

**SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE
KABUK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Serhat SERDAR
(501001222)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 Nisan 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 16 Nisan 2003**

Tez Danışmanı :	Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri :	Prof.Dr. Metin AYDOĞAN (İ.T.Ü.)
	Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü)

NİSAN 2003

ÖNSÖZ

Bu çalışmada silindirik kabuklar ve sonlu farklar yöntemiyle ilgili teorik bilgiler verilerek, bu bilgiler doğrultusunda pratikte karşılaşılmaması muhtemel silindirik kabuk problemleri serilerle ve sonlu farklar yöntemiyle çözülmüştür.

Yüksek lisans tez çalışmam sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU'na teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim sırasında benden yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Yük. Bilg. Mühendisi Oya ARAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Her konuda sonsuz fedakarlıklarla benden yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eniştem Elk. Müh. Murat TANRIVERDİ'ye teşekkür ederim.

Öğrenimimin bu aşamaya gelmesi için ellerinden gelen her imkanı bana sunan sevgili annem Fizik Öğretmeni Sevil SERDAR ve sevgili babam Yük Kimyager Enver SERDAR'a sonsuz teşekkür ederim.

Hayatımdaki tüm olaylarda fikirlerinden ve tecrübelerinden yararlandığım sevgili ablam Yük. End. Müh. Zuhale TANRIVERDİ'ye teşekkür ederim.

Bu tez çalışmam sırasında yaptığı çalışmayla bana ışık tutan ve yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Yük. İnş. Müh. Volkan AÇAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu tez çalışmasını, benimle hayatını birleştiren ve her zaman en zor anlarımda yanımda olan ve olacak olan sevgili eşim Mimar Fulya SERDAR'a ithaf ederim.

NİSAN 2003

Serhat SERDAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMARY	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Tanımlar ve Notasyonlar	1
1.2. Sonlu Farklar Yöntemi	10
1.2.1. İnterpolasyon polinomu ve newton formu	10
1.2.2. İleriye doğru fark formülleri	13
1.2.3. Geriye doğru fark formülleri	16
1.2.4. Merkezi fark formülleri	20
1.2.5. Yaklaşık kısmi türev	23
2. SİLİNDİRİK KABUKLARIN GENEL TEORİSİ	32
2.1. Eksenine Göre Simetrik Olarak Yüklenmiş Silindirik Kabuklar	32
2.2. Dairesel Silindirik Kabukların Simetrik Deformasyonunun Özel Halleri	39
2.2.1. Düzgün dağılmış çizgisel yük altındaki uzun silindirik kabuk	39
2.2.2. Sabit cidar kalınlıklı silindirik tanklar	43
2.2.3. Değişken cidar kalınlıklı silindirik tanklar	45
2.3. Silindirik Bir Kabuğun Deformasyonunun Genel Hali	50
2.3.1. Kenarlarından mesnetli silindirik kabuklar	57
2.3.2. Silindirik bir kabuk parçasının sehim	59
3. SAYISAL ÖRNEKLER	61
3.1. Eksenine ve Orta Kesitine Göre Simetrik Yüklü Silindirik Kabuk	61
3.1.1. Kesin çözüm	61
3.1.2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm	62
3.2. Ortasından Belirli Bir Bölgede Eksenine Göre Simetrik Yüklü Silindirik Kabuk	65
3.2.1. Kesin çözüm	65
3.2.2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm	68
3.3. Eksenine Göre Simetrik Sabit İç Basıncı Altındaki Silindirik Kabuk	71
3.3.1. Kesin çözüm	71
3.3.2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm	74
3.4. İç Sıvı Basıncı Altındaki Sabit Cidar Kalınlıklı Silindirik Tank	76
3.4.1. Kesin çözüm	77
3.4.2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm	78
3.5. İç Sıvı Basıncı Altındaki Düzgün Değişen Cidar Kalınlıklı Silindirik Tank	81

3.5.1. Kesin çözüm	81
3.5.2. Sonlu farklar yöntemiyle çözüm	86
3.6. Kenarlarından Destekli Silindirik Kabuk	90
3.6.1. Tam kapasite dolu olmayan kenarları destekli silindirik kabuk	90
3.6.1.1. Çözüm	90
3.6.2. Tam kapasite dolu olan kenarları destekli silindirik kabuk	96
3.6.2.1. Çözüm	96
3.7. Silindirik Kabuk Parçası	98
3.7.1. Yüzeyine dik uniform yayılı yüklü silindirik kabuk parçası	98
3.7.1.1. Çözüm	98
3.7.2. Tam ortasında yüzeyine dik tekil yükle yüklü silindirik kabuk parçası	101
3.7.2.1. Çözüm	101
EK A TABLOLAR	104
EK B MATLAB İLE YAZILAN PROGRAMLAR	129
KAYNAKLAR	138
ÖZGEÇMİŞ	139

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1.	Bölünmüş farkların elde edilişi	13
Tablo 2.1.	φ_i fonksiyonları tablosu	49
Tablo 3.1.	Excel formül giriş şekli	64
Tablo 3.2.	Excel formül giriş şekli	70
Tablo 3.3.	Excel formül giriş şekli	72
Tablo 3.4.	Excel formül giriş şekli	76
Tablo 3.5.	Denklemlerde kullanılacak katsayılar	88
Tablo 3.6.	9 terim alınarak elde edilen sonuçlar	94
Tablo 3.7.	56 terim alınarak elde edilen sonuçlar	94
Tablo 3.8.	273 terim alınarak elde edilen sonuçlar	95
Tablo 3.9.	738 terim alınarak elde edilen sonuçlar	95
Tablo 3.10.	9 terim alınarak elde edilen sonuçlar	97
Tablo 3.11.	56 terim alınarak elde edilen sonuçlar	97
Tablo 3.12.	273 terim alınarak elde edilen sonuçlar	97
Tablo 3.13.	738 terim alınarak elde edilen sonuçlar	98
Tablo 3.14.	9 terim alınarak elde edilen sonuçlar	100
Tablo 3.15.	49 terim alınarak elde edilen sonuçlar	100
Tablo 3.16.	169 terim alınarak elde edilen sonuçlar	100
Tablo 3.17.	529 terim alınarak elde edilen sonuçlar	101
Tablo 3.18.	9 terim alınarak elde edilen sonuçlar	102
Tablo 3.19.	10000 terim alınarak elde edilen sonuçlar	102
Tablo 3.20.	160000 terim alınarak elde edilen sonuçlar	102
EK A	TABLolar ve ŞEKİLLER	104
Tablo A.1.	Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması	105
Tablo A.2.	Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması	106
Tablo A.3.	Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması	107
Tablo A.4.	Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması	108
Tablo A.5.	Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması	110
Tablo A.6.	Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması	112
Tablo A.7.	Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması	114
Tablo A.8.	Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması	115
Tablo A.9.	Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması	116
Tablo A.10.	Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması	117
Tablo A.11.	Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması	119
Tablo A.12.	Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması	121
Tablo A.13.	Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması	123
Tablo A.14.	Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması	125
Tablo A.15.	Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması	127

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1.	: Kabuk üzerinde alınan sonsuz küçük eleman	2
Şekil 1.2.	: Birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvet ve momentler	3
Şekil 1.3.	: Sadece dönme durumu	4
Şekil 1.4.	: Dönme ve ötelemenin beraber olduğu durum	6
Şekil 1.5.	: Silindirik kabukta koordinat eksenleri	8
Şekil 1.6.	: Pozitif gerilme yönleri.....	9
Şekil 1.7.	: Pozitif kuvvet ve moment yönleri	9
Şekil 1.8.	: İleriye doğru fark formülleri	16
Şekil 1.9.	: Geriye doğru fark formülleri	19
Şekil 1.10.	: Merkezi fark formülleri.....	23
Şekil 1.11.	: İki değişkenli fonksiyon için sonlu fark ağı	24
Şekil 1.12.	: D_x kısmi türevi.....	24
Şekil 1.13.	: D_y kısmi türevi.....	25
Şekil 1.14.	: D_{xy}^2 kısmi türevi	26
Şekil 1.15.	: D_{xx}^2 ve D_{yy}^2 kısmi türevleri	26
Şekil 1.16.	: D_{xxy} ve D_{xyy}^3 kısmi türevleri	28
Şekil 1.17.	: D_{xxyy}^4 kısmi türevi	28
Şekil 1.18.	: D_{xxx}^3 ve D_{yyy}^3 kısmi türevleri	29
Şekil 1.19.	: D_{xxyy}^4 ve D_{xyyy}^4 kısmi türevleri	30
Şekil 1.20.	: D_{xxxx}^4 ve D_{yyyy}^4 kısmi türevleri	31
Şekil 2.1.	: Silindirik kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman	33
Şekil 2.2.	: Sonsuz uzun dairesel boru.....	36
Şekil 2.3.	: φ ve ψ fonksiyonları	38
Şekil 2.4.	: Çizgisel yüklü uzun silindirik kabuk.....	39
Şekil 2.5.	: Deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramları	41
Şekil 2.6.	: Düzgün dağılmış simetrik yük	42
Şekil 2.7.	: Sabit cidar kalınlıklı silindirik tank.....	43
Şekil 2.8.	: Değişken cidar kalınlıklı silindirik tank	46
Şekil 2.9.	: Kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman	51
Şekil 2.10.	: Kenarlarından mesnetli silindirik kabuk	57
Şekil 2.11.	: Silindirik kabuk parçası.....	59
Şekil 3.1.	: Halka yükle yüklü silindirik kabuk	61
Şekil 3.2.	: Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	63
Şekil 3.3.	: Ortasından belirli bir bölgede simetrik yüklü silindirik kabuk ...	65
Şekil 3.4.	: Yükün uygulandığı bölge içinde integrasyon sınırları	66
Şekil 3.5.	: Yükün uygulandığı bölge dışında integrasyon sınırları	67
Şekil 3.6.	: Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	69
Şekil 3.7.	: Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk	71
Şekil 3.8.	: Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	74
Şekil 3.9.	: Sabit cidar kalınlıklı silindirik tank.....	76
Şekil 3.10.	: Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı.....	79

Şekil 3.11.	: Değişken cidar kalınlıklı silindirik tank	81
Şekil 3.12.	: Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	87
Şekil 3.13.	: Kenarlarından destekli silindirik kabuk	90
Şekil 3.14.	: Kabuk içindeki sıvı basıncı değişimi ve pozitif eksen yönleri	91
Şekil 3.15.	: Tam kapasite dolu kenarları destekli silindirik kabuk	96
EK A	: TABLOLAR ve ŞEKİLLER	104
Şekil A.1.	: Deformasyon	105
Şekil A.2.	: Eğilme momenti	106
Şekil A.3.	: Kesme kuvveti	107
Şekil A.4.	: Deformasyon	109
Şekil A.5.	: Eğilme momenti	111
Şekil A.6.	: Kesme kuvveti	113
Şekil A.7.	: Deformasyon	114
Şekil A.8.	: Eğilme momenti	115
Şekil A.9.	: Kesme kuvveti	116
Şekil A.10.	: Deformasyon	118
Şekil A.11.	: Eğilme momenti	120
Şekil A.12.	: Kesme kuvveti	122
Şekil A.13.	: Deformasyon	124
Şekil A.14.	: Eğilme momenti	126
Şekil A.15.	: Kesme kuvveti	128

SEMBOL LİSTESİ

a	: Kabuk silindir yarıçapı
$C_1, C_2, \dots$	: İntegrasyon sabitleri
d	: Tank yüksekliği
D	: Kabuk eğilme rijitliği
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
h	: Kabuk kalınlığı, x eksenindeki pivot noktası aralığı
k	: y eksenindeki pivot noktası aralığı
ℓ	: Kabuk uzunluğu
M_x	: x eksenine dik kesitteki eğilme momenti
M_φ	: y eksenine dik kesitteki eğilme momenti
$M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$	: Burulma momentleri
N_x	: x eksenine dik kesitteki normal kuvvet
N_φ	: y eksenine dik kesitteki normal kuvvet
$N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$	: Membran kesme kuvvetleri
P	: Çizgisel yük
Q_x	: x eksenine dik kesitteki keme kuvveti
Q_φ	: y eksenine dik kesitteki keme kuvveti
r_x, r_y	: Orta yüzeyin sırasıyla xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik yarıçapları
u	: Deformasyonun x eksenindeki bileşeni
Z	: Yayılı yük
v	: Deformasyonun y eksenindeki bileşeni
ω	: Deformasyonun z eksenindeki bileşeni
ϵ_x, ϵ_y	: Sırasıyla x ve y eksenlerindeki birim deformasyon sabitleri
ϵ_1, ϵ_2	: Kabuk orta yüzeyinin sırasıyla xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik değişimleri
ν	: Poisson oranı
χ_x, χ_y	: Kabuk orta yüzeyinin sırasıyla xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik değişimleri
χ_{xy}	: Kabuk orta yüzeyinin burulması
α	: Sıvı seviyesini gösteren açı
γ	: Kayma birim deformasyonu, sıvı birim hacim ağırlığı
φ	: Deformasyonun hesaplanacağı noktayı gösteren açı
Δ	: İleriye doğru fark operatörü
∇	: Geriye doğru fark operatörü
δ	: Merkezi fark operatörü
μ	: Ortalama operatörü

SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE SİLİNDİRİK KABUK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada pratikte karşılaşılmaması muhtemel silindirik kabuk problemleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüş, elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler yardımıyla değerlendirilmiştir.

Birinci bölümün ilk kısmında öncelikle tüm kabuk türleri için kullanılan temel tanımlar ve formüller verilmiştir. Daha sonra bu tanım ve formüllerin silindirik kabuklara uyarlaması yapılarak sonuçların değerlendirilmesi sırasında kullanılacak pozitif gerilme, kuvvet ve moment yönleri tanımlanmıştır.

Birinci bölümün ikinci kısmında ise sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Bu yöntemin kullanımı sırasında yapılan kabuller anlatılarak yöntemin nasıl hassaslaştırılabileceği tanımlanmıştır. Sonuç olarak merkezi fark formüllerinin kullanılmasına karar verilmiştir. Son olarak ise kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklar şeklinde yazılmasında kullanılacak yaklaşık kısmi türev formülleri merkezi fark formülleri kullanılarak elde edilmiştir.

İkinci bölüm silindirik kabukların genel teorisine ayrılmıştır. İlk önce simetrik yüklü silindirik kabuklar daha sonra da simetrik olmayan yükler altındaki silindirik kabuklar incelenmiştir. Son olarak ise silindirik kabuk parçası incelenmiştir. Daha sonra yükleme şekline göre değişen bazı türler için kullanılabilecek pratik formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise ikinci bölümde genel teorisi verilen silindirik kabuk problemlerine ait sayısal örnekler yapılmıştır.

SOLUTIONS OF CYCLINDRICAL SHELL PROBLEMS BY USING FINITE DIFFERENCE METHOD

SUMMARY

In this study cylindrical shell problems that are encountered during practical study are solved by analytic and finite difference methods and results are evaluated by using tables and graphics.

In the beginning of the first chapter, the basic definitions and formulas for all kinds of shell problems are given. Then adapting these definitions and formulas to cylindrical shells; positive stress, force and moment acceptances which are used while the results are being evaluated are defined.

In the second part of the first chapter, information about finite difference method is given. Giving the acceptances that are made while using this method it is defined that how results can make more accurate. In the end use of central differences is decided in this study. Then partial derivative formulas that are used to write the differential equations in finite difference form are defined.

In the second chapter general theory of cylindrical shells is defined. First symmetrically loaded cylindrical then anti-symmetrically loaded shells are observed. In the end piece of cylindrical shells are observed. Then some practical formulas changing according to the load form of the shell are given.

In the third chapter some numerical examples that the theoretic part of them are given in the second chapter are solved.

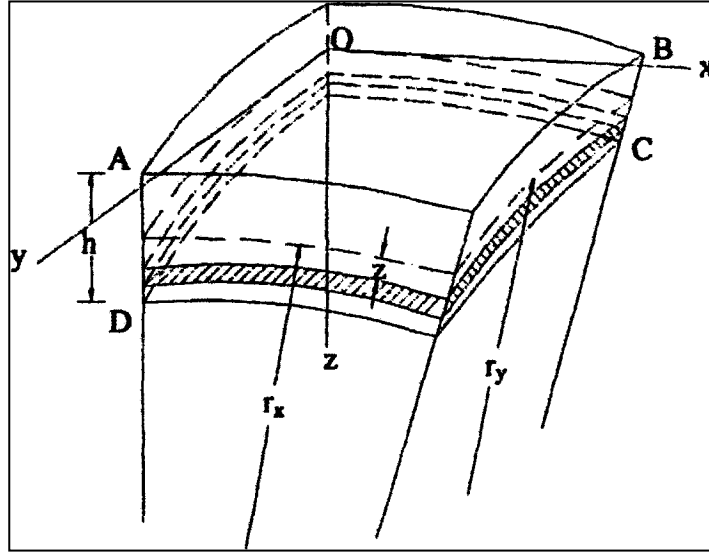
I. GİRİŞ

Dairesel kesitli taşıyıcı elemanların boyutlandırılması sırasında, silindirik kabuk problemlerine pratikte çok sık rastlanır. Buhar ve su basıncı altındaki silindirik kazanlar, iç sıvı basıncı altındaki diişey eksenli silindirik kaplar bu tür problemlere örnek olarak verilebilir. Bu tür problemlerin analitik olarak çözümü çoğu zaman karmaşık ve zaman alıcı işlemleri gerektirmektedir. Üstelik pratikteki pek çok silindirik kabuk probleminin çözümü ya yoktur ya da bir takım basitleştirmelerle mümkündür. Bu nedenle silindirik kabuk problemlerinin çözümü için sayısal yöntemlerin kullanılması çoğu zaman daha elverişli olmaktadır. Bununla beraber sayısal yöntemlerin en büyük gereksinimi olan bilgisayarların son yıllarda hızlı bir şekilde gelişmesi ve yayılması sayısal yöntemlerin önemini arttırmıştır.

Sayısal yöntemler içinde en çok bilinen ve kullanılan yöntemlerden bir tanesi sonlu farklar yöntemidir. Bunun en büyük nedeni sonlu farklar yönteminin analitik çözümler için kullanılan diferansiyel denklemler üzerine kolaylıkla uygulanabilmesidir. Bu yüzden silindirik kabuk problemleri üzerine sonlu farklar yönteminin uygulanabilmesi için analitik çözümde kullanılan temel tanım ve teorilerin bilinmesi gerekir. Bu amaçla bundan sonraki bölümde silindirik kabuklarla ilgili temel tanımlar ve kullanılacak notasyon anlatılacaktır. Daha sonraki bölümde ise sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verilecektir.

1.1. Tanımlar ve Notasyon

Kabuklar için kullanılan notasyon sistemi plaklar için kullanılan klasik notasyona oldukça benzer. Plaklarda olduğu gibi kabuklar için de kalınlık h ile gösterilir ve kalınlık boyutunun kabuğun diğer boyutlarına ve eğrilik yarıçapına göre oldukça küçük olduğu kabul edilir. Kabuk kalınlığını ortadan ikiye ayıran yüzey orta yüzey olarak adlandırılır. Herbir noktasındaki orta yüzeyinin formu ve kalınlığı belli olan kabuk tamamen tanımlanmış olur.



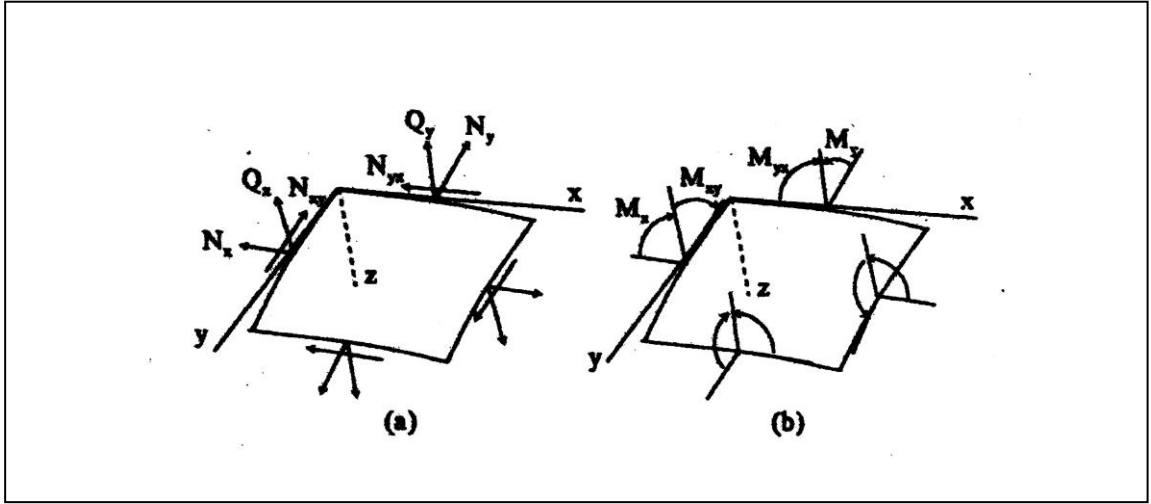
Şekil 1.1 (Kabuk üzerinde alınan sonsuz küçük eleman)

İç kuvvetleri analiz etmek için kabuk üzerinde Şekil 1.1'de görüldüğü gibi sonsuz küçük bir diferansiyel eleman seçelim. Bu eleman kabuğun orta yüzeyine dik olan iki komşu düzlemle tanımlıdır. Bu düzlemler aynı zamanda asal eğrilikleri bulundurulur, x ve y eksenlerini O noktasında eleman yüzeyleri ile orta yüzeyin ara kesitine teğet olacak şekilde, z eksenini de orta yüzeye dik olacak şekilde seçelim. xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik yarıçaplarını sırasıyla r_x ve r_y olarak isimlendirelim.

Eleman düzlem yüzlerinde oluşacak gerilmeleri x, y ve z eksenlerindeki bileşenlerine ayıralım. Bu gerilme bileşenleri için mukavemette klasik olarak kullanılan σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, τ_{xz} sembolleri kullanılacaktır. Bu notasyon kullanılarak normal kesitlerde birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvetler Şekil 1.2a'da gösterilmiştir.

Büyüklikleri gösteren sembollerin altında tek indis bulunduğunda indis büyüklüğün doğrultusunu göstermektedir. İki indis bulunduğunda birinci indis büyüklüğün bulunduğu yüzeyin normalini ikinci indis ise büyüklüğün doğrultusunu göstermektedir.

Tüm bileşke kuvvetler, kesitlerinde oluşan normal ve kayma gerilmelerinin kesit alanı boyunca integrasyonu sonucunda bulunabilir. Buna göre sırasıyla normal kuvvetler ve kesme kuvvetleri için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.



Şekil 1.2 (Birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvet ve momentler)

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.2)$$

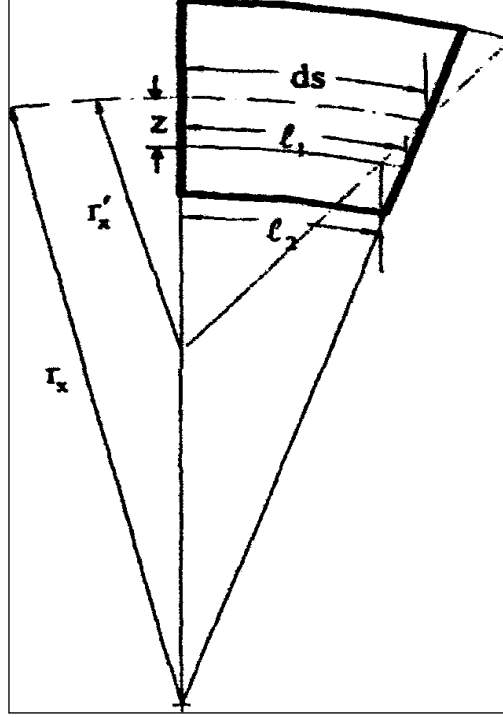
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.3)$$

Formüllerdeki z/r_x ve z/r_y terimleri Şekil 1.1'deki elemanın orta yüzeyine dik kesitlerinin trapez formundan dolayı hesaba katılmıştır. Bu nedenle kesme kuvvetleri N_{xy} ve N_{yx} genelde eşit değildir. Bununla beraber $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ eşitliği geçerliliğini korumaktadır. Daha önceden h kalınlığının esas eğrilik yarıçapları r_x ve r_y 'ye göre çok küçük kabul edildiği hatırlanırsa formüllerdeki z/r_x ve z/r_y terimlerinin ihmal edilebileceği söylenebilir. Bu durumda N_{xy} ve N_{yx} kesme kuvvetleri için, plaklarda olduğu gibi $N_{xy} = N_{yx}$ eşitliği geçerliliğini koruyacaktır. Orta yüzeye dik kesitlerde birim uzunluk için oluşacak burulma ve eğilme momentleri için ise aşağıdaki formüller yazılabilir. (Şekil 1.2b)

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.4)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.5)$$

Burada da z/r_x ve z/r_y terimleri ihmal edilirse, burulma momentleri için $M_{xy} = -M_{yx}$ eşitliği yazılabilir. Kabuğun eğilmesi hesaplanırken, doğrusal elemanların, örneğin Şekil 1.1'deki AD ve BC kenarlarının, kabuğun orta yüzeyine dik olduğu, eğilme sırasında doğrusal formlarını koruyacağı ve eğilme sonrasında da deforme olmuş orta yüzeye dik kalacakları kabul edilecektir.



Şekil 1.3 (Sadece dönme durumu)

Kolay anlaşılması açısından en basit durum olan Şekil 1.1'deki elemanın orta yüzeye dik yüzlerinin sadece orta yüzeyle yaptıkları arakesit çizgileri etrafında döndüğü durumu düşünelim. r_x' ve r_y' eğilmeden sonraki eğrilik yarıçapları olmak üzere, Şekil 1.1'de taralı çizgilerle gösterilen ve orta yüzeyden z uzaklığında olan bir elemanda oluşacak ε_x ve ε_y birim deformasyonlarını elde etmeye çalışalım. Şekil 1.3'deki üçgenlerin benzerliği kullanılarak ℓ_1 ve ℓ_2 uzunlukları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\lambda_1 = ds \left(\frac{r_x - z}{r_x} \right) \quad \lambda_2 = ds \left(\frac{r_x' - z}{r_x'} \right) \quad (1.6)$$

Bu eşitlikler birim deformasyon tanımı düşünülerek yazılabilecek $\varepsilon = (\lambda_{son} - \lambda_{ilk}) / \lambda_{ilk}$ bağıntısında yerlerine konulursa, orta yüzeyden z uzaklığında

olan bir elemanda oluşacak ε_x ve ε_y birim deformasyonları için aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left(\frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right) \quad \varepsilon_y = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_y}} \left(\frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right) \quad (1.7)$$

Dönmenin yanında elemanın orta yüzeye dik kenarları kendilerine paralel olacak şekilde orta yüzeydeki uzama nedeniyle ötelendiği durumda ise ε_1 ve ε_2 sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusunda orta yüzeydeki birim deformasyon sabitleri olmak üzere ℓ_1 ve ℓ_2 uzunlukları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir. (Şekil 1.4)

$$\lambda_1 = ds \left(1 - \frac{z}{r_x} \right) \quad \lambda_2 = ds (1 + \varepsilon_1) \left(1 - \frac{z}{r_x'} \right) \quad (1.8)$$

Bu eşitlikler yukarıda olduğu gibi birim deformasyon bağıntısında yerlerine konulursa

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1}{1 - \frac{z}{r_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left[(1 + \varepsilon_1) \frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (1.9)$$

bağıntısı elde edilir. Benzer bağıntı ε_y için de yazılabilir.

Daha önce olduğu gibi z/r_x ve z/r_y terimleri ve ε_1 'in eğrilik değişimi üzerindeki etkisi ihmal edilirse ε_x ve ε_y için kullanılacak bağıntılar aşağıda verilen şekle dönüşecektir.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 - z \left(\frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right) = \varepsilon_1 - \chi_x z \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 - z \left(\frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right) = \varepsilon_2 - \chi_y z \quad (1.10)$$

(1.10) bağıntılarındaki χ_x ve χ_y terimleri eğriliği sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusundaki değişimini göstermektedir. Elemana dik normal gerilmelerin oluşmadığı varsayılırsa ($\sigma_z = 0$) (1.10) eşitliklerinin gerilme – şekildeğiştirme bağıntılarında yerlerine konulması sonucunda, elemanın gerilme bileşenleri için kullanılacak aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - z(\chi_x + \nu\chi_y)] \quad (1.11)$$

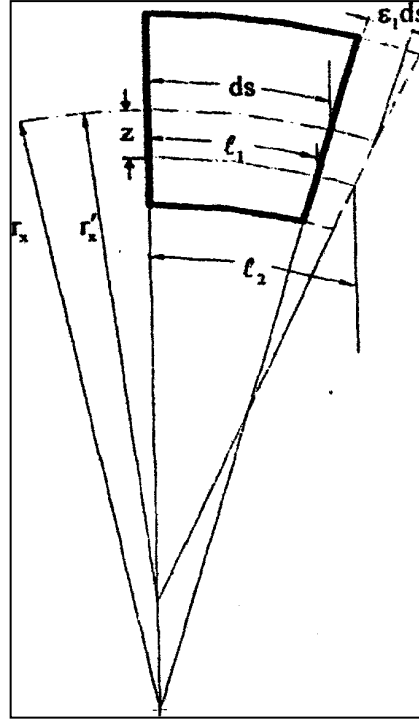
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - z(\chi_y + \nu\chi_x)] \quad (1.12)$$

(1.11) ve (1.12) eşitlikleri (1.1) ve (1.2) denklemlerinde yerlerine konulup z/r_x ve z/r_y terimleri ihmal edilirse

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (1.13)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \quad M_y = -D(\chi_y + \nu\chi_x) \quad (1.14)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada D plaklarda olduğu gibi kabuğun eğilme rijitliğidir.



Şekil 1.4 (Dönme ve ötelemenin beraber olduğu durum)

Şimdi daha genel bir durum olarak elemanın orta yüzeye dik yüzlerinde normal gerilmelere ek olarak kayma gerilmelerinin de oluştuğunu düşünelim. γ kabuğun orta yüzeyindeki kayma birim deformasyonu ve $\chi_{xy}dx$ BC kenarının Oz'ye göre x eksenini etrafındaki dönmesi olmak üzere

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2\chi_{xy})G \quad (1.15)$$

eşitliği yazılabilir. Burada G kabuğun yapıldığı malzemenin kayma modülüdür ve aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.16)$$

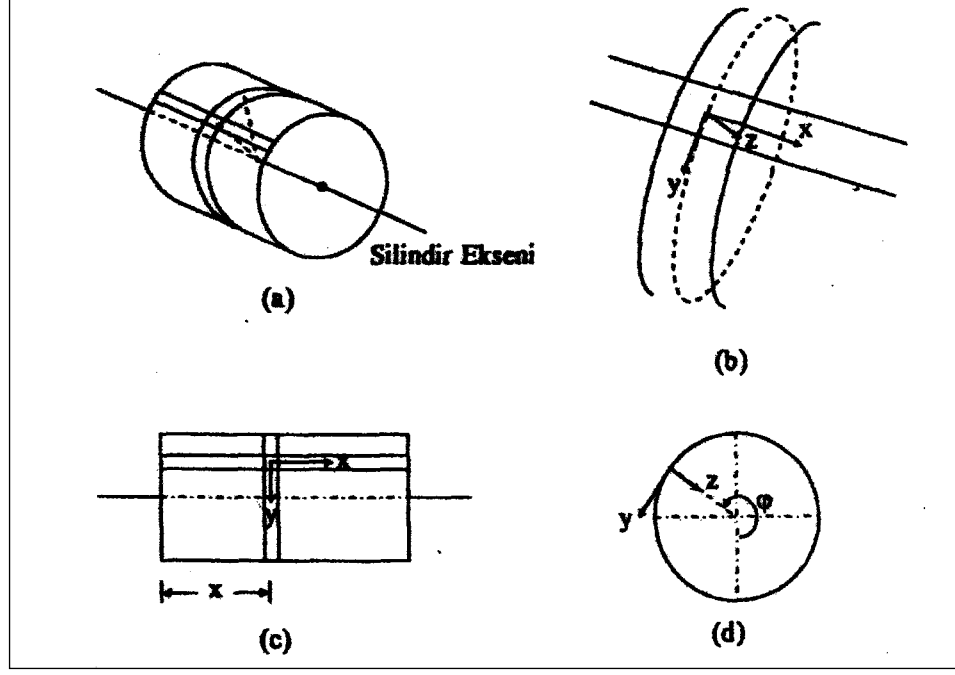
(1.15) eşitliği daha önceki basitleştirmeler de dikkate alınarak (1.2) ve (1.4) eşitliklerinde yerlerine konulursa

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{\gamma h E}{2(1 + \nu)} \quad (1.17)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu)\chi_{xy} \quad (1.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylelikle kabuğun eğilmesi sırasında orta yüzeye dik doğrultuda olan doğrusal kenarların doğru formunu koruyacağı ve deforme olmuş orta yüzeye deformasyondan sonra yine dik kalacağı varsayılarak, birim uzunluk için N_x , N_y , N_{xy} bileşke kuvvetleriyle M_x , M_y , M_{xy} bileşke momentleri altı büyüklük cinsinden elde edilmiş olur. Bu büyüklüklerden ilk üçü orta yüzeyin birim deformasyon bileşenleri olan ε_1 , ε_2 , γ ile ilgili, kalan üçü ise orta yüzeyin eğrilik değişimleriyle burulmasını tanımlayan χ_x , χ_y , χ_{xy} büyüklükleridir.

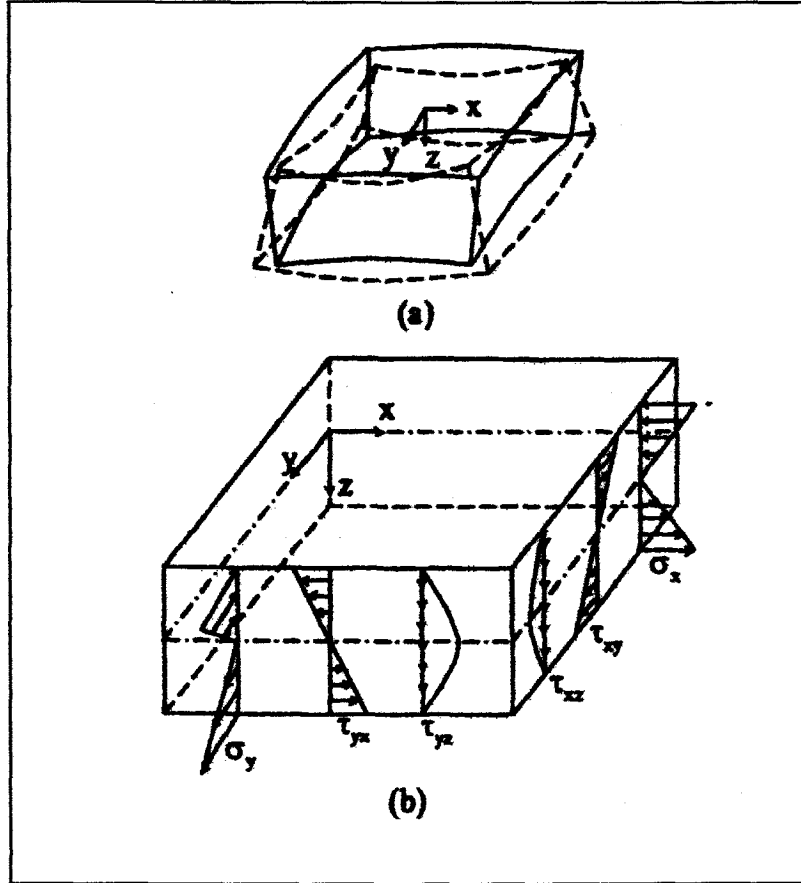
Buraya kadar anlatılan tanım ve formüller tüm kabuk türleri için genel olarak verilmiştir. Silindirik kabuk durumunda kartezyen koordinat takımı plaklardan farklı olarak sabit değildir. Kabuk üzerindeki herhangi bir nokta, belirli bir referans noktasından (genelde bakış yönüne göre silindirin sol ucu) ölçülen yatay x mesafesiyle, silindir eksenine dik düzlemde genelde silindirin en alt noktasından ölçülen ϕ açısıyla gösterilir. Kartezyen koordinat takımının silindirik kabuk üzerindeki herhangi bir noktaya göre değişimi Şekil 1.5'de gösterilmiştir.



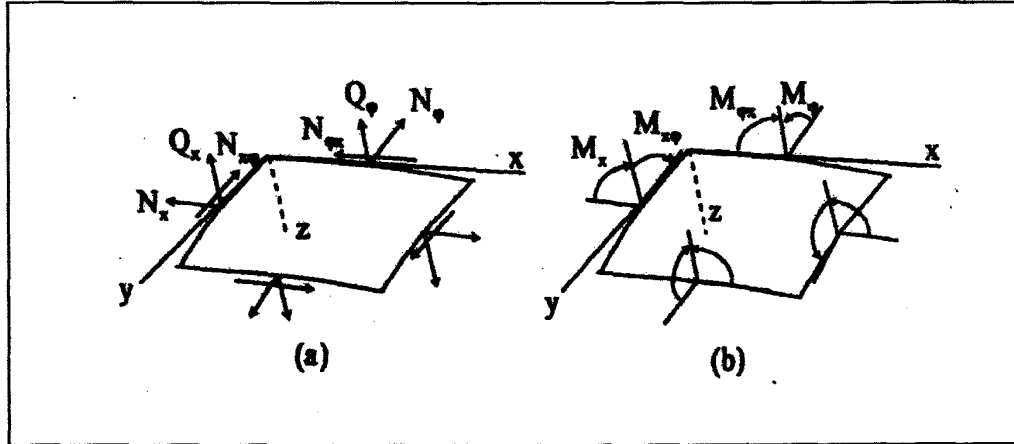
Şekil 1.5 (Silindirik kabukta koordinat eksenleri)

Silindirik kabukların boyutlandırma problemlerinde kullanılacak formülleri çıkarmadan önce formüllerdeki değişkenler (dış yük, gerilme, bileşke kuvvet ve momentler) için kabul edilecek olan pozitif yönleri açıklayalım. Burada dış yük için pozitif yön Şekil 1.5'deki kartezyen koordinat takımının pozitif eksen yönleri olarak kabul edilecektir. Buna göre silindir eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş kabukta pozitif değerli dış yük $+z$ yönünde, yani silindir dışından eksenine doğru olacaktır. Şekil 1.6'da pozitif dış yük altında silindir üzerinde alınacak bir diferansiyel elemanın yapacağı deformasyon sonucunda pozitif koordinatlara sahip herhangi bir noktada oluşacak gerilmelerin yönleri görülmektedir.

Pozitif gerilmelerin (1.1) ve (1.2) bağıntılarında yerlerine konması sonucu elde edilecek pozitif bileşke kuvvet ve momentler Şekil 1.7'de gösterilmiştir. Plaklardan farklı olarak y ekseninin konumu ϕ açısıyla değiştiği için silindirik kabuklarda y indisi yerine ϕ indisi kullanılır. Dikkati çeken bir diğer nokta ise Şekil 1.7'deki $M_{x\phi}$ momentinin Şekil 1.6'daki τ_{xy} kayma gerilmelerinin yaratacağı momentle ters yönde olduğudur. Bunun nedeni (1.2) bağıntılarında M_{xy} için yazılan integrasyonun önündeki eksi işaretidir.



Şekil 1.6 (Pozitif gerilme yönleri)



Şekil 1.7 (Pozitif kuvvet ve moment yönleri)

Şekil 1.7'den yararlanarak bileşke kuvvet ve momentlerin pozitif yönleri için çeşitli pratik kurallar üretilebilir. Buna göre normal kuvvetler için kesitin dış normalinin yönü pozitif yöndür. N_{xy} ve N_{yx} kesme kuvvetleri için kullanılacak pozitif yönler ise sağ el kuralı kullanılarak bulunabilir. N_{xy} için pozitif yön sağ elin baş parmağı +z

yönünü gösterirken kalan dört parmağın göstereceği yöndür. N_{yx} için pozitif yön ise sağ elin baş parmağı -z yönünü gösterirken kalan dört parmağın göstereceği yöndür. Kesme kuvvetlerinin pozitif yönlerini elde etmek için öncelikle bakış yönlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Q_x 'in pozitif yönünü elde etmek için kullanılacak bakış yönü sağ elin dört parmağı x ekseninin pozitif ucundan z ekseninin pozitif ucuna doğru giderken baş parmağın göstereceği yöndür. Q_y 'nin pozitif yönünü elde etmek için kullanılacak bakış yönü ise sağ elin dört parmağı y ekseninin pozitif ucundan z ekseninin pozitif ucuna doğru giderken baş parmağın göstereceği yöndür. Kesme kuvvetleri için pozitif yönler, bu şekilde belirlenen bakış yönlerinden bakıldığında kesitleri saat ibreleri yönünde döndürecek yönlerdir. Burulma momentleri için pozitif yön, sağ elin baş parmağı kesitin dış normalini gösterirken diğer dört parmağın göstereceği yöndür. Eğilme momentleri için pozitif yön ise daima silindirin iç yüzeyinde uzama yapacak yöndür.

1.2. Sonlu Farklar Yöntemi

Kapalı bir formda integre edilemeyen bir diferansiyel denklemin temsil ettiği bir teknik problemle karşılaşıldığında yaklaşık çözüm metodları kullanılarak çözüme gidilir.

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü, bilinmeyen fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerinin elde edilmesine dayanır. Bilinmeyen fonksiyonun noktalardaki değerlerini elde etmek için fonksiyonun türevleri, bilinmeyen fonksiyon değerlerine bağlı olarak yazılır. Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine konulduğunda diferansiyel denklem bir lineer denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda bilinmeyen fonksiyonun noktalardaki değerleri elde edilir.

1.2.1. İnterpolasyon Polinomu ve Newton Formu

Bir fonksiyonun $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarındaki değerleri $f_0, f_1, \dots, f_n$ olarak verilsin. Bu fonksiyonun yaklaşım fonksiyonu olarak polinom seçelim. Polinomun verilen noktalardan geçme şartı konulduğunda bu polinoma interpolasyon polinomu denir.

Verilen $n+1$ noktadan geçen polinomun derecesi n olup interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

şeklinde yazılır. Verilen bu polinomda bulunan $a_0, a_1, \dots, a_n$ parametreleri

$$P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

şartı yazılarak bulunan $n+1$ denklemden bulunur. Bu şekilde interpolasyon polinomunun parametrelerini elde etmek için lineer denklem takımını çözmek gerekmektedir.

İnterpolasyon polinomunu elde etmenin başka yolları da vardır. Bunlar arasında en kullanışlı olan aşağıda verilen formdur.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (1.19)$$

Herhangi bir n . derece polinom bu form kullanılarak yazılabilir. Yukarıda verilen formda bilinmeyenler a_i parametreleridir. İnterpolasyon noktalarında fonksiyon değerleri bu noktalardan geçen interpolasyon polinomunun değerlerine eşit olacak şekilde a_i katsayıları bulunur. Buna göre yukandaki formda verilen a_n katsayısı aşağıda verilen eşitlikler yardımıyla elde edilebilir.

$$\begin{aligned} P_n(x_n) &= f(x_n) = f_n \\ P_n(x) - P_{n-1}(x) &= a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \\ a_n &= \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})} = \frac{P_n(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} \quad (1.20) \\ a_n &= \frac{f_n - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

(1.20) bağıntısı kullanılarak (1.19) denklemlerindeki tüm a_i katsayıları verilen noktalardaki bilinmeyen fonksiyon değerleri f_i cinsinden elde edilebilir. İlk katsayı a_0 (1.19) denkleminde x yerine x_0 konulursa

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0) = f_0 \quad (1.21)$$

olarak elde edilir, a_i katsayısı için ise (1.20) bağıntısı kullanılabilir.

$$a_1 = \frac{f_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f_1 - f_0}{(x_1 - x_0)} = f[x_0, x_1] \quad (1.22)$$

Burada $f[x_0, x_1]$ bilinmeyen fonksiyon $f(x)$ 'in x_0 ve x_1 noktalarındaki birinci bölünmüş farkıdır. Benzer şekilde a_2 katsayısı da (1.20) bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - \{a_0 + a_1(x_2 - x_0)\}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - \{f_0 + f[x_0, x_1](x_2 - x_0)\}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f_2 - f_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

(1.22) bağıntısından f_0 çekilip işlemlerin devamında kullanılırsa;

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f_2 - [f_1 - a_1(x_1 - x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f_2 - f_1 + f[x_0, x_1](x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} \\ a_2 &= \frac{f_2 - f_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + f[x_0, x_1] \left\{ \frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{1}{(x_2 - x_1)} \right\} \\ &= \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} + f[x_0, x_1] \left\{ \frac{x_1 - x_0 - x_2 + x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right\} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} \\ a_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} = f[x_0, x_1, x_2] \quad (1.23) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $f[x_0, x_1, x_2]$ bilinmeyen fonksiyon $f(x)$ 'in x_0 , x_1 , ve x_2 noktalarındaki ikinci bölünmüş farkıdır. Daha sonraki katsayıların benzer işlemler yapıp elde edilmesi sonucunda (1.19) interpolasyon polinomundaki katsayıların aşağıda verilen şekilde değiştiği görülür.

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (1.24)$$

(1.24) bağıntısı (1.19) interpolasyon polinomu katsayıları için kullanılırsa, interpolasyon polinomunun Newton formu olarak bilinen

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) &= f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

veya daha kapalı bir formda

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad (1.26)$$

eşitlikleri elde edilir. Bölünmüş farklar aşağıda verilen şekilde bir tablo oluşturularak elde edilebilir.

Tablo 1.1 (Bölünmüş farkların elde edilişi)

x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}]$
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

1.2.2. İleriye Doğru Fark Formülleri

Verilen noktaların h aralığı ile eşit olarak dağıldığı durumda bölünmüş farklar yerine Δ operatörüyle gösterilen ileriye doğru farkların kullanılması daha pratik olacaktır. $f(x)$ 'in birinci ileriye doğru farkı aşağıdaki eşitliklerle tanımlıdır.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1.27)$$

$$\Delta f(x_k) = \Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k \quad (1.28)$$

Daha sonraki ileriye doğru fark operatörleri için (1.24) bağıntısı ve Tablo 1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_k &= \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k \\ \Delta^3 f_k &= \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k \\ \Delta^4 f_k &= \Delta^3 f_{k+1} - \Delta^3 f_k = f_{k+4} - 4f_{k+3} + 6f_{k+2} - 4f_{k+1} + f_k \end{aligned} \quad (1.29)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Daha önce birinci bölünmüş fark için verilen (1.22) denklemi kullanılarak birinci ileriye doğru fark birinci bölünmüş fark cinsinden elde edilebilir.

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{(x_{k+1} - x_k)} = \frac{\Delta f(x_k)}{h}$$

$$\Delta f(x_k) = h \cdot f[x_k, x_{k+1}] \quad (1.30)$$

Benzer işlemler daha sonraki ileriye doğru farklar için yapılırsa ileriye doğru farklar ile bölünmüş farkların birbirleri cinsinden ifadesinde kullanılan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\Delta^r f(x_k) = r! \cdot h^r \cdot f[x_k, \dots, x_{k+r}] \quad (1.31)$$

$$f[x_k, \dots, x_{k+r}] = \frac{\Delta^r f(x_k)}{r! h^r} \quad (1.32)$$

(1.32) bağıntısı (1.25) denkleminde yerine konulursa interpolasyon polinomunun Newton formu ise aşağıdaki gibi ileriye doğru farklar cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

$s = (x - x_0) / h$ dönüşümü yapılarak (1.33) denklemi için

$$\begin{aligned} f(s) \approx P_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \\ \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_n \end{aligned} \quad (1.34)$$

veya daha kapalı bir formda

$$f_s \approx \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad (1.35)$$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Daha önce de belirtildiği gibi sonlu farklar yönteminde bilinmeyen fonksiyonun diferansiyel denklemdeki türevleri için (1.34) interpolasyon polinomunun türevleri kullanılır. Bu amaçla (1.34) denkleminin türevleri alınırsa

$$f_s^I \approx \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (1.36)$$

$$f_s^{II} \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_0 + \frac{6s-6}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{12s^2-36s+22}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.37)$$

$$f_s^{III} \approx \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f_0 + \frac{24s-36}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.38)$$

$$f_s^{IV} \approx \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f_0 + \frac{120s-240}{5!} \Delta^5 f_0 + \dots \right] \quad (1.39)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ilk terimleri alınıp kalan terimler h 'ın bir fonksiyonu olan $\epsilon_i = O(h)$ hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa;

$$f_s^I \approx \frac{1}{h} \Delta f_0 + \epsilon_1 \quad (1.40)$$

$$f_s^{II} \approx \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_0 + \epsilon_2 \quad (1.41)$$

$$f_s^{III} \approx \frac{1}{h^3} \Delta^3 f_0 + \epsilon_3 \quad (1.42)$$

$$f_s^{IV} \approx \frac{1}{h^4} \Delta^4 f_0 + \epsilon_4 \quad (1.43)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.29) ifadesindeki eşitliklerin bu formüllerde yerine konulması sonucu bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

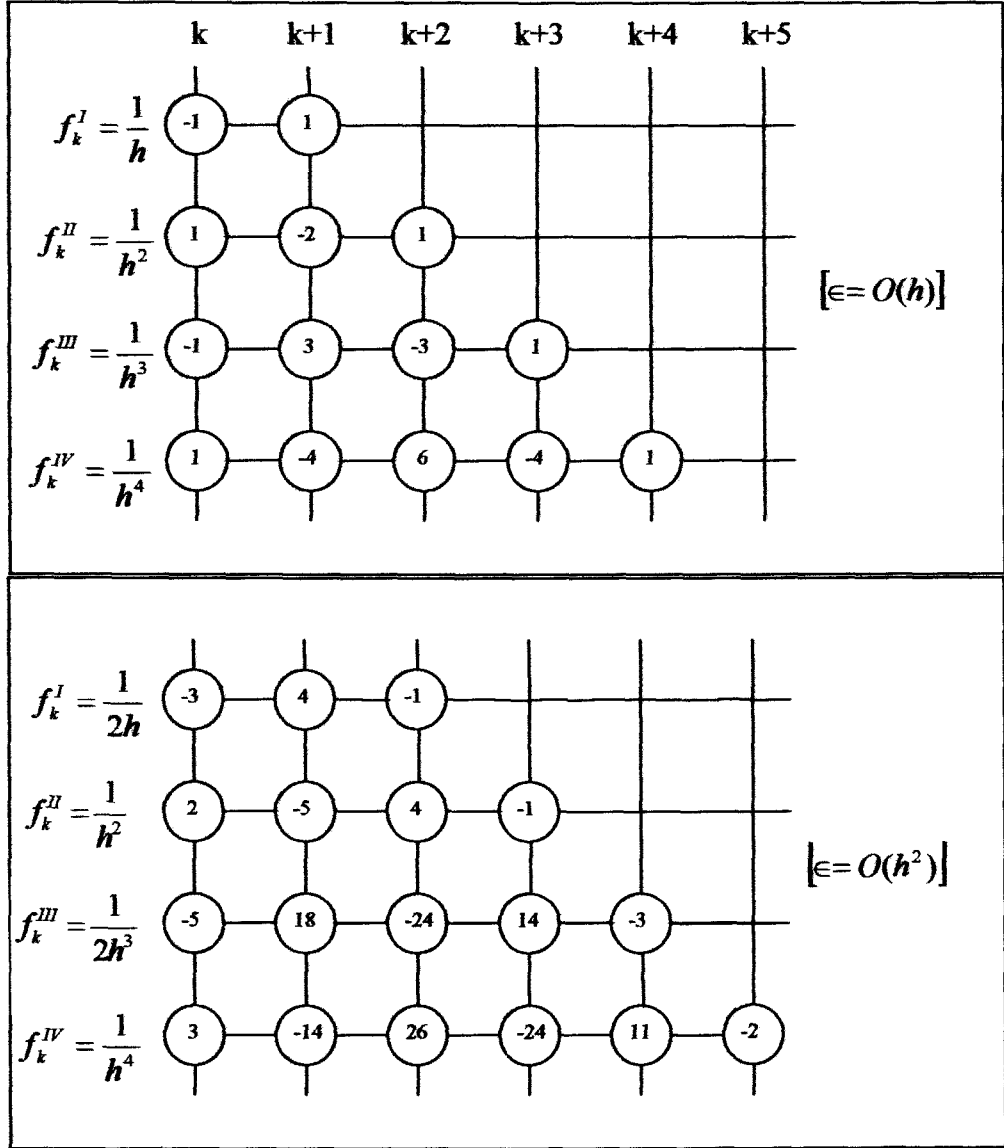
$$f^I(x_k) \approx \frac{1}{h} (f_{k+1} - f_k) + \epsilon_1 \quad (1.44)$$

$$f^{II}(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k) + \epsilon_2 \quad (1.45)$$

$$f^{III}(x_k) \approx \frac{1}{h^3} (f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k) + \epsilon_3 \quad (1.46)$$

$$f^{IV}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k+4} - 4f_{k+3} + 6f_{k+2} - 4f_{k+1} + f_k) + \epsilon_4 \quad (1.47)$$

(1.36) - (1.39) formüllerinde iki veya daha fazla terim alınarak daha hassas sonuçlar verecek başka formüller de elde edilebilir. En çok kullanılan geriye doğru fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.8'de gösterilmiştir.



Şekil 1.8 (İleriye doğru fark formülleri)

1.2.3. Geriye Doğru Fark Formülleri

İleriye doğru farklardan farklı olarak geriye doğru farklar ∇ operatörü ile gösterilir. $f(x)$ 'in birinci geriye doğru farkı aşağıdaki eşitliklerle tanımlıdır.

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x - h) \quad (1.48)$$

$$\nabla f(x_k) = \nabla f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f_k - f_{k-1} \quad (1.49)$$

Daha sonraki geriye doğru fark operatörleri için ise aşağıda verilen eşitlikler kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_k &= f_{k-2} - 2f_{k-1} + f_k \\ \nabla^3 f_k &= -f_{k-3} + 3f_{k-2} - 3f_{k-1} + f_k \\ \nabla^4 f_k &= f_{k-4} - 4f_{k-3} + 6f_{k-2} - 4f_{k-1} + f_k \end{aligned} \quad (1.50)$$

Daha önce birinci bölünmüş fark için verilen (1.22) denklemi indis değiştirilip kullanılarak birinci geriye doğru fark birinci bölünmüş fark cinsinden elde edilebilir.

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_k] &= \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\nabla f(x_k)}{h} \\ \nabla f(x_k) &= h.f[x_{k-1}, x_k] \end{aligned} \quad (1.51)$$

Benzer şekilde daha sonraki geriye doğru farklar ile bölünmüş farklar aşağıdaki gibi birbirleri cinsinden yazılabilir.

$$\nabla^r f(x_k) = r!.h^r . f[x_{k-r}, \dots, x_k] \quad (1.52)$$

$$f[x_{k-r}, \dots, x_k] = \frac{\nabla^r f(x_k)}{r!.h^r} \quad (1.53)$$

(1.53) bağıntısı (1.25) denklemine yerine konulursa interpolasyon polinomunun Newton formu aşağıdaki şekilde geriye farklar cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) &= f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ &\dots + \frac{\nabla^n f_n}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_0) \end{aligned} \quad (1.54)$$

$s = (x - x_n) / h$ dönüşümü yapılarak (1.54) denklemi için

$$\begin{aligned} f(s) \approx P_n(s) &= f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots \\ &\dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \end{aligned} \quad (1.55)$$

veya daha kapalı bir formda

$$f_s \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n \quad (1.56)$$

eşitlikleri yazılabilir.

(1.55) denkleminin türevleri alınırsa;

$$f_s^I \approx \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\nabla f_n + \frac{2s+1}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{3s^2+6s+2}{3!} \nabla^3 f_n + \dots \right] \quad (1.57)$$

$$f_s^{II} \approx \frac{1}{h^2} \left[\nabla^2 f_n + \frac{6s+6}{3!} \nabla^3 f_n + \frac{12s^2+36s+22}{4!} \nabla^4 f_n + \dots \right] \quad (1.58)$$

$$f_s^{III} \approx \frac{1}{h^3} \left[\nabla^3 f_n + \frac{24s+36}{4!} \nabla^4 f_n + \dots \right] \quad (1.59)$$

$$f_s^{IV} \approx \frac{1}{h^4} \left[\nabla^4 f_n + \frac{120s+240}{5!} \nabla^5 f_n + \dots \right] \quad (1.60)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ilk terimleri alınıp kalan terimler h 'ın bir fonksiyonu olan $\epsilon_i = O(h)$ hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa;

$$f_s^I \approx \frac{1}{h} \nabla f_n + \epsilon_1 \quad (1.61)$$

$$f_s^{II} \approx \frac{1}{h^2} \nabla^2 f_n + \epsilon_2 \quad (1.62)$$

$$f_s^{III} \approx \frac{1}{h^3} \nabla^3 f_n + \epsilon_3 \quad (1.63)$$

$$f_s^{IV} \approx \frac{1}{h^4} \nabla^4 f_n + \epsilon_4 \quad (1.64)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.50) ifadesindeki eşitlikler, bu eşitliklerde yerine konulursa bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

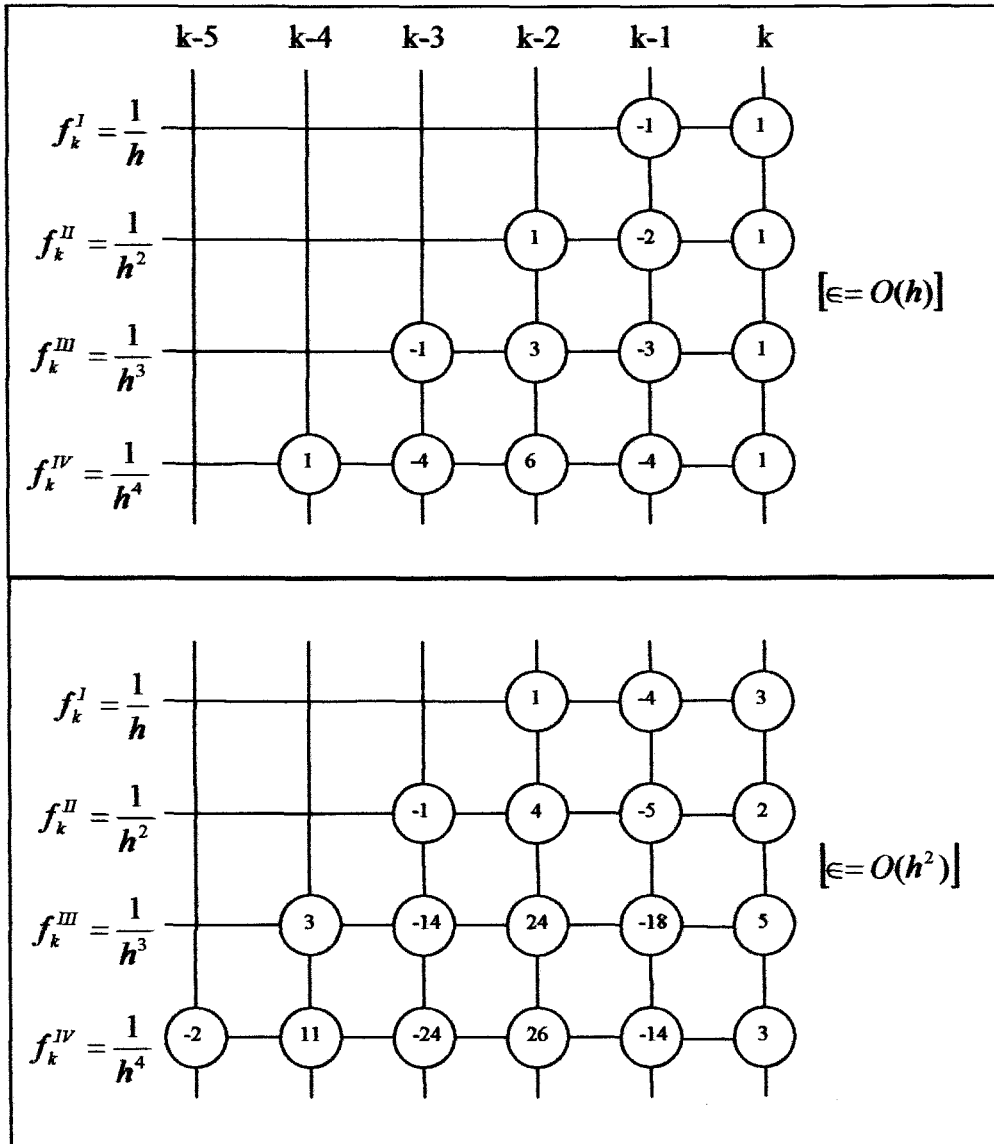
$$f^I(x_k) \approx \frac{1}{h} (f_k - f_{k-1}) + \epsilon_1 \quad (1.65)$$

$$f''(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k-2} - 2f_{k-1} + f_k) + \epsilon_2 \quad (1.66)$$

$$f'''(x_k) \approx \frac{1}{h^3} (-f_{k-3} + 3f_{k-2} - 3f_{k-1} + f_k) + \epsilon_3 \quad (1.67)$$

$$f^{IV}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k-4} - 4f_{k-3} + 6f_{k-2} - 4f_{k-1} + f_k) + \epsilon_4 \quad (1.68)$$

En çok kullanılan geriye doğru fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.9'da gösterilmiştir.



Şekil 1.9 (Geriye doğru fark formülleri)

1.2.4. Merkezi Fark Formülleri

Bir k noktasına göre simetrik noktalarındaki fonksiyon değerleri kullanılarak elde edilen merkezi farklar, ileriye veya geriye doğru farklara göre bazı durumlarda özellikle sınır değer problemlerinde daha kullanışlıdır. Bu nedenle üçüncü bölümde silindirik kabuk problemlerine ait sayısal örnekler kısmında yaklaşık çözümler için merkezi fark formülleri kullanılacaktır.

Bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunun k noktası etrafında h aralığıyla eşit sıralanmış noktalarda alacağı değerleri elde etmek için kullanılacak δ merkezi fark operatörü aşağıda verilen şekilde tanımlanır.

$$\delta f_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_k - \frac{h}{2}\right) = f_{k+1/2} - f_{k-1/2} \quad (1.69)$$

$f(x)$ 'in ikinci merkezi farkı ise birinci merkezi farkların farkı olacaktır.

$$\begin{aligned} \delta^2 f_k &\equiv \delta(\delta f_k) = [f_{(k+1/2)+1/2} - f_{(k-1/2)+1/2}] - [f_{(k+1/2)-1/2} - f_{(k-1/2)-1/2}] \\ &= f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Daha sonraki merkezi farklar ise yukandaki yöntem kullanılarak aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\delta^3 f_k = f_{k+3/2} - 3f_{k+1/2} + 3f_{k-1/2} - f_{k-3/2} \quad (1.71)$$

$$\delta^4 f_k = f_{k+2} - 4f_{k+1} + 6f_k - 4f_{k-1} + f_{k-2} \quad (1.72)$$

n . derece merkezi formüllerindeki katsayılar $(a-b)^n$ 'in binom açılımındaki katsayılarla eşit olacaktır.

Tek dereceli merkezi fark formüllerindeki orta nokta değerleri yok etmek için ortalama tek dereceli farkların tanımlanması gerekir. Buna göre f in k noktasındaki birinci ortalama farkı

$$\frac{1}{2}(\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}) = \frac{1}{2}[(f_{k+1} - f_k) + (f_k - f_{k-1})] = \frac{1}{2}(f_{k+1} - f_{k-1})$$

şeklinde tanımlanır.

Ortalama alma işlemi ortalayıcı olarak adlandırılan μ operatörü kullanılarak sembolize edilir ve aşağıda verilen şekilde tanımlanır.

$$\mu f_k = \frac{1}{2}(f_{k+1/2} + f_{k-1/2}) \quad (1.73)$$

Bu durumda birinci merkezi fark, ortalayıcı kullanılarak

$$\mu \delta f_k = \frac{1}{2}[\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}] = \frac{1}{2}(f_{k+1} - f_{k-1}) \quad (1.74)$$

şeklinde tanımlanır. İleriye ve geriye doğru farklarda olduğu gibi bölünmüş farklar, merkezi farklar ve ortalama operatörleri cinsinden elde edilip (1.25) denkleminde yerlerine konulur ve $s = (x-x_0) / h$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots \\ \dots + \frac{s^2(s^2-1^2)\dots(s^2-m-1^2)}{2m!}\delta^{2m} f_0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

eşitliği veya serinin tek dereceli bir merkezi farkla bitmesi durumunda kullanılacak

$$\begin{aligned} f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots \\ \dots + \frac{s(s^2-1^2)\dots(s^2-m^2)}{(2m+1)!}\mu\delta^{2m+1} f_0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

eşitliği elde edilir. (1.75) ve (1.76) denklemleri kullanılarak bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin merkezi farklar ve ortalama operatörleri cinsinden elde edilen ifadeleri aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$f_s^I = \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\mu\delta f_0 + s\delta^2 f_0 + \frac{3s^2-1}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (1.77)$$

$$f_s^{II} = \frac{1}{h^2} \left[\delta^2 f_0 + s\mu\delta^3 f_0 + \frac{12s^2-2}{4!}\delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.78)$$

$$f_s^{III} = \frac{1}{h^3} [\mu \delta^3 f_0 + s \delta^4 f_0 + \dots] \quad (1.79)$$

$$f_s^{IV} = \frac{1}{h^4} [\delta^4 f_0 + s \mu \delta^5 f_0 + \dots] \quad (1.80)$$

İleriye ve geriye doğru farklarda olduğu gibi yukarıdaki formüllerde ilk terimler alınrsa kalan terimlerin h^2 'nin bir fonksiyonu olduğu görülür. İlk terimler alınıp kalan terimler hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa;

$$f_s^I \approx \frac{1}{h} \mu \delta f_0 + \epsilon_1 \quad (1.81)$$

$$f_s^{II} \approx \frac{1}{h^2} \delta^2 f_0 + \epsilon_2 \quad (1.82)$$

$$f_s^{III} \approx \frac{1}{h^3} \mu \delta^3 f_0 + \epsilon_3 \quad (1.83)$$

$$f_s^{IV} \approx \frac{1}{h^4} \delta^4 f_0 + \epsilon_4 \quad (1.84)$$

eşitlikleri elde edilir. Ortalanmış merkezi fark ve merkezi fark eşitliklerinin bu formüllerde yerlerine konulması sonucu bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

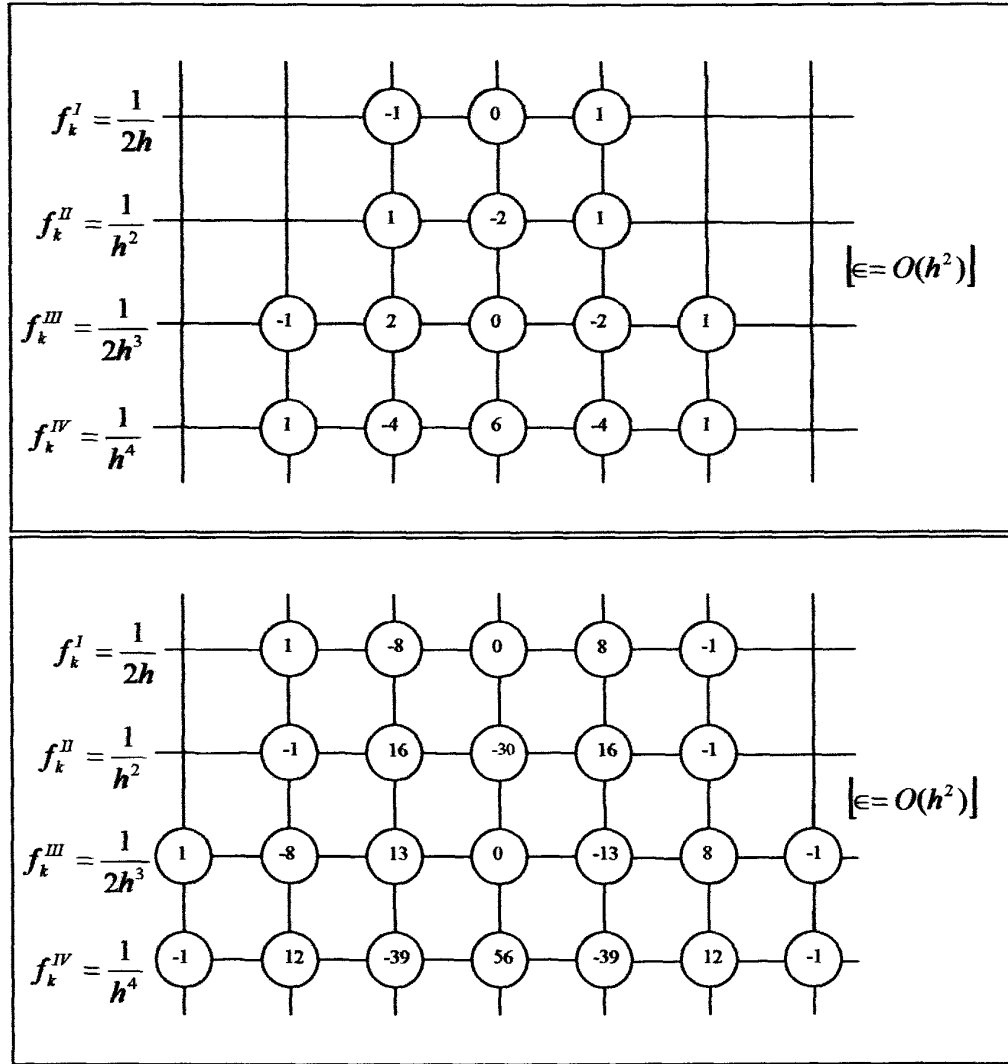
$$f^I(x_k) \approx \frac{1}{2h} (f_{k+1} - f_{k-1}) + \epsilon_1 \quad (1.85)$$

$$f^{II}(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) + \epsilon_2 \quad (1.86)$$

$$f^{III}(x_k) \approx \frac{1}{2h^3} (-f_{k-2} + 2f_{k-1} - 2f_{k+1} + f_{k+2}) + \epsilon_3 \quad (1.87)$$

$$f^{IV}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k-2} - 4f_{k-1} + 6f_k - 4f_{k+1} + f_{k+2}) + \epsilon_4 \quad (1.88)$$

En çok kullanılan merkezi fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.10'da gösterilmiştir.

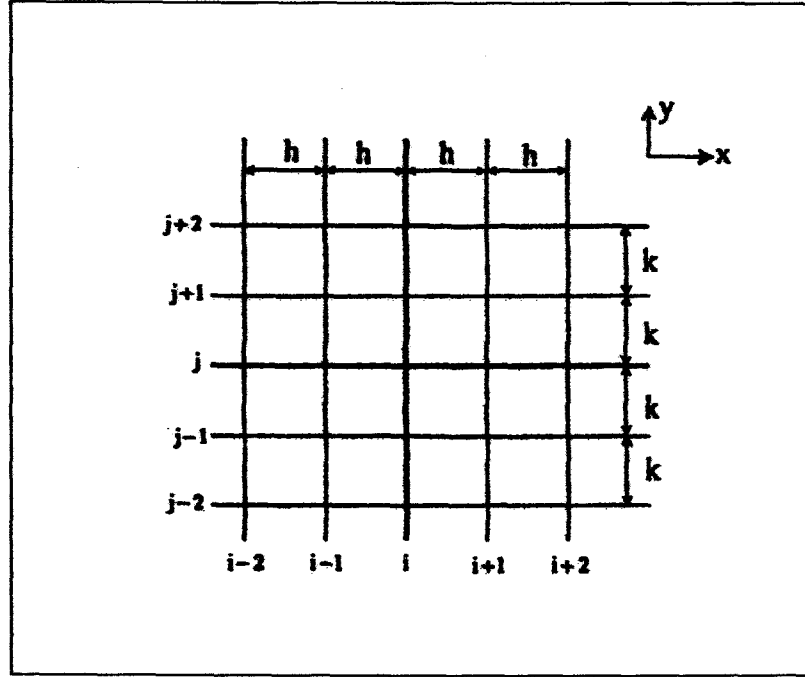


Şekil 1.10 (Merkezi fark formülleri)

1.2.5. Yaklaşık Kısmi Türev

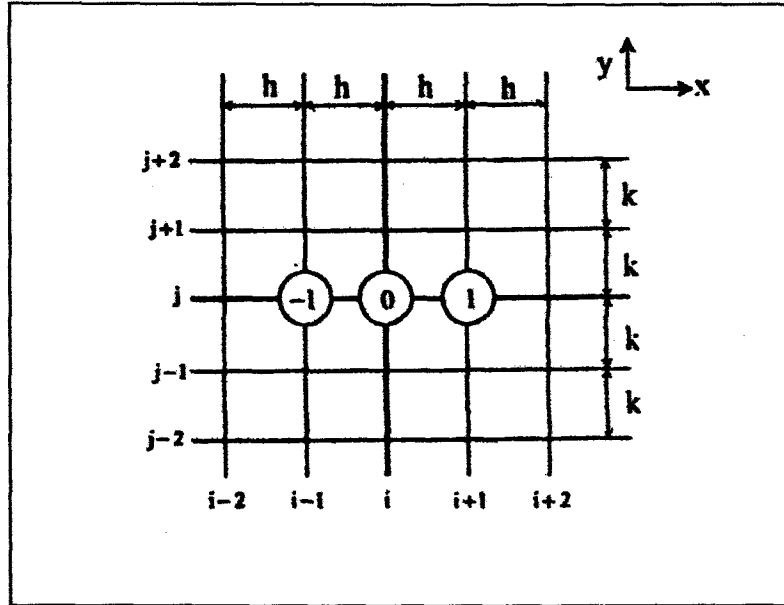
Bilinmeyen fonksiyonun iki değişkene bağlı bir fonksiyon olması durumunda kısmi türevleri merkezi farklar cinsinden elde etmek için (1.85) ve (1.88) formüllerinin xy düzlemi üzerinde alınacak noktalar için uygulanması gerekir.

İki değişkenli bir $\omega(x,y)$ fonksiyonunun Şekil 1.11'deki gibi oluşturulacak bir sonlu fark ağı için (i,j) noktasındaki yaklaşık kısmi türevleri merkezi farklar cinsinden aşağıda elde edilmiştir.



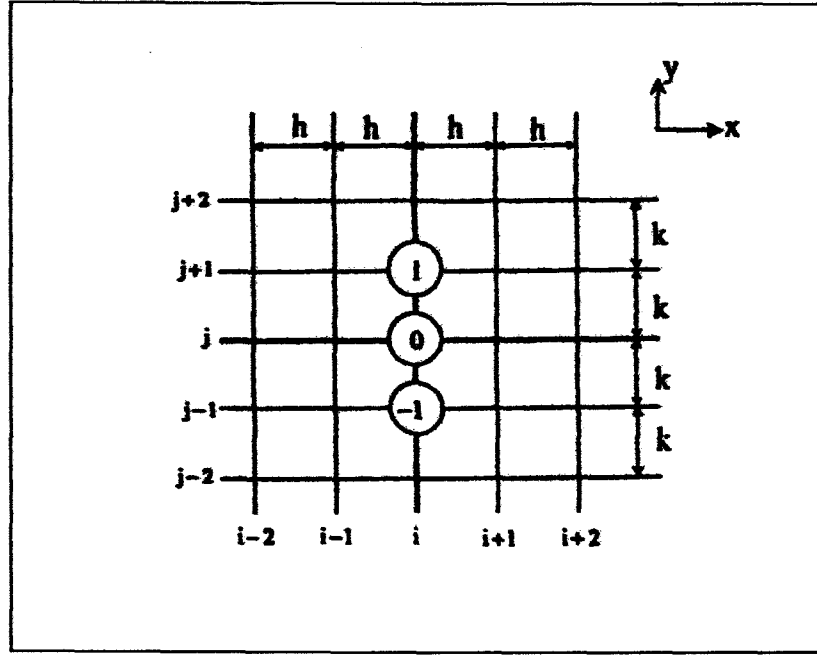
Şekil 1.11 (İki değişkenli fonksiyon için sonlu fark ağı)

$$D_x \omega_{i,j} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h} (-\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{2h} \epsilon_{1,x} \quad (1.89)$$



Şekil 1.12 (D_x kısmi türevi)

$$D_y \omega_{i,j} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2k} (-\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{2k} \epsilon_{1,y} \quad (1.90)$$



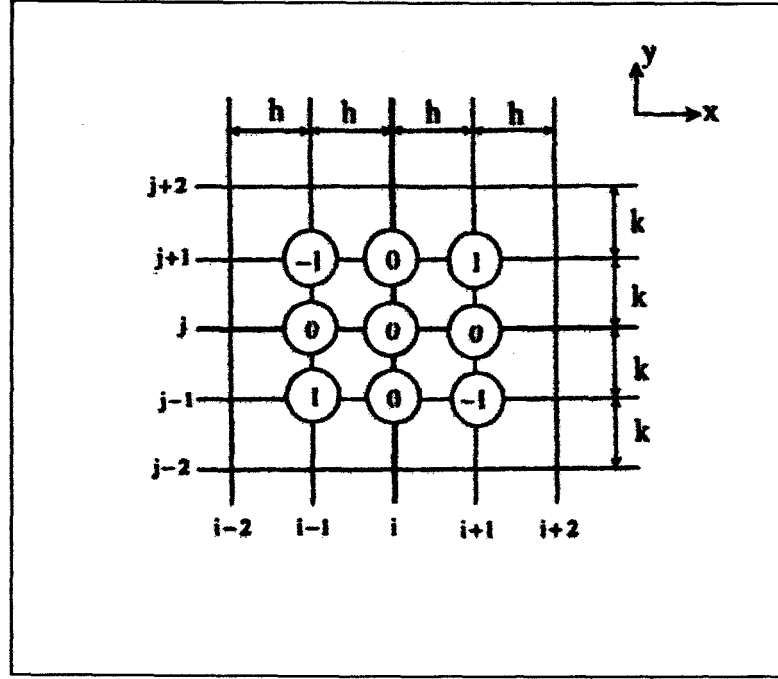
Şekil 1.13 (D_y kısmi türevi)

$$\begin{aligned}
 D_{xy}^2 \omega_{i,j} &= \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \Big|_{i,j} \\
 &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{2k} \epsilon_{1,y} \right] \Big|_{i,j} \\
 &= \frac{1}{2h} \left\{ - \left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i-1,j-1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2k} (\epsilon_{1,y})_{i-1} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2k} (\epsilon_{1,y})_{i+1} \right] \right\} \\
 D_{xy}^2 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4hk} (\omega_{i-1,j-1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{4hk} \epsilon_{1,xy} \quad (1.91)
 \end{aligned}$$

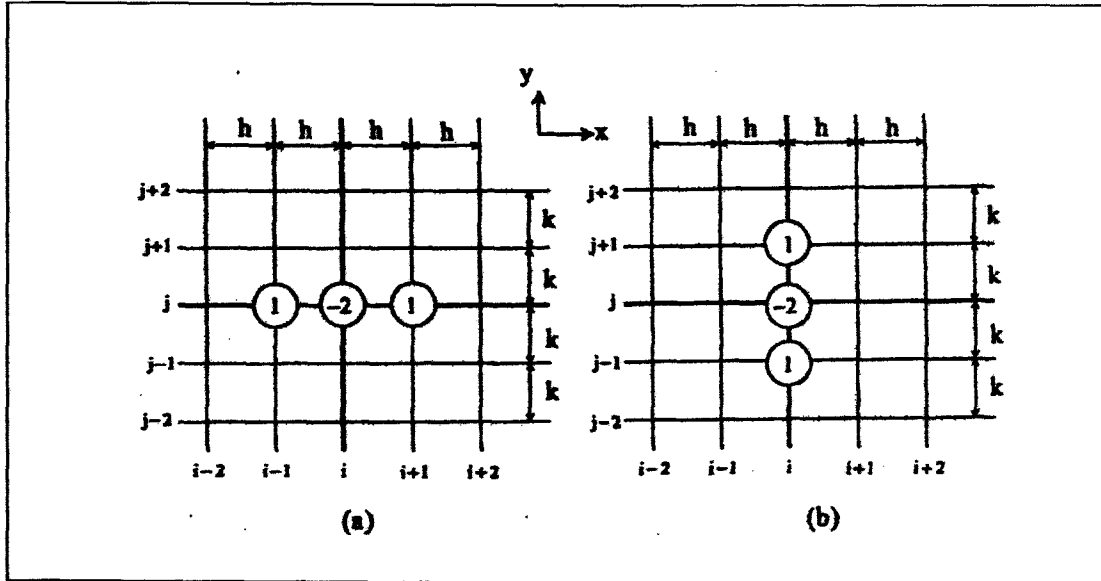
$$[\epsilon_{1,xy} = (\epsilon_{1,y})_{i+1} - (\epsilon_{1,y})_{i-1}]$$

$$D_{xx}^2 \omega_{i,j} = \frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{h^2} \epsilon_{2,x} \quad (1.92)$$

$$D_{yy}^2 \omega_{i,j} = \frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \quad (1.93)$$



Şekil 1.14 (D_{xy}^2 kısmi türevi)



Şekil 1.15 (D_{xx}^2 ve D_{yy}^2 kısmi türevleri)

$$D_{xy}^3 \omega_{i,j} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \Big|_{i,j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{h^2} \epsilon_{2,x} \right]$$

$$= \frac{1}{2k} \left\{ - \left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i,j-1} + \omega_{i+1,j-1}) + \frac{1}{h^2} (\epsilon_{2,x})_{j-1} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{h^2} (\epsilon_{2,x})_{j+1} \right] \right\}$$

$$D_{xy}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2kh^2} (-\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i,j-1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j+1} \\ - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2kh^2} \epsilon_{3,x^2y} \quad (1.94)$$

$$D_{xy}^3 \omega_{i,j} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \right] \\ = \frac{1}{2h} \left\{ - \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i-1} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i+1} \right] \right\}$$

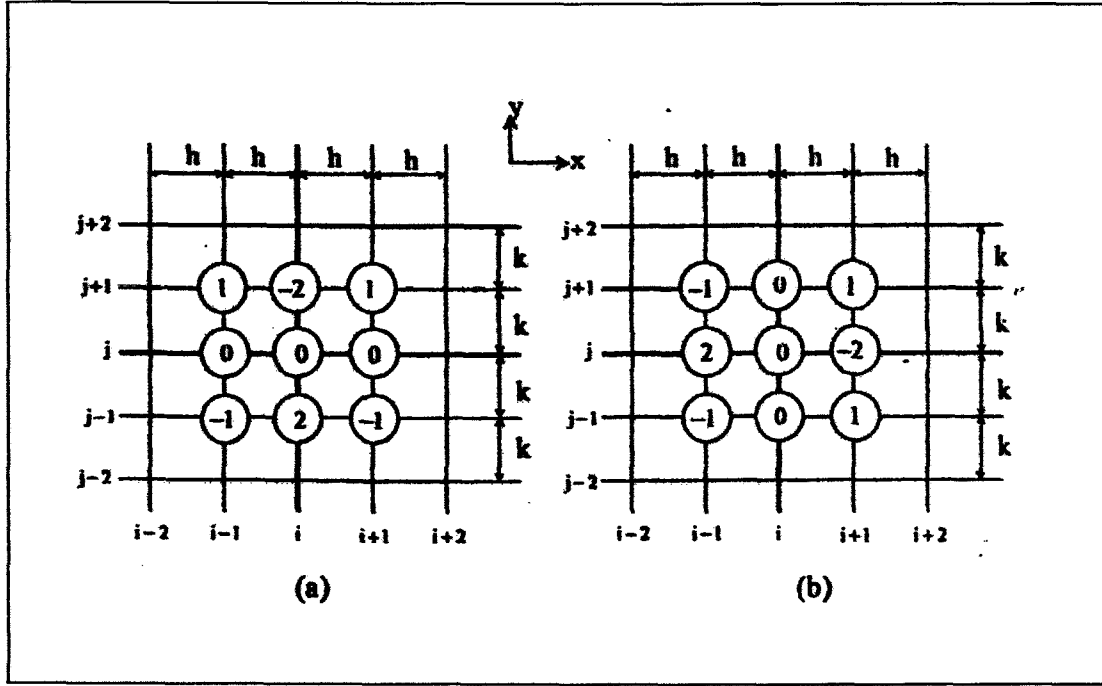
$$D_{xy}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2hk^2} (-\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j+1} + \omega_{i+1,j-1} \\ - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2hk^2} \epsilon_{3,xy^2} \quad (1.95)$$

$$[\epsilon_{3,xy^2} = (\epsilon_{2,y})_{i+1} - (\epsilon_{2,y})_{i-1}]$$

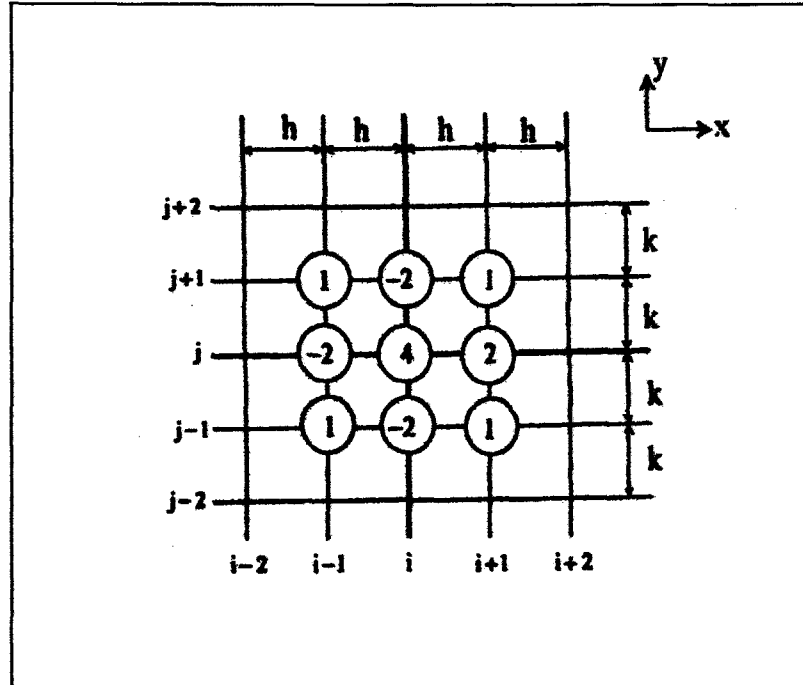
$$D_{xyy}^4 \omega_{i,j} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j} \\ = \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \right] \\ = \frac{1}{h^2} \left\{ \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i-1} \right] \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_i \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i+1} \right] \right\}$$

$$D_{xyy}^4 \omega_{i,j} = \frac{1}{h^2 k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i,j-1} \\ + 4\omega_{i,j} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{h^2 k^2} \epsilon_{4,x^2y^2} \quad (1.96)$$

$$\left[\epsilon_{4,x^2y^2} = (\epsilon_{2,y})_{i-1} - 2(\epsilon_{2,y})_i + (\epsilon_{2,y})_{i+1} \right]$$



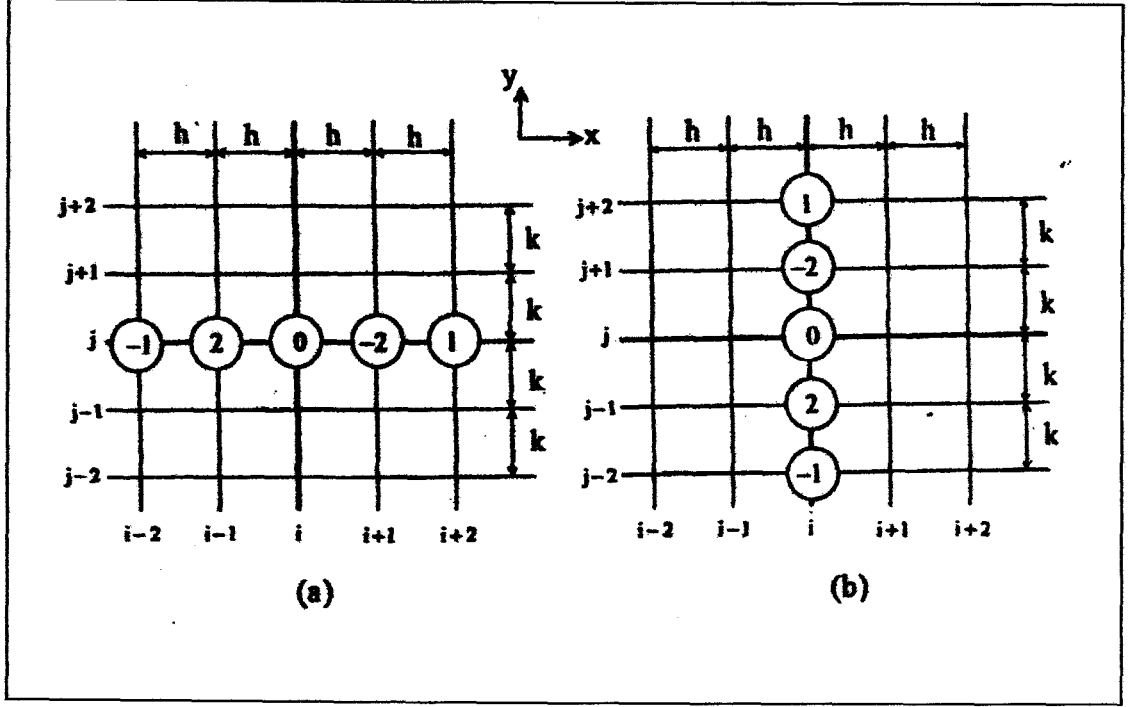
Şekil 1.16 (D^3_{xxy} ve D^3_{xyy} kısmi türevleri)



Şekil 1.17 (D^4_{xyyy} kısmi türevi)

$$D_{xxx}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j} + 2\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{2h^3} \epsilon_{3,x} \quad (1.97)$$

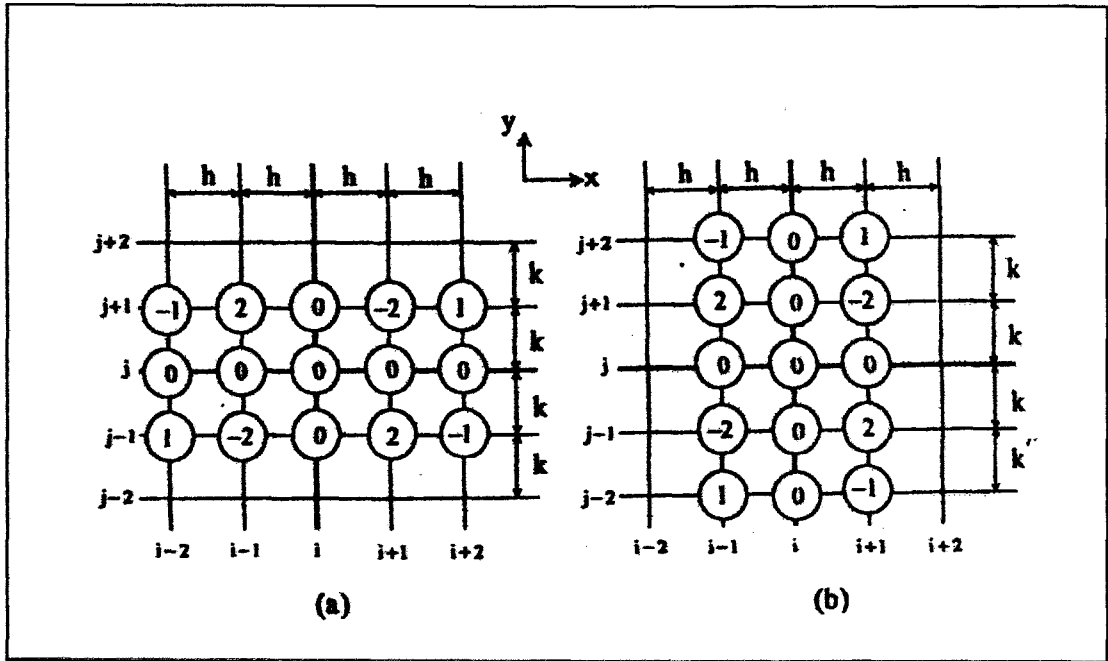
$$D_{yyy}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2k^3} (-\omega_{i,j-2} + 2\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{2k^3} \epsilon_{3,y} \quad (1.98)$$



Şekil 1.18 (D_{xxx}^3 ve D_{yyy}^3 kısmi türevleri)

$$\begin{aligned} D_{xxyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} \bigg|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) \bigg|_{i,j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2h^3} (\omega_{i-2,j} + 2\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{2h^3} \epsilon_{3,x} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left\{ - \left[\frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j-1} + 2\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+2,j-1}) + \frac{1}{2h^3} (\epsilon_{3,x})_{j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j+1} + 2\omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+2,j+1}) + \frac{1}{2h^3} (\epsilon_{3,x})_{j+1} \right] \right\} \\ D_{xxyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4kh^3} (\omega_{i-2,j-1} - 2\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i+1,j-1} - \omega_{i+2,j-1} - \omega_{i-2,j+1} \\ &\quad + 2\omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+2,j+1}) + \frac{1}{4kh^3} \epsilon_{4,x^3y} \quad (1.99) \\ &\quad \left[\epsilon_{4,x^3y} = (\epsilon_{3,x})_{j+1} - (\epsilon_{3,x})_{j-1} \right] \end{aligned}$$

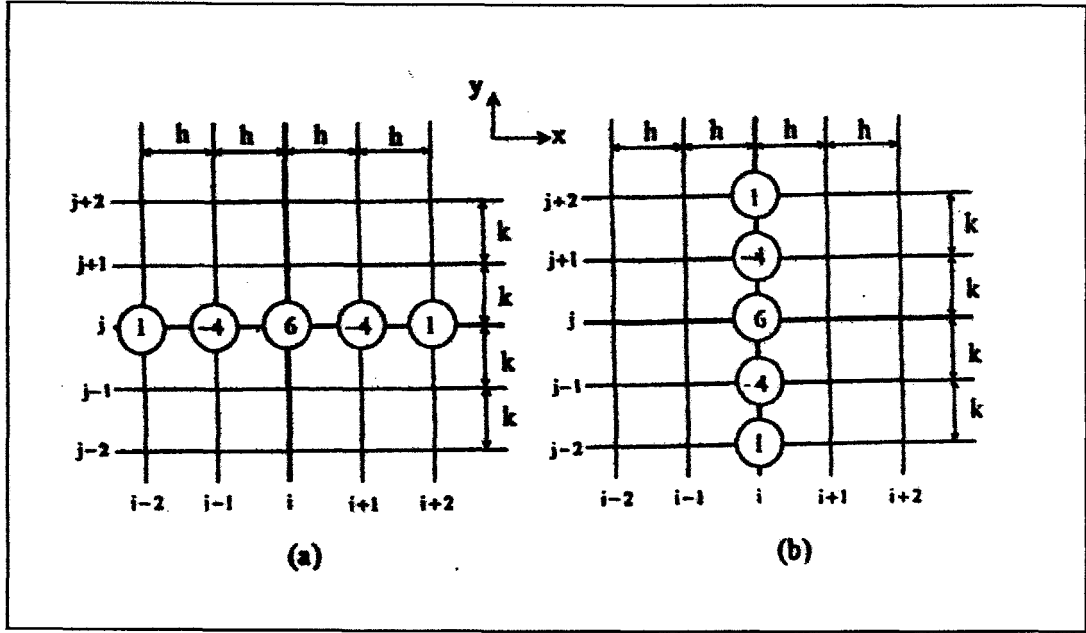
$$\begin{aligned}
D_{xyyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} \bigg|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) \bigg|_{i,j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i,j-2} + 2\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{2k^3} \epsilon_{3,y} \right] \\
&= \frac{1}{2h} \left\{ -\left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i-1,j-2} + 2\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j+1} + \omega_{i-1,j+2}) + \frac{1}{2k^3} (\epsilon_{3,y})_{i-1} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i+1,j-2} + 2\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j+2}) + \frac{1}{2k^3} (\epsilon_{3,y})_{i+1} \right] \right\} \\
D_{xyyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4kh^3} (\omega_{i-1,j-2} - 2\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i-1,j+2} - \omega_{i+1,j-2} \\
&\quad + 2\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j+2}) + \frac{1}{4kh^3} \epsilon_{4,xy^3} \quad (1.100) \\
[\epsilon_{4,xy^3} &= (\epsilon_{3,y})_{i+1} - (\epsilon_{3,y})_{i-1}]
\end{aligned}$$



Şekil 1.19 (D_{xxxx}^4 ve D_{yyyy}^4 kısmi türevleri)

$$D_{xxxx}^4 \omega_{i,j} = \frac{1}{h^4} (\omega_{i-2,j} - 4\omega_{i-1,j} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{h^4} \epsilon_{4,x} \quad (1.101)$$

$$D_{yyyy}^4 \omega_{i,j} = \frac{1}{k^4} (\omega_{i,j-2} - 4\omega_{i,j-1} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{k^4} \epsilon_{4,y} \quad (1.102)$$



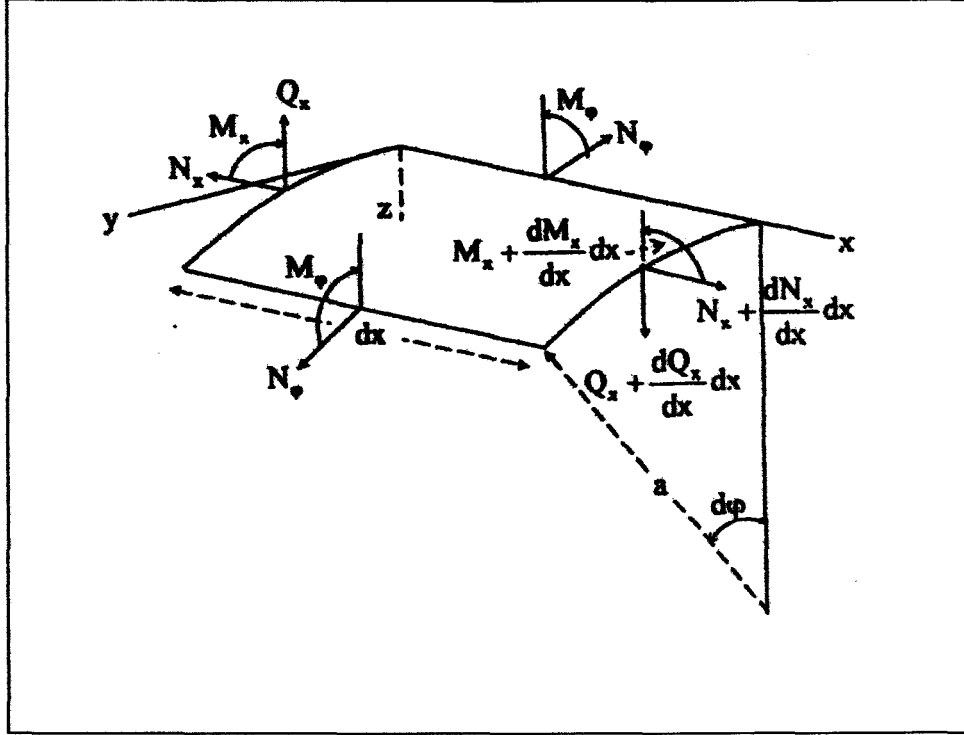
Şekil 1.20 (D^4_{xxxx} ve D^4_{yyyy} kısmi türevleri)

2. SİLİNDİRİK KABUKLARIN GENEL TEORİSİ

2.1. Eksenine Göre Simetrik Olarak Yüklenmiş Silindirik Kabuklar

Pratikte sık sık eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş silindirik kabuklara ait problemlerle karşılaşılır. Buhar basıncı etkisindeki silindirik kazanlardaki gerilme yayılımı, eksenleri düşey olan ve iç sıvı basıncı etkisindeki silindirik kaplardaki gerilmeler ve uniform iç basınç etkisindeki dairesel borulardaki gerilmeler bu tür problemlere örnek olarak gösterilebilir.

Bu problemlerin çözümü için gerekli olan denklemleri çıkarmak için Şekil 2.1'de gösterildiği gibi bir eleman ve bu elemanın denge denklemlerini gözönüne alalım. Simetriden dolayı, bu durumda $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ kesme kuvvetlerinin sıfır olduğu ve N_{φ} kuvvetlerinin çevre boyunca sabit olduğu görülür. Kesme kuvvetlerine bakılacak olunursa, yalnız Q_x kuvvetlerinin sıfır olmadığı anlaşılır. Şekil 2.1'deki elemana etki eden momentleri gözönüne alacak olursak, yine simetriden dolayı $M_{x\varphi} = M_{\varphi x}$ burulma momentlerinin sıfır olduğu ve M_{φ} eğilme momentlerinin çevre boyunca sabit olduğu görülür.



Şekil 2.1 (Silindirik kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman)

Bu simetri şartlarına göre elemanın altı denge denkleminde üçü özdeş olarak sağlanır ve geriye kalan üç denklemi gözönüne almak yeterli olur. Dış kuvvetlerin sadece yüzeye normal bir basınç olduğu düşünülürse, bu üç denge denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_x}{dx} a dx d\varphi &= 0 \\
 \frac{dQ_x}{dx} a dx d\varphi + N_\varphi dx d\varphi + Z a dx d\varphi &= 0 \\
 \frac{dM_x}{dx} a dx d\varphi - Q_x a dx d\varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

İlk denklem N_x 'in sabit olduğunu göstermektedir ve burada ihmal edilecektir. Bu kuvvetlerin ihmal edilemeyecek kadar büyük olduğu durumlarda, bu kuvvetlerin etkisiyle oluşacak deformasyon ve gerilmeler hesaplanıp, silindir yüzeyine dik doğrultudaki kuvvetlerin etkisiyle oluşacak deformasyon ve gerilmelerin üzerine süperpoze edilebilir. Geriye kalan iki denklem ise aşağıdaki gibi basitleştirilerek yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N_\varphi &= -Z \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0\end{aligned}\quad (2.2)$$

Bu iki denklemde N_φ , Q_x ve M_x bilinmeyenleri bulunmaktadır. Bu sebeple problemi çözmek için kabuğun orta yüzeyindeki noktalarının yerdeğiştirmelerini gözönüne almak gerekir.

Simetriden dolayı çevre doğrultusundaki yerdeğiştirmenin v bileşeni sıfırdır. Bu nedenle sıra ile yalnız, x ve y doğrultusundaki u ve ω bileşenlerinin gözönüne almak yeterlidir. Bu durumda şekildeğiştirme ifadeleri aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{\omega}{a}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Bu durumda Hooke kanunu uygulanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{\omega}{a} \right) = 0 \\ N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{\omega}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Bu denklemlerin birincisinden

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{\omega}{a} \quad (2.5)$$

ve ikincisinden de

$$N_\varphi = -\frac{Eh \omega}{a} \quad (2.6)$$

bağıntıları elde edilir. Eğilme momentleri gözönüne alınır, simetriden dolayı çevre doğrultusundaki eğriliğin değişmediği anlaşılır. x doğrultusundaki eğrilik için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\chi_x = -\frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad (2.7)$$

Bu eşitlik (1. L4) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} M_{\varphi} &= \nu M_x \\ M_x &= -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada D kabuğun eğilme rijitliğidir ve aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.9)$$

(2.2) denklemlerine dönülerek, bu denklemlerde Q_x yok edilirse

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_{\varphi} = -Z \quad (2.10)$$

eşitliği elde edilir. (2.6) ve (2.8) eşitlikleri (2.9) denkleminde yerlerine konulursa, aşağıda verilen diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z \quad (2.11)$$

Böylelikle dairesel silindirik kabukların simetrik deformasyonuna ait tüm problemler (2.11) denkleminin integrasyonuna indirgenmiş olur.

Bu denklemin en basit uygulaması kabuk kalınlığının sabit olması halinde elde edilir. Bu durumda (2.11) denkleminin şu hali alır;

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z \quad (2.12)$$

Aşağıda verilen notasyon kullanılarak denklem görüldüğü gibi daha basit bir şekilde gösterilebilir.

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \quad (2.13)$$

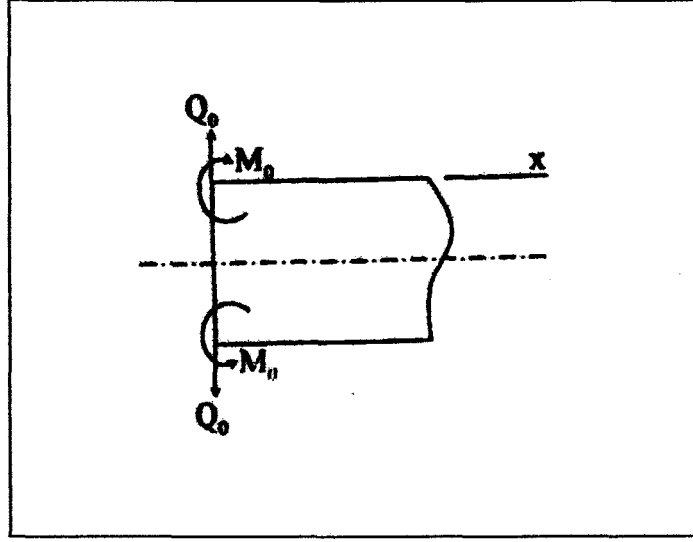
$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D} \quad (2.14)$$

Bu denklemin genel çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (2.15)$$

Burada $f(x)$, (2.14) denkleminin özel bir çözümü $C_1, \dots, C_4$ her özel halde silindirin uçlarındaki şartlardan belirlenen integrasyon sabitleridir.

Şekil 2.2'deki gibi $x = 0$ kenarında, kenar boyunca düzgün dağılmış M_0 eğilme momentleriyle, Q_0 kesme kuvvetlerinin uygulandığı sonsuz uzun dairesel bir boruyu örnek olarak alalım.



Şekil 2.2 (Sonsuz uzun dairesel boru)

Kabuk yüzeyi boyunca düzgün dağılmış Z basıncı yoktur. Bu nedenle (2.15) denklemi içerisindeki özel çözüm $f(x) = 0$ olacaktır. Kenar boyunca uygulanan kuvvetlerin etkisiyle oluşacak bölgesel eğilme, yüklenen uçtan itibaren ölçülen x mesafesinin artışıyla beraber hızla azalacaktır. Bu varsayım kullanılarak (2.15) denkleminin ilk teriminin ihmal edilebileceği sonucuna varılır.

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.16)$$

Bu halde C_3 , ve C_4 sabitleri yüklü uçtaki şartlardan belirlenebilir ki bu şartlar şunlardır

$$\begin{aligned} (M_x)_{x=0} &= -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0 \\ (Q_x)_{x=0} &= \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bu eşitliklerde ω yerine (2.16) ifadesi yerine konulursa

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D}(Q_0 + \beta M_0)$$

$$C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}$$
(2.18)

eşitlikleri elde edilir ve sonuç olarak (2.16) ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$\omega = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x]$$
(2.19)

En büyük yerdeğiştirme yüklü uçta olacaktır. Bu durumda (2.19) ifadesinde x yerine sıfır koyularak hesaplanacak max. yerdeğiştirme aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\omega_{\max} = (\omega)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^3 D}(\beta M_0 + Q_0)$$
(2.20)

Buradaki - işareti, yerdeğiştirme pozitif yönünün dışarıdan silindir eksenine doğru seçilmiş olmasının sonucudur. Yüklenen uçtaki eğim (2.19) denkleminin türevi alınarak bulunabilir.

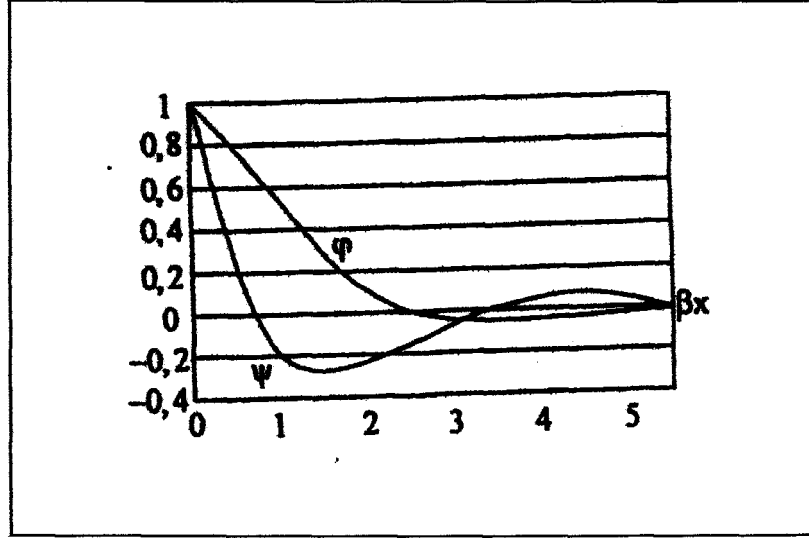
$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{x=0} = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \cos \beta x + Q_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0)$$
(2.21)

Aşağıdaki notasyon kullanılarak, yerdeğiştirme ve yerdeğiştirmenin ardışık türevleri daha basit bir şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\varphi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \psi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \\ \theta(\beta x) &= e^{-\beta x} \cos \beta x \\ \xi(\beta x) &= e^{-\beta x} \sin \beta x\end{aligned}$$
(2.22)

$$\begin{aligned}
\omega &= -\frac{1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 \psi(\beta x) + Q_0 \theta(\beta x)] \\
\frac{d\omega}{dx} &= \frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \theta(\beta x) + Q_0 \varphi(\beta x)] \\
\frac{d^2\omega}{dx^2} &= -\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 \varphi(\beta x) + 2Q_0 \xi(\beta x)] \\
\frac{d^3\omega}{dx^3} &= \frac{1}{D} [2\beta M_0 \xi(\beta x) - Q_0 \psi(\beta x)]
\end{aligned}
\tag{2.23}$$



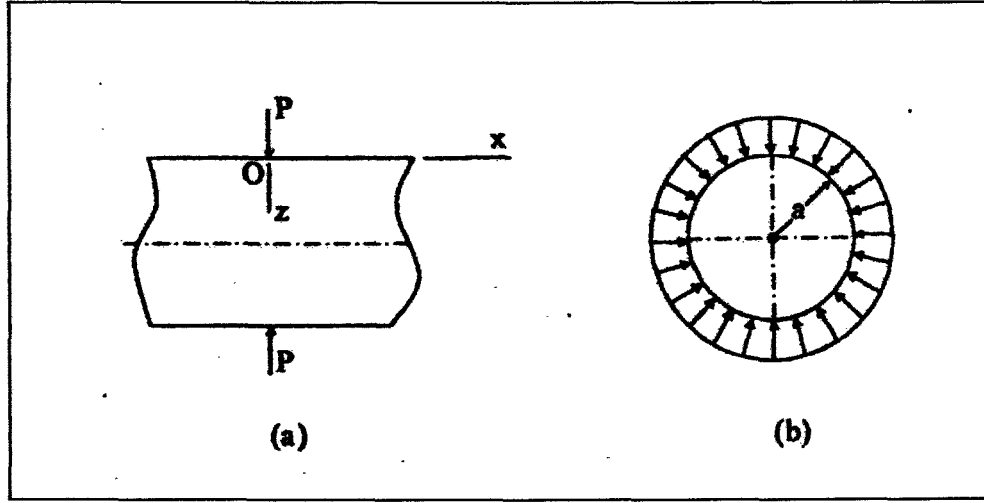
Şekil 2.3 (φ ve ψ fonksiyonları)

$\varphi(\beta x)$ ve $\psi(\beta x)$ fonksiyonları grafik olarak Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Bu eğrilerden kabuğun eğilmesini karakterize eden fonksiyonların βx 'in büyük değerleri için 0'a yakınsadığı görülebilir.

M_x momenti ve ω deformasyonu (2.23) denklemlerinden bulunursa, M_φ eğilme momenti (2.8) denklemlerinin ikincisinden, N_φ kuvveti de (2.6) denkleminde elde edilebilir.

2.2 Dairesel Silindirik Kabukların Simetrik Deformasyonunun Özel Halleri

2.2.1. Düzgün Dağılmış Çizgisel Yük Altındaki Uzun Silindirik Kabuk



Şekil 2.4 (Çizgisel yüklü uzun silindirik kabuk)

Şekil 2.4 a'da görülen P şiddetindeki çizgisel yükün silindirin uçlarından yeteri kadar uzak olması dummunda (2.19) çözümü kabuğun iki yarısı için de kullanılabilir. Simetriden dolayı $Q_0 = -P / 2$ olacaktır. Bu durumda kabuğun sağ kısmı için aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$\omega = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} \left[\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) + \frac{P}{2} \cos \beta x \right] \quad (2.24)$$

Burada x yükün uygulandığı kesitten itibaren ölçülen mesafedir. (2.24) denklemindeki M_0 momentinin hesaplamak için simetri nedeniyle orta kesitteki eğimin 0 olmasından yararlanılabilir. (2.21) denklemi kullanılarak

$$2\beta M_0 - \frac{P}{2} = 0$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \quad (2.25)$$

olarak elde edilir. Bu değer (2.24) denkleminde yerine konulursa

$$\omega = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x) = \frac{P}{8\beta^3 D} \varphi(\beta x) \quad (2.26)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu denklemlerden yararlanarak deformasyonun x 'e göre çeşitli dereceden türevleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dx} &= -2\beta \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \sin \beta x = -\frac{P}{4\beta^2 D} \xi(\beta x) \\ \frac{d^2\omega}{dx^2} &= 2\beta^2 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) = -\frac{P}{4\beta D} \psi(\beta x)\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} = 4\beta^3 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x = \frac{P}{2D} \theta(\beta x)$$

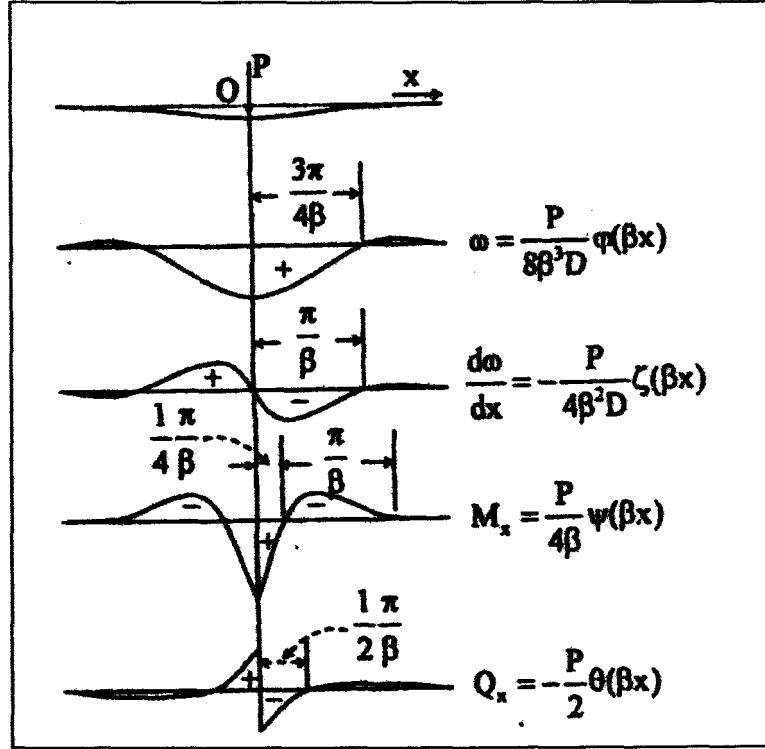
(2.2) ve (2.8) eşitlikleri kullanılarak M_x eğilme momenti ve Q_x kesme kuvveti için aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}M_x &= -D \frac{d^2\omega}{dx^2} \\ Q_x &= -D \frac{d^3\omega}{dx^3}\end{aligned}$$

(2.27) denklemleri bu eşitliklerde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}M_x &= \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) \\ Q_x &= -\frac{P}{2} \theta(\beta x)\end{aligned}\quad (2.28)$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlar Şekil 2.5'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5 (Deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramları)

Görülüyor ki en büyük deformasyon P'nin altında oluşacaktır ve değeri (2.26) denkleminde aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{Pa^2 \beta}{2Eh} \quad (2.29)$$

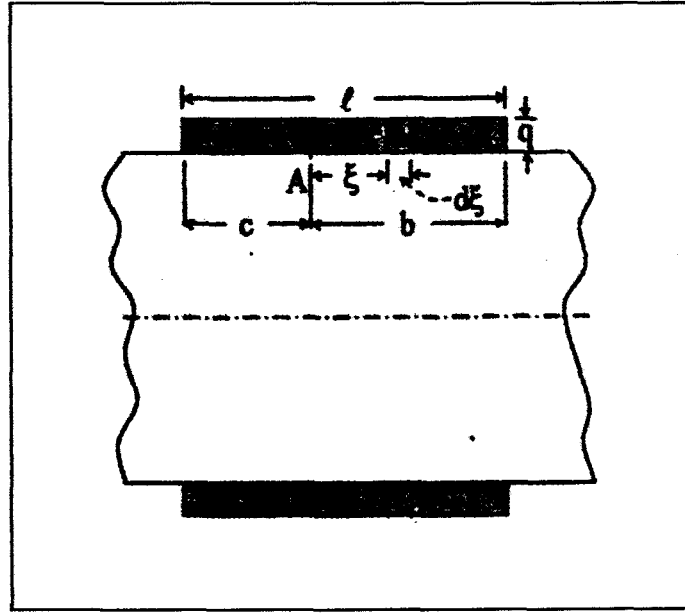
En büyük eğilme momenti ise yine yükün altında oluşup değeri (2.28) denkleminde aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$M_{\max} = \frac{P}{4\beta} \quad (2.30)$$

Kesme kuvvetinin en büyük değerinin hesaba gerek kalmadan simetri nedeniyle $P/2$ olduğu görülebilir.

Şekil 2.5 incelendiğinde $x > \pi / \beta$ için kabuğun eğilmesini belirleyen miktarların çok küçük olduğu görülür. Bu da eğilmenin lokal karakterde olduğunu ve $l = 2\pi / \beta$ uzunluğunda, ortasından yüklü bir kabuğun pratik olarak çok uzun bir kabukla aynı maksimum eğilmeye ve aynı maksimum gerilmeye sahip olduğunu gösterir.

Çizgisel yük çözümü, süperpozisyon ilkesi kullanılarak silindirin belirli bir uzunluğu boyunca yayılmış simetrik yük durumu için kullanılabilir.



Şekil 2.6 (Düzgün dağılmış simetrik yük)

Şekil 2.6'da görüldüğü gibi silindirin ℓ uzunluğu boyunca q şiddetinde yayılı yükün uygulandığı durumda, yükün silindirin uçlarından yeteri kadar uzak olması durumunda (2.28) çözümü kullanılabilir. A'dan ξ uzaklığındaki $q d\xi$ şiddetindeki elemanter yük nedeniyle A'da oluşacak deformasyon (2.28) denkleminde P yerine $q d\xi$ ve x yerine ξ konulursa

$$\frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

olarak elde edilir. ℓ uzunluğu boyunca yayılmış toplam yükün A'da yapacağı deformasyon ise bu denklemin ayrı ayrı b ve c bölgelerinde integre edilmesiyle bulunacaktır.

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^b \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^c \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) \\ &= \frac{qa^2}{2Eh} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c) \end{aligned}$$

A noktasında oluşacak eğilme momenti ise benzer şekilde süperpozisyon metodu kullanılarak bulunabilir.

Birçok pratik halde h cidar kalınlığı hem tankın a yarıçapına hem de d yüksekliğine göre çok küçük olup, kabuk sonsuz uzun kabul edilebilir. Bu durumda C_1 ve C_2 sabitleri sıfır alınarak

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh} \quad (2.34)$$

çözümü kullanılabilir. C_3 ve C_4 sabitleri tankın altındaki sınır koşullarından elde edilebilir. Tankın alt kenarının mutlak rijit bir zemine ankastre olduğu farzedilirse sınır şartları şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} (\omega)_{x=0} &= C_3 - \frac{\gamma a^2 d}{Eh} = 0 \\ \left(\frac{d\omega}{dx} \right)_{x=0} &= \left[-\beta C_3 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \beta C_4 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{\gamma a^2}{Eh} \right]_{x=0} \\ &= \beta (C_4 - C_3) + \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemlerden C_3 ve C_4 çözülrse

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{\gamma a^2 d}{Eh} \\ C_4 &= \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda (2.34) denklemi

$$\omega = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ d - x - e^{-\beta x} \left[d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right] \right\} \quad (2.35)$$

şeklini alır. Bu denklem (2.22) notasyonu kullanılarak daha basit bir formda yazılabilir.

$$\omega = -\frac{\gamma a^2 d}{Eh} \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \xi(\beta x) \right] \quad (2.36)$$

Çembersel doğrultudaki N_ϕ kuvveti için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$N_\phi = -\frac{Eh \omega}{a} = \gamma a d \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \xi(\beta x) \right] \quad (2.37)$$

(2.35) denkleminin ikinci türevi kullanılarak eğilme momenti M_x

$$\begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{2\beta^2 \gamma a^2 D d}{Eh} \left[-\xi(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta x) \right] \\ &= \frac{\gamma a d h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[-\xi(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta x) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin x'e göre birinci türevi alınırsa kesme kuvveti için

$$Q_x = \frac{\gamma a h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} [\xi(\beta x) + (1 - 2d\beta) \theta(\beta x)] \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir.

2.2.3. Değişken Cidar Kalınlıklı Silindirik Tanklar

Cidar kalınlığı sabit olmayan bir tank halinde problemin çözümü için (2.11) denkleminin integre edilmesi gerekir. Burada D eğilme rijitliği ve h kalınlığı sabit değil, x'in birer fonksiyonudurlar. Böylece dördüncü dereceden değişken katsayılı lineer bir diferansiyel denklem elde edilir. Örnek olarak cidar kalınlığının x'in lineer bir fonksiyonu olması halini alırsak, koordinat sisteminin ise Şekil 2.8'de görüldüğü gibi olduğu kabul edilirse, cidar kalınlığının ve eğilme rijitliğinin ifadeleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} h &= \alpha x \\ D &= \frac{E \alpha^3}{12(1-\nu^2)} x^3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

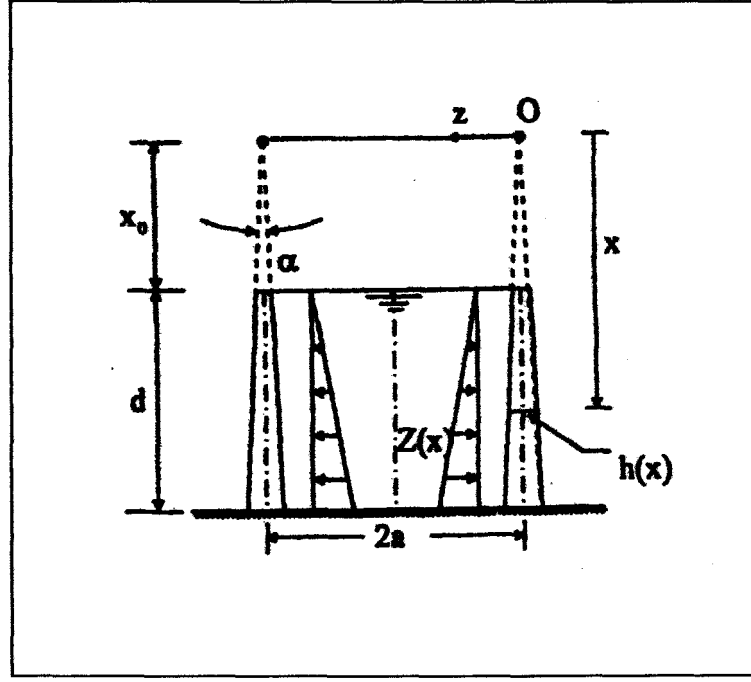
(2.40) ifadelerini kullanarak (2.11) diferansiyel denklemi ise aşağıda gösterilen hali alacaktır.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 a^2} x \omega = - \frac{12(1-\nu^2) \gamma (x - x_0)}{E \alpha^3} \quad (2.41)$$

Bu denklemin özel çözümü

$$\omega_1 = - \frac{\gamma a^2}{E \alpha} \frac{x - x_0}{x} \quad (2.42)$$

şeklinde olacaktır. Bu çözüm kenarları boşta ve $\gamma(x - x_0)$ iç basıncı etkisindeki bir kabuğun radyal genişlemesini gösterir.



Şekil 2.8 (Değişken cidar kalınlıklı silindirik tank)

ω_1 deformasyonu etkisiyle silindirde oluşacak eğilme momenti

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} = -\frac{\gamma \alpha^2 a^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \quad (2.43)$$

şeklinde olacaktır. Bu moment x'den bağımsız olup pratikte pek çok özel halde ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

(2.41) denkleminin tam çözümünü elde etmek için homojen denklemin çözümüne (2.42) özel çözümünü eklemek yeterli olacaktır. (2.41) ile verilen diferansiyel denklemin homojen kısmı aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2}) + \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 a^2} \omega = 0$$

Yukarıda verilen eşitlik

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2}) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2 \frac{d\omega}{dx}) \right] \right\}$$

bağıntısı ve

$$L(\omega) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\omega}{dx} \right)$$

$$\rho^4 = \frac{12(1 - v^2)}{\alpha^2 a^2}$$

tanımları gözönüne alınarak aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$L[L(\omega)] + \rho^4 \omega = 0$$

Bulunan bu denklemin çözümü

$$L(\omega) + i\rho^2 \omega = 0$$

$$L(\omega) - i\rho^2 \omega = 0$$

$$i = \sqrt{-1}$$

denklemlerinin çözümlerinin toplamına eşittir. Yukarıda verilen birinci denklemin çözümü

$$\omega_1 = \varphi_1 + i\varphi_2$$

$$\omega_2 = \varphi_3 + i\varphi_4$$

ikinci denklemin çözümü ise

$$\omega_3 = \varphi_1 - i\varphi_2$$

$$\omega_4 = \varphi_3 - i\varphi_4$$

dir. Bu durumda C_1, C_2, C_3, C_4 sabit olmak üzere homojen çözüm

$$\omega = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + C_4\varphi_4$$

olarak bulunur. Bazı dönüşümler yapıp seriye açma işlemlerinden sonra Bessel fonksiyonlarından yararlanılarak elde edilen homojen çözüm aşağıda verilmiştir.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[C_1 \psi_1^I(2\rho\sqrt{x}) + C_2 \psi_2^I(2\rho\sqrt{x}) + C_3 \psi_3^I(2\rho\sqrt{x}) + C_4 \psi_4^I(2\rho\sqrt{x}) \right] \quad (2.44)$$

$\xi = 2\rho\sqrt{x}$ dönüşümü yapılarak (2.44) çözümünden aşağıda verilen normal kuvvet, eğim, eğilme momenti ve kesme kuvveti bağıntıları elde edilebilir.

$$N_{\phi} = -\frac{Eh}{a}\omega = -\frac{E\alpha}{a}\sqrt{x}\left[C_1\psi_1^I(\xi) + C_2\psi_2^I(\xi) + C_3\psi_3^I(\xi) + C_4\psi_4^I(\xi)\right] \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= \frac{1}{2x\sqrt{x}}\{C_1[\xi\psi_2(\xi) - 2\psi_1^I(\xi)] - C_2[\xi\psi_1(\xi) - 2\psi_2^I(\xi)] \\ &+ C_3[\xi\psi_4(\xi) - 2\psi_3^I(\xi)] - C_4[\xi\psi_3(\xi) - 2\psi_4^I(\xi)]\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -D\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{E\alpha^3}{48(1-\nu^2)}\sqrt{x}\{C_1[\xi^2\psi_2^I(\xi) - 4\xi\psi_2(\xi) + 8\psi_1^I(\xi)] \\ &- C_2[\xi^2\psi_1^I(\xi) - 4\xi\psi_1(\xi) + 8\psi_2^I(\xi)] \\ &+ C_3[\xi^2\psi_4^I(\xi) - 4\xi\psi_4(\xi) + 8\psi_3^I(\xi)] \\ &- C_4[\xi^2\psi_3^I(\xi) - 4\xi\psi_3(\xi) + 8\psi_4^I(\xi)]\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{dM_x}{dx} = \frac{E\alpha^3\rho^2}{24(1-\nu^2)}\sqrt{x}\{C_1[\xi\psi_1(\xi) + 2\psi_2^I(\xi)] \\ &+ C_2[\xi\psi_2(\xi) + 2\psi_1^I(\xi)] \\ &+ C_3[\xi\psi_3(\xi) + 2\psi_4^I(\xi)] \\ &+ C_4[\xi\psi_4(\xi) + 2\psi_3^I(\xi)]\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Formüllerde geçen $\psi_1, \dots, \psi_4$ fonksiyonları ile bu fonksiyonların birinci türevleri olan $\psi_1^I, \dots, \psi_4^I$ fonksiyonlarının $\xi = 2\rho\sqrt{x} \leq 6$ için sayısal değerleri Tablo 2.1'den alınabilir.

Tablo 2.1 (ψ_i fonksiyonları tablosu)

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\psi'_1(x)$	$\psi'_2(x)$
0.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	1.0000	-0.0100	-0.0000	-0.1000
0.40	0.9975	-0.0300	-0.0010	-0.2000
0.60	0.9900	-0.0600	-0.0135	-0.3000
0.80	0.9796	-0.1000	-0.0320	-0.3991
1.00	0.9664	-0.1500	-0.0534	-0.4974
1.20	0.9506	-0.2000	-0.1070	-0.5955
1.40	0.9401	-0.2500	-0.1700	-0.6900
1.60	0.9279	-0.3000	-0.2545	-0.7727
1.80	0.9137	-0.3500	-0.3613	-0.8500
2.00	0.9117	-0.3723	-0.4931	-0.9170
2.20	0.9377	-1.1610	-0.6520	-0.9661
2.40	0.9800	-1.3573	-0.8392	-0.9944
2.60	0.9801	-1.3500	-1.0453	-0.9943
2.80	0.9651	-1.7329	-1.2920	-0.9500
3.00	-0.2214	-2.0228	-1.7141	-0.8223
3.20	-0.5644	-2.1016	-1.8656	-0.7499
3.40	-0.9000	-2.2134	-2.1735	-0.5577
3.60	-1.4353	-2.3199	-2.4083	-0.2926
3.80	-1.9674	-2.3454	-2.6221	0.0526
4.00	-2.5034	-2.3927	-2.8146	0.4912
4.20	-3.1193	-2.4022	-3.0199	1.0310
4.40	-3.9003	-1.6736	-3.6307	1.6833
4.60	-4.6704	-1.4610	-3.8200	2.4320
4.80	-5.4531	-0.9857	-3.9066	3.1422
5.00	-6.2304	-0.1100	-3.8434	4.3542
5.20	-6.9803	0.8638	-3.6270	5.4835
5.40	-7.6674	2.0045	-3.2063	6.7198
5.60	-8.2066	3.3097	-2.5409	8.0453
5.80	-8.7007	5.0000	-1.5056	9.4332
6.00	-9.0503	7.3347	-0.2931	10.3462
x	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi'_3(x)$	$\psi'_4(x)$
0.00	0.3000		0.0000	
0.20	0.4026	-1.1034	-0.1419	3.1340
0.40	0.4400	-0.6765	-0.1970	1.4974
0.60	0.4050	-0.4412	-0.2216	0.9273
0.80	0.3006	-0.2003	-0.2206	0.4206
1.00	0.2151	-0.1025	-0.2243	0.1422
1.20	0.2713	-0.1076	-0.2129	0.3149
1.40	0.2302	-0.0542	-0.1971	0.2215
1.60	0.1926	-0.0166	-0.1780	0.1560
1.80	0.1500	0.0004	-0.1594	0.1056
2.00	0.1200	0.0265	-0.1399	0.0679
2.20	0.1006	0.0371	-0.1210	0.0397
2.40	0.0804	0.0429	-0.1032	0.0189
2.60	0.0614	0.0446	-0.0868	0.0030
2.80	0.0435	0.0447	-0.0719	0.0066
3.00	0.0266	0.0427	-0.0586	-0.0137
3.20	0.0220	0.0394	-0.0460	-0.0180
3.40	0.0137	0.0356	-0.0349	-0.0204
3.60	0.0072	0.0314	-0.0204	-0.0213
3.80	0.0022	0.0260	-0.0212	-0.0210
4.00	-0.0014	0.0230	-0.0152	-0.0200
4.20	-0.0039	0.0192	-0.0104	-0.0183
4.40	-0.0056	0.0156	-0.0065	-0.0148
4.60	-0.0066	0.0125	-0.0039	-0.0140
4.80	-0.0071	0.0097	-0.0012	-0.0120
5.00	-0.0071	0.0073	0.0005	-0.0109
5.20	-0.0069	0.0053	0.0017	-0.0091
5.40	-0.0065	0.0037	0.0025	-0.0073
5.60	-0.0059	0.0023	0.0030	-0.0060
5.80	-0.0053	0.0012	0.0033	-0.0047
6.00	-0.0046	0.0004	0.0033	-0.0036

$\xi = 2\rho\sqrt{x} > 6$ için ise aşağıda verilen asimptotik bağıntılar kullanılabilir.

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.49)$$

$$\psi_2(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.50)$$

$$\psi_3(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.51)$$

$$\psi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.52)$$

$$\psi_1^I(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.53)$$

$$\psi_2^I(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.54)$$

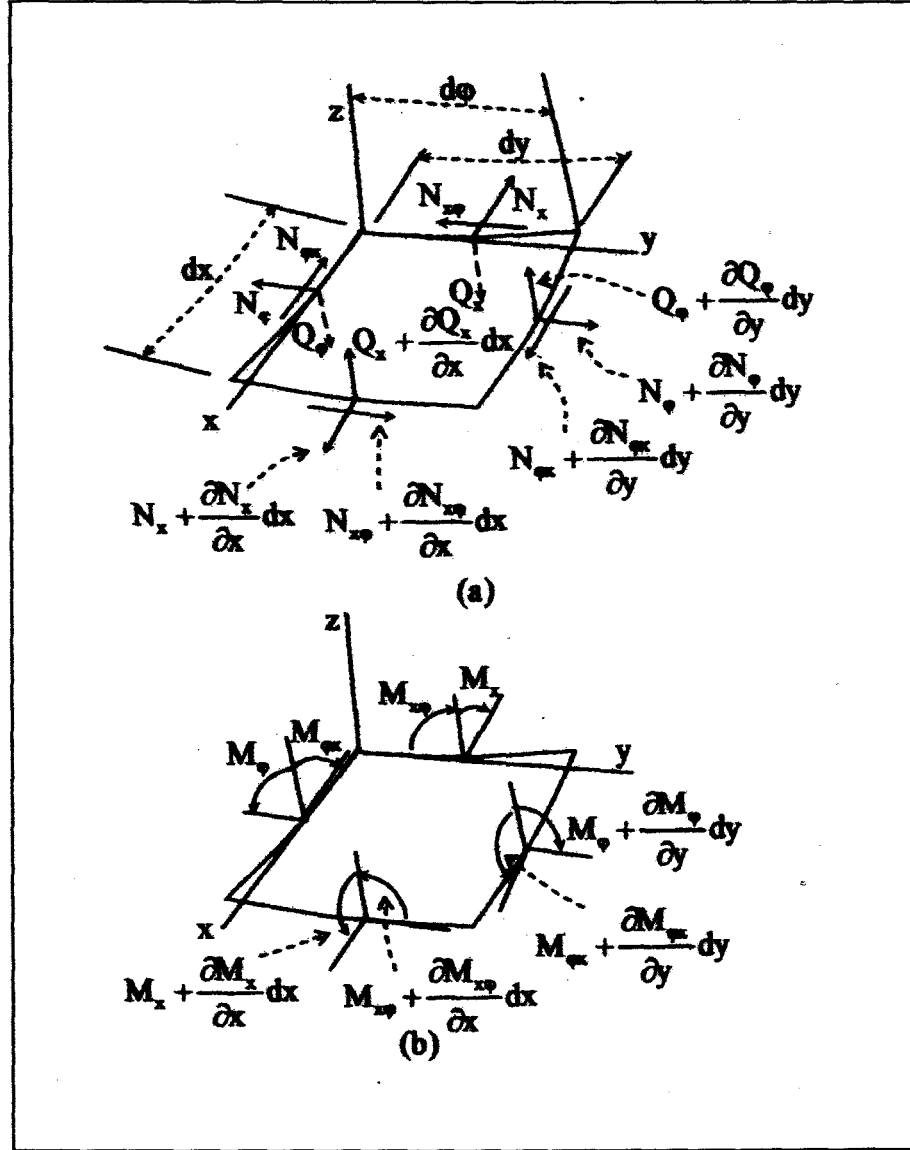
$$\psi_3^I(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.55)$$

$$\psi_4^I(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.56)$$

2.3. Silindirik Bir Kabuğun Deformasyonunun Genel Hali

Bir kabuğun deformasyonunu belirleyen u, v ve ω yerdeğiştirmelerine ait diferansiyel denklemleri elde etmek için, bölüm 1.1'de olduğu gibi hareket etmek gerekir. Şekil 2.9'da görüldüğü gibi, kabuktan iki komşu eksenel kesit ve silindir eksenine dik iki komşu kesitle ayrılmış bir eleman alalım. Bu durumda kabuğun orta yüzeyinde alınan diferansiyel elemanın deformasyondan sonraki görünümü ve üzerinde oluşacak bileşke kuvvet ve momentler Şekil 2.9a ve Şekil 2.9b'de gösterilmiştir. Deformasyondan önce x, y ve z eksenleri sırasıyla silindir eksenine, çember teğeti ve orta yüzey normali doğrultusundadırlar. Çok az olduğu varsayılacak deformasyondan sonra bu doğrultular yavaşça değişir, z eksenine deforme olmuş orta yüzeye dik, x eksenine eğilmiş silindir eksenine teğet, y eksenine de xz düzlemine dik olacaktır.

Bunlara bağılı olarak bileşke kuvvetlerin doğrultulan da değişmiş olacaktır. Bu durumda diferansiyel elemanın denge denklemlerini yazarken bu değişimi de dikkate almak gerekir.



Şekil 2.9 (Kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman)

BC ve AB kenarlarının sırasıyla OA ve OC kenarlarına göre olan açısal yerdeğiştirmelerini hesaba yarayan formülleri çıkarmak istersek, bu hesaplarda u , v ve ω yerdeğiştirmelerinin çok küçük olduğu kabul edilip, her bir yerdeğiştirmeden dolayı meydana gelen açısal hareketi bulup, bileşke açısal yerdeğiştirmeyi süperpozisyonla elde ederiz. İlk olarak BC kenarının OA kenarına göre dönmesini hesap etmek istersek, bu dönme x , y ve z eksenlerine göre üç bileşen dönmeye ayrılabilir. OA ve BC kenarlarının x eksenine göre dönmelerine v ve ω yerdeğiştirmeleri sebep olur. v yerdeğiştirmeleri OA ve BC kenarlarının çevre

doğrultusundaki hareketini gösterdiği için, silindirin orta yüzeyinin yarıçapı a olduğuna göre OA kenarının x eksenine etrafında buna karşılık gelen dönmesi v / a ve BC kenarınıninki ise

$$\frac{1}{a} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)$$

dir. Bu durumda v yerdeğiştirmelerinden dolayı BC kenarının OA kenarına göre x eksenine etrafındaki rölatif dönmesi aşağıdaki ifadeyle tanımlanabilir.

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.57)$$

ω yerdeğiştirmelerinden dolayı OA kenarı x eksenine göre $\partial \omega / a \partial \varphi$ açısı kadar ve BC kenarı ise

$$\frac{\partial \omega}{a \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{a \partial \varphi} \right) dx$$

açısı kadar döner. Böylece ω yerdeğiştirmelerinden dolayı rölatif açısal yer değiştirme aşağıdaki şekilde olur.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{a \partial \varphi} \right) dx \quad (2.58)$$

(2.57) ve (2.58) ifadeleri toplanarak BC kenarının OA kenarına göre x eksenine etrafındaki rölatif dönmesi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) dx \quad (2.59)$$

BC kenarının OA kenarına göre y eksenine etrafındaki dönmesini silindir eksenlerinin eksenel düzlemlerdeki eğilmesi meydana getirir. Bu dönme aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \quad (2.60)$$

BC kenarının OA kenarına göre z eksenine etrafında dönmesine ise silindir eksenlerinin teğetsel düzlemlerdeki eğilmesi sebep olur. Bu dönme ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.61)$$

Böylece (2.59), (2.60) ve (2.61) ifadeleri BC kenarının OA kenarına göre dönmesinin bileşenlerini verir.

AB kenarının OC kenarına göre açısal dönmesini incelemek için ise OABC elemanın lateral kenarları arasındaki açığa bakmak gerekir ki bu açı $d\phi$ 'dir. Fakat v ve ω yerdeğiştirmelerinden dolayı bu açı değişecektir. Lateral OC kenarının x eksenine göre dönmesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial \omega}{a \partial \phi} \quad (2.62)$$

AB kenarının buna karşılık gelen dönmesi ise

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial \omega}{a \partial \phi} + \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial \omega}{a \partial \phi} \right) d\phi \quad (2.63)$$

şekilde yazılabilir. Bu durumda ilkel $d\phi$ açısı yerine (2.64) ifadesini kullanmak gerekir.

AB kenarını OC kenarına göre y eksen etrafındaki dönmesini ise aşağıdaki ifadeyle tanımlayabiliriz.

$$- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\phi \quad (2.64)$$

AB kenarının OC kenarına göre z eksen etrafında dönmesine v ve ω yerdeğiştirmeleri sebep olur. v yerdeğiştirmesinden dolayı OC kenarının dönme açısı $\partial v / \partial x$ ve AB kenarının ki ise

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{a \partial \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\phi$$

olur. Böylece AB kenarının OC kenarına göre z eksen etrafındaki rölatif dönmesi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial}{a \partial \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\phi \quad (2.65)$$

ω yerdeğiştirmesinden dolayı AB kenarı aksenal düzlemde $\partial \omega / \partial x$ kadar döner. Bu dönmenin z eksen üzerindeki bileşeni şudur

$$- \frac{\partial \omega}{\partial x} d\phi \quad (2.66)$$

(2.65) ve (2.66) ifadeleri toplanarak AB kenarının OC kenarına göre z eksenini etrafındaki rölatif dönmesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) d\varphi \quad (2.67)$$

Açılar için yukarıdaki formüller elde edilince, bütün kuvvetlerin x, y ve z eksenleri üzerindeki izdüşümlerini bularak OABC elemanının denge denklemlerini yazabiliriz.

N_x ve $N_{\varphi x}$ bileşke kuvvetlerinin x eksenini üzerindeki izdüşümleri

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx d\varphi$$

$$\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx$$

şeklinde olacaktır. (2.67) ifadesi ile gösterilen dönmeden dolayı $N_{\varphi x}$ 'ye paralel kuvvetler x doğrultusunda

$$- N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) d\varphi dx$$

şeklinde bir bileşen verirler. (2.61) ifadesi ile gösterilen dönmeden dolayı $N_{\varphi x}$ 'ye paralel kuvvetler x doğrultusunda

$$- N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx d\varphi$$

şeklinde bir bileşen verirler. En son olarak (2.60) ve (2.64) ifadeleri ile gösterilen dönmelerden dolayı Q_x ve Q_{φ} 'ye paralel kuvvetler x doğrultusunda

$$- Q_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx d\varphi - Q_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi \partial x}\right) d\varphi dx$$

şeklinde bir bileşen verirler. Elemana etki eden dış kuvvetlere bakıldığında yalnız şiddeti q olan bir normal basıncın olduğu farzedilir ki bu kuvvetin x eksenini üzerindeki izdüşümü sıfırdır.

Yukarıda elde edilen bütün izdüşümler toplanarak birinci denge denklemi aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx ad \varphi + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx - N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) d\varphi dx - N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx ad \varphi \\ & - Q_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx ad \varphi - Q_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\varphi dx = 0 \end{aligned}$$

Aynı şekilde diğer iki denge denklemi de yazılıp gerekli basitleştirmeler yapıldıktan sonra denge denklemleri şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} - a Q_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - a N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & - Q_{\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) - N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0 \\ & \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) \\ & + N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - Q_{\varphi} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{a \partial \varphi^2} \right) = 0 \\ & a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi} + a N_{x\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) + a N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ & + N_{\varphi} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \omega}{a \partial \varphi^2} \right) + N_{\varphi x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) + p a = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

x, y ve z eksenlerine göre moment denklemlerini yazmak istersek, yine BC ve AB kenarlarının sırasıyla OA ve OC kenarlarına göre küçük açısız yerdeğişimlerini göz önüne alarak aşağıdaki denklemleri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{\varphi x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + a Q_{\varphi} = 0 \\ & a \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - a Q_x = 0 \\ & M_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) + a M_{x\varphi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + M_{\varphi x} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \varphi}{a \partial \varphi^2} \right) \\ & - M_{\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \right) + a (N_{x\varphi} - N_{\varphi x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

(2.69) denklemlerinden ilk ikisi kullanılarak (2.68) denklemlerindeki Q_x ve Q_{φ} 'yi yok edebiliriz. Böylece N_x , N_{φ} ve $N_{x\varphi}$ bileşke kuvvetleri ile M_x , M_{φ} ve $M_{x\varphi}$ momentlerini içeren üç denklem elde ederiz.

(2.68) ve (2.69) denklemleri çıkarılırken OABC elemanın eğrilik değişimi göz önüne alınmıştı. N_x , N_{φ} ve $N_{x\varphi}$ kuvvetleri kabuğun lateral olarak burkulabildiği

kritik değerlerine göre çok küçük değillerse bu denklemleri kullanmak gerekir. Bu kuvvetler çok küçük ise eğilme etkileri ihmal edilebilir. Bu durumda (2.68) ve (2.69) denklemlerindeki bileşke kuvvetler veya bileşke momentlerle u , v ve ω küçük yerdeğiştirmelerinin türevlerinin çarpımlarından oluşan terimler ihmal edilebilir. Böylelikle (2.68) denklemleri ve (2.69) denklemlerinin ilk ikisi aşağıdaki gibi basitleştirilerek yazılabilir.

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{qx}}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0 \\
a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi + qa &= 0 \\
a \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + aQ_\varphi &= 0 \\
\frac{\partial M_{qx}}{\partial \varphi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - aQ_x &= 0
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Q_x ve Q_φ kesme kuvvetlerini bu denklemlerden yok edersek sonuç olarak aşağıdaki şu üç denklemi elde ederiz.

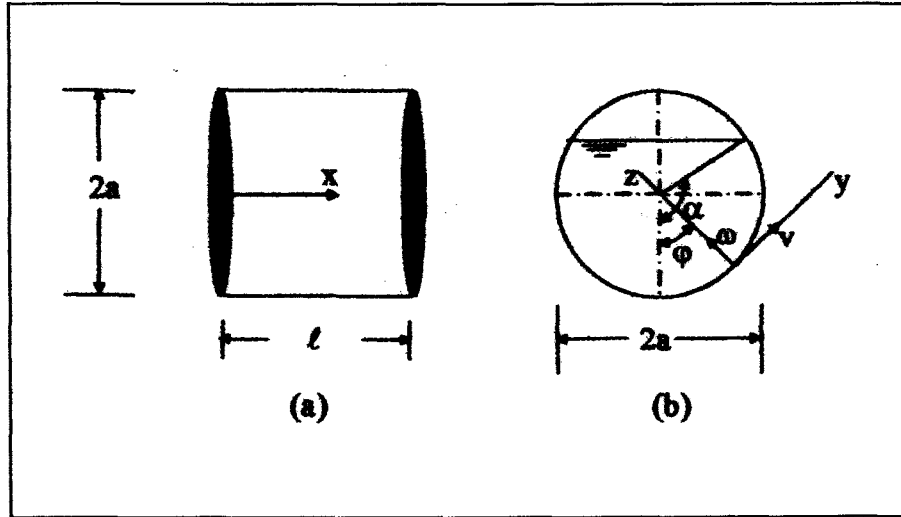
$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{qx}}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \\
N_\varphi + \frac{\partial^2 M_{qx}}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + qa &= 0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

(2.71) denklemlerindeki bütün terimler u , v ve ω yerdeğiştirmeleri cinsinden ifade edilirse sonuç olarak aşağıda verilen denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \\
& \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} + a \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} + \frac{h^2}{12a} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 \omega}{a^2 \partial \phi^3} \right) \\
& + \frac{h^2}{12a} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \phi^2} \right] = 0 \quad (2.72) \\
& \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \phi} - \frac{\omega}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 \omega}{a^3 \partial \phi^4} \right) \\
& - \frac{h^2}{12} \left(\frac{2-\nu}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \phi^3} \right) = - \frac{ap(1-\nu^2)}{Eh}
\end{aligned}$$

Her özel halde lateral yüklü silindirik kabuk problemi için bu diferansiyel denklem sistemi kullanılabilir.

2.3.1. Kenarlarından Mesnetli Silindirik Kabuklar



Şekil 2.10 (Kenarlarından mesnetli silindirik kabuk)

Şekil 2.10'da görüldüğü gibi silindirik kabuğun iki ucu da kapalı ve içi belirli bir seviyeye kadar sıvı ile doludur. Uçlardaki sınır koşulları ve deformasyondaki simetriklik ancak u , v ve ω deplasmanları aşağıda verildiği gibi seri şeklinde yazılırsa sağlanacaktır.

$$\begin{aligned}
u &= \sum \sum A_m \cos n\phi \cos \frac{m\pi x}{\lambda} \\
v &= \sum \sum B_m \sin n\phi \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \\
\omega &= \sum \sum C_m \cos n\phi \sin \frac{m\pi x}{\lambda}
\end{aligned} \quad (2.73)$$

Burada ℓ silindirin boyu φ ise Şekil 2.10b'de görüldüğü gibi ölçülen açıdır. Sıvı basıncı q için ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi < a &\Rightarrow p = -\gamma a (\cos \varphi - \cos a) \\ \varphi > a &\Rightarrow p = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Burada γ sıvının birim hacim ağırlığı α ise sıvı seviyesini belirleyen. Şekil 2.10b'de görüldüğü gibi ölçülen açıdır.

q yükü seri şeklinde aşağıda verildiği gibi de tanımlanabilir.

$$q = \sum \sum p_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \quad (2.75)$$

(2.75) denklemindeki p_{mn} katsayısı (2.74) denkleminde yararlanılarak hesaplanacak olunursa

$$\begin{aligned} p_{mn} &= -\frac{8\gamma a}{mn\pi^2(n^2-1)} (\cos \alpha \sin n\alpha - n \cos n\alpha \sin \alpha) \\ m &= 1,3,5,\dots \quad n = 2,3,4,\dots \end{aligned} \quad (2.76)$$

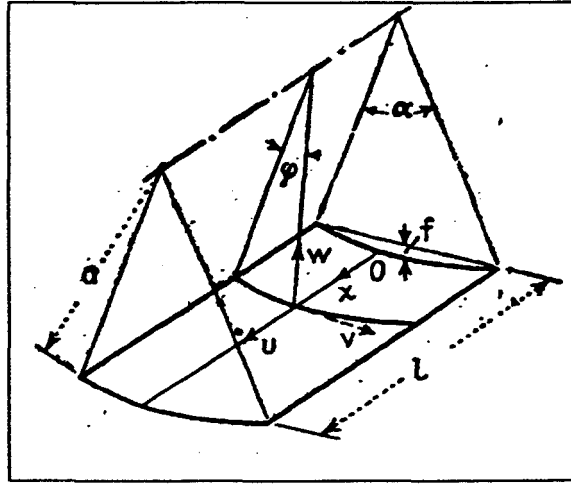
eşitliği elde edilir. p_{m0} ve p_{m1} katsayıları ise

$$\begin{aligned} p_{m0} &= -\frac{4\gamma a}{m\pi^2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \\ p_{m1} &= -\frac{2\gamma a}{m\pi^2} (2\alpha - \sin 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.77)$$

bağıntılarıyla tanımlıdır.

Kabuk deformasyonunu elde etmek için (2.73) ve (2.75) denklemleri (2.72) diferansiyel denklem takımında yerlerine konulmalıdır. Bu şekilde herbir m ve n çifti için A_{mn} , B_{mn} ve C_{mn} katsayıları hesaplanabilir.

2.3.2. Silindirik Bir Kabuk Parçasının Sehim



Şekil 2.11 (Silindirik kabuk parçası)

Kenarlarından basit mesnetli ve $p(x, \theta)$ gibi bir yükün etkisi altındaki bir silindirik kabuk parçasının sehim problemi incelendiğinde, bir önceki bölümde incelenen kenarlarından mesnetli silindirik kabuk probleminde izlenen yol izlenebilir. Bu problemde α kabuğun ayırdığı merkez açısı, l kabuğun uzunluğu a ise kabuğun yarıçapıdır. Sınır şartlarını aşağıdaki gibi yazacak olursak

$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad N_\theta = 0 \quad N_\theta = 0 \quad M_\theta = 0 \quad (\theta = 0, \theta = \alpha) \\ \omega = 0 \quad N_x = 0 \quad N_x = 0 \quad M_x = 0 \quad (x = 0, x = l) \end{aligned} \quad (2.78)$$

deplasman bileşenleri aşağıda verildiği gibi bu sınır şartlarını sağlayacak şekilde seriye açılabilir.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{a} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{n\pi\theta}{a} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{a} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \quad (2.79)$$

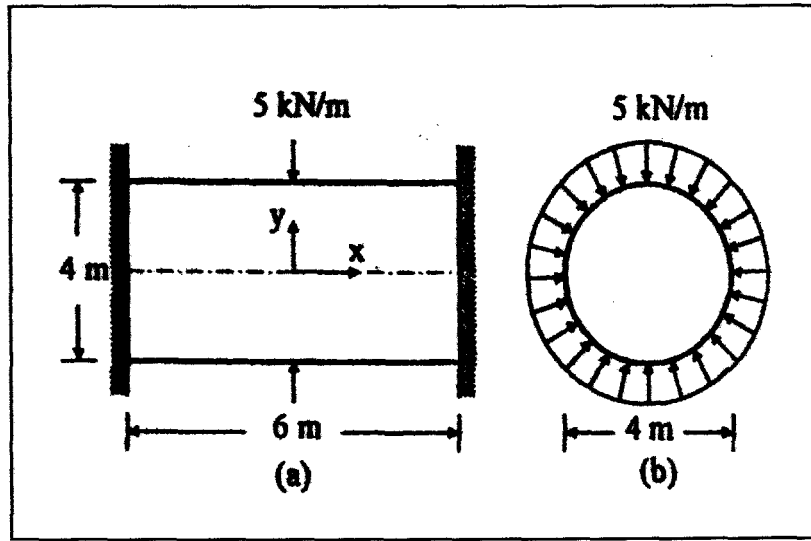
Birim alana gelen ve kabuk yüzeyine dik yük ise aşağıdaki şekilde Fourier serisine açılabilir.

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (2.80)$$

Kabuk deformasyonunu elde etmek için (2.79) ve (2.80) denklemleri (2.72) diferansiyel denklem takımında yerlerine konulmalıdır. Bu şekilde herbir m ve n çifti için A_{mn} , B_{mn} ve C_{mn} katsayıları hesaplanabilir.

3.SAYISAL ÖRNEKLER

3.1. Eksenine ve Orta Kesitine Göre Simetrik Yüklü Silindirik Kabuk



Şekil 3.1 (Halka yükle yüklü silindirik kabuk)

Silindirik kabuk Şekil 3.1a ve 3.1b'de görüldüğü şekilde 5 kN/m şiddetinde silindir eksenine göre simetrik halka yükle yüklenmiştir. Kabuk boyu $l = 6\text{ m}$, kabuk kalınlığı $h = 0,4\text{ m}$, silindir yarıçapı $a = 2\text{ m}$ 'dir. Kabuk malzemesi BS20 kalitesinde beton kabul edilerek elastisite modülü $E = 28,5\text{ Gpa}$ ve poisson oranı $\nu = 0,2$ olarak alınacaktır. Bu değerler kullanılarak kabukta oluşacak çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri, kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

3.1.1. Kesin Çözüm

Kesin çözüm için öncelikle kabuğun eğilme davranışının belirlenmesi gerekir. Kabuğun uzun veya kısa kabuk oluşuna göre, kabuğun mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisi değişmektedir. $2\pi/\beta = 4,31\text{ m} < l = 6\text{ m}$ olduğundan kabuk uzun kabuktur ve mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisi ihmal edilebilir. Bu

durumda deformasyon eğrisi için (2.26), eğilme momenti ve kesme kuvveti için ise (2.6) denklemleri kullanılabilir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 1,583 \cdot 10 \text{ kNm} \quad (3.1)$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = 4,494 \text{ m}^{-4} \rightarrow \beta = 1,456 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (3.2)$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \quad (3.3)$$

$$Q_x = -\frac{P}{2} \theta(\beta x) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (3.4)$$

Bu denklemlerde x değeri yükün uygulandığı kesitle deformasyonun olduğu kesit arasındaki uzaklıktır. P, D ve P değerleri formüllerde yerlerine konursa 0,2 m aralıklarla elde edilecek değerler Ek A'deki Tablo A.1'de gösterilmiştir.

3.1.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözüm

Problem sabit kalınlıklı silindirik kabuğun simetrik deformasyonun tanımlayan aşağıdaki diferansiyel denklem kullanılarak çözülebilir.

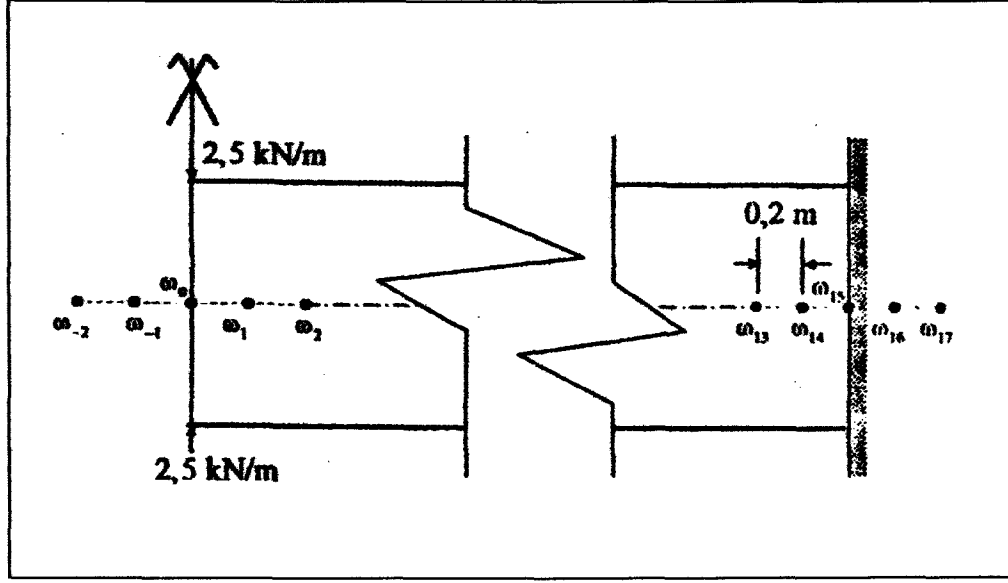
$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D} \quad (3.5)$$

Bu diferansiyel denklem sonlu farklar yöntemi kullanılarak şöyle yazılabilir

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} (\omega_{i-2} - 4\omega_{i-1} + 6\omega_i - 4\omega_{i+1} + \omega_{i+2}) + 4\beta^4 \omega_i = \frac{Z_i}{D} \quad (3.6)$$

Sistemde yayılı yük olmadığından $Z_i = 0$ 'dır. Bu durumda $\Delta x = 0,2 \text{ m}$ ve $\beta^4 = 4,494 \text{ m}^{-4}$ için yazılacak denklemlerin formu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$625 \omega_{i-2} - 2500 \omega_{i-1} + 3767,97 \omega_i - 2500 \omega_{i+1} + 625 \omega_{i+2} = 0 \quad (3.7)$$



Şekil 3.2 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yüklem ve geometri orta kesite göre simetrik olduğundan kabuk deformasyon eğrisi de orta kesite göre simetrik olacaktır. Bu durumda sistem Şekil 3.2'de görüldüğü gibi ikiye bölünüp çözüm yapılabilir. $\Delta x = 0,2$ m olduğuna göre orta kesitten ankastre uca kadar yazılacak 16 eşitlik sonucunda denklemlere girecek bilinmeyenler $\omega_{-2}, \dots, \omega_{17}$ olmak üzere toplam 20 tanedir. Geriye kalan 4 denklem ise orta kesit ve ankastre uçta yazılacak olan ikişer sınır koşuludur. Deformasyon eğrisi orta kesite göre simetrik olduğundan ve orta kesitteki kesme kuvveti $-2,5$ kN/m olduğundan bu kesitte yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow \omega_1 = \omega_{-1} \\
 -D \left. \frac{d^3\omega}{dx^3} \right|_{x=0} &= -2,5 \rightarrow -D \frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^2} = -2,5 \rightarrow \\
 -\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 &= 2,52685 \cdot 10^{-7} \\
 \omega_{x=3} &= 0 \rightarrow \omega_{15} = 0 \\
 \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=3} &= 0 \rightarrow \frac{\omega_{16} - \omega_{14}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow \omega_{16} = \omega_{14}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Şu ana kadar elde ettiğimiz tüm denklemler aşağıdaki gibi düzenli bir şekilde yazılacak olunursa

$$\begin{aligned}
\omega_{-2} &= 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 - 2,52685 \cdot 10^{-7} \\
\omega_{-1} &= \omega_1 \\
\omega_0 &= \frac{1}{3767,97}(-625\omega_{-2} + 2500\omega_{-1} + 2500\omega_1 - 625\omega_2) \\
i &= 0,1,\dots, 15 \\
\omega_{16} &= \omega_{14} \\
\omega_{17} &= \frac{1}{625}(-625\omega_{13} + 2500\omega_{14} + 2500\omega_{16})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Excel programında iterasyonla çözebilmek için 20 bilinmeyenli 20 denklem hazır olur. Bu denklem sistemini çözmek için Excel'de hücrelere aşağıda gösterilen şekilde formüller girilecektir.

Tablo 3.1 (Excel formül giriş şekli)

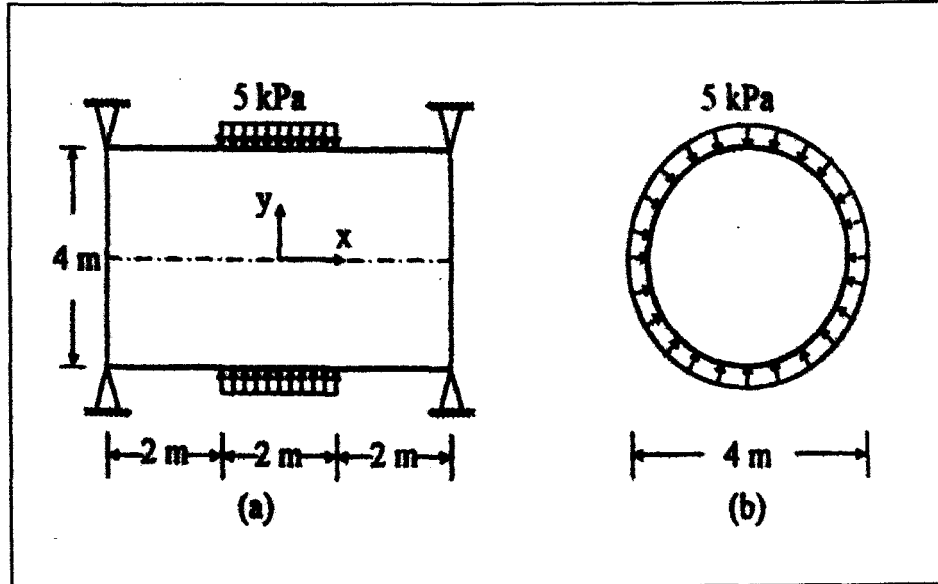
A1	ω_{-2}	$A1 = 2 * A2 - 2 * A4 + A5 - 2,5268510^{-7}$
A2	ω_{-1}	$A2 = A4$
A3	ω_0	$A3 = (1/3767,97)(-625 * A1 + 2500 * A2 + 2500 * A4 - 625 * A5)$
A4	ω_1	$A4 = (1/3767,97)(-625 * A2 + 2500 * A3 + 2500 * A5 - 625 * A6)$
A5		
A17		
A18	ω_{15}	$A18 = (1/3767,97)(-625 * A16 + 2500 * A17 + 2500 * A19 - 625 * A20)$
A19	ω_{16}	$A19 = A17$
A20	ω_{17}	$A20 = (1/625)(-625 * A16 + 2500 * A17 + 2500 * A19)$

Yukarıda gösterildiği gibi Excel'e girilen formüller sonucunda, Excel yeter derecede iterasyon yaparak 20 bilinmeyen değerini hesaplamaktadır. Hesaplanan bu değerler Ek A'daki Tablo A.1, Tablo A.2 ve Tablo A.3'de kesin değerlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Çökme değerleri bilinen ve sadece x değişkenine bağlı olan bir sistemdeki eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \\
Q_x &= -D \frac{d^3 \omega}{dx^3} \\
M_x &= -D \frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2} \\
Q_x &= -D \frac{-\omega_{i-2} + 2\omega_{i-1} - 2\omega_{i+1} + \omega_{i+2}}{2(\Delta x)^3}
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

3.2. Ortasından Belirli Bir Bölgede Eksenine Göre Simetrik Yüklü Silindirik Kabuk



Şekil 3.3 (Ortasından belirli bir bölgede simetrik yüklü silindirik kabuk)

Şekil 3.3'deki sistemin $q = 5 \text{ kPa}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $E = 28,5 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$ değerleri için deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri $0,05 \text{ m}$ aralıklarla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

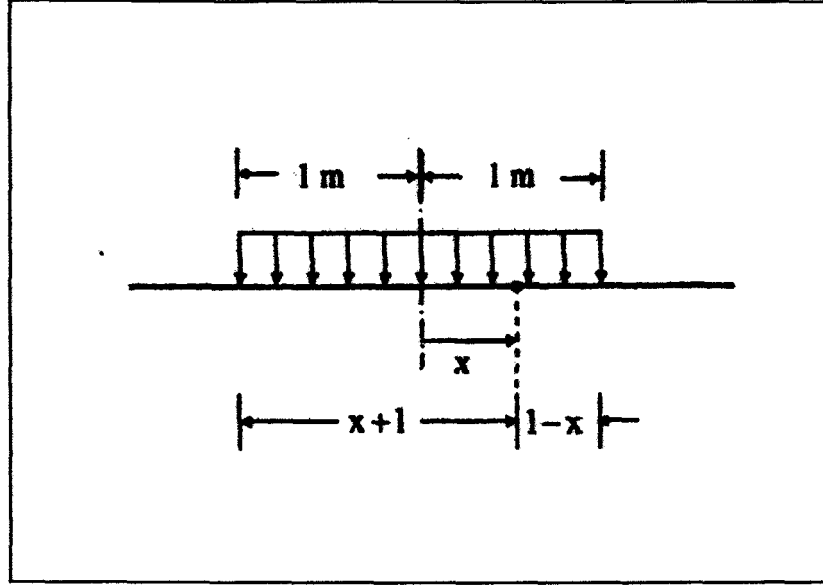
3.2.1. Kesin Çözüm

Kesin çözüm için öncelikle bir önceki problemde olduğu gibi kabuğun eğilme davranışını belirleyecek olan uzun veya kısa kabuk olma durumu incelenmelidir. Uzun kabuk durumu için π / β değerinin yük ile mesnet arasındaki en kısa mesafeden küçük olması gerekir. $\pi / \beta = 1,868 < 2$ olduğundan kabuk uzun kabuktur. Bu durumda orta kesit x eksenin başlangıç noktası seçilirse halka yük çözümü ve

süperpozisyon ilkesi kullanılarak yükün uygulandığı bölge içindeki herhangi bir kesitteki deformasyon miktarı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 66796,875 \text{ kNm} \quad (3.11)$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = 8 \text{ m}^{-4} \rightarrow \beta = 1,682 \text{ m}^{-1}$$



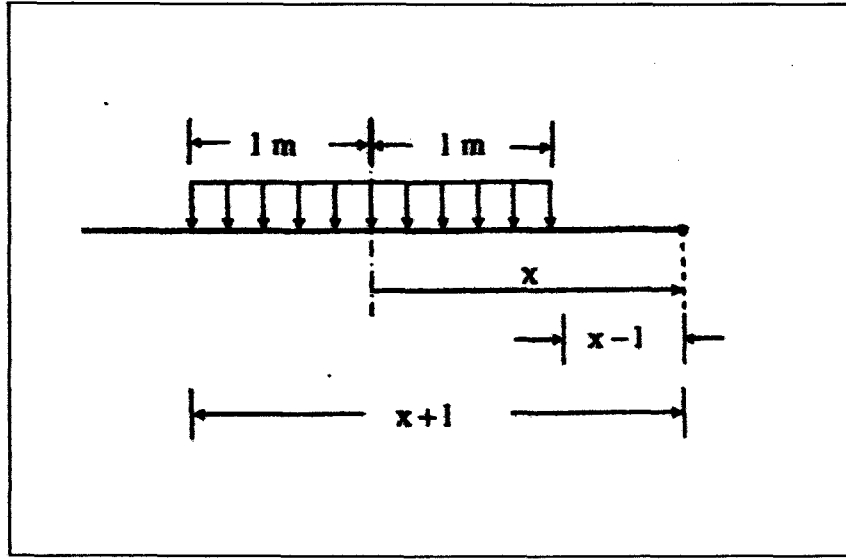
Şekil 3.4 (Yükün uygulandığı bölge içinde integrasyon sınırları)

$$\omega = \int_0^{x+1} \frac{qd\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{qd\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$\omega = -\frac{5}{8\beta^4 D} (e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta) - 2) \quad (3.12)$$

Benzer şekilde halka yük durumu için çıkarılmış eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadelerinin yükün uygulandığı bölgede süperpozisyonu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^{x+1} \frac{qd\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{qd\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi) \\
M_x &= -\frac{5}{4\beta^2} (e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) \\
&+ e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)) \\
Q_x &= -\int_0^{x+1} \frac{qd\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi + \int_0^{1-x} \frac{qd\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi \\
Q_x &= \frac{5}{4\beta} (e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) \\
&+ e^{(x-1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta))
\end{aligned} \tag{3.13}$$



Şekil 3.5 (Yükün uygulandığı bölge dışında integrasyon sınırları)

Yükün uygulandığı bölge dışında ise deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\begin{aligned}
\omega &= \int_{x-1}^{x+1} \frac{qd\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) \\
\omega &= \frac{5}{8\beta^4 D} (e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta) \\
&+ e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{x-1}^{x+1} \frac{qd\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi) \\
M_x &= -\frac{5}{4\beta^2} (e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) \\
&+ e^{-(x-1)\beta} (-\cos \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta)) \\
Q_x &= -\int_{x-1}^{x+1} \frac{qd\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi \\
Q_x &= -\frac{5}{4\beta} (e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) \\
&+ e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Bu formüller kullanılarak 0,05 m aralıkla elde edilen çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri EkA'daki Tablo A.4, Tablo A.5 ve Tablo A.6'da gösterilmiştir.

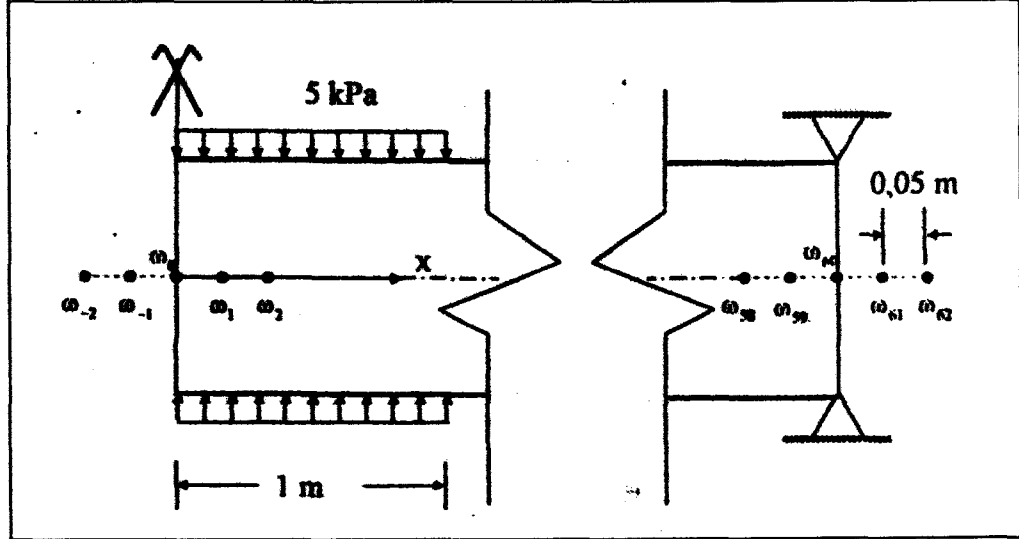
3.2.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözüm

Problem aşağıdaki diferansiyel denklem kullanılarak çözülebilir.

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D} \tag{3.16}$$

Bu diferansiyel denklem sonlu farklar yöntemi kullanılarak ve $\Delta x = 0,05$ m, $\beta^4 = 8m^{-4}$ ve $D = 66796$ kNm değerleri yerlerine konularak yazılırsa aşağıdaki form elde edilir.

$$160000 \omega_{i-2} - 640000 \omega_{i-1} + 960032 \omega_i - 640000 \omega_{i+1} + 160000 \omega_{i+2} = \frac{Z_i}{66796,875}$$



Şekil 3.6 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yüklemeye ve geometri orta kesite göre simetrik olduğundan kabuk deformasyon eğrisi de orta kesite göre simetrik olacaktır. Bu durumda sistem Şekil 3.6'da görüldüğü gibi ikiye bölünüp çözüm yapılabilir. $\Delta x = 0,05 \text{ m}$ olduğuna göre orta kesitten mafsallı uca kadar yazılacak 61 eşitlik sonucunda denklemlere girecek bilinmeyenler $\omega_{-2}, \dots, \omega_{62}$ olmak üzere toplam 65 tanedir. Geriye kalan 4 denklem ise orta kesit ve mafsallı uçta yazılacak olan ikişer sınır koşuludur. Sınır koşulları için orta kesitte eğim ve kesme kuvvetinin sıfır olacağı, mafsallı uçta ise çökme ve eğilme momenti değerlerinin sıfır olacağı yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow \omega_1 = \omega_{-1} \\
 -D \left. \frac{d^3\omega}{dx^3} \right|_{x=0} &= 0 \rightarrow -D \frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^3} = 0 \rightarrow \\
 -\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 &= 0 \\
 \omega|_{x=3} &= 0 \rightarrow \omega_{60} = 0 \\
 -D \left. \frac{d^2\omega}{dx^2} \right|_{x=3} &= 0 \rightarrow -D \frac{\omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61}}{(\Delta x)^2} = 0 \rightarrow \\
 \omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Şu ana kadar elde ettiğimiz tüm denklemler aşağıdaki gibi düzenli bir şekilde yazılacak olunursa

$$\omega_{-2} = 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_{-1} = \omega_1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{960032} (7,48538 \cdot 10^{-5} - 160000 \omega_{-2} + 640000 \omega_{-1} + 640000 \omega_1 - 160000 \omega_2)$$

$$i = 0, 1, \dots, 20$$

$$\omega_{21} = \frac{1}{960032} (-160000 \omega_{19} + 640000 \omega_{20} + 640000 \omega_{22} - 160000 \omega_{23})$$

$$i = 21, 22, \dots, 60$$

$$\omega_{62} = \frac{1}{160000} (-160000 \omega_{58} + 640000 \omega_{59} + 640000 \omega_{61})$$

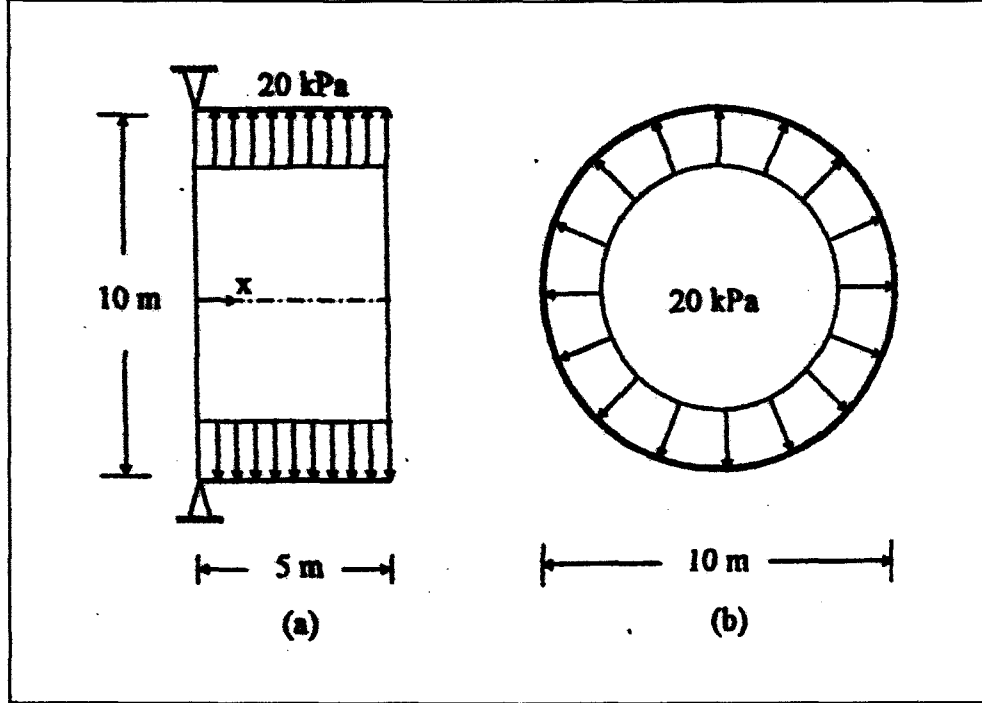
Excel programında iterasyonla çözebilmek için 65 bilinmeyenli 65 denklem hazır olur. Bu denklem sistemini çözmek için Excel'de hücrelere aşağıda gösterilen şekilde formüller girilecektir.

Tablo 3.2 (Excel formül giriş şekli)

A1 ω_{-2}	$A1 = 2 * A2 - 2 * A4 + A5$
A2 ω_{-1}	$A2 = A4$
A3 ω_0	$A3 = (1/960032)(7,48538 \cdot 10^{-5} - 160000 * A1 + 640000 * A2 + 640000 * A4 - 160000 * A5)$
A4 ω_1	$A4 = (1/960032)(7,48538 \cdot 10^{-5} - 160000 * A2 + 640000 * A3 + 640000 * A5 - 160000 * A6)$
A24 ω_{21}	$A24 = (1/960032)(-160000 * A22 + 640000 * A23 + 640000 * A25 - 160000 * A26)$
A63 ω_{60}	$A63 = (1/960032)(-160000 * A61 + 640000 * A62 + 640000 * A64 - 160000 * A65)$
A64 ω_{61}	$A64 = -A62 + 2 * A63$
A65 ω_{62}	$A65 = (1/160000)(-160000 * A61 + 640000 * A62 + 640000 * A64)$

Yukarıda gösterildiği gibi Excel'e girilen formüller sonucunda, Excel yeter derecede iterasyon yaparak 65 bilinmeyen değerini hesaplamaktadır. Hesaplanan bu değerler Ek A'daki Tablo A.4, Tablo A.5 ve Tablo A.6'da kesin değerlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

3.3. Eksenine Göre Simetrik Sabit İç Basınç Anındaki Silindirik Kabuk



Şekil 3.7 (Eksenine göre simetrik sabir iç basınç altındaki silindirik kabuk)

Şekil 3.3.1'deki sistemin $Z = 20 \text{ kPa}$, $h = 0,25 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m}$, $E = 2 \times 10^2 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$ değerleri için deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri $0,2 \text{ m}$ aralıklarla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

3.3.1. Kesin Çözüm

Şekil 3.7'deki sistem için yükleme simetrik olsa da geometri simetrik olmadığından ve kabuk yayılı yükle tam olarak dolou olduğundan mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisinin ihmal edildiği uzun kabuk durumundan bahsedilemez. Bu durumda kesin çözüm için eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş sabit kalınlıklı silindirik kabuğun deformasyonunu tanımlayan diferansiyel denklemin genel çözümü olan (2.15) denkleminin kullanılması gerekir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (3.18)$$

Burada $f(x)$ (2.14) diferansiyel denkleminin özel çözümüdür ve yükün sabit olduğu durum için $f(x)$ için aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$f(x) = \frac{Z}{4\beta^4 D} \quad (3.19)$$

Bu problem için D eğilme rijitliği ve β büyüklüğü aşağıda hesaplanmıştır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 286172 \text{ kNm} \quad (3.20)$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = 1,74720 \text{ m}^{-4} \rightarrow \beta = 1,14971 \text{ m}^{-1}$$

Bu değerler (3.19) denkleminde yerlerine konulursa

$$f(x) = -1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.18) genel çözümündeki integrasyon sabitleri hariç tüm büyüklükler elde edilmiş olur.

$$\omega = e^{1,14971 x} (C_1 \cos 1,14971 x + C_2 \sin 1,14971 x) + e^{-1,14971 x} (C_3 \cos 1,14971 x + C_4 \sin 1,14971 x) - 1 \times 10^{-5} \quad (3.21)$$

$C_1, \dots, C_4$ integrasyon sabitleri ise kabuğun iki ucu yazılacak sınır koşullarından elde edilecektir. Kabuğun sol ucu sabit mafsallı olduğundan buradaki çökme ve moment değerleri sıfırdır. Bu durumda sol uç için yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=0} = 0 \quad (3.22a)$$

$$-D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.22b)$$

(3.21) genel çözümü (3.22a) ve (3.22b) sınır koşullarında yerlerine konulursa sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$C_1 + C_3 - 1 \times 10^{-5} = 0 \quad (3.23a)$$

$$2,64367 C_2 - 2,64367 C_4 = 0 \quad (3.24b)$$

Sağ uç ise boş olduğundan eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından burada yazılacak sınır koşulları için ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Big|_{x=5} = 0 \quad (3.25a)$$

$$-D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\Big|_{x=5} = 0 \quad (3.25b)$$

(3.21) genel çözümü (3.25a) ve (3.25b) sınır koşullarında yerine konulursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$422,60788 C_1 + 713,67103 C_2 - 4,29349 C_3 - 7,25055 C_4 = 0 \quad (3.26a)$$

$$-334,63822 C_1 + 1306,39123 C_2 + 1,32723 C_3 + 3,39976 C_4 = 0 \quad (3.26b)$$

(3.24a), (3.24b), (3.26a) ve (3.26b) denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümü sonucunda $C_1, \dots, C_4$ integrasyon sabitleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$C_1 = 1,90674 \times 10^{-10}$$

$$C_2 = -5,27509 \times 10^{-11}$$

$$C_3 = 9,99981 \times 10^{-6}$$

$$C_4 = -5,27509 \times 10^{-11}$$

İntegrasyon sabitlerinin sayısal değerleri de (3.22) denkleminde yerlerine konulursa deformasyon eğrisinin denklemi

$$\begin{aligned} \omega = & e^{1,14971 x} (1,9067440759 \cdot 10^{-10} \cos 1,14971 x \\ & - 5,2750919974 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971 x) \\ & + e^{-1,14971 x} (9,9998093255 \cdot 10^{-6} \cos 1,14971 x \\ & - 5,2750919974 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971 x) - 1 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Kabuğun herhangi bir kesitindeki eğilme momenti ve kesme kuvveti aşağıdaki bağıntılar kullanılarak bulunabilir.

$$M_x = -D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \quad (3.28a)$$

$$Q_x = -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) \quad (3.28b)$$

(3.27) denklemi (3.28a) ve (3.28b) bağıntılarında yerlerine konursa eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_x = & e^{1,14971 x} (3,9908374106 \cdot 7445 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971 x \\
& + 1,4425351433 \cdot 5131 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971 x) \\
& + e^{-1,14971 x} (-3,9908374106 \cdot 7445 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971 x \\
& - 7,5652923542 \cdot 0086 \sin 1,14971 x)
\end{aligned} \tag{3.29a}$$

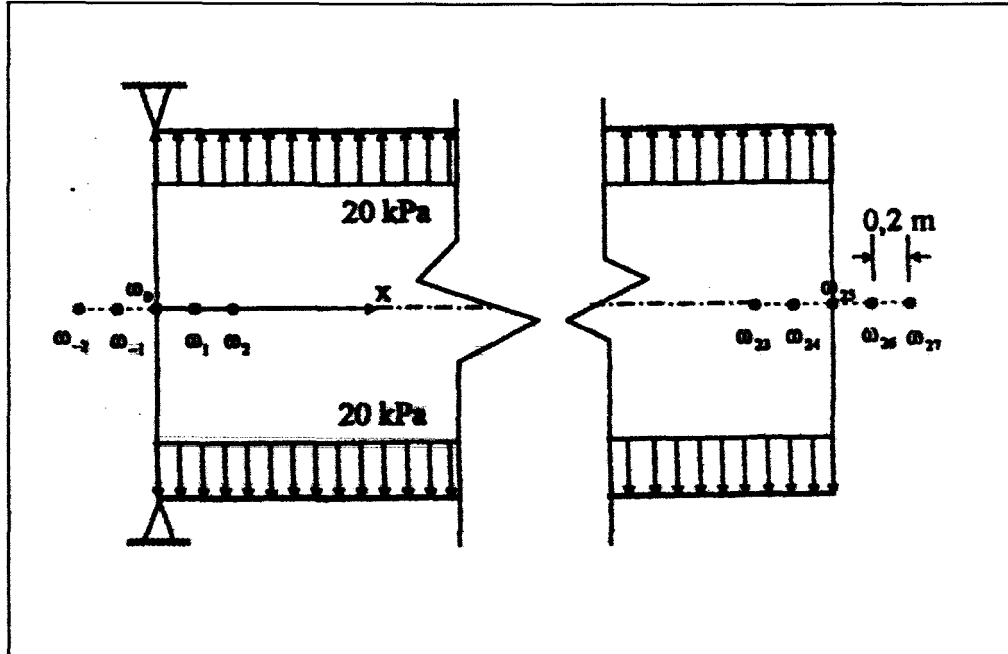
$$\begin{aligned}
Q_x = & e^{1,14971 x} (2,1173276476 \cdot 0509 \cdot 10^{-4} \cos 1,14971 x \\
& + 1,1996665117 \cdot 1979 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971 x) \\
& + e^{-1,14971 x} (-8,6978463894 \cdot 91 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971 x \\
& + 8,6979381556 \cdot 0507 \sin 1,14971 x)
\end{aligned} \tag{3.29b}$$

(3.27), (3.29a) ve (3.29b) denklemleri kullanılarak 0,2 m aralıklarla elde edilen değerler EkA' dAki Tablo A.7, Tablo A.8 ve Tablo A.9'de gösterilmiştir

3.3.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözüm

Daha önceki problemlerde olduğu gibi (2.14) diferansiyel denklemi sonlu farklar şeklinde yazılıp $\Delta x = 0,2$ m, $\beta^4 = 1,74720 \text{ m}^{-4}$, $Z = -20 \text{ kPa}$ ve $D = 286172 \text{ kN.m}$ değerleri yerlerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$625 \omega_{i-2} - 2500 \omega_{i-1} + 3757 \omega_i - 2500 \omega_{i+1} + 625 \omega_{i+2} = -6,98880 \cdot 10^{-5} \tag{3.30}$$



Şekil 3.8 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

$\Delta x = 0,2m$ için bilinmeyenler Şekil 3.6'da görüldüğü şekilde olacaktır. Sabit mesnetli uç için (3.22a) ve (3.22b) sınır koşulları sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\omega \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.31a)$$

$$-D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow -D \left(\frac{\omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1}{(\Delta x)^2} \right) = 0 \rightarrow \omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1 = 0 \quad (3.31b)$$

Boş uç için ise (3.25a) ve (3.25b) sınır koşulları sonlu farklar çinsinden yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$-D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \Big|_{x=5} = 0 \rightarrow -D \left(\frac{\omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26}}{(\Delta x)^2} \right) = 0 \rightarrow \omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26} = 0 \quad (3.32a)$$

$$-D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \Big|_{x=5} = 0 \rightarrow -D \left(\frac{-\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27}}{2(\Delta x)^3} \right) = 0 \quad (3.32b)$$

$$\rightarrow -\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27} = 0$$

(3.30) denklemi ω_0 noktasından ω_{25} noktasına kadar yazılacak olunursa $\omega_{-2}, \dots, \omega_{27}$ olmak üzere 30 bilinmeyenli 26 denklem elde edilir. (3.31a), (3.31b), (3.32a) ve (3.32b) denklemleriyle ifade ettiğimiz sınır şartlarını da ekleyecek olursak 30 bilinmeyenli 30 denklem elde ederiz. Şu ana kadar elde ettiğimiz tüm denklemleri aşağıda gösterildiği gibi düzenli bir şekilde yazacak olursak

$$\omega_{-2} = \frac{1}{625} (-6,98880 \cdot 10^{-5} + 2500 \omega_{-1} + 2500 \omega_1 - 625 \omega_2)$$

$$\omega_{-1} = 2\omega_0 - \omega_1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{3757} (-6,98880 \cdot 10^{-5} - 625 \omega_{-2} + 2500 \omega_{-1} + 2500 \omega_1 - 625 \omega_2)$$

$$i = 0, 1, \dots, 25$$

$$\omega_{26} = -\omega_{24} + 2\omega_{25}$$

$$\omega_{27} = \omega_{23} - 2\omega_{24} + \omega_{26}$$

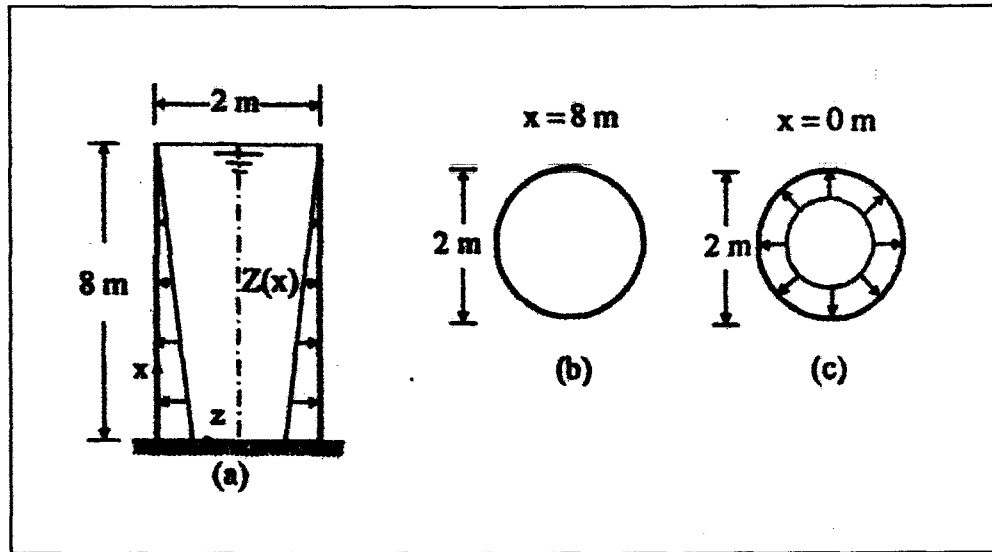
Excel programında iterasyonla çözebilmek için 30 bilinmeyenli 30 denklem hazır olur. Bu denklem sistemini çözmek için Excel'de hücrelere aşağıda gösterilen şekilde formüller girilecektir.

Tablo 3.4 (Excel formül giriş şekli)

$A1 \quad \omega_{-2}$	$A1 = (1/625)(-6,98880.10^{-5} + 2500A2 + 2500A4 - 625A5)$
$A2 \quad \omega_{-1}$	$A2 = 2A3 - A4$
$A3 \quad \omega_0$	$A3 = (1/3757)(-6,98880.10^{-5} - 625A1 + 2500A2 + 2500A4 - 625A5)$
$A4 \quad \omega_1$	$A4 = (1/3757)(-6,98880.10^{-5} - 625A2 + 2500A3 + 2500A5 - 625A6)$
$A29 \quad \omega_{26}$	$A29 = -A27 + 2A28$
$A30 \quad \omega_{27}$	$A30 = A26 - 2A27 + 2A29$

Yukarıda gösterildiği gibi Excel'e girilen formüller sonucunda, Excel yeter derecede iterasyon yaparak 30 bilinmeyen değerini hesaplamaktadır. Hesaplanan bu değerler EkA'daki Tablo A.7, Tablo A.8 ve Tablo A.9'de kesin değerlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

3.4. İç Sıvı Basıncı Altındaki Sabit Cidar Kalınlıklı Silindirik Tank



Şekil 3.9 (Sabit cidar kalınlıklı silindirik tank)

Şekil 3.9'da görülen silindirik tankın içi su ile doludur. Tank yüksekliği $d = 8$ m, cidar kalınlığı $h = 0,5$ m, silindir yarıçapı $a = 1$ m, tank malzemesinin elastisite modülü $E = 28,5$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,2$ 'dir. Aşağıda bu değerler kullanılarak tank cidarında meydana gelecek deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemiyle elde edilmiştir.

3.4.1. Kesin Çözüm

Problemin kesin çözümü için 2.2.2 bölümünde çıkarılmış olan (2.35) denklemi kullanılabilir.

$$\omega = -\frac{\gamma\alpha^2}{Eh} \left\{ d - x - e^{-\beta x} \left[d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right] \right\} \quad (3.33)$$

Burada y tank içerisindeki sıvının birim hacim ağırlığıdır ve bu problemde bu sıvı su olduğu için 9,81 kN/m³tür. Formüllerde kullanılacak D eğilme rijitliği ve β değerleri aşağıda hesaplanmıştır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 309244,792 \text{ kN.m}$$

$$\beta^3 = \frac{Eh^3}{4\alpha^2 D} = 11,52 \text{ m}^{-4} \Rightarrow \beta = 1,842 \text{ m}^{-1}$$

(3.33) denklemi

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{d \omega}{dx^3} \right)$$

denklemlerinde yerlerine konulursa eğilme momenti ve kesme kuvveti bağıntıları aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$M_x = \frac{\gamma D \alpha^2}{Eh} e^{-\beta x} \left[(2d\beta^2 - 2\beta) \cos \beta x - 2d\beta^2 \sin \beta x \right] \quad (3.34a)$$

$$Q_x = \frac{\gamma D \alpha^2}{Eh} e^{-\beta x} \left[(2\beta^2 - 4d\beta^3) \cos \beta x - 2\beta^2 \sin \beta x \right] \quad (3.34b)$$

Büyükliklerin sayısal değerleri formüllerde yerlerine konulurlarsa bu problem için deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir.

$$\omega = -6,88421 \cdot 10^{-7} [8 - x - e^{-1,842 x} (8 \cos 1,842 x + 7,4571 \sin 1,842 x)] \quad (3.35)$$

$$M_x = 0,21289 e^{1,842 x} [50,60342 \cos 1,842 x - 54,28742 \sin 1,842 x] \quad (3.36)$$

$$Q_x = 0,21289 e^{1,842 x} [-193,20894 \cos 1,842 x + 6,78593 \sin 1,842 x] \quad (3.37)$$

(3.35), (3.36) ve (3.37) formülleri kullanılarak 0,2 m aralıklarla elde edilen deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri EkA'daki Tablo A.10, Tablo A.11 ve Tablo A.12'de gösterilmiştir.

3.4.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözüm

Tank içindeki sıvı basıncı, tabandan olan mesafe x'in bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Z(x) = -\gamma(d - x) \quad (3.38)$$

Bu durumda (2.14) diferansiyel denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z(x)}{D}$$

Bu denklem sonlu farklar şeklinde yazılırsa

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} (\omega_{i-2} - 4\omega_{i-1} + 6\omega_i - 4\omega_{i+1} + \omega_{i+2}) + 4\beta^4 \omega_i = \frac{Z(x_i)}{D}$$

formunu alır. $\Delta x = 0,2$ m, $\beta^4 = 11,52 \text{ m}^{-4}$ ve $D = 309244,792 \text{ kN.m}$ değerleri için katsayılar toplanıp $Z(x_i)$ 'nin (3.4.2.1) bağıntısıyla verilen eşiti yerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$625 \omega_{i-2} - 2500 \omega_{i-1} + 3796,08 \omega_i - 2500 \omega_{i+1} + 625 \omega_{i+2} = -\frac{9,81(8 - x_i)}{309244,792} \quad (3.39)$$

$\Delta x = 0,2$ m için bilinmeyenlerin dağılımı Şekil 3.10'da görülmektedir. Tank tabanı ankastre bağlı olduğundan buradaki eğim ve deformasyon sıfır olacağı için sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.40a)$$

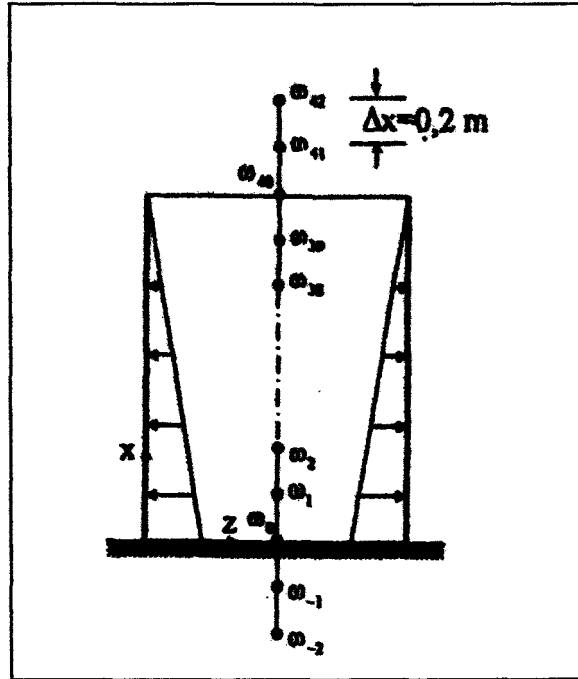
$$\frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_{-1}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.40b)$$

Tankın üst ucunun boş uç olması sebebiyle buradaki eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacaktır bu nedenle sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Big|_{x=8} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{39} - 2\omega_{40} + \omega_{41}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{39} - 2\omega_{40} + \omega_{41} = 0 \quad (3.41a)$$

$$-D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\Big|_{x=8} = 0 \Rightarrow \frac{-\omega_{38} + 2\omega_{39} - 2\omega_{41} + \omega_{42}}{2(\Delta x)^2} = 0 \quad (3.41b)$$

$$\Rightarrow -\omega_{38} + 2\omega_{39} - 2\omega_{41} + \omega_{42} = 0$$



Şekil 3.10 (Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

(3.39) denklemi ω_0 noktasından ω_{40} noktasına kadar yazılacak olunursa $\omega_{-2}, \dots, \omega_{42}$ olmak üzere 45 bilinmeyenli 41 denklem elde edilir. (3.40a), (3.40b), (3.41a) ve (3.41b) denklemleriye ifade ettiğimiz sınır şartlarını da ekleyecek olursak 45 bilinmeyenli 45 denklem elde ederiz. Şu ana kadar elde ettiğimiz tüm denklemleri aşağıda gösterildiği gibi düzenli bir şekilde yazacak olursak

$$\omega_{-2} = \frac{1}{625} \left(-\frac{9,81 \times 8}{309244,792} + 2500 \omega_{-1} + 2500 \omega_1 - 625 \omega_2 \right)$$

$$\omega_{-1} = \omega_1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{3796,08} \left(-\frac{9,81 \times (8 - x_0)}{390244,792} - 625 \omega_{-2} + 2500 \omega_{-1} + 2500 \omega_1 - 625 \omega_2 \right)$$

$$\omega_{41} = 2\omega_{40} - \omega_{39}$$

$$\omega_{42} = \omega_{38} - 2\omega_{39} + 2\omega_{41}$$

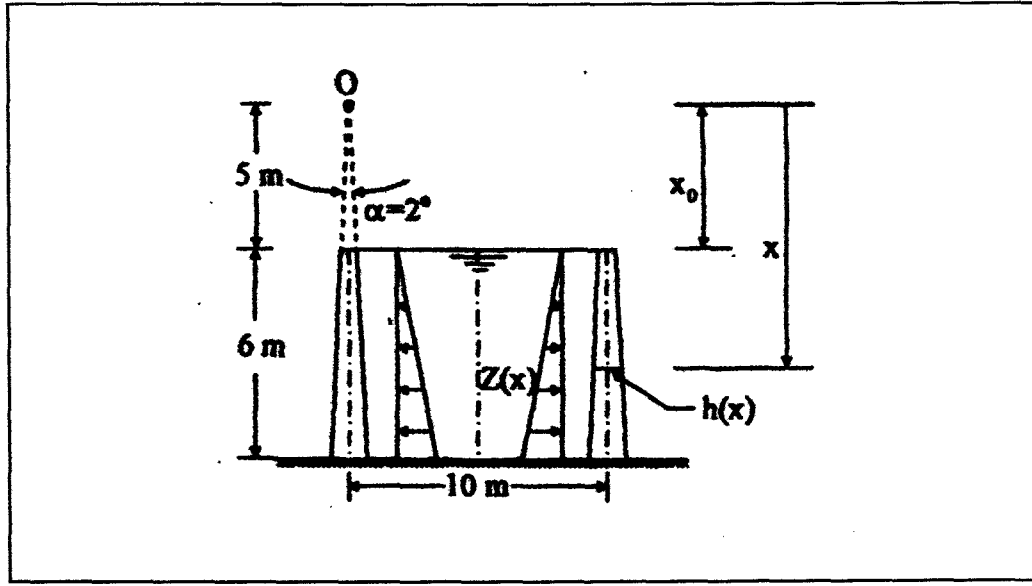
Excel programında iterasyonla çözebilmek için 45 bilinmeyenli 45 denklem hazır olur. Bu denklem sistemim çözmek için Excel'de hücrelere aşağıda gösterilen şekilde formüller girilecektir.

Tablo 3.5 (Excel formül giriş şekli)

A1 ω_{-2}	A1 = (1/625)(-2,5378.10⁻⁴ + 2500A2 + 2500A4 - 625A5)
A2 ω_{-1}	A2 = A4
A3 ω_0	A3 = (1/3796,08)(-2,5378.10⁻⁴ - 625A1 + 2500A2 + 2500A4 - 625A5)
A4 ω_1	A4 = (1/3796,08)(-2,5378.10⁻⁴ - 625A2 + 2500A3 + 2500A5 - 625A6)
A44 ω_{41}	A44 = 2A43 - A42
A45 ω_{42}	A45 = A41 - 2A42 + 2A44

Yukarıda gösterildiği gibi Excel'e girilen formüller sonucunda, Excel yeter derecede iterasyon yaparak 45 bilinmeyen değerini hesaplamaktadır. Hesaplanan bu değerler Ek A'daki Tabloda A.10, Tabloda A.11 ve Tabloda A.12'de kesin değerlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

3.5. İç Sıvı Basıncı Altındaki Düzgün Değişen Cidar Kalınlıklı Silindirik Tank



Şekil 3.11 (Değişken cidar kalınlıklı tank)

Değişken kalınlıklı silindirik tankın içi su ile doludur. Tank yüksekliği $d = 6$ m, kabuk yüzeyi eğim açısı $\alpha = 2^\circ$, orijinle kabuğun üst ucu arasındaki uzaklık $x_0 = 5$ m, silindir yarıçapı $a = 5$ m, tank malzemesinin elastisite modülü $E = 28,5$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,2$ 'dir. Bu değerler kullanılarak tank cidarında meydana gelecek deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

3.5.1. Kesin Çözüm

Değişken cidar kalınlıklı kabuk problemlerinin çözümü için (2.11) diferansiyel denklemi kullanılabilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{\alpha^2} \omega = Z$$

Düzgün değişen cidar kalınlıklı tankın eğilme rijitliği ve kalınlığı için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$h = \alpha \cdot x \quad D = \frac{E \alpha^3}{12(1 - \nu^2)} x^3$$

Bu bağıntılar (2.11) diferansiyel denkleminde yerlerine konulursa düzgün değişen cidar kalınlıklı silindirik tank probleminin çözümünde kullanılan (2.41) diferansiyel denkleminde ulaşılır.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 \alpha^2} x \omega = - \frac{12(1-\nu^2) \gamma (x - x_0)}{E \alpha^3}$$

Bu diferansiyel denklemin (2.42) ile verilen genel çözümü ve (2.43) ile verilen özel çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[C_1 \psi_1'(2\rho\sqrt{x}) + C_2 \psi_2'(2\rho\sqrt{x}) + C_3 \psi_3'(2\rho\sqrt{x}) + C_4 \psi_4'(2\rho\sqrt{x}) \right] \quad (3.42)$$

$$\omega_1 = - \frac{\gamma \alpha^2}{E \alpha} \frac{x - x_0}{x} \quad (3.43)$$

(3.42) ifadesindeki ρ , α eğim açısının radyan cinsinden değeri olmak üzere aşağıdaki formülle tanımlı bir sabittir.

$$\rho^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 \alpha^2} = 378,18057 \text{ m}^{-2} \Rightarrow \rho = 4,40986 \text{ m}^{-\frac{1}{2}}$$

$2\rho\sqrt{x} > 6$ olduğundan (3.42) denklemi içindeki $\psi_i'(2\rho\sqrt{x})$ fonksiyonları için (2.49) - (2.52) denklemlerindeki asimptotik fonksiyonlar kullanılabilir. $\xi = 2\rho\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa bu ifadeler aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\psi_1'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{x}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.44)$$

$$\psi_2'(\xi) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{x}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.45)$$

$$\psi_3'(\xi) = - \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{x}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.46)$$

$$\psi_4'(\xi) = - \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{x}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.47)$$

$\xi = 2\rho\sqrt{x}$ ve $x = \left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2$ eşitlikleri ile (3.5.1.2) özel çözümü kullanılarak genel

çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega(\xi) = \frac{2\rho}{\xi} [C_1 \psi_1'(\xi) + C_2 \psi_2'(\xi) + C_3 \psi_3'(\xi) + C_4 \psi_4'(\xi)] - \frac{\gamma \alpha^2 \left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2 - x_0}{E \alpha \left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2} \quad (3.48)$$

Tankın alt ucunda $x = 11$ m için $\xi = 29,252$, tankın üst ucunda ise $x = 5$ m için $\xi = 19,721$ olacaktır. Tankın alt ucu ankastre olduğundan burada yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega \Big|_{\xi=29,252} = 0 \quad (3.49a)$$

$$\frac{d\omega}{d\xi} \Big|_{\xi=29,252} = 0 \quad (3.49b)$$

Tankın üst ucu ise boş uç olduğundan buradaki sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$M_x \Big|_{x=5} = 0 \quad (3.50a)$$

$$Q_x \Big|_{x=5} = 0 \quad (3.50b)$$

Özel çözümden dolayı oluşacak eğilme momenti aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$M_{x1} = -D \left(\frac{d^2 \omega_1}{dx^2} \right) = - \frac{\gamma \alpha^2 a^2 x_0}{6(1 - \nu^2)} \quad (3.51)$$

Homojen çözümden dolayı oluşacak eğilme momenti ise aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} M_{x0} = -D \left(\frac{d^2 \omega_0}{dx^2} \right) = & - \frac{E \alpha^3}{48(1 - \nu^2)} \sqrt{x} \{ C_1 [\xi^2 \psi_2'(\xi) - 4\xi \psi_2(\xi) + 8\psi_1(\xi)] \\ & - C_2 [\xi^2 \psi_1'(\xi) - 4\xi \psi_1(\xi) - 8\psi_2(\xi)] \\ & + C_3 [\xi^2 \psi_4'(\xi) - 4\xi \psi_4(\xi) + 8\psi_3(\xi)] \\ & - C_4 [\xi^2 \psi_3'(\xi) - 4\xi \psi_3(\xi) - 8\psi_4(\xi)] \} \end{aligned} \quad (3.52)$$

(3.51) ve (3.52) denklemleri birleştirilirse kabukta herhangi bir noktada oluşacak eğilme momentinin hesaplanması için kullanılacak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega_0}{dx^2} \right) = & -\frac{E \alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{ C_1 [\xi^2 \psi_2^1(\xi) - 4\xi \psi_2(\xi) + 8\psi_1^1(\xi)] \\
& - C_2 [\xi^2 \psi_1^1(\xi) - 4\xi \psi_1(\xi) - 8\psi_2^1(\xi)] \\
& + C_3 [\xi^2 \psi_4^1(\xi) - 4\xi \psi_4(\xi) + 8\psi_3^1(\xi)] \\
& - C_4 [\xi^2 \psi_3^1(\xi) - 4\xi \psi_3(\xi) - 8\psi_4^1(\xi)] \} \\
& - \frac{\gamma \alpha^2 \alpha^2 x_0}{6(1-\nu^2)}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

(3.53) denklemindeki ψ_i fonksiyonları için $2\rho\sqrt{x} > 6$ olduğu için (2.53) -(2.56) denklemlerinde de elde edilen aşağıdaki asimptotik bağıntılar kullanılabilir.

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{2}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \tag{3.54}$$

$$\psi_2(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \tag{3.55}$$

$$\psi_3(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \tag{3.56}$$

$$\psi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{2}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \tag{3.57}$$

(3.51) denkleminde de görülebileceği gibi özel çözümün kesme kuvvetine katkısı yoktur. Bu durumda toplam kesme kuvveti için aşağıdaki ifade kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
Q_x = \frac{dM_x}{dx} = & \frac{E \alpha^3 \rho^2}{24(1-\nu)} \sqrt{x} \{ C_1 [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi_2^1(\xi)] \\
& + C_2 [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi_1^1(\xi)] + C_3 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi_4^1(\xi)] \\
& + C_4 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi_3^1(\xi)] \}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

(3.48), (3.53) ve (3.58) ifadeleri sınır koşullarında yerlerine konulursa aşağıdaki dört denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& -13050764 \text{ , } 80055 \text{ } C_1 - 16941070 \text{ , } 14295 \text{ } C_2 \\
& - 4,58746 \cdot 10^{-11} C_3 + 5,95049 \cdot 10^{-12} C_4 = 1,34467 \cdot 10^{-4} \\
& - 20538198 \text{ , } 25594 \text{ } C_1 - 1882138 \text{ , } 27737 \text{ } C_2 \\
& + 3,05830 \cdot 10^{-11} C_3 - 3,69510 \cdot 10^{-11} C_4 = 7,66149 \cdot 10^{-6} \\
& 1906675949 \text{ , } 93172 \text{ } C_1 - 681268457 \text{ , } 30982 \text{ } C_2 \\
& - 1,78482 \cdot 10^{-3} C_3 - 3,76937 \cdot 10^{-3} C_4 = 0,259401 \\
& 2088270137 \text{ , } 77927 \text{ } C_1 - 3754623491 \text{ , } 23777 \text{ } C_2 \\
& + 7,37607 \cdot 10^{-3} + 2,02181 \cdot 10^{-3} C_4 = 0
\end{aligned}$$

Bu lineer denklem takımının çözümü sonucunda C katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3,8144138027 \cdot 10^{-13} \text{ E} - 13 \\
C_2 &= -8,2312497693 \cdot 10^{-12} \text{ E} - 12 \\
C_3 &= 1,6208477787 \cdot 10^{-11} \text{ E} + 1 \\
C_4 &= -7,4812289211 \cdot 10^{-10} \text{ E} + 1
\end{aligned}$$

Bu katsayılar yerlerine konulursa deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x}} (3,81441 \cdot 10^{-13} \psi_1^1(\xi) - 8,23125 \cdot 10^{-12} \psi_2^1(\xi) + 16,20848 \psi_3^1(\xi) - 74,81229 \psi_4^1(\xi)) - \frac{\gamma a^2}{Ea} \frac{x - x_0}{x} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -\frac{E\alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{ 3,81441 \cdot 10^{-13} [\xi^2 \psi_2^1(\xi) - 4\xi \psi_2(\xi) + 8\psi_1^1(\xi)] \\
& + 8,23125 \cdot 10^{-12} [\xi^2 \psi_1^1(\xi) - 4\xi \psi_1(\xi) - 8\psi_2^1(\xi)] \\
& + 16,20848 [\xi^2 \psi_4^1(\xi) - 4\xi \psi_4(\xi) + 8\psi_3^1(\xi)] \\
& + 74,81229 [\xi^2 \psi_3^1(\xi) - 4\xi \psi_3(\xi) - 8\psi_4^1(\xi)] \} \\
& - \frac{\gamma \alpha^2 \alpha^2 x_0}{6(1-\nu^2)}
\end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
Q_x = & \frac{E \alpha^3 \rho^2}{24(1-\nu)} \sqrt{x} \{ 3,81441 \cdot 10^{-13} [\xi \psi_1(\xi) + 2 \psi_2^1(\xi)] \\
& - 8,23125 \cdot 10^{-12} [\xi \psi_2(\xi) - 2 \psi_1^1(\xi)] \\
& + 16,20848 [\xi \psi_3(\xi) + 2 \psi_4^1(\xi)] \\
& - 74,81229 [\xi \psi_4(\xi) - 2 \psi_3^1(\xi)] \}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

(3.59), (3.60) ve (3.61) denklemleri kullanılarak 0,2 m aralıklarla elde edilen deformasyon, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Ek A'daki Tablo A.13, Tablo A.14 ve Tablo A.15' de gösterilmiştir.

3.5.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözüm

Kesin çözümde de anlatıldığı gibi değişken duvar kalınlıklı silindirik tank probleminin çözümü için (2.11) diferansiyel denkleminin kullanılması gerekir.

$$\frac{d^2}{dx^2} (D \frac{d^2 \omega}{dx^2}) + \frac{Eh}{\alpha^2} \omega = Z$$

Bu diferansiyel denklemin, oluşturulacak bir sonlu fark ağında herhangi bir i noktasında sonlu farklar yöntemiyle yazılmış şekli aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{i-1} \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_{i-1} - 2 D_i \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_i + D_{i+1} \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{Eh_i}{\alpha^2} \omega_i = Z_i \\
& \frac{D_{i-1} (\frac{\omega_{i-2} - 2\omega_{i-1} + \omega_i}{(\Delta x)^2}) - 2 D_i (\frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2}) + D_{i+1} (\frac{\omega_i - 2\omega_{i+1} + \omega_{i+2}}{(\Delta x)^2})}{(\Delta x)^2} + \frac{Eh_i}{\alpha^2} \omega_i = Z_i \\
& (\frac{D_{i-1}}{(\Delta x)^4}) \omega_{i-2} - 2 (\frac{D_{i-1} + D_i}{(\Delta x)^4}) \omega_{i-1} + (\frac{D_{i-1} + 4D_i + D_{i+1}}{(\Delta x)^4} + \frac{Eh_i}{\alpha^2}) \omega_i \\
& - 2 (\frac{D_i + D_{i+1}}{(\Delta x)^4}) \omega_{i+1} + (\frac{D_{i+1}}{(\Delta x)^4}) \omega_{i+2} = Z_i
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Kabuk kalınlığı x 'in ve α 'nın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$h(x) = \alpha \cdot x \tag{3.63}$$

Tablo 3.5 (Denklemlerde kullanılacak katsayılar)

x_i	h_i	D_i	A	B	C	D	E	Zi
11,40								
11,20	0,390954	147832,03						
11,00	0,383972	140053,04	92395018,35	-359856331,08	525810231,20	-340756085,40	82844895,51	-58,86
10,80	0,376991	132551,83	87533147,19	-340756085,40	497669605,65	-322344004,14	78327106,56	-56,90
10,60	0,370010	125323,37	82844895,51	-322344004,14	470551756,59	-304607460,44	73976623,65	-54,94
10,40	0,363028	118362,60	78327106,56	-304607460,44	444437743,71	-287533827,43	69790290,06	-52,97
10,20	0,356047	111664,46	73976623,65	-287533827,43	419308626,71	-271110478,23	65764949,06	-51,01
10,00	0,349066	105223,92	69790290,06	-271110478,23	395145465,28	-255324785,98	61897443,93	-49,05
9,80	0,342085	99035,91	65764949,06	-255324785,98	371929319,12	-240164123,80	58184617,97	-47,09
9,60	0,335103	93095,39	61897443,93	-240164123,80	349641247,92	-225615864,83	54623314,45	-45,13
9,40	0,328122	87397,30	58184617,97	-225615864,83	328262311,37	-211667382,19	51210376,65	-43,16
9,20	0,321141	81936,60	54623314,45	-211667382,19	307773569,17	-198306049,02	47942647,86	-41,20
9,00	0,314159	76708,24	51210376,65	-198306049,02	288156081,02	-185519238,45	44816971,36	-39,24
8,80	0,307178	71707,15	47942647,86	-185519238,45	269390906,61	-173294323,60	41830190,44	-37,28
8,60	0,300197	66928,30	44816971,36	-173294323,60	251459105,63	-161618677,60	38979148,37	-35,32
8,40	0,293215	62366,64	41830190,44	-161618677,60	234341737,79	-150479673,59	36260688,43	-33,35
8,20	0,286234	58017,10	38979148,37	-150479673,59	218019862,76	-139864684,70	33671653,92	-31,39
8,00	0,279253	53874,65	36260688,43	-139864684,70	202474540,26	-129761084,04	31208888,10	-29,43
7,80	0,272271	49934,22	33671653,92	-129761084,04	187686829,97	-120156244,76	28869234,28	-27,47
7,60	0,265290	46190,77	31208888,10	-120156244,76	173637791,58	-111037539,99	26649535,72	-25,51
7,40	0,258309	42639,26	28869234,28	-111037539,99	160308484,80	-102392342,84	24546635,71	-23,54
7,20	0,251327	39274,62	26649535,72	-102392342,84	147679969,31	-94208026,46	22557377,53	-21,58
7,00	0,244346	36091,80	24546635,71	-94208026,46	135733304,82	-86471963,98	20678604,46	-19,62
6,80	0,237365	33085,77	22557377,53	-86471963,98	124449551,01	-79171528,51	18907159,79	-17,66
6,60	0,230383	30251,46	20678604,46	-79171528,51	113809767,59	-72294093,20	17239886,81	-15,70
6,40	0,223402	27583,82	18907159,79	-72294093,20	103795014,24	-65827031,17	15673628,78	-13,73
6,20	0,216421	25077,81	17239886,81	-65827031,17	94386350,66	-59757715,55	14205229,00	-11,77
6,00	0,209440	22728,37	15673628,78	-59757715,55	85564836,54	-54073519,47	12831530,74	-9,81
5,80	0,202458	20530,45	14205229,00	-54073519,47	77311531,59	-48761816,07	11549377,29	-7,85
5,60	0,195477	18479,00	12831530,74	-48761816,07	69607495,49	-43809978,46	10355611,94	-5,89
5,40	0,188496	16568,98	11549377,29	-43809978,46	62433787,94	-39205379,79	9247077,96	-3,92
5,20	0,181514	14795,32	10355611,94	-39205379,79	55771468,63	-34935393,18	8220618,63	-1,96
5,00	0,174533	13152,99	9247077,96	-34935393,18	49601597,27	-30987391,76	7273077,25	0,00
4,80	0,167552	11636,92						

Tank tabanı ankastre bağlıdır. Buradaki eğim ve deformasyon sıfır olacağından sınır koşulları aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\omega \Big|_{x=11} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.66a)$$

$$\frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=11} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.66b)$$

Tankın üst ucu boş uçtur. Buradaki eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Big|_{x=5} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{29} - 2\omega_{30} + \omega_{31}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{29} - 2\omega_{30} + \omega_{31} = 0 \quad (3.67a)$$

$$-D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\Big|_{x=5} = 0 \Rightarrow \frac{-\omega_{28} + 2\omega_{29} - 2\omega_{31} + \omega_{32}}{2(\Delta x)^3} = 0 \quad (3.67b)$$

$$\Rightarrow -\omega_{28} + 2\omega_{29} - 2\omega_{31} + \omega_{32} = 0$$

(3.62) denklemi ω_0 noktasından ω_{30} noktasına kadar yazılacak olunursa $\omega_{-2}, \dots, \omega_{32}$ olmak üzere 35 bilinmeyenli 31 denklem elde edilir. (3.66a), (3.66b), (3.67a) ve (3.67b) denklemleriyle ifade ettiğimiz sınır şartlarını da ekleyecek olursak 35 bilinmeyenli 35 denklem elde ederiz. Şu ana kadar elde ettiğimiz tüm denklemleri aşağıda gösterildiği gibi düzenli bir şekilde yazacak olursak

$$\omega_{-2} = \frac{1}{92395018,3} (-58,86 + 359856331,1\omega_{-1} + 340756085,4\omega_1 - 82844895,5\omega_2)$$

$$\omega_{-1} = \omega_1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{C} (Z_i - A\omega_{-2} - B\omega_{-1} - D\omega_1 - E\omega_2)$$

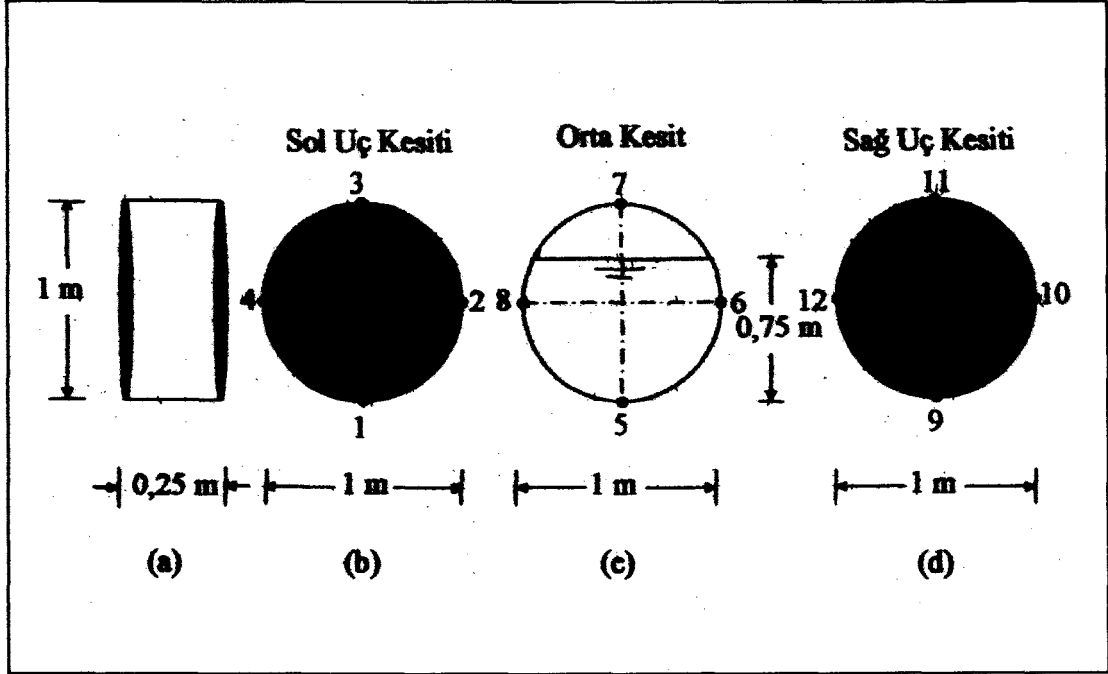
$$\omega_{31} = -\omega_{29} + 2\omega_{30}$$

$$\omega_{32} = \omega_{28} - 2\omega_{29} + 2\omega_{31}$$

Excel programında iterasyonla çözebilmek için 35 bilinmeyenli 35 denklem hazır olur. Bu denklem sistemini çözmek için Excel'de hücrelere formüller yukarıda verilen şekilde girilecektir. Excel'e girilen formüller sonucunda, Excel yeter derecede iterasyon yaparak 35 bilinmeyen değerini hesaplamaktadır. Hesaplanan bu değerler EkA'daki Tablo A.13, Tablo A.14 ve Tablo A.15'de kesin değerlerle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

3.6. Kenarları Destekli Silindirik Kabuk

3.6.1 Tam Kapasite Dolu Olmayan Kenarları Destekli Silindirik Kabuk



Şekil 3.13 (Kenarları destekli silindirik kabuk)

Silindirik kabuğun Şekil 3.13 a'da görüldüğü gibi iki ucu da kapalı ve Şekil 3.13 c'de görüldüğü gibi tabandan 0,75 m yüksekliğine kadar su ile doludur. Kabuk boyu $\lambda = 0,25$ m, kabuk kalınlığı $h = 0,07$ m, silindir yarıçapı $a = 0,5$ m'dir. Kabuk malzemesi çelik kabul edilerek elastisite modülü $E = 2 \times 10^2$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,3$ olarak alınmıştır. Bu değerler kullanılarak kabuğun orta ve uç kesitlerindeki deplasman değerleri $\Delta x = 0,125$ m, $\Delta \phi = \pi / 2$ radyan için kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemiyle elde edilmiştir.

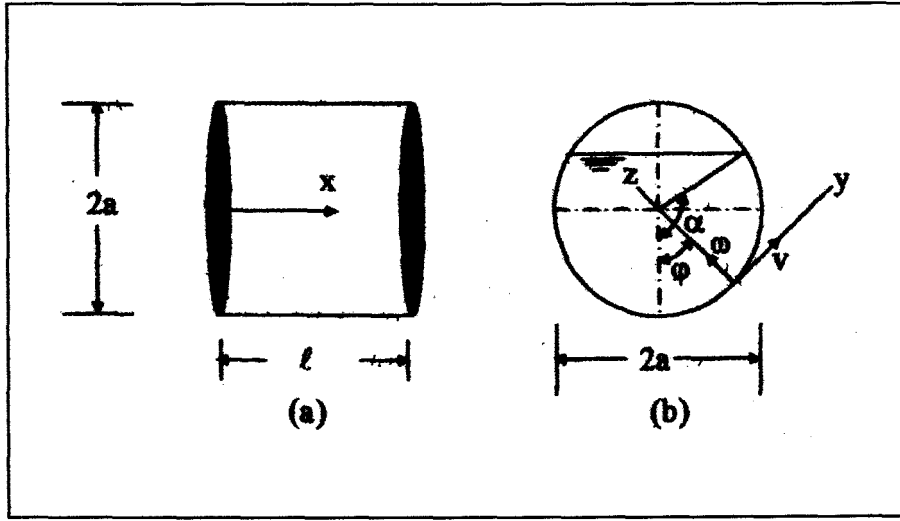
3.6.1.1 Çözüm

Bu problemde daha önceki problemlerdeki gibi silindir eksenine göre simetrik yükleme durumu olmadığı için kesin çözüm yapılırken (2.72) diferansiyel denklem takımının aşağıda gösterilen basitleştirilmiş formu kullanılmalıdır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{v}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \alpha \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.68)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\alpha \partial \varphi} - \frac{\omega}{\alpha} - \frac{h^2}{12} \left(\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{\alpha} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\alpha^3 \partial \varphi^4} \right) = - \frac{\alpha q (1-v^2)}{Eh}$$



Şekil 3.14 (Kabuk içindeki sıvı basıncının değişimi ve pozitif eksen yönleri)

Şekil 3.14 b'den görülebileceği gibi kabuk üzerindeki herhangi bir noktadaki sıvı basıncı aşağıdaki formüllerle ifade edilebilir.

$$\varphi < \alpha \text{ için } q = -\gamma a (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (3.69a)$$

$$\varphi > \alpha \text{ için } q = 0 \quad (3.69b)$$

Burada α su seviyesini gösteren açıdır ve değeri kabuğu en alt noktasından başlayarak saatin ters yönünde ilerleyerek su seviyesiyle kabuğun kesiştiği noktaya gelindiğinde ölçülerek bulunacaktır, φ ise su basıncının ölçüleceği noktayı gösteren açıdır ve değeri kabuğun en alt noktasından başlayarak saatin ters yönünde ilerleyip su basıncının hesaplanacağı noktaya gelindiğinde ölçülerek bulunacaktır. Yine Şekil 3.14'den görülebileceği gibi (3.68) diferansiyel denklem takımındaki u , v ve ω bilinmeyenleri deformasyonun sırasıyla x , y ve z eksenlerindeki bileşenleridir. Silindirik koordinatlarda çalışıldığından x eksenini doğrultusu sabit olmasına karşın y ve z eksenleri deformasyonun hesaplanacağı noktaya göre Şekil 3.14 b'deki gibi

değişmektedir. (3.68) diferansiyel denklem takımı, u , v ve ω bilinmeyenleri sınır koşullarını sağlayacak şekilde seri şeklinde ifade edilerek çözülebilir. Bununla beraber (3.68) diferansiyel denklem takımının son denklemi incelendiğinde denklem takımının çözülebilmesi için sıvı basıncım gösteren q teriminin de (3.69a) ve (3.69b) ifadelerini sağlayacak şekilde seriye açılması gerektiği görülür. Kabuğun uçları kapalı olduğundan buradaki v ve ω değerleri sıfır olacaktır. Kabuk x eksenine doğrultusundaki en büyük uzamasını ise uçlarda yapacaktır. Orta kesit düşünüldüğünde ise v ve ω 'nin en büyük değerlerini alacağı, u 'nun ise burada sıfır olacağı söylenebilir. Tüm bunlar dikkate alınarak u , v , ω ve q 'nin seri şeklinde ifadeleri aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$u = \sum \sum A_m \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{\lambda} \quad (3.70)$$

$$v = \sum \sum B_m \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \quad (3.71)$$

$$\omega = \sum \sum C_m \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \quad (3.72)$$

$$p = -\sum \sum p_m \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \quad (3.73a)$$

$$p_m = \frac{8\gamma\alpha}{mn\pi^2(n^2 - 1)}(\cos \alpha \sin n\alpha - n \cos n\alpha \sin \alpha) \quad (3.73b)$$

$$m=1,3,5,\dots \quad n=2,3,4,\dots$$

$$p_{m0} = \frac{4\gamma\alpha}{m\pi^2}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \quad (3.73c)$$

$$p_{m1} = \frac{2\gamma\alpha}{m\pi^2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

(3.70), (3.71) ve (3.72) ifadelerinin (3.68) diferansiyel denklem takımında kullanılacak türevleri aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sum \sum \frac{m\pi}{l} A_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 A_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\sum \sum n^2 A_{mn} \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} = \sum \sum \frac{mn\pi}{l} A_{mn} \sin \varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \sum \sum n B_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} = \sum \sum \frac{mn\pi}{l} B_{mn} \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\sum \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 B_{mn} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = -\sum \sum n^2 B_{mn} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \sum \sum \frac{m\pi}{l} C_{mn} \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = -\sum \sum n C_{mn} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = \sum \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 C_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \varphi^4} = \sum \sum n^4 C_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \varphi^2} = \sum \sum \left(\frac{mn\pi}{l}\right)^2 C_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}$$

Tüm bu ifadeler (3.68) diferansiyel denklem takımında yerlerine konulup eşitliklerin sağ ve sol taraflarındaki katsayılar eşitlenip, $\lambda = l/a$ ve $\eta = h/2l$ dönüşümleri yapılsa ağıdaki üç denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& [2m^2\pi^2 + (1-\nu)\lambda^2n^2]A_{mn} - (1+\nu)\lambda mn\pi B_{mn} + 2\nu\lambda m\pi C_{mn} = 0 \\
& (1+\nu)\lambda mn\pi A_{mn} - [(1-\nu)m^2\pi^2 + 2\lambda^2n^2]B_{mn} + 2\lambda^2nC_{mn} = 0 \\
& 3\nu\lambda m\pi A_{mn} - 3\lambda^2nB_{mn} + [3\lambda^2 + \eta^2(m^2\pi^2 + \lambda^2n^2)]C_{mn} = -\frac{l^2h^2}{4D}p_{mn}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

(3.74) denklem takımı kullanılarak her bir m ve n değeri için A_{mn} , B_{mn} ve C_{mn} katsayıları p_{mn} 'ye bağlı olarak bulunabilir. Burada p_{mn} yerine $n = 0$ ve $n = 1$ için (3.73c) eşitliklerinin $n = 2, 3, 4, \dots$ için ise (3.73b) eşitliğinin kullanılması gerekmektedir. Problemde 0,75 m su seviyesi için $\alpha = 2\pi/3$ radyandır. Bu katsayıları ve sonuçları hesaplamak için Matlab ortamında bir program yazılmış ve sonuçlar alınan çeşitli terim sayıları için aşağıda verilmiştir. (Yazılan program EkB Program B.1'de verilmiştir.)

Tablo 3.6 (9 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5 n = 0, 1, 2					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10^{-10} m)	v (10^{-10} m)	w (10^{-10} m)
0,000	0	1	1,911648	0	0
0,000	$\pi/2$	2	0,760244	0	0
0,000	π	3	-0,009702	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	0,760244	0	0
0,125	0	5	0	0	-44,349061
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,290697	-14,168972
0,125	π	7	0	0	1,513386
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,290697	-14,168972
0,250	0	9	-1,911648	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-0,760244	0	0
0,250	π	11	0,009702	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-0,760244	0	0

Tablo 3.7 (56 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5.....13 n = 0, 1, 2.....7					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10^{-10} m)	v (10^{-10} m)	w (10^{-10} m)
0,000	0	1	1,896835	0	0
0,000	$\pi/2$	2	0,753681	0	0
0,000	π	3	0,009747	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	0,753681	0	0
0,125	0	5	0	0	-43,101576
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,513550	-14,586431
0,125	π	7	0	0	0,093429
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,513550	-14,586431
0,250	0	9	-1,896835	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-0,753681	0	0
0,250	π	11	-0,009747	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-0,753681	0	0

Tablo 3.8 (273 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

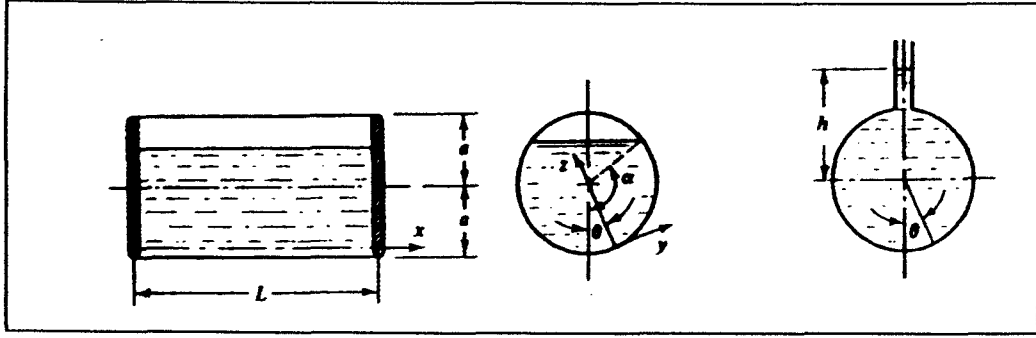
m = 1, 3, 5.....25 n = 0, 1, 2.....20					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	1,896575	0	0
0,000	$\pi/2$	2	0,753227	0	0
0,000	π	3	0,008097	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	0,753227	0	0
0,125	0	5	0	0	-43,109975
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,510238	-14,599666
0,125	π	7	0	0	0,040866
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,510238	-14,599666
0,250	0	9	-1,896575	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-0,753227	0	0
0,250	π	11	-0,008097	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-0,753227	0	0

Tablo 3.9 (738 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5.....35 n = 0, 1, 2.....40					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	1,896578	0	0
0,000	$\pi/2$	2	0,753230	0	0
0,000	π	3	0,008093	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	0,753230	0	0
0,125	0	5	0	0	-43,109791
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,510224	-14,599427
0,125	π	7	0	0	0,040639
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,510224	-14,599427
0,250	0	9	-1,896578	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-0,753230	0	0
0,250	π	11	-0,008093	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-0,753230	0	0

Yukandaki tablolarda da görüldüğü gibi deplasman değerleri u, v ve w, seriye açılarak, 9, 56, 273 ve 738 adet terim alınarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında serilerin yakınsadığı görülmektedir.

3.6.2 Tam Kapasite Dolu Olan Kenarları Destekli Silindirik Kabuk



Şekil 3.15 (Tam kapasite dolu kenarları destekli silindirik kabuk)

3.6.2.1 Çözüm

3.6.1 örneğinde ele alınan kenarları destekli silindirik tank $\alpha = \pi$ olacak şekilde, yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi tam kapasite dolu olduğu durumda h ile ifade edilen bir basınç söz konusudur. Bu durumda 3.6.1 örneğinde verilen deplasmanların seri formları aynı kalacak sadece yük ifadesi değişecektir. Bu durumda yük ifadesi

$$p = -\gamma(h + a \cos \theta)$$

seri açılımında yer alacak olan sabitler ise

$$p_{m0} = 0$$

$$p_{m0} = \frac{4\gamma h}{m\pi}$$

$$p_{m1} = \frac{4\gamma a}{m\pi}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

şeklinde olacaktır. 3.6.1 örneğindeki gibi bu problem için de Matlab ortamında bir program yazılmış ve sonuçlar alınan değişik terim sayılan için aşağıda verilmiştir. (Yazılan program EkB'de Program B.2'de verilmiştir.)

Tablo 3.10 (9 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5 n = 0, 1, 2					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	2,599074	0	0
0,000	$\pi/2$	2	1,404945	0	0
0,000	π	3	0,210816	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	1,404945	0	0
0,125	0	5	0	0	-57,721255
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,604349	-29,217520
0,125	π	7	0	0	-0,713785
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,604349	-29,217520
0,250	0	9	-2,599074	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-1,404945	0	0
0,250	π	11	-0,210816	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-1,404945	0	0

Tablo 3.11 (56 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5.....13 n = 0, 1, 2.....7					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	2,599117	0	0
0,000	$\pi/2$	2	1,404967	0	0
0,000	π	3	0,210816	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	1,404967	0	0
0,125	0	5	0	0	-57,717584
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,604347	-29,215683
0,125	π	7	0	0	-0,713783
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,604347	-29,215683
0,250	0	9	-2,599117	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-1,404967	0	0
0,250	π	11	-0,210816	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-1,404967	0	0

Tablo 3.12 (273 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5.....25 n = 0, 1, 2.....20					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	2,599118	0	0
0,000	$\pi/2$	2	1,404967	0	0
0,000	π	3	0,210816	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	1,404967	0	0
0,125	0	5	0	0	-57,717518
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,604347	-29,215651
0,125	π	7	0	0	-0,713783
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,604347	-29,215683
0,250	0	9	-2,599118	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-1,404967	0	0
0,250	π	11	-0,210816	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-1,404967	0	0

Tablo 3.13 (738 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5.....35 n = 0, 1, 2.....40					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	2,599118	0	0
0,000	$\pi/2$	2	1,404967	0	0
0,000	π	3	0,210816	0	0
0,000	$3\pi/2$	4	1,404967	0	0
0,125	0	5	0	0	-57,717514
0,125	$\pi/2$	6	0	-1,604347	-29,215649
0,125	π	7	0	0	-0,713783
0,125	$3\pi/2$	8	0	1,604347	-29,215683
0,250	0	9	-2,599118	0	0
0,250	$\pi/2$	10	-1,404967	0	0
0,250	π	11	-0,210816	0	0
0,250	$3\pi/2$	12	-1,404967	0	0

Yukandaki tablolarda da görüldüğü gibi deplasman değerleri u, v ve w, seriye açılarak, 9, 56, 273 ve 738 adet terim alınarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında serilerin yakınsadığı görülmektedir.

3.7 Silindirik Kabuk Parçası

3.7.1 Yüzeyine Dik Uniform Yayılı Yüklü Silindirik Kabuk Parçası

Silindirik kabuk parçası yüzeyine dik $p_0 = 10$ kN şiddetinde uniform yayılı yük ile yüklenmiştir. Kabuk boyu $\ell = 1$ m, kabuk kalınlığı $h = 0,07$ m, silindir yarıçapı $a = 0,5$ m. ve kabuk merkez açısı $\alpha = \pi/6$ 'dır. Kabuk malzemesi çelik kabul edilerek elastisite modülü $E = 2 \times 10^2$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,3$ olarak alınmıştır. Bu değerler kullanılarak kabuğun orta ve uç kesitlerindeki deplasman değerleri $\Delta x = 0,5$ m, $\Delta \varphi = \pi/12$ radyan için elde edilmiştir.

3.7.1.1 Çözüm

Bu problemde daha önceki problemlerdeki gibi silindir eksenine göre simetrik yükleme durumu olmadığı için kesin çözüm yapılırken (2.72) diferansiyel denklem takımının aşağıda gösterilen basitleştirilmiş formu kullanılmalıdır.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{v}{a} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \\
& \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 \\
& v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{\omega}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \omega}{a^3 \partial \varphi^4} \right) = - \frac{aq(1-v^2)}{Eh}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

2.79 denklemleriyle verilen deplasman ifadeleri yukandaki diferansiyel denklem takımında yerine konmalıdır.

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{a} \cos \frac{m\pi x}{\lambda} \\
v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{n\pi\theta}{a} \sin \frac{m\pi x}{\lambda} \\
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{a} \sin \frac{m\pi x}{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Bununla beraber yük ifadesi de diferansiyel denklem takımında yerini alacaktır. Bu aşamada p_{mn} değeri hesaplanacak olunursa

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l} \\
p_{mn} &= \frac{16 p_0}{\pi^2 mn} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

ifadesi elde edilir. Bütün bu elde edilen terimler (3.75) diferansiyel denklem takımında yerine konulursa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_{mn} \left[\left(\frac{am}{l} \right)^2 + \frac{(1-v)n^2}{2\alpha^2} \right] + B_{mn} \pi \frac{(1+v)amn}{2\alpha l} + C_{mn} \frac{vam}{l} &= 0 \\
A_{mn} \pi \frac{(1+v)amn}{2\alpha l} + B_{mn} \pi \left[\frac{(1-v)a^2 m^2}{2l^2} + \frac{n^2}{\alpha^2} \right] + C_{mn} \frac{n}{\alpha} &= 0 \\
A_{mn} v\pi \frac{am}{l} + B_{mn} \frac{n\pi}{\alpha} + C_{mn} \left[1 + \frac{\pi^4 h^2}{12 a^2} \left(\frac{a^2 m^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2} \right)^2 \right] &= p_{mn} \frac{a^2 (1-v^2)}{Eh}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

(3.78) denklem takımı kullanılarak her bir m ve n değer çifti için A_{mn} , B_{mn} ve C_{mn} katsayıları p_{mn} 'ye bağlı olarak bulunabilir. Burada p_{mn} yerine (3.77) eşitliğinin kullanılması gerekmektedir. Bu katsayıları ve sonuçları hesaplamak için Matlab ortamında bir program yazılmış ve sonuçlar alınan çeşitli terim sayıları için aşağıda verilmiştir. (Yazılan program EkB'de Program B.3'de verilmiştir.)

Tablo 3.14 (9 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5 n = 1, 3, 5					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	4,264495	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-154,228768	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	930,755710
0,500	$\pi/6$	6	0	154,228768	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-4,264498	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Tablo 3.15 (49 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3,...13 n = 1, 3,...13					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	4,239909	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-154,148748	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	929,790521
0,500	$\pi/6$	6	0	154,148748	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-4,239909	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Tablo 3.16 (169 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3,...25 n = 1, 3,...25					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	4,239250	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-154,148011	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	929,772298
0,500	$\pi/6$	6	0	154,148011	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-4,239250	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Tablo 3.17 (529 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3,...45 n = 1, 3,...45					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10⁻¹⁰ m)	v (10⁻¹⁰ m)	w (10⁻¹⁰ m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	π/12	2	4,239219	0	0
0,000	π/6	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-154,147993	0
0,500	π/12	5	0	0	929,771440
0,500	π/6	6	0	154,147993	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	π/12	8	-4,239219	0	0
1,000	π/6	9	0	0	0

Yukandaki tablolarda da görüldüğü gibi deplasman değerleri u, v ve w, seriye açılarak, 9, 49, 169 ve 529 adet terim alınarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında serilerin yakınsadığı görülmektedir.

3.7.2 Tam Ortasından Yüzeyine Dik Tekil Yükle Yüklü Silindirik Kabuk Parçası

Silindirik kabuk parçası $x = 0,5$ m. ve $\Delta\phi = \pi/12$ noktasında yüzeyine dik $p_0 = 10$ kN şiddetinde tekil yük ile yüklenmiştir. Kabuk boyu $\ell = 1$ m, kabuk kalınlığı $h = 0,07$ m, silindir yarıçapı $a = 0,5$ m. ve kabuk merkez açısı $\alpha = \pi/6$ 'dır. Kabuk malzemesi çelik kabul edilerek elastisite modülü $E = 2 \times 10^2$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,3$ olarak alınmıştır. Bu değerler kullanılarak kabuğun orta ve uç kesitlerindeki deplasman değerleri $\Delta x = 0,5$ m, $\Delta\phi = \pi/12$ radyan için elde edilmiştir.

3.7.2.1 Çözüm

Bu problem yükleme dışında tamamen 3.7.1 problemi ile aynıdır. Bu nedenle sadece yük ifadesi değişerek geri kalan işlemler aynen tekrar edilecektir. Yük ifadesi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} (\cos mx \cos nx)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$
(3.79)

(3.78) denklem takımı kullanılarak her bir m ve n değer çifti için A_{mn} , B_{mn} ve C_{mn} katsayıları p_{mn} 'ye bağlı olarak bulunabilir. Burada p_{mn} yerine (3.79) eşitliğinin kullanılması gerekmektedir. Bu katsayıları ve sonuçları hesaplamak için Matlab

ortamında bir program yazılmış ve sonuçlar alınan çeşitli terim sayıları için aşağıda verilmiştir. (Yazılan program EkB'de Program B.4'de verilmiştir.)

Tablo 3.18 (9 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, 5 n = 1, 3, 5					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10^{-10} m)	v (10^{-10} m)	w (10^{-10} m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	0,956325	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-37,705726	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	232,688928
0,500	$\pi/6$	6	0	39,408657	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-1,175923	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Tablo 3.19 (10000 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

m = 1, 3, ..., 100 n = 1, 3, ..., 100					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10^{-10} m)	v (10^{-10} m)	w (10^{-10} m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	0,961481	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-37,690065	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	232,442846
0,500	$\pi/6$	6	0	39,383931	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-1,158127	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Tablo 3.20 (160000 terim alınarak elde edilen sonuçlar)

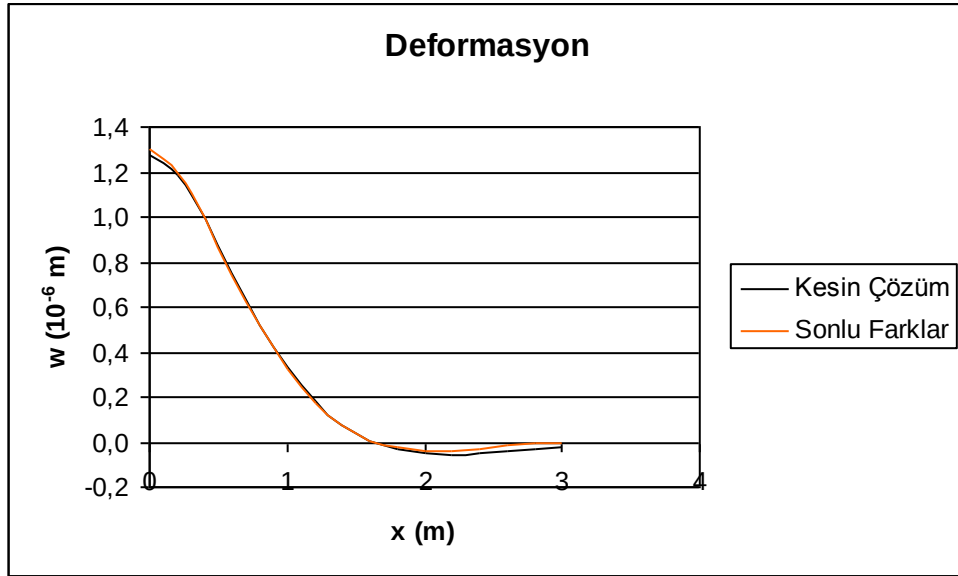
m = 1, 3, ..., 400 n = 1, 3, ..., 400					
x (m)	φ (rad)	Nokta No	u (10^{-10} m)	v (10^{-10} m)	w (10^{-10} m)
0,000	0	1	0	0	0
0,000	$\pi/12$	2	0,961481	0	0
0,000	$\pi/6$	3	0	0	0
0,500	0	4	0	-37,690065	0
0,500	$\pi/12$	5	0	0	232,442846
0,500	$\pi/6$	6	0	39,383931	0
1,000	0	7	0	0	0
1,000	$\pi/12$	8	-1,158127	0	0
1,000	$\pi/6$	9	0	0	0

Yukandaki tablolarda da görüldüğü gibi deplasman değerleri u , v ve ω , seriye açılarak, 9, 1000, ve 16000 adet terim alınarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında serilerin yakınsadığı görülmektedir.

EKA
TABLÖLAR

Tablo A.1 (Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması)

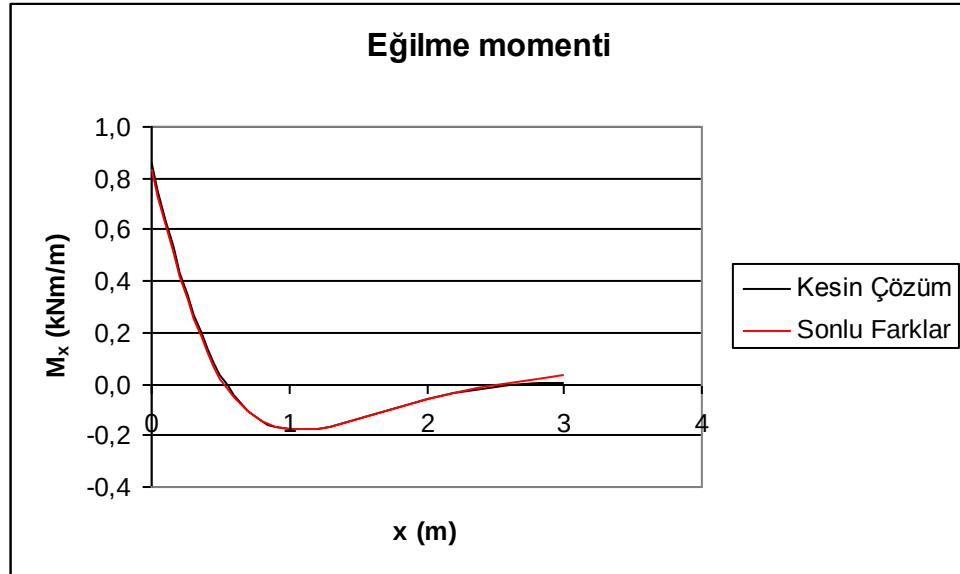
	ω (10^{-6} m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	1,279100	1,304425	1,98
0,20	1,190200	1,198316	0,68
0,40	0,989700	0,987576	0,21
0,60	0,752200	0,745344	0,91
0,80	0,524200	0,516360	1,50
1,00	0,330500	0,323935	1,99
1,20	0,180300	0,176534	2,09
1,40	0,073600	0,073309	0,40
1,60	0,004700	0,008333	77,30
1,80	-0,034400	-0,026424	23,19
2,00	-0,051900	-0,039236	24,40
2,20	-0,055100	-0,037614	31,74
2,40	-0,049900	-0,027943	44,00
2,60	-0,040600	-0,015525	61,76
2,80	-0,030300	-0,004859	83,96
3,00	-0,020700	0,000000	100,00



şekil A.1

Tablo A.2 (Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması)

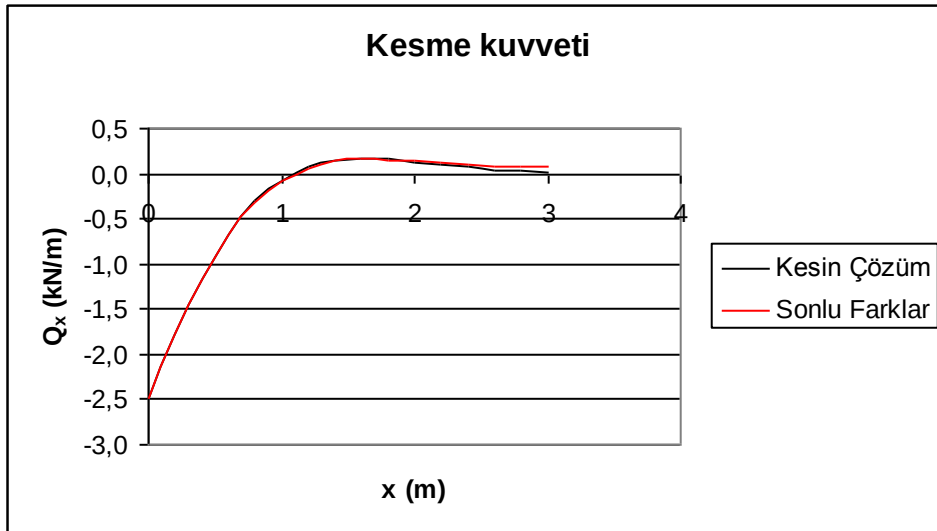
	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata(%)
0,00	0,858500	0,839858	2,17
0,20	0,430400	0,414071	3,79
0,40	0,136700	0,124634	8,83
0,60	-0,044600	-0,052429	17,55
0,80	-0,140300	-0,144683	3,12
1,00	-0,175900	-0,178183	1,30
1,20	-0,173500	-0,174823	0,76
1,40	-0,150200	-0,151376	0,78
1,60	-0,118100	-0,119587	1,26
1,80	-0,085200	-0,086851	1,94
2,00	-0,056100	-0,057121	1,82
2,20	-0,032700	-0,031855	2,58
2,40	-0,015500	-0,010870	29,87
2,60	-0,003900	0,006936	277,86
2,80	0,003100	0,022976	641,16
3,00	0,006600	0,038463	482,77



Şekil A.2

Tablo A.3 (Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması)

	Q_x (kN/m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata(%)
0,00	-2,500000	-2,500002	0,00
0,20	-1,789800	-1,788060	0,10
0,40	-1,166200	-1,166250	0,00
0,60	-0,670100	-0,673294	0,48
0,80	-0,308000	-0,314384	2,07
1,00	-0,066800	-0,075349	12,80
1,20	0,076500	0,067017	12,40
1,40	0,146800	0,138089	5,93
1,60	0,167400	0,161313	3,64
1,80	0,157800	0,156167	1,04
2,00	0,132400	0,137489	3,84
2,20	0,101400	0,115628	14,03
2,40	0,071200	0,096979	36,21
2,60	0,045400	0,084614	86,38
2,80	0,025200	0,078816	212,76
3,00	0,010700	0,077433	623,68

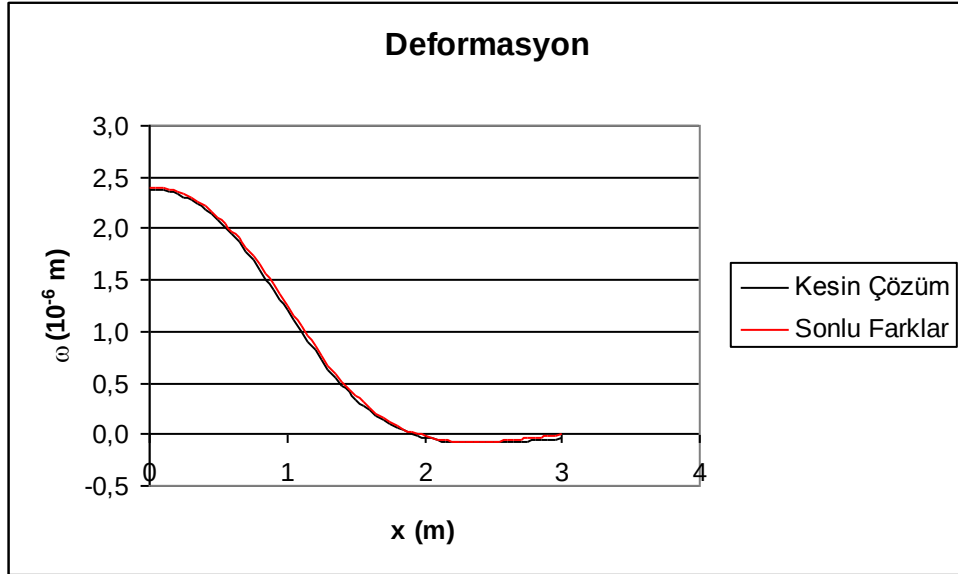


Şekil A.3

Tablo A.4 (Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması)

	ω (10^{-6} m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	2,3863	2,403307	-0,71
0,05	2,3832	2,400390	-0,72
0,10	2,3741	2,391636	-0,74
0,15	2,3587	2,377023	-0,78
0,20	2,3373	2,356525	-0,82
0,25	2,3096	2,330103	-0,89
0,30	2,2758	2,297718	-0,96
0,35	2,2357	2,259331	-1,06
0,40	2,1895	2,214912	-1,16
0,45	2,1370	2,164447	-1,28
0,50	2,0783	2,107947	-1,43
0,55	2,0135	2,045458	-1,59
0,60	1,9429	1,977071	-1,76
0,65	1,8664	1,902937	-1,96
0,70	1,7845	1,823279	-2,17
0,75	1,6976	1,738408	-2,40
0,80	1,6060	1,648736	-2,66
0,85	1,5105	1,554799	-2,93
0,90	1,4117	1,457267	-3,23
0,95	1,3107	1,356969	-3,53
1,00	1,2085	1,254910	-3,84
1,05	1,1064	1,152292	-4,15
1,10	1,0057	1,050533	-4,46
1,15	0,9075	0,950821	-4,77
1,20	0,8128	0,854133	-5,09
1,25	0,7221	0,761257	-5,42
1,30	0,6361	0,672811	-5,77
1,35	0,5551	0,589257	-6,15
1,40	0,4794	0,510928	-6,58
1,45	0,4093	0,438033	-7,02
1,50	0,3446	0,370684	-7,57
1,55	0,2855	0,308902	-8,20
1,60	0,2318	0,252637	-8,99
1,65	0,1834	0,201773	-10,02
1,70	0,1402	0,156148	-11,38
1,75	0,1018	0,115556	-13,51
1,80	0,0680	0,079762	-17,30
1,85	0,0386	0,048507	-25,67
1,90	0,0132	0,021516	-63,00
1,95	-0,0084	-0,001495	82,20
2,00	-0,0266	-0,020815	21,75
2,05	-0,0416	-0,036733	11,70
2,10	-0,0537	-0,049533	7,76
2,15	-0,0633	-0,059492	6,02
2,20	-0,0706	-0,066877	5,27

	ω (10^{-6} m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
2,25	-0,0758	-0,071943	5,09
2,30	-0,0792	-0,074932	5,39
2,35	-0,0811	-0,076072	6,20
2,40	-0,0816	-0,075575	7,38
2,45	-0,0810	-0,073638	9,09
2,50	-0,0794	-0,070443	11,28
2,55	-0,0770	-0,066157	14,08
2,60	-0,0740	-0,060935	17,66
2,65	-0,0705	-0,054916	22,11
2,70	-0,0667	-0,048227	27,70
2,75	-0,0625	-0,040987	34,42
2,80	-0,0582	-0,033301	42,78
2,85	-0,0538	-0,025270	53,03
2,90	-0,0494	-0,016985	65,62
2,95	-0,0450	-0,008533	81,04
3,00	-0,0407	0,000000	100,00

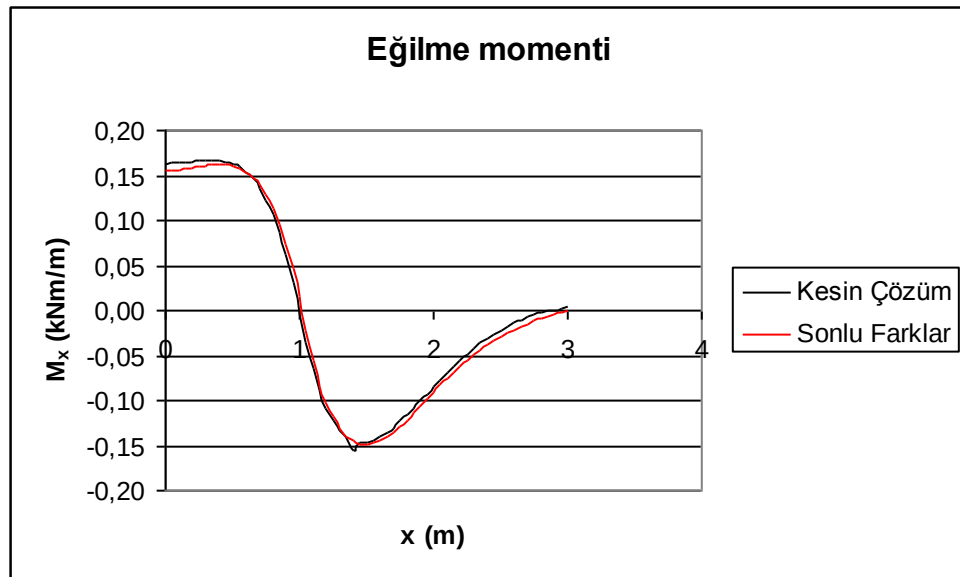


Şekil A.4

Tablo A.5 (Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması)

x (m)	M _x (kNm/m)		Hata (%)
	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	
0,00	0,1633	0,1558	4,59
0,05	0,1635	0,1560	4,59
0,10	0,1638	0,1565	4,46
0,15	0,1644	0,1573	4,32
0,20	0,1651	0,1583	4,12
0,25	0,1657	0,1593	3,86
0,30	0,1662	0,1604	3,49
0,35	0,1664	0,1612	3,12
0,40	0,1660	0,1615	2,71
0,45	0,1648	0,1613	2,12
0,50	0,1626	0,1600	1,60
0,55	0,1589	0,1576	0,82
0,60	0,1535	0,1536	-0,07
0,65	0,1460	0,1476	-1,10
0,70	0,1360	0,1393	-2,43
0,75	0,1230	0,1282	-4,23
0,80	0,1066	0,1140	-6,94
0,85	0,0863	0,0960	-11,24
0,90	0,0615	0,0739	-20,16
0,95	0,0318	0,0470	-47,80
1,00	-0,0034	0,0149	538,24
1,05	-0,0353	-0,0229	35,13
1,10	-0,0647	-0,0547	15,46
1,15	-0,0887	-0,0848	4,40
1,20	-0,1078	-0,1019	5,47
1,25	-0,1225	-0,1183	3,43
1,30	-0,1334	-0,1307	2,02
1,35	-0,1409	-0,1396	0,92
1,40	-0,1554	-0,1452	6,56
1,45	-0,1473	-0,1482	-0,61
1,50	-0,1469	-0,1488	-1,29
1,55	-0,1448	-0,1474	-1,80
1,60	-0,1410	-0,1443	-2,34
1,65	-0,1361	-0,1400	-2,87
1,70	-0,1301	-0,1345	-3,38
1,75	-0,1233	-0,1282	-3,97
1,80	-0,1160	-0,1213	-4,57
1,85	-0,1083	-0,1139	-5,17
1,90	-0,1004	-0,1063	-5,88
1,95	-0,0925	-0,0986	-6,59
2,00	-0,0845	-0,0909	-7,57
2,05	-0,0767	-0,0833	-8,60
2,10	-0,0691	-0,0759	-9,84
2,15	-0,0617	-0,0688	-11,51
2,20	-0,0548	-0,0620	-13,14

	M_x (kNm/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
2,25	-0,0481	-0,0555	-15,38
2,30	-0,0419	-0,0494	-17,90
2,35	-0,0361	-0,0437	-21,05
2,40	-0,0307	-0,0385	-25,41
2,45	-0,0258	-0,0336	-30,23
2,50	-0,0213	-0,0291	-36,62
2,55	-0,0172	-0,0250	-45,35
2,60	-0,0135	-0,0213	-57,78
2,65	-0,0102	-0,0179	-75,49
2,70	-0,0073	-0,0148	-102,74
2,75	-0,0047	-0,0119	-153,19
2,80	-0,0025	-0,0092	-268,00
2,85	-0,0006	-0,0068	-1033,33
2,90	0,0010	-0,0044	540,00
2,95	0,0024	-0,0022	191,67
3,00	0,0035	0,0000	100,00

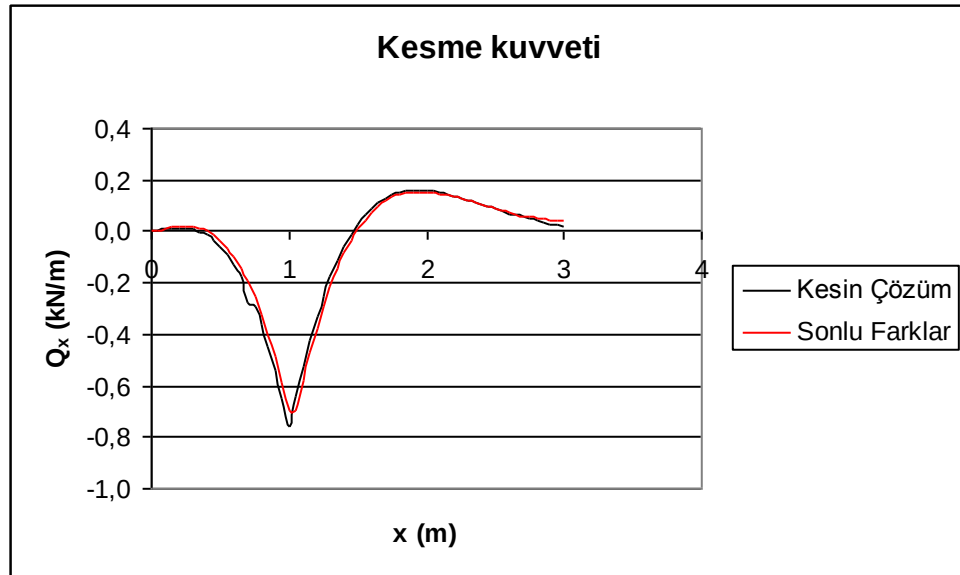


Şekil A.5

Tablo A.6 (Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması)

	Q _x (kN/m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	0,0000	0,0000	0,00
0,05	0,0051	0,0067	-31,37
0,10	0,0094	0,0128	-36,17
0,15	0,0125	0,0176	-40,80
0,20	0,0137	0,0205	-49,64
0,25	0,0122	0,0210	-72,13
0,30	0,0074	0,0183	-147,30
0,35	-0,0014	0,0118	942,86
0,40	-0,0147	0,0009	106,12
0,45	-0,0334	-0,0151	54,79
0,50	-0,0579	-0,0368	36,44
0,55	-0,0891	-0,0648	27,27
0,60	-0,1276	-0,0999	21,71
0,65	-0,1738	-0,1425	18,01
0,70	-0,2786	-0,1934	30,58
0,75	-0,2924	-0,2531	13,44
0,80	-0,3657	-0,3221	11,92
0,85	-0,4491	-0,4009	10,73
0,90	-0,5428	-0,4899	9,75
0,95	-0,6473	-0,5895	8,93
1,00	-0,7626	-0,7000	8,21
1,05	-0,6388	-0,6963	-9,00
1,10	-0,5259	-0,5786	-10,02
1,15	-0,4237	-0,4717	-11,33
1,20	-0,3317	-0,3752	-13,11
1,25	-0,2497	-0,2889	-15,70
1,30	-0,1771	-0,2123	-19,88
1,35	-0,1135	-0,1448	-27,58
1,40	-0,0582	-0,0860	-47,77
1,45	-0,0108	-0,0353	-226,85
1,50	0,0295	0,0079	73,22
1,55	0,0631	0,0442	29,95
1,60	0,0907	0,0742	18,19
1,65	0,1129	0,0985	12,75
1,70	0,1302	0,1176	9,68
1,75	0,1431	0,1321	7,69
1,80	0,1521	0,1426	6,25
1,85	0,1577	0,1494	5,26
1,90	0,1605	0,1532	4,55
1,95	0,1607	0,1542	4,04
2,00	0,1588	0,1531	3,59
2,05	0,1551	0,1500	3,29
2,10	0,1500	0,1454	3,07
2,15	0,1437	0,1395	2,92
2,20	0,1366	0,1328	2,78

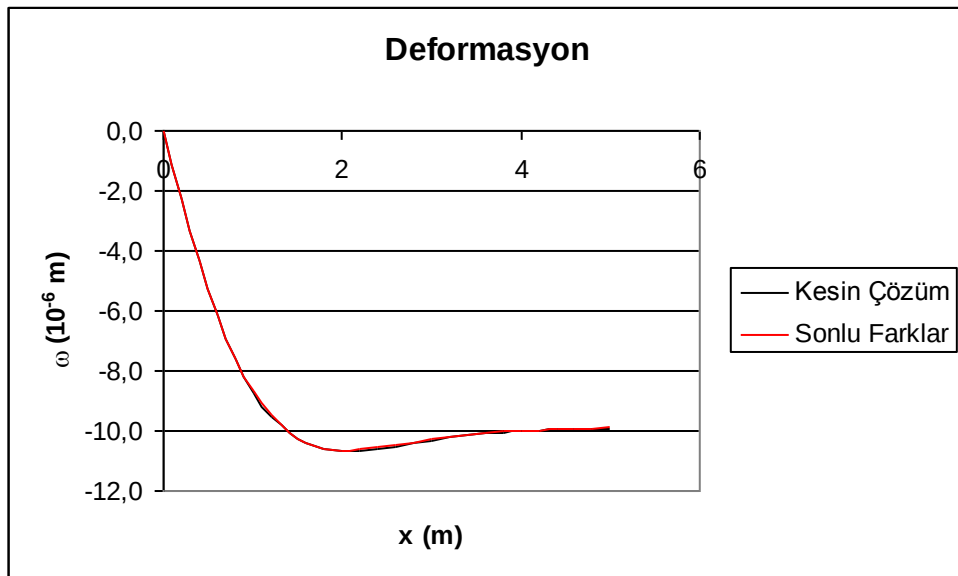
	Qx (kN/m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
2,25	0,1287	0,1254	2,56
2,30	0,1204	0,1175	2,41
2,35	0,1118	0,1095	2,06
2,40	0,1031	0,1014	1,65
2,45	0,0944	0,0934	1,06
2,50	0,0858	0,0857	0,12
2,55	0,0775	0,0784	-1,16
2,60	0,0694	0,0716	-3,17
2,65	-0,0617	0,0654	206,00
2,70	0,0543	0,0599	-10,31
2,75	0,0474	0,0551	-16,24
2,80	0,0410	0,0512	-24,88
2,85	0,0350	0,0480	-37,14
2,90	0,0295	0,0458	-55,25
2,95	0,0244	0,0444	-81,97
3,00	0,0198	0,0439	-121,72



Şekil A.6

Tablo A.7 (Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması)

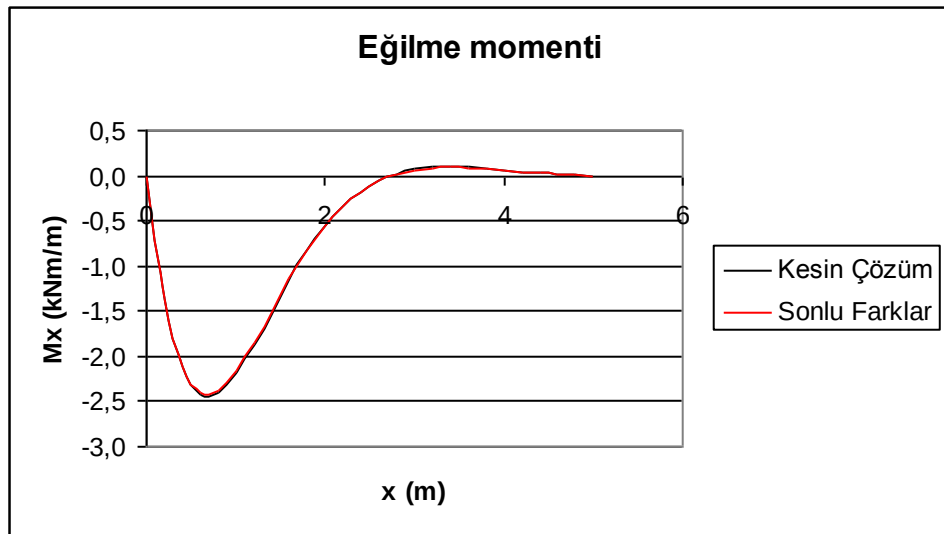
	ω (10^{-6} m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	0,0000	0,000000	0,00
0,20	-2,2633	-2,266411	-0,14
0,40	-4,3423	-4,342453	0,00
0,60	-6,1303	-6,124194	0,10
0,80	-7,5843	-7,570889	0,18
1,00	-8,7053	-8,685021	0,23
1,20	-9,5220	-9,496100	0,27
1,40	-10,0779	-10,048185	0,29
1,60	-10,4225	-10,390800	0,30
1,80	-10,6049	-10,572748	0,30
2,00	-10,6696	-10,638279	0,29
2,20	-10,6546	-10,625047	0,28
2,40	-10,5907	-10,563378	0,26
2,60	-10,5013	-10,476418	0,24
2,80	-10,4033	-10,380826	0,22
3,00	-10,3080	-10,287745	0,20
3,20	-10,2223	-10,203872	0,18
3,40	-10,1494	-10,132503	0,17
3,60	-10,0902	-10,074472	0,16
3,80	-10,0438	-10,028950	0,15
4,00	-10,0083	-9,994094	0,14
4,20	-9,9814	-9,967557	0,14
4,40	-9,9604	-9,946881	0,14
4,60	-9,9431	-9,929789	0,13
4,80	-9,9276	-9,914422	0,13
5,00	-9,9127	-9,899529	0,13



Şekil A.7

Tablo A.8 (Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması)

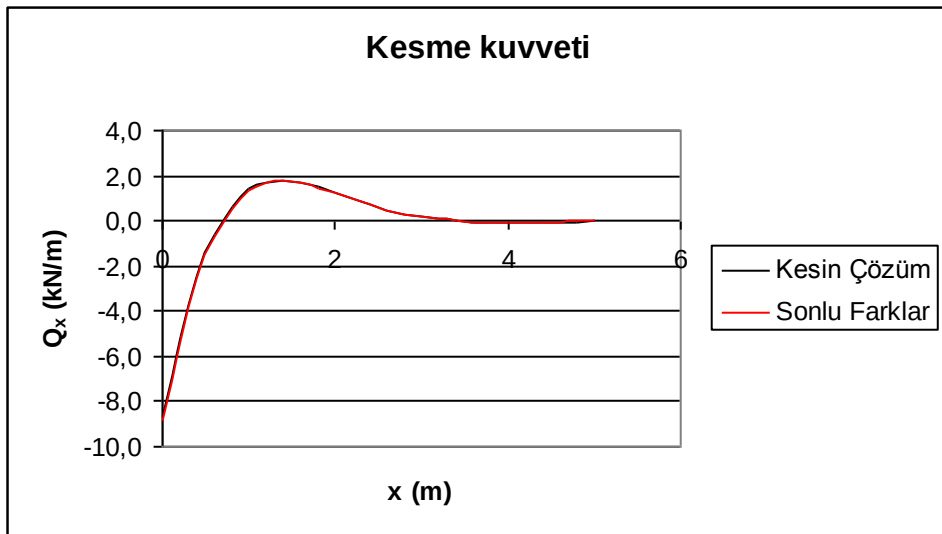
	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	0,0000	0,000000	0,00
0,20	-1,3700	-1,361955	0,59
0,40	-2,1198	-2,105513	0,67
0,60	-2,4151	-2,397024	0,75
0,80	-2,3985	-2,379257	0,80
1,00	-2,1864	-2,168131	0,84
1,20	-1,8687	-1,852920	0,84
1,40	-1,5110	-1,498615	0,82
1,60	-1,1581	-1,149453	0,75
1,80	-0,8380	-0,832887	0,61
2,00	-0,5654	-0,563496	0,34
2,20	-0,3459	-0,346532	-0,18
2,40	-0,1785	-0,180933	-1,36
2,60	-0,0581	-0,061759	-6,30
2,80	0,0222	0,017959	19,11
3,00	0,0702	0,065879	6,16
3,20	0,0935	0,089461	4,32
3,40	0,0989	0,095425	3,51
3,60	0,0923	0,089490	3,04
3,80	0,0784	0,076306	2,67
4,00	0,0610	0,059520	2,43
4,20	0,0427	0,041925	1,82
4,40	0,0260	0,025647	1,36
4,60	0,0124	0,012344	0,45
4,80	0,0033	0,003384	-2,55
5,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.8

Tablo A.9 (Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması)

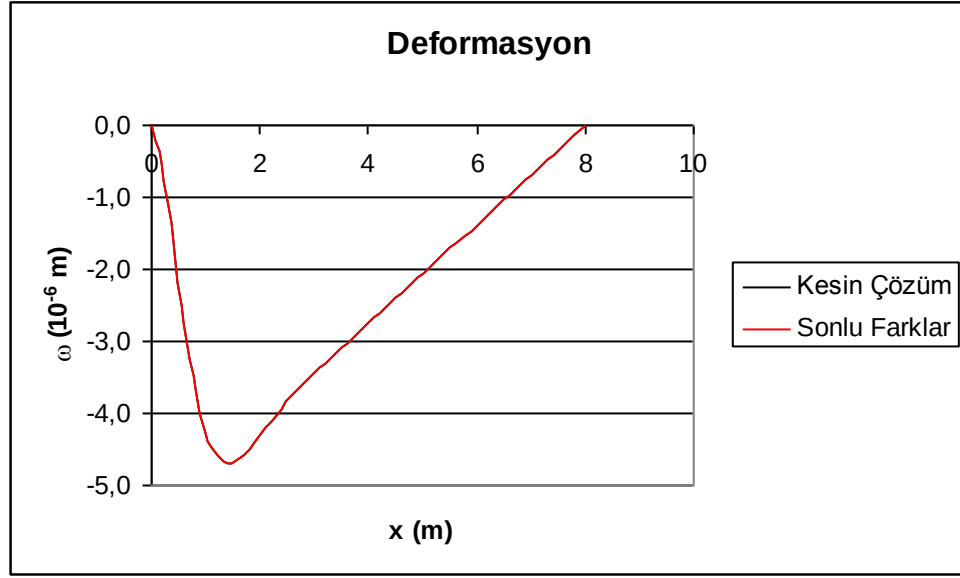
	Q_x (kN/m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	-8,6976	-8,809771	0,00
0,20	-5,1537	-5,263782	-2,14
0,40	-2,4832	-2,587674	-4,21
0,60	-0,5883	-0,684359	-16,33
0,80	0,6574	0,572234	12,96
1,00	1,3888	1,315841	5,25
1,20	1,7339	1,673789	3,47
1,40	1,8060	1,758668	2,62
1,60	1,6997	1,664320	2,08
1,80	1,4896	1,464892	1,66
2,00	1,2315	1,215888	1,27
2,20	0,9645	0,956408	0,84
2,40	0,7142	0,711932	0,32
2,60	0,4953	0,497229	-0,39
2,80	0,3143	0,319095	-1,53
3,00	0,1722	0,178757	-3,81
3,20	0,0666	0,073866	-10,91
3,40	-0,0073	0,000073	101,00
3,60	-0,0548	-0,047799	12,78
3,80	-0,0812	-0,074927	7,73
4,00	-0,0913	-0,085953	5,86
4,20	-0,0890	-0,084682	4,85
4,40	-0,0772	-0,073952	4,21
4,60	-0,0578	-0,055657	3,71
4,80	-0,0319	-0,030859	3,26
5,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.9

Tablo A.10 (Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması)

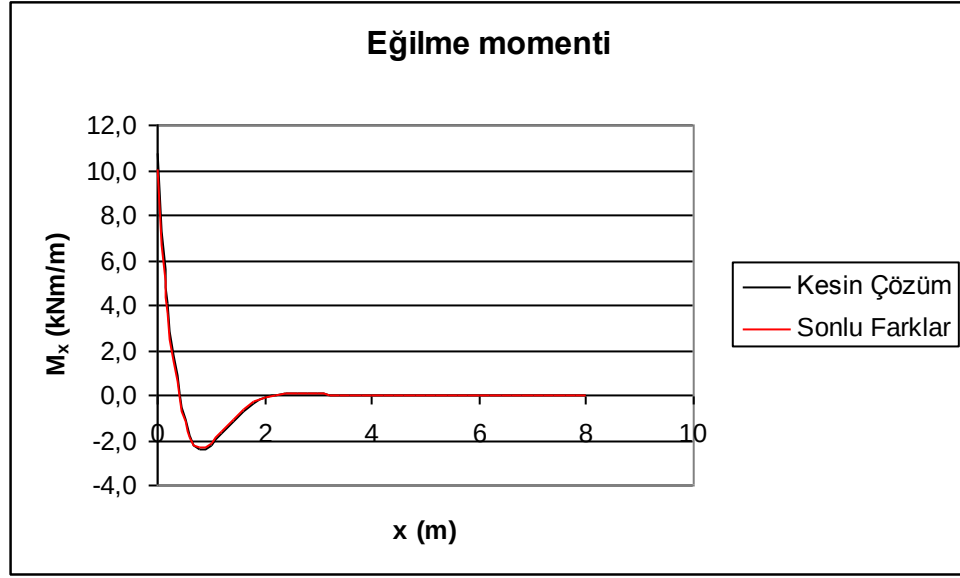
	ω (10^{-6} m)		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
0,00	0,0000	0,000000	0,00
0,20	-0,5361	-0,648968	-21,05
0,40	-1,6286	-1,766967	-8,50
0,60	-2,7595	-2,872736	-4,10
0,80	-3,6636	-3,740093	-2,09
1,00	-4,2689	-4,306263	-0,88
1,20	-4,5901	-4,597795	-0,17
1,40	-4,6892	-4,678671	0,22
1,60	-4,6375	-4,618679	0,41
1,80	-4,4975	-4,477302	0,45
2,00	-4,3156	-4,298007	0,41
2,20	-4,1220	-4,108521	0,33
2,40	-3,9333	-3,923915	0,24
2,60	-3,7565	-3,750430	0,16
2,80	-3,5928	-3,588949	0,11
3,00	-3,4402	-3,437645	0,07
3,20	-3,2957	-3,293747	0,06
3,40	-3,1564	-3,154553	0,06
3,60	-3,0199	-3,017902	0,07
3,80	-2,8845	-2,882290	0,08
4,00	-2,7492	-2,746810	0,09
4,20	-2,6135	-2,611007	0,10
4,40	-2,4772	-2,474725	0,10
4,60	-2,3404	-2,337979	0,10
4,80	-2,2032	-2,200864	0,11
5,00	-2,0657	-2,063493	0,11
5,20	-1,9280	-1,925969	0,11
5,40	-1,7903	-1,788368	0,11
5,60	-1,6525	-1,650741	0,11
5,80	-1,5147	-1,513118	0,10
6,00	-1,3769	-1,375511	0,10
6,20	-1,2392	-1,237923	0,10
6,40	-1,1015	-1,100353	0,10
6,60	-0,9638	-0,962797	0,10
6,80	-0,8261	-0,825248	0,10
7,00	-0,6884	-0,687705	0,10
7,20	-0,5507	-0,550164	0,10
7,40	-0,4130	-0,412624	0,09
7,60	-0,2754	-0,275084	0,11
7,80	-0,1377	-0,137544	0,11
8,00	0,0000	-0,000003	0,00



Şekil A.10

Tablo A.11 (Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması)

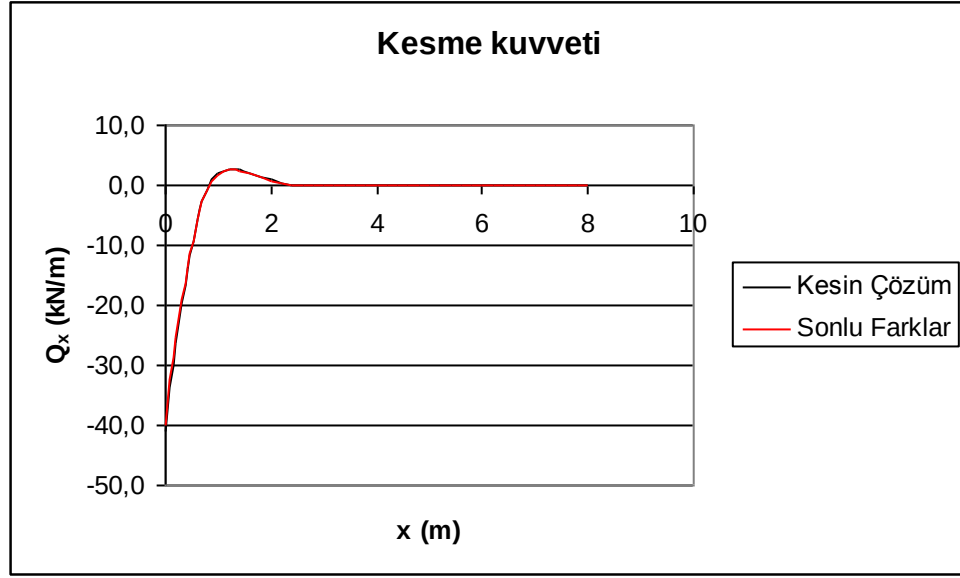
x (m)	M _x (kN.m/m)		Hata (%)
	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	
0,00	10,7730	10,034499	0,00
0,20	4,0736	3,626132	10,99
0,40	0,1020	-0,094547	192,68
0,60	-1,8181	-1,843196	-1,38
0,80	-2,3957	-2,328506	2,81
1,00	-2,2223	-2,123267	4,46
1,20	-1,7219	-1,628599	5,42
1,40	-1,1591	-1,089074	6,04
1,60	-0,6720	-0,629192	6,37
1,80	-0,3126	-0,293156	6,23
2,00	-0,0819	-0,078782	3,83
2,20	0,0439	0,037727	14,04
2,40	0,0959	0,085981	10,31
2,60	0,1027	0,092802	9,67
2,80	0,0867	0,078679	9,29
3,00	0,0628	0,057254	8,81
3,20	0,0395	0,036372	7,99
3,40	0,0210	0,019653	6,31
3,60	0,0082	0,008040	1,43
3,80	0,0005	0,001022	-109,39
4,00	-0,0033	-0,002501	23,62
4,20	-0,0045	-0,003705	16,92
4,40	-0,0042	-0,003584	14,46
4,60	-0,0033	-0,002856	12,77
4,80	-0,0022	-0,001976	11,02
5,00	-0,0013	-0,001188	8,53
5,20	-0,0006	-0,000592	3,59
5,40	-0,0002	-0,000199	-15,98
5,60	0,0001	0,000026	65,11
5,80	0,0002	0,000127	27,94
6,00	0,0002	0,000151	21,37
6,20	0,0002	0,000135	18,00
6,40	0,0001	0,000102	15,26
6,60	0,0001	0,000067	12,00
6,80	0,0000	0,000038	6,29
7,00	0,0000	0,000018	-10,45
7,20	0,0000	0,000006	-288,98
7,40	0,0000	0,000000	99,82
7,60	0,0000	-0,000002	81,56
7,80	0,0000	-0,000001	89,06
8,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.11

Tablo A.12 (Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması)

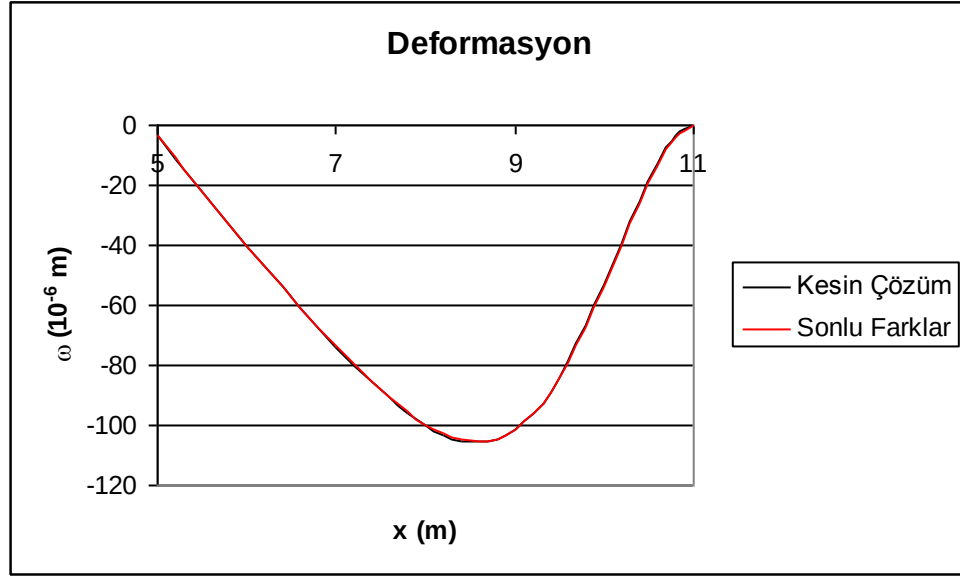
x(m)	Q _x (kN/m)		Hata (%)
	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	
0,00	-41,1323	-39,881835	0,00
0,20	-26,1877	-25,322614	3,30
0,40	-14,1165	-13,673321	3,14
0,60	-5,6876	-5,584897	1,81
0,80	-0,5851	-0,700178	-19,67
1,00	1,9671	1,749766	11,05
1,20	2,8193	2,585483	8,29
1,40	2,6977	2,498519	7,38
1,60	2,1329	1,989796	6,71
1,80	1,4620	1,376023	5,88
2,00	0,8663	0,827208	4,51
2,20	0,4185	0,411907	1,57
2,40	0,1255	0,137687	-9,67
2,60	-0,0382	-0,018255	52,26
2,80	-0,1095	-0,088870	18,81
3,00	-0,1230	-0,105768	14,00
3,20	-0,1064	-0,094002	11,62
3,40	-0,0784	-0,070830	9,70
3,60	-0,0503	-0,046578	7,46
3,80	-0,0274	-0,026350	3,95
4,00	-0,0113	-0,011818	-4,41
4,20	-0,0015	-0,002708	-82,91
4,40	0,0035	0,002124	39,44
4,60	0,0052	0,004020	23,21
4,80	0,0051	0,004168	17,94
5,00	0,0041	0,003459	14,62
5,20	0,0028	0,002475	11,55
5,40	0,0017	0,001545	7,66
5,60	0,0008	0,000814	0,73
5,80	0,0003	0,000315	-22,11
6,00	-0,0001	0,000019	131,87
6,20	-0,0002	-0,000125	37,72
6,40	-0,0002	-0,000169	26,41
6,60	-0,0002	-0,000158	21,37
6,80	-0,0001	-0,000122	18,19
7,00	-0,0001	-0,000081	16,11
7,20	-0,0001	-0,000045	15,53
7,40	0,0000	-0,000018	18,53
7,60	0,0000	-0,000002	39,36
7,80	0,0000	0,000004	38,50
8,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.12

Tablo A.13 (Deformasyon değerleri ve karşılaştırılması)

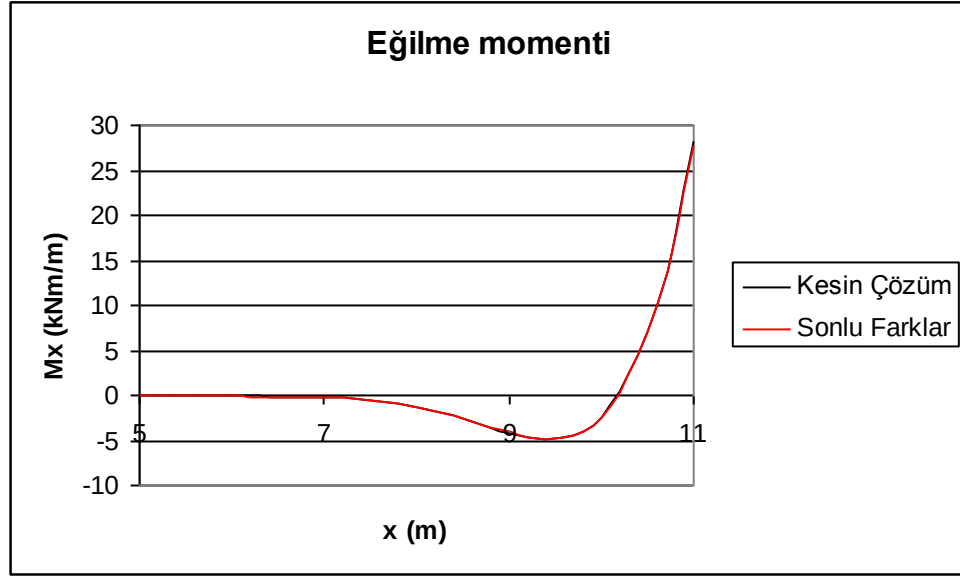
	ω (10^{-6} m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata (%)
11,00	0,0000	0,000000	0,00
10,80	-3,5875	-3,968255	-10,61
10,60	-12,7019	-13,323352	-4,89
10,40	-25,1661	-25,908867	-2,95
10,20	-39,2009	-39,969207	-1,96
10,00	-53,4138	-54,135967	-1,35
9,80	-66,7713	-67,398607	-0,94
9,60	-78,5602	-79,064435	-0,64
9,40	-88,3422	-88,712310	-0,42
9,20	-95,9051	-96,143791	-0,25
9,00	-101,2150	-101,334716	-0,12
8,80	-104,3700	-104,389575	-0,02
8,60	-105,5580	-105,500304	0,05
8,40	-105,0220	-104,910617	0,11
8,20	-103,0300	-102,886414	0,14
8,00	-99,8481	-99,692411	0,16
7,80	-95,7267	-95,574789	0,16
7,60	-90,8853	-90,749397	0,15
7,40	-85,5065	-85,394890	0,13
7,20	-79,7331	-79,650100	0,10
7,00	-73,6683	-73,614881	0,07
6,80	-67,3799	-67,353748	0,04
6,60	-60,9057	-60,901656	0,01
6,40	-54,2612	-54,271368	-0,02
6,20	-47,4481	-47,461925	-0,03
6,00	-40,4635	-40,467727	-0,01
5,80	-33,3091	-33,287629	0,06
5,60	-25,9986	-25,933129	0,25
5,40	-18,5628	-18,434050	0,69
5,20	-11,0478	-10,838910	1,89
5,00	-3,5027	-3,205166	8,49



Şekil A.13

Tablo A.14 (Eğilme momenti değerleri ve karşılaştırılması)

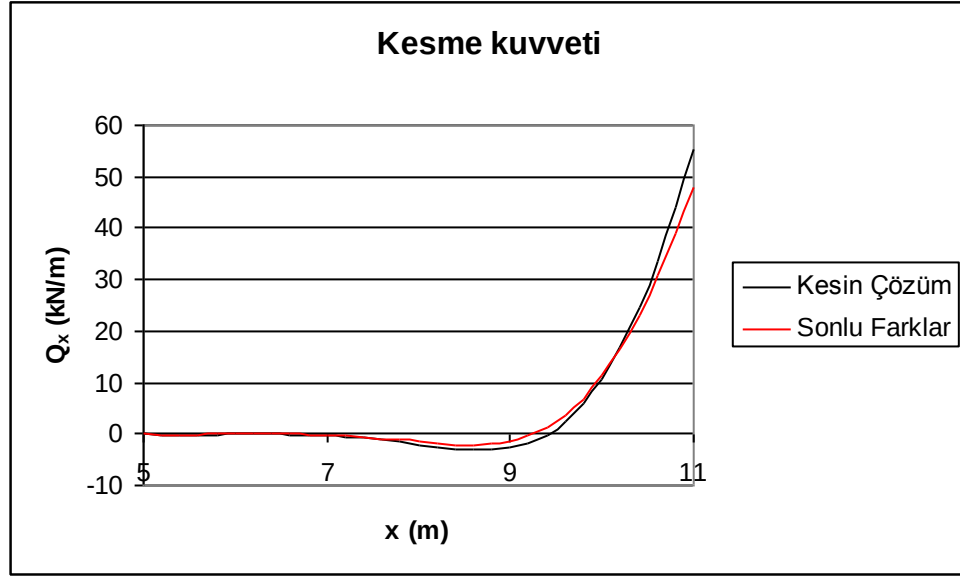
	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata(%)
11,00	28,1211	27,788313	1,18
10,80	18,1065	17,850893	1,41
10,60	10,3005	10,121176	1,74
10,40	4,4744	4,364101	2,47
10,20	0,3494	0,297087	14,97
10,00	-2,3712	-2,378377	-0,30
9,80	-3,9787	-3,953546	0,63
9,60	-4,7424	-4,696550	0,97
9,40	-4,8992	-4,842675	1,15
9,20	-4,6489	-4,589587	1,28
9,00	-4,1526	-4,096350	1,35
8,80	-3,5348	-3,485200	1,40
8,60	-2,8859	-2,845149	1,41
8,40	-2,2679	-2,236649	1,38
8,20	-1,7189	-1,696710	1,29
8,00	-1,2580	-1,243992	1,11
7,80	-0,8908	-0,883550	0,81
7,60	-0,6130	-0,611004	0,33
7,40	-0,4142	-0,416035	-0,44
7,20	-0,2808	-0,285162	-1,55
7,00	-0,1979	-0,203841	-3,00
6,80	-0,1511	-0,157951	-4,53
6,60	-0,1274	-0,134767	-5,78
6,40	-0,1158	-0,123544	-6,69
6,20	-0,1078	-0,115831	-7,45
6,00	-0,0974	-0,105630	-8,45
5,80	-0,0812	-0,089514	-10,24
5,60	-0,0587	-0,066792	-13,79
5,40	-0,0328	-0,039791	-21,31
5,20	-0,0098	-0,014279	-45,70
5,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.14

Tablo A.15 (Kesme kuvveti değerleri ve karşılaştırılması)

	$Q_x(\text{kN.m/m})$		
x(m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Hata(%)
11,00	55,2500	47,775024	13,53
10,80	44,0269	38,987574	11,45
10,60	33,6974	30,641703	9,07
10,40	24,6138	23,110284	6,11
10,20	16,9470	16,602724	2,03
10,00	10,7293	11,201314	-4,40
9,80	5,8935	6,894332	-16,98
9,60	2,3067	3,605018	-56,28
9,40	-0,2018	1,215933	702,54
9,20	-1,8190	-0,411363	77,39
9,00	-2,7310	-1,421141	47,96
8,80	-3,1118	-1,952458	37,26
8,60	-3,1153	-2,131722	31,57
8,40	-2,8717	-2,068298	27,98
8,20	-2,4860	-1,852548	25,48
8,00	-2,0386	-1,555727	23,69
7,80	-1,5880	-1,231209	22,47
7,60	-1,1733	-0,916563	21,88
7,40	-0,8178	-0,636085	22,22
7,20	-0,5326	-0,403472	24,24
7,00	-0,3195	-0,224376	29,77
6,80	-0,1741	-0,098676	43,32
6,60	-0,0882	-0,022320	74,69
6,40	-0,0508	0,011309	122,26
6,20	-0,0499	0,010573	121,19
6,00	-0,0725	-0,014707	79,71
5,80	-0,1049	-0,053022	49,46
5,60	-0,1321	-0,090478	31,51
5,40	-0,1370	-0,109745	19,89
5,20	-0,1004	-0,088829	11,52
5,00	0,0000	0,000000	0,00



Şekil A.15

EKB
MATLAB İLE YAZILAN PROGRAMLAR

Program B.1

```
clear
l = 0.25
a = 0.50
h = 0.50
alp = 2*pi/3
t = 0.07
E = 200e+7
nu = 0.3
D = (E*t*t*t)/(12*(1-nu*nu))
gam = 9.81
lam = l/a
pis = t/(2*l)
ABC = zeros(9,3);
j = 1
for mi = 1:2:5
for ni = 0.2
%1.denklem
KI(1,1) = 2*mi*mi*pi*pi+(1-nu)*lam*lam*ni*ni;
KI(1,2) = -(1+nu)*lam*mi*ni*pi;
KI(1,3) = 2*nu*lam*mi*pi;
%2.denklem
KI(2,1) = (1+nu)*lam*mi*ni*pi;
KI(2,2) = -((1-nu)*mi*mi*pi*pi+2*lam*lam*ni*ni);
KI(2,3) = 2*lam*lam*ni;
%3.denklem
KI(3,1) = 3*nu*lam*mi*pi;
KI(3,2) = -3*lam*lam*ni;
KI(3,3)
=3*lam*lam+pis*pis*(mi*mi*pi*pi+lam*lam*ni*ni)*(mi*mi*pi*pi+lam*lam*ni*ni
);
%sag taraf
QI(1:2,1)=[0;0];
```

```

if (ni = 0)
    QI(3,l) = -(4*gam*a)/(mi*pi*pi)*(sin(alp)-alp*cos(alp))*((l*l*t*t)/(4*D));
Elseif (ni = 1) QI(3,l) = -(2*gam*a)/(mi*pi*pi)*(2*alp-sin(2*alp))*((l*l*t*t)/(4*D));
else
    QI(3, l) = -((l*l*t*t)/(4*D))*(8*gam*a)*(cos(alp)*sin(ni*alp)-
    ni*cos(ni*alp)*sin(alp))/((mi*ni*pi*pi)*(ni*ni-l));
end
ABC(j,:)=(inv(KI)*QI)';
j = j+1;
end
end
U = zeros(12,l);
V = zeros(12,l);
W = zeros(12,l);
dx = input('dx:');
dfi = input('dfi: ');
m = 4
for i = 1:12
    j = 1;
    k = i-(floor((i-1)/m)*m);
    fi = rem((k-1),m)* dfi;
    x = floor((i-1)/m)*dx;
    for mi = 1:2:5
        for ni = 0:2
            U(i,1) = U(i,1)+ABC(j,1)*cos(ni*fi)*cos(mi*pi*x/l);
            V(i,1) = V(i,1)+ABC(j,2)*sin(ni*fi)*sin(mi*pi*x/l);
            W(i,1) = W(i,1)+ABC(j,3)*cos(ni*fi)*sin(mi*pi*x/l);
            j = j+1;
        end
    end
end
end

```

Program B.2

```
clear
l = 0.25
a = 0.50
h = 0.50
alp = pi
t = 0.07
E = 200e+7
Nu = 0.3
D = (E*t*t*t)/( 12*( 1 -nu*nu))
gam = 9.81
lam = 17a
pis = t/(2*l)
dfi = 2*pi/4
dx = 0.25/4
ABC = zeros(738,3);
j = l;
for mi = l :2:35
for ni = 0:40
% 1.denklem
KI(1,1) = 2*mi*mi*pi*pi+(1-nu)*lam*lam*ni*ni;
KI(1,2) = -(1+nu)*lam*mi*ni*pi;
KI(1,3) = 2*nu*lam*mi*pi;
%2.denklem
KI(2,1) = (1+nu)*lam*mi*ni*pi;
KI(2,2) = -((1-nu)*mi*mi*pi*pi+2*lam*lam*ni*ni);
KI(2,3) = 2*lam*lam*ni;
%3. denklem
KI(3,1) = 3*nu*lam*mi*pi;
KI(3,2) = 3*lam*lam*ni;
KI(3,3) = 3*lam*lam+pis*pis*(mi*mi*pi*pi-lam*lam*ni*ni)*(mi*mi*pi*pi+lam*lam*ni*ni);
%sag taraf
```

```

QI(1:2,1) = [0;0];
if (ni = 0)
QI(3,1) = -(((4*gam*h)/(mi*pi))*l*l*t*t)/(4*D);
elseif (ni = 1)
QI(3,1) = -(((4*gam*a)/(mi*pi))*l*l*t*t)/(4*D);
else
QI(3,1) = 0;
end
ABC(j,:) = (inv(KI)*QI)';
j = j+1;
end
end
U = zeros(12,1);
V = zeros(12,1);
W = zeros(12,1);
dx = input('dx:');
dfi = input('dfi:');
m = 4
for i = 1:12
j = 1;
k = i-(floor((i-1)/m)*m);
fi = rem((k-1),m)* dfi;
x = floor((i-1)/m)*dx;
for m i =1:2:35
for ni = 0:40
U(i,1) = U(i,1)+ABC(j,1)*cos(ni*fi)*cos(mi*pi*x/l);
V(i,1) = V(i,1)+ABC(j,2)*sin(ni*fi)*sin(mi*pi*x/l);
W(i,1) = W(i,1)+ABC(j,3)*cos(ni*fi)*sin(mi*pi*x/l);
j = j+1;
end
end
end
end

```

Program B.3

```
clear
L = 1
a = 0.50
alp = pi/6
t = 0.07
E = 200e+7
nu = 0.3
p0 = 10
ABC = zeros(529,3);
j = 1;
for mi = 1:2:45
for ni = 1:2:45
%1.denklem
KI(1,1) = pi*((a*mi/L)^2+((1-nu)*ni*ni)/(2*alp*alp));
KI(1,2) = pi*((1-nu)*a*mi*ni)/(2*alp*L);
KI(1,3) = nu*a*mi/L;
%2.denklem
KI(2,1) = pi*((1+nu)*a*mi*ni)/(2*alp*L);
KI(2,2) = pi*(((1-nu)*a*a*mi*mi)/(2*L*L)+(ni*ni)/(alp*alp));
KI(2,3) = ni/alp;
%3.denklem
KI(3,1) = (nu*pi*a*mi)/L;
KI(3,2) = (ni*pi)/alp;
KI(3,3) = (1+(pi^4*t*t/(12*a*a))*((a*a*mi*mi)/(L*L)-^(ni*ni)/(L*L))^2);
%sag taraf
QI(1:2,1) = [0;0];
QI(3,1) = ((16*p0)/(pi*pi*mi*ni))*((a*a*(1-nu*nu))/(E*t));
ABC(j,:) = (inv(KI)*QI)';
j = j+1;
end
end
U = zeros(1,1);
```

```

V = zeros(1,1);
W = zeros(1,1);
x = input('x:');
tet = input('tet:');
j = 1
for mi = 1:2:45
for ni = 1:2:45
U(1,1)=U(1,1)+ABC(j,1)*sin(ni*pi*tet/alp)*cos(mi*pi*x/L);
V( 1, 1)=V(1. 1 )+ABC(j,2)*cos(ni*pi*teValp)*sin(mi*pi*x/L);
W(1,1)=W(1,1)+ABCO,3)*sin(ni*pi*tet/alp)*sin(mi*pi*x/L);
j = j+1
end
end
end

```

Program B.4

```
clear
L = l
a = 0.50
alp = pi/6
t = 0.07
E = 200e+7
nu = 0.3
p0 = 10
ABC = zeros(160000,3);
j = 1;
for mi = l: 1:400
for ni = l: 1:400
%1.denklem
KI(1,1) = pi*((a*mi/L)^2+((1-nu)*ni*ni)/(2*alp*alp));
KI(1,2) = pi*((1-nu)*a*mi*ni)/(2*alp*L);
KI(1,3) = nu*a*mi/L;
%2.denklem
KI(2,1) = pi*((1+nu)*a*mi*ni)/(2*alp*L);
KI(2,2) = pi*(((1-nu)*a*a*mi)/(2*L*L)+(ni*ni)/(alp*alp));
KI(2,3)=ni/alp;
%3.denklem
KI(3,1) = (nu*pi*a*mi)/L;
KI(3,2) = (ni*pi)/alp;
KI(3,3) = (1 + (pi^4*t*t/(12*a^ll*a))*((a*a*mi^ll*ni)/(L*L)+(m*m)/(L*L))^2);
%sag taraf
QI(1:2,1) = [0;0];
QI(3,1) = ((4*p0)/(pi*pi*mi*m))*(cos(Ini*pi)*cos(m*pi))*((a*a*(1-nu*nu))/(E*t));
ABC(j,) = (inv(KI)*QI)';
j = j+1
end
end
```

```

U = zeros(1,1);
V=zeros(1,1);
W = zeros(1,1);
x = input('x:');
tet = input('tet:');
j = 1
for mi = 1: 1:400
for ni = 1: 1:400
U(1,1) = U(l,1)+ABC(j,1)*sin(ni*pi*tet/alp)*cos(mi*pi*x/L);
V(l, 1) = V(1, l)+ABC(j,2)*cos(ni*pi*tet/alp)*sin(mi*pi*x/L);
W(l, 1) = W(1, l)+ABC(j,3)*sin(ni*pi*tet/alp)*sin(mi*pi*x/L);
j = j+1;
end
end
end

```

KAYNAKLAR

Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. 1959 Theory of Plates and Shells (Second Edition) McGraw Hill Book Company New York Toronto London

Tameroğlu S. Sacit 1991 Elastisite Teorisi Çözüm Yöntemleri ve Bazı Matematiksel Teknikler İTÜ İstanbul

Salvadori Mario G. and Baron Melvin L. 1966 Numerical Methods in Engineering Prentice - Hall New Delhi

Girkmann K. 1991 Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler Cilt I-II çevirisi Tameroğlu S. Sacit İTÜ Kütüphanesi sayı 1463 İstanbul

Uğural A. C. 1999 Stresses in Plates and Shells WCB/McGraw-Hill Boston

Dahlquist G. and Björck Ake. 1974 Numerical Methods Prentice-Hall Englewood Cliffs N.J.

Conte S. D. and De Boor Carl 1981 Elementary Numerical Analysis McGraw-Hill Auckland

Camahan B. Luther H. A. Wilkes O. J. 1990 Applied Numerical Methods R. E. Krieger Pub. Co. Malabar

Açar H. Volkan Eksenel Simetrik Yükler Altında Silindirik Kabuk Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü Yüksek Lisans Tezi İTÜ Mayıs 2002

Matlab for Windows Copyright 1984-1994 The Mathworks Inc. Version 4.2 March 29 1994

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İzmir'de doğan Serhat SERDAR ilköğretimini İzmir Agah Efendi İlkokulu'nda orta ve lise öğrenimini ise İzmir 60. Yıl Anadolu Lisesi'nde tamamlamıştır. 2000 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuştur. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilimdalı Yapı Mühendisliği Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.