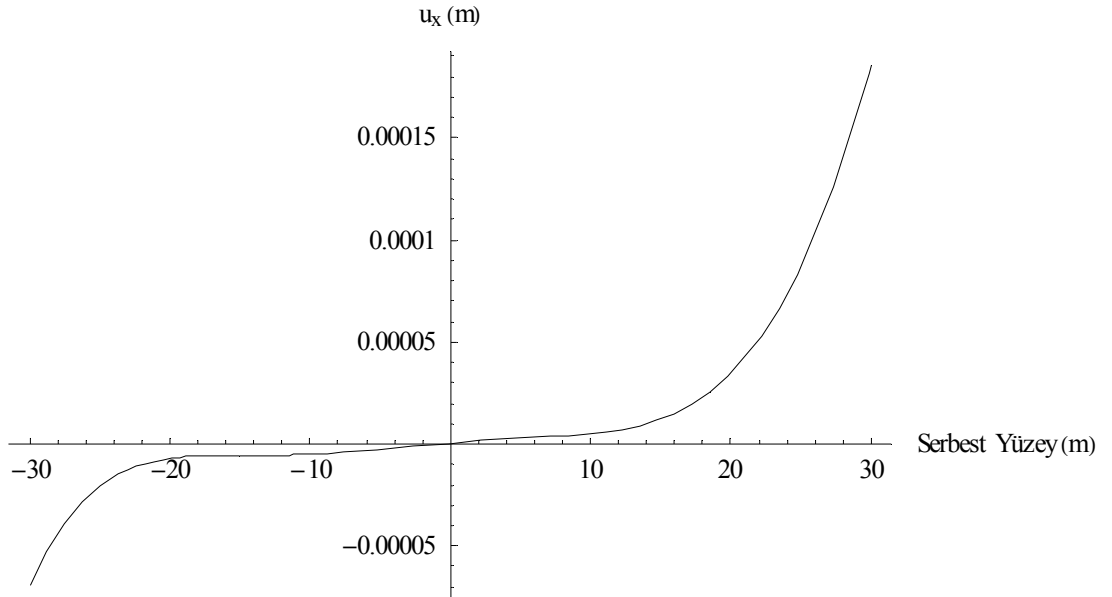
Şekil A.28 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



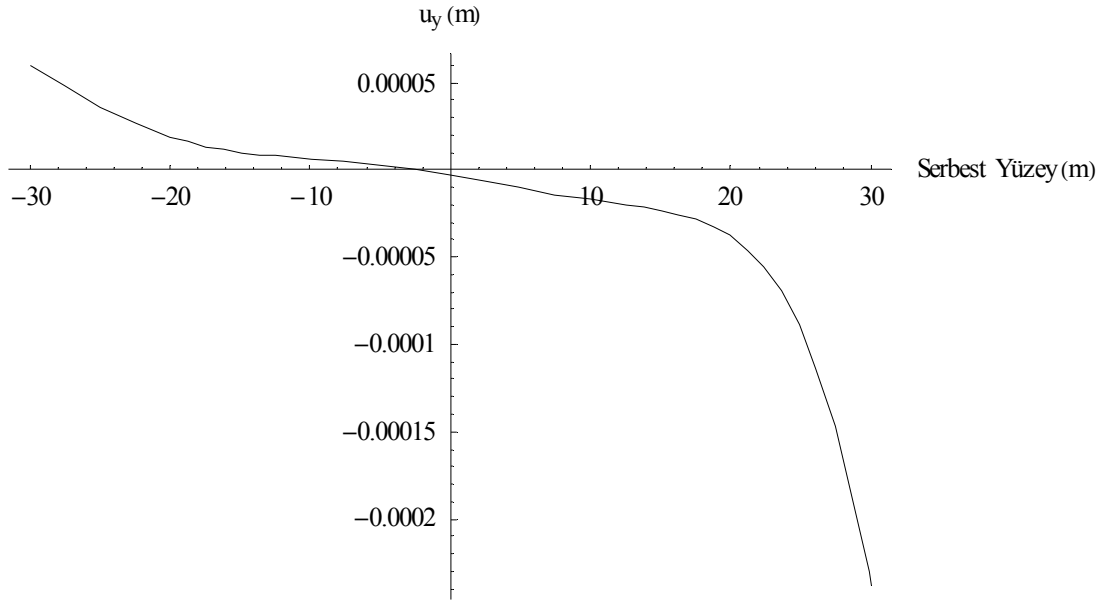
Şekil A.29 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



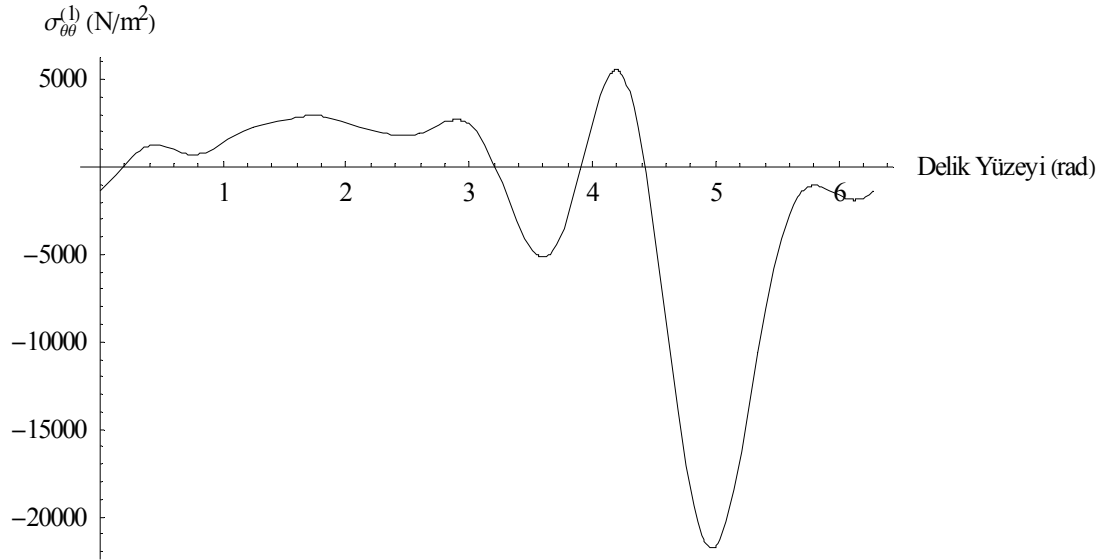
Şekil A.30 $\omega=60$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



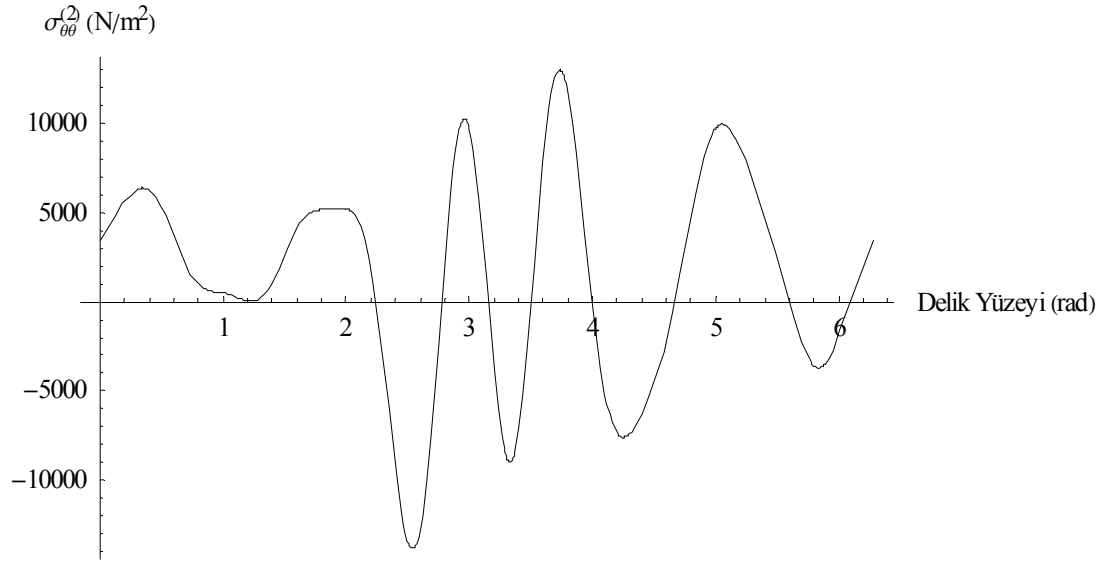
Şekil A.31 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



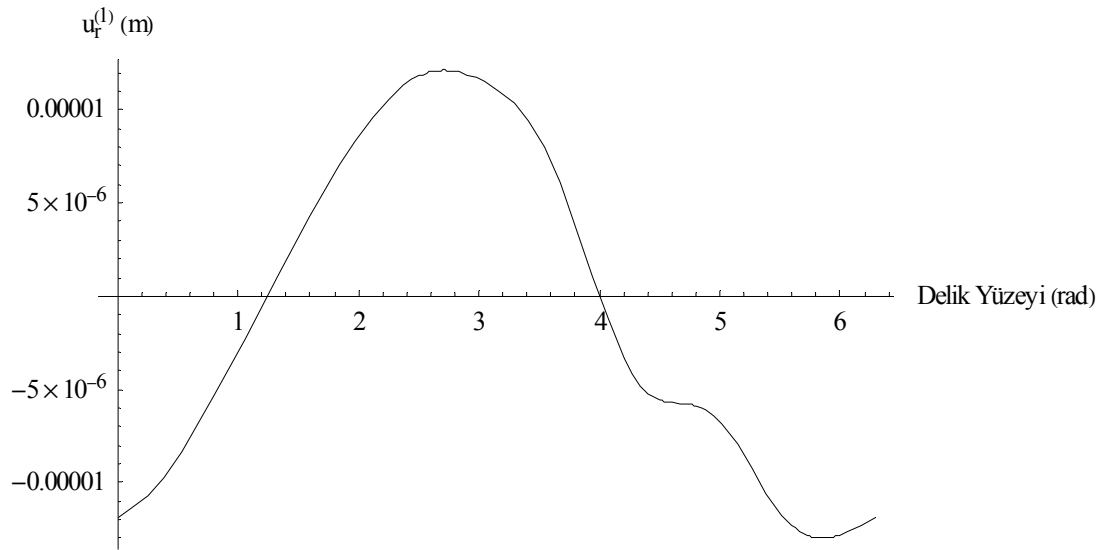
Şekil A.32 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



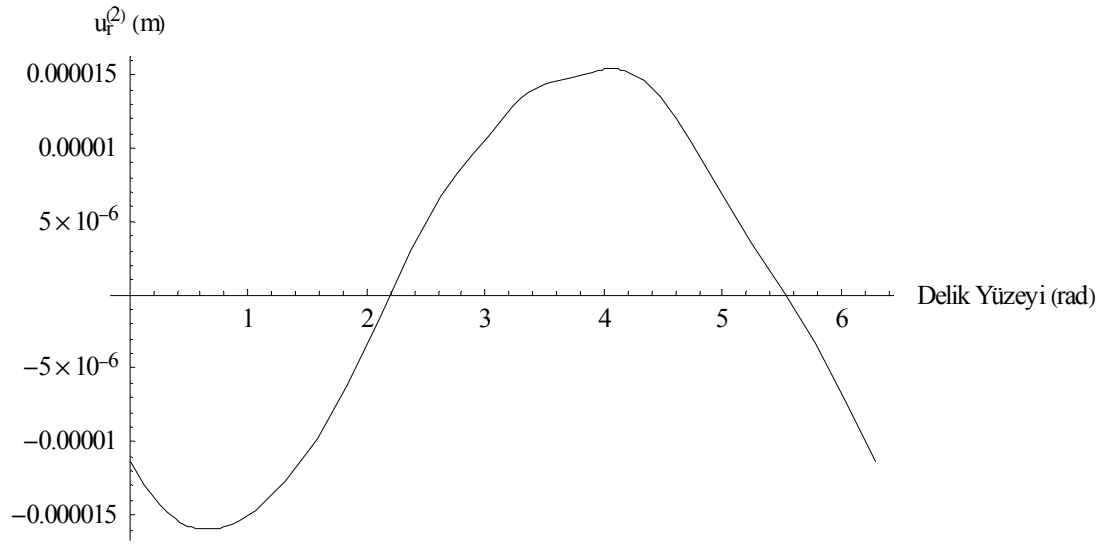
Şekil A.33 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



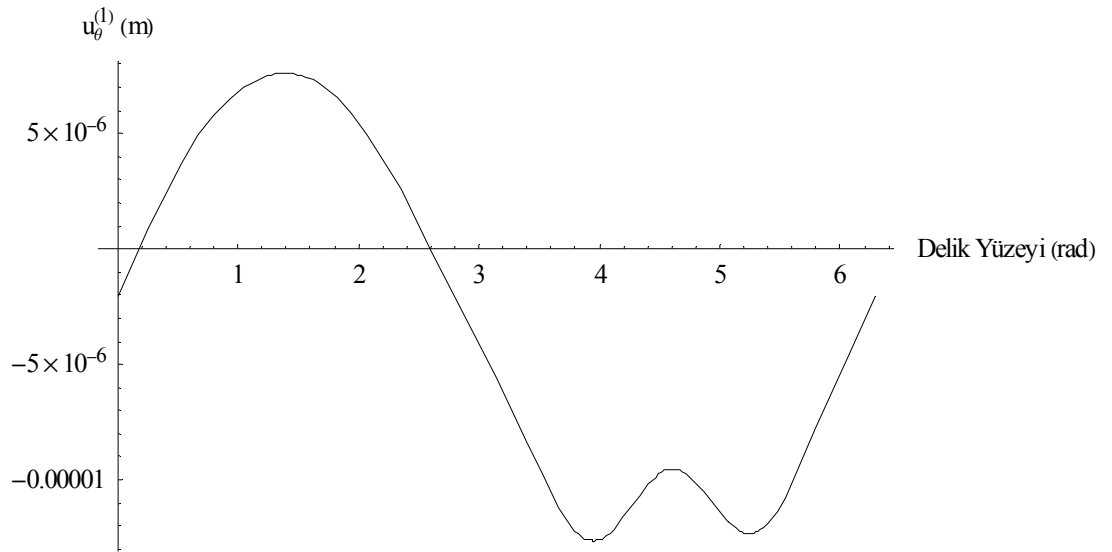
Şekil A.34 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



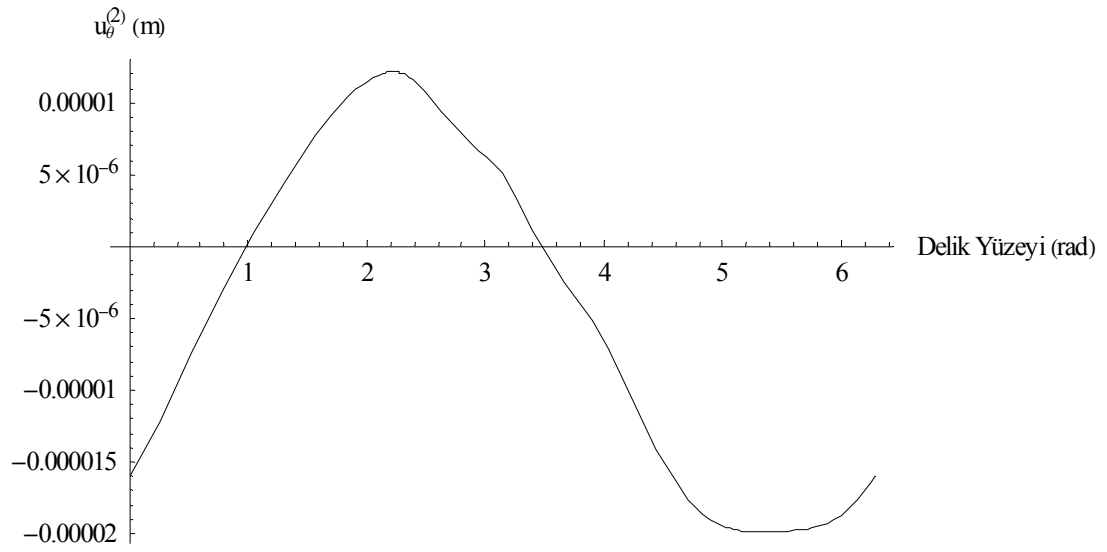
Şekil A.35 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



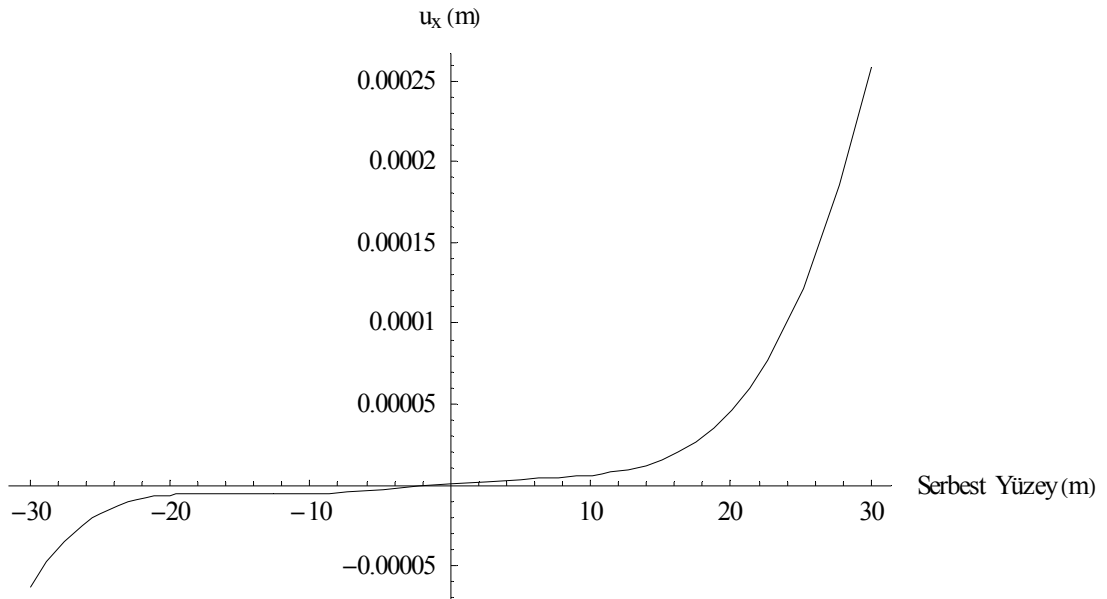
Şekil A.36 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



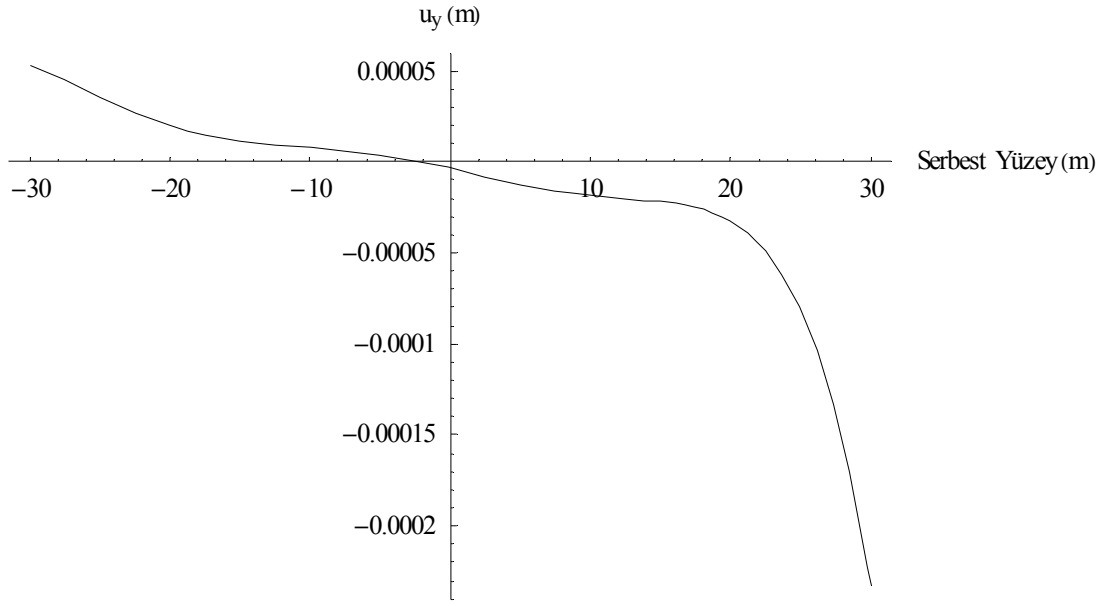
Şekil A.37 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



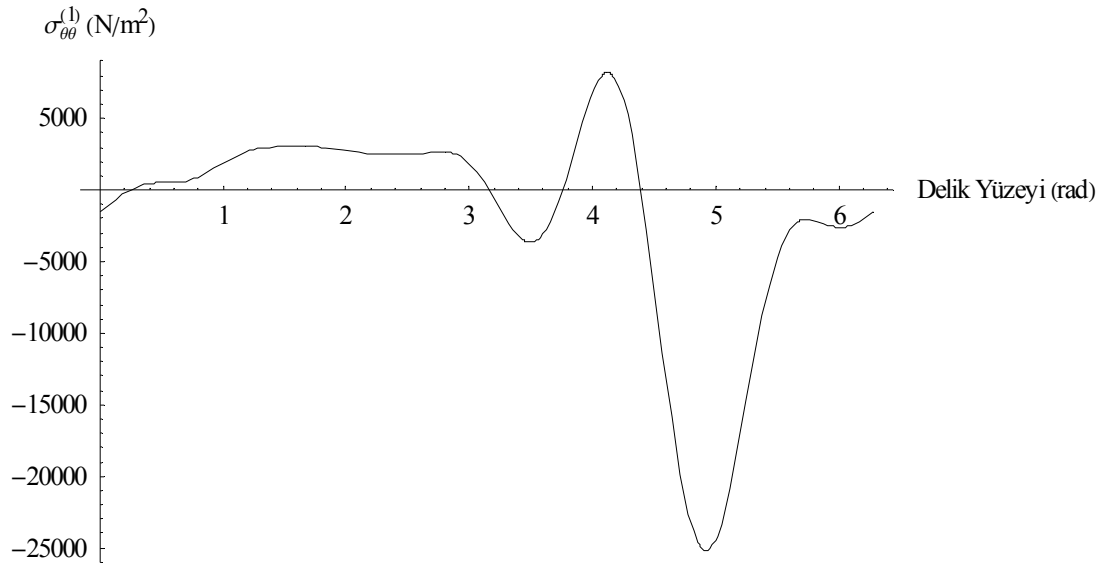
Şekil A.38 $\omega=80$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



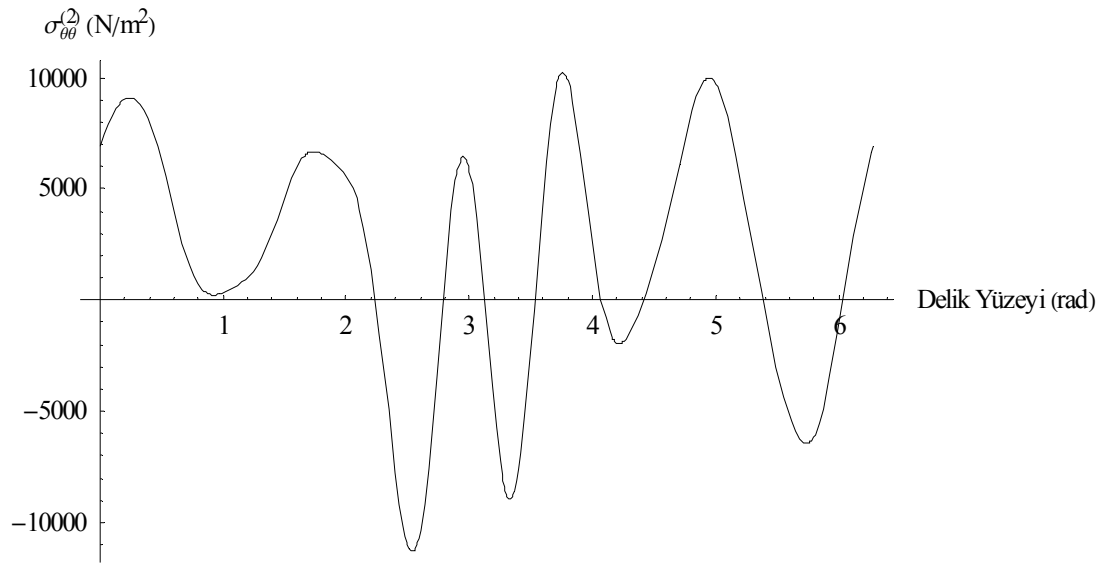
Şekil A.39 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



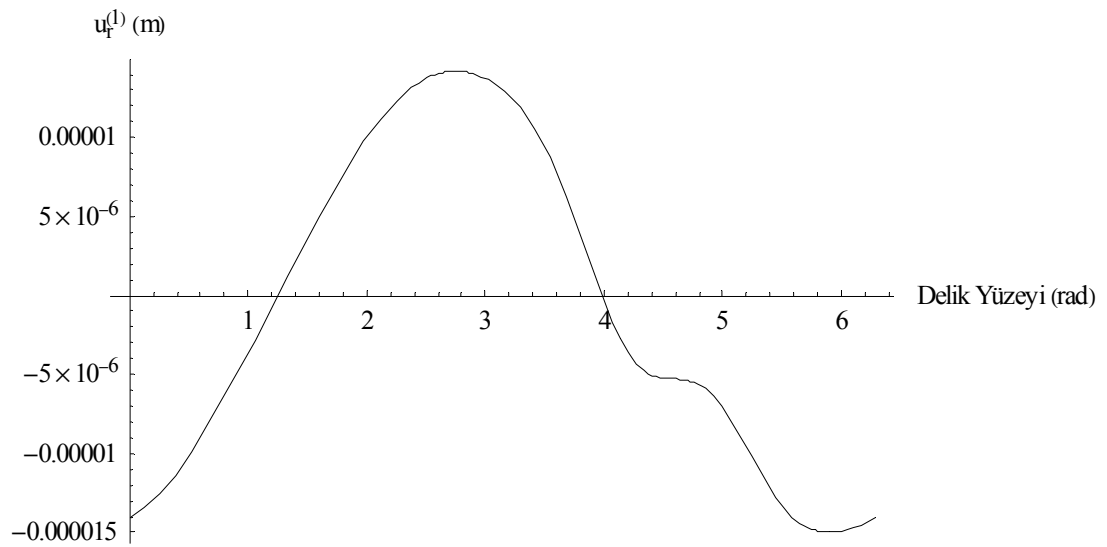
Şekil A.40 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



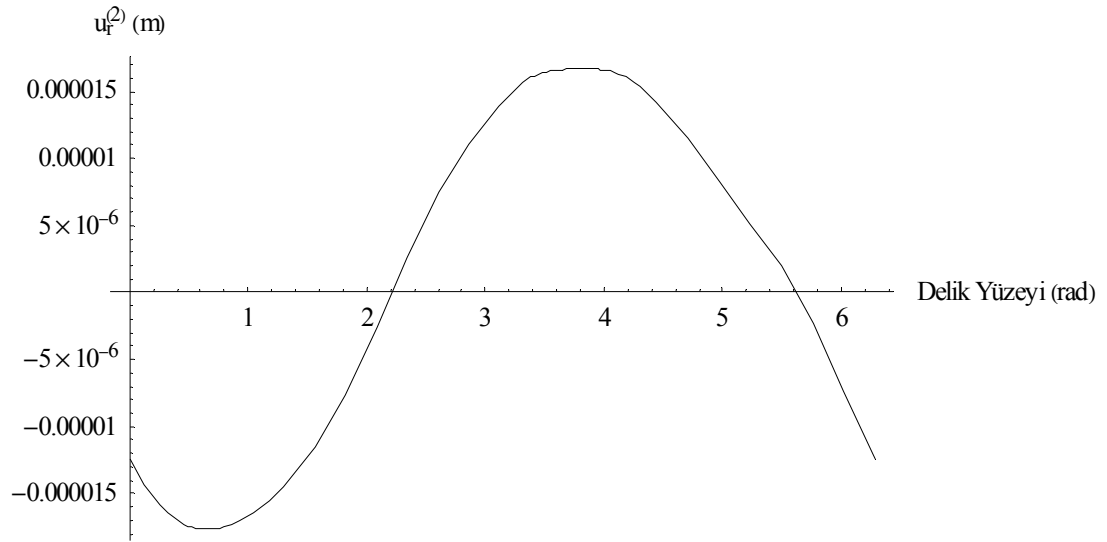
Şekil A.41 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



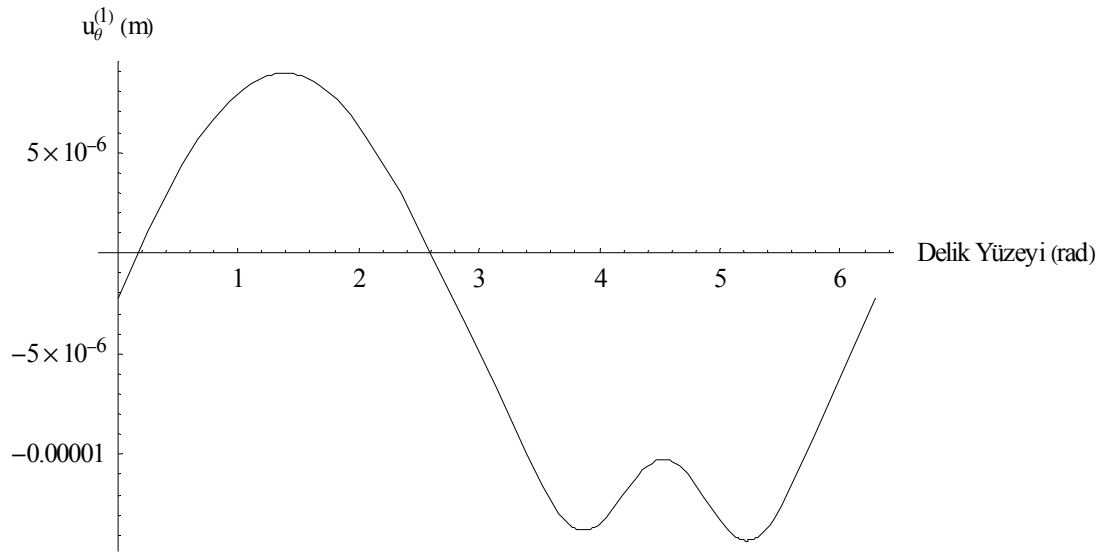
Şekil A.42 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



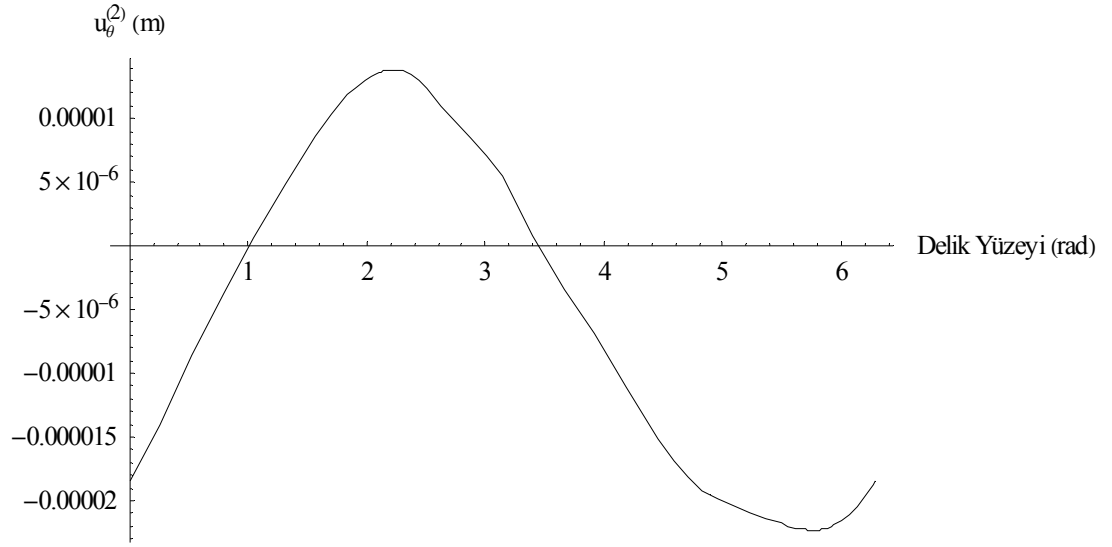
Şekil A.43 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



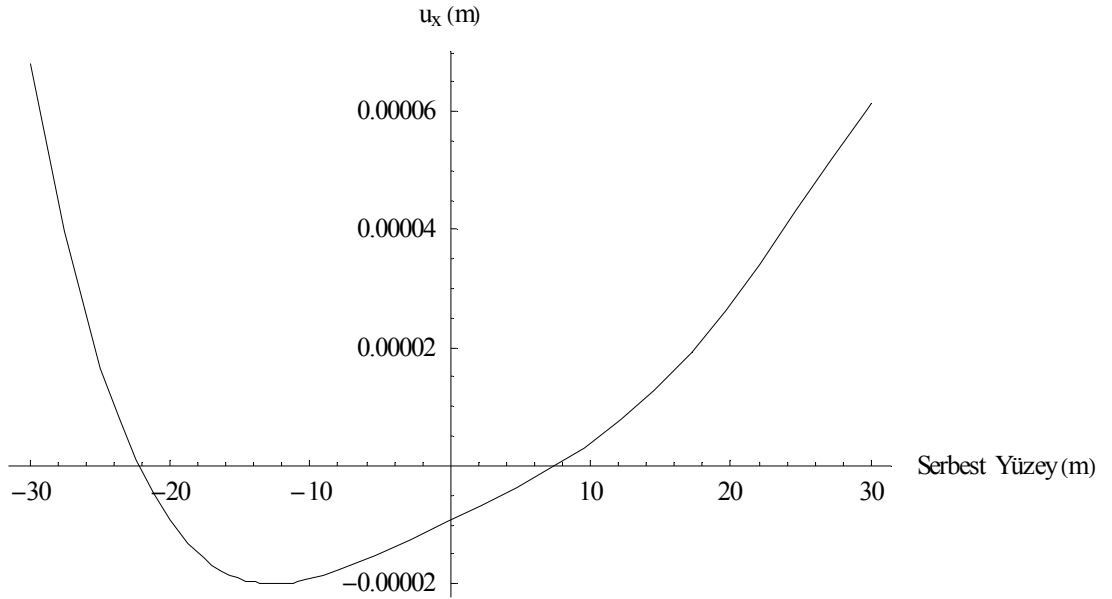
Şekil A.44 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



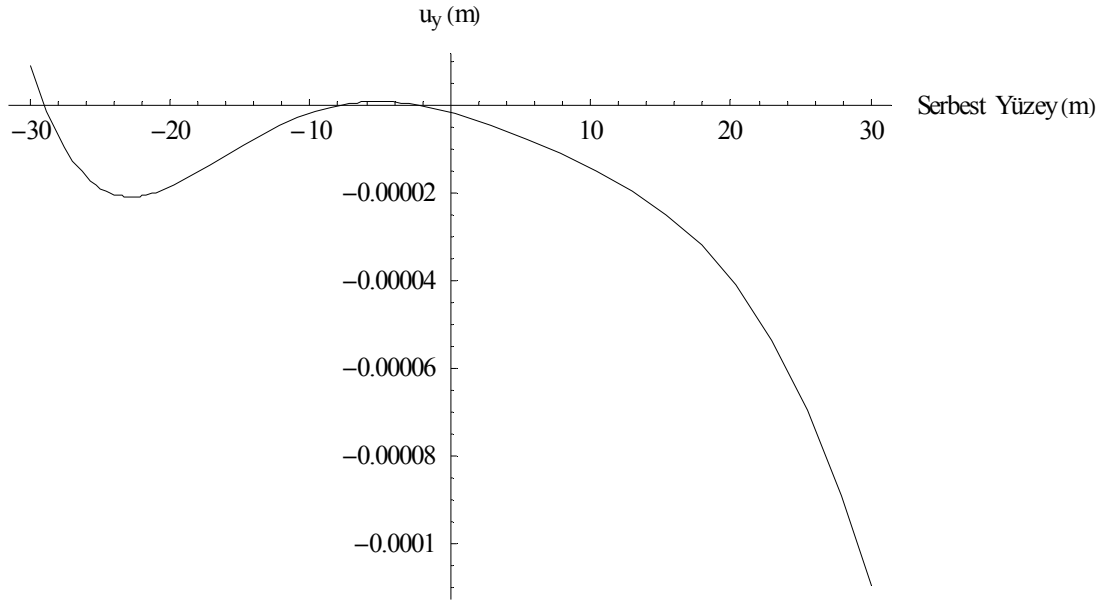
Şekil A.45 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_\theta^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



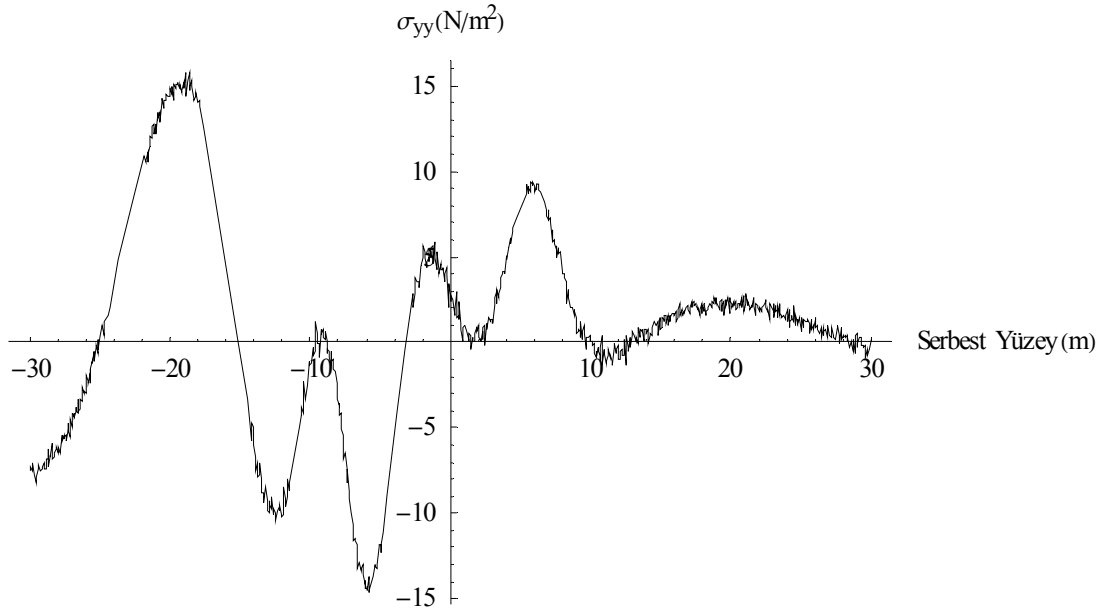
Şekil A.46 $\omega=100$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



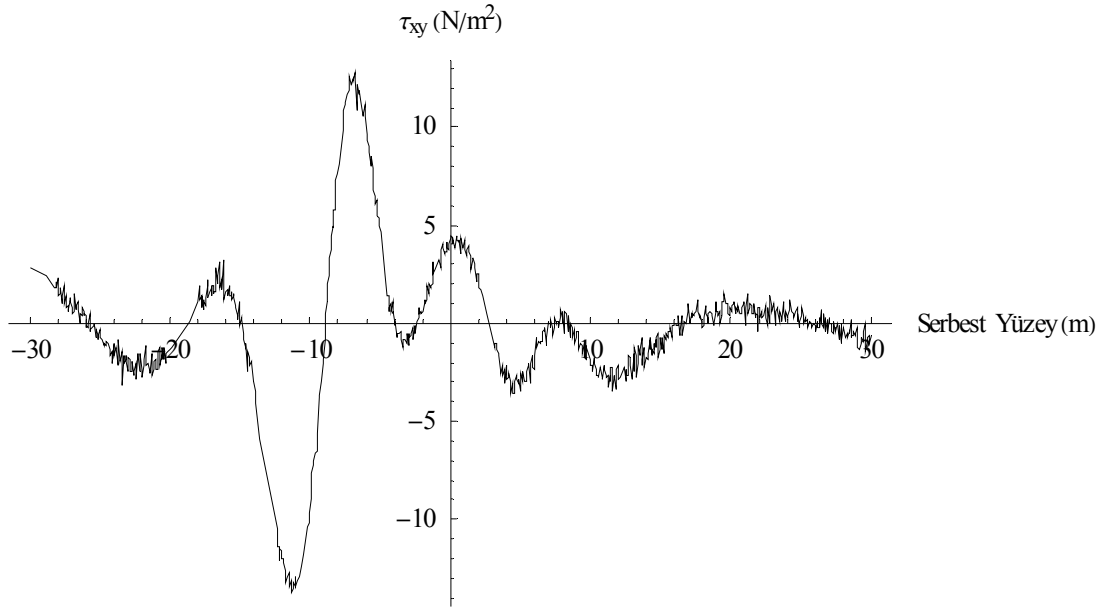
Şekil A.47 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



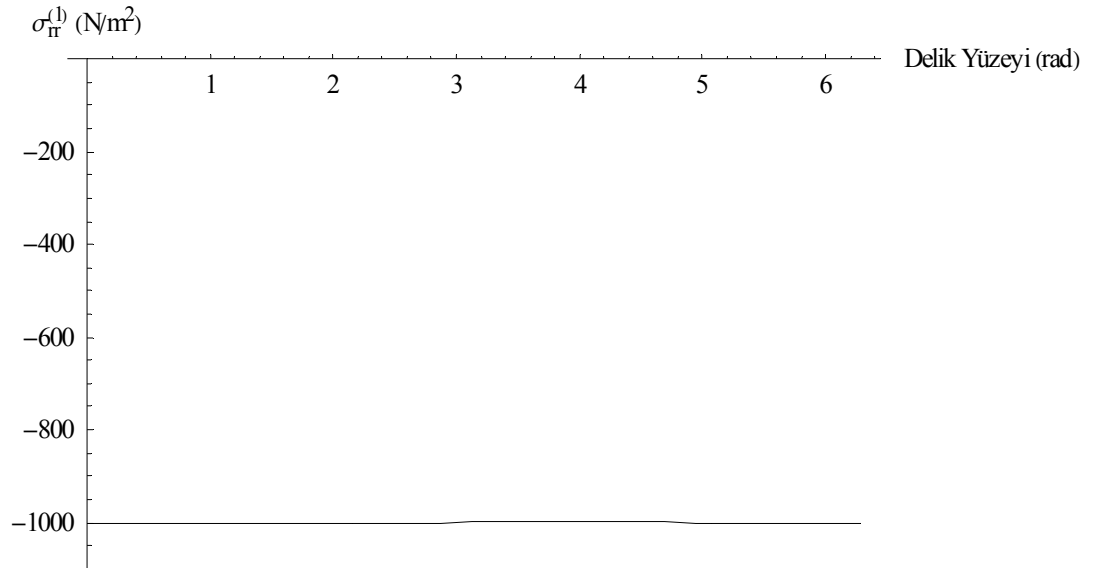
Şekil A.48 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



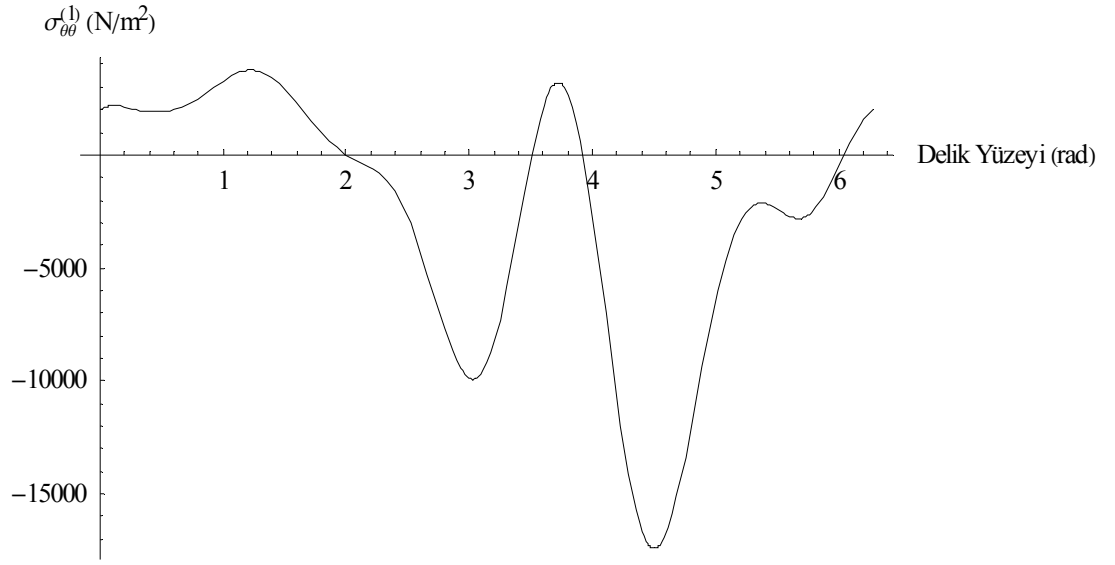
Şekil A.49 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki σ_{yy} normal gerilmesinin değişimi



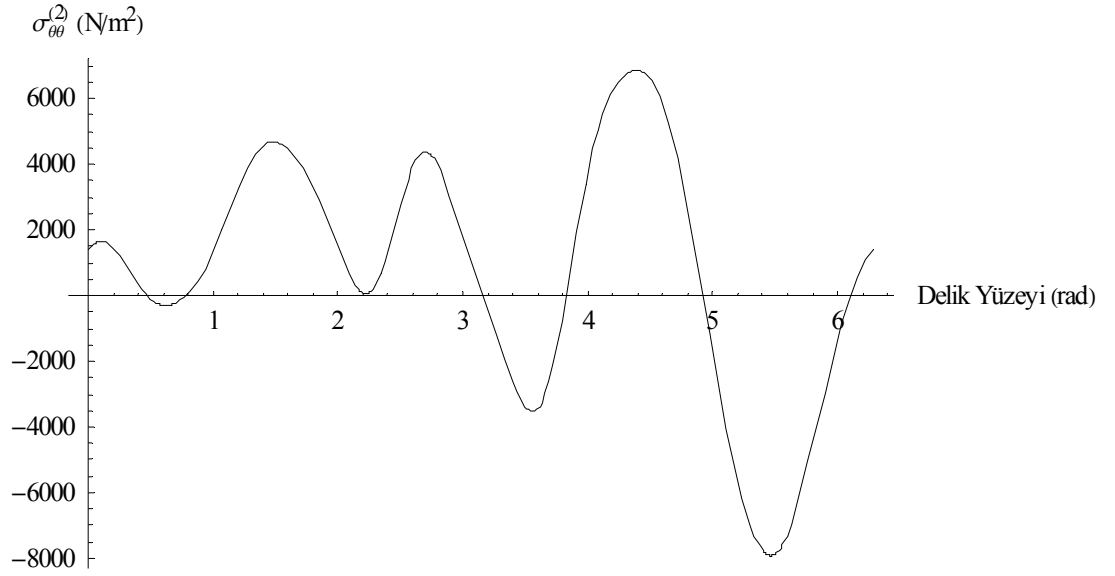
Şekil A.50 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



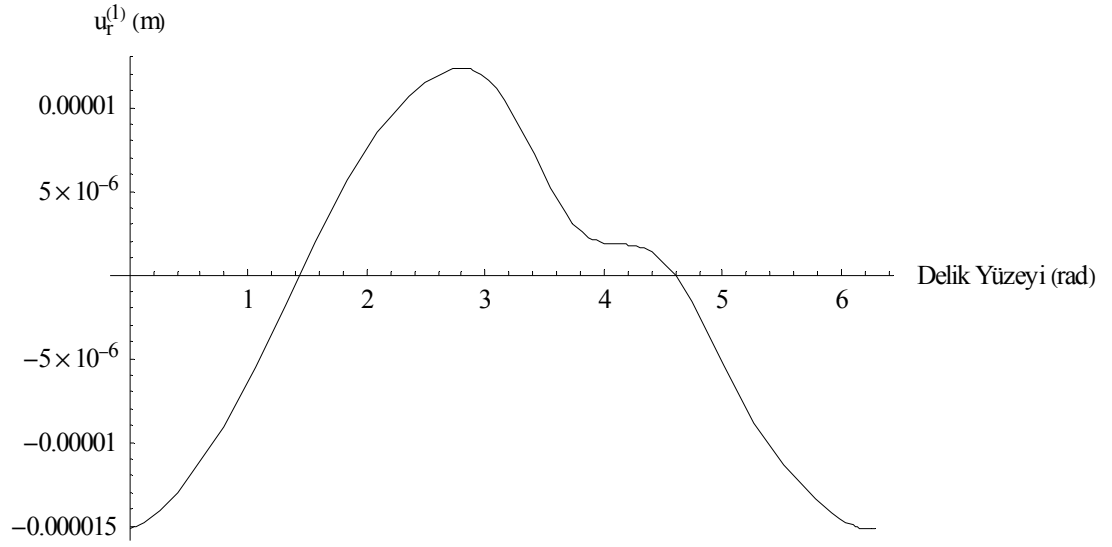
Şekil A.51 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{rr}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



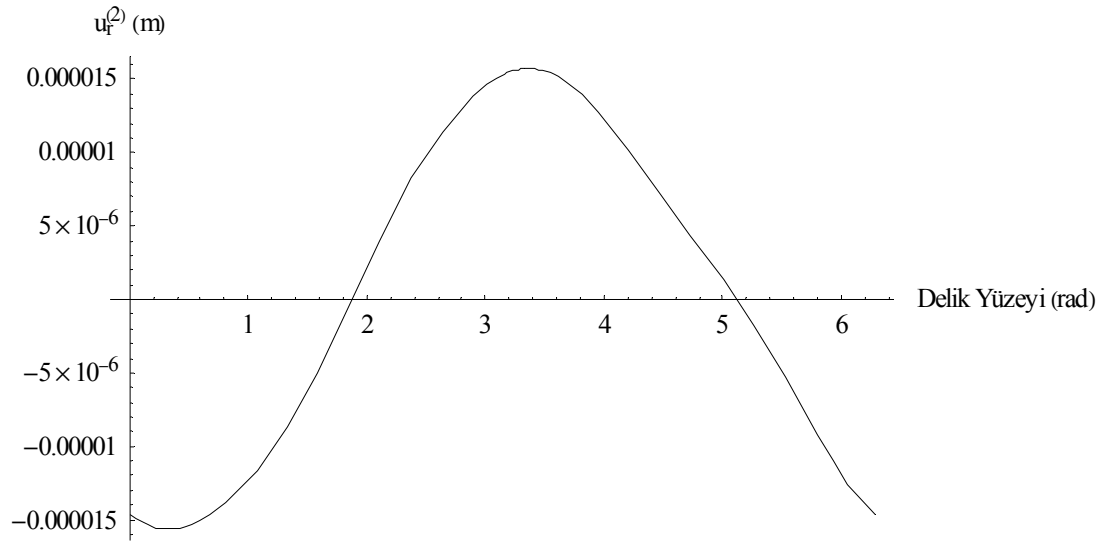
Şekil A.52 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ gerilmesinin değişimi



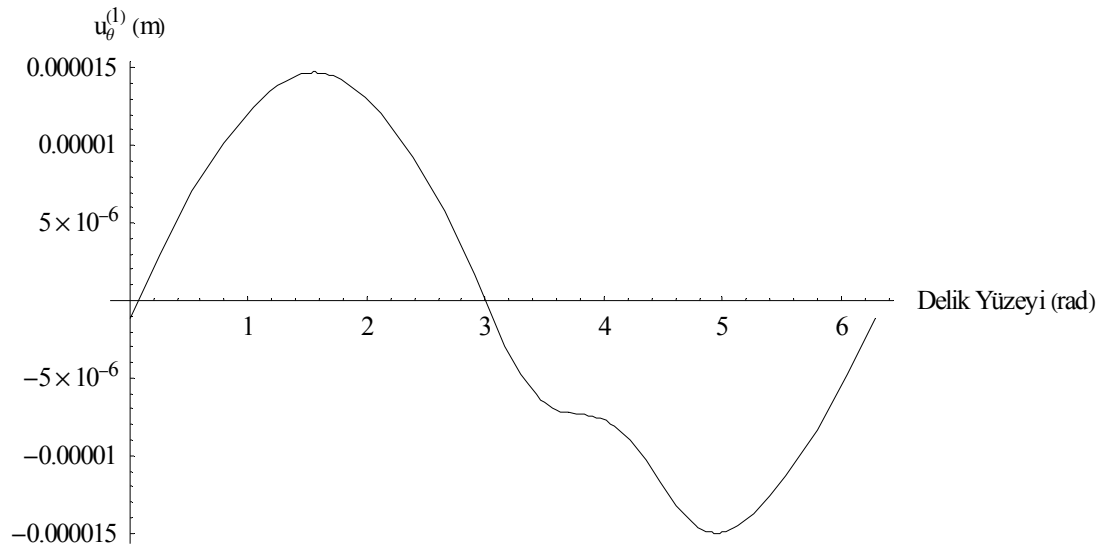
Şekil A.53 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ gerilmesinin değişimi



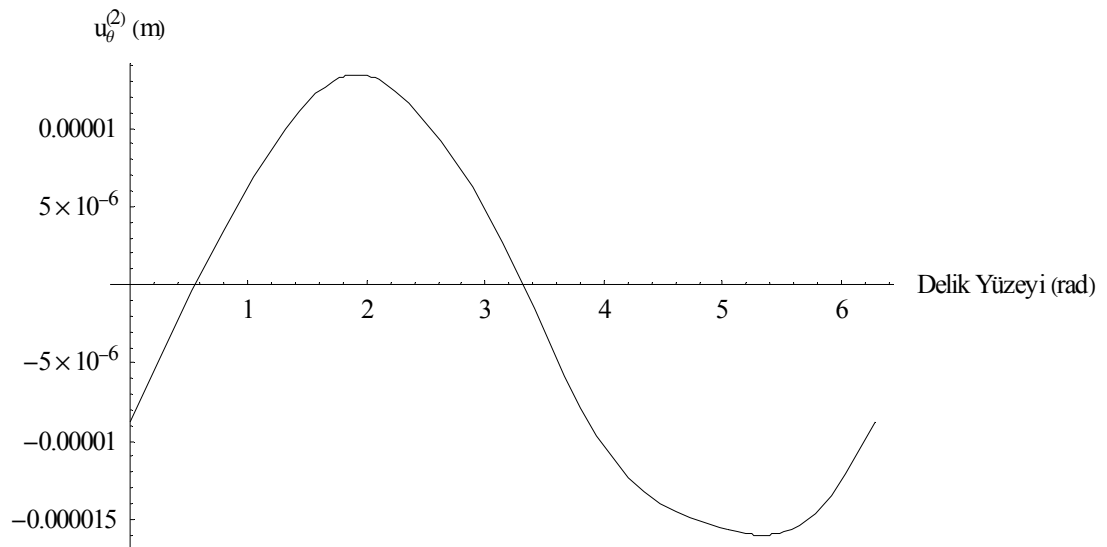
Şekil A.54 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



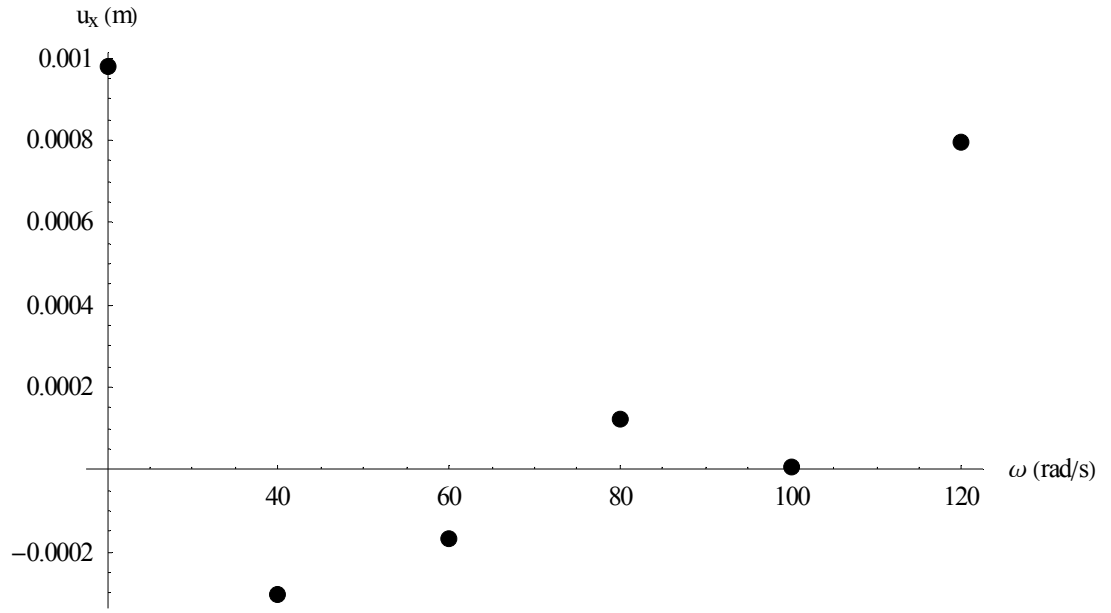
Şekil A.55 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_r^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



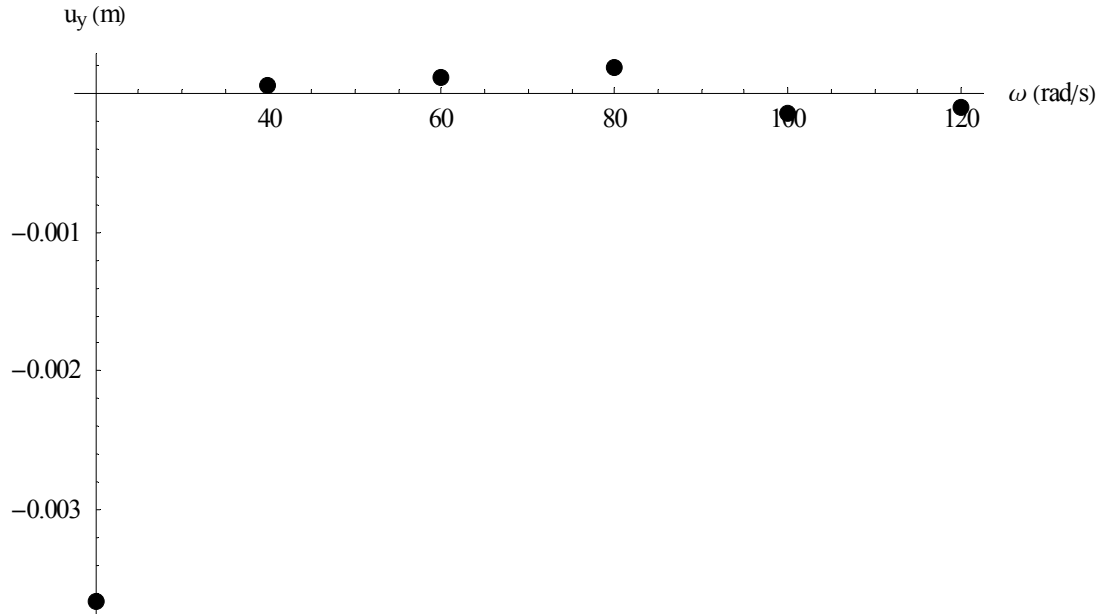
Şekil A.56 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 1.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(1)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



Şekil A.57 $\omega=120$ rad/s, $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için 2.oyuk yüzeyindeki $u_{\theta}^{(2)}$ yerdeğiştirmesinin değişimi



Şekil A.58 $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için $x=0$, $y=10$ noktasında u_x yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi



Şekil A.59 $a_1=5$ m, $a_2=3$ m, $H=10$ m ve $d=10$ m için $x=0$, $y=10$ noktasında u_y yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi

EK B

İNDİRGENMİŞ DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Çarpanlara ayırma yöntemini kullanarak aşağıdaki dalga denkleminin çözümü yapalım.

$$\nabla^2 \varphi + k_1^2 \varphi = 0 \quad (\text{B.1})$$

Yukarıdaki denklemde φ fonksiyonunu

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (\text{B.2})$$

şeklinde çarpanlarına ayıralım. Bu (B.2) ifadesini kutupsal koordinatlardaki Laplasyen ifadesi ile birlikte, (B.1) dalga denkleminde yerine yazarsak ve gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki şekilde değişkenlerine ayrılmış olur.

$$\frac{1}{R} \left[r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right] + (k_1 r)^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (\text{B.3})$$

Yukarıdaki (B.3) eşitliğinin sağ tarafının sadece θ ' ya bağlı sol tarafının ise sadece r ' ye bağlı olduğu görülür. r ve θ bağımsız değişkenler olduğundan, bunlar birbirlerine bağlı değildirler ve (B.3) eşitliği ancak her iki taraf da aynı değışmeze eşit olduğunda geçerli olabilir. Bu değışmezi γ^2 olarak seçelim, böylece (B.3) ifadesinden

$$\frac{1}{R} \left[r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right] + (k_1 r)^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \gamma^2 \quad (\text{B.4})$$

yazılabilir. Sağ taraftaki denklemde gerekli düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \gamma^2 \Theta = 0 \quad (\text{B.5})$$

homogen, sabit katsayılı, adi türevli lineer diferansiyel denklemi elde edilmiş olup, bu denkleminin çözümü

$$\Theta = A_1 e^{i\gamma\theta} + B_1 e^{-i\gamma\theta} \quad (\text{B.6})$$

şeklindedir. $r = r_1$ gibi bir sabit değer için φ fonksiyonu

$$\varphi = R(r_1) \cdot \Theta(\theta) \quad (\text{B.7})$$

olur. r_1 ' i sabit tutarak θ açısını 2π kadar arttıırırsak aynı nokta için aynı φ değerini bulmamız gerekir, yani

$$R(r_1) \cdot \Theta(\theta) = R(r_1) \cdot \Theta(\theta + 2\pi) \quad (\text{B.8})$$

olmalıdır ve buradan

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta + 2n\pi), \quad n = \text{tam sayı} \quad (\text{B.9})$$

olduğu görülür. Θ fonksiyonu 2π peryodlu bir fonksiyon olduğuna göre

$$\Theta = A_1 e^{i\gamma\theta} + B_1 e^{-i\gamma\theta} = A_1 e^{i\gamma(\theta+2\pi)} + B_1 e^{-i\gamma(\theta+2\pi)} \quad (\text{B.10})$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan da

$$e^{i\gamma 2\pi} = 1$$

olması gerektiği görülür. Bu ifadenin gerçekleştirilmesi için

$$\gamma = n = \text{tamsayı}$$

olmalıdır.

(B.4) ifadesindeki, sol taraftaki denklemde gerekli düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{B.11})$$

olarak n . mertebeden Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin de çözümü (n tam sayı olduğuna göre)

$$R = C_1 J_n(k_1 r) + D_1 Y_n(k_1 r) \quad (\text{B.12})$$

olur. Her n sayısı için bu çözüm geçerli olduğundan (B.1) dalga denkleminin genel çözümü

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) \cdot \Theta_n(\theta) \quad (\text{B.13})$$

olarak elde edilir. Bilinenleri yerine yazarsak

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n J_n(k_1 r) + B_n Y_n(k_1 r) \right] e^{in\theta} + \left[C_n J_n(k_1 r) + D_n Y_n(k_1 r) \right] e^{-in\theta} \quad (\text{B.14})$$

sonucu elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Cem SELEK 1980 yılında Konya’ da doğdu. Lise öğrenimini, 1995 – 1997 yılları arasında Konya Özel Diltaş Lisesinde sürdürmüş,1998 yılında Erbil Kuru Lisesinden mezun olmuştur.1998 yılında Y.T.Ü. İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girdi ve 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne kayıt oldu.