

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEM ÇERÇEVELERİN NON-LİNEER
ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Rasim HATİPOĞLU**

**Anabilim Dalı: İnşaat Mühendisliği
Programı: Yapı Mühendisliği**

OCAK 2003

**DÜZLEM ÇERÇEVELERİN NON-LİNEER
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Rasim HATİPOĞLU
(501991291)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Ocak 2003

Tezin Savunulduğu Tarih: 20 Ocak 2003

Tez Danışmanı Doç. Dr. Necla KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN (YTÜ)

OCAK 2003

ÖNSÖZ

Tezimin her aşamasında beni yönlendiren ve benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Necla Kadioğlu'na saygılarımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2003

Rasim HATİPOĞLU

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1 GİRİŞ	1
2 YÖNTEM	2
2.1 Matris Deplasman Metodu	2
3 DÜZLEM ÇERÇEVE HESABI	3
3.1 Çubuğun Kuvvet - Deplasman İlişkisinin Kurulması	3
3.2 Koordinat Dönüşümleri	5
3.3 Sabit Yayılı Yük Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları	7
3.4 Çerçevenin Kuvvet - Deplasman İlişkisinin Kurulması	10
3.5 Matris Deplasman Metodunda Çerçeve Analizi	11
3.6 Matris Deplasman Metoduna Genel Bakış	11
3.7 Lineer Çerçeve Hesabı İçin Bilgisayar Programı Akış Diyagramı	13
4 DÜZLEM ÇERÇEVELERİN NON-LİNEER HESABI	14
4.1 Eksenel Basınç Etkisindeki Bir Çubuğun Diferansiyel Denklemi	14
4.2 Eksenel Basınç Kuvveti Altındaki Bir Çubuğun Rijitlik Matrisi	16
4.3 Eksenel Çekme Kuvveti Altındaki Bir Çubuğun Rijitlik Matrisi	20
4.4 Düzgün Yayılı Yük Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı	22
4.4.1 Basınç etkisindeki bir çubuğun ankastrelik uç reaksiyonları hesabı	22
4.4.2 Çekme kuvveti etkisindeki bir çubuğun ankastrelik uç reaksiyonları hesabı	25

4.5	Düzgün, Eksenel Yayılı Yük Etkisi Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı	26
4.5.1	Kritik yük bulunarak çözümün kontrol edilmesi	34
4.6	Sabit Yatay ve Düşey Yayılı Yük Altındaki Kirişin Rijitlik Matrisinin Bulunması	36
4.7	Non-Linear Çerçeve Hesabı İçin Akış Diyagramı	44
5	YARI RİJİT BAĞLANTILARIN İNCELENMESİ	45
5.1	Yarı Rijit Bağlantılı Çerçeve Elemanının İncelenmesi	45
6	ÖRNEK PROBLEM ÇÖZÜMÜ	56
7	SONUÇ	67
	KAYNAKLAR	68
	ÖZGEÇMİŞ	69

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1 Şekil 6.1 de verilen çerçevenin çözümü.	57
Tablo 6.2 Şekil 6.2 de verilen çerçevenin çözümü	58
Tablo 6.3 Şekil 6.3 de verilen çerçevenin çözümü	59
Tablo 6.4 Şekil 6.4 de verilen çerçevenin çözümü	60
Tablo 6.5 Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü I-A	62
Tablo 6.6 Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü I-B	63
Tablo 6.7 Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü II-A	65
Tablo 6.8 Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü II-B	66

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 3.1	Çubuk koordinatlarında uç serbestlikleri ve yönleri. 4
Şekil 3.2	Global ve çubuk için seçilen koordinat sistemleri 5
Şekil 3.3	Sabit yayılı yük altındaki kiriş. 8
Şekil 3.4	Kirişin mesnet reaksiyonları. 8
Şekil 3.5	Düzlem çerçeve örneği. 10
Şekil 3.6	Lineer çerçeve hesabı için akış diyagramı. 13
Şekil 4.1	Yatay ve eksenel kuvvetlerin etkisi altındaki kiriş. 14
Şekil 4.2	Kiriş üzerinden alınan sonsuz küçük eleman. 15
Şekil 4.3	P eksenel basıncı etkisi altındaki kiriş 16
Şekil 4.4	Çubuk uç kuvvetleri ve uç deplasmanları. 17
Şekil 4.5	Eksenel çekme altında bulunan çubuk. 20
Şekil 4.6	Düzgün yayılı yük ve eksenel basınç kuvveti altında bulunan çubuk. . . . 22
Şekil 4.7	Mesnet Reaksiyonları 24
Şekil 4.8	Yatay ve düşey yayılı yük altında kiriş. 26
Şekil 4.9	$\beta = 2$ için p_1 serisi. 32
Şekil 4.10	$\beta = 2$ için p_2 serisi. 33
Şekil 4.11	$\beta = 2$ için p_3 serisi. 33
Şekil 4.12	$\beta = 2$ için p_4 serisi. 33
Şekil 4.13	Bir ucu ankastre ve sadece eksenel doğrultuda yayılı yük alan kiriş. 34
Şekil 4.14	Üzerinde q_z yatay yayılı yükü bulunan kiriş. 36
Şekil 4.15	Non-Lineer çerçeve hesabı için akış diyagramı. 44
Şekil 5.1	Basit kirişte uç kuvvetler ve deplasmanlar 46
Şekil 5.2	Basınç altındaki kirişte uç kuvvetler ve dönmeler. 48
Şekil 5.3	Yarı-Rijit Bağlantılı Kiriş Elemanı. 49
Şekil 5.4	Yarı-Rijit Bağlantılı Kirişte Uç Kuvvetler ve Deplasmanlar 50
Şekil 6.1	Örnek Problem I 56
Şekil 6.2	Örnek Problem II 58
Şekil 6.3	Örnek Problem II - b 59
Şekil 6.4	Örnek Problem III 60
Şekil 6.5	Örnek Problem IV 61

SEMBOL LİSTESİ

L	Eleman boyu
E	Elemanın elastisite modülü
I	Atalet momenti
A	Kesit alanı
k	Eleman rijitlik matrisi
p	Eleman uç kuvvet matrisi
f	Elemanın ankastrelik uç reaksiyonları matrisi
θ	Koordinat eksenleri arasındaki açı
Q	Dönüşüm matrisi
K	Sistem rijitlik matrisi
D	Sistem deplasman matrisi
$\bar{P}$	Sistem yük matrisi
$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$	Eleman uç kuvvetleri
$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$	Eleman uç deplasmanları
P	Eksenel kuvvet
q_y, q_z	Yayılı yükler
A_1, A_2, A_3, A_4, C_1	İntegrasyon sabitleri
k_b	Basınç kuvveti altındaki çubuğun rijitlik matrisi
k_c	Çekme kuvveti altındaki çubuğun rijitlik matrisi
θ_A, θ_B	Kiriş uçlarındaki dönmeler
θ_{rA}, θ_{rB}	Kiriş uçlarındaki rölatif dönmeler
R_{kiA}, R_{kiB}	Yarı-rijit bağlantıların rijitlikleri
f_l	Flexibilite matrisi

DÜZLEM ÇERÇEVELERİN NONLİNEER ANALİZİ

ÖZET

Yapı sistemlerinin analizi yapılırken çoğu durumda hesaplarda birinci mertebeye teorisinin yeterli olduğu düşünülür. Bununla birlikte deplasmanların sistem boyutları yanında ihmal edilemeyecek kadar büyük olması durumunda, bu kabul geçerliliğini yitirir. Kolondaki normal kuvvetin etkisi uç kuvvetlerde gözle görülür bir değişime neden olacaktır. Denge denklemleri şekil değiştirmiş cisim üzerinde yazılmalıdır. Bu tarz hesaba ikinci mertebeye teorisi denir.

Bu çalışmada ilk olarak matris deplasman metodu genel hatlarıyla incelenmiştir. Birinci mertebeye teorisi kullanılarak, düzlem çerçeve hesabı yapabilmek için gerekli rijitlik matrisi ve ankastrelik mesnet reaksiyonları bulunmuştur. Bu hesap, çalışmada lineer hesap olarak adlandırılmıştır.

İkinci mertebeye teorisi kullanılarak yapılan analizde, ilk olarak çubuk eksenine doğrultusunda sabit bir eksenel kuvvet olduğu düşünülmüştür. Bu kabul yapılarak bulunan rijitlik matrisinin içinde normal kuvvet bir parametre olarak yer almıştır. Rijitlik matrisinin içindeki normal kuvvetin bilinmeyen olması nedeniyle çözüm iterasyon yoluyla yapılmalıdır. Bu hesap tarzı, çalışmada non-lineer çerçeve hesabı olarak isimlendirilmiştir.

Sistem rijitlik matrisi ilk olarak lineer hal için çözülür. Non-lineer halde ise başlangıç değeri olarak lineer haldeki sonuçlar alınır. İterasyonla çözüm bulunur.

Non-lineer analizde ikinci olarak kolonların kendi ağırlıkları, ikinci mertebeye teorisi kullanılarak hesaba katılmıştır. Kolon ağırlıkları, eleman eksenine doğrultusunda sabit yayılı yük olarak düşünülmüştür. Hesaplarda bulunan elastik eğrinin diferansiyel denklemleri seriler yardımıyla çözülmüştür. Hesaplanan rijitlik matrisi içinde normal kuvvet bir parametre olarak yer almıştır, normal kuvvet ayrıca yayılı yükü de içerir. Burada yayılı yük bilinmeyen olmadığından çözüm metodu aynı kalmıştır.

Yapı sistemlerinin hesabında bir diğ er  onemli unsur ise bağlantılardır. Geleneksel hesaplarda  er eve üzerindeki her bağlantının tamamen rijit yada mafsalsal olduğu düşünülür. Gerçekte ise bağlantılar yarı-rijit davranırlar. Yarı-rijit bağlantıların davranışları moment-dönme eğrileri kullanılarak hesaba katılır, bu eğriler deneysel olarak bulunmaktadır.

Bu çalışmada, yarı-rijit bağlantılar, kiriş uçlarında ilave dönmeler meydana getiren yaylar olarak modellenmiştir. İkinci mertebeli teorisi d ş n l rerek hesaplanan rijitlik matrisinin içinde kirişlerin her iki ucundaki yay katsayıları ve normal kuvvetleri bir parametre olarak yer almaktadır. Bu çalışmada sadece, yay katsayılarının sabit olduğu durum d ş n lm ştir.

Son olarak, bir problem bu yöntemler kullanılarak c z lm ştir.  rnek problemde deplasmanların büyük olacağı bir düzlem çerçeveli seçilmiştir. Lineer ve non-lineer analizlerin sonuçları karşılaştırılarak, ikinci mertebeli teorisiyle yapılan hesabın sonuçları üzerinde oldukça etkili olabildiği gözlenmiştir. Kolon ağırlıklarının uç momentlere etkisinin böyle bir sistemde çok az olduğu g r lm ştir. Aynı problem mukayese amacıyla SAP2000 programı kullanılarak c z lm ştir. SAP2000 c z m  ile lineer hesap c z mlerinin aynı olduğu g r lm ştir.

Aynı sistem kiriş-kolon bağlantılarının yarı-rijit bağlantılı olması durumu için tekrar c z lm ştir, yay katsayıları örnek üzerinde sabit olarak alınmıştır. Sonuç olarak, çerçevede bağlantı rijitliklerinin sonu lara etkisi olduğu g zlenmiştir.

NONLINEAR ANALYSIS OF THE FRAMES

SUMMARY

It is considered that the first order theory would be enough for the analysis of structures. However, if the displacements are greater relative to the dimensions of the system, this theory fails. The effect of the axial normal force produces some differences at the end forces of the bars. In that case equilibrium equations must be written at the deformed body. This theory is named as second order theory.

In this study, first of all, stiffness method is studied. Using first order theory, stiffness matrix and the fixed-end forces have been determined. This kind of analysis will be named as 'linear analysis' in the study.

In the analysis performed by using second order theory, a constant axial normal force is considered. The axial normal force seems in the expression of the bar stiffness matrix as a parameter. Since this normal force is an unknown, the solution must be performed by iteration. This way is named as 'non-linear analysis of the frames' in the study.

At first, the system is solved by linear analysis. The results are used as the initial values of the iteration performed for the non-linear analysis.

As a second case in the second order theory, the weight of a column is considered as a constant axial distributed load. For this case, the differential equation of the elastic curve of the column is solved using the infinite series. The expression of the normal force also includes a constant term. The solution method remains the same with the previous case since the constant distributed load is known.

In the structural analysis, it is important to consider the behavior of the connections. In the traditional structural analysis the beam-to-column connections considered either as rigid joints or as pinned joints. In the actual structures the behavior of all connections are semi-rigid. The behavior of the semi-rigid connections are described using the moment-rotational curves. These curves are given by experimental investigations.

In this study, semi-rigid connections are modelled as rotational springs which causes relative rotations at the ends of the member. Generally the stiffnesses of the springs are located in the stiffness matrix as a variable parameters. In this study, the stiffness of the springs will only be considered as a known parameter.

At the end, a sample problem is solved by using these methods. In the problem, a frame which can cause large displacements has been chosen. It is observed that the non-linear analysis gives quite different results in comparison with the linear analysis. It is found that to consider the column weights as distributed load don't affect the solutions. The problem is solved by SAP2000 analysis program. it is found that SAP2000 solutions are the same as the linear solution.

Same problem is also solved under the assumption of semi-rigid beam-to-column connections. Results are found to be very different from whole previous cases.

1 GİRİŞ

Yapı sistemlerinin analizi yapılırken, günümüzde yaygın olarak kullanılan metotlardan biri matris deplasman metodudur. Matris deplasman metodu, yapı analizi yapılmasında bilgisayar kullanımını olanaklı kılması nedeniyle, özellikle karmaşık yapı sistemleri olan yüksek yapıların analizlerinin yapılmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Yapı analizi yapılırken çoğu durumda birinci mertbe teorisinin yeterli olduğu düşünülür ve bu doğrultuda analiz yapılır.

Birinci mertbe teorisinde, elemanların yük etkidikten sonra şekil değıştirmeden kaldığı varsayılır. Yüksek ve narin kolonların söz konusu olduğu durumlarda ise bu varsayım yetersiz kalabilir. Eksenel kuvvetlerin etkisi çubuklarda ikinci mertbe teorisi kullanılarak analize dahil edilebilir. İkinci mertbe teorisinin kullanılması analiz sırasında non-lineer hesap gerektirmektedir.

Yapı sistemlerinin analizinde yapılan bir diğer varsayım ise bağlantıların tamamen rijit yada mafsalsal olduklarıdır. Gerçekte ise durum bundan farklıdır, bir bağlantı ne tamamen rijittir ne de tamamen mafsalsal. Bu yaklaşım hesapların yapımında büyük kolaylıklar sağlamasına rağmen, yarı-rijit bağlantılar bazı durumlarda dikkate alınmalıdır. (çelik yapılar gibi)

Bu çalışmada ilk olarak düzlem çerçeve yapı oluşturarak elemanlarda birinci mertbe teorisinin geçerli olduğu varsayılacaktır. İkinci olarak çerçeve yapı oluşturarak elemanlarda ikinci mertbe teorisinin geçerli olduğu düşünülecektir. Şekil değıştirmiş eleman için eksenel kuvvetin çekme veya basınç olması halindeki rijitlik matrisleri bulunacaktır. Kolonların kendi ağırlığı, eksen boyunca yayılı bir yük olarak göz önüne alınacaktır. Son olarak, ikinci mertbe teorisi geçerli olduğu varsayılıp, kiriş-kolon bağlantılarının yarı-rijit olduğu durumda hesap yapılabilmesi için eleman rijitlik matrisi hesaplanacaktır.

2 YÖNTEM

2.1 Matris Deplasman Metodu

Günümüzde pahalı olmayan ve aynı zamanda güçlü bilgisayarlar yardımı ile pek çok yapı sistemi matris metotlarını kullanan programlar tarafından dizayn edilmektedir. Matris metodu klasik metotlar üzerine temel olarak yeni bir prensip içermez, aksine klasik denge, uygunluk, kuvvet-deplasman ilişkilerinin matris formunda kullanılmasıdır. Bu sayede büyük ve karmaşık yapı sistemleri bilgisayarlar yardımıyla verimli bir şekilde hesaplanabilir.

Matris deplasman metodunda yapı sistemleri, birbiri ucuna eklenmiş elemanların oluşturduğu bir sistem olarak ele alınır. Elemanların uç noktaları veya bu uç noktalarının birleştiği yerler düğüm noktası olarak isimlendirilir. Sistemdeki her bir elemana ait düğüm noktalarındaki uç kuvvetler ile uç deplasmanları arasındaki bağıntılar matrisler yardımıyla ifade edilebilir.

3 DÜZLEM ÇERÇEVE HESABI

Birbiri ucuna eklenmiş elemanlardan oluşan yapı sistemi çerçeve olarak tanımlanır. Bu elemanlar eğer aynı düzlem içinde bulunuyorsa oluşan sistem düzlem çerçevedir. Çerçeve içindeki çubukların birleştiği yerler ve bu çubukların serbest ya da dış ortama bağlandığı mesnetler de düğüm noktası olarak isimlendirilir.

Çerçeve hesabı yapılırken, önce düğüm noktalarının rijit bileşimli olduğu, çerçevedeki bütün elemanların lineer elastik davrandığı, deplasmanların geometrideki değişime etkisinin çok küçük olduğu göz önünde bulundurulacaktır. Sonra normal kuvvetin etkisi altında büyük deplasmanların oluştuğu kabul edilerek nonlinear analiz yapılacaktır. En son olarak da kiriş - kolon bağlantılarının yarı rijit olması hali incelenecektir.

3.1 Çubuğun Kuvvet - Deplasman İlişkisinin Kurulması

Matris deplasman metodunda, yapı sisteminin genel davranışı ya da geometrisi, *global koordinat sistemi* üzerinde gösterilir. Bir *XY* düzlem koordinat sisteminde bulunan yapı sistemi düzlem çerçeve olarak tanımlanır. Burada çubukların doğru eksenli oldukları kabulü yapılmaktadır. Çerçeveyi oluşturan doğru eksenli çubuklar da aynı zamanda kendilerine ait bir *xyz* koordinat sistemindedir ve *lokal* yada *çubuk koordinat sistemi* olarak isimlendirilir. Kuvvet deplasman ilişkilerini çubuk koordinatlarında göz önüne almak için yapı sistemindeki her bir elemana ait eleman koordinat sistemleri belirlenmelidir.

Bir yapı sisteminde düğüm noktalarındaki bağımsız yer değiştirmelerin her birine serbestlik, bu yer değiştirmelerin sayısına da serbestlik derecesi adı verilir. Düzlem çerçeve çubuğunun başlangıç ve son noktalarında, yatay deplasman, düşey deplasman ve dönme olmak üzere şekil 3.1 de görüldüğü gibi toplam 6 serbestliği vardır. Bu serbestlikler çubuk koordinatlarındadır.



Şekil 3.1: Çubuk koordinatlarında uç serbestlikleri ve yönleri.

Belirli bir doğrultuda birim deplasman elde edebilmek için, taşıyıcı sisteme uygulanması gereken kuvvete rijitlik (stiffness) denir. Bir başka deyişle bir elemanın, herhangi bir serbestliğinin doğrultusunda birim deplasman olduğu ve diğer serbestlik doğrultularındaki bütün deplasmanların sıfır olduğu düşünülen bir kuvvettir. Formüle edilmesi gerekirse, çubuğun j serbestliğinde birim deplasman meydana getiren, i serbestliğindeki kuvvet k_{ij} ile gösterilebilir.

Çubuk elemanın uç noktalarındaki deplasmanlar d_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ ile, aynı doğrultulardaki uç kuvvetleri de p_i ile gösterilirse, eleman için kuvvet-deplasman ilişkisi

$$p_i = k_{ij}d_j + f_i \quad (3.1)$$

olarak kurulabilir. Bu ifadede toplama uyluşımı geçerlidir. Denklemin sonunda görülen f_i terimi eleman üzerindeki yüklerin etkisini temsil etmektedir ve ankastrelik mesnet reaksiyonları olarak isimlendirilir. Ankastrelik mesnet reaksiyonları, üzerinde yük bulunan, bütün uç deplasmanları engellenmiş bir çubuğu dengede tutan uç kuvvetleridir, bir başka deyişle iki ucu ankastre olan bir kirişin mesnet reaksiyonlarıdır.

(3.1) ifadesinde çubuk için kurulan, çubuk koordinatlarındaki kuvvet-deplasman ilişkisi

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{f} \quad (3.2)$$

olarak da gösterilebilir. Bu ifade düzlem çerçeve çubuğu için kurulduğundan burada, uç noktalardaki deplasmanları gösteren deplasman vektörü $\mathbf{d}$ 6x1, rijitlik matrisi $\mathbf{k}$ 6x6, elemanın uç kuvvetlerini gösteren vektör $\mathbf{p}$ de 6x1 boyutlarındadır.

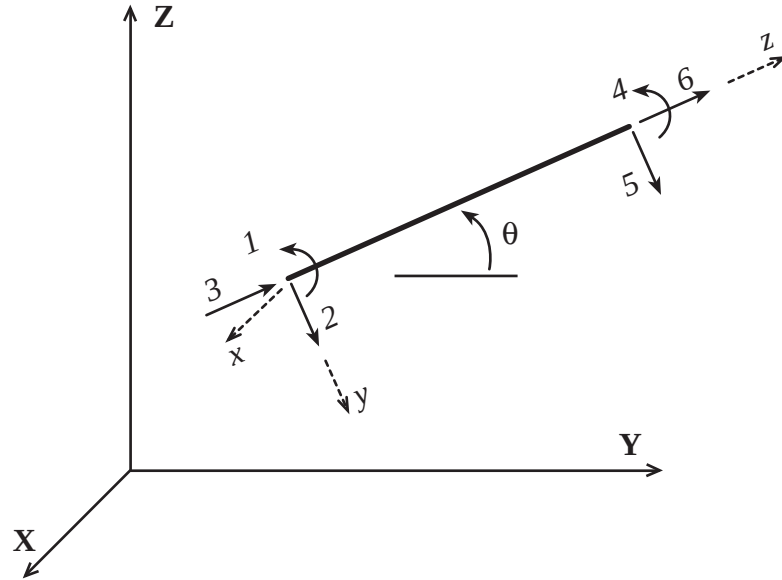
Rijit bağlantılı çerçeve için çubuk rijitlik matrisinin ifadesi pek çok yapı statik kitabında bulunmaktadır ve burada hesabının yapılmasına gerek görülmemiştir. [1] Şekil 3.1 de verilen yönler söz konusu olduğunda, çubuk elemanın rijitlik matrisi

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 4\frac{EI}{L} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 2\frac{EI}{L} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 \\ 12\frac{EI}{L^3} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & -12\frac{EI}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI}{L} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 12\frac{EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

olarak bulunabilir. Burada L çubuk boyu, E çubuğun elastisite modülü, I kesitin x eksenine göre atalet momenti, ve A da çubuğun kesit alanını ifade eden sembollerdir.

3.2 Koordinat Dönüşümleri

Daha önce tarif edilen, düzlem çerçevenin global koordinat sistemi ve bir çubuğun lokal koordinat sistemi şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Global ve çubuk için seçilen koordinat sistemleri

Çubukta kuvvet-deplasman ilişkisinin lokal koordinat sisteminden çerçevenin global koordinat sistemine çevrilmesi, çerçeveye ait bir kuvvet-deplasman ilişkisinin kurula-

bilmesi için gereklidir. Global koordinat sistemi ve bir çubuğun lokal koordinat sistemi arasındaki dönüşümü sağlayan transformasyon matrisi şekil 3.2 de verilen koordinatlar söz konusu ise

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

olacaktır. Burada θ şekil 3.2 de görüldüğü gibi, çerçevenin global koordinat sistemine ait Y eksenine ile çubuğun lokal koordinat eksenine ait z eksenine arasındaki açıdır. Koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm $\bar{\mathbf{Q}}$ matrisi yardımıyla

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{Q}}.\mathbf{X} \quad (3.5)$$

denklemini kullanarak yapılır. $\mathbf{x}$ bir vektörün çubuk koordinat sisteminde, $\mathbf{X}$ ise çerçevenin koordinat sistemindeki ifadesidir. Matris deplasman metodunda yük, kuvvet, deplasman ve rijitlik matrislerinin koordinat sistemleri dönüşümlerinde (3.4) matrisinin genişletilmesi ile oluşturulan $\mathbf{Q}$ matrisi kullanılacaktır. Bu amaç için kullanılacak transformasyon matrisi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

olarak gösterilir. $\mathbf{Q}$ matrisi ortogonal bir matristir ve

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (3.7)$$

özelligi geçerlidir.

Denklem (3.2) de

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}.\mathbf{d} + \mathbf{f}$$

ifadesi çubuk koordinatlarında bulunmuştur. Bu denklemdeki çubuk koordinatları için deplasman matrisi $\mathbf{d}$, yük matrisi $\mathbf{p}$ ve ankastrelik uç reaksiyonlarını gösteren $\mathbf{f}$ matrisi, çubuk için hesaplanan transformasyon matrisinin transpozuyla çarpılarak global koordinatlara çevrilebilir. Çubuğun global koordinatlardaki deplasman vektörü $\bar{\mathbf{d}}$,

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{Q}^T . \mathbf{d} \quad (3.8)$$

çubuğun global koordinatlardaki ankastrelik uç reaksiyonları matrisi $\bar{\mathbf{f}}$,

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{f} \quad (3.9)$$

çubuğun global koordinatlardaki yük matrisi $\bar{\mathbf{p}}$,

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{p} \quad (3.10)$$

olur. Buradan

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{f}) \quad (3.11)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{f} \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{d}} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{f} \quad (3.13)$$

olacaktır. Global koordinatlarda çubuğun kuvvet-deplasman ilişkisini gösteren denklem

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{f}} \quad (3.14)$$

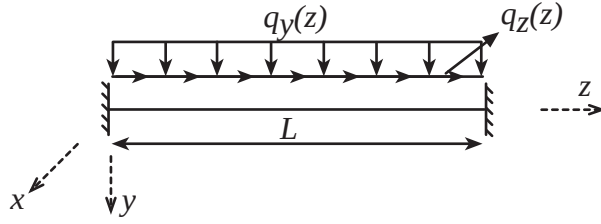
olarak hesaplanır. Burada $\bar{\mathbf{k}}$ çubuğun global koordinat sistemindeki rijitlik matrisidir, (3.13) ile (3.14) denklemleri karşılaştırılırsa

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \quad (3.15)$$

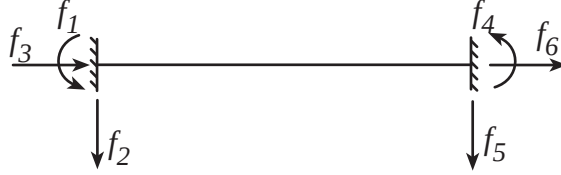
bulunur.

3.3 Sabit Yayılı Yük Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları

Düşey q_y ve yatay q_z sabit yayılı yükleri etkisi altındaki bir çubuğun ankastrelik mesnet reaksiyonlarını bulmak için şekil 3.3 deki gibi iki ucunda ankastre mesnet bulunan bir kirişin mesnet reaksiyonları hesaplanır.



Şekil 3.3: Sabit yayılı yük altındaki kiriş.



Şekil 3.4: Kirişin mesnet reaksiyonları.

Mesnet reaksiyonlarının hesabı için *Birinci Castigliano* teoremi kullanılacaktır. Şekil-deki kiriş üzerindeki herhangi bir noktadaki moment,

$$M = -f_2 z - f_1 - q_y \frac{z^2}{2} \quad (3.16)$$

herhangi bir noktadaki normal kuvvet,

$$N = -f_3 - q_z z \quad (3.17)$$

olur.

Şekil değiştirme enerjisinin dış yüklerden herhangi birine göre kısmi türevi o noktada kuvvet doğrultusunda yapılan yer değiştirmeyi verir,

$$\delta_i = \frac{dU}{df_i} = \int_0^L \left(\frac{dM_x}{df_i} \frac{M_x}{EI_x} + \frac{dN}{df_i} \frac{N}{EA} \right) \quad (3.18)$$

ifadesiyle gösterilebilir.

Şekil 3.3 de, $z = 0$ noktasındaki dönme sıfırdır. Buradan

$$\delta_1 = \frac{\partial U}{\partial f_1} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-f_2 z - f_1 - q_y \frac{z^2}{2} \right) (-1) dz = 0 \quad (3.19)$$

bulunabilir. Düşey kuvvetlerin dengesinden

$$f_2 = f_5 = -\frac{q_y L}{2} \quad (3.20)$$

hesaplanır. (3.19) ifadesindeki denklemde f_2 yerine konulur ve integral hesaplanır ise

$$\frac{1}{EI} \left(-\frac{q_y L^3}{4} + f_1 L + q_y \frac{L^3}{6} \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$f_1 = \frac{q_y L^2}{12} \quad (3.22)$$

bulunabilir. Simetriden

$$f_4 = -f_1 = -\frac{q_y L^2}{12} \quad (3.23)$$

olacaktır.

$z = 0$ noktasında 3 doğrultusundaki yatay deplasman sıfırdır.

$$\delta_3 = \frac{\partial U}{\partial f_3} = \frac{1}{EA} \int_0^L (-f_3 - q_z z) (-1) dz = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{EA} \left(f_3 L + q_z \frac{L^2}{2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

$$f_3 = -\frac{q_z L}{2} \quad (3.26)$$

Yatay kuvvetlerin dengesinden

$$\sum Z = 0 \Rightarrow f_6 = \frac{q_z L}{2} - q_z L = -\frac{q_z L}{2} \quad (3.27)$$

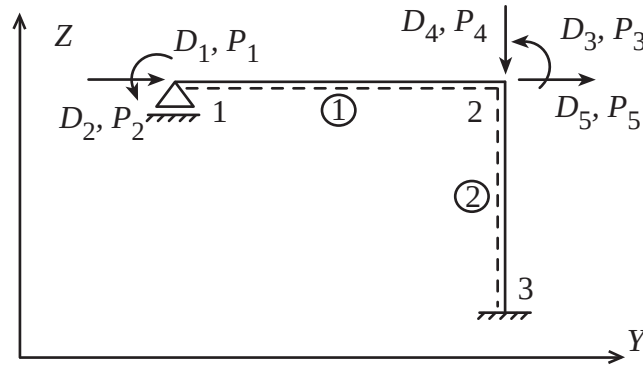
olarak bulunur.

q_y ve q_z yayılı yükleri etkisi altındaki bir çubuk üzerine etkiyen ankastrelik reaksiyonları bir matris olarak yazılabilir.

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{q_y L^2}{12} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ -\frac{q_z L}{2} \\ -\frac{q_y L^2}{12} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ -\frac{q_z L}{2} \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

3.4 Çerçevenin Kuvvet - Deplasman İlişkisinin Kurulması

Çerçeve için düğüm noktalarındaki denge denklemleri yada başka bir deyişle çerçeveye ait kuvvet - deplasman ilişkileri çubukların global koordinatlardaki kuvvet-deplasman ilişkileri kullanılarak oluşturulur. Bunu yapabilmek için öncelikle çerçevedeki bütün çubuklar ve düğüm noktaları numaralandırılır.



Şekil 3.5: Düzlem çerçeve örneği.

Şekil 3.5 de görülen iki çubuk ve üç düğüm noktasından oluşan düzlem çerçeve örneğinde çubuk numaraları yuvarlak içine alınmıştır. Örnekte 5 serbestlik vardır ve D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 ile gösterilmiştir. Düğüm noktalarına gelen tekil yükler de benzer şekilde P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 olarak gösterilmiştir. 1 numaralı düğüm noktasının düşey deplasman doğrultusunda ve 3 numaralı düğüm noktasında mesnet nedeniyle serbestlik yoktur, bu nedenle serbestlik numarası verilmemiştir.

Çerçevede herhangi bir düğüm noktasında birleşen bütün çubukların o düğüm noktasında, her hangi bir serbestlik doğrultusundaki rijitlikleri toplamı, çerçevenin o serbestlik doğrultusundaki rijitliğini verir. Çerçevenin rijitlik matrisi $\mathbf{K}$, çubukların global koordinatlardaki rijitlik matris elemanlarının çerçevenin rijitlik matrisinde uygun yerlere yerleştirilmesiyle bulunur.

Sistemin rijitlik matrisinin katsayılarını K_{ij} ile gösterirsek, burada K_{ij} , sistemin j serbestliği doğrultusunda birim deplasman elde etmek için, i doğrultusunda etki etmesi gereken kuvvet olarak tanımlanabilir. Bu kuvvet, i serbestliği doğrultusunda birleşen çubukların, j serbestliği doğrultusundaki rijitliklerinin toplamıdır. Sistem rijitlik matrisinin bu şekilde oluşturulması, kod numaraları metodu olarak isimlendirilir. [1]

Bir örnekle açıklanması gerekir ise, şekil 3.5 de verilen sistemde 5 serbestlik olduğundan global rijitlik matrisi $\mathbf{K}$ 5×5 boyutlarında olacaktır. $\bar{\mathbf{k}}^{(1)}$ ve $\bar{\mathbf{k}}^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci çubukların 6×6 lık global koordinatlardaki rijitlik matrisleridir. Örneğin çerçevede 3 serbestliği doğrultusunda birim deplasman elde edebilmek için 4 serbestliği doğrultusunda uygulanması gereken kuvvet, global rijitlik matrisinin K_{43} de bulunan elemanıdır, bu da $\bar{k}_{54}^{(1)} + \bar{k}_{31}^{(2)}$ toplamıdır.

Çerçevenin düğüm noktalarına etkiyen tekil yükler $\bar{\mathbf{P}}$ global yük matrisi ile gösterilir. Şekil 3.5 de verilen düzlem çerçeve örneğinde yük matrisi elemanları P_i ler olan 5×1 boyutunda bir matris olacaktır.

Ankastrelik reaksiyonları matrisi $\mathbf{F}$, kod numaraları metodu kullanılarak, çubukların ankastrelik mesnet reaksiyonları matrisinden hesaplanabilir. Örneğin çerçevenin 4 numaralı serbestliğindeki mesnet reaksiyonu, başka bir deyişle çerçevenin mesnet reaksiyonu matrisinin F_4 numaralı elemanı, $\bar{f}_5^{(1)} + \bar{f}_3^{(2)}$ toplamı olacaktır.

3.5 Matris Deplasman Metodunda Çerçeve Analizi

Burada $\mathbf{D}$ düğüm noktalarındaki deplasmanları temsil eden bir vektör olmak üzere, matris deplasman metodunda, düğüm noktalarındaki deplasmanlar

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{K} \mathbf{D} + \mathbf{F} \quad (3.29)$$

şeklindeki bir denklem takımı çözülerek elde edilir. Çubuk uç noktalarındaki deplasmanların çerçevenin ilgili düğüm noktalarındaki deplasmanlarla aynı olduğu bilinmektedir. Çözülen düğüm noktası deplasmanları, tekrar eleman koordinatlarına çevrilerek 3.2 bağıntısında yerine konur ve buradan son olarak $\mathbf{p}$ çubuk uç kuvvetleri bulunabilir.

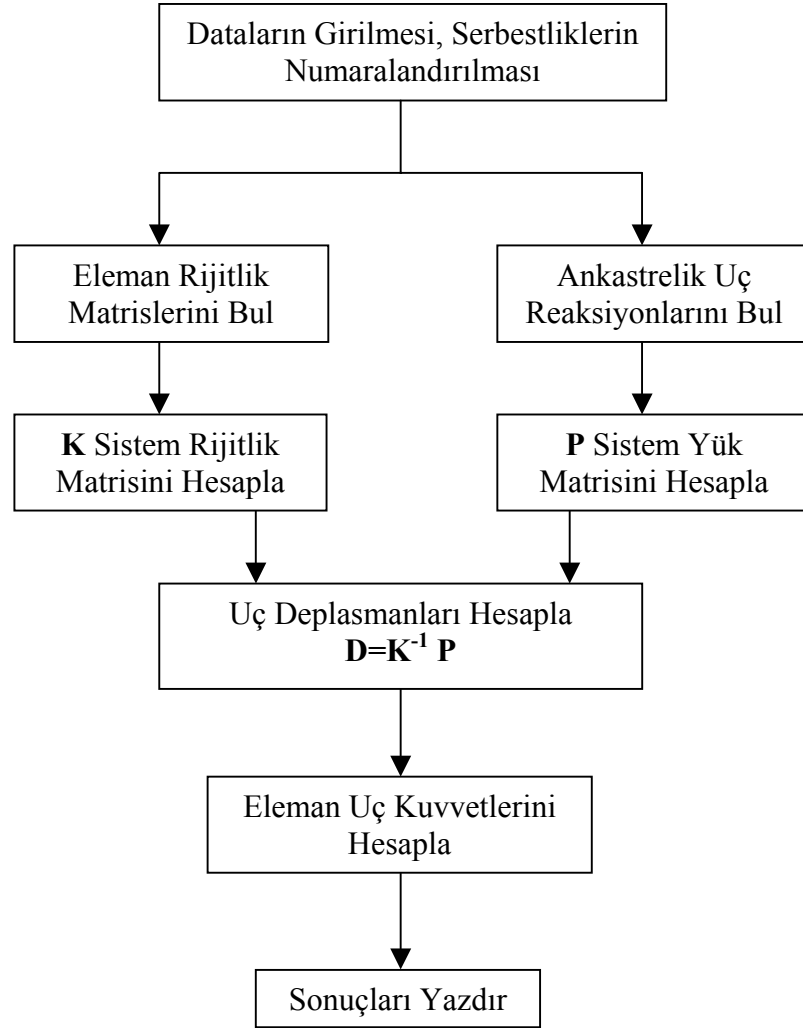
3.6 Matris Deplasman Metoduna Genel Bakış

Bir yapı sistemini matris deplasman metodu ile hesaplanabilmesi için problemin uygun şekilde metoda uygulanması gerekir. Bunun için gerekli işlemler aşağıda sıralanmıştır.

- Çerçeve üzerindeki her bir düğüm noktası ve eleman numaralandırılır.
- Çubukların başlangıç ve son noktaları belirlenir.

- Sistemin tümü için bir global koordinat sistemi seçilir. Her bir çubuk için de çubuğun koordinat sisteminden seçilen global koordinat sistemine geçişi sağlayan transformasyon matrisi hesaplanır.
- Çerçeveedeki bilinmeyen düğüm noktası deplasmanları belirlenir.
- Her bir çubuk için çubuk koordinatlarında rijitlik matrisi k , yük matrisi p ve ankastrelik reaksiyon matrisi f hesaplanır.
- Çubuk için hesaplanan bu matrisler çubuk koordinatlarındadır ve transformasyon matrisleri kullanılarak $\bar{k} = Q^T \cdot k \cdot Q$, $\bar{p} = Q^T \cdot p$, $\bar{f} = Q^T \cdot f$ denklemleri ile global koordinat sistemine çevrilir.
- Kod numaraları metodunu kullanarak sistemin global rijitlik matrisi K , yük matrisi $\bar{P}$ ve F matrislerini hesaplanır.
- Çerçevenin düğüm noktalarındaki bilinmeyen deplasman matrisi D , $\bar{P} = K \cdot D + F$ denklem takımı çözülerek bulunur.
- Global koordinatlardaki eleman deplasmanları $\bar{d}$, çerçevenin düğüm noktaları deplasman matrisinden kod numaraları kullanılarak bulunur. Çubuk koordinatlarında çubuk uç deplasmanları, global koordinatlardaki $\bar{d}$ matrisinden, $d = Q \cdot \bar{d}$ denklemi kullanılarak bulunur.
- Elemanın uç kuvvetleri p ise $p = k \cdot d + f$ bağıntısı ile hesaplanır.

3.7 Lineer Çerçeve Hesabı İçin Bilgisayar Programı Akış Diyagramı



Şekil 3.6: Lineer çerçeve hesabı için akış diyagramı.

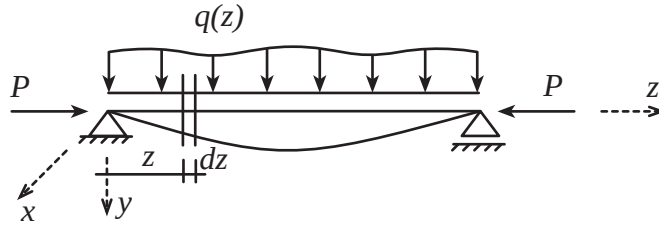
4 DÜZLEM ÇERÇEVELERİN NON-LİNEER HESABI

Bundan önce yapılan hesaplarda deplasmanların sistem boyutlarının yanında çok küçük olduğu kabul edilmişti. Normal kuvvet etkisi altında bir çubukta deplasmanların sistem boyutlarının yanında ihmal edilemeyecek kadar büyümesi halinde bu kabul geçersiz olur ve denge denklemleri şekil değiştirmiş cisim üzerinde yazılmalıdır. Bu tarz hesaba ikinci mertebe teorisi denilmektedir.

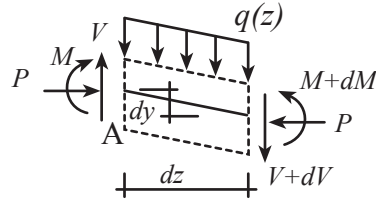
Eleman üzerinde eksen doğrultusunda bir kuvvet etkidiğinde durum ikinci mertebe teorisiyle incelenebilir. İkinci mertebe teorisi ile yapılan hesaplarda süperpozisyon ilkesi geçerliliğini yitirmektedir. Sistemde sabit bir eksenel kuvvet varsa, kuvvetin elemanın rijitlik matrisine etkisi bir parametre olarak göz önünde bulundurulacaktır.

4.1 Eksenel Basınç Etkisindeki Bir Çubuğun Diferansiyel Denklemini

Üzerinde düşey q yayılı yükü ve eksenel doğrultuda P sabit yükü bulunan (Şekil 4.1) bir çubuğun herhangi bir z noktasından sonsuz küçük dz boyunda bir eleman çıkarılacaktır. (Şekil 4.2)



Şekil 4.1: Yatay ve eksenel kuvvetlerin etkisi altındaki kiriş.



Şekil 4.2: Kiriş üzerinden alınan sonsuz küçük eleman.

Çubuğun elastik eğrisinin diferansiyel denklemini bulmak için denge denklemleri uygulanır. Düşey kuvvetlerin dengesi yazılırsa

$$\sum Y = 0 \Rightarrow qdz - V + V + dV = 0$$

$$qdz + dV = 0$$

$$\frac{dV}{dz} = -q \quad (4.1)$$

bulunur. A Noktasına Göre Moment Dengesi ise

$$\sum M_A = 0$$

$$qdz \frac{dz}{2} + M - (M + dM) + Pdy + (V + dV)dz = 0$$

$dzdz$ ve $dVdz$ çarpımları çok küçük mertebede olduğundan ihmal edilerek

$$-dM + Pdy + Vdz = 0$$

$$-\frac{dM}{dz} + P\frac{dy}{dz} + V = 0 \quad (4.2)$$

sonucunu verir. (4.2) ifadesinde verilen denklem z 'e göre türetilirse

$$-\frac{d^2M}{dz^2} + P\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dV}{dz} = 0 \quad (4.3)$$

bulunur. Kesme kuvvetinin elastik eğriye etkisi ihmal edilirse elastik eğri denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.4)$$

(4.4) ifadesinden M çözülüp (4.3) denkleminde yerine konursa,

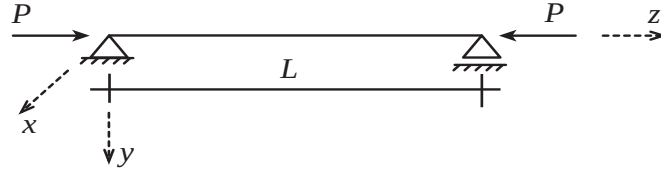
$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + P \frac{d^2 y}{dz^2} - q = 0 \quad (4.5)$$

denklemini elde edilir, düzenlenirse

$$y^{(IV)} + \frac{P}{EI} y'' = \frac{q}{EI} \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Burada y düşey deplasmanı, P eksenel doğrultudaki kuvveti, E çubuğun elastisite modülünü ve I da çubuk kesitinin x eksenine göre atalet momentini temsil etmektedir. (4.6) ifadesiyle verilen denklem, üzerinde yayılı yük ve eksenel tekil yük olan kirişin elastik eğrisinin diferansiyel denklemidir.

4.2 Eksenel Basınç Kuvveti Altındaki Bir Çubuğun Rijitlik Matrisi



Şekil 4.3: P eksenel basıncı etkisi altındaki kiriş

Eksenel basınç etkisi altındaki bir çubuğun (Şekil 4.3) elastik eğrisinin diferansiyel denklemi, (4.6) ifadesinde $q = 0$ yazılarak ulunur.

$$y^{(IV)} + \frac{P}{EI} y'' = 0 \quad (4.7)$$

Denklemini basitleştirmek için

$$u = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (4.8)$$

kısaltması yapıldığında denklem

$$y^{(IV)} + u^2 y'' = 0 \quad (4.9)$$

halini alır. Bu sabit katsayılı, lineer homogen denklemin çözümü, $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sınır koşullarından bulunacak olan integral sabitleri olmak üzere

$$y = A_1 \sin uz + A_2 \cos uz + A_3 z + A_4 \quad (4.10)$$

şeklindedir. (4.10) denklemini nonlineer halde çubuk rijitlik matrisinin bulunması için kullanılacaktır. Öncelikle çubuk uç noktalarındaki deplasmanlar hesaplanmalıdır. (Şekil 4.4)



Şekil 4.4: Çubuk uç kuvvetleri ve uç deplasmanları.

$z = 0$ ucundaki dönme,

$$d_1 = - \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0} = -uA_1 - A_3 \quad (4.11)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_2 = y|_{z=0} = A_2 + A_4 \quad (4.12)$$

$z = L$ ucundaki dönme,

$$d_4 = - \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=L} = -u \cos(uL)A_1 + u \sin(uL)A_2 - A_3 \quad (4.13)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_5 = y|_{z=L} = \sin(uL)A_1 + \cos(uL)A_2 + LA_3 + A_4 \quad (4.14)$$

olacaktır. Uç deplasmanları ile A_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) katsayıları arasındaki bağıntılar aşağıdaki sistemle özetlenebilir.

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -u & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -u \cos(uL) & u \sin(uL) & -1 & 0 \\ \sin(uL) & \cos(uL) & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Bu da kısaca matris formunda

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (4.16)$$

olarak yazılabilir. Şekil 4.3 de verilen kirişin uç kuvvetlerini de (4.7) ifadesinde verilen denklemden bulabiliriz.

$z = 0$ ucundaki moment,

$$f_1 = -(M)|_{z=0} = EI(y'')|_{z=0}$$

$$f_1 = EI(-u^2 A_2) \quad (4.17)$$

aynı uçtaki düşey kuvvet,

$$f_2 = -(V)|_{z=0} = EI(y''')|_{z=0} + P(y')|_{z=0}$$

$$f_2 = EI(-u^3 A_1) + P(u A_1 + A_3) \quad (4.18)$$

(4.8) denkleminde $P = EIu^2$ yazılıp üstteki denklemde kullanılırsa

$$f_2 = EIu^2 A_3 \quad (4.19)$$

olur. $z = L$ ucundaki moment,

$$f_4 = (M)|_{z=L} = -EI(y'')|_{z=L}$$

$$f_4 = -EI(-u^2 \sin(uL)A_1 - u^2 \cos(uL)A_2) \quad (4.20)$$

Sağ uçtaki düşey kuvvet,

$$f_5 = (V)|_{z=L} = -EI(y''')|_{z=L} - P(y')|_{z=L}$$

$$\begin{aligned} f_5 = & -EI(-u^3 \cos(uL)A_1 + u^3 \sin(uL)A_2) \\ & -P(u \cos(uL)A_1 - u \sin(uL)A_2 + A_3) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$P = EIu^2$ için,

$$\begin{aligned} f_5 = & EI(u^3 \cos(uL)A_1 - u^3 \sin(uL)A_2) \\ & + EIu^2(-u \cos(uL)A_1 + u \sin(uL)A_2 - A_3) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$f_5 = -EIu^2 A_3 \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Uç kuvvetleri, A bilinmeyenlerine bağlı olarak lineer denklem takımı haline getirilir.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 & 0 \\ u^2 \sin(uL) & u^2 \cos(uL) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Denklem kısaca matris formunda

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. Çubuk rijitlik matrisini bulmak için aşağıdaki işlemler yapılacaktır. (4.16) denklemi kullanılarak

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \quad (4.26)$$

bulunur, (4.25) de yerine konursa

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \quad (4.27)$$

olacaktır.

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}_{b_0} \mathbf{D} \quad (4.28)$$

olduğu düşünülürse,

$$\mathbf{k}_{b_0} = \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{k}_{b_0} = EI \begin{bmatrix} \frac{u(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} & \frac{-u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & \frac{u(s-Lu)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} \\ \frac{-u^3s}{-2+2c+Lus} & \frac{-u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & \frac{-u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^3s}{-2+2c+Lus} \\ \frac{u(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & \frac{-u^3s}{-2+2c+Lus} & \frac{u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

olarak çubuk rijitlik matrisi bulunur. Bu ifadede

$$\begin{aligned} c &= \cos(Lu) \\ s &= \sin(Lu) \end{aligned} \quad (4.30)$$

kısaltmaları kullanılmıştır. (4.29) ifadesi ile verilen rijitlik matrisine, çubuktaki eksenel kuvvetin meydana getirdiği eksenel deplasmanın bir başka deyişle çubuk boyundaki kısılmanın etkisi de katıldığında üzerinde P basıncı olan bir çubuğun rijitlik matrisine ulaşılır.

$$\mathbf{k}_b = EI \begin{bmatrix} \frac{u(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} & \frac{-u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & 0 & \frac{u(s-Lu)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & 0 \\ & \frac{-u^3s}{-2+2c+Lus} & 0 & \frac{-u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^3s}{-2+2c+Lus} & 0 \\ & & \frac{A}{IL} & 0 & 0 & -\frac{A}{IL} \\ & & & \frac{u(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} & \frac{u^2(-1+c)}{-2+2c+Lus} & 0 \\ & & & & \frac{-u^3s}{-2+2c+Lus} & 0 \\ & & & & & \frac{A}{IL} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

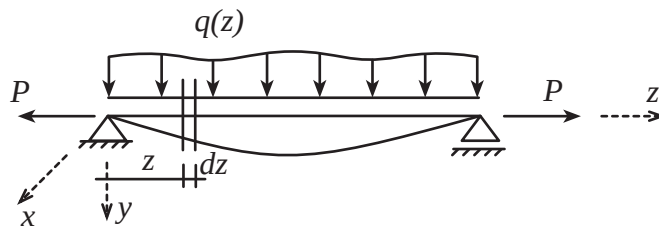
4.31 eşitliğindeki k_b rijitlik matrisini, normal kuvvetin olmaması durumunda

$$\lim_{P \rightarrow 0} \mathbf{k}_b = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 \\ & \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 \\ & & \frac{A}{IL} & 0 & 0 & -\frac{A}{IL} \\ & & & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 \\ & & & & \frac{12}{L^3} & 0 \\ & & & & & \frac{A}{IL} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

halini alır. Bu da lineer haldeki çubuk rijitlik matrisine eşittir.

4.3 Eksenel Çekme Kuvveti Altındaki Bir Çubuğun Rijitlik Matrisi

Eksenel çekme altındaki bir çubuğun rijitliği, eksenel basınç altında olan bir çubuk için çıkartılan (4.6) ifadesindeki diferansiyel denklemde P yerine $-P$ konularak bulunabilir. Böylelikle Şekil 4.5 deki gibi bir çubuğun diferansiyel denklemi



Şekil 4.5: Eksenel çekme altında bulunan çubuk.

$$y^{(IV)} - \frac{P}{EI}y'' = \frac{q}{EI} \quad (4.33)$$

olacaktır. Benzer şekilde çubuğun çekme etkisi altında bulunduğu durum için hesaplanacak rijitlik matrisi de (4.31) ifadesinde verilen basınç altındaki çubuğun rijitlik matrisinden türetilir. Bu durumda (4.8) ifadesinde verilen $u = \sqrt{P/EI}$ kısaltması içinde P yerine $-P$ konulur ve

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{-P}{EI}} \quad (4.34)$$

$$\bar{u} = i \sqrt{\frac{P}{EI}} ; (i = \sqrt{-1}) \quad (4.35)$$

$$\bar{u} = iu \quad (4.36)$$

olarak bulunur. (4.31) matrisi içinde u yerine iu konularak normal kuvvetin çekme olması halindeki rijitlik matrisi bulunur. Hiperbolik fonksiyonlarla trigonometrik fonksiyonlar arasındaki

$$\sinh u = -i \sin iu$$

$$\cosh u = \cos iu$$

bağıntıları anımsanırsa ve

$$\bar{c} = \cosh(Lu) \quad (4.37)$$

$$\bar{s} = \sinh(Lu) \quad (4.38)$$

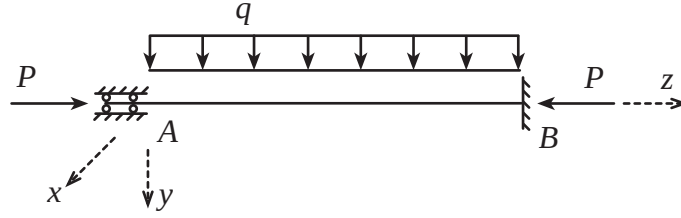
kısaltmaları yapılırsa, çekme altındaki bir çubuğun rijitlik matrisi

$$\mathbf{k}_c = EI \begin{bmatrix} \frac{u(\bar{s}-Lu\bar{c})}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & \frac{(-1+\bar{c})u^2}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & \frac{-u(\bar{s}-Lu)}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & \frac{-(-1+\bar{c})u^2}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 \\ \frac{-u^3\bar{s}}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & \frac{(-1+\bar{c})u^2}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & \frac{u^3\bar{s}}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & 0 \\ \frac{A}{IL} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{IL} \\ \frac{u(\bar{s}-Lu\bar{c})}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & \frac{-(-1+\bar{c})u^2}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & \frac{-u(\bar{s}-Lu)}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & \frac{-(-1+\bar{c})u^2}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 \\ \frac{-u^3\bar{s}}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & 0 & \frac{u^3\bar{s}}{-2+2\bar{c}-Lu\bar{s}} & 0 & 0 \\ \frac{A}{IL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{IL} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

olarak hesaplanır. Bu matrisin normal kuvvetin olmaması hali için limiti alınırsa, lineer haldeki çubuk rijitlik matrisine ulaşılır.

4.4 Düzgün Yayılı Yük Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı

Üzerinde eksenine dik düzgün yayılı yük ve eksenel kuvvet bulunan bulunan şekil 4.6 deki gibi bir sistemde eksenel kuvvetin, yayılı yük nedeniyle oluşacak uçlardaki reaksiyonlar üzerinde bir etkisi olur. Eksenel kuvvet basınç olduğunda uçlardaki momentler azalacak, kuvvet çekme olduğu durumda ise uç momentler artacaktır.



Şekil 4.6: Düzgün yayılı yük ve eksenel basınç kuvveti altında bulunan çubuk.

4.4.1 Basınç Etkisindeki Bir Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı

Eksenel basınç P ve sabit bir yayılı q yükü altındaki çubuğun diferansiyel denklemi (4.6) ifadesinde verilmişti. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$y = A_1 \sin uz + A_2 \cos uz + A_3 z + A_4 + \frac{qz^2}{2P} \quad (4.40)$$

olacaktır. Mesnet reaksiyonlarının hesaplanması için öncelikle A_i integrasyon sabitlerinin hesaplanması gereklidir. Bunun için sınır koşulları kullanılacaktır.

Uç noktadaki deplasmanlar:

$z = 0$ ucundaki dönme,

$$d_1 = -\left(\frac{dy}{dz}\right)\bigg|_{z=0} = -uA_1 - A_3 \quad (4.41)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_2 = y|_{z=0} = A_2 + A_4 \quad (4.42)$$

$z = L$ ucundaki dönme,

$$d_4 = - \left(\frac{dy}{dz} \right) \Big|_{z=L} = -u \cos(uL)A_1 + u \sin(uL)A_2 - A_3 - \frac{qL}{P} \quad (4.43)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_5 = y|_{z=L} = \sin(uL)A_1 + \cos(uL)A_2 + LA_3 + A_4 + \frac{qL^2}{2P} \quad (4.44)$$

olarak bulunur. Yukarıda belirtilen sınır koşulları, matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -u & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -u \cos(uL) & u \sin(uL) & -1 & 0 \\ \sin(uL) & \cos(uL) & L & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{P} \\ \frac{qL^2}{2P} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Bu ifadedeki 4×4 'lük matris (4.15) ifadesindeki **B** matrisiyle aynıdır.

Ankastrelik uç reaksiyonlarının hesabı, iki ucunda ankastre mesnet olan bir çubuk düşünülerek yapılır. Bütün uç deplasmanlar sıfırdır. Bu (4.45) ifadesine uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -u & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -u \cos(uL) & u \sin(uL) & -1 & 0 \\ \sin(uL) & \cos(uL) & L & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} + \frac{q}{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \\ L^2/2 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

bulunur. Bu eşitlikten (4.8) bağıntısı da kullanılarak A integrasyon sabitleri çözülebilir.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = -\frac{q}{u^2 EI} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \\ L^2/2 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$A_1 = \frac{Lq}{2EIu^3} \quad (4.48)$$

$$A_2 = \frac{Lq}{2EIu^3} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \quad (4.49)$$

$$A_3 = -\frac{Lq}{2EIu^2} \quad (4.50)$$

$$A_4 = -\frac{Lq}{2EIu^3} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \quad (4.51)$$

Hesaplanan integrasyon sabitleri (4.40) ifadesinde verilen denklemde yerine konulur ise, iki ucunda ankastre mesnet olan bir kirişin diferansiyel denkleminin çözümü bulunur.

$$y = \frac{Lq}{2EIu^3} \sin uz + \frac{Lq}{2EIu^3} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \cos uz - \frac{Lq}{2EIu^2} z - \frac{Lq}{2EIu^3} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) + \frac{qz^2}{2P} \quad (4.52)$$



Şekil 4.7: Mesnet Reaksiyonları

Bu denklemden şekil 4.7 de görülen mesnet reaksiyonları hesaplanabilir.

A noktasındaki ($z = 0$) moment,

$$f_1 = -M|_{z=0} = EI \frac{d^2 y}{dz^2} = EI \left(\frac{q}{P} - \frac{Lq}{2EIu} \cot \frac{Lu}{2} \right)$$

sadeleştirilirse,

$$f_1 = \frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \right) \quad (4.53)$$

B noktasındaki ($z = L$) moment,

$$\begin{aligned} f_4 = M|_{z=L} &= -EI \frac{d^2 y}{dz^2} \\ &= -EI \left(\frac{q}{P} - \frac{Lq}{2EIu} \cot \frac{Lu}{2} \cos(Lu) - \frac{Lq}{2EIu} \sin(Lu) \right) \end{aligned}$$

sadeleştirilirse,

$$f_4 = -EI \left(\frac{q}{P} - \frac{Lq}{2EIu} \cot \frac{Lu}{2} \right)$$

$$f_4 = -\frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \right) \quad (4.54)$$

A noktasındaki ($z = 0$) düşey mesnet reaksiyonu,

$$f_2 = (-EIy''' - Py')|_{z=0} = \frac{Lq}{2} \quad (4.55)$$

B noktasındaki ($z = L$) düşey mesnet reaksiyonu,

$$\begin{aligned} f_5 &= (-EIy''' - Py')|_{z=L} \\ &= -EI \left(-\frac{Lq}{2EI} \cos(Lu) + \frac{Lq}{2EI} \cot \frac{Lu}{2} \sin(Lu) \right) \\ &\quad - P \left(\frac{Lq}{P} - \frac{Lq}{2EIu^2} + \frac{Lq}{2EIu^2} \cos(Lu) - \frac{Lq}{2EIu^2} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \sin(Lu) \right) \end{aligned}$$

sadeleştirilirse,

$$f_5 = Lq \left(-\frac{3}{2} + \frac{P}{EIu^2} \right)$$

$$f_5 = -\frac{Lq}{2} \quad (4.56)$$

bulunur. Hesaplanan mesnet reaksiyonları bir vektör halinde yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} \frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \right) \\ \frac{Lq}{2} \\ 0 \\ -\frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \cot\left(\frac{Lu}{2}\right) \right) \\ -\frac{Lq}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

4.4.2 Çekme Kuvveti Etkisindeki Bir Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı

Eksenel P kuvvetinin çekme olması durumunda ankastrelik uç reaksiyonları, kuvvetin basınç olduğu durum için (4.57) ifadesinde hesaplanan ankastrelik uç kuvvetlerinde P yerine $-P$ ve dolayısıyla (4.36) ifadesinde hesaplandığı gibi u yerine de iu konularak bulunacaktır. Bu durumda eksenel çekme kuvveti ve düzgün yayılı yük altında bulunan

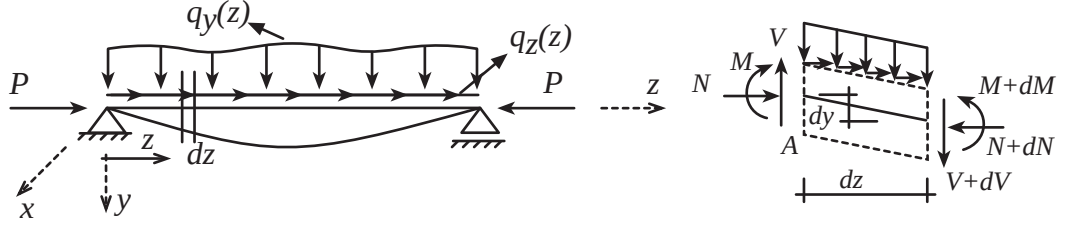
bir çubuğun ankastrelik uç reaksiyonları

$$f = \begin{Bmatrix} -\frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \coth\left(\frac{Lu}{2}\right)\right) \\ \frac{Lq}{2} \\ 0 \\ \frac{q}{u^2} \left(1 - \frac{Lu}{2} \coth\left(\frac{Lu}{2}\right)\right) \\ -\frac{Lq}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

olarak bulunur.

4.5 Düzgün, Eksenel Yayılı Yük Etkisi Altındaki Çubuğun Ankastrelik Uç Reaksiyonları Hesabı

Çubuktan sonsuz küçük bir eleman çıkarılırsa (Şekil 4.8) ve denge denklemleri yazılırsa.



Şekil 4.8: Yatay ve düşey yayılı yük altında kiriş.

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V + q_y dz + (V + dV) = 0 \quad (4.59)$$

$$q_y = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow V = -q_y z + V_0 \quad (4.60)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N + q_z dz - (N + dN) = 0 \quad (4.61)$$

$$q_z = \frac{dN}{dz} \Rightarrow N = q_z z + N_0 \quad (4.62)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$M + q_y dz \frac{dz}{2} - q_z dz \frac{dy}{2} + (N + dN)dy + (V + dV)dz - (M + dM) = 0 \quad (4.63)$$

Sonsuz küçük terimlerin çarpımları ihmal edildiğinde (4.63) denklemindeki eşitlik

$$Ndy + Vdz - dM = 0$$

$$\frac{dM}{dz} = N \frac{dy}{dz} + V \quad (4.64)$$

halini alır. Kesme kuvvetinin elastik eğriye etkisi ihmal edilirse, elastik eğrinin denklemi

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.65)$$

olarak yazılabilir. (4.65) ifadesi (4.64) denkleminde kullanılır ve (4.62), (4.60) eşitlikleri de hatırlanırsa

$$-EI \frac{d^3 y}{dz^3} = N \frac{dy}{dz} + V$$

$$-EI \frac{d^3 y}{dz^3} = (N_0 + q_z z) \frac{dy}{dz} + (V_0 - q_y z) \quad (4.66)$$

elde edilir. (4.66) ifadesi, z 'ye göre türetilir ise Şekil 4.8 'da görülen sistemin elastik eğrisinin diferansiyel denklemi bulunur.

$$-EI \frac{d^4 y}{dz^4} = \frac{d}{dz} [(N_0 + q_z z) \frac{dy}{dz}] - q_y$$

düzenlenirse

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{d}{dz} [(N_0 + q_z z) \frac{dy}{dz}] = q_y \quad (4.67)$$

elde edilir. (4.67) ifadesinde verilen diferansiyel denklemin yerine (4.66) denkleminin çözümünün yapılması tercih edilmiştir. Bu dördüncü mertebe diferansiyel denklem yerine aşağıda verilen üçüncü mertebe diferansiyel denklemin çözülmesi demektir.

$$EI \frac{d^3 y}{dz^3} + (N_0 + q_z z) \frac{dy}{dz} = q_y z + C_1 \quad (4.68)$$

$$\frac{dy}{dz} = \theta \quad (4.69)$$

dönüşümü yapılırsa, diferansiyel denklem

$$EI\theta'' + (N_0 + q_z z)\theta = q_y z + C_1 \quad (4.70)$$

$$\theta'' + \left(\frac{N_0}{EI} + \frac{q_z}{EI}z\right)\theta = \frac{q_y}{EI}z + C_1 \quad (4.71)$$

halini alır. Bu değişken katsayılı homogen olmayan bir diferansiyel denklemdir ve çözüm bir seri olarak aranacaktır. Bunun için önce z yerine boyutsuz bir ξ değişkeni tanımlanmıştır,

$$z = A\xi \quad (4.72)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{1}{A} \quad (4.73)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{1}{A^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \quad (4.74)$$

olacaktır.

(4.72), (4.73), (4.74) ifadeleri (4.71) de denkleminde kullanılırsa,

$$\frac{1}{A^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(\frac{N_0}{EI} + \frac{q_z}{EI}A\xi\right)\theta = \frac{q_y}{EI}A\xi + C_1$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(A^2 \frac{N_0}{EI} + \frac{q_z}{EI}A^3\xi\right)\theta = \frac{q_y}{EI}A^3\xi + C_1A^2 \quad (4.75)$$

Boyutsuzlaştırma için

$$\frac{q_z}{EI}A^3 = 1 \quad (4.76)$$

alınır ise

$$A = \left(\frac{EI}{q_z}\right)^{1/3} \quad (4.77)$$

olur. Buradan

$$\xi = \frac{z}{\left(\frac{EI}{q_z}\right)^{1/3}} \quad (4.78)$$

olduğu bulunabilir. 4.77 ifadesi 4.75 denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(\left(\frac{EI}{q_z}\right)^{2/3} \frac{N_0}{EI} + \xi\right)\theta = \frac{q_y}{EI} \frac{EI}{q_z} \xi + K \quad (4.79)$$

elde edilir. Bu denklemde K integrasyon sabitidir. Denklemi basitleştirmek için

$$\beta = \left(\frac{EI}{q_z}\right)^{2/3} \frac{N_0}{EI} \quad (4.80)$$

$$\gamma = \frac{q_y}{q_z} \quad (4.81)$$

kısaltmaları yapılmıştır. Bu durumda denklem

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + (\beta + \xi)\theta = \gamma\xi + K \quad (4.82)$$

halini alır.

Bu ikinci derece diferansiyel denklemin çözümü

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \quad (4.83)$$

serisi kullanılarak aranacaktır. Buradan

$$\theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) \xi^{n-2} \quad (4.84)$$

bulunur. (4.83) ifadesindeki seri, 4.82 denkleminde kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) \xi^{n-2} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+1} = \gamma\xi + K \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}
& a_0(0)(0-1)\xi^{-2} + a_1(1)(1-1)\xi^{-1} + (a_2 2(2-1) + \beta a_0 - K) \\
& + (a_3 3(3-1) + \beta a_1 + a_0 - \gamma)\xi + \sum_{n=4}^{\infty} a_n n(n-1)\xi^{n-2} \\
& + \beta \sum_{n=2}^{\infty} a_n \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.86}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& (a_2 2(2-1) + \beta a_0 - K) + (a_3 3(3-1) + \beta a_1 + a_0 - \gamma)\xi \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+3}(m+3)(m+2)\xi^{m+1} + \beta \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1}\xi^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \xi^{m+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
& (a_2 2(2-1) + \beta a_0 - K) + (a_3 3(3-1) + \beta a_1 + a_0 - \gamma)\xi \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m+3}(m+3)(m+2) + \beta a_{m+1} + a_m] \xi^{m+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Bu denklemin her koşulda sağlanabilmesi için ξ^n 'nin farklı kuvvetlerinin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir.

Sabit terimin katsayısı 0 'a eşitlenirse,

$$a_2 = \frac{1}{2.1}(K - \beta a_0) \tag{4.89}$$

ξ 'nin katsayısı 0 'a eşitlenirse,

$$a_3 = \frac{1}{3.2}(-a_0 + \gamma - \beta a_1) \tag{4.90}$$

bulunur. ξ^{m+1} , $m \geq 1$ 'in katsayısı 0 'a eşitlenerek serinin regürans bağıntısı

$$a_{m+3} = (-\beta a_{m+1} - a_m) \frac{1}{(m+3)(m+2)} \tag{4.91}$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlikten diğer a_n katsayıları bulunur, $m = 1$ için,

$$a_4 = -\frac{1}{4.3}(\beta a_2 + a_1)$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.3}(\beta \frac{1}{2.1}(K - \beta a_0) + a_1) = -\frac{K}{4.3.2.1}\beta + a_0 \frac{\beta^2}{4.3.2.1} - a_1 \frac{1}{4.3} \tag{4.92}$$

$m = 2$ için,

$$a_5 = (-\beta a_3 - a_2) \frac{1}{5.4}$$

$$a_5 = \frac{1}{5.4} \left(-\beta \frac{1}{3.2} (-a_0 + \gamma - \beta a_1) - \frac{1}{2.1} (K - \beta a_0) \right)$$

$$a_5 = \frac{1}{5.4} \left(-\frac{K}{2.1} \right) - \frac{\gamma \beta}{5.4.3.2} + a_0 \frac{\beta 4}{5.4.3.2.1} + a_1 \frac{\beta^2}{5.4.3.2} \quad (4.93)$$

$m = 3$ için,

$$a_6 = -(\beta a_4 + a_3) \frac{1}{6.5}$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.5} \beta \left(-\frac{K}{4!} \beta + a_0 \frac{\beta^2}{4!} - a_1 \frac{1}{4.3} \right) - \frac{1}{6.5.3.2} (-a_0 + \gamma - \beta a_1)$$

$$a_6 = \frac{K\beta^2}{6!} - \frac{4\gamma}{6!} + a_0 \left(-\frac{1}{6!} \beta^3 + \frac{4}{6!} \right) + a_1 \frac{1}{6!} (2\beta + 4\beta) \quad (4.94)$$

Katsayılar seride kullanılarak

$$\begin{aligned} \theta = K & \left[\frac{1}{2!} \xi^2 - \frac{1}{4!} \beta \xi^4 - \frac{3}{5!} \xi^5 + \frac{1}{6!} \beta^2 \xi^6 + \dots \right] \\ & + \gamma \left[\frac{1}{3!} \xi^3 - \frac{1}{5!} \beta \xi^5 - \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] \\ & + a_0 \left[1 - \frac{\beta}{2!} \xi^2 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{\beta^2}{4!} \xi^4 + \frac{4\beta}{5!} \xi^5 - \frac{\beta^3}{6!} \xi^6 + \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] \\ & + a_1 \left[\xi - \frac{\beta}{3!} \xi^3 - \frac{2}{4!} \xi^4 + \frac{\beta^2}{5!} \xi^5 + \frac{6\beta}{6!} \xi^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

şeklinde θ fonksiyonu bulunur.

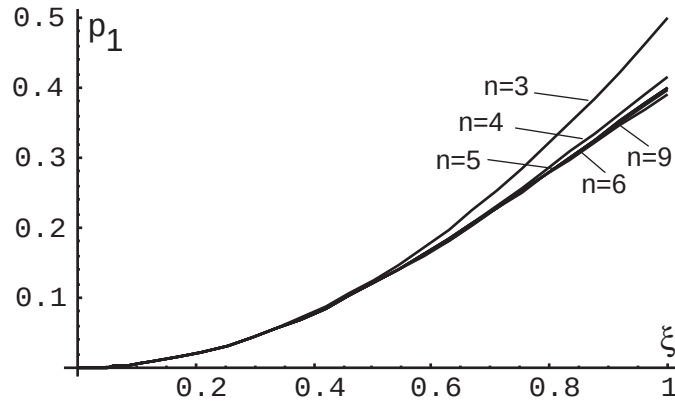
$$\begin{aligned}
\theta = & K \left[\frac{1}{2!} \xi^2 - \frac{3}{5!} \xi^5 + \dots \right] + K \left[-\frac{1}{4!} \beta \xi^4 + \frac{1}{6!} \beta^2 \xi^6 + \dots \right] \\
& + \gamma \left[\frac{1}{3!} \xi^3 - \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] + \gamma \left[-\frac{1}{5!} \beta \xi^5 + \dots \right] \\
& + a_0 \left[1 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] + a_0 \left[-\frac{\beta}{2!} \xi^2 + \frac{\beta^2}{4!} \xi^4 + \frac{4\beta}{5!} \xi^5 - \frac{\beta^3}{6!} \xi^6 + \dots \right] \\
& + a_1 \left[\xi - \frac{2}{4!} \xi^4 + \dots \right] + a_1 \left[-\frac{\beta}{3!} \xi^3 + \frac{\beta^2}{5!} \xi^5 + \frac{6\beta}{6!} \xi^6 + \dots \right]
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Kısaca (4.95) eşitliği

$$\theta = K p_1(\xi) + a_0 p_2(\xi) + a_1 p_3(\xi) + \gamma p_4(\xi) \tag{4.97}$$

ifadesiyle gösterilebilir.

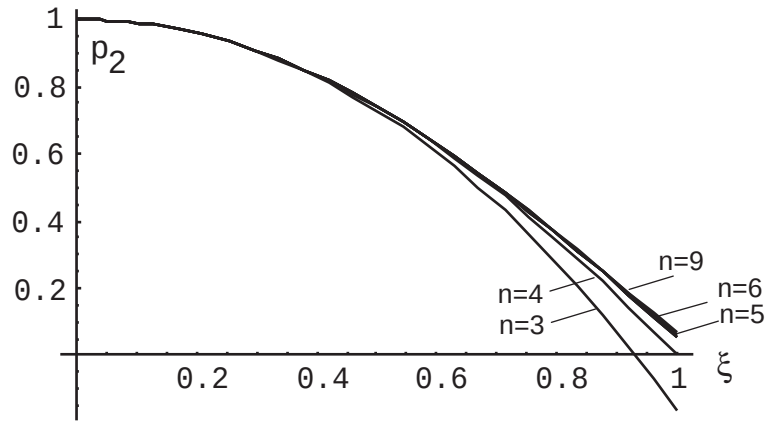
(4.82) diferansiyel denkleminde farklı dört adet seri bulunmuştur. Kullanılabilecek kolonlarda ξ değişkeninin 0.5 'den küçük olduğu görülmektedir. β değeri ise yine ekstrem haller düşünülürse bile 2 den büyük olmamaktadır. ξ 'nin farklı değerleri için p_1, p_2, p_3, p_4 eğrileri serilerden farklı sayıda terimler alınarak hesaplanmıştır. Sonuçlar 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 şekillerinde verilmiştir. Bu grafikler incelenirse $\xi \leq 0.5, \beta \leq 2$ için serilerin hızla yakınsadığı anlaşılabılır.



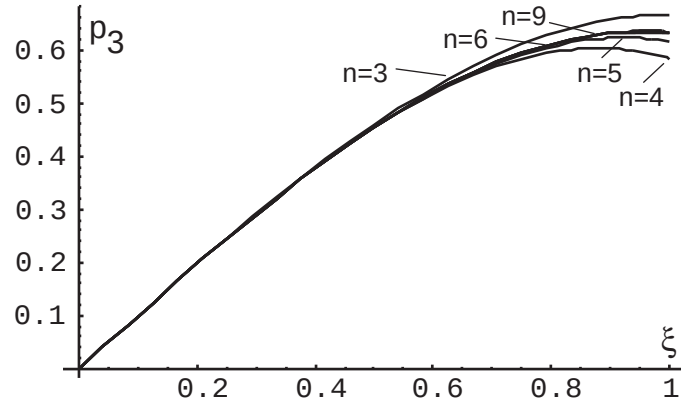
Şekil 4.9: $\beta = 2$ için p_1 serisi.

Buradan da görüldüğü gibi $n = 6$ seçerek denklemin çözümü için yeterili doğruluk sağlanabilir. Dolayısıyla p_i serileri,

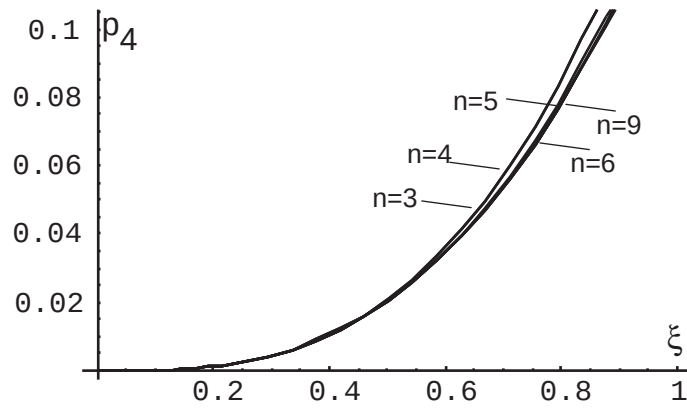
$$p_1 = \left[\frac{1}{2!} \xi^2 - \frac{3}{5!} \xi^5 \right] + \left[-\frac{1}{4!} \beta \xi^4 + \frac{1}{6!} \beta^2 \xi^6 \right] \tag{4.98}$$



Şekil 4.10: $\beta = 2$ için p_2 serisi.



Şekil 4.11: $\beta = 2$ için p_3 serisi.



Şekil 4.12: $\beta = 2$ için p_4 serisi.

$$p_2 = \left[1 - \frac{1}{3!}\xi^3 + \frac{4}{6!}\xi^6 \right] + \left[-\frac{\beta}{2!}\xi^2 + \frac{\beta^2}{4!}\xi^4 + \frac{4\beta}{5!}\xi^5 - \frac{\beta^3}{6!}\xi^6 \right] \quad (4.99)$$

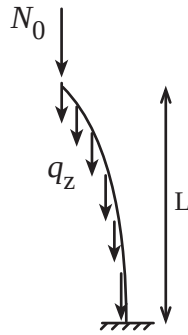
$$p_3 = \left[\xi - \frac{2}{4!}\xi^4 \right] + \left[-\frac{\beta}{3!}\xi^3 + \frac{\beta^2}{5!}\xi^5 + \frac{6\beta}{6!}\xi^6 \right] \quad (4.100)$$

$$p_4 = \left[\frac{1}{3!}\xi^3 - \frac{4}{6!}\xi^6 \right] + \left[-\frac{1}{5!}\beta\xi^5 \right] \quad (4.101)$$

olacaktır.

4.5.1 Kritik Yük Bulunarak Çözümün Kontrol Edilmesi

Hesapların kontrol edilmesi için bir ucu ankastre ve diğer ucu serbest bir kolonun burkulma yükü hesaplanacaktır. Şekil 4.13 de görülen sistemin çözümü (4.97)



Şekil 4.13: Bir ucu ankastre ve sadece eksenel doğrultuda yayılı yük alan kiriş.

denklemleri ile bulunabilir. Düşey q_y yayılı yükü ve N_0 sıfıra eşit olacaktır. Dolayısıyla

$$q_y = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad (4.102)$$

$$N_0 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad (4.103)$$

yazılırsa, (4.97) çözümü

$$\begin{aligned}\theta = C_1 \left[\frac{1}{2!} \xi^2 - \frac{3}{5!} \xi^5 + \dots \right] \\ + a_0 \left[1 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] \\ + a_1 \left[\xi - \frac{2}{4!} \xi^4 + \dots \right]\end{aligned}\quad (4.104)$$

halini alacaktır.

$z = 0$ için sınır koşulları,

$$y'' = 0 \Rightarrow \theta' = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad (4.105)$$

$$y''' = 0 \Rightarrow \theta'' = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (4.106)$$

uygulanırsa eşitlik,

$$\theta = a_0 \left[1 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{4}{6!} \xi^6 + \dots \right] \quad (4.107)$$

halini alır. $z = L$ için sınır koşulları uygulanır ise,

$$\xi = \left(\frac{q_z}{EI} \right)^{1/3} L \Rightarrow \theta = 0 \quad (4.108)$$

$$\left[1 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{4}{6!} \xi^6 \right] = 0 \quad (4.109)$$

denkleminde ulaşılır, buradan burkulma şartı bulunacaktır. Bu denklemin sağlayan en küçük ξ değeri,

$$\left[1 - \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{4}{6!} \xi^6 \right] = 0 \quad (4.110)$$

$$\xi_{min} = 2.024 \quad (4.111)$$

olur. Buradan kritik q_z yükü

$$\left(\left(\frac{q_z}{EI} \right)^{1/3} L \right) = 2.024 \quad (4.112)$$

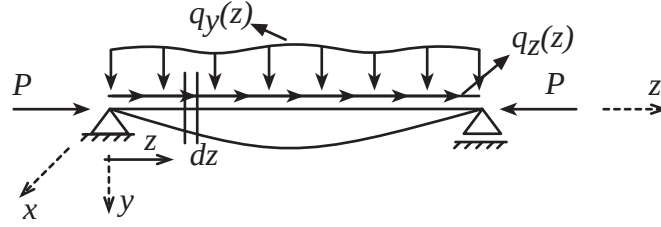
$$(q_z L)_{kr} = 8.29 \frac{EI}{L^2} \quad (4.113)$$

olarak bulunur. Seriden bir terim daha alınırsa kritik yük

$$(q_z L)_{kr} = 7.837 \frac{EI}{L^2} \quad (4.114)$$

olarak bulunabilir. (İnan, 1965)

4.6 Sabit Yatay ve Düşey Yayılı Yük Altındaki Kirişin Rijitlik Matrisinin Bulunması



Şekil 4.14: Üzerinde q_z yatay yayılı yükü bulunan kiriş.

Üzerinde q_y , q_z yayılı yükleri ve sabit P eksenel kuvveti bulunan bir kirişin diferansiyel denklemi (4.67) ifadesinde gösterilmişti. Bu diferansiyel denklem (4.82) ifadesinde verilen 2. derece diferansiyel denkleme dönüştürüldü ve çözümü de seriler yardımıyla (4.97) ifadesinde bulunmuştu.

Rijitlik matrisini bulmak için $q_y = 0$ yazılarak çözüme gidilirse, (4.67) diferansiyel denklemi

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left((N_0 + q_z z) \frac{dy}{dz} \right) = 0 \quad (4.115)$$

halini alır. (4.115) denklemi, (4.77), (4.80), (4.75) ifadeleri yardımıyla boyutsuzlaştırılırsa,

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + (\beta + \xi) \theta = K \quad (4.116)$$

halini alacaktır. Bu ikinci derece diferansiyel denklemin seriler yardımıyla çözümü (4.82) denkleminin çözümünden elde edilebilir. Bu durumda çözüm

$$\theta = Kp_1(\xi) + a_0p_2(\xi) + a_1p_3(\xi) \quad (4.117)$$

olarak gösterilebilir. (4.69) ifadesindeki dönüşüm yapılırsa

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{dy}{d\xi} \frac{1}{A} \quad (4.118)$$

bulunabilir. Buradan

$$\frac{dy}{d\xi} \frac{1}{A} = \theta(\xi) \quad (4.119)$$

$$y = A \int \theta(\xi) d\xi + C_0 \quad (4.120)$$

olarak yazılabilir, buradaki C_0 integral sabitidir. Bu eşitlik içine, (4.117) denklemi birleştirilirse

$$y = A \int [Kp_1(\xi) + a_0p_2(\xi) + a_1p_3(\xi)] d\xi + C_0 \quad (4.121)$$

olacaktır ve üzerinde q_z yayılı yükü bulunan bir kirişin elastik eğrisinin denklemini ifade eder. Açık olarak

$$y = AK \int p_1(\xi) d\xi + Aa_0 \int p_2(\xi) d\xi + Aa_1 \int p_3(\xi) d\xi + A \text{ Sbt.} \quad (4.122)$$

halinde yazabiliriz. Bu denklem düzenlenirse, A_i 'ler integrasyon sabitleri olmak üzere, (4.115) diferansiyel denkleminin çözümü genel olarak

$$y = A_1 f_1(\xi) + A_2 f_2(\xi) + A_3 f_3(\xi) + A_4 \quad (4.123)$$

olarak gösterilebilir. Burada

$$f_1(\xi) = \int p_1(\xi) d\xi \quad (4.124)$$

$$f_1(\xi) = \left[\frac{1}{3!} \xi^3 - \frac{3}{6!} \xi^6 \right] + \left[-\frac{1}{5!} \beta \xi^5 + \frac{1}{7!} \beta^2 \xi^6 \right] \quad (4.125)$$

$$f_2(\xi) = \int p_2(\xi) d\xi \quad (4.126)$$

$$f_2(\xi) = \left[\xi - \frac{1}{4!} \xi^4 + \frac{4}{7!} \xi^7 \right] + \left[-\frac{1}{3!} \beta \xi^3 + \frac{1}{5!} \beta^2 \xi^5 + \frac{4}{6!} \beta \xi^6 - \frac{1}{7!} \beta^3 \xi^7 \right] \quad (4.127)$$

$$f_3(\xi) = \int p_3(\xi) d\xi \quad (4.128)$$

$$f_3(\xi) = \left[\frac{1}{2!} \xi^2 - \frac{2}{5!} \xi^5 \right] + \left[-\frac{1}{4!} \beta \xi^4 + \frac{1}{6!} \beta^2 \xi^6 + \frac{6}{7!} \beta \xi^7 \right] \quad (4.129)$$

bulunmuştur.

Rijitlik matrisinin bulunması için (4.123) denklemi kullanılacaktır. İlk olarak uç noktalardaki deplasmanlar hesaplanacaktır.

$z = 0$ ucundaki dönme,

$$d_1 = - \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0} = - \left. \frac{1}{A} \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=0}$$

$$d_1 = -\frac{1}{A} (A_1 f_1'(0) + A_2 f_2'(0) + A_3 f_3'(0))$$

$$d_1 = -\frac{1}{A} A_2 \quad (4.130)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_2 = y|_{z=0} = y|_{\xi=0}$$

$$d_2 = A_1 f_1(0) + A_2 f_2(0) + A_3 f_3(0) + A_4$$

$$d_2 = A_4 \quad (4.131)$$

$z = L$ ucundaki dönme,

$$d_4 = - \frac{dy}{dz} \Big|_{z=L} = - \frac{1}{A} \frac{dy}{d\xi} \Big|_{\xi=\frac{L}{A}}$$

$$d_4 = -\frac{1}{A} \left(A_1 f_1' \left(\frac{L}{A} \right) + A_2 f_2' \left(\frac{L}{A} \right) + A_3 f_3' \left(\frac{L}{A} \right) \right) \quad (4.132)$$

aynı uçtaki düşey deplasman,

$$d_5 = y|_{z=L} = y|_{\xi=\frac{L}{A}}$$

$$d_5 = A_1 f_1 \left(\frac{L}{A} \right) + A_2 f_2 \left(\frac{L}{A} \right) + A_3 f_3 \left(\frac{L}{A} \right) + A_4 \quad (4.133)$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlikler matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{A} f_1' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{1}{A} f_2' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{1}{A} f_3' \left(\frac{L}{A} \right) & 0 \\ f_1 \left(\frac{L}{A} \right) & f_2 \left(\frac{L}{A} \right) & f_3 \left(\frac{L}{A} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (4.134)$$

(4.134) kısaca

$$\mathbf{D} = \mathbf{BA} \quad (4.135)$$

olarak gösterilebilir.

Kirişin uç noktalarındaki kuvvetlerin hesabı (4.65) ifadesinden yapılabilir, bu durumda $z = 0$ ucundaki moment,

$$f_1 = - M|_{z=0} = - \left(- \frac{d^2 y}{dz^2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{A^2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}$$

$$f_1 = \frac{1}{A^2} (A_1 f_1''(0) + A_2 f_2''(0) + A_3 f_3''(0))$$

$$f_1 = \frac{1}{A^2} A_3 \quad (4.136)$$

olacaktır, aynı uçtaki düşey kuvvet (4.66) denklemi yardımıyla bulunabilir.

$$f_2 = -V|_{z=0} = -\left(-EI\frac{d^3y}{dz^3} - N\frac{dy}{dz}\right)\Big|_{z=0}$$

$$f_2 = -\left(-EI\frac{d^3y}{dz^3} - (N_0 + q_z z)\frac{dy}{dz}\right)\Big|_{z=0}$$

İşlemlerde kolaylık için

$$\phi = N_0 + q_z z \quad (4.137)$$

kısaltması kullanılacaktır. Bu durumda

$$f_2 = -\left(-EI\frac{1}{A^3}\frac{d^3y}{d\xi^3} - \phi\frac{1}{A}\frac{dy}{d\xi}\right)\Big|_{\xi=0} \quad (4.138)$$

olarak gösterilebilir.

$$f_2 = EI\left[\frac{1}{A^3}(A_1 f_1'''(0) + A_2 f_2'''(0) + A_3 f_3'''(0)) + \phi\frac{1}{A}(A_1 f_1'(0) + A_2 f_2'(0) + A_3 f_3'(0))\right]$$

$$f_2 = EI\left[\frac{1}{A^3}A_1 - \frac{1}{A^3}\beta A_2 + \phi\frac{1}{A}A_2\right] \quad (4.139)$$

$z = L$ ucundaki moment,

$$f_4 = M|_{z=L} = -\frac{1}{A^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}\Big|_{\xi=\frac{L}{A}}$$

$$f_4 = -\frac{1}{A^2}(A_1 f_1''(\frac{L}{A}) + A_2 f_2''(\frac{L}{A}) + A_3 f_3''(\frac{L}{A})) \quad (4.140)$$

aynı uçtaki düşey kuvvet,

$$f_5 = V|_{z=L} = -EI\frac{1}{A^3}\frac{d^3y}{d\xi^3} - \phi\frac{1}{A}\frac{dy}{d\xi}\Big|_{\xi=\frac{L}{A}}$$

$$f_5 = -EI \left[\frac{1}{A^3} \left(A_1 f_1''' \left(\frac{L}{A} \right) + A_2 f_2''' \left(\frac{L}{A} \right) + A_3 f_3''' \left(\frac{L}{A} \right) \right) + \phi \frac{1}{A} \left(A_1 f_1' \left(\frac{L}{A} \right) + A_2 f_2' \left(\frac{L}{A} \right) + A_3 f_3' \left(\frac{L}{A} \right) \right) \right] \quad (4.141)$$

olarak bulunur. Uç kuvvetler denklem takımı halinde yazılırsa

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A^2} & 0 \\ \frac{1}{A^3} & -\frac{\beta}{A^3} + \frac{\phi}{A} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{A^2} f_1''' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{1}{A^2} f_2''' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{1}{A^2} f_3''' \left(\frac{L}{A} \right) & 0 \\ -\frac{\phi}{A} f_1' \left(\frac{L}{A} \right) - \frac{1}{A^3} f_1''' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{\phi}{A} f_2' \left(\frac{L}{A} \right) - \frac{1}{A^3} f_2''' \left(\frac{L}{A} \right) & -\frac{\phi}{A} f_3' \left(\frac{L}{A} \right) - \frac{1}{A^3} f_3''' \left(\frac{L}{A} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, kısaca uç kuvvetler matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{F} = \mathbf{CA} \quad (4.142)$$

(4.134) denkleminde A_i 'ler için çözülürse ve (4.142) denklem takımı içine yerleştirilirse q_z yayılı yükü altındaki kirişin kuvvet-deplasman ilişkisi elde edilir,

$$\mathbf{F} = \mathbf{CB}^{-1}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}_{s0}\mathbf{D} \quad (4.143)$$

olarak gösterilebilir. $\mathbf{k}_{s0}$ matrisi kısaca

$$\mathbf{k}_{s0} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

şeklinde gösterilirse, elemanları

$$k_{11} = \frac{f_2 f'_1 - f_1 f'_2}{A(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.145)$$

$$k_{12} = \frac{f'_1}{-A^2(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.146)$$

$$k_{13} = \frac{f_1}{A(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.147)$$

$$k_{14} = \frac{f'_1}{A^2(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.148)$$

$$k_{21} = \frac{f_3((\beta - A^2\phi)f'_1 + f'_2) - f'_3((\beta - A^2\phi)f_1 + f_2)}{A^2(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.149)$$

$$k_{22} = \frac{f'_3}{A^3(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.150)$$

$$k_{23} = \frac{f_3}{-A^2(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.151)$$

$$k_{24} = \frac{f'_3}{-A^3(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.152)$$

$$k_{31} = \frac{f_3(-f'_2 f''_1 + f'_1 f''_2) + f_2(f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3) + f_1(-f'_3 f''_2 + f'_2 f''_3)}{A(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.153)$$

$$k_{32} = \frac{-f'_3 f''_1 + f'_1 f''_3}{A^2(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.154)$$

$$k_{33} = \frac{f_3 f''_1 - f_1 f''_3}{A(f_3 f'_1 - f_1 f'_3)} \quad (4.155)$$

$$k_{34} = \frac{f_3' f_1'' - f_1' f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \quad (4.156)$$

$$k_{41} = \frac{f_3(f_2''' f_1' - f_1''' f_2') + f_2(-f_3''' f_1' + f_1''' f_3') + f_1(f_3''' f_2' - f_2''' f_3')}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \quad (4.157)$$

$$k_{42} = \frac{f_3''' f_1' - f_1''' f_3'}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \quad (4.158)$$

$$k_{43} = \frac{f_3(f_1''' + A^2 \phi f_1') - f_1(f_3''' + A^2 \phi f_3')}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \quad (4.159)$$

$$k_{44} = \frac{-f_3''' f_1' + f_1''' f_3'}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \quad (4.160)$$

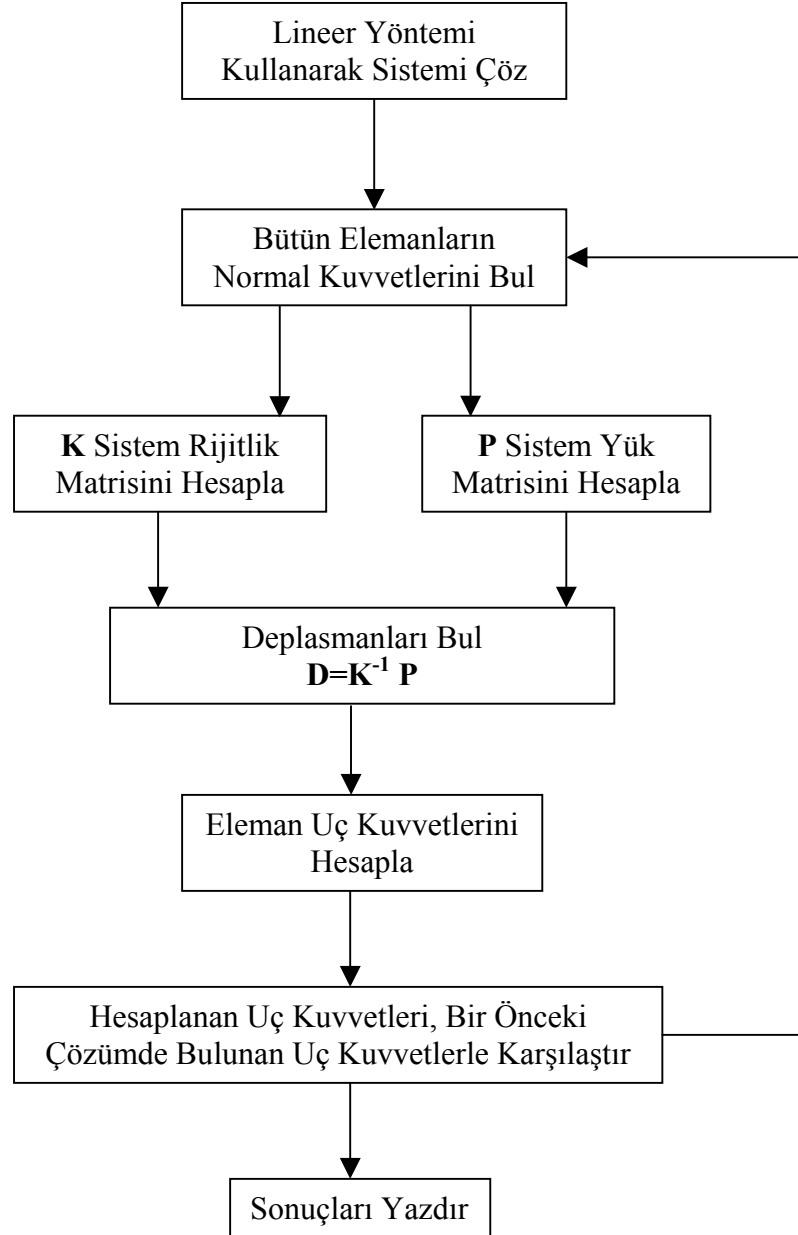
olacaktır. Rijitlik matrisini

$$\mathbf{k}_{s_0} = \begin{bmatrix} \frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_1'}{-A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_1}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_1'}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \\ \frac{f_3'}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3}{-A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{-A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')}{f_3 f_1'' - f_1 f_3''} \\ \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{-f_3''' f_1' + f_1''' f_3'}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadeye çubuktaki eksenel kuvvetin meydana getirdiği eksenel deplasman da katılırsa 6×6 lık rijitlik matrisine ulaşılır.

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} \frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_1'}{-A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 & \frac{f_1}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_1'}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 \\ \frac{f_3'}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3}{-A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 \\ \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^3(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & \frac{f_3 f_1'' - f_1 f_3''}{A^2(f_3 f_1' - f_1 f_3')} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

4.7 Non-Linear Çerçeve Hesabı İçin Akış Diyagramı



Şekil 4.15: Non-Linear çerçeve hesabı için akış diyagramı.

5 YARI RİJİT BAĞLANTILARIN İNCELENMESİ

Bir yapı sisteminin geleneksel olarak çözümünde, kolon-kiriş birleşimlerinin rijit yada mafsallı olduğu düşünülür. Bağlantıyı oluşturan elemanlar arasındaki açının deplasman meydana geldikten sonra değişmediği yada elemanların birbirinden bağımsız hareket ettikleri göz önüne alınarak hesap yapılır. Bu metotla yapılan işlemler basitleştirilebilir. Gerçekte ise durum farklıdır.

Tamamen rijit olarak düşünülen bağlantılar deformasyon gösterebilir yada tam tersi mafsallı olarak düşünülen bağlantıların dönmeye karşı rijitlikleri olabilir. Çerçevenin gerçek davranışının bulunabilmesi için bu tip etkilerin hesaba katılması gereklidir. Yarı-rijit bağlantı teorisi, bağlantıların tamamen rijit yada tamamen mafsallı olması arasındaki durumları hesaba katmamıza olanak tanır.

Yarı rijit bağlantıların davranışları moment-dönme eğrileri kullanılarak hesaba katılır. Bu eğriler analitik yada deneysel olarak bulunabilir.

5.1 Yarı Rijit Bağlantılı Çerçeve Elemanının İncelenmesi

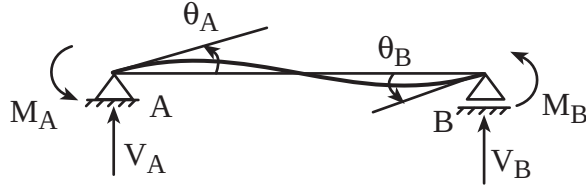
Yarı-rijit bağlantılar düzlem çerçeve çubuğunun uçlarına dönel yaylar konularak ifade edilir. Bağlantının etkisi, bu dönel yayların meydana getirdiği rölatif dönmeler olarak ele alınacaktır. İlk olarak yayların olmadığı durum düşünülecektir, ardından bu yayların meydana getirdiği dönmeler hesaba katılacaktır.

Öncelikle şekilde görülen basit kirişte θ_A ve θ_B ile ifade edilen dönmelerle, uç momentler arasındaki bağıntılar bulunmalıdır.

Yukarıda sistemin çözümü *Birinci Castigliano* teoremi kullanılarak yapılacaktır.

$\sum M_A = 0$ ise,

$$M_A + M_B + V_B L = 0$$
$$V_B = -\frac{M_A + M_B}{L}$$



Şekil 5.1: Basit kirişte uç kuvvetler ve deplasmanlar

$$V_A = \frac{M_A + M_B}{L}$$

Bu durumda şekil 5.1 üzerindeki herhangi bir noktadaki moment

$$M = -M_A + \frac{M_A + M_B}{L}z \quad (5.1)$$

olacaktır. A noktasındaki dönme,

$$\theta_A = \frac{dU}{dM_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{dM}{dM_A} dz \quad (5.2)$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[-M_A + \frac{M_A + M_B}{L}z \right] \left[-1 + \frac{z}{L} \right] dz \quad (5.3)$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{EI} \int_0^L \left[1 - \frac{z}{L} - \frac{z}{L} + \frac{z^2}{L^2} \right] dz + \frac{M_B}{EI} \int_0^L \left[-\frac{z}{L} + \frac{z^2}{L^2} \right] dz \quad (5.4)$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{EI} \left[L - \frac{2L^2}{2L} + \frac{L^3}{3L^2} \right] + \frac{M_B}{EI} \left[-\frac{L^2}{2L} + \frac{L^3}{3L^2} \right] \quad (5.5)$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{EI} L \left[\frac{1}{3} \right] + \frac{M_B}{EI} L \left[-\frac{1}{6} \right] \quad (5.6)$$

B noktasındaki dönme,

$$\theta_B = \frac{dU}{dM_B} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{dM}{dM_B} dz \quad (5.7)$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[-M_A + \frac{M_A + M_B}{L}z \right] \left[\frac{z}{L} \right] dz \quad (5.8)$$

$$\theta_B = \frac{M_A}{EI} \int_0^L \left[-\frac{z}{L} + \frac{z^2}{L^2} \right] dz + \frac{M_B}{EI} \int_0^L \left[\frac{z^2}{L^2} \right] dz \quad (5.9)$$

$$\theta_B = \frac{M_A}{EI} \left[-\frac{L^2}{2L} + \frac{L^3}{3L^2} \right] + \frac{M_B}{EI} \left[\frac{L^3}{3L^2} \right] \quad (5.10)$$

$$\theta_B = \frac{M_A}{EI} L \left[-\frac{1}{6} \right] + \frac{M_B}{EI} L \left[\frac{1}{3} \right] \quad (5.11)$$

olarak bulunmuştur. Burada (5.6) ve (5.11) eşitlikleri bir matris yardımıyla gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & -\frac{L}{6} \\ -\frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Dönmeyle moment arasındaki ilişkiyi gösteren bu denklem takımı kısaca

$$\theta_A = f_l \mathbf{M} \quad (5.13)$$

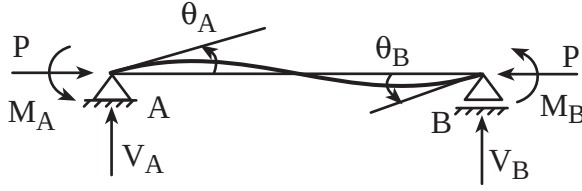
yazılabilir. Buradaki f_l matrisi fleksibilite matrisi olarak isimlendirilir. Bu matrisin tersi alınarak, kuvvet deplasman ilişkisi bulunabilir. Normal kuvvetinin elastik eğriye etkisinin olmadığı ve yarı rijit bağlantı bulunmadığı düşünülen bir sistemde (Şekil 5.1) bu denklem takımı

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

halini alacaktır. Fleksibilite matrisinin elemanları daha önce hesapladığımız, (3.3) ifadesinde görülen, lineer haldeki rijitlik matrisi ile karşılaştırılırsa k_{11} , k_{14} , k_{41} , k_{44} ile çakışıkları görülebilir.

Normal kuvvetinin etkisi önceki bölümde ele alınmıştı. Moment-dönme ilişkisi normal kuvvetinin etkisini katarak geliştirilebilir. Görüldüğü üzere, bu durum için de yeniden hesaplama yapmaya gerek yoktur ve daha önce hesaplanmış olan matrisler kullanılacaktır.

Şekil 5.2 de görülen, P normal kuvvetinin etkisi altındaki bir sistemde sadece (5.14) bağıntısındaki 2×2 'lik matris değişir bu yüzden işlemlerin tekrar edilmesine gerek görülmemiştir. Dolayısıyla, P basınç kuvvetinin etkisi hesaba katılmak istenirse, (4.31) matrisinin ilgili elemanları kullanılabilir. (4.31) matrisinin k_{11} , k_{14} , k_{41} , k_{44}



Şekil 5.2: Basınç altındaki kirişte uç kuvvetler ve dönmeler.

elemanları alınarak, moment - dönme ilişkisi

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{Lu(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} & \frac{Lu(s-Lu)}{-2+2c+Lus} \\ \frac{Lu(s-Lu)}{-2+2c+Lus} & \frac{Lu(-s+Luc)}{-2+2c+Lus} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

denklem takımıyla ifade edilebilir. Burada

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{Lu(s - Lu)}{-2 + 2c + Lus} \quad (5.16)$$

ve

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{Lu(-s + Luc)}{-2 + 2c + Lus} \quad (5.17)$$

kısaltmaları yapılırsa, denklem takımı kısaca,

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

halini alır. Diğer bir ifadeyle

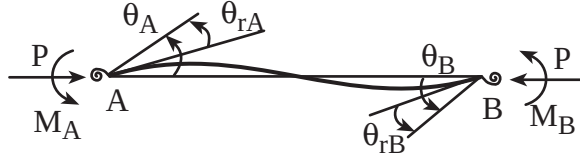
$$M_A = \frac{EI}{L} [s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B] \quad (5.19)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} [s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B] \quad (5.20)$$

olarak gösterilebilir. Bu ifadeler aynı zamanda eğim-çökme (slope-deflection) denklemleri olarak da isimlendirilir.

Yarı-rijit bağlantılar uçlarda rölatif dönmeler meydana getirir. [2] Bu dönmelerin yaylar kullanılarak ifade edilebileceği daha önce de belirtilmişti.

Şekil 5.3 de görülen kirişte, yarı-rijit bağlantılar kiriş uçlarına yaylar konularak modellenmiştir. Bu yaylardan meydana gelen uçlardaki rölatif dönmeler θ_{rA} ve θ_{rB}



Şekil 5.3: Yarı-Rijit Bağlantılı Kiriş Elemanı.

ifadeleriyle gösterilmiştir.

Bir yayda meydana gelen kuvvetin, yay katsayısı ve deplasmanın çarpımı olduğu hatırlanmalıdır. Dolayısıyla, uçlarda yayların meydana getirdiği dönmeler,

$$\theta_{rA} = \frac{M_A}{R_{kiA}} \quad , \quad \theta_{rB} = \frac{M_B}{R_{kiB}} \quad (5.21)$$

ifadeleriyle gösterilir, burada R_{kiA} ve R_{kiB} yarı rijit bağlantıların rijitlikleridir. Bir başka deyişle yay katsayılarıdır.

Uçlardaki toplam dönmeler θ_A ve θ_B ile gösterilirse, moment-dönme bağıntısı

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[s_{ii} (\theta_A - \theta_{rA}) + s_{ij} (\theta_B - \theta_{rB}) \right] \quad (5.22)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[s_{ij} (\theta_A - \theta_{rA}) + s_{jj} (\theta_B - \theta_{rB}) \right] \quad (5.23)$$

halini alacaktır. Bu ifadeler

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[s_{ii} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + s_{ij} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (5.24)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[s_{ij} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + s_{jj} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (5.25)$$

olarak açık şekilde yazılabilir.

(5.24) ve (5.25) eşitliğinden M_A ve M_B çekilecek olursa,

$$M_A \left[1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{ii}}{R_{kiA}} \right] + M_B \left[\frac{EI}{L} \frac{s_{ij}}{R_{kiB}} \right] = \theta_A \left[\frac{EI}{L} s_{ii} \right] + \theta_B \left[\frac{EI}{L} s_{ij} \right] \quad (5.26)$$

$$M_A \left[\frac{EI}{L} \frac{s_{ij}}{R_{kiA}} \right] + M_B \left[1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{jj}}{R_{kiB}} \right] = \theta_A \left[\frac{EI}{L} s_{ij} \right] + \theta_B \left[\frac{EI}{L} s_{jj} \right] \quad (5.27)$$

bulunur. Bu iki eşitlik matris yardımıyla gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{ii}}{R_{kiA}} & \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}}{R_{kiB}} \\ \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}}{R_{kiA}} & 1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{jj}}{R_{kiB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L} s_{ii} & \frac{EI}{L} s_{ij} \\ \frac{EI}{L} s_{ij} & \frac{EI}{L} s_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

(5.28) 'den M_A ve M_B çözülürse,

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} s_{ii}^* & s_{ij}^* \\ s_{ji}^* & s_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

yarı-rijit bağıntıların bulunması halinde moment-dönme bağıntıları bulunabilir. Burada

$$s_{ii}^* = \left[\left(1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{jj}}{R_{kiB}} \right) s_{ii} - \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}^2}{R_{kiB}} \right] \frac{1}{\Delta} \quad (5.30)$$

$$s_{ij}^* = s_{ji}^* = \left[\left(1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}}{R_{kiA}} \right) s_{ij} - \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}s_{ii}}{R_{kiA}} \right] \frac{1}{\Delta} \quad (5.31)$$

$$s_{jj}^* = \left[\left(1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{ii}}{R_{kiA}} \right) s_{jj} - \frac{EI}{L} \frac{s_{ij}^2}{R_{kiA}} \right] \frac{1}{\Delta} \quad (5.32)$$

$$\Delta = \left(1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{ii}}{R_{kiA}} \right) \left(1 + \frac{EI}{L} \frac{s_{jj}}{R_{kiB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{s_{ij}^2}{R_{kiA} R_{kiB}} \quad (5.33)$$

kısaltmaları yapılmıştır.

Bu moment-dönme ilişkileri ve şekil 5.4 de göz önüne alınarak, rijitlik matrisine ulaşılabilir. Şekil 5.4 de görülen eleman uç kuvvetleri ve deplasmanları arasındaki bağıntıyı bulmak için (5.29) denklemini kullanılacaktır.



Şekil 5.4: Yarı-Rijit Bağlantılı Kirişte Uç Kuvvetler ve Deplasmanlar

Şekil 5.4 de görülen eleman uç kuvvetleri ile şekil 5.3 de görülen M_A , M_B ve P kuvvetleri arasındaki ilişkiler

$$f_1 = M_A \quad (5.34)$$

$$f_2 = -\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{P\delta}{L} \quad (5.35)$$

$$f_3 = P \quad (5.36)$$

$$f_4 = M_B \quad (5.37)$$

$$f_5 = \frac{M_A + M_B}{L} - \frac{P\delta}{L} \quad (5.38)$$

$$f_6 = -P \quad (5.39)$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki denklemler matris notasyonunda

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{P\delta}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P\delta}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

olarak gösterilebilir. Bu ifade kısaca

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{F}_0 + \ell \quad (5.41)$$

verilebilir. Benzer şekilde eleman uç deplasmanları ile θ_A , θ_B ve e deplasmanları arasındaki ilişkiler de bulunabilir. Şekil 5.4 ve şekil 5.3 karşılaştırılırsa,

$$\theta_A = d_1 + \frac{d_5 - d_2}{L} \quad (5.42)$$

$$\theta_B = d_4 + \frac{d_5 - d_2}{L} \quad (5.43)$$

$$e = -(d_6 - d_3) \quad (5.44)$$

eşitlikleri yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler matris formunda

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 1 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

olarak yazılabilir. Bu da kısaca

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{T}^T \mathbf{D} \quad (5.46)$$

ifadesiyle gösterilecektir. (5.29) denklemi

$$P = \frac{EA}{L} e$$

bağıntısı yardımıyla genişletilirse

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ P \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} s_{ii}^* & s_{ij}^* & 0 \\ s_{ji}^* & s_{jj}^* & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ e \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

denklemi bulunabilir. Kısaca

$$\mathbf{F}_0 = \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{D}_0 \quad (5.48)$$

olarak gösterilir. (5.46) ifadesi (5.48) denkleminde kullanılırsa,

$$\mathbf{F}_0 = \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}^T \mathbf{D} \quad (5.49)$$

olacaktır. Bu ifadeyi (5.41) ifadesinde yerine koyarsak

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}^T \mathbf{D} + \ell \quad (5.50)$$

bulunur. Bu ifade

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_1 \mathbf{D} + \mathbf{K}_2 \mathbf{D} \quad (5.51)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}^T \quad (5.52)$$

ve

$$\mathbf{K}_2\mathbf{D} = \ell \quad (5.53)$$

olmaktadır. (5.52) eşitliğinde (5.47) denkleminde alınan $\tilde{\mathbf{K}}$ ve (5.40) denkleminde alınan $\mathbf{T}$ matrisleri kullanılırsa $\mathbf{K}_1$ matrisi

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} s_{ii}^* & -\frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & 0 & s_{ij}^* & \frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & 0 \\ -\frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & \frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L^2} & 0 & -\frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & -\frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} \\ s_{ji}^* & -\frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & 0 & s_{jj}^* & \frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & 0 \\ \frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & -\frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L^2} & 0 & \frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & \frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

olarak bulunur. Çubuk boyundaki değişimin rijitlik matrisinde meydana getirdiği etki ise

$$\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P\delta}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P\delta}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ u^2\delta \\ 0 \\ 0 \\ -u^2\delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

matrisiyle gösterilmektedir. Burada

$$\delta = d_5 - d_2 \quad (5.56)$$

olduğundan

$$\ell = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ u^2(d_5 - d_2) \\ 0 \\ 0 \\ -u^2(d_5 - d_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^2 & 0 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & -u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

yazılabilir. Çubuk boyundaki değişimden dolayı rijitlik matrisindeki ilave terimler

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^2 & 0 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & -u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

matrisiyle temsil edilebilir. Bu iki matris toplanırsa, yarı-rijit bağlantılı kirişin rijitlik matrisi $\mathbf{k}$ bulunur.

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$$

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{s_{ii}^*}{L} & -\frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & 0 & \frac{s_{ij}^*}{L} & \frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & 0 \\ -\frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & \frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*-(uL)^2}{L^2} & 0 & -\frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & -\frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*+(uL)^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \\ \frac{s_{ji}^*}{L} & -\frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & 0 & \frac{s_{jj}^*}{L} & \frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & 0 \\ \frac{s_{ii}^*+s_{ij}^*}{L} & -\frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*+(uL)^2}{L^2} & 0 & \frac{s_{ij}^*+s_{jj}^*}{L} & \frac{s_{ii}^*+2s_{ij}^*+s_{jj}^*-(uL)^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Buradaki s_{ii}^* , s_{ij}^* ve s_{jj}^* kısaltmaları sırasıyla (5.30), (5.31), (5.32) ifadelerinde verilmiştir.

Yarı-rijit bağlantı hali için geçerli olan ve (5.59) ifadesinde verilen matris normal kuvvetin sıfır olması hali için direkt olarak kullanılamaz. Bir limit işlemi gereklidir. Bu limit işlemi ise birinci mertebe teorisiyle elde edilen rijitlik matrisini vermektedir. Dolayısıyla normal kuvvetin sıfır alındığı durumlarda matrisin tanımlı olabilmesi için,

s_{ii} , s_{ij} değerleri yerine birinci merteye teorisi kullanılarak hesaplanan s_{ii} , s_{ij} değerleri konulmalıdır. (5.14) denkleminde bu değerler alınırsa,

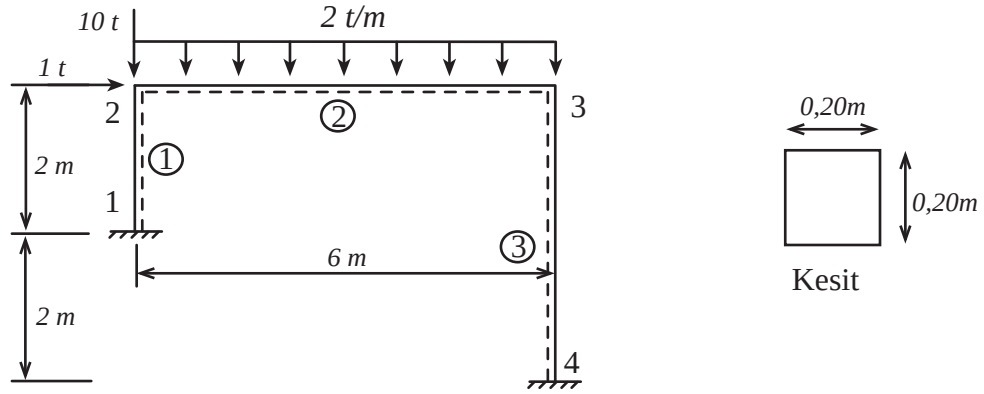
$$\begin{aligned} s_{ii} &= s_{jj} = 4 \\ s_{ij} &= 2 \end{aligned} \tag{5.60}$$

olacaktır.

6 ÖRNEK PROBLEM ÇÖZÜMÜ

Önceki bölümlerde düzlem çerçeve çeşitli durumlar için incelenmişti. İlk olarak düzlem çerçevenin birinci mertebe teorisi ile hesabı yapılmıştı. Ardından çerçevede büyük yer değiştirmelerin söz konusu olabileceği durumlar incelenmişti. Son olarak da kiriş-kolon birleşimlerinde yarı-rijit bağlantılar olan çerçeve incelenmişti. Bu bölümde ise örnek bir problemin üzerinde çeşitli yaklaşımlara göre bulunan sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Örnek olarak çözülecek sistemde $0,20m \times 0,20m$ lik ince bir betonarme kesit ve $4m$ ve $2m$ uzunlukta kolonlar seçilmiştir. Böylece normal kuvvetinin etkisinin daha büyük olacağı ve sonuçlar üzerinde daha fazla etkisinin olacağı düşünülmüştür. Elastisite modülü $E = 25000000t/m^2$ alınmıştır.



Şekil 6.1: Örnek Problem I

Şekil 6.1 'de verilen çerçevenin değişik yaklaşımlarla çözümünden elde edilen sonuçlar tablo 6.1 verilmiştir.

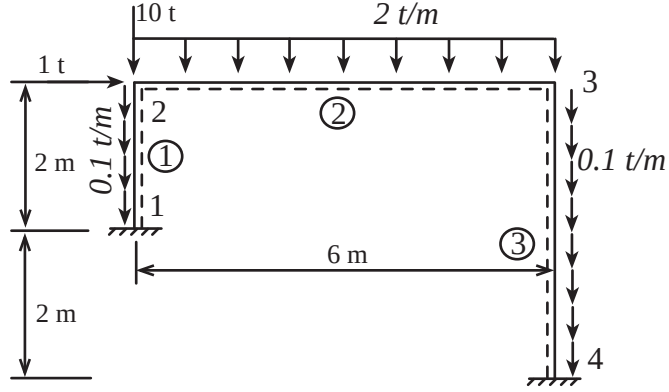
Tablo 6.1: Şekil 6.1 de verilen çerçevenin çözümü.

Çerçevenin Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.40	1.19	15.7	-3.77	-1.19	-15.7
2	3.77	-5.75	2.19	-5.29	6.25	-2.19
3	5.29	-2.19	6.25	3.46	2.19	-6.25
Çerçevenin Non-Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.53	1.21	15.7	-3.73	-1.21	-15.7
2	3.73	-5.73	2.21	-5.37	-6.27	-2.21
3	5.37	-2.21	6.27	3.56	2.21	-6.27
Çerçevenin Sap-2000 yardımı ile Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.41	1.18	15.8	-3.77	-1.18	-15.8
2	3.77	-5.75	2.18	-5.28	-6.25	-2.18
3	5.28	-2.18	6.25	3.44	2.18	-6.25

Bu tabloda lineer çözümde, birinci mertbe teorisiyle hesaplanan matris kullanılmıştır. Non-linear çözümde ise normal kuvvetin eleastik eğriye etkisi göz önünde bulundurulmuştur. Son olarak da aynı problem SAP2000 programı ile çözülmüştür. SAP2000 çözümü ile lineer çözüm birbirinden az miktarda farklılık göstermektedir, kolon uzunlukları aynı seçildiğinde ise sonuçlar tamamen aynı çıkmaktadır.

Lineer ve non-linear çözümler karşılaştırılırsa, özellikle momentlerde büyük farklılıklar olduğu gözlenmektedir. Bu yüzden narin kolonlarda ve özellikle simetrik olmayan sistemlerde non-linear analizin kullanılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

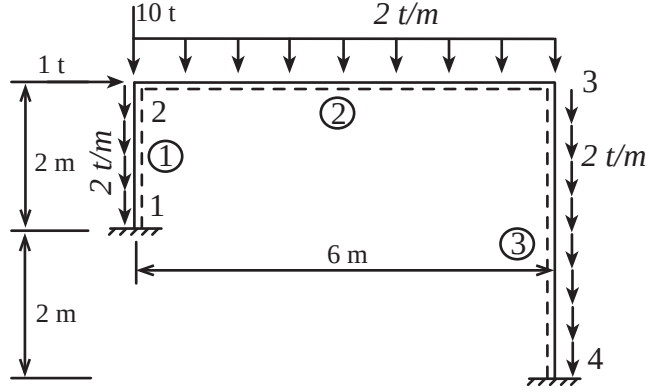
Bir önceki problemde kolonların kendi ağırlıklarının etkisi göz önüne alınmamıştır. Aynı problem kolon ağırlıklarının kolon eksenini doğrultusunda yayılı yük olarak göz önüne alınmasıyla bir kere daha çözülmüştür ve ikinci mertbe teorisi kullanılmıştır. Bu durum şekil 6.2 üzerinde gösterilmiştir. Kolonlara $0.1t/m$ 'lik düşey yayılı yük konulmuştur. Sonuçlar tablo 6.2 'de verilmiştir. Kolonlardaki düşey yayılı yükün elastik eğriye etkisinin incelemesi tablo 6.2 üzerinde *non-linear seri çözüm* başlığı altında gösterilmiştir. Bu sonuçlar sadece normal kuvvetin elastik eğriye etkisinin göz önüne alındığı *nonlinear çözüm* ile karşılaştırılırsa düşey yayılı yükün sonuçlara etkisinin olmadığı görülür. Eğer narin elemanlarda dışarıdan çok büyük eksenel yayılı yük etki söz konusu olursa sonuçlarda çok küçük farklılıklar gözlenebilmektedir. Yayılı yük 20 kat arttırılarak problem tekrar çözülmüştür (şekil 6.3) ve sonuçlar tablo 6.3 'de verilmiştir.



Şekil 6.2: Örnek Problem II

Tablo 6.2: Şekil 6.2 de verilen çerçevenin çözümü

Çerçevenin Lineer Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.40	1.19	15.9	-3.77	-1.19	-15.7
2	3.77	-5.75	2.19	-5.29	-6.25	-2.19
3	5.29	-2.19	6.25	3.46	2.19	-6.65
Çerçevenin Non-Linear Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.53	1.21	15.9	-3.73	-1.21	-15.7
2	3.73	-5.73	2.21	-5.37	-6.27	-2.21
3	5.37	-2.21	6.27	3.56	2.21	-6.67
Çerçevenin Non-Linear Seri Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.53	1.21	15.9	-3.73	-1.21	-15.7
2	3.73	-5.73	2.21	-5.37	-6.27	-2.21
3	5.37	-2.21	6.27	3.56	2.21	-6.67
Çerçevenin Sap-2000 Yardımı ile Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.42	1.18	15.9	-3.77	-1.18	-15.8
2	3.77	-5.75	2.18	-5.27	-6.25	-2.18
3	5.27	-2.18	6.25	3.43	2.18	-6.65

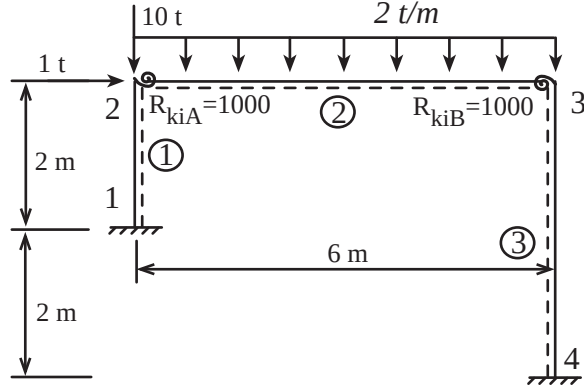


Şekil 6.3: Örnek Problem II - b

Tablo 6.3: Şekil 6.3 de verilen çerçevenin çözümü

Çerçevenin Lineer Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.40	1.19	19.7	-3.77	-1.19	-15.7
2	3.77	-5.75	2.19	-5.28	-6.25	-2.19
3	5.28	-2.19	6.25	3.46	2.19	-14.3
Çerçevenin Non-Lineer Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.55	1.22	19.7	-3.71	-1.22	-15.7
2	3.71	-5.72	2.22	-5.38	-6.28	-2.22
3	5.38	-2.22	6.28	3.57	2.22	-14.3
Çerçevenin Non-Lineer Seri Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.55	1.22	19.7	-3.71	-1.22	-15.7
2	3.72	-5.73	2.19	-5.36	-6.27	-2.19
3	5.39	-2.22	6.27	3.58	2.22	-14.3
Çerçevenin Sap-2000 Yardımı ile Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.42	1.18	19.8	-3.77	-1.18	-15.8
2	3.77	-5.75	2.18	-5.27	-6.25	-2.18
3	5.27	-2.18	6.25	3.43	2.18	-14.3

Son olarak aynı problemdeki kirişin kolonlarla bağlantılarının yarı-rijit olduğu düşünülecektir. Kirişin her iki ucunda da yarı-rijit bağlantının davranışı katsayıları $R_{kiA} = R_{kiB} = 1000$ olan lineer yaylarla gösterilmiştir. Sonuçlar tablo 6.4 ile verilmiştir. Hem nonlinear çözüm hem de lineer çözümde, yarı rijit bağlantılar momentleri önemli ölçüde değiştirmiştir.

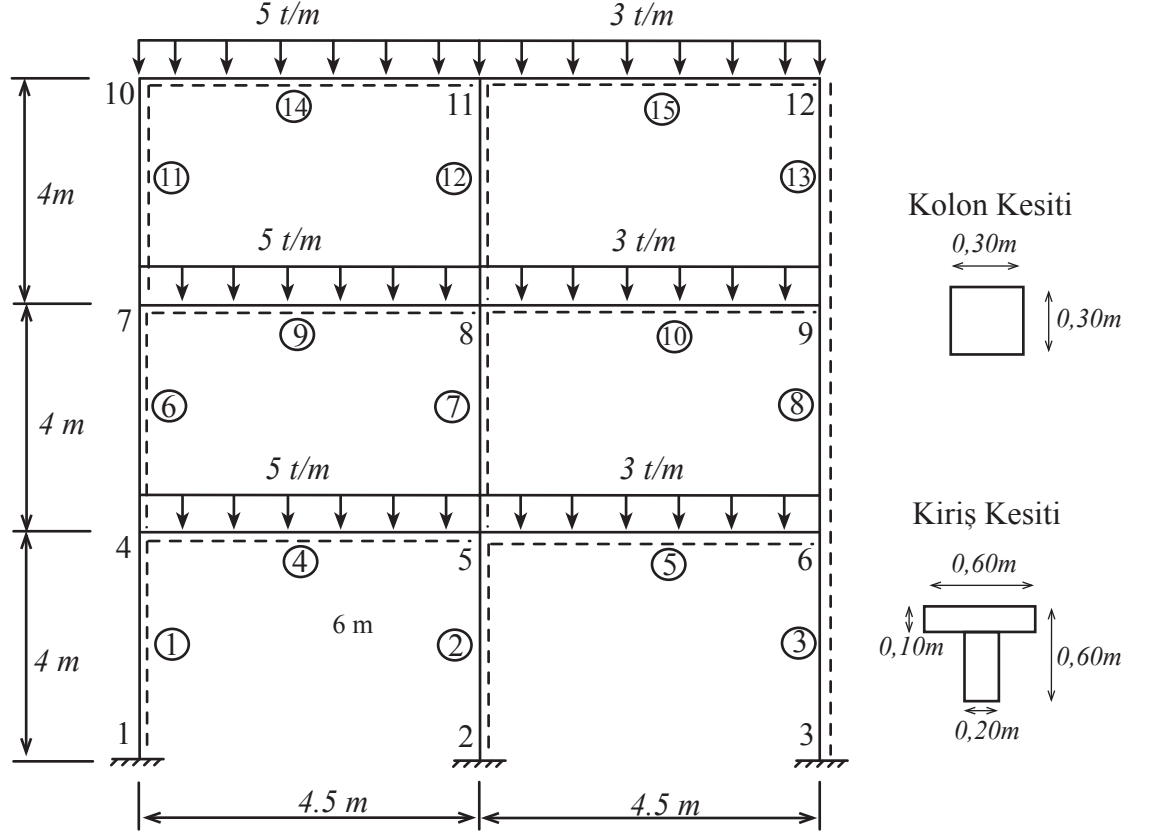


Şekil 6.4: Örnek Problem III

Tablo 6.4: Şekil 6.4 de verilen çerçevenin çözümü

Çerçevenin Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.40	1.19	15.7	-3.77	-1.19	-15.7
2	3.77	-5.75	2.19	-5.29	6.25	-2.19
3	5.29	-2.19	6.25	3.46	2.19	-6.25
Yarı-Rijit Bağlantılar Dikkate Alınarak Lineer Çözüm						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.52	1.18	15.8	-3.87	-1.18	-15.8
2	3.87	-5.77	2.18	-5.23	-6.23	-2.18
3	5.23	-2.18	6.23	3.47	2.18	-6.23
Çerçevenin Non-Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.53	1.21	15.7	-3.73	-1.21	-15.7
2	3.73	-5.73	2.21	-5.37	-6.27	-2.21
3	5.37	-2.21	6.27	3.56	2.21	-6.27
Yarı-Rijit Bağlantılar Dikkate Alınarak Non-Lineer Çözüm						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	1.66	1.20	15.8	-3.83	-1.20	-15.8
2	3.83	-5.75	2.20	-5.31	-6.25	-2.20
3	5.31	-2.20	6.25	3.58	2.20	-6.25

Daha önceki sistemde nonlinearliğin etkisinin belirgin olabileceği simetrik olmayan bir sistem seçilmişti. Şekil 6.5 ile verilen sistemde ise herhangi bir yapı sisteminde karşılaşılabilecek, gerçeğe yakın yüklemeleri ve kesitleri olan, simetrik bir düzlem çerçeve seçilmiştir. Bu sistemde elastisite modülü $E = 2500000t/m^2$ olarak alınmıştır.



Şekil 6.5: Örnek Problem IV

Sistemin lineer olarak ve SAP-2000 programı yardımı ile çözümü Tablo 6.5 de verilmiştir. Lineer çözüm SAP-2000 sonuçları ile karşılaştırılırsa, sonuçların çok yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 6.6 de ise nonlinear çözüm ve yarı rijit bağlantılar dikkate alınarak yapılan analiz vardır. Yarı rijit bağlantıların bütün kolon - kiriş birleşimlerinde var olduğu ve yay katsayılarının $R_k = 1000$ olduğu düşünülmüştür. Nonlinear çözüm ile lineer çözüm karşılaştırılırsa, normal kuvvetin etkisinin böyle bir sistemde çok küçük olduğu görülmektedir. Yarı rijit bağlantılar ise uç kuvvetlerde çok büyük değişimlere neden olmuştur.

Tablo 6.5: Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü I-A

Çerçevenin Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	-0.74	0.57	30.9	-1.53	-0.57	-30.9
2	0.32	-0.22	59.7	0.56	0.22	-59.7
3	0.49	-0.35	17.4	0.89	0.35	-17.4
4	3.81	-10.2	-0.56	-8.54	-12.3	0.56
5	7.13	-7.82	-0.37	-2.30	-5.68	0.37
6	-2.26	1.13	20.7	-2.24	-1.13	-20.7
7	0.84	-0.41	39.6	0.82	0.41	-39.6
8	1.40	-0.71	11.7	1.45	0.71	-11.7
9	4.78	-10.6	-0.22	-7.75	-11.9	0.22
10	6.02	-7.40	-0.17	-3.11	-6.10	0.17
11	-2.53	1.35	10.1	-2.85	-1.35	-10.1
12	0.90	-0.47	20.3	0.98	0.47	-20.3
13	1.66	-0.88	5.62	1.84	0.88	-5.62
14	2.86	-10.1	1.35	-7.92	-12.4	-1.35
15	6.93	-7.88	0.88	-1.84	-5.62	-0.88
Çerçevenin SAP-2000 ile Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	-0.73	0.57	30.9	-1.55	-0.57	-30.9
2	0.32	-0.22	59.6	0.57	0.22	-59.6
3	0.49	-0.35	17.4	0.91	0.35	-17.4
4	3.82	-10.2	-0.56	-8.49	-12.3	0.56
5	7.09	-7.81	-0.36	-2.31	-5.69	0.36
6	-2.27	1.13	20.7	-2.24	-1.13	-20.7
7	0.84	-0.41	39.5	0.82	0.41	-39.5
8	1.40	-0.71	11.7	1.45	0.71	-11.7
9	4.77	-10.6	-0.22	-7.72	-11.9	0.22
10	6.01	-7.39	-0.16	-3.11	-6.11	0.16
11	-2.53	1.34	10.1	-2.85	-1.34	-10.1
12	0.89	-0.47	20.2	0.98	0.47	-20.2
13	1.66	-0.88	5.63	1.84	0.88	-5.63
14	2.85	-10.1	1.34	-7.87	-12.4	-1.34
15	6.89	-7.87	0.88	-1.84	-5.63	-0.88

Tablo 6.6: Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü I-B

Çerçevenin Non-Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	-0.74	0.57	30.9	-1.53	-0.57	-30.9
2	0.33	-0.22	59.7	0.56	0.22	-59.7
3	0.49	-0.35	17.4	0.90	0.35	-17.4
4	3.79	-10.2	-0.56	-8.54	-12.3	0.56
5	7.14	-7.83	-0.37	-2.29	-5.67	0.37
6	-2.27	1.13	20.7	-2.24	-1.13	-20.7
7	0.84	-0.42	39.6	0.83	0.42	-39.6
8	1.40	-0.71	11.7	1.45	0.71	-11.7
9	4.77	-10.6	-0.22	-7.75	-11.9	0.22
10	6.03	-7.40	-0.17	-3.11	-6.10	0.17
11	-2.53	1.35	10.1	-2.85	-1.35	-10.1
12	0.90	-0.47	20.3	0.99	0.47	-20.3
13	1.67	-0.88	5.62	1.84	0.88	-5.62
14	2.85	-10.1	1.35	-7.92	-12.4	-1.35
15	6.93	-7.88	0.88	-1.84	-5.62	-0.88
Yarı-Rijit Bağlantılar Dikkate Alınarak Non-Lineer Çözüm						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	-1.84	1.39	33.5	-3.72	-1.39	-33.5
2	0.78	-0.55	54.6	1.42	0.55	-54.6
3	1.17	-0.85	20.0	2.22	0.85	-20.0
4	-4.28	-8.08	-0.78	-10.0	-14.4	0.78
5	13.9	-11.1	-0.43	5.49	-2.43	0.43
6	-4.72	2.17	22.2	-3.97	-2.17	-22.2
7	1.96	-0.90	36.6	1.66	0.90	-36.6
8	2.85	-1.27	13.2	2.26	1.27	-13.2
9	1.61	-9.67	-0.41	-8.73	-12.8	0.41
10	7.73	-8.03	-0.39	-1.95	-5.47	0.38
11	-4.47	2.58	11.0	-5.86	-2.58	-11.0
12	1.72	-0.92	18.6	1.98	0.92	-18.6
13	2.80	-1.66	6.45	3.85	1.66	-6.45
14	-8.93	-6.56	2.58	-12.2	-15.9	-2.58
15	13.9	-11.6	1.66	7.65	-1.95	-1.66

Tablo 6.5 ve tablo 6.6 incelenirse, önceki sistemde normal kuvvetin etkisinin çok az olduğu görülür. Bu nedenle şekil 6.5 deki sistemin 10 numaralı düğüm noktasına Y doğrultusunda $10t$ 'luk bir yatay kuvvet etkilmiştir. Bu sistemin çözümü ise 6.7 ve 6.8 tablolarında verilmiştir. Normal kuvvetin etkisinin böyle bir sistemde büyük olduğu görülmektedir.

Tablo 6.7: Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü II-A

Çerçevenin Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	6.08	-2.48	19.9	4.10	2.48	-19.9
2	7.94	-3.75	59.7	7.83	3.75	-59.7
3	7.30	-3.36	28.3	6.51	3.36	-28.3
4	-7.67	-5.91	-0.77	-16.4	-16.6	0.77
5	-0.72	-3.53	-0.17	-13.8	-9.97	0.17
6	3.56	-1.73	14.0	3.57	1.73	-14.0
7	9.14	-4.40	39.6	9.07	4.40	-39.6
8	7.23	-3.55	18.4	7.26	3.55	-18.4
9	-6.83	-6.21	-0.12	-15.9	-16.3	0.12
10	-2.06	-3.03	-0.23	-14.7	-10.5	0.23
11	3.25	-1.64	7.83	3.43	1.64	-7.83
12	8.75	-4.38	20.3	9.05	4.38	-20.3
13	7.38	-3.83	7.90	8.06	3.83	-7.90
14	-3.42	-7.83	8.33	-12.0	-14.7	-8.33
15	2.90	-5.60	3.87	-8.07	-7.90	-3.87
Çerçevenin SAP-2000 ile Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	6.14	-2.55	20.0	4.08	2.55	-20.0
2	8.02	-3.97	59.7	7.88	3.97	-59.7
3	7.35	-3.47	28.4	6.53	3.47	-28.4
4	-7.66	-5.92	-0.76	-16.3	-16.6	0.76
5	-0.74	-3.52	-0.17	-13.8	-9.98	0.17
6	3.58	-1.79	14.1	3.59	1.79	-14.1
7	9.18	-4.57	39.6	9.11	4.57	-39.6
8	7.26	-3.64	18.4	7.29	3.64	-18.4
9	-6.84	-6.22	-0.12	-15.8	-16.3	0.12
10	-2.06	-3.03	-0.23	-14.7	-10.5	0.23
11	3.26	-1.68	7.83	3.45	1.68	-7.83
12	8.76	-4.46	20.3	9.07	4.46	-20.3
13	7.39	-3.87	7.91	8.09	3.87	-7.91
14	-3.45	-7.83	8.32	-11.9	-14.7	-8.32
15	2.86	-5.59	3.87	-8.09	-7.91	-3.87

Tablo 6.8: Şekil 6.5 de verilen çerçevenin çözümü II-B

Çerçevenin Non-Lineer Olarak Çözümü						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	6.36	-2.61	19.7	4.33	2.61	-19.7
2	8.26	-3.90	59.7	8.15	3.90	-59.7
3	7.58	-3.49	28.6	6.76	3.49	-28.6
4	-8.07	-5.76	-0.79	-16.6	-16.7	0.79
5	-0.94	-3.39	-0.16	-14.2	-10.1	0.16
6	3.74	-1.82	13.9	3.76	1.82	-13.9
7	9.41	-4.53	39.6	9.35	4.53	-39.6
8	7.41	-3.64	18.5	7.46	3.64	-18.5
9	-7.08	-6.12	-0.14	-16.0	-16.4	0.14
10	-2.22	-2.94	-0.23	-14.9	-10.6	0.23
11	3.32	-1.68	7.79	3.52	1.68	-7.79
12	8.88	-4.44	20.3	9.18	4.44	-20.3
13	7.46	-3.88	7.93	8.16	3.88	-7.93
14	-3.52	-7.79	8.32	-12.0	-14.7	-8.32
15	2.85	-5.57	3.88	-8.16	-7.93	-3.88
Yarı-Rijit Bağlantılar Dikkate Alınarak Non-Lineer Çözüm						
Eleman	MX1	FY1	FZ1	MX2	FY2	FZ2
1	21.6	-2.72	29.3	-8.25	2.72	-29.3
2	22.7	-3.37	46.2	-5.39	3.37	-46.2
3	23.2	-3.91	32.5	-4.88	3.91	-32.5
4	-378	159	-3.18	-389	-182	3.18
5	-370	160	-1.73	-379	-173	1.73
6	-0.32	0.46	18.0	1.04	-0.46	-18.0
7	8.58	-4.81	28.3	14.7	4.81	-28.3
8	9.88	-5.64	25.8	16.4	5.64	-25.8
9	-339	137	-0.98	-329	-160	0.98
10	-288	123	0.36	-295	-136	-0.36
11	-9.51	1.43	6.70	4.46	-1.43	-6.70
12	7.21	-6.15	18.3	19.2	6.15	-18.3
13	6.44	-5.29	11.0	15.8	5.29	-11.0
14	-166	61.9	11.4	-164	-84.4	-11.4
15	-143	61.0	5.29	-162	-74.5	-5.29

7 SONUÇ

Bu çalışmada, öncelikle matris deplasman metoduyla yapı sistemlerinin hesabı incelenmiştir. Önce, birinci mertebe teorisi kullanılarak lineer hesap yapılmıştır. İkinci olarak, çubuk eksenî doğrultusundaki normal kuvvetin, büyük yer değiştirmeler söz konusu olduğunda, etkisi incelenmiştir. Kolonun kendi ağırlığı, eksenî doğrultusunda bir yayılı yük olarak alınmış ve ikinci mertebe teorisi kullanılarak şekil değiştirmiş cisim üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Elde edilen matrisler kullanılarak, örnek bir problem çözülmüştür. Çubuk üzerinde normal kuvvetin elastik eğriye etkisinin dikkate alındığı ve alınmadığı durumlar karşılaştırıldığında, büyük deplasmanların söz konusu olduğu kolonlarda normal kuvvetin elastik eğriye etkisinin ihmal edilemeyecek kadar büyük olduğu görülmüştür. Kolonların kendi ağırlıklarının, büyük deplasmanlar söz konusu olduğunda, elastik eğriye etkilerinin sonuçları değiştirmeyecek kadar küçük olduğu görülmüştür. Sadece kolonlar üzerine dışarıdan büyük bir eksenel yayılı yük etkidiği durumlarda bu yükün etkisinin olabildiği gözlenmiştir. Büyük deplasmanların söz konusu olduğu sistemlerde sadece normal kuvvetin etkisinin alınmasının yeterli olduğu sonucuna varılmıştır.

Son olarak, kolon-kiriş birleşimlerinde, yarı rijit-bağlantıların olduğu düşünölmüştür. Yarı rijit bağlantılar kiriş uçlarında dönmeye karşı rijitlik gösteren yaylar olarak modellenmiş ve yay katsayıları kullanılarak rijitlik matrisi bulunmuştur. Yarı-rijit bağlantılar nonlineer davranış gösterirler, yay katsayıları genelde moment-dönme grafiklerinden elde edilen non-lineer ifadelerle gösterilir. Bu çalışmada ise, kolon kiriş birleşimlerindeki bağlantılar için sabit yay katsayıları kullanılmıştır. Kiriş-kolon bağlantılarının yarı-rijit olduğu ve bağlantıların tamamen rijit olduğu durumlar karşılaştırıldığında yarı-rijitliğin etkisinin sonuçlar üzerinde büyük etkisinin olabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] **Tezcan, S.**, “Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü”, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul, 1970.
- [2] **Ghali A., Nevielle, A. M., Cheung, Y.K.**, “Structural Analysis, A Unified Classical and Matrix Approach”, Intext Educational Publishers, 1970.
- [3] **Council on Tall Buildings and Urban Habitat**, “Semi-Rigid Connections in Steel Frames”, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.
- [4] **Almusallam, T. H. and Richard, R. M.**, “Steel Frame Analysis with Flexible Joints Exhibiting a Strain-Softening Behavior”, Computers & Structures, Vol. 46 No 1, pp 55-65, 1993.
- [5] **Erdem, H. ve Aksoğan, O.**, “The Analysis of Frames Consisting of Members Connected to Their Rigid End Sections By Nonlinear Rotational Springs”, Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi, Cilt 9. Sayı: 1-2, Aralık 1994.
- [6] **Chen, W. F. and Lui, E. M.**, “Structural Stability”, Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, 1987.
- [7] **İnan, M.**, “Cisimlerin Mukavemeti, Teknik Mukavemet II Ders Notları”, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi Matbaası, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

Rasim Hatipoğlu 19.04.1977 tarihinde İstanbul 'da doğmuştur. İlk ve orta eğitimini Tuzla 'da bitirdikten sonra, lise eğitimini İntaş Lisesi 'nde tamamlamıştır. 1994 yılında girmiş olduğu Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü 'nden 1998 yılında mezun olmuştur. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Programı Mekanik Kürsüsü 'nde yüksek lisans çalışmalarına başlamıştır.