

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN
DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş.Müh. Ali Ulaş AKBULUT

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği
Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN

Aralık 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN
DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş.Müh. Ali Ulaş AKBULUT
Enstitü No : 501021436**

**Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği
Programı : Yapı Mühendisliği**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN

Aralık 2005

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesi sırasında karşılaştığım zorlukları aşarken , akademik ve bilimsel tecrübeleriyle bana yol gösteren , zor olanı başarmanın her zaman daha eğitici ve kaliteli olduğunu anlamamı sağlayan çok saygı değer hocam **Prof.Dr.Reha ARTAN** ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım . Doğumumdan bu çalışmayı yaptığım tarihe kadar gücünü ve güvenini hep arkamda hissettiğim , hayatını çalışmaya ve başarmaya adanmış olan , benide sözlerinden çok hareketleriyle bu yola teşvik eden , doktora programına başlayarak akademik hayata atılmam konusunda beni cesaretlendiren , yöneldiğim her türlü sosyal-kültürel alanda bana desteğini veren çok saygı değer babam **Doç.Dr.Mehmet Akbulut** 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım . İstanbul Teknik Üniversitesinde bulunduğum sürece çok şeyler öğrendiğim **Prof.Dr.-İbrahim BAKIRTAŞ** ' a da teşekkürlerimi sunarım . İstanbul'a geldiğim süre zarfında her türlü desteklerini bana veren , beni evimde hissetiren akrabalarım teşekkür ederim . Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca çalıştığım kurumlara , bu konuya gösterdikleri hassasiyet ve özverilerinden dolayı teşekkür ederim .

Ocak 2006

İnş.Müh.Ali Ulaş AKBULUT

içindekiler

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	: $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ Eksen Takımı		6
Şekil 2.2	: Çubukta statik denge		9
Şekil 2.3	: Düzleminde yüklü çubuk için serbest uç		22
Şekil 2.4	: Düzleminde yüklü çubuk için kayıcı mesnet		22
Şekil 2.5	: Düzleminde yüklü çubuk için ankastre mesnet		23
Şekil 2.6	: Düzlemine dik yüklü çubuk için serbest uç		24
Şekil 2.7	: Düzlemine dik yüklü çubuk için kayıcı mesnet		24
Şekil 2.8	: Düzlemine dik yüklü çubuk için sabit mesnet		25
Şekil 2.9	: Düzlemine dik yüklü çubuk için ankastre mesnet		26
Şekil 2.10	: P tekil yükü tesirinde dairesel çubuk		44
Şekil 2.11	: Elastik zemine oturan dairesel çubuk		52
Şekil 2.12	: $U_b - \varphi$ noktasal grafik		58
Şekil 2.14	: $\Omega_n - \varphi$ noktasal grafik		58
Şekil 2.15	: $\Omega_t - \varphi$ noktasal grafik		59
Şekil 2.16	: $M_n - \varphi$ noktasal grafik		59
Şekil 2.17	: $M_t - \varphi$ noktasal grafik		60
Şekil 2.18	: $T_b - \varphi$ noktasal grafik		60
Şekil 2.19	: $U_b - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		62
Şekil 2.20	: $\Omega_n - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		62
Şekil 2.21	: $\Omega_t - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		63
Şekil 2.22	: $M_n - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		63
Şekil 2.23	: $M_t - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		64
Şekil 2.24	: $T_b - \varphi$ fonksiyon , nokta uyumu		64

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{t}$	: Teğet Birim Vektör
$\vec{n}$	: Esas Normal Birim Vektör
$\vec{b}$	: Binormal Birim Vektör
$\vec{r}$	: Yer Vektörü
s	: Yay parçasının uzunluğu
χ	: Eğrilik
$\vec{T}$	: Kesme Kuvveti
T_{tt}, T_{nn}, T_{bb}	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Kesme Kuvvetleri
$\vec{M}$	: Moment
M_{tt}	: $\vec{t}$ Burulma Momenti
M_{nn}	: $\vec{n}$ Eğilme Momenti
M_{bb}	: $\vec{b}$ Eksen Momenti
$\vec{p}$	: Dış Yük
$\vec{m}$	: Dış Moment
$\vec{U}$	: Yer değiştirme
U_{tt}, U_{nn}, U_{bb}	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Doğrultusundaki Yerdeğiştirmeler
$\vec{\Omega}$	: Dönme
$\vec{\Omega}$	: Rölatif Birim Dönme
$\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Etrafındaki Dönmeler
$\vec{\gamma}$	: Rölatif Birim Kayma
S_{tt}, S_{nn}	: Burulma ve Eğilme Rijitlikleri
C_{tt}	: Eksenel Rijitlik
C^{-1}, S^{-1}	: Esneklik Matrisleri
ς	: Burulma Rijitliği / Eğilme Rijitliği
λ	: Eksen Eğriliği
I_n	: Atalet Momenti
I_t	: Atalet Momenti
E	: Elastisite Modülü
G	: Kayma Modülü
P	: Durum Vektörü
I	: Birim Matris
D	: Differansiyel Geçiş Matrisi
F	: Taşıma Matrisi
β	: Skaler Kuvvet Serisi
Ψ	: Skaler Kuvvet Serisi
C_i	: İntegral Sabiti
k	: Winkler Zemin Yatak Katsayısı
ν	: Poisson Oranı
q	: Zemin Tepki Kuvveti

ÖZET

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel kirişlerin analizi Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılarak yapılmıştır . hesaplarda kesme etkisi çok küçük olduğu için ihmal edilmiştir . Yapılan uygulamalarda düzlemine dik yüklü çubuklar incelenmiştir .

Giriş bölümünde problemin önemi , daha önce yapılan çalışmalar ve bu tezin amaçları anlatılmıştır . Tanımlar bölümünde çubuk mukavemetinin esasları anlatılmıştır . Çubuklar için alan denklemleri elde edilmiştir . Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları bulunmuştur . Hooke yasaları incelenmiştir . Bu bölümün sonunda toplu halde çubuk sistemler için bilinmeyen değerler , kullanılacak denklemler özetlenmiştir .

Doğrusal çubuklar kısaca anlatılmış ve çalışmanın temelini düzlemsel çubuklar oluşturduğu için üzerinde fazla durulmamıştır . Düzlemsel çubukların genel denklemleri ve sınır koşulları iki ana başlık altında incelenmiştir . Bunlar düzleminde yüklü düzlemsel çubuklar ve düzlemine dik yükle yüklü çubuklardır . Eğri eksenli düzlemsel çubuklar için genel denklemler gene 2 ana başlık altında elde edilmiştir . Her iki tür yükleme türü için homojen halde yer değiştirmelerin sağlanması gerekli differansiyel denklemler bulunmuştur .

Bu differansiyel denklem çözümü için Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılmıştır . Başlangıç Değerleri yönteminin kullanımı ve önemi anlatılmış . Bir sistemin Differansiyel ve İntegral karakterlerinin ne demek olduğu açıklanmıştır . Differansiyel Geçiş Matrisinden Taşıma Matrisine nasıl geçildiği anlatılmıştır . Bu noktada bu çalışmanın da çözüm yöntemi olan Picard Açılımı ve Matrisant İntegral serisi yönteminin nasıl uygulandığı teorik esasları ile birlikte verilmiştir . Bu anlatılanlara örnek teşkil etmesi açısından nümerik bir örnek hem kapalı hem sayısal olarak çözümlere karşılaştırılmıştır.

Dairesel çubuklar gene iki ana başlık altında incelenmiştir . Düzlemine dik yüklü ve düzleminde yüklü eğri eksenli çubukların , eksen eğriliklerinin bir daire gibi sabit olması durumunda ki genel denklemler verilmiştir . Düzlemine dik yüklü çubuklarda yer değiştirme bileşenin sağlanması gerekli differansiyel denklem elde edilmiş ve bunun başlangıç değerleri taşıma matrisi metodu ile nasıl çözüleceği incelenmiştir .

Yapılanlara örnek teşkil etmesi açısından homojen halde P tekil yükü ile yüklü dairesel çubuk , mathematica yazılımında yapılan bir program yardımıyla çözülmüş ve kesit tesirleri elde edilip bunlar problemin kesin çözümüyle karşılaştırılmıştır .

Winkler elastik zemin hipotezi anlatılmış ve elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü dairesel çubuklar için genel denklemler elde edilmiştir . Uygulama olması açısından aynı program ve metotla problem çözülmüş ve kesit tesirleri elde edilmiştir . Çubuk ortasından mesnete kadar olan kısım da 14 parçada ayrı ayrı kesit tesirleri bulunmuş ve grafikleri çizilmiştir . Bu grafiklere en uygun polinom fonksiyonları mathematica yazılımı ile bulunup kesit tesirleri fonksiyonları belirlenmiştir . Bulunan bu fonksiyonlarında grafikleri çizilerek karşılaştırma yapılmıştır .

Sonuçlar bölümünde yapılan çalışma ve nümerik hesap yöntemleriyle ilgili bulunanlar anlatılmış . Yazarın yorumları ve değerlendirmeleri yer almıştır . Çalışma LaTeX tabanlı bir editör olan TexnicCenter programı ile yazılmıştır.

SUMMARY

In this study we try to find out section effects for a *Circular bar on a Elastic Soil* . Bar is so simple and effective structure element . It has two dimensions which assumed so small compare with other dimension . According to this fact , bar is a one dimensional element . A bar occurs with two main parameters . One of them is the *parpendicular-section* and other *bar axis* . In the next step described three unit vector shown Fig.1 .

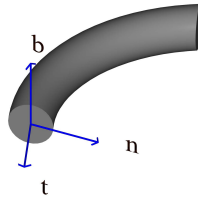


Figure 1: $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ Axes .

- $\vec{t}$ = Tangent Unit Vector
- $\vec{b}$ = Binormal Unit Vector
- $\vec{n}$ = Principal Normal Unit Vector

There are some differential relation ships between these three unit vectors . Serret-Frenet formulation gives like that ;

$$\frac{\vec{t}}{s} = \chi \cdot \vec{n}$$

$$\frac{\vec{n}}{s} = \tau \cdot \vec{b} - \chi \cdot \vec{t}$$

$$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau \cdot \vec{n}$$

$$\chi = \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{((x^1)^2 + (y^1)^2)^{3/2}}$$

Acting on a bar external forces and moments can show with $\vec{p}(s)$ and $\vec{m}(s)$. Result of this all external effects are shown with two function depend

on s . Internal forces can be show that $\vec{T}$ and $\vec{M}$. Internal forces discrete to their componenets in $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ coordinate system ;

$$\vec{T} \cdot \vec{t} = T_t , \text{ Axial Normal Force}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = T_n , \text{ Shear Force on } \vec{n} \text{ axis}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{b} = T_b , \text{ Shear Force on } \vec{b} \text{ axis}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{t} = M_t , \text{ Torsional Moment}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = M_n , \text{ Bending Moment around } \vec{n} \text{ axis}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{b} = M_b , \text{ Bending Moment around } \vec{b} \text{ axis}$$

Search for differantial relation-ships between Internal and External forces draw a bar which staticly in equilibrium like show in Fig.2 .

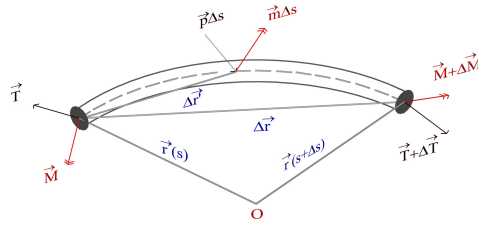


Figure 2: A Bar in Staticly Equilibrium .

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0$$

gives so important equations called are *Field Equations* or *Differential Equilibrium Equations* .

Next step try to answer for question how is a bar strain - deformation relationships under external effects . The vector of $\vec{U}(s)$ describe is motion of gravity center of parpendicular section . $\vec{\Omega}(s)$ show that the rotation around axis which pass from the gravity center . There are some differatial relation with these two vectors because there are describe same parpendicular section motion . Addition to these it has to two unit vector . $\vec{\gamma}$: Relative unit sway and $\vec{\omega}$: Relative unit rotation

as a result of this ;

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{t} \times \vec{\Omega}$$

find out to *Compatibility Equations* .

Another pyhsical relation exist for $\vec{T}$, $\vec{M}$ section effects and $\vec{\gamma}$, $\vec{\omega}$ strain vectors . Material assumed that isotrop and elastic , behavior of bar is linear and Hooke's Law satisfy . If thinking about the behavior ,establish a fuction among rotations with moments and sways with shear .

$$\vec{T} = f'(\vec{\gamma})$$

$$\vec{M} = f''(\vec{\omega})$$

If there are show that indis form ;

$$T_i = C_{ik} \gamma_k$$

$$M_i = D_{ik} \omega_k$$

C_{ik} called is *Shear Rigidity Matrix* because its cooefficients relation with shear force and shear strain , S_{ik} called is *Bending Rigidity Matrix* because its cooefficients relation with benging moments and rotations . If use diadical expression ;

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma} , \vec{M} = \mathbf{S} \cdot \vec{\omega}$$

For some private coordinate systems these matrices will be so simple and useful , For example in $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ coordinate systems ;and also assume that symmetry axis of section overlapping with $\vec{n}, \vec{b}$ plane C , S matrices will be ;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad ve \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix}$$

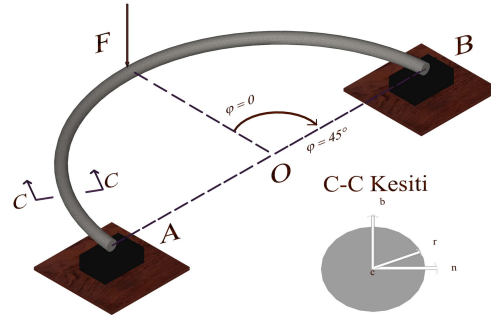


Figure 3: P Singular force acting on Circular Bar in homogenous case .

General equations of loaded perpendicular to plane bars with curve axis like shown in Fig.3;

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t = 0$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b = 0$$

In the case of $\lambda = R$ and homogenous state , differential equation which U_b have to satisfy ;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2\frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0$$

This study based on solution of this differantial equations with Initial Values and Carry-Over Matrix Method . If shortly given meaning of this method , will be ;

$$\begin{aligned} F[t,0] &= I + \int_0^t D(\tau) d\tau + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha \\ &+ \int_0^t D(\zeta) \int_0^\zeta D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha d\zeta + \dots \end{aligned}$$

$$F(t,0) = F(t,t_n) \cdot F(t_n,t_{n-1}) \cdot F(t_{n-1},t_{n-2}) \dots F(t_2,t_1) \cdot F(t_1,\theta)$$

$$F[t] = F[t,0] \cdot F[0]$$

this equation gives solution of Initial Values Problem .

If circular and loaded perpendicular plane bar settlement on elastic soil which Winkler Elastic Soil , simulated by linear springs,general equations will be ;

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t = 0$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda.(q - p) = 0$$

like that . Differential equation which U_b have to satisfy ;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0$$

In this study above differential equation solve by The Initial Values and Carry-Over Matrix Method .

Differential Matrix for this case ;

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix}$$

$$S[\varphi] = F[\varphi].S[0]$$

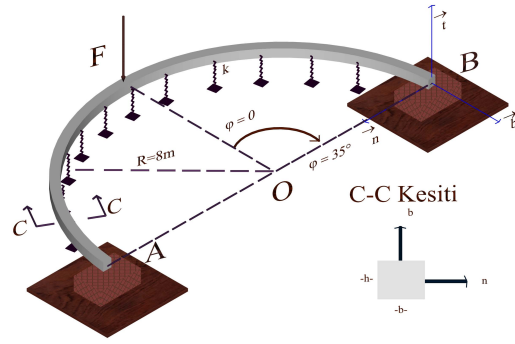


Figure 4: Circular bar on a Elastic Soil .

1.GİRİŞ

1.1 Problemin Tanımlanması

Çubuk en basit taşıyıcı elemandır . İki boyutu , diğer bir boyutu yanında ihmal edilerek sadece tek bir boyut üzerinde hesaplamalar yapılır . Fakat daha kompleks taşıyıcı sistemlerin¹ temelini oluşturduğu için üzerinde yapılan hesaplamalar ve elde edilen sonuçlar her zaman için önemli olmuştur . Uygulamada en çok karşılaşılan çubuk türleri ; *Doğru* ve *Daire Eksenli* çubuklardır . Bunun nedeni ; bu özellikte ki çubuk sistemlerde hesaplamaların daha da kolaylaşması ve uygulamaya yönelik oldukça verimli sonuçlar elde edilmesidir . Bu çalışmada incelenen dairesel eksenli çubuklar uygulamada , silo , su tankı gibi mühendislik yapılarının temel sistemlerini oluşturmada kullanılmaktadır .

Çalışmada incelenen problem , yukarıda tarif edilen daire eksenli bir çubuğun bir zemin sistemiyle etkileşiminde , çubuktaki kesit tesirlerinin ne şekilde ortaya çıktığıdır . Yapı-zemin etkileşmesi mühendislikte her zaman önemli bir konu olmuştur . Farklı özellikli zeminlerde yapıların , yapı temel sistemlerinin davranış özellikleri günümüzde de önemini korumaktadır . Burda problemin çözümünü önemli ölçüde değiştiren zemin özelliğinin nasıl seçildiğidir . Bu çalışmada , uygulamada çok geniş bir kullanımı olan ve teorisindeki basitliğe rağmen pratikte çok iyi sonuçlar vermesi sebebiyle *Winkler Elastik Zemin Hipotezi* kullanılmıştır .

Anahatlarıyla tanımlanan problem için bir çok çözüm metodu bulunmaktadır . Bu mekanik problemi bir differansiyel denkleme indirgenmiştir ve denklemin çözümü için hem analitik hem nümerik bir çok çözüm tarzı vardır . Bu çalışmada differansiyel denklemin kapalı çözümündeki zorluk nümerik bir hesaplama aşılmasına çalışılarak , sonuçların kapalı çözüme yakınsaklığı irdelenmiştir .

Günümüzde elektronik hesap makinalarının ve bilgisayarlarının gelişmesi , mühendislerin ve bilim adamlarının nümerik ve sayısal çözümlemelere olan

¹Plak , Kabuk vb. gibi sistemler.

ilgisini arttırmıştır . Bu çalışmada bu artan ilginin bir ürünüdür . Güçlü bilgisayar programları , saniyeler içinde milyonlarca işlem yapabilen silikon tabanlı mikro işlemciler ile eskiden hesaplaması haftalar , aylar hatta yıllar alan işlemler göz açıp kapayıncaya kadar gerçekleştirilir oldu . Fakat nümerik hesapların her zaman için beklenen sonuçları vermediği bilinen bir gerçektir . Yüzlerce , binlerce , milyonlarca kez tekrarlanan çözüm algoritmaları , binlerce adım da gerçekleşen çözüm işlemleri bazen programın mantığı olan algoritma yapısında bozukluklara yolaçabilir ve hiç beklenmeyen sonuçlara ulaşılabilir . Bu nümerik hesap yapan araştırmacıların çok dikkatli olması gereken bir noktadır . Bunların sonucu olarak yapılan nümerik hesaplamalar her zaman için eğer mevcutsa kesin çözümlerle , eğer mevcut değilse ve kesin çözümü olmayan bir problemle uğraşılyorsa deneyler v.b. gibi olanaklarla sınanmalıdır . Bu anlatılanlar bu çalışmada yapılmıştır .

1.2 Problem Üzerine Yapılmış Çalışmalar

Hetenyi [5] , 1946'da Winkler zemini üzerine oturan taşıyıcı sistemler için kesin çözümleri bulmaya uğraşmıştır . Daha önceden de belirtildiği gibi bu problemin kesin çözümünde bir çok zorlukla karşılaşmaktadır . Buda bilim adamlarını ve mühendisleri nümerik hesaplar yatmaya yönelten bir etkidir . Diğer etken ise bir önceki başlık altında belirtildiği gibi , günümüzde sayısal hesap yapan makineleri ve bilgisayarların çok güçlü hale gelmiş olmasıdır . Buna bir örnek vermek gerekirse Chudnovsky Kardeşler , 1996 ' da , kendi evlerinde yaptıkları bir süper bilgisayarla π sayısının 8 milyarı aşkın basamağını hesaplamayı başarmışlardır . Bunlar gelişen micro işlemci , nano teknoloji ve güçlü algoritmalar kullanan bilgisayarlar sayesinde olmaktadır .

Elastik zeminlere oturan dairesel eksenli çubuklar ise 1952 ' de *Volterra* [6] tarafından yapılmıştır . Volterra eğrili sabit bir yarı çapa eşit olan daire eksenli çubuklar için çeşitli yükleme tipleri altında çözümleri elde etmiştir ve bunları parametrik olarak tablolar halinde vermiştir .

İnan [1-4] 1964 ' de başlangıç değerleri metodu ile daire ekseli çubuklar için taşıma matrisini elde etmiştir . Fakat elastik zemine oturan daire eksenli çubuk olması halinde , 6. dereceden bir differansiyel denklemin karakteristik denkleminin köklerini kapalı olarak bulamadığı için , bu durumun taşıma matrisine ulaşamamıştır . Ama elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için 1966 ' da kapalı bir taşıma matrisi vermiştir .

Kıral ve Ertepinar [8] elastik zemine oturan daire eksenli çubuklara ait genel denklemleri kanonik bir hale indirgeyerek kapalı bir çözüme ulaşmışlardır .

Kadıoğlu [11] elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir .

Artan [7] 1999 ' da düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubuklar için taşıma matrisini kapalı olarak vermiştir .

1.3 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı elastik bir zemin üzerine oturan daire eksenli çubuk için kesit tesirlerini başlangıç değerleri ve taşıma matrisi metodu kullanarak elde etmektir . Bundan yola çıkılarak öncelikle çubuk mukavemeti hakkında teorik esaslar incelenmiş , üç boyutlu çubuklar için gelen denklemler elde edilmiştir . Çözüm için kullanılan yöntem ne olursa olsun baştaki bu mukavemet esaslarını incelemenin uygun olduğu düşünülmüştür . Bu bölümden sonra çubuk türleri incelenerek , bunların arasındaki farkları ve çubuk mukavemetinin esaslarını pekiştirmek amaçlanmıştır . Çalışma düzlemsel çubuklar için olduğundan , doğrusal çubukların üzerinde fazla durulmadan düzlemsel çubuklar anlatılmıştır . Düzlemsel çubuklar daha önce özet kısmında belirtilen her iki yükleme hali için de ayrı ayrı ele alınmıştır . Bunun ötesinde çubuk eksen eğrilğine göre sınıflandırma yapılmış ve bu çalışmanın konusu olan dairesel çubuklar detaylıca incelenmiştir . Çözümlerde çok önemli rol oynayan uç koşulları yada sınır şartları her iki yükleme durumu için detaylıca incelenmiştir . Bunlar yapılırken çalışmanın daha sonra bu konu üzerine çalışmak isteyecek birine her alanda fikir vermesi amaçlanmıştır .

Sonraki bölümde elastik zemin özellikleri hakkında bilgiler verilmiş , uygulamada çok geniş bir yer bulan ve pratikte çok iyi sonuçlar veren winkler zemin simülasyonu anlatılmıştır . Winkler tipi lineer elastik zemin kullanmanın amacı hesap yöntemlerine getirdiği kolaylık ve iyi sonuçlar vermesidir . Ardından elastik bir zemin üzerine oturan çubuk Başlangıç değerleri ve Taşıma matrisi yöntemiyle çözülmüştür . Bu çalışmada başlangıç değerleri kullanmanın amacı problemin hiperstatiklik derecesi ne kadar artarsa artsın , metotun bundan etkilenmeyişi ve hep başlangıçtaki sabitlere bağlı hesap yapılmasıdır . Çalışmanın getirdiği yenilik bu başlangıç değerler metodu içinde kullanılan taşıma matrisi elde edilmiş yöntemindedir . Elastik zemine oturan çubukların taşıma matrisini analitik olarak bulmak çok zor olduğu için çalışmanın amacı nümerik bir hesap yöntemiyle bu taşıma matrisini elde etmektir .Bu nümerik hesap yönteminin temelini Picard Açılımı ve Matrisant İntegral serisi oluşturmaktadır . Çalışmanın amacı çok fazla hesap adımı gerektiren picard açılımı ile taşıma matrisini elde etmek yerine matrisant integral serisi yöntemini kullanarak daha hassas ve iyi sonuç veren taşıma matris-

leri elde etmektir . Bu amaç doğrultusunda mathematica yazılımında yapılan bir program ile bu işlem oldukça kullanışlı bir hale getirilmiş ve elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü dairesel çubuklar için yaklaşık bir taşıma matrisi elde edilmiştir . Elde edilen matris ile çeşitli örneklerde kesit tesirleri bulunmuş ve bunlar literatürdeki sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır . Çalışmanın son aşamasında elastik zemine oturan bir çubuk bu yöntemle çözülüp , uygulamaya yönelik sonuçlarının incelenmesi bakımından kesit tesirleri fonksiyonlarının grafikleri çizilerek irdelenmiştir .

Elastik zemine oturan daire eksenli çubuk için yaklaşık Kesit tesirleri fonksiyonları elde edilmiş ve bunlar grafikler üzerinde yorumlanmıştır .

2.ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL ÇUBUKLAR

2.1 Tanımlar

Bir çubuk , *eksen* ve *dik kesit* adı verilen iki ana elemandan meydana gelir. Çubuk *eksenini* herhangi bir uzay eğrisi teşkil edebilir . Bu eğriyi ;

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

şeklinde bir yer vektörüyle tanımlayalım . Bu uzay eğrisi üzerinde ki herhangi bir B_p ve E_p arası mesafeyi gösteren yay parçasının uzunluğu s kadar olsun . Bu bir eğri boyunca tanımlanacak olursa ;

$$s = \int_c |d\zeta|$$

burada $d\zeta$ ile gösterilen , eğri boyunca olan differansiyel yer değiştirme vektörüdür . Örneğin açıları radyan cinsinden α_1 ve α_2 şeklinde olan r yarı çaplı bir çemberde , iki nokta arasında ki yay parçasının uzunluğunu ;

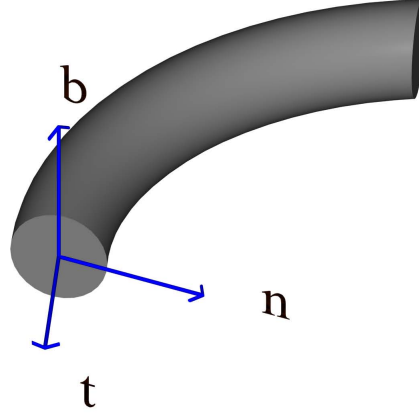
$$s = r \mid \alpha_2 - \alpha_1 \mid$$

şeklinde olur . Bir sonraki adım olarak eksene bağımlı üç birim vektör tarif edilirse ; her üç birim vektör ile $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ifadesiyle betimlenen yer vektörü arasında differansiyel geometrik bağlar söz konusudur . Bu vektörler doğrultuları itibariyle aşağıdaki gibi isimlendirilirler ;

$\vec{t}$ = Teğet Birim Vektör

$\vec{b}$ = Binormal Birim Vektör

$\vec{n}$ = Esas Normal Birim Vektör



Şekil 2.1: $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ Eksen Takımı .

2.1.1. Serret-Frenet Formülleri

Frenet formülleri teğet , esas normal ve binormal vektörleri aralarındaki ilişkileri vermektedir . Bunları şu şekilde yazılabilir ;

$$\frac{\vec{t}}{s} = \chi \cdot \vec{n} \quad (2.1)$$

$\vec{t} = \frac{dr}{ds}$, $|\vec{t}| = 1$ bağıntıları teğet birim vektör içindir . χ adına *eğrilik* denilen ve sürekli pozitif değer alan bir skalerdir .

$$\chi = \frac{d\phi}{ds}$$

ϕ tanjant açısını , s ise yay parçası uzunluğunu sembolize eder .

$$\chi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(x^1)^2 + (y^1)^2}} ,$$

burada $\frac{d\phi}{dt}$ terimini bulmak için bir takım trigonometri ve türev işleminden faydalanılarak ;

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y^1}{x^1} \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{(x^1)^2} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\sec^2\phi} \frac{d}{dt}(\tan\phi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{(x^1)^2}$$

Buradan gerekli işlemler yapılırsa ;

$$\chi = \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{((x^1)^2 + (y^1)^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\vec{n}}{s} = \tau \vec{b} - \chi \vec{t} \quad (2.2)$$

$\vec{n}$ vektörü teğet vektöre dik olup doğrultusu eğrilik merkezi yönündedir . τ *eğrinin tabii torsiyonu* adı verilen ikinci tür bir eğriliği sembolize eder . Bütün düzlem eğriler için sıfır olmasına karşın , uzay eğrileri için sıfırdan farklıdır . Pozitif yada negatif değerler alabilir .

$$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau \vec{n} \quad (2.3)$$

$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ şeklinde bir kartezyen çarpımdan ibarettir . Frenet formüllerini şu şekilde de yazılabilir ;

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{t} \\ \ddot{\vec{r}} &= \chi \cdot \vec{n} \\ \ddot{\vec{r}} &= \dot{\chi} \cdot \vec{n} + \chi(\tau \vec{b} - \chi \vec{t}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

χ ve τ değeri sabit olan eğrilere *helezon* adı verilir . Her iki eğriliğinde sıfır olanlara ise *doğru* adı verilir . Çubuktan normal düzlemle bir kesit alınırsa kesen düzlemin her iki tarafında kalmak üzere çubukta iki ayrı yüz oluşur . Bir işaret kabülü yapmak istenirse ; Pozitif kesiti dış normali $\vec{t}$ ile aynı yönde olan kesit , diğerini ise negatif kesit olarak düşünülebilir .

2.1.2. Çubukta Statik Analiz

Doğrultuları çubuk ekseninden geçen ve yayılı olan dış kuvvetleri $\vec{p}$ ile gösterilsin . Eğer bu dış kuvvetler çubuk ekseninden geçmez iseler , bir kuvvet çifti tarif ederek çubuk eksenine taşınılabilirler . Bu kuvvet çifti $\vec{m}$ ile gösterilsin . Sonuç olarak çubuğa etkiyen bütün dış kuvvetler $\vec{p}(s)$ ve $\vec{m}(s)$ şeklinde iki adet fonksiyonla belirlenmiş olur . İç kuvvetlere gelinirse ; $\vec{T}$ ile kesite etki eden iç kuvvetlerin vektörel toplamı , $\vec{M}$ ile de bunların ağırlık merkezine taşındığı zaman ortaya çıkan kuvvet çiftini tarif edilsin . Bunlara *kesit tesirleri* adı verilmektedir . Aslında bütün yapılmak istenen s

ile değişkenlik gösteren bu $\vec{T}(\mathbf{s})$ ve $\vec{M}(\mathbf{s})$ fonksiyonlarını hesaplayabilmektir . Bu bahsi geçen kesit tesirlerinin , daha önceden belirtilen ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$) eksen takımındaki koordinatları farklı anlamlar ifade eder .

Kesit Tesirleri bu eksen takımına indirgendiğinde , cisimlerin mukavemetinin de konusu olan basit mukavemet halleri ile karşılaşmak mümkündür . Örnek verilirse ; Eksenel normal kuvvet hali , burulma hali , basit eğilme v.b gibi mukavemet hallerinde çubuk elemana kesit tesirlerinin yalnız bir bileşenin etkidığı düşünülerek problem basitleştirilir ve olayın mühendislik doğası hakkında fikir vermesi beklenir . Bunun yapılmasındaki amaç çok kompleks hesaplamalar gerektiren şekil değiştiren cisimler teorisini basitleştirerek , uygulamalı mekaniğe yönelik sonuçlar elde etmektir .

$$\vec{T}.\vec{t} = T_t , \text{ Eksenel Normal Kuvvet}$$

$$\vec{T}.\vec{n} = T_n , \vec{n} \text{ Eksenine Kesme Kuvveti}$$

$$\vec{T}.\vec{b} = T_b , \vec{b} \text{ Eksenine Kesme Kuvveti}$$

$$\vec{M}.\vec{t} = M_t , \text{ Burulma Momenti}$$

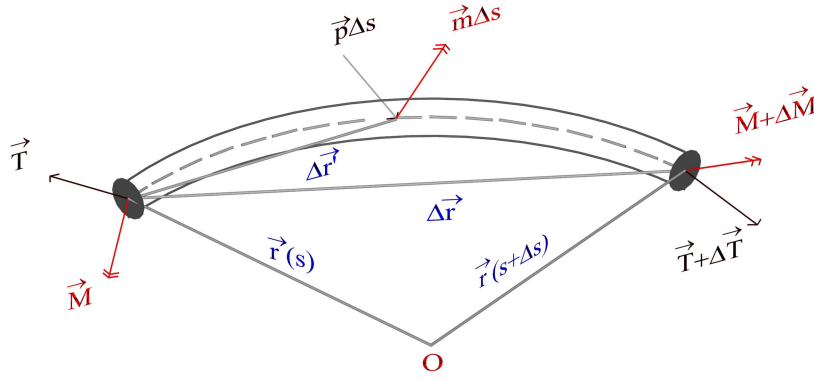
$$\vec{M}.\vec{n} = M_n , \vec{n} \text{ Eksenine Etrafındaki Eğilme Momenti}$$

$$\vec{M}.\vec{b} = M_b , \vec{b} \text{ Eksenine Etrafındaki Eğilme Momenti}$$

Bağıntıları sonucu kesitteki kuvvet ve moment bileşenleri ; T_t , T_n , T_b , M_t ² , M_n , M_b şeklinde toplam 6 tanedir .

Şimdi ise bu $\vec{T}(\mathbf{s})$ ve $\vec{M}(\mathbf{s})$ fonksiyonlarının dış kuvvetlerle olan differansiyel bağıntılarını araştırılsın . Bunu elde edebilmek için Δs uzunluğunda ve dengede olan bir çubuk elemanı oluşturulur ve bunun denge denklemini ile B_p noktasına göre moment denklemi yazılırsa ;

²Not:Burulma Momenti ; M 'nin kesitin ağırlık merkezine etkidığı durum için geçerlidir .



Şekil 2.2: Çubukta Statik Denge .

- $\vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + p\Delta s = 0$, Denge Denklemi
- $\vec{M} + \vec{M} + \Delta\vec{M} + \vec{m}\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0$, B_p ye göre moment
- + $\Delta\vec{T} + p\Delta s = 0$
- + $\Delta\vec{M} + \vec{m}\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0$

Limit teoremi kullanılarak ;

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} + \frac{p \Delta s}{\Delta s} = \\
\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \\
\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta s} + \frac{\vec{m} \Delta s}{\Delta s} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times (\vec{T} + \Delta \vec{T}) = \\
\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \\
\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \tag{2.6}$$

Differansiyel Denge Denklemleri yada *Alan Denklemleri* adı verilen çok önemli iki denklemi elde edilmiş olur . Bu denklemler kurulurken çubuğun şekil değiştirmiş hali göz önüne alınmamıştır . I. Mertebe teorisi esasına göre şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler çok küçüktür .

2.1.3. Çubuğun Şekil Değiştirmesi

Çubuk dış yüklerin etkisiyle şekil değiştirdiği zaman , eksen üzerindeki bir P noktası konumundan uzaklaşarak yeni bir P' noktasına gelir . Bu iki noktayı birbirine bağlayan çizgi bir vektör gibi düşünülürse $\vec{PP'}$ gibi bir yer değiştirme vektörü elde edilir . Buda s ye bağlı bir $\vec{U}$ fonksiyonu ile gösterilirse ;

$$\vec{PP'} = \vec{U}(s) \tag{2.7}$$

gibi bir eşitlik yazılabilir . Bu fonksiyon bellirlendiği zaman eksenin, şekil değiştirmeden sonraki konumu tamamen belli olur . Eğer dik kesitin şekil değiştirmeden sonraki konumuna bakılacak olunursa oldukça karmaşık bir geometrik hal aldığı gözlenir . Bu noktada Bernoulli prensipi ve I.Mertebe teorisi uyarınca şekil değiştirmeden önce düzleme dik olan kesit , şekil değiştirdikten sonrada düzlem kalır . Dik kesitin düzlemsel bir şekilden olan sapmaları ihmal edilecektir . Hatta kesitin bazı noktalardaki yer değiştirmeleri , bir ötelenme

ve dönmeden oluşan rijit levhanın hareketine benzetilebilir . $\vec{U}(s)$ vektörü dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelenmesini , $\vec{\Omega}(s)$ ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösterir . Şiddetlerini çok küçük olarak kabul edilen bu iki vektör aynı cisme ait dik kesitin hareketini tanımladığı için aralarında differansiyel bir bağıntı vardır . Birim uzunlukta bir çubuk elemanı için öncekilerden farklı 2 yeni vektör daha tanımlamak gerekir ; $\vec{\gamma}$: relatif birim kayma , $\vec{\omega}$: relatif birim dönme . Bu son gösterilen iki vektörle öncekiler arasında bir takım differansiyel bağıntılar vardır ;

$$\vec{\gamma} = \left(\frac{d\vec{U}}{ds} \right)_{\vec{\Omega}} \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \quad (2.9)$$

$\vec{U}(s)$ ile $\vec{\Omega}(s)$ arasındaki bağıntı ; Çubuk eksenini üzerinde alınan iki noktanın yer değiştirmelerinin farkı $\Delta\vec{U}$ ile gösterilir . Burada bu iki nokta $\vec{\gamma}\Delta s$ kadar relatif bir farkla hareket eder . İlk noktadan geçen kesit $\vec{\Omega}$ kadar dönünce diğer nokta $\vec{\Omega} \times \Delta r$ kadar döner .

$$\Delta\vec{U} = \vec{\gamma}.\Delta s + \vec{\Omega} \times \Delta\vec{r} \quad (2.10)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{U}}{\Delta s} = \vec{\gamma}.\frac{\Delta s}{\Delta s} + \vec{\Omega} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$$

$$Not: \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{t}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (2.11)$$

ifadesi aranılan bağıntıyı verir . Bu bağıntıya *uygunluk şartı* denilmektedir . Kesit tesirleri bulunurken yapılan kabuller burada da geçerlidir . Sonuç olarak $\vec{U}, \vec{\Omega}, \vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ vektör fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar söz konusudur .

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t} \times \vec{\Omega} + \vec{\gamma} \quad (2.13)$$

γ_t : Birim uzama . γ_n, γ_b : Farklı iki doğrultudaki kaymalar . ω_t : Burulmada ki birim dönme . ω_n, ω_b : n , b Eksenleri etrafında eğilmeler . Yer değiştirme hesaplarında ω 'nın rolü γ 'dan önemli olduğu için ; $\gamma \cong 0$ kabul edilir . Yapılan bu kabül ile kayma ve uzamalar ihmal edilmiş olur .

2.1.4. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Bağlılıları

Bu başlık altında incelenen ; $\vec{T}$, $\vec{M}$ kesit tesirleriyle , $\vec{\gamma}$, $\vec{\omega}$ şekil değiştirme vektörleri arasındaki fiziksel ilişkiyi betimleyen bağıntılardır . Malzeme homojen , izotrop ve elastik kabul edilir , davranış lineerdir ve *Hooke kanunu* geçerlidir . Tanımlarından da anlaşıldığı gibi kesme kuvvetleriyle uzama ve kaymalar , momentlerle de dönmeler ilişkilidir . Bu ilişkiyi bir fonksiyonla gösterilirse ;

$$\vec{T} = f'(\vec{\gamma}) \quad (2.14)$$

$$\vec{M} = f''(\vec{\omega}) \quad (2.15)$$

bu f' ve f'' fonksiyonları birer lineer vektör fonksiyonudur . Buradan vektörlerin koordinatlarının lineer bağımlı olduğu anlaşılır . Seçilen herhangi bir a , b ve c koordinat sistemi için yukarıda bahsi geçen vektörlerin bu koordinat sistemindeki halleri ;

$$T_a = C_{aa}\gamma_a + C_{ab}\gamma_b + C_{ac}\gamma_c$$

$$T_b = C_{ba}\gamma_a + C_{bb}\gamma_b + C_{bc}\gamma_c$$

$$T_c = C_{ca}\gamma_a + C_{cb}\gamma_b + C_{cc}\gamma_c$$

olur . İndissel gösterim kullanarak bu uzun ifadeyi kısaltılırsa ;

$$T_i = C_{ik} \gamma_k \quad (2.16)$$

Benzer şekilde ;

$$M_a = S_{aa} \omega_a + S_{ab} \omega_b + S_{ac} \omega_c$$

$$M_b = S_{ba} \omega_a + S_{bb} \omega_b + S_{bc} \omega_c$$

$$M_c = S_{ca} \omega_a + S_{cb} \omega_b + S_{cc} \omega_c$$

$$M_i = D_{ik} \omega_k \quad (2.17)$$

C_{ik} katsayıları kesme kuvvetleri ve kaymalarla ilişkili olduğundan buna çubuğun *kaymaya karşı rijitliği* , S_{ik} katsayılarına ise çubuğun dönmeye karşı rijitliği olan *eğilme rijitliği* denilebilir . Eğer diyadik gösterim kullanılırsa ;

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma} , \vec{M} = \mathbf{S} \cdot \vec{\omega} \quad (2.18)$$

Bu $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{S}$ tansörleri simetriktir . Yani 9 elemandan oluşan bu tansörlerin belirli olabilmesi için simetriden dolayı 6 büyüklük yeterli olacaktır . Eksen takımının değişimine göre transformasyona uğrarlar . Bazı özel eksen takımlarında oldukça sade ve kullanışlı bir hale gelirler . Örneğin bu çalışmada kabul edilen $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ takımı için bunlar ;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & C_{nb} \\ 0 & C_{bn} & C_{bb} \end{bmatrix} \quad ve \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & S_{nb} \\ 0 & S_{bn} & S_{bb} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

şeklinde olmaktadır . Ortaya çıkan bu sadeleşmenin nedeni ; γ_t eksenel birim uzamasının yalnız T_t eksenel normal kuvvetine , ω_t birim burulma açısının da yalnız M_t burulma momentine bağlı olmasıdır . İşi daha ileri götürüp $\vec{n}, \vec{b}$ takımının kesitin simetri eksenleriyle çakıştığı varsayılırsa ;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad ve \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

şekline gelir . Fakat $\mathbf{S}$ matrisinin diagonal hale gelmesi için kesitte çift simetri olmasına ihtiyaç yoktur . Bir eksen $\vec{t}$ diğerleride $\vec{\zeta}, \vec{\xi}$ *asal eksenleri* olduğu zaman;

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\xi\xi} \end{bmatrix}$$

olur . Burada S_{tt} : Burulma rijitliği , $S_{\zeta\zeta}$ ve $S_{\xi\xi}$ Asal Eğilme Rijitlikleridir . $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{S}$ tansörlerinin determinantları sıfırdan farklı olduğu için tersleri vardır denilebilir .

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T} , \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M} \quad (2.21)$$

Burada , C^{-1} , S^{-1} *Esneklilik tansörleri* olarak adlandırılır .

2.1.5. Aranan Kesit Değerleri ve Kullanılan Denklemler

BİLİNMEYENLER ;

Kesit Tesirleri

$\vec{T}$ (Kesme Kuvveti Tesiri) , $\vec{M}$ (Moment Tesiri)

Yer değiştirme vektörleri

$\vec{U}$ (Ötelenme Bileşenleri) , $\vec{\Omega}$ (Dönme Bileşenleri)

Şekil Değiştirme Vektörleri

$\vec{\gamma}$ (Birim Kaymalar) , $\vec{\omega}$ (Birim Dönmeler)

DENKLEMLER;

Denge Denklemleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 , \text{ (Kuvvet Denge Denklemi)}$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 , \text{ (Moment Denge Denklemi)}$$

Uygunluk Denklemleri

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma}$$

Hooke Kanunları

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T} , \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M}$$

2.2 Doğru Eksenli Çubuklar

Bir doğrunun yada doğru parçasının *eğiriliği* (χ) ve *tabii torsiyonu* (τ) sıfırdır . Böylelikle [2.1] denkleminde , *teğet birim vektör* ($\vec{t}$) sabit bir vektör olur . $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ vektörleri ise , Serret - Frenet bağıntılarından kolayca görüleceği gibi [2.2] , [2.3] , anlamını yitirir . Bu sebeplerden ötürü *doğru eksenli çubuklar* , hareketli $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ takımı yerine sabit bir koordinat eksenine yerleştirilir . Örneğin , çubuk eksenini gösteren bir z eksen ve düzlem üzerinde seçilen x ve y eksenleri sabit bir koordinat üçlüsüdür . Çubuk en kesiti , yani düzlemi sabit olduğunda bahsi geçen x , y eksenleri asal eksen takımı olarak seçilmez iseler ; dik kesitin asal eksen takımı ξ , ζ ve bunlarla herhangi bir x , y eksen takımı arasındaki açı φ ise , $\varphi = \varphi(s)$ şeklinde bir fonksiyonla , dik kesitin eksene göre tanımı yapılması gerekir . Formüllerde kolaylık sağlamak açısından x , y eksenlerinin asal eksen takımı olarak seçilmelerinde fayda vardır . Daha önceden çıkarılan denge denklemlerinde s yerine z , $\vec{t}$ yerine de $\vec{k}$ olarak z eksenini doğrultusundaki birim vektörü tanımlanırsa doğru eksenli çubuklar için alan denklemleri bulunmuş olur .

Alan Denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{dz} + \vec{p} &= 0 \\ \frac{d\vec{M}}{dz} + \vec{k} \times \vec{T} + \vec{m} &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

Uygunluk Denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\Omega}}{dz} - \vec{\omega} &= 0 \\ \frac{d\vec{U}}{dz} = \vec{k} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma}\end{aligned}\tag{2.23}$$

Hooke Kanunları

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma} \\ \vec{M} &= \mathbf{S} \cdot \vec{\omega}\end{aligned}\tag{2.24}$$

haline gelir . Eğer istenilirse bu vektörel denklemlerin skaler halleride yazılabilir ve çubukların eksenel normal kuvvet altında eğilmelerinden bağımsız olarak burulma , kesme etkisi olmadan eğilme , kesmeli eğilme , eksenel normal kuvvetin eğilmeye etkisi , eğilmeyi etkileyen bütün tesirleri içine alan bir elastik zemine oturan çubuk gibi mukavemet konuları incelenebilir .

2.3 Düzlemsel Çubuklar

Daha önceden tanımlanan *çubuk eksen*i eğer bir düzlem içinde yer alıyorsa böyle çubuklara *düzlemsel çubuklar* denir . Frenet formülleri , düzlemsel çubuklarda *tabi torsiyon* $\tau = 0$ ve *binormal vektör* $\vec{b} =$ sabit olmaktadır .

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0$$

Denge denkleminde $ds = \lambda d\varphi$ olarak alınsın . Bu vektörel Denge denklemi $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ takımında skaler olarak yazılırsa ;

$$\begin{aligned} \frac{dT_t}{d\varphi} - T_n + \lambda p_t &= 0 \\ \frac{dT_n}{d\varphi} + T_t + \lambda p_n &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \dots\dots\text{vektörel moment denkleminde}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\ \frac{dM_b}{d\varphi} + \lambda T_n + \lambda m_b &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinde 6 adet skaler denklem elde edilir . Uygunluk denklemlerinde ise ;

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \dots\dots\dots\text{vektörel dönme denkleminde}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\omega_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda\omega_b &= 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma}$ vektörel şekil değıştirme denkleminde

$$\begin{aligned}
\frac{dU_t}{d\varphi} - U_n - \lambda\gamma_t &= 0 \\
\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda\Omega_b - \lambda\gamma_n &= 0 \\
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n - \lambda\gamma_b &= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Böylelikle aranan dört $\vec{T}$, $\vec{M}$, $\vec{U}$, $\vec{\Omega}$ vektörün $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ eksen takımındaki koordinatları elde edilmiş olur .

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T} , \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M} \tag{2.29}$$

Hooke kanunları bu 12 denklemde yerine konulursa bilinmeyen sayısı 18'den 12'ye düşer ($\vec{M}_t, \vec{M}_n, \vec{M}_b, \vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{T}_b, \vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n, \vec{\Omega}_b$) . Yapılacak bir takım kabüllerle , bu denklem sisteminde sadeleştirmeler ve sistemi , 2 farklı problemin çözümü haline getirmek mümkündür . Çubuk eksenin içinde yer aldığı düzlemin iki tane simetri ekseni olduğu ve dik kesit adı verilen düzlemi tarif eden $\vec{n}$, $\vec{b}$ takımı ile her kesitte çakıştığı kabul edilsin . Bu kabul **S** rijitlik tansörünü sadece diagonal elemanlardan oluşan bir hale getirir . Şekil değıştirmelerle ilgili olarak ise Kesme ve Normal kuvvetlerin etkisini momentler yanında çok küçük kabul edilir ve

$$\vec{\gamma} = 0$$

olarak alınır ;

$$\omega_t = \frac{M_t}{S_{tt}} , \omega_n = \frac{M_n}{S_{nn}} , \omega_b = \frac{M_b}{S_{bb}} \tag{2.30}$$

elde edilir . Bunlar *Uygunluk Denklemlerinde* yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda \frac{M_b}{S_{bb}} &= 0 \\
\frac{dU_t}{d\phi} - U_n &= 0 \\
\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda \Omega_b &= 0 \\
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda \Omega_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

bağıntıları elde edilir . $\vec{U}_t$, $\vec{U}_n$, $\vec{\Omega}_b$, $\vec{T}_t$, $\vec{T}_n$, $\vec{M}_b$ fonksiyonlarını diğer bir grup olan ; $\vec{U}_b$, $\vec{\Omega}_t$, $\vec{\Omega}_n$, $\vec{T}_b$, $\vec{M}_t$, $\vec{M}_n$ kesit fonksiyonlarından ayırmak ve [2.25] , [2.26] , [2.27] , [2.28] , [2.31] bağıntılarından görüldüğü gibi her iki fonksiyon grubunu farklı iki denklem takımının çözümüne indirgemek olasıdır . İlk gruptaki $\vec{T}_t$, $\vec{T}_n$, $\vec{M}_b$ kuvvet ve kuvvet çifti büyüklüklerinin hepsi çubuk eksenin bulunduğu düzlemde , $\vec{U}_t$, $\vec{U}_n$, $\vec{\Omega}_n$ ise aynı düzlem içindeki şekil değiştirmelerdir . Dış kuvvet bileşenleri olan p_t , p_n , m_b bu düzleme etkir.

Sonuç olarak birinci grupta dış ve iç kuvvetler *çubuk düzlemi içindedir*. Diğer gruptaki $\vec{T}_b$, $\vec{M}_t$, $\vec{M}_n$ kuvvet ve kuvvet çifti büyüklükleri çubuğa dik olarak ortaya çıkarlar . $\vec{U}_b$, $\vec{\Omega}_t$, $\vec{\Omega}_n$ yer değiştirme ve şekil değiştirme büyüklükleri aynı düzleme dik olurlar . Dış etkiler olan p_b , m_t , m_n büyüklükleri de çubuğa dik olarak etki etmektedirler . İlk gruba benzer olarak , ikinci gruptaki etki ve sonuçlarda *çubuk düzlemine dik olmaktadır*. Sıradaki bölümde , *Eğri Eksenli Çubuklar* iki ana kategoriye ayrılarak incelenmiştir .

2.3.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Bu tip çubuklar için aranan kesit tesirleri ; T_t , T_n , M_b , yerğiştirme ve dönmeler ise ; U_t , U_n , Ω_b olmak üzere 6 adet bilinmeyen fonksiyon olarak ortaya çıkar . Bu bilinmeyen fonksiyonlardan birini seçilip , diğerlerini bunun cinsinden yazılarak çözüme aranır³ ;

İlk adımda esas değişken olarak U_t seçilir ve diğer bilinmeyenler bunun cinsinden yazılmaya çalışılır ;

³Bu çözüm [1] nolu kaynak ,sy.119'da bulunabilir .

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\
\Omega_b &= \frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})] \\
M_b &= \frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})]) \\
T_n &= -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} [\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})])] \\
T_t &= \frac{d}{d\varphi} [\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})]))] \\
&+ \frac{dm_b}{d\varphi} - \lambda p_n
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Buradan yok etme metodu kullanılarak ; U_t 'nin sağlamak zorunda olduğu differansiyel denklem ,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} [\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})])]]] \\
&= \frac{d}{d\varphi} \lambda p_n - \lambda p_t - \frac{d^2 m_b}{d\varphi^2} - m_b
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak elde edilir . *Not:Eşitlikler Değişken değiştirme işlemi yapılarak elde edilmiştir* . Bu differansiyel denklemin sağ tarafındaki terimler yük terimleridir . Sol tarafı ise 6.Mertebeden değişken katsayılı bir differansiyel denklemdir . Çubuk üzerinde yayılı yük ve yayılı moment olmadığı durumda , genel denklemlerde geçen yük ve moment terimlerini sıfır yapılır ve homojen hal için bu differansiyel denklem 6 defa integre edilirse ;

$$U_t = \cos \varphi (C_1 + C_2 \tan \varphi + C_3 \tan^2 \varphi + C_4 \tan^3 \varphi + C_5 \tan^4 \varphi + C_6 \tan^5 \varphi) \tag{2.34}$$

denkleme ulaşılır . Diğer bilinmeyen kesit tesirlerinin , yukarıda elde edilen integrasyon sabitlerine bağlı U_t cinsinden ifadeleri yazılırsa , integrasyon sabitlerine bağlı formülasyonları elde edilmiş olur . İncelenen problemin sınır şartları kullanılarak bu integrasyon sabitleri ve bilinmeyen değerler elde edilebilir .

2.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Bu tip bir yükleme altında çubukta oluşan iç kuvvetler ; T_b , M_n , M_t , yerdeğiştirme ve dönmeler ise ; U_b , Ω_n , Ω_t şeklinde olmaktadır . İç kuvvet sembollerinden de anlaşıldığı gibi kesit içerisinde 2 tür moment oluşmaktadır . Bunlar M_n eğilme momenti ve M_t burulma momentidir . Yani çubuk elemanı için bir burulmalı eğilme mukavemet hali söz konusudur . Çözüm ⁴ için ; İlk adımda [2.25] denklemlerinden T_b ifadesi integre edilir ;

$$T_b = C_1 - \int_0^\varphi \lambda p_b d\varphi \quad (2.35)$$

2. adımda, [2.26] denklemlerinden M_n yada M_t ' den herhangi biri yok edilerek , örneğin burada M_n yok edilmiştir ;

$$\frac{d^2 M_t}{d\varphi^2} + M_t = \lambda T_b - \lambda m_n - \frac{d}{d\varphi}(\lambda m_t) \quad (2.36)$$

bağıntısına ulaşılır . Burda da 2 ardışık integrasyon yapılırsa M_t fonksiyonu ϕ ve üç adet integral sabitine bağlı olarak bulunur .

$$M_n = \frac{dM_t}{d\varphi} - \lambda m_t \quad (2.37)$$

[2.31] denklemlerinde Ω_n, Ω_t den herhangi biri yok edilerek , burada Ω_n yok edilmiştir ;

$$\frac{d^2 \Omega_t}{d\phi^2} + \Omega_t = \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} + T_b - \frac{d}{d\varphi}(\lambda \frac{M_t}{S_{tt}}) \quad (2.38)$$

bağıntısı bulunur . Bu bağıntı 2 kere integre edilir ve ;

$$\Omega_t = \Omega_t(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \varphi) \quad (2.39)$$

çözümüne ulaşılır . Burada ki C_1, C_2, C_3 katsayıları daha önce M_t integrasyonundan gelen sabitlerdir . C_4 ve C_5 ise yeni sabitlerdir . Bu çözüm [2.38] denkleminde yerine konulursa ;

$$\Omega_n = \frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} \quad (2.40)$$

elde edilir . Son olarak [2.40] denklemi [2.31] bağıntılarındaki U_b ifadesinde yerine konulursa ;

$$U_b = C_6 \int_0^\varphi \lambda \Omega_n d\phi \quad (2.41)$$

⁴Detaylı çözüm [1] nolu kaynak sy.126'da bulunabilir .

U_b için bu bağıntı elde edilir . C_6 son integrasyon sabitidir . Burada uygulanan metot *Kendi düzleminde yüklere maruz çubukların* çözümündekine benzemekle beraber farklı bir yöntemdir . Orada U_t esas bilinmeyen fonksiyon olarak seçilmekte ve bunun sağlaması gereken 6. dereceden differansiyel denklem araştırılırken diğer bilinmeyenlerin hepsi U_t 'den ardışık türev yoluyla elde edilmektedir . Burada ise esas bilinmeyen olarak T_b fonksiyonu seçilmekte ve bir sabit farkla birinci dereceden bir denklem bulunmaktadır . Diğer bilinmeyen fonksiyonların hesabında , T_b 'den ardışık integrasyon uygulanmaktadır . Fakat bu bahsi geçen düzlemsel çubuğun özel bir hal olarak dairesel bir düzleme sahip olması durumunda U_b 'nin sağlaması gereken gene aynı 6. derece bir differansiyel denklem elde etme yoluyla çözüme gidilebilir . İntegrasyon sabitleri daha önce olduğu gibi yine sınır koşulları aracılığıyla belirlenebilir .

2.4 Düzlemsel Çubuklar için Sınır Koşulları

Sınır koşullarının incelenmesinde daha önceki başlıktaki gibi 2 ana grup ve 4 alt kısım oluşturulmuştur .

2.4.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar için Sınır Koşulları :

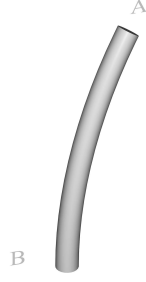
Bahsedeceğimiz dört ana grubu şu şekilde sıralayabiliriz ; *Serbest uç* , *Kayıcı mesnetli uç* , *Sabit mesnetli uç* , *Ankastre mesnetli uç*.

- Serbest uç:Buradaki tüm sınır şartları *Dinamik Tip* sınır şartıdır . Yani sadece kuvvet koşulları mevcuttur .

$$T_t = T_t(B)$$

$$T_n = T_n(B)$$

$$M_b = M_b(B)$$



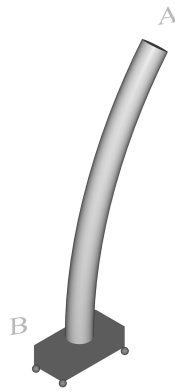
Şekil 2.3: Serbest Uç .

- Kayıcı mesnetli uç: Buradaki sınır şartları hem *Dinamik* hemde *Geometrik Tip* sınır şartı bulundurur . Buna Karışık mesnet koşulları da diyebiliriz .

$$T_n = 0$$

$$M_b = 0$$

$$U_t = 0$$



Şekil 2.4: Kayıcı Mesnetli Uç .

- Sabit mesnetli uç: Burada da Karışık mesnet koşulları ortaya çıkar .

$$M_b = 0$$

$$U_t = 0$$

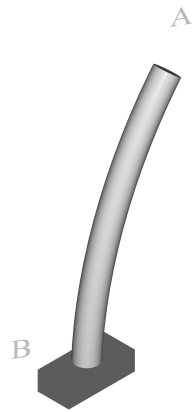
$$U_n = 0$$

- Ankastre mesnetli uç: Burada da sınır şartlarının hepsi *Geometrik Tip-tendir* .

$$U_t = 0$$

$$U_n = 0$$

$$\Omega_b = 0$$



Şekil 2.5: Ankastre Mesnetli Uç .

2.4.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar için Sınır Koşulları

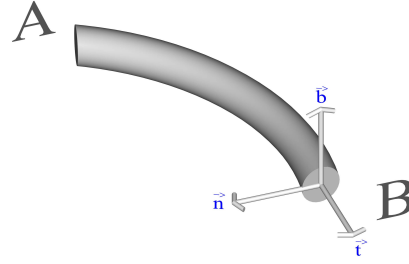
Bu tür çubukların uçlarında yada bağlarında U_b , Ω_t , Ω_n olmak üzere 3 tip hareket serbestisitesi vardır . Mesnetin düzenlenme şekline göre , çubuğun mesnetli ucuna istenilen hareket serbestliği verilebilir .

- Serbest uç : *Dinamik Tip* sınır şartı .

$$M_t = \text{sabit}$$

$$M_n = \text{sabit}$$

$$T_b = \text{sabit}$$



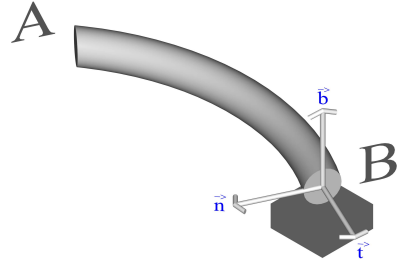
Şekil 2.6: Serbest Uç .

- Sabit mesnetli uç: *Burulmaya* ve *eğilmeye* karşı bir mesnetleme türüdür . Dönmeler serbesttir .

$$U_b = 0$$

$$M_t = 0$$

$$M_n = 0$$



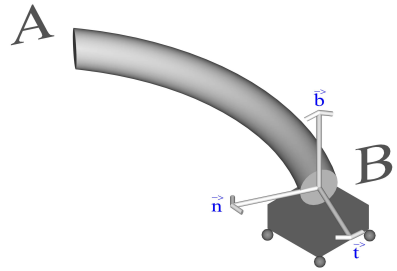
Şekil 2.7: Sabit Mesnetli Uç .

- Yarı Mafsallı Sabit mesnetli uç: Sabit mesnete Ω_n serbestliği verilerek mesnet yalnız eğilme yönünden çalıştırılabilir .

$$U_b = 0$$

$$\Omega_t = 0$$

$$M_n = 0$$



Şekil 2.8: Kayıcı Mesnetli Uç .

- Yarı Ankastre mesnetli uç: Sabit mesnete Ω_t serbestliği verilerek mesnet yalnız burulma yönünden de çalıştırılabilir .

$$U_b = 0$$

$$M_t = 0$$

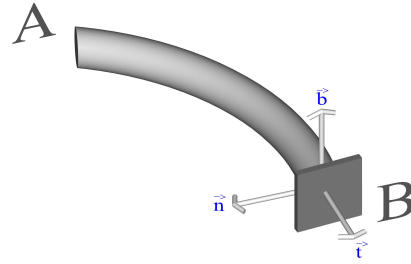
$$\Omega_n = 0$$

- Tam Ankastre mesnetli uç: Sınır şartları *Geometrik Tiptendir* .

$$U_b = 0$$

$$\Omega_t = 0$$

$$\Omega_n = 0$$



Şekil 2.9: Tam Ankastre Mesnetli Uç .

2.5 Dairesel Çubuklar

2.5.1. Düzleminde Eğilen Dairesel Çubuklar

Öncelikle kendi düzlemi içinde yüklere maruz kalan yani burulmasız eğilme halinde olan daireseel çubukları incelenmiştir . Seçilen çubuk eksenin daireselliği , onun denklemleri kolaylaştıracak basit karakterli bir eğri olmasından kaynaklanır . Şimdi r yarıçaplı bir daire üzerinde rastgele seçilen B noktasından keyfi uzaklıktaki bir kesit , φ açısına bağı olarak tanımlansın . Yerdeğiştirme , dönme , moment ve kesme kuvveti vektörel olarak gösterilirse ; $U(\varphi)$, $\Omega(\varphi)$, $M(\varphi)$, $T(\varphi)$ gibi bir hal alır . Bunlar skaler olarak $\vec{U}_b$, $\vec{\Omega}_t$, $\vec{\Omega}_n$ üçlüsündeki bileşenlerine ayrılarak gösterilebilir . Düzlem hal için elde edilen genel denklemler ;

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_t}{d\varphi} - T_n + \lambda p_t &= 0 \\
 \frac{dT_n}{d\varphi} + T_t + \lambda p_n &= 0 \\
 \frac{dM_b}{d\varphi} + \lambda T_n + \lambda m_b &= 0 \\
 \frac{dU_t}{d\varphi} - U_n - \lambda \gamma_t &= 0 \\
 \frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda \Omega_b - \lambda \gamma_n &= 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

olur . Yukarıda bahsedilen r yarıçaplı çember için bunlar düzenlenirse ⁵ p_t , p_n ve m_b ile teonin başından $\gamma_t \cong \gamma_n \cong 0$ olarak kabul edilmiş olan terimler denklemlere katılmaz . λ eğriliği daireseel çubuklar için sabittir ve burada R

⁵Düzenleme *homojen hal içindir* . Çubuk boyunca yayılı durumda olan bir yük yada moment yoktur .

değerine eşittir . $\lambda=R$;

$$\begin{aligned}
\dot{U}_t &= U_n \\
\dot{U}_n &= -U_t + R\Omega_b \\
\dot{\Omega}_b &= \frac{R}{S_b} M_b \\
\dot{M}_b &= -RT_n \\
\dot{T}_n &= -T_t \\
\dot{T}_t &= T_n
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Not: $\dot{y} = \frac{dy}{d\varphi}$, $S_b = E.I_b$ (b eksenine etrafındaki *eğilme rijitliği*)

bu differansiyel denklem takımının çözümü için ⁶ altı skaler fonksiyondan biri esas alınıp diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse ; Burada seçilen esas bilinmeyen fonksiyon U_t ' dir ,

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\
\Omega_b &= \frac{1}{R}U_t + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2} \\
M_b &= \frac{S_b}{R^2} \left(\frac{dU_t}{d\varphi} + \frac{d^3U_t}{d\varphi^3} \right) \\
T_n &= -\frac{S_b}{R^3} \left(\frac{d^2U_t}{d\varphi^2} + \frac{d^4U_t}{d\varphi^4} \right) \\
T_t &= -\frac{S_b}{R^3} \left(\frac{d^3U_t}{d\varphi^3} + \frac{d^5U_t}{d\varphi^5} \right)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

elde edilir . Bu şekilde yok etmeye devam edilirse homogen hal için U_t nin sağlaması gereken differansiyel denklem ;

$$\frac{d^6U_t}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4U_t}{d\varphi^4} + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2} = 0 \tag{2.45}$$

⁶ [1] nolu kaynak sy.77'de bulunabilmir .

olur. Bu yüksek mertebeden lineer homojen differansiyel denklemin çözümü ;

$$U_t = C_1 + C_2\varphi + C_3\sin\varphi + C_4\cos\varphi + C_5\varphi\sin\varphi + C_6\varphi\cos\varphi \quad (2.46)$$

şeklindedir . Buradaki C_j integrasyon sabitleri başlangıç değerleri verildiği zaman hesaplanabilir ve U_t bilinmeyen başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilebilir . Aynı işlem diğer 5 bilinmeyen içinde yapılırsa , tüm bilinmeyenler başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilmiş olur . İntegrasyon sabitlerinin başlangıç değerlerine göre nasıl hesaplanacağı taşıma matrisi konusunda açıklanacaktır .

2.5.2. Düzlemine Dik Kuvvet Etkisinde Dairesel Çubuklar

Öncellikle düzlemine dik yükler etkiyen bir düzlemsel çubuk için genel denklemler belirlenecek olursa ; Burada ki dış kuvvetler p_b, m_t ve m_n şeklinde sıralanabilir . Buradan , aranan iç kuvvetler ; T_t , M_t , M_n , yerdeğiştirme ve dönmeler ; U_b , Ω_t , Ω_n olarak ortaya çıkar . Dış yüklerin mevcut olması ve çubuk eksenin herhangi bir düzlem ile teşkil edilmesi hali için genel denklemler aşağıda verildiği şekildedir ;

$$\begin{aligned} \frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\ \frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Bu genel denklemler eğriliği R olan ve üzerine yayılı yük ya da moment etkimeyen dairesel çubuk için yeniden düzenlenirse⁷ ;

⁷ Homojen Durum

$$\begin{aligned}
\dot{U}_b &= -R.\Omega_n \\
\dot{\Omega}_n &= -\Omega_t + \frac{R}{S_{nn}}M_n \\
\dot{\Omega}_t &= \Omega_n + \frac{R}{S_{tt}}M_t \\
\dot{M}_n &= -M_t + R.T_b \\
\dot{M}_t &= M_n \\
\dot{T}_b &= 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

şeklinde altı adet genel denklem elde edilmiş olur . Şimdi bunun çözümünün nasıl yapılabileceği araştırılsın . Kendi düzleminde yüklü çubukların analizinde yapıldığı gibi bilinmeyenlerden bir tanesi esas alıp , diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse ; Burada bilinmeyen olarak U_b yerdeğiştirmesi alınmıştır,

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= -\frac{1}{R} \frac{dU_b}{d\varphi} \\
\Omega_t &= \frac{1}{R} \left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma} \frac{d^4 U_b}{d\varphi^4} + \frac{2\varsigma+1}{1+\varsigma} \frac{d^2 U_b}{d\varphi^2} \right) \\
M_n &= \frac{S_n}{R^2} \left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma} \right) \left(\frac{d^4 U_b}{d\varphi^4} + \frac{d^2 U_b}{d\varphi^2} \right) \\
M_t &= \frac{S_t}{R^2} \left(\frac{\varsigma}{1+\varsigma} \frac{d^5 U_b}{d\varphi^5} + \frac{2\varsigma+1}{1+\varsigma} \frac{d^3 U_b}{d\varphi^3} + \frac{dU_b}{d\varphi} \right) \\
T_b &= \frac{S_b}{R^3} \left(\frac{d^5 U_b}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 U_b}{d\varphi^3} + \frac{dU_b}{d\varphi} \right)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$Not: \varsigma = \frac{S_t}{S_n}$$

yok etme işlemine devam edilirse , sadece U_b nin sağlaması gereken differansiyel denklem şu şekilde elde ederiz ;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0 \quad (2.50)$$

Bu homojen Differansiyel Denklemin *Başlangıç Değerleri Metodu* ve *Taşıma Matrisi* kullanılarak nasıl çözüleceği ilerleyen başlık altında incelenmiştir .

2.6 Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi

Başlangıç Değerleri Metodu tek değişkenli problemlere uygulanan bir metottur . Amacı sınır değer problemleri başlangıç değer problemlere çevirerek ara şartlardan dolayı girebilecek ek sabit değerlerin önüne geçmek ve problemi başta belirlenen sabitlerle çözebilmektir . Hesapların daha doğru ve düzenli yapılabilmesi bakımından bu metot uygulanırken matris formasyonları kullanmak çok daha iyi sonuç verir . Matris notasyonu kullanıldığı zaman , daha önceden de belirtmiş olduğumuz değişkenin farklı değerleri arasında geçişi sağla-yan ve *Taşıma Matrisi* adı verilen matrisin önemi büyüktür .

Bir sistemin durumunu belirlemek için , onun koordinatlarına ihtiyacımız olduğu açıktır . Bunların sayısı sistemden sisteme farklılıklar gösterir . Genel bir tarif yapmak açısından bu sayı n olarak kabul edilsin .

$$P_1 , P_2 , P_3 , \dots, P_{n-1} , P_n \quad (2.51)$$

Başlangıç Değerleri Metodu'nun bir değişkenli problemlere uygulandığını belirtilmişti . Şimdi bu sistemin durumunu belirleyen P_i koordinatları bir parametreye bağlı olarak gösterilsin . Örneğin bu parametre t zaman parametresi olabilir .

$$P_i[t] , i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (2.52)$$

Sistemin durumunu belirten n tane tek değişkenli fonksiyon vardır . Bu n değişkenli fonksiyonlar bir vektörün koordinatları gibi düşünülüp ;

$$P[t] = \begin{bmatrix} P_1[t] \\ P_2[t] \\ \vdots \\ P_n[t] \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

olarak yazılabilir . Bu vektöre *Durum Vektörü* adı verilir . *Durum Vektörü*'nün koordinatlarını , boyutsuz şekilde oluşturmak gerekir . $P[t]$ vektörünü nasıl belirtmek için ise *Kanonik* (düzgün , düzenli) *tasvir* denilen şekilde tarif oldukça basittir . Buna geçmeden önce yapılması gereken şey *Durum Vektörü*'nün bütün $P_i[t]$ koordinatlarının (fonksiyonlarının) 1.türevlerinin bulunduğunu kabul etmek ve *Durum Vektörü* 'nünkine benzer bir matris notasyonu ile göstermektir . Bu gösterim aşağıdaki gibi bir eşitliği ortaya çıkarır ,

$$\dot{P}[t] = \begin{bmatrix} \dot{P}_1[t] \\ \dot{P}_2[t] \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{P}_n[t] \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Kanonik Tasvir ile yapılmak istenen $P[t]$ ile $\dot{P}[t]$ vektörleri arasındaki ilişkiyi belirtmektir . Yani parametrenin t anındaki değeriyle , $t+dt$ değeri arasındaki değişimi gösterim şeklidir . Fakat bu bağıntı nasıldır ? Lineer mi yoksa lineer olmayan bir bağıntı mı söz konusudur ? Bu soruların cevabı çözüm şeklini büyük ölçüde etkiler . Bu çalışmada bağıntı lineer olarak kabul edilmiştir . Lineerlik kabulü , bu ilişkiyi bir lineer denklem sistemiyle tarif edilmesine olanak verir .

$$\begin{aligned} \dot{P}_1[t] &= d_{11} \times P_1[t] + d_{12} \times P_2[t] + ... + d_{1n} \times P_n[t] \\ \dot{P}_2[t] &= d_{21} \times P_1[t] + d_{22} \times P_2[t] + ... + d_{2n} \times P_n[t] \\ &= \\ \dot{P}_n[t] &= d_{n1} \times P_1[t] + d_{n2} \times P_2[t] + ... + d_{nn} \times P_n[t] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Bu n adet lineer denklem sisteminde bulunan d_{ij} katsayıları P_i koordinatlarından bağımsızdır . Ama t parametresine bağlı olabilirler . Denklem sistemini daha düzenli bir halde gösterilecek olursa ;

$$\dot{P}[t] = D.P[t] \quad (2.56)$$

Bu formülasyonda geçen **D** matrisi kare bir matristir ve *Differansiyel Geçiş Matrisi* olarak nitelendirilir . Bu matris , sistemin yakın durumları arası

geçişte kullanılır .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

[2.56] nolu ifade de türevin tanımından faydalanılarak ,

$$P[t + dt] = P[t] [D.P(t) dt] \quad (2.58)$$

eşitliğine ulaşılır . Bu ifade ile sistemin yakın durumları arasındaki geçişi ifade eden bir denklem kurulmuş olur . Burada $t = 0$ anından herhangi bir t anına sonsuz küçük adımla yani parça parça bir differansiyel geçişle ulaşmak mümkündür. Aynı zamanda bunun yerine tek bir integral geçiş de yapılabilir . Bu bir defada parametrenin $t = 0$ ait değerden t anına ait değere geçişi sağlayan matrisi *Taşıma Matrisi* denilir .

$$P[t] = F[t].P[0] \quad (2.59)$$

P [0] durum vektörü ,

$$P[0] = \begin{bmatrix} P_1[0] \\ P_2[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n[0] \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

şeklinde ifade edilir . Bunlar durum vektörünün başlangıç değerleridir . F(t) ile de bir kare matris olan *Taşıma Matrisi* ,

$$\mathbf{F}[t] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

şeklinde gösterilir . Burdaki f_{ij} değerleri zaman parametresi yerine φ konum değişkenine bağlı fonksiyonlar olabilir . Bir boyutlu sürekli ortamlar için (Çubuk Mukavemeti Problemleri) bu parametre yeri gösteren bir konum

değişkenidir . İlerki hesaplamalarda farklılık olmaması için $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ *Taşıma Matrisi* konum değişkenine bağlı olarak ifade edilirse ,

$$\mathbf{F}[\varphi] = \begin{bmatrix} f_{11}(\varphi) & f_{12}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1n}(\varphi) \\ f_{21}(\varphi) & f_{22}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{2n}(\varphi) \\ f_{31}(\varphi) & f_{32}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{3n}(\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(\varphi) & f_{n2}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn}(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

gösterimini ulaşılır . Şimdi problemin differansiyel karakterini gösteren $\mathbf{D}$ *Differansiyel Geçiş Matrisinden*, problemin integral karakterini gösteren $\mathbf{F}$ *Taşıma Matrisini* nasıl doğrudan elde edileceğini inceleyelim .

2.6.1. Taşıma Matrisinin Hesabı ve Özellikleri

Bir önceki başlık altında [2.59] denklemi ile gösterilen durum matrisinin , başlangıç değerleri ve taşıma matrisine bağlı ifadesi hatırlanacak olursa ;

$$P[t] = F[t].P[0]$$

Burada $F[t]$ matrisini bulmak için bunun sağlaması gereken differansiyel denklem araştırılsın ;

$$\frac{P[t]}{dt} = \frac{F[t]}{dt} \cdot \frac{P[0]}{dt}$$

$$P'[t] = F'[t].P[0]$$

2.56 denkleminde , $P'[t] = D.P[t]$ olduğu hatırlanarak

$$D.P[t] = F'[t].P[0]$$

ifadesinde $P[t]$ yerine [2.59] denklemi konulursa ;

$$D.F[t].P[0] = F'[t].P[0]$$

$$D.F[t].P[0] - F'[t].P[0] = 0$$

$$[D.F[t], -F'[t]].P[0] = 0$$

$$P[0] \neq 0 \text{ ise}$$

$$[D.F(t), -F'(t)] = 0$$

$$F'[t] = D.F[t] \quad (2.63)$$

bağıntısı bulunur . Görüldüğü gibi D matrisi sistemin iki farklı konumu arasındaki differansiyel bağı karakterize etmektedir . Burada D matrisinin bütün elemanlarının sabit olması halinde [2.63] differansiyel denkleminin özel çözümü ;

$$F[t] = F[0] . e^{t.D} \quad (2.64)$$

olur .Burada [2.59] no'lu denklem kullanılırsa ;

$$P[t] = F[t].P[0]$$

t=0 için ;

$$P[0] = F[0] . P[0]$$

denkleminin sağlanması , F[0] matrisinin bir *Birim Matris* olmasına bağlıdır .

$$P[0] = I.P[0]$$

$$F[0] = I$$

$$\mathbf{F}[0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{t.D}$, ye gelinirse ;

$$\begin{aligned}
e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... + \frac{t^n}{n!} + ... \\
e^{A.t} &= 1 + t + \frac{t^2}{2!}.A^2 + \frac{t^3}{3!}.A^3 + \frac{t^4}{4!}.A^4 + ... + \frac{t^n}{n!}.A^n + ... \\
e^{t.D} &= I + t + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + ... + \frac{t^n}{n!}.D^n + ...(2.65)
\end{aligned}$$

burada A sabit bir sayıdır .

$$F[t] = I + t + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + ... + \frac{t^n}{n!}.D^n + ... \quad (2.66)$$

şeklinde bir seri haline gelir . Böylelikle $F[t]$ taşıma matrisi , sonsuz sayıda matris kuvvetlerinin toplamıyla ifade edilmiş oldu . *Cayley-Hamilton Denklemi* adı verilen denklem yardımıyla ;

$$D^n + \beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \beta_{n-3}D^{n-3} + ... + \beta_1D + \beta_0D \quad (2.67)$$

yazılabilir .⁸

Taşıma Matrisi $\mathbf{F}[t]$ sınırlı sayıda matris kuvvetinin toplamına gelir . Bu işlemde matrislerin katsayıları skaler kuvvet serileridir .

$$F[t] = \Psi_0(t).I + \Psi_1(t).D + \Psi_2(t).D^2 + \Psi_3(t).D^3 + ... + \Psi_{n-1}(t).D^{n-1} \quad (2.68)$$

sonunda [2.66] denklemi , [2.68] denklemine dönüşür . Yani $\mathbf{D}$ matrisinin n kadar kuvveti ile , diğer bütün kuvvetlerinin hesaplanabileceği ortaya çıkar . Böylelikle $\mathbf{F}[t]$ *Taşıma Matrisinin* , $\mathbf{D}$ *Differansiyel Geçiş Matrisinden* nasıl doğrudan elde edildiği gösterilmiş oldu . Taşıma Matrisinin bir kaç özelliğini verilirse ;

$$\mathbf{F}[m+n] = \mathbf{F}[m] . \mathbf{F}[n] \quad (2.69)$$

Diğer özellikler bu temel özellikten yola çıkılarak bulunabilir .

⁸ β_j katsayıları $\mathbf{D}$ matrisinin öz değerlerini veren karakteristik denklemin katsayılarıdır . Burada $\mathbf{D}$ matrisi sabit ve n. dereceden kare bir matristir.

$$F[m] = F[m] \cdot F[0] , n = 0 \text{ için}$$

$$F[0] = I \quad (2.70)$$

$$F[0] = F[-n] \cdot F[n] , m = -n \text{ için}$$

$$I = F[n]^{-1} \cdot F[n] \text{ olması gerekir .}$$

$$F[n]^{-1} = F[-n] \text{ olur .} \quad (2.71)$$

$$F[n] \cdot F[m] = F[m] \cdot F[n] \text{ kümütatiftir .} \quad (2.72)$$

2.6.2. Taşıma Matrisinin Hesabına Farklı Bir Yaklaşım

Daha önceki hesaplarda özel bir yaklaşımla **D** matrisini sabit bir matris olarak kabul edip

$$F'[t] = D \cdot F[t]$$

dekleminin çözümü ;

$$F[t] = e^{t \cdot D} \text{ şeklinde bulunmuştu .}$$

Fakat **D** matrisinin elemanları t 'nin fonksiyonları olduğu zaman çözüm bu şekilde olmaz . Bu durum için çeşitli *Taşıma Matrisi* hesap metodları vardır . Bu başlık altında , tez çalışmasının da temelini oluşturan *PICARD İTERASYON* ve *Matrisant* yolunun nasıl kullanıldığı açıklanacaktır . $F(t)$ taşıma matrisinin $F[t]_{n-1}$ gibi bir değeri biliniyorsa onun bir basamak üstü olan $F[t]_n$ değerine geçmek mümkündür .

$$F'(t) = D \cdot F(t)$$

formülünü rekurans formülü olarak alınırsa ,

$$F'[t]_n = D \cdot F[t]_{n-1} \quad (2.73)$$

denklemini elde edilir . $t=0$ için ; $F(0)=I$ olur . Her iki tarafıda integre edilirse ,

$$F[t]_n = I + \int_0^t D(\tau) F[t]_{n-1} d\tau \quad (2.74)$$

denkleminde ulaşılır . Burada $F[0]=I$ alınıp n ile ilişkili ve aşağıda görülen şekilde bir iterasyon uygulanırsa

$$F[0] = I$$

$$F[t]_1 = I + \int_0^t D(\tau) d\tau$$

$$F[t]_2 = I + \int_0^t D(\alpha) [I + \int_0^\alpha D(\tau) d\tau] d\alpha$$

$$F[t]_3 = I + \int_0^t D(\alpha) d\alpha + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$F[t,0] = I + \int_0^t D(\tau) d\tau + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha + \int_0^t D(\zeta) \int_0^\zeta D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha d\zeta + \dots \quad (2.75)$$

Şeklinde bir integral serisi elde edilir . Bu integral serisine *Matrisant* adı verilmektedir . Eğer $\mathbf{D}$ matrisinin elemanları t nin sürekli fonksiyonu olursa , her $\mathbf{D}$ matrisi için bu seri yakınsar . $\mathbf{D}$ matrisi sabit olursa bu seri ;

$$F[t] = I + t.D + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + \dots + \frac{t^n}{n!}.D^n + \dots = e^{t.D}$$

haline gelir . Şimdi *Taşıma Matrisinin* farklı bir özelliğini kullanarak $0-t$ aralığı n eşit parçaya ayrılın ;

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq \dots \leq t_n \leq t$$

Bu durumda ;

$$F_0^t = F_{t_n}^{t_1} \cdot F_{t_{n-1}}^{t_n} \cdot F_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \dots F_0^{t_1} \text{ olur .} \quad (2.76)$$

$$Not: F_{t_i}^{t_j} = I + \int_{t_i}^{t_j} D(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_j} D(\alpha) \int_{t_i}^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha + \dots \quad (2.77)$$

Farklı bir indissel gösterim kullanılarak [2.76] ifadesi

$$F(t,0) = F(t,t_n) \cdot F(t_n,t_{n-1}) \cdot F(t_{n-1},t_{n-2}) \dots F(t_2,t_1) \cdot F(t_1,0) \quad (2.78)$$

şeklinde de yazılabilir .

$$F[t] = F[t,0] \cdot F[0] \quad (2.79)$$

denklemini bize *başlangıç değeri* probleminin çözümünü verir . $F[0] = I$ olduğu bilindiğine göre , *Taşıma Matrisini* hesaplamak için [2.79] ifadesinden $F[t,0]$ 'ın hesaplanması yeterli olacaktır .Yukardaki ifade de $t - 0$ aralığı ne kadar fazla parçaya bölünürse, sonuç o kadar yakınsar . Şimdi bir örnek teşkil etmesi açısından , kesin çözümü belirli olan yani katsayıları sabit olan herhangi bir A matrisinin önce kesin çözümü sonra yaklaşık çözümü elde edilip karşılaştırılacaktır .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Kapalı çözüm ;

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{5} \mathbf{A} \sinh 5t + \mathbf{I} \cosh 5t \\
e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 3/5 \sinh 5t & 4/5 \sinh 5t & 0 & 0 \\ 4/5 \sinh 5t & -3/5 \sinh 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh 5t \\ 0 & 0 & \sinh 5t & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \cosh 5t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh 5t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh 5t \end{bmatrix} \\
t &= \frac{\pi}{6} \text{ konulursa kesin sonuç elde edilir .}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 4.09057 & 5.4541 & 0 & 0 \\ 5.4541 & -4.09057 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.81762 \\ 0 & 0 & 6.81762 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 6.89057 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +6.89057 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.89057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.89057 \end{bmatrix} \\
e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 10.9811 & +5.45413 & 0 & 0 \\ 5.4541 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.89057 & 6.81762 \\ 0 & 0 & 6.81762 & 6.89057 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Şimdi yukarıda bahsedilen yaklaşık metotla çözüm yapılsın . *Not: 0 - t aralığı= 0- $\frac{\pi}{6}$ aralığının 5 parçaya bölünmesi halinde .*

$$F[\frac{\pi}{6}, 0] = F[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{15}] \cdot F[\frac{2\pi}{15}, \frac{\pi}{10}] \cdot F[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{15}] \cdot F[\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{30}] \cdot F[\frac{\pi}{30}, 0]$$

Mathematicada yazılan bir kaç iterasyon algoritması yardımıyla elde edilen

çözüm;

$$F\left[\frac{\pi}{6}, 0\right] = \begin{bmatrix} 10.1219 & 5.0175 & 0 & 0 \\ 5.0175 & 2.59564 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.35877 & 6.27187 \\ 0 & 0 & 6.27187 & 6.35877 \end{bmatrix}$$

olur . Kesin çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki rölatif farkları incelemek için gene mathematica yazılımından faydalanarak ;

$$KM(5) = \begin{bmatrix} 0.07824 & 0.08005 & 0 & 0 \\ 0.08005 & 0.07298 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.07717 & 0.08004 \\ 0 & 0 & 0.08004 & 0.07717 \end{bmatrix}$$

Şeklinde bir farklar matrisi bulunur . Görüldüğü gibi hatalar yüzde birler mertebesinde . Bunun nedeni iterasyon adının az olması yani aralık sayısının yeterli olmayışıdır . Mathematica da yapılan mevcut programlarla aralık sayısını artırarak sonuçları yeniden incelersek ;

Not:KM = Karsilastirma Matrisi

Aralık sayısı 100'e çıkartılırsa ;

$$KM(100) = \begin{bmatrix} 0.000288193 & 0.0002966531 & 0 & 0 \\ 0.0002966536 & 0.0002813132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002896947 & 0.000295921 \\ 0 & 0 & 0.000295929 & 0.0002896945 \end{bmatrix}$$

Hatalar binde birler mertebesine gelir .

Aralık sayısı 1000'e çıkartılırsa ;

$$KM(1000) = \begin{bmatrix} -1.243 * 10^{-6} & 3.265 * 10^{-6} & 0 & 0 \\ 3.265 * 10^{-6} & 3.437 * 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.609 * 10^{-6} & 2.532 * 10^{-6} \\ 0 & 0 & 2.532 * 10^{-6} & 2.609 * 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Hatalar onbinde birler mertebesine gelir .

Son bir iterasyon basamağı olarak Aralık Sayısı 10000'e çıkartılırsa ;

$$KM(10000) = \begin{bmatrix} -4.190 * 10^{-6} & 2.789 * 10^{-7} & 0 & 0 \\ 2.78968 * 10^{-7} & 6.063 * 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.136 * 10^{-7} & -4.544 * 10^{-7} \\ 0 & 0 & -4.544 * 10^{-7} & -3.136 * 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Hataların milyonda birler mertebelerine geldiği görülür ki bu hata seviyesi *Küçük Şekil Değiştirme Teorisi* için oldukça yeterlidir . Teori esaslarını kısaca özetledikten sonra artık *Yaklaşık Taşıma Matrisi* metodunun , kesin sonuçlarla örnekler üzerinde karşılaştırılmasına geçilebilir . Bu çalışmanın özü gereği , örnek olarak *düzlemine dik yükle yüklü dairesel çubuklar* kullanılacaktır .

2.6.3. Yaklaşık Taşıma Matrisi Metodunun Dairesel Çubuklara Uygulanması

Başlangıç olarak merkezinde çubuk düzlemine dik tekil yük bulunan dairesel bir çubuğu incelenecektir . Bu problemin homojen hal için kesin çözümü mevcuttur ⁹ . Buradaki amaç kesin çözümle , ortaya konan yaklaşık yöntemin yakınlığını belirlemektir . Düzlemine dik yükleme durumunda eğer U_b esas bilinmeyen olarak seçilirse homojen hal için U_b 'nin sağlaması gereken differansiyel denklemin ;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0$$

olduğunu bilinmektedir . Bunun C_i integrasyon sabitleri cinsinden çözümü ;

$$U_b = e^{\varphi \cdot t}$$

$$t^6 \cdot e^{\varphi \cdot t} + 2 t^4 \cdot e^{\varphi \cdot t} + t^2 \cdot e^{\varphi \cdot t} = 0$$

$$t^6 + 2 t^4 + t^2 = 0 \text{ (karakteristik denklem)}$$

$$t_1=t_2=0 , t_3=t_4=i , t_5=t_6=-i$$

olur . Karakteristik denklemin altı kökü bulunmuş olur . Bu kökler çift katlı kök olarak ortaya çıkmaktadır . Differansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere çift kat kök olması durumdaki çözüm ;

$$U_b = C_1 \cdot e^{\varphi \cdot 0} + C_2 \cdot \varphi \cdot e^{\varphi \cdot 0} + C_3 \cdot e^{\varphi \cdot i} + C_4 \cdot \varphi \cdot e^{\varphi \cdot i} + C_5 \cdot e^{\varphi \cdot -i} + C_6 \cdot \varphi \cdot e^{\varphi \cdot -i}$$

$$U_b = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + C_5 \varphi \sin \varphi + C_6 \varphi \cos \varphi \quad (2.80)$$

⁹[1] nolu kaynak sy.152'de bulunabilir

olmaktadır . Bilinmeyenlerin arandığı kesitin başlangıç değerlerinin şu şekilde verilmiş olduğu kabul edilsin ;

$$U_b(0), \Omega_n(0), \Omega_t(0), M_n(0), M_t(0), T_b(0)$$

Bu durumda ;

$$U_b(0) = C_1 + C_2 + C_3 \sin 0 + C_4 \cos 0 + C_5 \varphi \sin 0 + C_6 \cos 0$$

$$U_b(0) = C_1 + C_4$$

$$\Omega_n(0) = -\frac{1}{r}(C_2 + C_3)$$

$$\Omega_t(0) = -\frac{1}{r}(C_4 - \frac{2}{1+\varsigma}C_5)$$

$$M_n(0) = -(\frac{2\varsigma}{1+\varsigma})\frac{D_n}{r^2}C_5$$

$$M_t(0) = (\frac{2\varsigma}{1+\varsigma})\frac{D_n}{r^2}(\frac{\varsigma+1}{\varsigma}C_2 + C_6)$$

$$T_b(0) = -\frac{D_t}{r^3}C_2 \quad (2.81)$$

elde edilen denklem sisteminden C_j leri çözersek U_b esas bilinmeyen fonksiyonu ;

$$\begin{aligned} U_b &= U_b(0)f_{11}[\varphi] + \Omega_n(0)f_{12}[\varphi] + \Omega_t(0)f_{13}[\varphi] + M_n(0)f_{14}[\varphi] \\ &+ M_t(0)f_{15}[\varphi] + T_b(0)f_{16}[\varphi] \end{aligned} \quad (2.82)$$

şeklinde elde edilir . Benzer işlemler diğer bilinmeyen değerler içinde yapılırsa

$$\begin{aligned} \Omega_t &= U_b(0)f_{21}[\varphi] + \Omega_n(0)f_{22}[\varphi] + \Omega_t(0)f_{23}[\varphi] + M_n(0)f_{24}[\varphi] \\ &+ M_t(0)f_{25}[\varphi] + T_b(0)f_{26}[\varphi] \end{aligned} \quad (2.83)$$

•

•
•
•

$$\begin{bmatrix} U_b(\varphi) \\ \Omega_n(\varphi) \\ \Omega_t(\varphi) \\ M_n(\varphi) \\ M_t(\varphi) \\ T_b(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b(0) \\ \Omega_n(0) \\ \Omega_t(0) \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Şeklinde genel bir förmülasyon elde edilir . Buradaki matris notasyonu ile anlatılmak istenen herhangi bir kesitteki bilinmeyenlerin bir $F[\varphi]$ matrisi ve *başlangıç değerleri* yardımıyla ifade edilebileceğidir . Bu $F[\varphi]$ matrisinin elemanları , başlangıç değerlerinden bağımsız olup yalnızca φ değişkenine bağlıdır . $F[\varphi]$ matrisi Taşıma Matrisi olarak adlandırılmaktadır . Şimdi anlatılanlara açıklık getirmek ve metodun yakınsaklığını sınamak için bir örnek yapalım .

Örnek 1 :

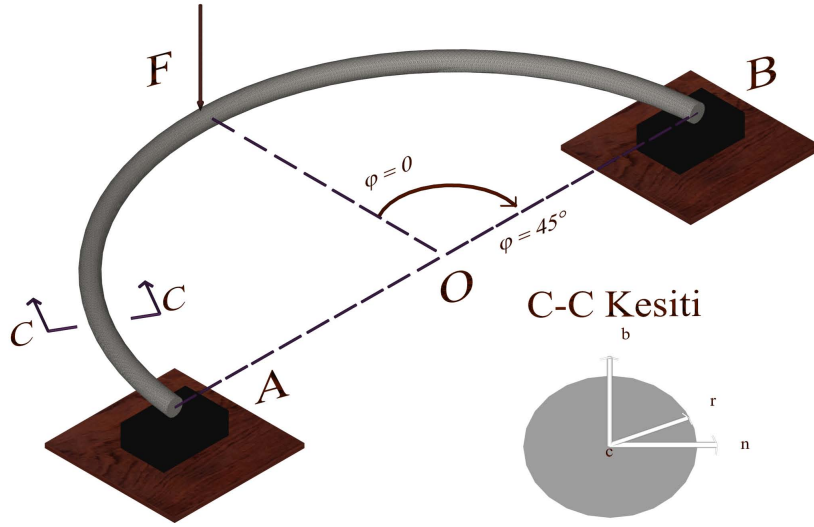
Merkezinde tekil F yükü bulunan dairesel çubuk için sınır şartları ¹⁰;

$$\begin{array}{c|c} \underline{\varphi = 0' da} & \underline{\varphi = \pi/2' de} \\ \hline \Omega_n(0) = 0 & U_b(\pi/2) = 0 \\ \Omega_t(0) = 0 & \Omega_t(\pi/2) = 0 \\ T_b(0) = \frac{P}{2} & \Omega_n(\pi/2) = 0 \end{array}$$

$$P[\varphi] = F[\varphi].P[0]$$

$$P[\pi/2] = F[\pi/2].P[0]$$

¹⁰ Burada başlangıç kesiti, yani $\varphi = 0$ olarak yükün etkideği nokta olan çubuğun tam ortası alınmıştır. Buradan $\varphi = \pi/2$ kadar gidildiğinde çubuk mesneti olan kesite ulaşılır.



Şekil 2.10: P Tekil Yüğü Tesirinde Dairesel Çubuk .

$$\begin{bmatrix} U_b(\pi/2) \\ \Omega_n(\pi/2) \\ \Omega_t(\pi/2) \\ M_n(\pi/2) \\ M_t(\pi/2) \\ T_b(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b(0) \\ \Omega_n(0) \\ \Omega_t(0) \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_n(\pi/2) \\ M_t(\pi/2) \\ T_b(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b(0) \\ 0 \\ 0 \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ F/2 \end{bmatrix}$$

Sıradaki adımda $\mathbf{F}[\pi/2]$ ile gösterilen taşıma matrisi olarak öncellikle Prof.Dr.M.İnan 'nın düzleme dik yerdeğiştirme halindeki dairesel çubuklar

için taşıma matrisi¹¹ kullanılacaktır . İncelenilen kesitin özellikleri ;

Kesit Özellikleri

Dairesel Enkesit

Yarıçap (r) = 1.5m , Çap (D) = 2r = 3m

Eksen Eğriligi (λ) = sabit = R=8m

Kesit Alanı (A) = $\pi \cdot r^2 = 7,06858 \text{ m}^2$

Açısal Frekans (ω) = 0 $\frac{rad}{sn}$

Birim boydaki çubuğun kütlesi (ρ) = 0

Winkler Zemin Yatak Katsayısı (k) = 0

Malzeme Sabitleri

Elastisite Modülü (E) = $3,025.10^6 \frac{t}{m^2}$

Poisson Oram(ν) = 0,3

Kayma Modülü (G) = $E/(2.(1 + \nu)) = 1,16346.10^6 \frac{t}{m^2}$

Rijitlikleri

Atalet Momenti (I_n) = $\frac{\pi.r^4}{4} = 3,97608 \text{ m}^4$

$I_t = \frac{\pi.D^4}{32}$, Not:D=2r , $I_t = 7,95216 \text{ m}^4$

Eksenel Rijitlik (C_{tt}) = E.A = $2,13825.10^7 \text{ t}$

¹¹[2] nolu kaynak sy.87 'de bulunabilir .

$$\text{Eğilme Rijitliği } (S_{nn}) = E.I_n = 1,20276.10^7 \text{ tm}^2$$

$$\text{Burulma Rijitliği } (S_{tt}) = G.I_t = 9,25203.10^6 \text{ tm}^2$$

Not : Tüm hesaplamalar süresince değerlerin gösteriminde virgülden sonra en fazla 7 basamak alınmasına rağmen hesaplarda bu duyarlılık 14 basamağa kadar çıkmaktadır . Ayrıca $A_b(0) = A_{b0}$ ve $A_b(\pi/2) = A_{b\pi/2}$ şeklinde gösterilmektedir .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{n\pi/2} \\ M_{t\pi/2} \\ T_{b\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 8 & -2,6946810^{-6} & 6,11924.10^{-6} & -1,7366510^{-5} \\ 0 & 0 & -1 & -9,97702.10^{-8} & -1,20151.10^{-6} & 2,69468.10^{-6} \\ 0 & 1 & 0 & 1,20151.10^{-6} & 9,97702.10^{-18} & 6,11924.10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_{b0} \\ 0 \\ 0 \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ F/2 \end{bmatrix}$$

Buradan bilinmeyen üç *Başlangıç değeri* ;

$$U_{b0} = 6,69149.10^{-6} F \cdot \frac{m}{t}$$

$$M_{n0} = 2,65792 \text{ F.m}$$

$$M_{t0} = -1,34208 \text{ F.m}$$

olarak bulunur . Böylelikle tüm *Başlangıç değerleri* belirlenmiş olur .

$$P[0] = \begin{bmatrix} U_{b0} \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,69149.10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 2,65792 \\ -1,34208 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot F$$

$$\mathbf{P}[\varphi] = \mathbf{F}[\varphi] \cdot \mathbf{P}[0]$$

formülünde ; $\mathbf{F}[\varphi]$, $\mathbf{P}[0]$ tamamen belirli olduğu için istenilen herhangi bir kesit için , örneğin $\varphi = \pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$, v.b..... aranan bilinmeyenler kolaylıkla bulunabilir . Elde edilen değerler *Yaklaşık Taşıma Matrisi metodu*'nu kullanarak karşılaştırılsın .

Bahsi geçen sistemin homojen hali için *Differansiyel Geçiş Matrisi*;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Picard İterasyonu açılımından dört terim alarak taşıma matrisine geçilirse ;

$$\mathbf{F}[\pi/2] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7,39866 & 7,84025 & -2,11029.10^{-6} & 7,90562.10^{-6} & -2,74978.10^{-5} \\ 0 & 0,019969 & -0,924832 & -3,73064.10^{-7} & -1,1112.10^{-6} & 2,11029.10^{-6} \\ 0 & 0,924832 & 0,019969 & 1,1112.10^{-6} & -1,88523.10^{-7} & 7,90562.10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0,019969 & -0,924832 & 7,39866 \\ 0 & 0 & 0 & 0,924832 & 0,019969 & 7,84025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin Prof.Dr.Mustafa İnanın elde ettiği matrsten biraz farklı olduğu görülmektedir . Daha önceden bahsedilen [2.78] ve [2.79] nolu denklemlerden faydalanıp $0-\pi/2$ aralığı 1000 parçaya bölünürse ;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\frac{\pi}{2}, 0) &= \mathbf{F}(\frac{\pi}{2}, \frac{1999\pi}{2000}) \cdot \mathbf{F}(\frac{1999\pi}{2000}, \frac{1998\pi}{2000}) \cdot \mathbf{F}(\frac{1998\pi}{2000}, \frac{1997\pi}{2000}) \dots\dots \\ &\dots\dots \mathbf{F}(\frac{3\pi}{2000}, \frac{\pi}{1000}) \cdot \mathbf{F}(\frac{\pi}{1000}, 0) \end{aligned}$$

açılımına ulaşılır . Bu işlem Mathematica programında yazılan bir dizi algorithma ile gerçekleştirilecek olursa ;

$$\mathbf{F}[\pi/2] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 8 & -2,69468.10^{-6} & 6,11924.10^{-6} & -1,73665.10^{-5} \\ 0 & 8,09897.10^{-14} & -1 & -9,97702.10^{-8} & -1,20151.10^{-6} & 2,69468.10^{-6} \\ 0 & 1 & 8,09897.10^{-14} & 1,20151.10^{-6} & 9,97702.10^{-8} & 6,11924.10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 8,09897.10^{-14} & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8,09897.10^{-14} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak *Taşıma Matrisi* elde edilir . Sıradaki adım olarak yukarıda *Başlangıç Değerlerini* bulmak için yapılan hesaplamalar bu matrisle yapılsın .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{n\pi/2} \\ M_{t\pi/2} \\ T_{b\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 8 & -2,694.10^{-6} & 6,119.10^{-6} & -1,736.10^{-5} \\ 0 & 8,098.10^{-14} & -1 & -9,977.10^{-8} & -1,201.10^{-6} & 2,694.10^{-6} \\ 0 & 1 & 8,098.10^{-14} & 1,201.10^{-6} & 9,977.10^{-8} & 6,119.10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 8,098.10^{-14} & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8,098.10^{-14} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_{b0} \\ 0 \\ 0 \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ F/2 \end{bmatrix}$$

Buna göre aranan *Başlangıç değerleri* ;

$$U_{b0} = 6,69149.10^{-6} F \frac{m}{t}$$

$$M_{n0} = 2,65792 \text{ F.m}$$

$$M_{t0} = -1,34208 \text{ F.m}$$

olarak elde edilir . Bunlar toplu olarak yazılırsa ,

$$\mathbf{P}[0] = \begin{bmatrix} U_{b0} \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,69149.10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 2,65792 \\ -1,34208 \\ 1/2 \end{bmatrix} . F$$

sonuçlarına ulaşılır . Picard Iterasyonundan bulunan Taşıma Matrisi ile Prof.Dr.Mustafa İnanın mat-risinin elemanları aşağıda görüldüğü gibi karşılaştırılırsa ;

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{11}^{m.i} - f_{11}^{ytm}}{f_{11}^{m.i}} & . & . & . & . & . \\ \frac{f_{21}^{m.i} - f_{21}^{ytm}}{f_{21}^{m.i}} & \frac{f_{22}^{m.i} - f_{22}^{ytm}}{f_{22}^{m.i}} & . & . & . & . \\ \frac{f_{31}^{m.i} - f_{31}^{ytm}}{f_{31}^{m.i}} & \frac{f_{32}^{m.i} - f_{32}^{ytm}}{f_{32}^{m.i}} & \frac{f_{33}^{m.i} - f_{33}^{ytm}}{f_{33}^{m.i}} & . & . & . \\ \frac{f_{41}^{m.i} - f_{41}^{ytm}}{f_{41}^{m.i}} & \frac{f_{42}^{m.i} - f_{42}^{ytm}}{f_{42}^{m.i}} & \frac{f_{43}^{m.i} - f_{43}^{ytm}}{f_{43}^{m.i}} & \frac{f_{44}^{m.i} - f_{44}^{ytm}}{f_{44}^{m.i}} & . & . \\ \frac{f_{51}^{m.i} - f_{51}^{ytm}}{f_{51}^{m.i}} & \frac{f_{52}^{m.i} - f_{52}^{ytm}}{f_{52}^{m.i}} & \frac{f_{53}^{m.i} - f_{53}^{ytm}}{f_{53}^{m.i}} & \frac{f_{54}^{m.i} - f_{54}^{ytm}}{f_{54}^{m.i}} & \frac{f_{55}^{m.i} - f_{55}^{ytm}}{f_{55}^{m.i}} & . \\ \frac{f_{61}^{m.i} - f_{61}^{ytm}}{f_{61}^{m.i}} & \frac{f_{62}^{m.i} - f_{62}^{ytm}}{f_{62}^{m.i}} & \frac{f_{63}^{m.i} - f_{63}^{ytm}}{f_{63}^{m.i}} & \frac{f_{64}^{m.i} - f_{64}^{ytm}}{f_{64}^{m.i}} & \frac{f_{65}^{m.i} - f_{65}^{ytm}}{f_{65}^{m.i}} & \frac{f_{66}^{m.i} - f_{66}^{ytm}}{f_{66}^{m.i}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1,5543.10^{-14} & 8,0602.10^{-14} & 7,413.10^{-13} & 1,8963.10^{-13} & 5,2968.10^{-13} \\ 0 & -8,0989.10^{-14} & -1,6431.10^{-14} & 1,5314.10^{-12} & 3,1635.10^{-13} & 7,7672.10^{-13} \\ 0 & -1,6431.10^{-14} & -8,0989.10^{-14} & 2,885.10^{-13} & -1,2916.10^{-12} & 1,4534.10^{-13} \\ 0 & 0 & 0 & -8,0989.10^{-14} & -1,6431.10^{-14} & -1,5987.10^{-14} \\ 0 & 0 & 0 & -1,6431.10^{-14} & -8,0989.10^{-14} & 7,9936.10^{-14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi Taşıma Matrislerinin arasındaki fark çok küçüktür . Picard iterasyonundan daha fazla terim alınarak ve $0-\varphi$ aralığı daha fazla parçaya bölünerek çok daha yakın matrisler elde etmek mümkündür . Şimdi göreceli olarak , bulunan bu Başlangıç Değerlerini karşılaştırarak taşıma matrislerinde ki farklılıktan doğan rölatif hataları elde edelim ;

(Not: $m.i=Mustafa İnan Taşıma Matrisi$, $ytm=Yaklaşık Taşıma Matrisi$)

$$\frac{U_{b0}^{m.i} - U_{b0}^{ytm}}{U_{b0}^{m.i}} = 8,26591.10^{-13}$$

$$\frac{M_{n0}^{m.i} - M_{n0}^{ytm}}{M_{n0}^{m.i}} = -1,80114.10^{-13}$$

$$\frac{M_{t0}^{m.i} - M_{t0}^{ytm}}{M_{t0}^{m.i}} = 5,54914.10^{-13}$$

2.7 Elastik Zemine Oturan Dairesel Çubuklar

Buraya kadar incelenen problemlerden farklı olarak , elastik bir zemine oturan çubuk için mesnetlendirme sürekli dir . Bu özellik , problemin daha önceden elde edilen differansiyel karakterinde , bir takım değişiklikler yaratır . Değişikliğin formülasyonu çubuğun oturduğu ortamın şekil değiştirme karakteristiklerine bağlıdır . Bahsi geçen elastik ortam için bu irdelenirse ; Çubuk elemanı üzerine etkiyen p yükleri , çubukta U_b çökmelerini oluşturur . U_b çökmeleri elastik olarak şekil değiştiren ortamdan q tepkilerini görür . Kirişe etkiyen toplam kuvvet , $\vec{b}$ eksenine için kuvvet dengesi yazılırsa ,

$$p_b = q - p \quad (2.85)$$

olarak meydana gelir . Düzlemine dik yükler altında ki elastik zemine oturan eğri eksenli çubuklar için genel denklemler yazılırsa ;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda.(q - p) &= 0
\end{aligned} \tag{2.86}$$

bağıntıları bulunur . Görüldüğü gibi bu denklemlerin , [2.47] denklemlerinden terk farkı T_b ' de ortaya çıkar . λ , [2.47] denklemlerinde R ' ye eşittir . Zeminden çubuğa etkiyen bu $q[\varphi]$ kuvvetinin tanımlanmasında bir çok teorik ve deneysel çalışma vardır . Bu çalışmanın sınırları içerisinde $q[\varphi]$ kuvvetinin belirlenmesinde çok basit bir lineer bağıntı olan ve yay sabiti yardımıyla icra edilebilen *Winkler Elastik Zemin Hipotezi* kullanılmıştır . Bu bağıntı pratikte çok iyi ve kabul edilebilir sonuçlar vermektedir . Winklerin ortaya attığı teoriye göre zemin , onu oluşturan bir çok yaydan meydana gelmiştir . Bu yaylar için ;

$$q = k . U_b \tag{2.87}$$

bağıntısı yazılabilir . [2.86] denklemlerindeki T_b ifadesinde bu son bağıntı yerine konulursa ;

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda.(k.U_b - p) = 0 \tag{2.88}$$

denkleminin elde edilmesiyle , çubuğun elastik bir zemin üzerine oturması formülize edilerek denklemlere katılmış olur .

Şimdi bu denklem sisteminin çözümünün *Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodundan* faydalanılarak nasıl bulunabileceğini inceleyelim . Daha önceden de olduğu gibi ilk hedef bu lineer differansiyel denklem takımı için Differansiyel Geçiş Matrisinin bulunmasıdır . Fakat bunu yapmadan önce

işlemlerde kolaylık sağlaması ve işlem yoğunluğuyla uğraşmaktan çok , sonuçları irdelemeye fırsat vermesi bakımından bir takım hesap kolaylığı kabulleri yapılacaktır .

Düzlem çubuk , daire gibi basit karakterli bir enkesitten meydana gelsin ($\lambda[\varphi] = \text{sabit} = R$) . Çubuk üzerinde yayılı bir yük yada yayılı bir moment olmasın . Bu kabullerden sonra genel denklemlerin ;

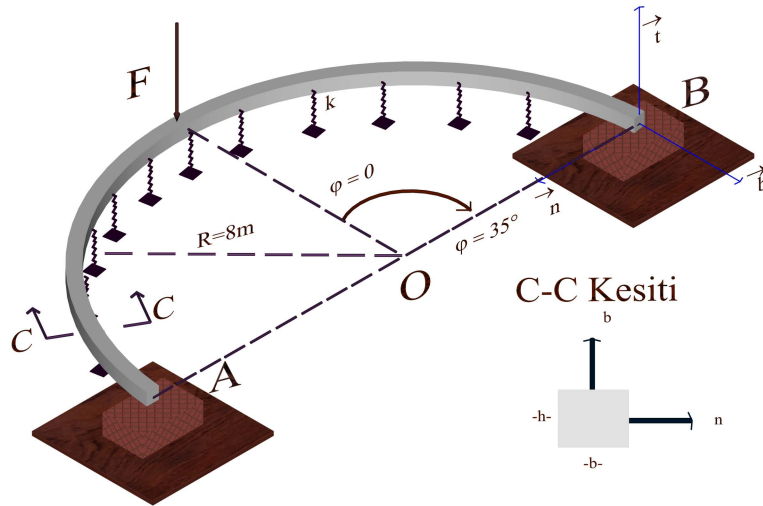
$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + R\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - R\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - R\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - RT_b &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + R(k.U_b) &= 0
\end{aligned} \tag{2.89}$$

haline geldiğini görülür . Sistem matrislerinin $[\varphi]$ ve $[d\varphi+\varphi]$ kesitlerindeki değerleri yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

bağıntısı elde edilir . Artık sistemin differansiyel karakterini tanımlayan *Differansiyel Geçiş Matrisi* 'i ($\mathbf{D}$) oluşturulmuş olur . Bundan *Taşıma Matrisi* ' ne ($\mathbf{F}$) nasıl geçildiği ve bu matris aracılığı ile kesit tesirlerinin nasıl bulunacağı daha önceki başlıklarda ayrıntılı bir şekilde anlatıldı . Sistemi ve çözüm modelini sayısal olarak görmek ve kesit tesirlerine ait fonksiyonları belirleyerek bunlara ait eğrileri çizmek için bir örnek üzerinde anlatılan işlemler gerçekleştirilsin .

Örnek 2 :



Şekil 2.11: Elastik Zemine Oturan Çubuk .

Kesit Özellikleri

Kare Enkesit , En (b) = 1.5m , Boy (h) = 1.5 m

Eksen Eğriliği (λ) = sabit = R=8m

Kesit Alanı (A) = b.h = 2,25 m^2

Açısal Frekans (ω) = 0 $\frac{rad}{sn}$

Birim boydaki çubuğun kütlesi (ρ) = 0

Winkler Zemin Yatak Katsayısı (k) = 1,5 $\frac{t}{m^2}$

Malzeme Sabitleri

Elastisite Modülü (E) = 2,7.10⁶ $\frac{t}{m^2}$

Poisson Oranı(ν) = 0,3

Kayma Modülü (G) = E/(2.(1 + ν)) = 1,03846.10⁶ $\frac{t}{m^2}$

Rijitlikleri

Atalet Momenti (I_n) = $\frac{b.h^3}{12}$ =0,421875 m^4

$I_t = 0,140.b^4$, $I_t = 0.70875 m^4$

Eksenel Rijitlik (C_{tt}) = E.A = 6,075.10⁶ t

Eğilme Rijitliği (S_{nn}) = E. I_n = 1,13906.10⁶ tm^2

Burulma Rijitliği (S_{tt}) = G. I_t = 736010 tm^2

Not:Daire enkesitli olmayan çubuklarda I_t ' yi bulmak için matematik elastisite teorisi kullanmak gerekir . Burada kullanılan değer , [1] nolu kaynak , sy31 , TabloIII ' den alınmıştır.

Problemin sınır koşulları ;

$$\begin{array}{c|c} \underline{\varphi = 0'da} & \underline{\varphi = 7\pi/36'da} \\ \hline \Omega_n(0)= 0 & U_b(7\pi/36)= 0 \\ \Omega_t(0)= 0 & \Omega_t(7\pi/36)= 0 \\ T_b(0)= \frac{-P}{2} & \Omega_n(7\pi/36)=0 \end{array}$$

Yukarıda verilen kesit değerleri için sistemin diferansiyel geçiş matrisi ;

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7,02332.10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,0000108694.10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrizen , [2.75] ifadesinden 10 terim alınarak taşıma matrisine geçilir . Daha yakınsak sonuçlar elde etmek için Mathematica ' da hazırlanan program ile $0-7\pi/36$ aralığı "10000" parçaya bölünerek [2.78] ifadesi taşıma matrisine uygulandığında , $\varphi=7\pi/36$ için elde edilen taşıma matrisi ;

$$F[7\pi/36] =$$

$$\begin{bmatrix} 0,999 & -4,588 & 1,446 & -9,351.10^{-6} & 5,237.10^{-6} & -0.00001 \\ 0,00002 & 0,819 & -0,573 & 3,373.10^{-6} & -3,134.10^{-6} & 9,351.10^{-6} \\ 9,720.10^{-6} & 0,573 & 0,819 & 3,134.10^{-6} & 5,579.10^{-6} & 5,237.10^{-6} \\ 17,361 & -28,102 & 4,346 & 0,819 & -0,573 & 4,588 \\ 3,579 & -4,346 & 0,534 & 0,573 & 0,819 & 1,446 \\ 7,330 & -17,361 & 3,579 & -0,00002 & 9,720.10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix}$$

olur .

$$\mathbf{P}[7\pi/36] = \mathbf{F}[7\pi/36] \cdot \mathbf{P}[0]$$

denkleminde , bilinmeyen başlangıç değerleri ;

$$\mathbf{P}[0] = \begin{bmatrix} U_{b0} \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ T_{b0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,138448.10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 59,85588 \\ -10,15802 \\ -25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur . B ankastre mesnetindeki değerlere bakılıcak olunursa ;

$$\mathbf{P}[\frac{7\pi}{36}] = \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,65116.10^{-18} \\ -1,53945.10^{-18} \\ 6.1214.10^{-19} \\ -59.855232 \\ -10.158020 \\ -24.999216 \end{bmatrix}$$

şeklinde oldukları görülür . Burada $U_b[7\pi/36]$, $\Omega_n[7\pi/36]$, $\Omega_t[7\pi/36]$ değerlerinin ankastre olarak mesnetlenmiş çubuk ucunda "0" çıkması beklenirken , çok küçük değerler çıktığı gözlemlenmektedir . Bunun sebebi yapılan nümerik hesaplamalardır . Picard İntegrasyonundan alınan terim sayısı artırıldığında ve belirtilen aralık daha fazla parçaya bölündüğünde bu sayıların çok daha azaldığı gözlemlenmiştir . Tüm nümerik hesaplamalarda olduğu gibi burda da sonuçlar yaklaşık olarak bulunmuştur . Fakat önemli olan sonuçların ne

kadar yaklaşık olduğu ve onları elde etmek için izlenen yöntemin , matematiksel bazda ne kadar güçlü olduğudur . I.Mertebe teorisinin geçerli olduğu ve zemin , çubuk etkileşiminin lineer elastik kabul edildiği bu çalışma için ortaya çıkan nümerik hataların mertebesi ihmal edilebilecek mertebede küçüktür . Hesaplanan $P[0]$ başlangıç değerlerinden faydalanarak istenilen herhangi bir kesitteki iç kuvvet ve şekil değiştirme değerleri bulunabilmir .

Bundan sonraki bölümde , şekilde görülen çubuğun başlangıç kesitinden , mesnete kadar olan kısmı için kesit tesirleri 14 parçada ayrı ayrı hesaplanıp , elde edilen değerlerle , her bilinmeyen fonksiyon için en uygun polinomu hesaplanmaya çalışılmıştır . Bu hesaplarda gene Mathematica yazılımından faydalanılmıştır . Yapılan program istenilen özellikteki dataların girilmesiyle her kesit değeri için bu grafikleri elde etmektedir . Burada adım adım programın çıktıları irdelenerek , çubuk simetri ekseninin yarısı için kesit tesiri grafikleri çizilmiştir .

$$P[\varphi] = F[\varphi] \cdot P[0]$$

$$P[0] = \begin{bmatrix} 2,138448.10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 59,85588 \\ -10,15802 \\ -25 \end{bmatrix}, \quad P[\pi/72] = \begin{bmatrix} 0.00021078 \\ 0.000017159 \\ -3,8439.10^{-6} \\ 51.5181438 \\ -7.72783345 \\ -24.9998886 \end{bmatrix}$$

$$P[\pi/36] = \begin{bmatrix} 0.00020215 \\ 0.000031875 \\ -5,9261.10^{-6} \\ 43.082373 \\ -5.6636429 \\ -24.99978 \end{bmatrix}, \quad P[\pi/24] = \begin{bmatrix} 0.0001888231 \\ 0.0000440512 \\ -6,529909.10^{-6} \\ 34.56463083 \\ -3.969379 \\ -24.99967 \end{bmatrix}$$

$$P[\pi/18] = \begin{bmatrix} 0,00017170 \\ 0,00005360 \\ -5,944171.10^{-6} \\ 25,9811266 \\ -2,6482664 \\ -24,999583 \end{bmatrix}, \quad P[5\pi/72] = \begin{bmatrix} 0.000151712 \\ .000060476 \\ -4.462345.10^{-6} \\ 17.348197 \\ -1.702817 \\ -24.999498 \end{bmatrix}$$

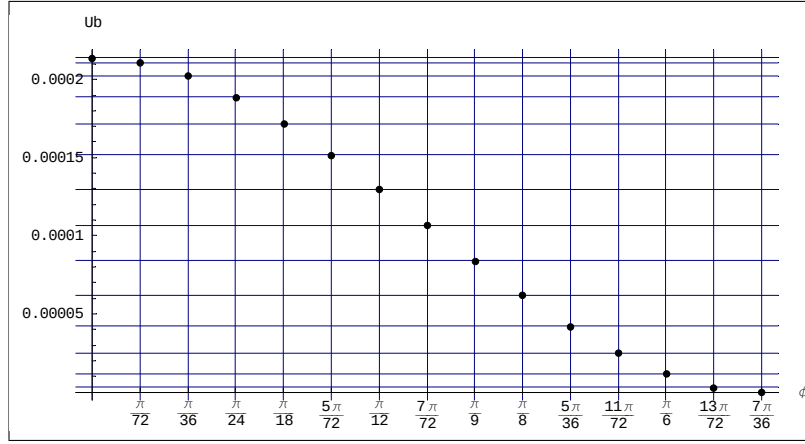
$$P[\pi/12] = \begin{bmatrix} 0.000129799 \\ 0.0000646158 \\ -2.38124 \cdot 10^{-6} \\ 8.682272 \\ -1.13483 \\ -24.99942 \end{bmatrix}, \quad P[7\pi/72] = \begin{bmatrix} 0.00010692 \\ 0.0000659988 \\ 6.531876 \cdot 10^{-11} \\ -0.00015636 \\ -0.945386 \\ -24.99936 \end{bmatrix}$$

$$P[\pi/9] = \begin{bmatrix} 0.000084045767 \\ 0.000064615121 \\ 2.38136 \cdot 10^{-6} \\ -8.682565121 \\ -1.1348434212 \\ -24.99931112 \end{bmatrix}, \quad P[5\pi/36] = \begin{bmatrix} 0.00004214323 \\ 0.0000536011 \\ 5.9442 \cdot 10^{-6} \\ -25.98126125 \\ -2.648299623 \\ -24.9992121 \end{bmatrix}$$

$$P[11\pi/72] = \begin{bmatrix} 0.00002502234 \\ 0.000044055345 \\ 6.529967 \cdot 10^{-6} \\ -34.56462345 \\ -3.96941578 \\ -24.99922214 \end{bmatrix}, \quad P[\pi/6] = \begin{bmatrix} 0.00001169678 \\ 0.0000318745 \\ 5.9261 \cdot 10^{-6} \\ -43.08219223 \\ -5.66367554 \\ -24.9992212 \end{bmatrix}$$

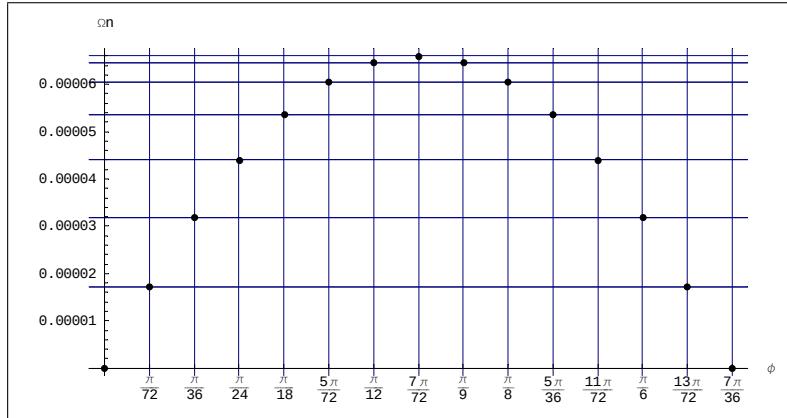
$$P[13\pi/72] = \begin{bmatrix} 3.064195 \cdot 10^{-6} \\ 0.000017158 \\ 3.84394647 \\ -51.517746 \\ 7.7278532 \\ -24.99921 \end{bmatrix}, \quad P[7\pi/36] = \begin{bmatrix} 2.223461 \cdot 10^{-21} \\ -1.407054 \cdot 10^{-18} \\ -2.97209 \cdot 10^{-18} \\ -59.85523 \\ -10.15802 \\ -24.9992 \end{bmatrix}$$

elde edilen bu değerler yardımı ile kesit tesir fonksiyonlarının φ ' ye bağlı grafikleri çizilirse ;



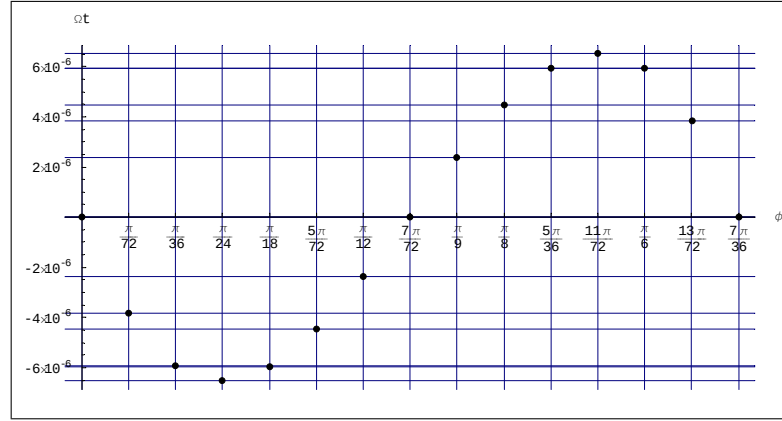
Şekil 2.12: $U_b - \varphi$.

U_b değerlerinin beklendiği gibi mesnet ' e doğru gidince azaldığı gözlenmektedir .
 Ω_n değerlerinin ise mesnete doğru gidince parabolik bir eğri çizdiği



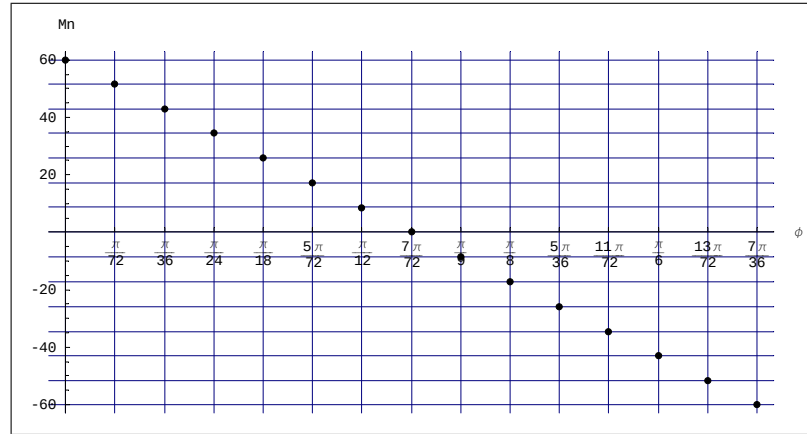
Şekil 2.13: $\Omega_n - \varphi$.

gözlenmektedir .

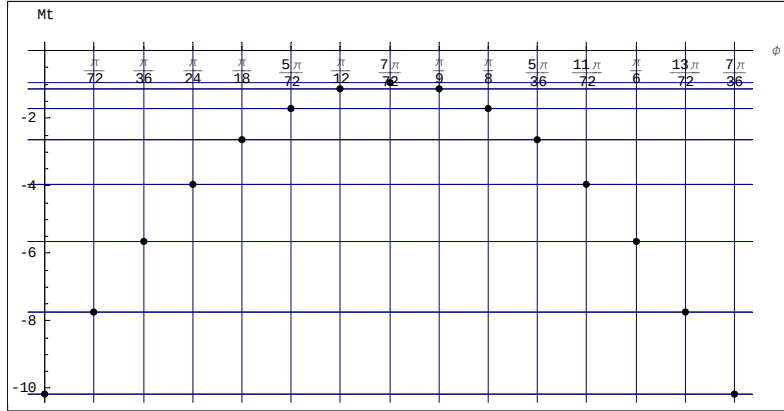


Şekil 2.14: $\Omega_t - \varphi$.

Ω_t değerlerinin sinüs eğrisine benzer şekilde değişkenlik gösterdiği gözlenmiştir .
 M_n değerlerinin işaret değiştirerek mesnete yöneldiği gözlenmiştir .

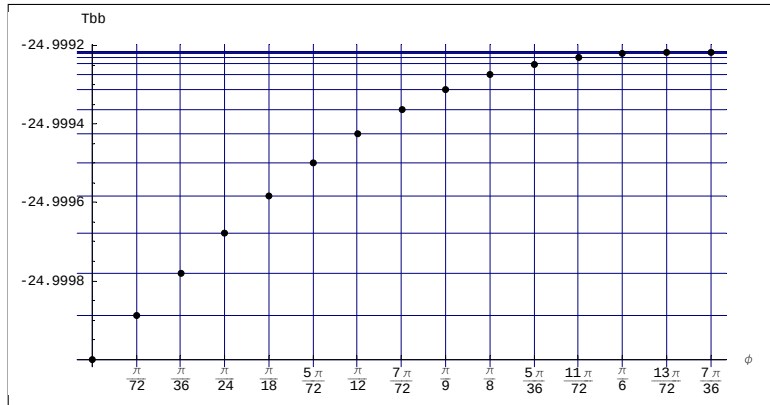


Şekil 2.15: $M_n - \varphi$.



Şekil 2.16: $M_t - \varphi$.

M_t değerlerinin Ω_t 'ye benzer olarak parabolik bir eğriye benzediği gözlenmiştir .
 T_b değerlerinin gittikçe azalan bir eğri çizdikleri gözlenmiştir .

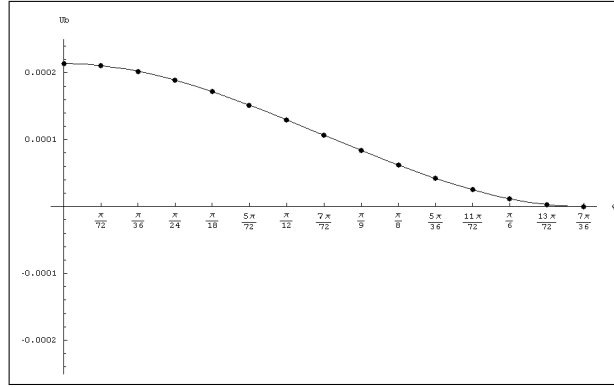


Şekil 2.17: $T_b - \varphi$.

Bu grafikler elde edildikten sonra burada yapılması gereken her kesit tesiri fonksiyonu için , bu noktalarla en iyi uyumu sağlayan eğrileri bulmak olacaktır . Her kesit tesiri için bulunan polinom fonksiyonun mertebesi farklı olabilir . Bulunan bu polinom fonksiyonlarının genel denklemlerde yerine konulması ile uygunluğu ve nümerik hesaplar sonucu ortaya çıkan hatalar gözlenebilir . Kesit tesirlerine uygun polinomlar seçilmesinde Mathematica yazılımı kullanılmıştır . Elde edilen fonksiyonlar ;

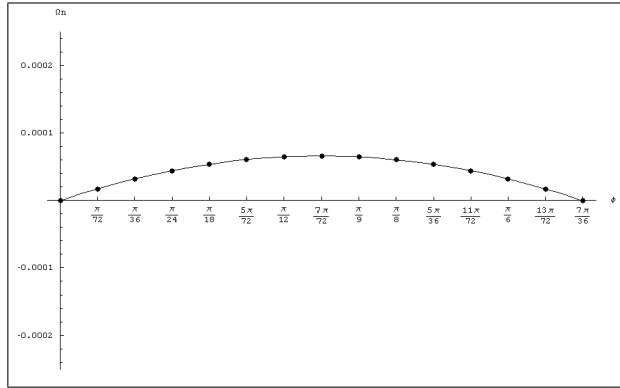
$$\begin{aligned}
U_b &= -2,49814.10^{-8}.\varphi^4 + 0.00189.\varphi^3 - 0.00174.\varphi^2 \\
&+ 4.57343.10^{-6}.\varphi + 0.00021.10^{-8} \\
\Omega_n &= 0.00071.\varphi^2 + 0.00043.\varphi - 2.57576.10^{-6} \\
\Omega_t &= -0.00059.\varphi^3 + 0.00054.\varphi^2 - 0.00011.\varphi \\
&+ 8.95403.10^{-9} \\
M_n &= 8.25342.\varphi^4 - 10.0817.\varphi^3 - 94.9053.\varphi^2 \\
&+ 59.8551.\varphi - 10.15825 \\
M_t &= -1.64281.\varphi^5 + 2.50838.\varphi^4 + 31.6342.\varphi^3 \\
&- 29.9171.\varphi^2 - 189.84.\varphi + 59.8559 \\
T_b &= -0.00066.\varphi^6 + 0.00121.\varphi^5 + 0.00488.\varphi^4 \\
&- 0.00672.\varphi^3 - 8.94243.10^{-8}\varphi^2 + 0.00256.\varphi - 25
\end{aligned}$$

Bu fonksiyonların grafikleri ve daha önceden çizilen nokta bazlı grafikler karşılaştırılırsa ;

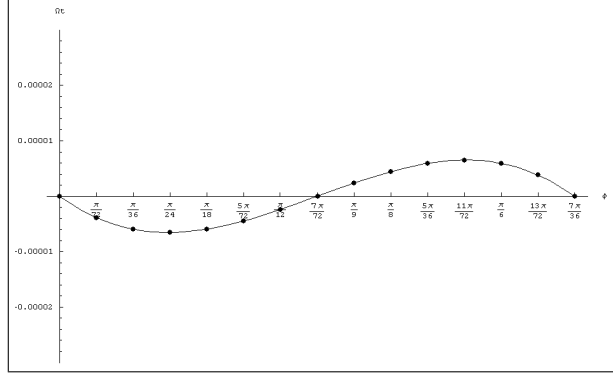


Şekil 2.18: $U_b - \varphi$.

4. dereceden bulunan U_b ve 2. derece Ω_n fonksiyonlarının ile nokta bazlı grafiklerle olan uyumu görülmektedir .

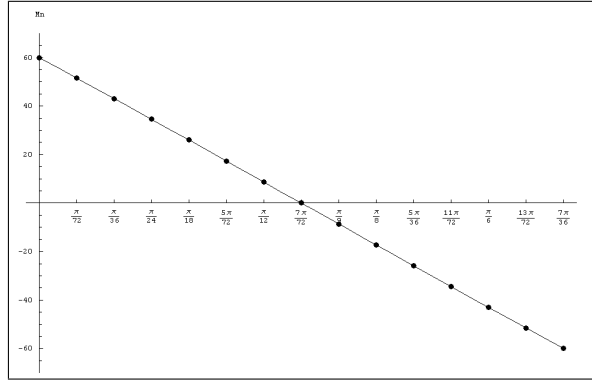


Şekil 2.19: $\Omega_n - \varphi$.

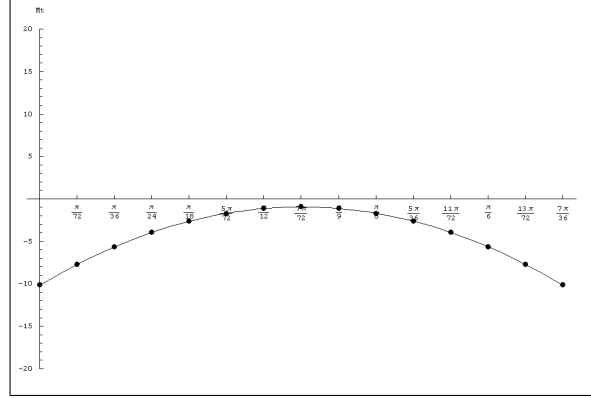


Şekil 2.20: $\Omega_t - \varphi$.

3. dereceden bulunan Ω_t ve 4. derece M_n fonksiyonlarının ile nokta bazlı grafiklerle olan uyumu görülmektedir .

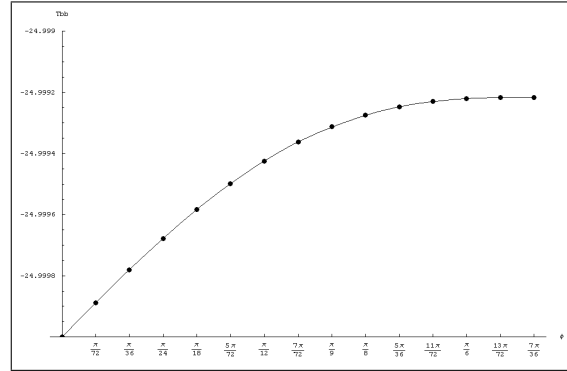


Şekil 2.21: $M_n - \varphi$.



Şekil 2.22: $M_t - \varphi$.

5. dereceden bulunan M_t ve 6. derece T_b fonksiyonlarının ile nokta bazlı grafiklerle olan uyumu görülmektedir .



Şekil 2.23: $T_b - \varphi$.

Grafiklerden görüldüğü gibi , kesit tesirleri için mathematicada bulunan fonksiyonlar oldukça yakınsaktır . Başta alınan nokta sayısını arttırarak daha yakınsak fonksiyonlar elde etmek mümkündür . Hazırlanan programda data girişinden sonra tüm bu işlemler otomatik olarak yapılmaktadır . Program düzlemsel çubukların statığı için geçerli olmasına rağmen differansiyel geçiş matrisinde yapılacak basit değiştirmelerle dinamik durum ve doğrusal çubuklar gibi uygulama alanı geliştirilebilir . Çubuk en kesit geometrisi , programın başında yapılan bir seçimle otomatik olarak hesaplara yansıtılmaktadır .

Bulunan grafikler çubuğun bir simetri kesiti içindir diğer yönde de kesit tesirleri simetriye uygun olarak taşınırsa tüm çubuk için kesit tesiri değerleri bulunabilir .

3.SONUÇLAR

Yapı zemin etkileşimleri konusu günümüze kadar önemini koruyarak gelmiştir . Bu çalışma da konunun önemi gereğince yapılmıştır . Başlangıç Değerleri Metodunda kullanılan Taşıma Matrisini bulmak için Picard Açılımından fazla terim alınmasının iyi sonuçlar verdiği literatürde bilinmektedir . Fakat günümüzde elektronik hesap makinelerin , bilgisayarların yada hesaplamalar için kullanılan programların çok güçlü hale gelmiş olmasına rağmen , nümerik hesaplardaki işlem yoğunluğundan dolayı hesaplar beklenmeyen sonuçlar verebilir . Hesaplama metodu süresince işlem hacmindeki artışlar çözüm algoritma yapılarında problemler yaratarak , daha hassas işlem yapıldığı düşünülürken , analitik sonuçlardan daha uzak nümerik sonuçlar verebilir .

Bu yukarıda anlatılan olumsuz etkilerden dolayı işlem hacmini düşürmek için , sistemin differansiyel karakterini ifade eden **D** *Differansiyel Geçiş Matrisinden* , sistemin integral özelliklerini karakterize eden **F** *Taşıma Matrisi* ' ne geçilirken , Picard açılımından alınan terim sayısını arttırmak yerine *Matrisant* "İntegral serisi" metodu kullanılır . Elde edilen Taşıma Matrisi düzlemsel çubuk problemlerinde kullanıldığında yeterli oranda yaklaşık sonuçlar verdiği görülmüştür . Tüm bu işlemler Mathematica yazılımı kullanılarak seri bir bilgisayar programı haline getirilmiştir .

Problemin hiperstatiklik derecesinin artması problemin çözümüne ek bir hesap fazlalığı getirmez . Bu zaten *Başlangıç Değerleri Metodunun* özelliğidir . *Matrisant* "İntegral serisi" yönteminin kolayca sayısal hesaplama makinelerinde programlanabilmesi sayesinde , eğriliği nasıl olursa olsun , düzlem çubuklar için *Taşıma Matrisi* bulmak ve analitik çözümü oldukça zor olan elastik zemine oturan eğri eksenli bir çubuk için istenilen kesitteki tesirleri bulmak oldukça kolaydır .

Elde edilen differansiyel geçiş matrisinin D_{61} . elemanına $\rho \cdot \omega$ terimi eklenerek dinamik hesaplar için kullanılabilir . Gene aynı matrisin D_{16} . elemanı 0 alınmak yerine $\frac{R}{C_b}$ alınarak kısa açıklıklı yada yüksek en kesitli kirişler için kesme etkisi dikkate alınabilir .

KAYNAKLAR

- [1] **İnan,M.** , 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi , İstanbul Teknik Üniversitesi , İstanbul .
- [2] **İnan,M.** , 1966. Elasto-Mekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi , İstanbul Teknik Üniversitesi , İstanbul .
- [3] **İnan,M.** , 1988. Cisimlerin Mukavemeti , İ.T.Ü Yayınları , 6.Baskı .
- [4] **İnan,M.** , 1968. The Method of Initial Values and Carry-Over Matrix in ElastoMechanics , Middle East Tecnical University , Ankara .
- [5] **Hetenyi,M.** , 1946. Beams on Elastic Foundation , The University of Michigan Press , MI .
- [6] **Volterra,E.** , 1952. Bending of Circular Beam Resisting on an Elastic Foundation , Journal of Applied Mechanics , ASME , **19** , 1-4 .
- [7] **Popov,P.E** , 1979. Introduction to Mechanics of Solids , Prentice Hall of India , New Delhi - 110001 .
- [8] **Cerit,C.** , 1998. Çözümlü Differansiyel Denklem Problemleri , İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi , İstanbul .
- [9] **Artan,R.** , 1999. Kendi Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Düzlem Çubukların Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Hesabı , *XI. Ulusal Mekanik Kongresi* , Bolu , 6-10 Eylül .
- [10] **Kıral,E. , Ertepinar.** , 1974. Elastik Zeminde Oturan Eğri Eksenli Düzlemsel Çubuklar , *METU Journal of Pure and Applied Science* , **7** , 44-53 , April .

- [11] **Aköz,Y. , Zubaroğlu,S. ,** 1995. Elastik Zeminde Oturan Dairesel Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi *IX. Ulusal Mekanik Kongresi , Ürgüp, Eylül .*
- [12] **Aköz,Y. , Aksoydan,M. ,** 2004. Transfer and Stiffness Matrix for Timoshenko Beams on Elastic Foundations , **ARI** *The Bulletin of the Istanbul Technical University* , **54** , 1-15 .
- [13] **Aköz,Y. , Kadioğlu,F. ,** 2004. The Mixed Finite Element Solution Of Circular Beam on Elastic Foundation , *Computers and Structures* , **60** , 643-651 .
- [14] **Civalek , Ö. ,** 2004. Elastik Zeminde Oturan Yapıların Hesap Yöntemlerine Genel Bir Bakış , *Türkiye Mühendislik Haberleri* , **432** , 45-54 .
- [15] **Zubaroğlu,S. ,** 1994. Elastik Zeminde Oturan Daire Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi ,*Yüksek Lisans Tezi* , İ.T.Ü FenBilimleri Enstitüsü , İstanbul .

ÖZGEÇMİŞ

8 Ocak , 1980 yılında Ankarada doğdu , Orta ve Lise öğrenimini *Ankara Cumhuriyet Lisesinde* tamamladı . 1998 yılında Eskişehir *Osmangazi Üniversitesi* İnşaat Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı . 2002 yılında mezun oldu . 2002 - 2003 yılları arasında çeşitli özel kurumlarda saha ve betonarme proje tasarım mühendisi olarak çalıştı . 2003 yılında *İstanbul Teknik Üniversitesi* Fen Bilimleri Enstitüsün de yüksek lisansına başladı . Uzmanlık alanı Yapı bölümünün bir kolu olan *Yapı Mekaniğidir* . 2005 yılında yüksek lisansını tamamlayarak , doktora çalışmalarıyla akademik hayata atılmıştır .

Yabancı Dil Bilgisi

İngilizcesi ileri seviyedir . ÜDS Mart 2003 : Natural Science / Score : 71.15

İstanbul Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Bölümünde 1 yıl temel Almanca eğitimi almıştır .

Lise seçmeli dili Fransızcadır .

Bilgisayar Bilgisi

Basic , QBasic , Pascal , TurboPascal , C++ temel programlama dillerini bilmektedir .

Mathematica programını iyi bilmektedir .

SAP2000 , STAFORCAD , XSTEEL gibi mühendislik uygulama programlarını iyi bilmektedir .

AutoCad 2boyutlu ve 3boyutlu çizim programını çok iyi bilmektedir . Sertifikası vardır .

LaTeX yazılımını bilmektedir . Bu çalışma LaTeX tabanlı bir editör olan TeXnicCenter ile yapılmıştır .

İlgi Alanları

Yapı tasarımı ve Yapı Mekaniği konularına ilgilidir .

Her tür Bilgisayar Programı , Bilişim ve Elektronik Teknolojisine meraklıdır

Mühendislik , Bilim ve Sanata çocukluktan bu yana ilgilidir .