

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Mehmet ÇOBAN

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

**DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mehmet ÇOBAN
(501051077)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih: 11 Haziran 2008

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Yalçın AKÖZ (İ.T.Ü.)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan alan denklemleri ele alınarak değişik sınır koşulları altında düzlem dışı serbest titreşimlerin incelenmesini konu alan bu tez çalışması Yrd. Doç. Dr. Fethi Kadioğlu yönetiminde gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın tüm aşamalarında gösterdiği her türlü ilgi, destek ve anlayış için Hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Her zaman yanımda olan, desteklerini benden esirgemeyen aileme ve dostlarıma teşekkür ederim.

Mayıs 2008

Mehmet ÇOBAN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1.Genel	1
1.2.Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	3
1.3.Literatür Araştırması	4
2. KİRİŞ DENKLEMLERİ	6
2.1.Matematiksel Modeller	6
2.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Modeli	6
2.1.2. Timoshenko Kiriş Modeli	7
2.2. Elastik Çubukların Genel Denklemleri	8
2.2.1. Giriş	8
2.2.2. Dış Kuvvetler	9
2.2.3. İç Kuvvetler	10
2.2.4. Denge Denklemleri	12
2.2.5. Kinematik Denklemler	14
2.2.6. Bünye Denklemleri	17
2.3. Kullanılacak Olan Denklemlerin Çıkarılışı	19
3. FONKSİYONEL ANALİZ	24
3.1. Diferansiyel Denklemlerden Fonksiyonele Geçiş	25
3.1.1. Potansiyellik Koşulu	25
3.1.1.1 Yönsel Toplam (İç Çarpım)	25
3.1.1.2 Gataeux Türevi (Yönsel Türev)	25
3.2. Fonksiyonelin Elde Edilmesi	28

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	29
4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?	29
4.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nasıl Çalışır?	30
4.3. Adım Adım Sonlu Elemanlar Metodu	32
4.4. Karışık Sonlu Elemanlar Metodu	33
5. KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ ile DİNAMİK ANALİZ	34
5.1. İnterpolasyon Fonksiyonları	34
5.2. Eleman Matrisinin Elde Edilmesi	37
5.3. Dinamik Analiz	38
6.SAYISAL ÖRNEKLER	40
6.1. Bir ucu ankastre-diğer ucu boş olan dairesel çubuk	41
6.2. İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk	41
6.3. Değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuk	43
7. SONUÇLAR	44
KAYNAKLAR	46
EKLER	50
ÖZGEÇMİŞ	52

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1 Ankastre-boş uçlu yarım çembere ait düzlem dışı doğal frekans	41
Tablo 6.2 İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk	42
Tablo 6.3 Değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuk	43

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Euler-Bernoulli Kiriş Modeli	6
Şekil 2.2 : Timoshenko Kiriş Modeli	7
Şekil 2.3 : Dış kuvvetler, iç kuvvetler, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler arasındaki ilişki	9
Şekil 2.4 : Dış Kuvvetler ve İç Kuvvetler	11
Şekil 2.5 : Bileşke Kuvvetin Eksenler Doğrultusundaki Bileşenleri	11
Şekil 2.6 : Bileşke Momentin Eksenler Doğrultusundaki Bileşenleri	12
Şekil 2.7 : Diferansiyel Çubuk Elemanı Üzerinde Kesit Zorlarının Değişimi	12
Şekil 2.8 : Diferansiyel Çubuk Elemanı Üzerinde Yerdeğiştirme	15
Şekil 4.1 : Daire eksenli çubuk için kullanılan sonlu eleman	34

SEMBOL LİSTESİ

Γ	: Sürekli ortam sınırı
β	: Sürekli ortam
ϕ	: Bulunmak istenen fonksiyon
$\bar{p}(s)$	: Çubuk eksenı boyunca yayılı halde bulunan dış yük
Δs	: Çubuk eksen parçası
$\Delta \vec{P}$	: Dış yüklerin vektörel toplamı
$\vec{m}(s)$	: Çubuk eksenı boyunca yayılı halde bulunan kuvvet çifti
$\Delta \vec{M}$	: Kuvvet çiftlerinin vektörel toplamı
T_t	: Eksenel kuvvet
T_b	: Binormal eksen doğrultusundaki kesme kuvveti
T_n	: Normal eksen doğrultusundaki kesme kuvveti
$\vec{t}$	: Teğet birim vektör
$\vec{n}$	: Birim normal vektör
$\vec{b}$	: Binormal birim vektör
M_t	: Burulma Momenti
M_b	: Binormal eksen üzerindeki eğilme momenti
M_n	: Normal eksen üzerindeki eğilme momenti

$\vec{r}$	: Yer vektörü
s	: Çubuk eksen
$\Delta \vec{T}$	: Kuvvetteki değişim
$\Delta \vec{M}$	: Kuvvet çiftindeki değişim
$\vec{\Omega}$	: Dönme vektörü
$\vec{\gamma}$	: Birim kayma vektörü
$\vec{\omega}$	: Birim dönme vektörü
ϵ_{ij}	: Şekil değiştirme elemanları
C_{ik}	: Kayma rijitliği
D_{ik}	: Eğilme rijitliği
[C]	: Malzeme matrisi
$[D^{-1}], [C^{-1}]$	: Esneklik matrisleri
χ	: Eğrilik
τ	: Eğriliğin tabi torsiyonu
R	: Eğrilik yarıçapı
θ	: Eğrilik merkez açısı
Q	: Alan denklemlerinin operatör formu
I	: Fonksiyonel
E_i	: Young (elastisite) modülü
ν_{ij}	: Poisson oranı
G_{ij}	: Kayma modülü

$\bar{u}$	: Yer değiştirme
ω	: Dairesel frekans
k'	: Kesme katsayısı faktörü
ρ	: Malzeme yoğunluğu
A	: Deformasyona uğramamış kesit alanı
L	: Türev operatörü
f	: Dış yükler
L_e	: Kiriş sonlu eleman boyunu
Ψ_i, Ψ_j	: Şekil fonksiyonları
$[M]$	: Kütle matrisi

DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan alan denklemleri ele alınarak değişik sınır koşulları altında düzlem dışı serbest titreşimler incelenmiştir. Burada değişik sınır koşulları altında dairesel çubuk sistemler ele alınarak sisteme ait düzlemine dik doğrultudaki doğal frekanslar elde edilmiştir. Yapılan bu çalışmada Gâteaux diferansiyel yöntemi ile dairesel çubukların dinamik analizinde kullanılacak olan fonksiyonel elde edilerek, yer değiştirmeleri ve iç kuvvetleri bilinmeyen olarak ele alan ve sistem kütle matrisini de içeren karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Kullanılan sonlu eleman yöntemi ile düğüm noktalarında altı bilinmeyenin bulunduğu iki düğüm noktalı dairesel çubuk eleman üzerinde eleman matrisleri kapalı formda elde edilmiştir. Dairesel çubukta her eleman, bir eğilme ve bir burulma momenti, bir kesme kuvveti, iki dönme ve bir yerdeğiştirme olmak üzere (2×6) serbestlik derecesine sahiptir. Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır:

Bölüm 1' de, yapılan çalışma tanıtılmış, amacı ve kapsamı hakkında bilgi verilmiş ve literatürde mevcut ilgili çalışmalar aktarılmıştır.

Bölüm 2' de, giriş modelleri ile elastik çubukların genel denklemleri açıklanmış ve bu çalışmada kullanılacak alan denklemleri elde edilmiştir.

Bölüm 3' de, alan denklemleri operatör formda yazılmış, operatörün potansiyellik koşulu açıklanmış ve Gâteaux türevi kullanılarak daire eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri için fonksiyonel elde edilmiştir.

Bölüm 4' de, Sonlu Elemanlar Yöntemi hakkında genel bilgi verilmiştir.

Bölüm 5' de; Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi ile dairesel çubukların düzlem-dışı serbest titreşim denklemlerinin nasıl bulunacağı açıklanmıştır. Dinamik analizde problem, standart özdeğer problemine indirgenerek sıkıştırılmış kütle matrisi formülasyonunu esas alan karışık sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır.

Bölüm 6' da, literatürdeki mevcut çalışmalardan alınan problemler karışık sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüştür.

Yedinci ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve değerlendirmeler yapılmıştır.

OUT-OF-PLANE DYNAMIC ANALYSIS OF CURVED BEAMS USING MIXED FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

In this thesis, the out-of-plane free vibrations of curved beams was studied under different and complex boundary conditions. In this study, using Gateaux differential a functional is obtained for out-of-plane free vibrations of curved beam elements. In dynamic analysis, the problem reduces to the solution of a standart eigenvalue problem and the mixed finite element is based upon a consistent mass matrix formulation. The circular beam element which have two nodes have been used. For circular beam, the element have one bending and one twisting moments, one shear force, two rotations and one displacement (2×6 DOF). This study consists of seven chapters :

The aim of this study on the contents is described and the problem which we deal with introduced in the first chapter. Also the studies about the subject which had been done in the past were given.

In the second chapter, beam models, functions of elastic rods and the field equations which was used in this study were briefly given.

In the third chapter, brief information about functional analyses and potentiality has been taken place. Gateaux differential method which was using for developed in this study by using mixed finite element formulation is explained. Brief information of how to obtain the functional by using the Gateaux differential is also take place.

In the fourth chapter, general information about Finite Element Analysis was given.

In fifth chapter, the mixed finite element solution of out-of-plane free vibration of curved beams was explained. The problem was reduced to the solution of a standart eigenvalue problem and the mixed finite element was based upon a consistent mass matrix formulation.

In the sixth chapter, numerical examples which has been studied before in literature was studied and the results were discussed.

In the last chapter, the conclusions and the opinions were briefly given.

1.GİRİŞ

1.1. Genel

Eğri eksenli çubuk elemanlar, eski zamanlardan bu yana kemerli kubbelerde, disk şeklindeki fren balatalarında, tekerlek dinamiğinde, boru sistemlerinde, turbo makineli bıçak ağızlarında, güdümlü füzelerin denge çarklarında, uzay araçlarında ve yapılarında, kemer köprülerde, eğri eksenli giriş köprülerde, büyük açıklıklı çatı yapılarında ve depreme dayanıklı yapı tasarımında sıkça kullanılan yapı elemanlarıdır. Eğri eksenli çubukların dinamik özellikleri 19. yüzyıldan bu yana birçok araştırmacının uğraşısı olmuştur.

Mühendislik çalışmalarının içinde titreşim problemleri önemli bir yere sahiptir. Titreşimin çalışma konusu dinamik sistemlerin salınımlı hareketlerinin analizi hakkındadır. Titreşim, bir denge noktası etrafındaki mekanik salınımdır ve dinamik bir davranışa sahiptir. Bütün fiziksel yapılar, yüklere veya yerdeğiştirmelere karşı dinamik bir davranış sergilemektedirler. Bu, dinamik davranış gösteren her yapıda titreşim olacağını göstermektedir. Bu salınımlar bir sarkacın hareketi gibi periyodik ya da çakıllı bir yolda tekerleğin hareketi gibi rastgele de olabilmektedir. Bu titreşimlerin bazıları çok küçük salınımlıdır ve hissedilmezler, bazılarının salınımı da büyüktür ve rahatsız edicidir; yapının performansını olumsuz etkilediğinden dolayı istenilmemektedirler. Tasarımcı iyi bir titreşim performansını tasarlamadan önce sistemin titreşim karakteristiğini anlamalı, analiz etmeli ve modellemelidir.

Dinamik davranışın karakterindeki ek atalet kuvvetleri, Newton'un ikinci yasasından, kütle ile ivmenin çarpımına eşittir. Yükler ve yerdeğiştirmeler çok yavaş etkiğinde atalet yükleri göz ardı edilebilmekte ve statik yük analizi uygulanabilmektedir. Bu da göstermektedir ki dinamik analiz aslında statik analizin basit bir genişletilmiş şeklidir. Bir yapı, üzerine yapılan yükleme altında hareket etmektedir. Eğer yükleme bir frekansa bağlı olarak değişiyor ve bu frekansta yapının doğal frekansının 1/3'den daha düşük oluyor ise problem statik problem

olarak sınıflandırılabilir. Diğer yandan yükleme yüksek frekanslı veya rastgele olarak değişiyorsa veya yük aniden uygulanıyorsa, problem için dinamik analiz gerekmektedir. Dinamik analizde de statik analizde olduğu gibi rijitlik matrisi kullanılmakta, fakat bir kütle ve bir sönüm matrisine de analiz için ihtiyaç duyulmaktadır.

Bunun yanında, bütün fiziksel yapılar potansiyel olarak sonsuz sayıda yerdeğiştirmeye sahiptirler. Bu bakımdan, yapısal analizin en zor kısmı gerçek yapının davranışını sergileyecek olan, sonlu sayıda kütsüz eleman ve düğüm noktası yerdeğiştirmesi seçerek, bir bilgisayar modeli yaratmaktır. Yapısal bir sistemin kütsünün düğüm noktalarında toplayabileceğimizi rahatlıkla kabul edebiliriz. Bununla birlikte, deneysel veriler sayesinde elastik yapıların elemanlarının rijitlik özellikleri yüksek bir doğrulukla bulunabilmektedir. Ancak, dinamik yükleme, enerji sönümlenme karakteristiği ve sınır koşullarını tahmin etmek güç olmaktadır.

Yukarıda anlatılan belirsizliklerden ötürü, farklı yükleme ve sınır koşulları etkisinde birden çok bilgisayar modeli kullanarak birçok değişik dinamik analiz yapmak gerekmektedir. Tipik bir dinamik analiz için çok fazla sayıda bilgisayar analizi yapmamız gerekir ki bu da çok yorucu ve karmaşık bir iş olmaktadır ve etkili bir çözüm olamamaktadır. Bu sebeple etkili ve doğru sonuç veren sayısal yöntemlerle sonuca ulaşmak gerekmektedir.

İnsanoğlunun diğer birçok aktivitesinde olduğu gibi, yapıların mekanik problemlerinin çözümü de hızla gelişen modern bilgisayar teknolojilerinden etkilenmektedir. Yeni nesil bilgisayarların kapasitesi ve hızı günümüzde halen daha da hızla gelişmektedir. Bu gelişmeler, daha karmaşık ve zaman isteyen problemleri çözebilmemizi ve daha genel çözüm yolları üretmemizi sağlamaktadır. Sayısal çözüm yöntemlerinin daha işler hale getirilmesi bilgisayar teknolojisi ile çok yakından bağlantılıdır. Bilgisayarların gelişimi ile birlikte sayısal yöntemlerden bir tanesi olan Sonlu Elemanlar Metodu da gelişmiş ve artık mekanik problemlerinin çözümünde en genel araç olmuştur.

Bu çalışmada Karışık Sonlu Elemanlar Metodu ile daire eksenli kirişlerin serbest titreşim frekansları elde edilmiş ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Γ yüzeyi ile sınırlandırılmış β sürekli ortamını ele alalım. ϕ , β sürekli ortamı içerisinde tanımlanan bir skaler fonksiyon olmak üzere ϕ 'nin β içerisindeki herhangi bir noktadaki davranışı şöyle ifade edilmektedir:

$$L(\phi) - f = 0 \quad (1.1)$$

Çözmek istediğimiz sürekli ortam problemleri en genel anlamda genellikle denklem (1.1) deki gibi ifade edilmektedir. Burada, f serbest değişkenlerin bilinen skaler bir fonksiyonunu, L ise lineer veya nonlinear diferansiyel operatörü göstermektedir. Denklem (1.1)'in özel bir çözümünün bulunabilmesi için sınır koşullarının bilinmesi gerekmektedir. Sınır değerleri bilinmeden her ne kadar denklem (1.1)'in integrali alınabilirse de elde edilen sonuç, operatör adi diferansiyel operatör ise keyfi sabitler, kısmi diferansiyel operatör ise keyfi fonksiyonlar içerecektir. Bu keyfi sabitler ve fonksiyonlar ancak ve ancak problemin sınır değerleri bilindiği takdirde özel bir değer almaktadırlar. Bu nedenden dolayı sürekli ortam problemleri sık sık sınır değer problemi olarak da isimlendirilmektedir.

Problem, β sürekli ortamında, Γ üzerindeki sınır koşullarına uygun, (1.1) denklemini sağlayan ϕ fonksiyonunu bulmaktır. Lineer ve nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümü için kesin sonuç veren analitik metodlarla, yaklaşık sonuç veren sayısal yöntemler mevcuttur. Birkaç özel problem için diferansiyel denklemlerin integralini alarak kesin sonuçlar bulmak mümkündür. Kesin çözüm, değişkenleri ayırarak ya da değişkenleri ayrılabilir hale getiren dönüşümler kullanılarak bulunabilmektedir. Bazen de diferansiyel denklemlere Fourier ya da Laplace dönüşümleri uygulanarak kesin çözüm bulunabilmektedir. Ancak kesin çözümü bulunabilen problemler az sayıdadır ve çoğu çözülmüş durumdadır. Bu problemler klasik problemlerdir. Günümüzdeki gelişmiş bilgisayarlar sayesinde çözüm yöntemlerindeki eğilim, Ağırlıklı Rezidüel Yöntemi, Ritz Metodu, Sonlu

Farklar Metodu, Sonlu Elemanlar Metodu gibi yüksek doğrulukta yaklaşık sonuçlar veren sayısal yöntemleri kullanmaktır.

Bu çalışmada, düzlemine dik yüklerle yüklü dairesel çubuklara ait alan denklemleri ele alınarak düzlem dışı serbest titreşimler incelenmiştir. Değişik sınır koşulları altında daire eksenli çubukların düzlemine dik doğrultudaki doğal frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Bilinmeyenleri bulmak amacıyla, Gâteaux diferansiyel yöntemi ile dairesel çubukların dinamik analizinde kullanılacak olan fonksiyonel elde edilerek, sistem kütle matrisini de içeren, yerdeğiştirmeleri ve iç kuvvetleri bilinmeyen olarak ele alan karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılmıştır. Kullanılan bu yöntem ile her düğüm noktasında altı bilinmeyen bulunduğ iki düğüm noktalı R yarıçaplı dairesel çubuk eleman üzerinde eleman matrisleri elde edilmiştir. Bunlar Fortran dilinde yazılmış bir bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir. Bu program yardımıyla, enkesiti düzgün ya da değişken dairesel çubuklarda her türlü sınır koşulları için sonuç elde etmek mümkündür.

Bu çalışmada ayrıca, kiriş modelleri tanıtılmış ve elastik çubuklara ait genel denklemlerin elde edilişi açıklanmıştır. Kullanılacak olan kiriş modelinde kayma etkisi göz önüne alınırken dönme ataleti ihmal edilmiştir. Kiriş elemanların homojen ve izotrop malzemeden oluştuğu, malzeme asal eksenleri ile kesit asal eksenlerinin çakıştığı kabul edilmiştir.

1.3. Literatür Araştırması

Dairesel çubukların (yayların) düzlem dışı titreşimleri için birçok farklı teknik denenmiştir.

Dairesel bir yay için düzlem-içi ve düzlem-dışı titreşimlerin klasik denklemleri Love'un kitabında bulunmaktadır ve analitik çözümleri verilmiştir [1]. Volterra ve Morell [2], iki ucu ankastre yayın en düşük frekansını bulmak için Rayleigh-Ritz Yöntemi'ni kullanmaktadır. Bu çalışmalarında kesme etkisi göz önüne alınmamıştır Irie ve arkadaşları [3], Taşıma Matrisi Metodu'nu kullanarak sinüsoidal tekil yük veya moment etkisindeki, içsel sönüme sahip Timoshenko yayının kararlı düzlem-

dışı titreşimini araştırmıştır . Irie ve arkadaşları [4], başka bir çalışmalarında yine Taşıma Matrisi Metodu kullanarak, sabit yarıçaplı Timoshenko yayının düzlem-dışı serbest titreşimini incelemiştir. Her iki ucu ankastre yayın kare ve dikdörtgen kesitleri için sonuçları elde etmiştir. Wang ve arkadaşları [5], bir yayın dinamik rijitlik matrisini elde etmişlerdir. Eğilme titreşimleri için kayma deformasyonları ve dönme ataleti dikkate alınmış ancak burulma titreşimleri için dönme ataleti dikkate alınmamıştır. Bickford ve Maganty [6], kesme etkisi ve dönmeyi dikkate alarak ince yüzüklerin düzlem-dışı titreşimlerini incelemiştir. Silva ve Urgueira [7], dinamik rijitlik matrisini, kesme ve dönme etkisini de dikkate alarak kullanmış ve analitik bir çözüm vererek deneysel çalışmalarla karşılaştırmıştır. Kawakami ve arkadaşları [8] ,değişken geometri ve kesite sahip yayların düzlem-İçi ve düzlem-dışı titreşimleri için yaklaşık bir yöntem ortaya koymuştur. Bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Kang ve arkadaşları [9] , dairesel yayların düzlem-İçi ve düzlem-dışı titreşimlerin özdeğerlerini hesaplamak için ‘ diferansiyel kuadrate’ metodunu kullanmıştır. Howson ve arkadaşları [10] , dinamik rijitlik tekniğinde kullanılan ek bir yöntem sunmuştur. Eğilme titreşimlerinde dönme etkisi ihmal edilmiştir. Howson ve Jemah [11] , eğri eksenli Timoshenko kirişinin düzlem-dışı frekanslarını kesin olarak bulan bir metod sunmuşlardır. Huang ve arkadaşları [12] , dairesel olmayan yayların düzlem-dışı dinamik davranışı için bir metod sunmuştur. Laplace dönüşümünü kullanarak Timoshenko teorisine ek olarak viskoz sönümü de dikkate almıştır. Yine Huang ve arkadaşları [13] , değişken kesit ve geometrili yayların düzlem-dışı titreşimini incelemiştir. Dinamik rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm kuvveti vektörü kullanarak diferansiyel denklemlerin seri çözümleri türetilmiştir. Lee ve Chao [14] , eğilme titreşiminde dönme, kesme, çarpılma etkisini gözde almadan düzgün olmayan yayların düzlem-dışı titreşimlerini incelemiştir. Rubin ve Tüfekçi [15] , düzgün dikdörtgen enkesitli dairesel yayların üç boyutlu serbest titreşimlerini farklı bir teorik yaklaşımla (Cosserat Noktası Teorisi) araştırmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarla kendi çalışmalarını karşılaştırmışlardır. Tüfekçi ve Doğruer [16] , düzgün kesitli dairesel yayların düzlem-dışı titreşim problemlerinde, diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini vermişlerdir. Bu çalışmalarında başlangıç değerleri metodunu kullanmışlardır. Sadece çarpılma etkisi ihmal edilmiştir.Literatürde daire eksenli çubuklarla ilgili daha birçok çalışma mevcuttur[17-28].

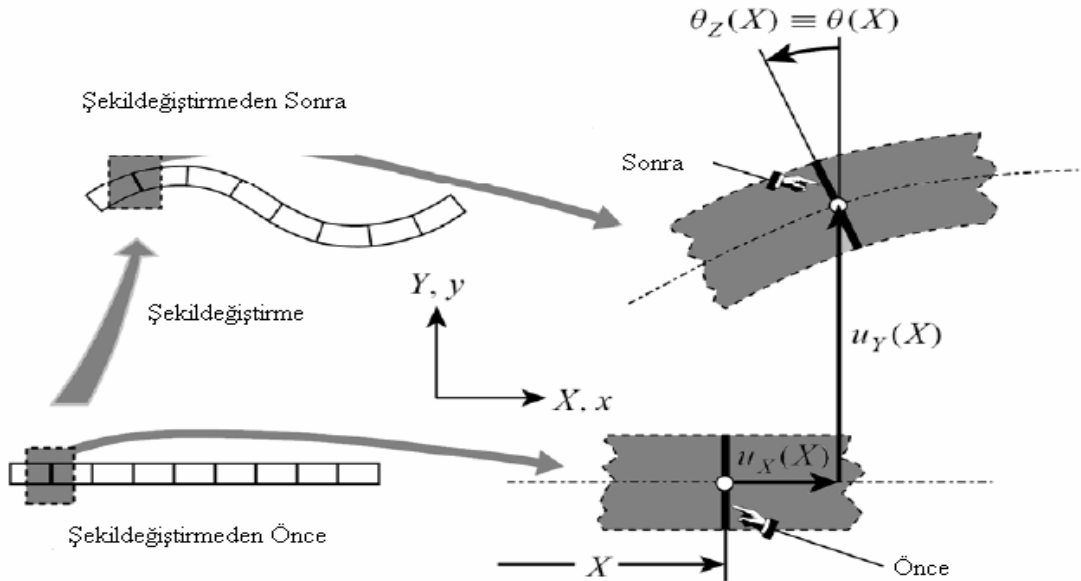
2. KİRİŞ DENKLEMLERİ

2.1. Matematiksel Modeller

Yapıların tepkisini, davranışını önceden tayin edebilmek, anlamak ve gerçeğe yakın bir teori kurabilmek amacıyla matematiksel modellere ihtiyaç duyulmaktadır. Yapısal mekanikte kullanılan iki adet kiriş teorisi vardır:

2.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Modeli

“Klasik Kiriş Modeli” ya da “Mühendislik Kirişi” de denilen bu kiriş modeli, malzeme mekaniğinde kullanılan ilk ve en basit modeldir. Bu model, gerilme ve şekil değiştirme hesaplarında eğilme momenti etkisine açıklık getirmektedir. Hesaplamalarda, kiriş üzerindeki kesme kuvvetlerinden kaynaklanan şekil değiştirmeleri göz önüne almamakta, ihmal etmektedir. Bu teorideki ana varsayım: Şekil değiştirmeden önce düzlem olan ve çubuk eksenine dik olan kesit, şekil değiştirdikten sonra da düzlem kalır ve yine çubuk eksenine dik olmaktadır.

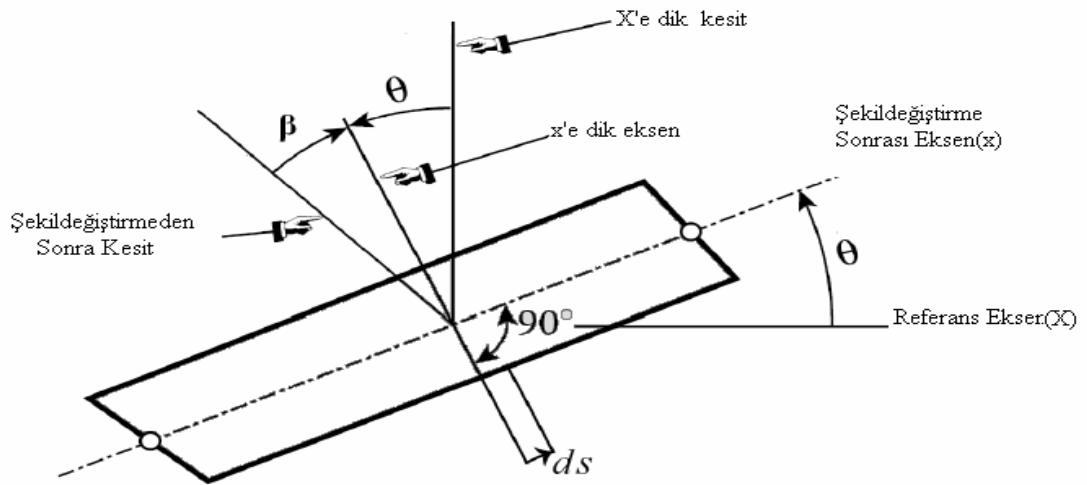


Şekil 2.1 Euler- Bernoulli Kirişi Modeli [28]

Şekil 2.1’de kesme etkisi ihmal edildiğinden, toplam dönme θ sadece eğilme etkisiyle oluşmaktadır. Bu dönme, çubuk kesit merkezinden geçen eksene göre oluşmaktadır. Bu modeldeki, düzlem ve eksene dik olan kesitin eğilmeden sonra da düzlem ve eksene dik kaldığı varsayımı, ancak uzunluğun kalınlığa oranı büyükse ve kirişteki dönmeler küçükse geçerli olmaktadır. Oranın küçük olduğu durumlarda, eğilmeden sonra kesit, çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu teori yüksek sayıdaki titreşim moduna sahip problemlerde hatalı sonuçlar vermektedir. Ancak, yapının performansını değerlendirebilmek fazla sayıda titreşim modunu incelemekle olabilmektedir. Bu teoriyi kullanan tasarımcı, yüksek sayıda moda sahip yapının performansını tatmin eder nitelikte, kesin sonuçlar elde ederek inceleyememektedir.

2.1.2. Timoshenko Kiriş Modeli

Bu model, kirişteki kesme şekil değiştirmelerini de göz önüne alarak Euler-Bernoulli Modeli’nin hatalarını gidermektedir. Daha gerçekçi bir yapı modeli teşkil ettiğinden sonuçları da gerçeğe yakın olmaktadır. Euler-Bernoulli Modeli’ne göre, şekil değiştirmeden önce düzlem olan ve çubuk eksenine göre dönme hareketi yapan kesit, bu modelde de aynı davranışı sergilemektedir. Ancak, kesit, şekil değiştiren eksene dik kalmamaktadır. Dikeylikten sapma, tüm kesitte yayılı halde bulunan kayma gerilmelerinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 2.2 Timoshenko Kiriş Modeli [28]

Kirişteki eğim iki parçadan oluşmuştur. Birisi eğilmeden kaynaklanan θ , diğeri de kayma etkisinden kaynaklanan β 'dır.

Bu çalışmada, daha gerçekçi davranışı yansıttığı için Timoshenko Kiriş Modeli kullanılmıştır.

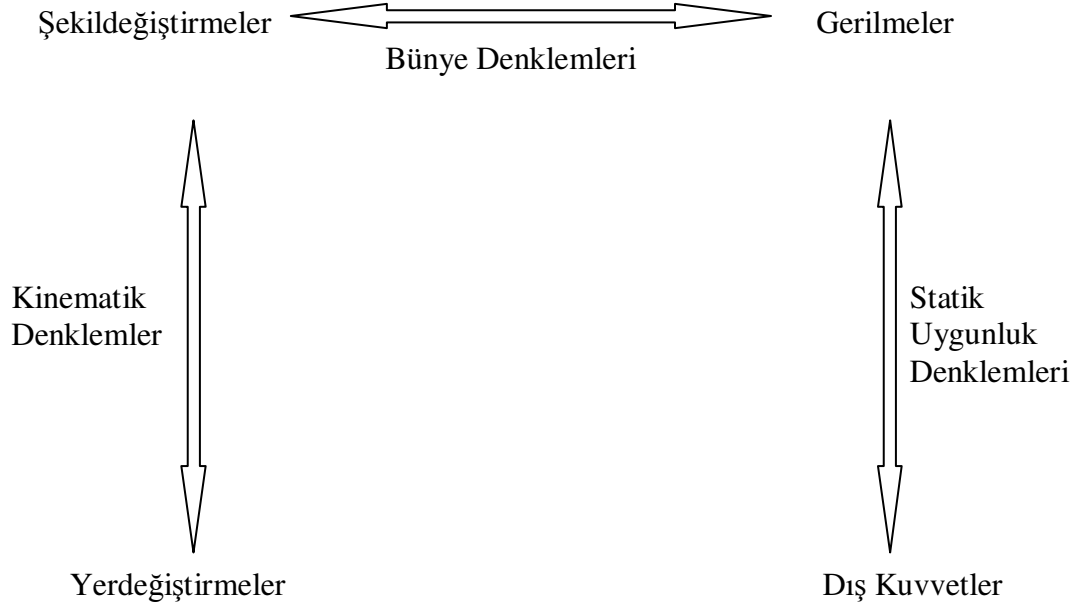
2.2. Elastik Çubukların Genel Denklemleri

Bu bölümde çubuk elemanların dış kuvvetler altındaki davranışını simgeleyen denklemler elde edilecektir.

2.2.1. Giriş

Çubuklar eksen ve dik kesiti ile belirlenmektedir. Eksen, genel olarak bir uzay eğrisi olup, çubuğun büyük olan boyutunu temsil ederken dik kesit ise kapalı bir eğri ile çevrelenmiş düzlem parçasıdır. Çubuğa etkiyen dış kuvvetler çoğu defa yayılı olup doğrultuları genellikle çubuk ekseninden geçmektedir. Eğer dış kuvvetlerin tesir çizgileri çubuk ekseninden geçmiyorsa bu kuvvetler çubuk eksenine kuvvet çiftleri ile birlikte taşınmaktadır.

Cisme dış kuvvetler etkidiğinde, cisimde bir şekil değişimi ile birlikte cismi oluşturan parçacıklar arasında bu parçacıkları bir arada tutacak iç kuvvetler ortaya çıkmaktadır. Dış kuvvetler ile iç kuvvetler arasındaki ilişki denge denklemleriyle, şekildeğiştirmeler ile yerdeğiştirmeler arasındaki ilişki kinematik denklemlerle, iç kuvvetler ile şekildeğiştirmeler arasındaki ilişki de bünye denklemleri ile elde edilmektedir.(Şekil 2.3)



Şekil 2.3. Dış kuvvetler, iç kuvvetler, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler arasındaki ilişki

Bahsedilen denklemlerin uygulanmasıyla bulunan gerilme ve birim şekil değiştirmelerin elemanın sınır koşullarına uygun olması gerekmektedir. Bu durum, sınır koşullarının sağlanması olarak ifade edilmektedir.

Gerilme ve şekil değiştirme analizinde, şekil değiştirme enerjisi kavramından hareketle geliştirilen enerji yöntemleri, denge yöntemi yerine kullanılmaktadır. Her iki yöntem, yükleme ve eleman şeklinin düzenli olması durumunda yeterli hassaslıkta sonuç verirken, karmaşık problemlerin çözümünde de sayısal yöntemlerin uygulanabileceği temeli oluşturmaktadırlar. Bu bölümde, alan denklemleri elde edilecek ve dış yüklerle gerilmeler, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılar çıkarılacaktır.

2.2.2. Dış Kuvvetler

Çubuk elemanına etki eden bütün dış kuvvetler $\vec{p}(s)$ ve $\vec{m}(s)$ gibi iki fonksiyonla gösterilebilir:

$\vec{p}(s)$ vektörü, doğrultuları çubuk ekseninden geçen ve çubuk üzerinde, s eksenini boyunca yayılı bulunan dış kuvvetleri göstermektedir ve matematiksel olarak;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta s} \right) = \vec{p} \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada,

Δs , çubuk eksen parçasını; $\Delta \vec{P}$ ise Δs eksen parçasına etkiyen dış kuvvetlerin vektörel toplamını simgelemektedir.

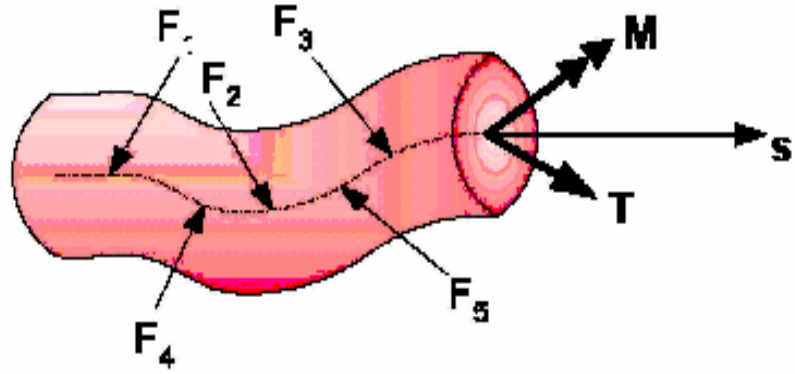
$\vec{m}(s)$ vektörü, yine çubuk ekseninde yayılı olarak bulunan kuvvet çiftlerini göstermektedir ve matematiksel olarak;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{M}}{\Delta s} \right) = \vec{m} \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\Delta \vec{M}$, Δs eksen parçasına etkiyen kuvvet çiftlerinin vektörel toplamını simgelemektedir.

2.2.3. İç Kuvvetler

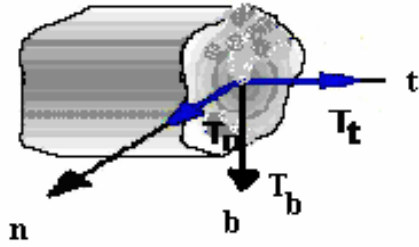
İç Kuvvetler, cismin bünyesini oluşturan malzeme parçaları arasındaki etkileşim kuvvetleri olarak algılanmaktadır. Kesit tesirleri ya da kesit zorları da denilen iç kuvvetler, bir kesitle kesilen çubuk parçaları arasındaki etki ve tepki kuvvetleridir. Etki ve tepki kuvvetleri birbirine eşit olduğundan kesim yüzlerindeki kuvvetler birbirine eşit fakat zıt yönlü olmaktadır. Bu kuvvetler cisim parçaları arasındaki etki-tepki kuvvetleri olduğundan tüm kesit boyunca yayılı halde bulunmaktadır. Ancak bu yayılı kuvvetler kesit ağırlık merkezlerinde toplanabilirler ve bir kuvvetle bir kuvvet çifti vektörü olarak gösterilebilirler.(Şekil 2.4)



Şekil 2.4. Dış Kuvvetler ve İç Kuvvetler [29]

Kesitin ağırlık merkezindeki bu vektörler kesite dik ve teğet doğrultudaki bileşenlerine ayrılmaktadır. Böylece çeşitli yönlerde yayılı şekilde bulunan ve kesit merkezine toplanan iç kuvvetler daha sağlıklı bir şekilde tarif edilmektedir.

$$\vec{T} = T_t \vec{t} + T_b \vec{b} + T_n \vec{n}$$

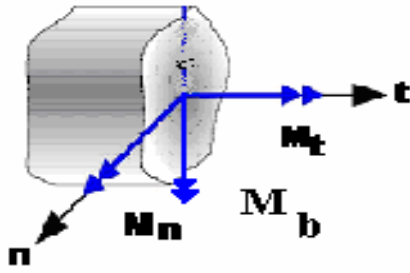


T_t : Eksenel Kuvvet

T_b : Kesme Kuvveti

T_n : Kesme Kuvvet

Şekil 2.5. Bileşke Kuvvetin Eksenler Doğrultusundaki Bileşenleri [29]



$$\vec{M} = M_t \vec{t} + M_b \vec{b} + M_n \vec{n}$$

M_t : Burulma Momenti

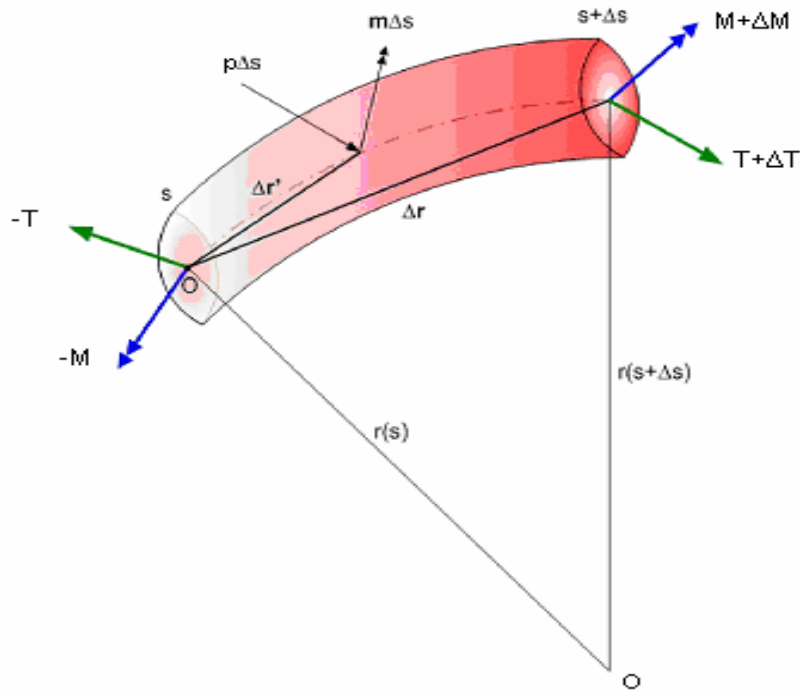
M_b : Eğilme Momenti

M_n : Eğilme Momenti

Şekil 2.6. Bileşke Momentin Eksenler Doğrultusundaki Bileşenleri [29]

2.2.4. Denge Denklemleri

Çubuk elemanından Şekil 2.7'deki Δs kadarlık çok küçük bir parçayı aldığımızı düşünelim:



Şekil 2.7. Diferansiyel Çubuk Elemanı Üzerinde Kesit Zorlarının Değişimi [29]

$\vec{T}$ ve $\vec{M}$ iç kuvvetleri her kesitte aynı kalmayıp çubuk eksenini boyunca değişmektedirler. Amaç bu $T(s)$ ve $M(s)$ fonksiyonlarının bulunmasıdır. Bilindiği gibi iç kuvvetler dış kuvvetlerin yapısal elemana etkimesi sonucunda oluşmaktadırlar. Öyleyse, cisme etkiyen bu dış kuvvetler ile cisim parçacıkları arasında oluşan iç kuvvetler arasında bir ilişkinin olacağını söylemek yanlış olmamaktadır.

Çubuk eksenindeki dış kuvvetlerin toplamı $\vec{p}\Delta s$, kuvvet çiftlerinin toplamı da $\vec{m}\Delta s$ kadar olmaktadır. Çubuğa etkiyen bu kuvvetler neticesinde, s kesitine etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı $-\vec{T}$ ve kuvvet çiftlerinin toplamı da $-\vec{M}$ olsun. Çubuk eksenini üzerinde Δs kadar gittiğimizde iç kuvvetteki değişim $\Delta\vec{T}$ ve kuvvet çiftindeki değişim de $\Delta\vec{M}$ kadar olsun. Dolayısıyla $s+\Delta s$ kesitindeki iç kuvvetlerin vektörel toplamı $\vec{T} + \Delta\vec{T}$ ve kuvvet çiftlerinin vektörel toplamı da $\vec{M} + \Delta\vec{M}$ kadar olur.

Şekil 2.7’de verilen bu çubuk elemanı (diferansiyel eleman), üzerine etkiyen dış kuvvetler ve kesitlerinde oluşan iç kuvvetler altında dengededir.

Öyleyse aşağıdaki denge denklemleri yazılabilir:

$$i. \quad -\vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + \vec{p}\Delta s = 0$$

$$\Delta\vec{T} + \vec{p}\Delta s = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} + \vec{p} = 0$$

Δs sıfıra giderken limite geçilirse;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} + \vec{p} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir.

ii. Sol kesite göre moment dengesi yazılırsa;

$$\Delta \vec{M} + \vec{m} \Delta s + \Delta \vec{r}' \times \vec{p} \Delta s + \Delta \vec{r} \times (\vec{T} + \Delta \vec{T}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta \vec{M} + \vec{m} \Delta s + \Delta \vec{r}' \times \vec{p} \Delta s + \Delta \vec{r} \times \vec{T} + \Delta \vec{r} \times \Delta \vec{T} = 0$$

elde edilir. İkinci mertebeden terimler ihmal edilirse ve her terim Δs 'ye bölünürse;

$$\frac{\Delta \vec{M}}{\Delta s} + \vec{m} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \vec{T} = 0 \quad (2.7)$$

yazılır ve Δs 'yi sıfıra götürüp limite geçilirse;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta s} + \vec{m} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \vec{T} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{t} \times \vec{T} = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir. Elde edilen (2.5) ve (2.9) denklemleri “Vektörel Diferansiyel Denge Denklemleri” olarak adlandırılmaktadır.

2.2.5. Kinematik Denklemler

Dış etkiler sonucunda çubuk elemanda oluşan iç kuvvetler ve bunların arasındaki bağıntılar önceki kısımda açıklanmıştı. Bu kısımda da dış etkilerden doğan çubuktaki şekildeğiştirme durumları incelenecektir.

Çubuktaki yer değiştirme olayı, çubuk eksenindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi ile tarif edilmektedir. Bu da demektir ki yer değiştirme çubuk eksenine bağlı bir fonksiyondur. Yer değiştirme $\vec{U}$ ile gösterilirse bu fonksiyon da $\vec{U}(s)$ ile gösterilmektedir.

The diagram illustrates a curved beam element of length ds along the arc length s . The beam is shown in a 3D perspective, with points A, B, C, D, E, and F marking various locations. At point A, internal forces and moments are shown as $-\vec{T}$ (shear force), $-\vec{M}$ (bending moment), and $\vec{U}$ (axial force). At point B, the corresponding forces and moments are $\vec{T} + d\vec{T}$, $\vec{M} + d\vec{M}$, and $\vec{U} + d\vec{U}$. The beam is subjected to a distributed load $\vec{p}$ acting perpendicular to the beam's axis. The position vector $\vec{r}(s)$ is shown at point A, and $\vec{r}(s + \Delta s)$ is shown at point C. The differential arc length ds is indicated along the beam's axis. The diagram also shows the beam's cross-section at points D and E, with the normal vector $\vec{n}$ and the differential displacement $d\vec{r}$ along the arc length s . The beam's axis is labeled $s(+)$ and $d\vec{r}$. The beam's cross-section at point D is labeled $\vec{U} + d\vec{U}$ and $\vec{r} \times d\vec{r}$. The beam's cross-section at point E is labeled $\vec{U} + d\vec{U}$ and $\vec{r} \times d\vec{r}$. The beam's cross-section at point F is labeled $\vec{U} + d\vec{U}$ and $\vec{r} \times d\vec{r}$.

Çubuk eleman şekildeğiştirdikten sonra düzlem olan kesit artık düzlem kalmamakta ve karışık bir hal almaktadır. Ancak çok küçük olacak bu şekildeğiştirmeleri ihmal ederek düzlem kesitin yine düzlem kaldığını varsaymak teoriyi çok kolaylaştırmaktadır. Bu varsayım altında kesitte oluşacak yerdeğiştirmelerin rijit bir hareket olduğu düşünülmektedir. Düzlem kesitteki bu rijit yerdeğiştirmeler ötelenme ve dönme hareketlerinden ileri gelmektedir.

15

Birincisi, B noktası A noktasına göre $\bar{\gamma}\Delta s$ kadar farklı hareket etmektedir. İkincisi, A'dan geçen kesit $\bar{\Omega}$ dönmesini yaparsa B'den geçen kesit de $\bar{\Omega}\times\Delta\vec{r}$ dönmesini yapmaktadır.

$$\Delta\vec{U} = \bar{\gamma}\Delta s + \bar{\Omega}\times\Delta\vec{r} \quad (2.10)$$

Bu ifadedeki $\bar{\gamma}$ vektörü birim uzunluklu çubuk elemanındaki özgül şekildeğiştirmeyi

göstermektedir. $\left(\frac{d\vec{U}}{ds}\right)_{\bar{\Omega}=0} = \bar{\gamma}$ ifadesi ile tanımlanmaktadır ve birim kayma

vektörü ismini almaktadır. $\bar{\Omega}$ vektörü ise kesit ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi göstermektedir. Birim uzunluklu bir çubuk elemanındaki

dönme, $\bar{\omega} = \frac{d\bar{\Omega}}{ds}$ ifadesi ile tanımlanmaktadır ve birim dönme vektörü ismini almaktadır.

(2.10) denkleminde taraflar Δs e bölünüp limite geçilirse,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{U}}{\Delta s} = \bar{\gamma} \frac{\Delta s}{\Delta s} + \bar{\Omega} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{ds} = \bar{\gamma} + \bar{\Omega} \times \vec{t} \quad (2.11)$$

olarak yazılır.

Elde edilen ifade, çubuktaki ötelenme ve dönme hareketleri arasındaki bağıntıyı vermektedir. Demek ki kesitin yapmış olduğu ötelenme ve dönme hareketleri birbirinden bağımsız olmamakta, aralarında diferansiyel bir bağıntı bulunmaktadır.

Hesaplarda $\bar{\gamma} \approx 0$ alınıyorsa uzama ve kayma hareketleri ihmal ediliyor demektir. Hatırlanacağı gibi bu durum Euler-Bernoulli hipotezi için geçerli olmaktadır ve dikkate alınıyor ise Timoshenko hipotezi geçerli olmaktadır.

Sonuç olarak,

$$\frac{d\vec{U}}{ds} - \bar{\gamma} + \vec{t} \times \bar{\Omega} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (2.13)$$

Bu denklemler “Vektörel Diferansiyel Kinematik Denklemler” olarak adlandırılmaktadır.

2.2.6. Bünye Denklemleri

2.2.4 de, denge denklemleri yazılıp dış kuvvetler ile iç kuvvetler arasındaki bağıntılar elde edilmişti. Ancak kinematik denklemler çıkartılırken dış kuvvetlerle şekildeğiştirmeler arasındaki bağıntılar elde edilmemiştir. Şekildeğiştirmeler dış kuvvetler neticesinde oluştuğuna göre bu kuvvetlerle şekildeğiştirmeler arasında bir bağıntı bulunması gerekmektedir. Bu sebeple bu kısımda da bünye denklemleri vasıtasıyla, sözü edilen bağıntılar çıkarılacaktır.

Elastik bir cisimde, cismin kesitlerindeki iç kuvvetler ile şekildeğiştirmeler arasında doğrusal bir bağıntı vardır. Bu bağıntı cisimlerin fiziksel özelliklerine bağlıdır ve her cisim için farklı farklı olmaktadır.

Kesitlerde oluşan kuvvet vektörleri ile kayma birim vektörleri ve kuvvet çifti vektörleri ile dönme birim vektörleri arasında böyle bir doğrusal bağıntı bulunmaktadır. Herhangi bir eksen takımı için bu vektörlerin koordinatları birbirine doğrusal olarak bağlıdır. Bu doğrusal bağıntı Hooke Kanunu esaslarına dayanmaktadır.

Herhangi bir eksen takımı için $\vec{T}$ vektörünün koordinatları (T_1, T_2, T_3) ve $\vec{M}$ vektörünün koordinatları da (M_1, M_2, M_3) ise,

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 & , & & M_1 &= D_{11}\omega_1 + D_{12}\omega_2 + D_{13}\omega_3 \\ T_2 &= C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 & , & & M_2 &= D_{21}\omega_1 + D_{22}\omega_2 + D_{23}\omega_3 \\ T_3 &= C_{31}\gamma_1 + C_{32}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 & , & & M_3 &= D_{31}\omega_1 + D_{32}\omega_2 + D_{33}\omega_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Kısa gösterimle, $T_i = C_{ik} \gamma_k$ ve $M_i = D_{ik} \omega_k$ ilişkileri vardır. Buradaki C_{ik} ve D_{ik} katsayıları sadece cismin malzemesine ve kesitin geometrisine bağlı olup $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ değerlerinden bağımsızdırlar. Malzememiz homojen, izotropsa ve kesit ve kesitin konumu da değişmiyorsa bu katsayılar s değişkeninden de bağımsız olmaktadır. Bu katsayıları cismin kaymaya ve dönmeye karşı rijitlikleri denmektedir. Matris formda,

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

şeklinde olup kesitteki gerilmeler ile şekildeğiştirmeler tansör notasyonu ile de

$$\vec{T} = C \vec{\gamma} \quad \text{ve} \quad \vec{M} = D \vec{\omega} \quad (2.16)$$

şeklinde gösterilebilir. C ve D tansörlerinin ikisi de simetriktir. Yani, $C_{ik} = C_{ki}$ ve $D_{ik} = D_{ki}$ dir. Öyleyse 9 adet olan katsayıların 6 adedinin bilinmesi yeterlidir. Açık hali,

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklinde C ve D matrislerinin determinantları sıfırdan farklı olduğu için bu matrislerin tersleri de vardır. Bu matrislerin ters matrislerini tarif edebiliyorsak ;

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \vec{T} \quad \text{ve} \quad \vec{\omega} = D^{-1} \vec{M} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

C_{ij}^{-1} , D_{ij}^{-1} tansörlerine esneklik tansörü denmektedir.

2.3. Kullanılacak Olan Denklemlerin Çıkarılışı

Yukarıdaki paragraflarda elastik çubuk teorisini tanımlayan 6 adet denklem elde edilmiştir.

Bu denklemleri daha açık bir biçimde yazmak için Frenet formüllerinden yararlanılmıştır. Bunlar :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \chi \cdot \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \chi \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{R} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}\tag{2.20}$$

şeklinde olup χ eğriliği, τ ise eğriliğin tabi torsiyonunu ifade etmektedir. τ değeri uzay eğrilerinde sıfırdan farklı olduğu halde bütün düzlem eğriler için sıfırdır.

i. Denge denklemlerinden;

$$a) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0$$

$$\frac{d}{ds}(T_t \vec{t} + T_b \vec{b} + T_n \vec{n}) + (p_t \vec{t} + p_b \vec{b} + p_n \vec{n}) = 0\tag{2.21}$$

$$\frac{dT_t}{ds} \cdot \vec{t} + T_t \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{dT_b}{ds} \cdot \vec{b} + T_b \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} + \frac{dT_n}{ds} \cdot \vec{n} + T_n \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} + (p_t \vec{t} + p_b \vec{b} + p_n \vec{n}) = 0$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ birim vektörleri arasındaki bağıntılar (Frenet Formülleri) hesaba katılıp düzenlenirse, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir. Bu denklemlerin ilk ikisi düzlem içi üçüncüsü ise düzlem dışı problemlerde geçerlidir.

$$\begin{aligned}\vec{t} \left(\frac{dT_t}{ds} - \frac{1}{R} T_n + p_t \right) &= 0 \\ \vec{n} \left(\frac{1}{R} T_t + \frac{dT_n}{ds} + p_n \right) &= 0 \\ \vec{b} \left(\frac{dT_b}{ds} + p_b \right) &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

$ds = R d\theta$ yazılıp yukarıdaki denklem tekrar düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}\frac{dT_t}{d\theta} - T_n + R p_t &= 0 \\ \frac{dT_n}{d\theta} - T_t + R p_n &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\theta} + R p_b &= 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

elde edilir.

$$\text{b) } \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{m} + \vec{t} \times \vec{T} = 0\tag{2.24}$$

$$\frac{d}{ds} (M_t \vec{t} + M_b \vec{b} + M_n \vec{n}) + (m_t \vec{t} + m_b \vec{b} + m_n \vec{n}) + \vec{t} \times (T_t \vec{t} + T_b \vec{b} + T_n \vec{n}) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dM_t}{ds} \vec{t} + M_t \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{dM_b}{ds} \vec{b} + M_b \frac{d\vec{b}}{ds} + \frac{dM_n}{ds} \vec{n} + M_n \frac{d\vec{n}}{ds} \\ + (m_t \vec{t} + m_b \vec{b} + m_n \vec{n}) + (-T_b \vec{n} + T_n \vec{b}) = 0\end{aligned}$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ birim vektörleri arasındaki bağıntılar (Frenet Formülleri) hesaba katılıp düzenlenirse, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir. Bu denklemlerin ilk ikisi düzlem dışı üçüncüsü ise düzlem içi problemlerde geçerlidir.

$$\begin{aligned}\vec{t} \left(\frac{dM_t}{ds} - \frac{1}{R} M_n + m_t \right) &= 0 \\ \vec{n} \left(\frac{1}{R} M_t + \frac{dM_n}{ds} + m_n - T_b \right) &= 0 \\ \vec{b} \left(\frac{dM_b}{ds} + m_b - T_n \right) &= 0\end{aligned}\tag{2.25}$$

$ds = R d\theta$ yazılıp yukarıdaki denklem tekrar düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}\frac{dM_t}{d\theta} - M_n + R m_t &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\theta} - M_t + R m_n - R T_b &= 0 \\ \frac{dM_b}{d\theta} + R m_b - R T_n &= 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

ii. Yerdeğiştirmeler ile şekildeğiştirmeler arasındaki uygunluğu gösteren kinematik denklemlerden ;

$$\text{a) } \frac{d\vec{U}}{ds} - \vec{\gamma} + \vec{t} \times \vec{\Omega} = 0\tag{2.27}$$

$$\frac{d}{ds} (U_t \vec{t} + U_b \vec{b} + U_n \vec{n}) + (\gamma_t \vec{t} + \gamma_b \vec{b} + \gamma_n \vec{n}) + \vec{t} \times (\Omega_t \vec{t} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_n \vec{n}) = 0$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ birim vektörleri arasındaki bağıntılar (Frenet Formülleri) hesaba katılıp düzenlenirse, aşağıdaki denklemler elde edilmektedir. Bu denklemlerin ilk ikisi düzlem içi üçüncüsü ise düzlem dışı problemlerde geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\vec{t}(\frac{dU}{ds} - \frac{1}{R}U_n - \gamma_t) &= 0 \\
\vec{n}(\frac{1}{R}U_t + \frac{dU}{ds}n - \gamma_n - \Omega_b) &= 0 \\
\vec{b}(\frac{dU}{ds}b - \gamma_b + \Omega_n) &= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$ds = R d\theta$ yazılıp yukarıdaki denklem tekrar düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\theta}t + U_n - R\gamma_t &= 0 \\
\frac{dU}{d\theta}n + U_t - R\gamma_n - R\Omega_b &= 0 \\
\frac{dU}{d\theta}b - R\gamma_b + R\Omega_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir.

$$\text{b) } \frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{d}{ds}(\Omega_t \vec{t} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_n \vec{n}) + (\omega_t \vec{t} + \omega_b \vec{b} + \omega_n \vec{n}) = 0$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ birim vektörleri arasındaki bağıntılar (Frenet Formülleri) hesaba katılıp düzenlenirse, aşağıdaki denklemler elde edilir. Bu denklemlerin ilk ikisi düzlem dışı üçüncüsü ise düzlem içi problemlerde geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\vec{t}(\frac{d\Omega}{ds}t + \frac{1}{R}\Omega_n - \omega_t) &= 0 \\
\vec{n}(\frac{1}{R}\Omega_t + \frac{d\Omega}{ds}n - \omega_n) &= 0 \\
\vec{b}(\frac{d\Omega}{ds}b - \omega_b) &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$ds = R d\theta$ yazılıp yukarıdaki denklem tekrar düzenlenir ise;

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_t}{d\theta} + \Omega_n - R\omega_t &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - R\omega_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{d\theta} - R\omega_b &= 0\end{aligned}\tag{2.32}$$

c) Bünye denklemlerinden;

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \vec{T}\tag{2.33}$$

$$\vec{\omega} = D^{-1} \vec{M}\tag{2.34}$$

elde edilir. Bilinmeyenler olarak kesit tesirleri $\vec{T}, \vec{M}$, şekildeğiştirmeler $\vec{\gamma}, \vec{\omega}$, yerdeğiştirmeler ile dönmeyi $\vec{U}, \vec{\Omega}$, elde ettiğimiz bu 6 adet denklemle bulabiliriz. Elastik çubuk problemleri tamamen elde ettiğimiz bu 12 denklem vasıtasıyla çözümlenebilir. Bu çalışmada düzlem dışı serbest titreşim ele alınacağından denklemlerden bazıları dikkate alınmayacaktır.

Düzlem dışı çubuk problemi şu altı denklemle tanımlanır:

$$\begin{aligned}\frac{dM_t}{d\theta} - M_n + Rm_t &= 0 & \frac{d\Omega_t}{d\theta} + \Omega_n - R\omega_t &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\theta} - M_t + Rm_n - RT_b &= 0 & \frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - R\omega_n &= 0 \\ \frac{dU_b}{d\theta} - R\gamma_b + R\Omega_n &= 0 & \frac{dT_b}{d\theta} + Rp_b &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

Ancak bu denklemler çubuğun düzlem dışı statik davranışını tanımlamaktadır. Bu çalışmada düzlem dışı serbest titreşim inceleneceğinden p_b dış kuvveti yerine $-m\ddot{u}_b$ atalet kuvveti yazılmalıdır.

3. FONKSİYONEL ANALİZ

Sürekli ortam problemleri diferansiyel formülasyonla ifade edilebildiği gibi varyasyonel (değişim) formülasyonla da ifade edilebilmektedir. Diferansiyel formülasyonda, çözüm, belirli sınır koşulları altındaki diferansiyel denklemi ya da denklem sistemini integre etmektir. Varyasyonel formülasyonda ise problem, aynı sınır koşulları altındaki fonksiyonelin değişimini sıfır yapan fonksiyonu ya da fonksiyonları bulmaktır. Fonksiyonel, içerisinde aranan fonksiyon ve bu fonksiyonun türevleri bulunan integral ifadesine denir. Diferansiyel denklemi ve onun sınır koşullarını sağlayan fonksiyon aynı zamanda fonksiyonelin değişimini de sıfır yapan fonksiyon olmaktadır. Bu sebeple her iki formülasyon da birbirine denk olmaktadır. Varyasyonel formülasyonun diferansiyel formülasyona göre avantajları vardır: Fonksiyonel belirli bir fizik anlama sahip olup koordinat dönüşümleri altında değişmez. Böylece bir koordinat takımında elde edilen ifade diğer bir koordinat takımı için de geçerlidir. Karışık problemlerin diferansiyel denklemlerinin ve sınır koşullarının elde edilmesinde güvenilir bir yoldur. Bir probleme ait diferansiyel denklem takımının verilen sınır koşulları altında çözümü güçse, probleme Ritz , Galerkin, Sonlu elemanlar gibi yöntemler kullanılarak yaklaşık bir çözüm verilebilir.[31]

3.1. Diferansiyel Denklemlerden Fonksiyonele Geçiş

3.1.1. Potansiyellik koşulu

$\mathbf{Q}=\mathbf{L}\mathbf{y}-\mathbf{f}$ alan denklemlerinin operatör yapıda gösterimi olmak üzere, $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{y}$ değişkenleri, $\mathbf{f}$ ise dış yükleri temsil etmektedir. $\mathbf{Q}=\mathbf{L}\mathbf{y}-\mathbf{f}$ operatörünün potansiyel bir operatör olabilmesi için potansiyellik koşulunu sağlamalıdır. Potansiyellik koşulunun matematiksel olarak ifade edilebilmesi için $\mathbf{Q}$ operatörünün bir yöne göre türevinin diğer yöndeki toplamı, bu işlemin tersine eşitlenmelidir. Matematik format ile

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir.

$\mathbf{Q}$ operatörünün $\bar{\mathbf{y}}$ yönüne göre türevinin $\mathbf{y}^*$ yönündeki toplamı, aynı fonksiyonun $\mathbf{y}^*$ yönüne göre türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki toplamına eşittir şeklinde ifade edilir. Bu denklemin yazılabilmesi için yönsel türev (Gateaux türevi) ve yönsel toplam tanımlaması gerekmektedir.

3.1.1.1 Yönsel Toplam (İç Çarpım)

Yönsel toplam, bir fonksiyonla bir değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integralidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\left[f(x), \mathbf{y}^* \right] = \int_b^a f(x) \mathbf{y}^* dx \quad (3.2)$$

3.1.1.2 Gateaux Türevi (Yönsel Türev)

Yönsel türevin matematiksel ifadesi η bir skaler olmak üzere

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \eta \bar{\mathbf{y}})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir.

İç çarpım aşağıdaki denklemler arasında gerçekleşmiştir.(Düzlem dışı serbest titreşim diferansiyel denklemleri)

$$\begin{aligned}
-\frac{dT_b}{d\theta} + R\rho A\omega^2 u_b &= 0 \quad \square \quad u_b \\
-\frac{dM_n}{d\theta} - M_t + RT_b &= 0 \quad \square \quad \Omega_n \\
-\frac{dM_t}{d\theta} + M_n &= 0 \quad \square \quad \Omega_t \\
\frac{d\Omega_t}{d\theta} - \Omega_n - \frac{R}{D_t} M_t &= 0 \quad \square \quad M_t \\
\frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - \frac{R}{D_n} M_n &= 0 \quad \square \quad M_n \\
\frac{du_b}{d\theta} + R\Omega_n - \frac{R}{C_b} T_b &= 0 \quad \square \quad T_b
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Buna göre, alan denklemlerinin değişkenlere göre “—” yönündeki Gateaux (yönsel) türevi “*” yönünde toplanacak şekilde iç çarpımı yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left[dQ(y, \bar{y}), y^* \right] &= R\rho A\omega^2 \left[\bar{u}_b, u_b^* \right] - \left[\bar{T}_b, u_b^* \right] - \left[\bar{M}_t, \Omega_n^* \right] - \left[\bar{M}_n, \Omega_n^* \right] + R \left[\bar{T}_b, \Omega_n^* \right] \\
&\quad - \left[\bar{M}_t, \Omega_t^* \right] + \left[\bar{M}_n, \Omega_t^* \right] - \left[\bar{\Omega}_n, M_t^* \right] + \left[\bar{\Omega}_t, M_t^* \right] \\
&\quad - \frac{R}{D_t} \left[\bar{M}_t, M_t^* \right] + \left[\bar{\Omega}_n, M_n^* \right] + \left[\bar{\Omega}_t, M_n^* \right] - \frac{R}{D_n} \left[\bar{M}_n, M_n^* \right] \\
&\quad + \left[\bar{u}_b, T_b^* \right] + R \left[\bar{\Omega}_n, T_b^* \right] - \frac{R}{C_b} \left[\bar{T}_b, T_b^* \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde “*” yönündeki yönsel türevi “—” yönünde toplanacak şekilde iç çarpımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \left[dQ(y, y^*), \bar{y} \right] = & R \rho A \omega^2 \left[u_b^*, \bar{u}_b \right] - \left[T_b^*, \bar{u}_b \right] - \left[M_t^*, \bar{\Omega}_n \right] - \left[M_n^*, \bar{\Omega}_n \right] + R \left[T_b^*, \bar{\Omega}_n \right] \\
 & - \left[M_t^*, \bar{\Omega}_t \right] + \left[M_n^*, \bar{\Omega}_t \right] - \left[\Omega_n^*, \bar{M}_t \right] + \left[\Omega_t^*, \bar{M}_t \right] \\
 & - \frac{R}{D_t} \left[M_t^*, \bar{M}_t \right] + \left[\Omega_n^*, \bar{M}_n \right] + \left[\Omega_t^*, \bar{M}_n \right] - \frac{R}{D_n} \left[M_n^*, \bar{M}_n \right] \\
 & + \left[u_b^*, \bar{T}_b \right] + R \left[\Omega_n^*, \bar{T}_b \right] - \frac{R}{C_b} \left[T_b^*, \bar{T}_b \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5) denkleminde $\int a'b$ tarzındaki ifadeler $\int a'b = \int (ab)' - \int ab'$ şeklinde tekrar yazılıp gerekli düzeltmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
 \left[dQ(y, \bar{y}), y^* \right] = & \left[dQ(y, y^*), \bar{y} \right] + \left[\bar{T}_b, u_b^* \right]_0 + \left[M_n^*, \Omega_n^* \right]_0 \\
 & + \left[\bar{M}_t, \Omega_t^* \right]_0 + \left[\bar{\Omega}_t, M_t^* \right]_0 - \left[\bar{\Omega}_n, M_n^* \right]_0 - \left[\bar{u}_b, T_b^* \right]_0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) denklemindeki son altı terim sınır koşullarını belirtmektedir. $\sigma + \varepsilon = 0$ ifadesi sınır koşulları ifadesi olduğu bilindiğinden denklem (3.7) de yerleştirilir ise;

$$\begin{aligned}
\left[dQ(y, \bar{y}), y^* \right] = & \left[dQ(y, y^*), \bar{y} \right] + \left[\bar{T}_b, u_b^* \right]_{\sigma} + \left[\bar{T}_b, u_b^* \right]_{\varepsilon} + \left[M_n^*, \Omega_n^* \right]_{\sigma} \\
& + \left[M_n^*, \Omega_n^* \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{M}_t, \Omega_t^* \right]_{\sigma} + \left[\bar{M}_t, \Omega_t^* \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{\Omega}_t, M_t^* \right]_{\sigma} \\
& + \left[\bar{\Omega}_t, M_t^* \right]_{\varepsilon} - \left[\bar{\Omega}_n, M_n^* \right]_{\sigma} - \left[\bar{\Omega}_n, M_n^* \right]_{\varepsilon} - \left[\bar{u}_b, T_b^* \right]_{\sigma} - \left[\bar{u}_b, T_b^* \right]_{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bağıntısı elde edilir. σ ve ε alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını tanımlamaktadır. (3.8) denkleminde sınır koşulları tanıtılıp sol tarafa eklendiğinde sınır değerler birbirini götürcek, böylece operatörün potansiyelliği kanıtlanmış olacaktır.

3.2. Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Potansiyellik koşulu sağlatılan operatör daha önce elde edilmişti. Bu operatörün Gateaux türevi alınırsa, fonksiyonel şu şekilde ifade edilir [32] :

$$I(y) = \int_0^1 \langle Q(sy, y), y \rangle ds \tag{3.9}$$

Burada s skaler bir büyüklüktür.

$$\begin{aligned}
I(y) = & \frac{\rho A \omega^2 R}{2} \left[u_b, u_b \right] + R \left[T_b, \Omega_n \right] - \left[T_b', u_b \right] - \frac{R}{2D_t} \left[M_t, M_t \right] \\
& - \frac{R}{2D_n} \left[M_n, M_n \right] - \frac{R}{2C_b} \left[T_b, T_b \right] - \left[M_t, \Omega_n \right] + \left[M_n, \Omega_t \right] - \left[M_n', \Omega_n \right] \\
& - \left[M_t', \Omega_t \right] + \left[\hat{u}_b, T_b \right]_{\varepsilon} + \left[\hat{\Omega}_n, M_n \right]_{\varepsilon} + \left[\hat{\Omega}_t, M_t \right]_{\varepsilon} + \left[(M_n - \hat{M}_n), \Omega_n \right]_{\sigma} \\
& + \left[(T_b - \hat{T}_b), u_b \right]_{\sigma} + \left[(M_t - \hat{M}_t), \Omega_t \right]_{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak fonksiyonel son şeklini alır.

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?

Sonlu Elemanlar Yöntemi, çok çeşitli mühendislik alanlarındaki problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmamızı sağlayan sayısal bir çözümleme tekniğidir. Uçak gövdelerindeki gerilme çözümlemesinde kullanılmak üzere geliştirilmesine rağmen yıllar boyunca üzerinde çalışılmış, daha da geliştirilmiş ve böylece sürekli ortamlar mekaniğinde çok geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Değişik ve esnek bir çözümleme aracı olduğundan mühendislik okullarında ve endüstride çok daha fazla dikkat çekmiş ve farklı farklı problemlere uygulanmıştır.

Günümüzde birçok mühendislik problemlerinde kapalı formdaki kesin çözümlerden ziyade yaklaşık sayısal çözümleri bulmamız gerekmektedir. Örneğin, karmaşık şekilli bir levhanın yük taşıma kapasitesini, farklı atmosfer koşullarında havadaki kirlilik oranını ya da değişken geometrili bir kanaldaki akışkanın debisini bulmak isteyebiliriz. İlk olarak, bu fiziksel olayların diferansiyel denklemlerini yazıp sınır koşullarını tanıtır ve çözümü elde edebiliriz fikri aklımıza gelmektedir. Fakat çözümü yaparken bu problemlerin basit bir analitik çözümünün olmadığını hemen anlarız. Çözümlerdeki zorluklar, geometrideki ve diğer bazı özelliklerdeki düzensizlikten ve değişkenlikten kaynaklanmaktadır. Peki, bu tür karmaşık problemler nasıl çözümlenmektedir?

Belki problem daha basite indirgenebilir. Çözümdeki zorlukları ihmal ederek problem bu şekilde ele alınabilir. Bu düşünce bazen sonuç vermektedir. Ancak çoğu zaman çok ciddi hatalar ve yanlış sonuçlar elde edilmektedir. Diğer bir düşünce, problemi tüm zorluklarıyla ele almak ve kesin sonuçtan ziyade kesine yaklaşık bir sonuç elde etmektir. Artık çok gelişmiş bir bilgisayar teknolojimiz var olduğundan ikinci düşünce tarzı çok daha mantıklı gözükmektedir. Çünkü bu tür karmaşık

problemlerin yaklaşık çözümlene teknikleri uzun zaman alan ve yorucu yöntemlerdir. Gelişmiş bilgisayarları kullanmayı kaçınılmaz kılmaktadır.

Yıllar boyunca birçok sayısal yaklaşık çözümlene yöntemi geliştirilmiştir. Bunlar Sonlu Farklar Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Sınır Elemanlar Yöntemi'dir.

4.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nasıl Çalışır?

Bir sürekli ortam probleminde, alan değişkeni (basınç, sıcaklık, şekildeğiştirme, gerilme...) sürekli ortamın noktasal bir fonksiyonu olduğundan sonsuz sayıda değere sahip olmaktadır. Bu nedenle sonsuz sayıda bilinmeyi olan bir problemle karşılaşılır. Sonlu Elemanlar Yöntemi, sürekli ortamı elemanlara bölerek ve her elemandaki alan değişkenlerini yaklaşım fonksiyonları cinsinden tanımlayarak, sonsuz sayıda bilinmeyi olan problemi sonlu sayıda bilinmeyi olan bir probleme indirgemektedir. İnterpolasyon fonksiyonları, alan değişkenlerinin 'nod' adı verilen özel noktadaki (düğüm noktaları) değerleri cinsinden tanımlanmaktadır. Nodlar genellikle bitişik elemanların birleşim yerlerinde, eleman sınırları üzerinde bulunmaktadır. Sınır noktalarında tanımlanan nodların yanında bazen elemanlar iç nodlara da sahip olabilirler. Alan değişkeninin nodal değerleri ve elemandaki interpolasyon fonksiyonları, alan değişkenlerinin elemanlardaki davranışını tamamen tanımlamaktadır. Bir problemin sonlu elemanlar tasarımında alan değişkenlerinin nodal değerleri bilinmeyenler olarak seçilmektedir. Bu bilinmeyenler bulunduğu, interpolasyon fonksiyonları alan değişkenlerini bütün elemanlar boyunca tanımlamaktadır.

Çözümün karakteri ve yaklaşımın derecesi sadece elemanların şekline ve sayısına değil seçilen interpolasyon fonksiyonlarına da bağlı olmaktadır. İnterpolasyon fonksiyonları gelişigüzel seçilmemeli, süreklilik koşulları sağlanmalıdır. Detaylı bilgi [33] nolu kaynakta bulunmaktadır. Sonlu Elemanlar Yöntemi'ni diğer sayısal yöntemlerden ayıran başka bir özellik de, bütün sürekli ortamı çözümlmeden önce, ayırlaştırdığımız sürekli ortamda her elemana ait çözümü bulmamız gerektiğidir. Örneğin; bir gerilme analizi probleminde her eleman için rijitlikler bulunur ve daha sonra bütün elemanlar birleştirilerek bütün sürekli ortamın rijitliği elde edilir. Esas olarak yapılmak istenilen; karışık bir problemi basit problemlere ayırarak, karışık problemi bu basit problemlerin birleşimi şeklinde düşünmektir.

Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde, sonlu eleman özelliklerini formüle etmek amacıyla üç değişik yaklaşım bulunmaktadır: İlk yaklaşım, kökeninin Doğrudan Rijitlik Metodu'na dayanması maksadıyla 'Doğrudan Yaklaşım' olarak adlandırılmaktadır. Bu yaklaşım daha çok basit problemler için kullanılmaktadır. İkinci yaklaşım, 'Değişim Yöntemi Yaklaşımı'dır. Bu yaklaşımın kökeni değişim hesaplarına dayanmaktadır. Detaylı bilgi [33] nolu kaynakta bulunmaktadır. Katı cisimler mekaniğinde, fonksiyonel olarak potansiyel enerji, tamamlayıcı enerji veya bunların değişik bir biçimi olan Reissner değişim prensibi kullanılmaktadır. 'Değişim Yöntemi Yaklaşımı'nın bilinmesi, Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin çok daha farklı ve geniş mühendislik problemlerine uyarlanabilmesi için gerekmektedir. Çünkü 'Doğrudan Yaklaşım' sadece basit eleman şekilleri için kullanılmasına karşılık 'Değişim Yöntemleri' hem basit hem çok daha karmaşık eleman şekillerine uygulanmaktadır. Üçüncü ve daha genel bir yaklaşım, 'Ağırlıklı Rezidüel Yöntemi'dir. Matematiksel esaslara dayanır. Fonksiyonelin bulunmadığı problemleri de çözmek amaçlıdır.

Eleman özelliklerini bulmak amaçla hangi yaklaşımı kullanırsak kullanalım, 'Sonlu Elemanlar Metodu' adım adım uygulanan bir sistematığe sahiptir. Aşağıda sırasıyla sistematığın aşamalarından kısaca bahsedilecektir.

4.3. Adım Adım Sonlu Elemanlar Metodu

1. Sürekli Ortamı Ayrıklaştırma

İlk adım sürekli ortamı veya çözüm alanını elemanlara bölmektir. Değişik eleman şekilleri aynı çözüm alanı içerisinde kullanılabilir. Kirişler, kabuklar gibi değişik yapısal elemanlara sahip elastik yapılarda değişik tarz eleman şekilleri kullanmak gereklidir.

2. İnterpolasyon Fonksiyonlarının Seçimi

Bir sonraki adım her elemana nodların atanması ve alan değişkeninin eleman üzerindeki değişimini tanımlayan interpolasyon fonksiyonlarının seçimidir. Alan değişkeni bir skaler, vektör ya da tansör olabilir. Türevlerini ve integrallerini almak kolay olduğundan interpolasyon fonksiyonları olarak genellikle polinomlar seçilir. Polinomun derecesi elemana atanan nod sayısına, nodlardaki bilinmeyen sayısına ve süreklilik koşullarına göre seçilir. Alan değişkenleri veya bunların türevleri nodlardaki bilinmeyenler olarak seçilebilir.

3. Eleman Özelliklerinin Bulunması

Elemanlar ve interpolasyon fonksiyonları seçildikten sonra her elemana ait özellikleri tanımlayan matris denklemlerini elde etmeye hazırız demektir. Şu halde, yukarıda açıklanan üç yaklaşımdan biri kullanılır.

4. Eleman Denklemlerinin Bir Araya Getirilmesi

Tüm sistemin özelliklerini tanımlayan matris denklemlerini kurmak amacıyla, her elemana ait matris denklemlerini bir araya getirmek gerekir. Bir araya getirmenin mantığı, elemanların birbirine bağlandığı nodlarda komşu elemanların alan değişkenlerinin aynı değerlere sahip olmasıdır.

5. Sınır Koşullarının Eklenmesi

Tüm sistemin matris denklemleri elde edildikten sonra, bu denklemler, çözümlemeye geçmeden, sistemin sınır koşullarını da içerecek şekilde tekrar düzenlenmelidir. Bu safhada denklemlere nodlardaki bilinen değerler eklenir.

6. Tüm Sistem Denklemlerinin Oluşturulması

Tüm sistemin matris denklemleri elde edilince karşımıza çözmemiz gereken denklem takımı ortaya çıkar. Bu denklem takımının çözümü sonucunda problemdeki nodal bilinmeyenler elde edilmiş olur. Eğer problem, statik veya denge problemi ise lineer veya nonlineer cebirsel denklem takımlarının çözümüyle karşılaşılır. Eğer problem dinamik tarzda ise problem özdeğer bulma problemine indirgenmiş olacaktır.

7. Diğer Sonuçların Hesaplanması

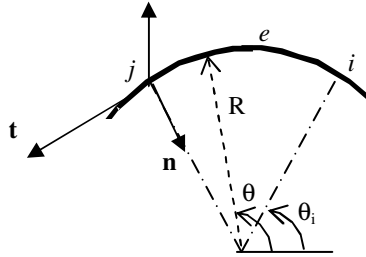
Genellikle denklem takımlarının çözümünden bulunan sonuçlar, diğer önemli parametrelerin bulunmasında kullanılır. Bulunan yerdeğiştirmelerden gerilme ve şekildeğiştirmeler hesaplanabilir.

4.4. Karışık Sonlu Elemanlar Metodu

Klasik sonlu elemanlar yönteminde sadece yerdeğiştirmeler bilinmeyen olarak alınmakta ve yerdeğiştirmeler bulunduktan sonra diğer büyüklükler yerdeğiştirmeler yardımıyla bulunmaktadır. Bu çalışmada kullanılan Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde ise bilinmeyenler tüm büyüklükler olarak alınmaktadır. Denklem takımları bütün bilinmeyen değerleri içermektedir.

5. KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ ile DİNAMİK ANALİZ

5.1. İnterpolasyon Fonksiyonları



Şekil-5.1 Daire eksenli çubuk için kullanılan sonlu eleman

Sürekli ortamı kesikleştirdikten (elemanlara böldükten) sonra, alan değişkenlerimizin her eleman üzerindeki değişimini tanımlayan interpolasyon fonksiyonları (yaklaşım fonksiyonu, şekil fonksiyonu) seçmemiz gerekmektedir. Türev ve integral işlemlerinin kolaylığı nedeniyle interpolasyon fonksiyonu olarak genellikle polinomlar seçilmektedir.

Sürekli ortam yeteri kadar çok elemana ayrılırsa, alan değişkenlerinin elemanlar üzerindeki değişiminin (davranışının) doğrusal olacağı yaklaşımı yapılabilir. Tek serbest değişkenin olduğu (bir boyutlu hal) problemlerde aranan büyüklük, her eleman için,

$$\phi^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)} x \quad (5.1)$$

polinom fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Burada e indisi 'eleman' anlamında kullanılmıştır. $\alpha_1^{(e)}$ ve $\alpha_2^{(e)}$ bulunması gereken sabitlerdir. Değişkenlerin elemanların düğüm noktalarındaki (nod) değerleri,

$$\phi_i^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)} x_i \quad (\text{i nodu için}) \quad (5.2)$$

$$\phi_j^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)} x_j \quad (\text{j nodu için})$$

hallerini almaktadır. (5.2) denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\alpha_1^{(e)} = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{x_j - x_i} \quad \text{ve} \quad \alpha_2^{(e)} = \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} \quad (5.3)$$

bulunmaktadır. (5.3) denklemleri (5.1) denkleminde yerlerine yerleştirilirse,

$$\phi^{(e)} = \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) \phi_i + \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \phi_j \quad (5.4)$$

denklemini ile yaklaşım fonksiyonu nodlardaki değerleri cinsinden elde edilmektedir.

$$\psi_i = \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) \quad \text{ve} \quad \psi_j = \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \quad \text{ile gösterilirse (5.4) denklemini}$$

$$\phi^{(e)} = \psi_i^{(e)} \phi_i + \psi_j^{(e)} \phi_j \quad (5.5)$$

halini alır. $L_e = x_j - x_i$ ifadesi sonlu eleman boyunu ifade etmektedir. Daire eksenli çubuklar için $x_j = R\theta_j$ ve $x_i = R\theta_i$ yazılmalıdır. θ_i , i nodundaki dönme açısını, θ_j j nodundaki dönme açısını ve R de eğrilik yarıçapını göstermektedir.

Tüm bilinmeyenler interpolasyon formunda yazılırsa çubuk içinde herhangi bir noktadaki değişkenler,

$$\begin{aligned}
u_b &= u_{bi} \Psi_i + u_{bj} \Psi_j \\
\Omega_t &= \Omega_{ti} \Psi_i + \Omega_{tj} \Psi_j \\
\Omega_n &= \Omega_{ni} \Psi_i + \Omega_{nj} \Psi_j \\
M_t &= M_{ti} \Psi_i + M_{tj} \Psi_j \\
M_n &= M_{ni} \Psi_i + M_{nj} \Psi_j \\
T_b &= T_{bi} \Psi_i + T_{bj} \Psi_j
\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde tarif edilir. Denklem (5.6) elde edilen (3.10) fonksiyoneline terim terim uygulanırsa sonlu eleman formülasyonun i nodundan j nodu altındaki integrali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
I^e &= \int_{\theta_i}^{\theta_j} \frac{1}{2} \rho A \omega^2 R (u_{bi} \Psi_i + u_{bj} \Psi_j)^2 + R (T_{bi} \Psi_i + T_{bj} \Psi_j) (\Omega_{ni} \Psi_i + \Omega_{nj} \Psi_j) \\
&\quad - (T_{bi} \Psi_i + T_{bj} \Psi_j) (U_{bi} \Psi_i + U_{bj} \Psi_j) - \frac{R}{2D_t} (M_{ti} \Psi_i + M_{tj} \Psi_j)^2 \\
&\quad - \frac{R}{2D_n} (M_{ni} \Psi_i + M_{nj} \Psi_j)^2 - \frac{R}{2C_b} (T_{bi} \Psi_i + T_{bj} \Psi_j)^2 \\
&\quad - (M_{ti} \Psi_i + M_{tj} \Psi_j) (\Omega_{ni} \Psi_i + \Omega_{nj} \Psi_j) + (M_{ni} \Psi_i + M_{nj} \Psi_j) (\Omega_{ti} \Psi_i + \Omega_{tj} \Psi_j) \\
&\quad - (M_{ni} \Psi_i + M_{nj} \Psi_j) (\Omega_{ni} \Psi_i + \Omega_{nj} \Psi_j) - (M_{ti} \Psi_i + M_{tj} \Psi_j) (\Omega_{ti} \Psi_i + \Omega_{tj} \Psi_j)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2 Eleman Matrisinin Elde Edilmesi

Bu çalışmada, problemlere sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken, eleman matrislerinin bulunması aşamasında değişim yöntemleri yaklaşımı kullanılmıştır.

Eleman matrisinin elde edilebilmesi için fonksiyonelin değişimini sıfır yapan nod değerlerinin bulunması gerekmektedir. Nodal değerlere göre fonksiyonelin değişimini sıfır yapmak için

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_j} = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, 12 \quad (5.8)$$

koşulu sağlanmalıdır.

Burada r elemana atanan nod sayısıdır. Dolayısıyla (5.7) denkleminin nodal bilinmeyenler olan u_{bi} , u_{bj} , Ω_{ni} , Ω_{nj} , Ω_{ti} , Ω_{tj} , M_{ni} , M_{nj} , M_{ti} , M_{tj} , T_{bi} , T_{bj} 'ye göre birinci türevlerinin sıfır olması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial u_{bi}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{ni}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{ti}} = 0 \\ \frac{\partial I^e}{\partial u_{bj}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{nj}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{tj}} = 0 \\ \frac{\partial I^e}{\partial M_{ti}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial M_{ni}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{bi}} = 0 \\ \frac{\partial I^e}{\partial M_{tj}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial M_{nj}} = 0, \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{bj}} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.9) denkleminde elde edilecek 12 adet denklem sonlu eleman için eleman matrisinin oluşturulmasında kullanılacaktır. Elde edilen eleman matrisi Ek-A da verilmiştir. 12 adet denklem içerisindeki matematiksel işlemlerin yapılabilmesi için yaklaşım fonksiyonlarının Ek-B de verilen özellikleri kullanılmıştır.

5.3. Dinamik Analiz

Bir yapı üzerine yapılan yükleme altında hareket etmektedir. Hareket eden bir yapıda eylemsizlik yükleri oluşmaktadır. Yapıya etki eden yük zamanın bir fonksiyonu değilse, yükleme hızı yavaşsa eylemsizlik yükleri ihmal edilmektedir. Bu durumda yapıya statik analiz uygulanmaktadır. Bu açıdan bakıldığında, dinamik analiz aslında statik analizin genişletilmiş bir hali olmaktadır. Diğer yandan yükleme yüksek frekanslı veya rastgele olarak değişiyorsa veya yük aniden uygulanıyorsa, problem için dinamik analiz gerekmektedir. Dinamik analizde statik analizden farklı olarak eylemsizlik kuvvetlerinin ve de sönümleyici kuvvetlerin dikkate alınması gerekmektedir. Her iki kuvvet de yapıya etki eden yüklere zıt yönde oluşmaktadır.

Çok serbestlik dereceli, yoğunlaştırılmış kütleli sistemin zamanın bir fonksiyonu olarak kuvvet dengesi

$$F(t)_I + F(t)_D + F(t)_S = F(t) \quad (5.10)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada, t zamanındaki kuvvet vektörleri, $F(t)_I$ düğümlerdeki kütlelere etkiyen eylemsizlik kuvvetlerini, $F(t)_D$ enerji sönümleyici kuvveti, $F(t)_S$ yapı tarafından taşınan (içsel) kuvveti, $F(t)$ de yapıya etkiyen dış yükü simgelemektedir. (5.10) denklemini lineer davranışı sergileyen ikinci dereceden lineer diferansiyel denkleme dönüştürüldüğünde

$$[M].[\ddot{u}] + [C].[\dot{u}] + [K].[u] = [F(t)] \quad (5.11)$$

denklemleri elde edilmektedir. Burada, $[M]$ kütle matrisini, $[C]$ viskoz sönüm katsayısı matrisini, $[K]$ rijitlik matrisini, $[\ddot{u}]$ düğüm noktalarındaki ivme matrisini, $[\dot{u}]$ düğüm noktalarındaki hız matrisini, $[u]$ da düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme matrisini simgelemektedir. Bir dinamik analizde bilinmeyen $[u]$ deplasman vektörünün, $[\dot{u}]$ hız vektörünün ve $[\ddot{u}]$ ivme vektörünün hesaplanması istenmektedir.

(5.11) denkleminde dış kuvvet sıfır alınıp sönüm ihmal edildiğinde yapıya ait sönümsüz serbest titreşim denklemi

$$[M].[\ddot{u}] + [K].[u] = 0 \quad (5.12)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu denklemin çözümünde yerdeğiştirme vektörü $u = \Phi.e^{i\omega t}$ denklemiyle ifade edilmektedir. Yerdeğiştirme ifadesi zamana göre iki kez türetilirse $\ddot{u} = -\omega^2.\Phi.e^{i\omega t}$ elde edilmektedir. Bu ifadeler (5.12) denkleminde yerine yazıldığında

$$[K] - \omega^2[M] \cdot \{\Phi\} = 0 \quad (5.13)$$

elde edilmektedir. (5.13) denklemi bir özdeğer problemidir. Çözümün olabilmesi için

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad \text{olmalıdır.} \quad (5.14)$$

Bu denklemden, sistemin serbestlik derecesi kadar ω 'lar elde edilmektedir.

Bu çalışmada, elde ettiğimiz sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

(5.15) ifadesini u 'ya bağlı olarak çözmemiz gerekmektedir. Bunun için :

$$\begin{aligned} K_{11} \cdot F + K_{12} \cdot u &= 0 \\ K_{21} \cdot F + K_{22} \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\text{denklemlerinin ortak çözümünden} \left\{ -[K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] + [K_{22}] \right\} \{u\} = 0 \quad (5.17)$$

bulunmaktadır. Serbest titreşim frekanslarını bulabilmemiz için (5.13) ifadesi

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} F \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

şeklini almaktadır. (5.18) ifadesinden serbest titreşim frekansları elde edilmektedir.

Elde edilen ω 'lar da yerine konularak yerdeğştirmeler bulunmaktadır.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Daire eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerine ait yapılmış çok sayıda araştırma literatürde mevcuttur. Bu çalışmada da, değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuklara ait doğal frekanslar incelenmiş, elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut çalışmalarla uyumlu olduğu gözlenmiştir.

6.1 Bir ucu ankastre-diğer ucu boş olan dairesel çubuk

Dikdörtgen kesitli (6.2×18.9 mm×mm) yarım çember şeklindeki bir çubuk ele alınmıştır. Kesit ve malzeme özellikleri $A=1.1718 \times 10^{-4}$ m², $I_n=3.4882 \times 10^{-9}$ m⁴., $I_t=1.22 \times 10^{-9}$ m⁴., $I_b=3.75367 \times 10^{-9}$ m⁴., yarıçap $R=0.305$ m., $\alpha=180^\circ$, Elastisite modülü $E=68.13$ GPa, Poisson oranı $\nu=0.33$ ve $\rho=2882$ kg/m³ alınmıştır. Bu probleme ait sonuçlar Tablo 1’de sunulmuştur. Tablo 6.1’de verilen literatürdeki deneysel [19] ve teorik [20-21] sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo-6.1 Ankastre-boş uçlu yarım çembere ait düzlem dışı doğal frekans (rad/s)

	Bu çalışmada	Tabarrok <i>et al.</i> [34]	Yıldırım [35]	Yıldırım [36]
1.mod	56.832	56.00	54.77	54.80

6.2 İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk

Kesit ve malzeme özellikleri $b=h=1$ m., Elastisite modülü $E=181$ GPa, Poisson oranı $\nu=0.3$, $\rho=1600$ kg/m³, $i = \sqrt{I_n/A}$ ve $\lambda = R/i$ olmak üzere $\lambda=100$ alınmıştır. Çeşitli açılara sahip iki ucu ankastre daire eksenli çubuğa ait

$\varpi = \omega R^2 \sqrt{\rho A/(EI_n)}$ boyutsuz frekans parametresi incelenmiştir. Sonuçlar Tablo 6.2’de verilerek literatürde bulunan mevcut değerlerle karşılaştırılmıştır. Tablo 6.2’de görüldüğü gibi sonuçlar uyumludur.

Tablo-6.2 İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk için boyutsuz frekans parametereleri

α (°)	Modlar	Bu çalışmada	Kang <i>et al.</i> [37]	Irie <i>et al.</i> [38]	Howson <i>et al.</i> [39]	Tufekci <i>et al.</i> [40]
120	1	4.4263	4.4516	4.451	4.4512	4.45145
	2	12.8677	—	12.83	12.826	12.82629
	3	26.0400	—	25.99	26.988	25.98937
	4	43.6688	—	43.57	43.570	43.57053
180	1	1.7948	1.8045	1.804	1.8042	1.80434
	2	5.1880	—	5.198	5.1975	5.197995
	3	10.9269	—	10.92	10.917	10.91819
	4	18.7450	—	18.72	18.725	18.72548

6.3 Değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuk

Daire en kesitli (en kesit yarıçapı $r=0.5$ m) olan yarım çember ele alınmıştır. Çemberin yarıçapı $R=10$ m. ve malzeme özellikleri Elastisite modülü $E=210$ GPa, Poisson oranı $\nu=0.3$, $\rho=7850$ kg/m³ alınmıştır. Ele alınan problem değişik sınır koşulları altında çözülerek sonuçlar Tablo 6.3’de verilmiştir. Tablo 6.3’de görüldüğü gibi değişik sınır koşulları altında aynı probleme ait sonuçlar karşılaştırıldığında en düşük frekans ankastre-boş uçlu olarak mesnetlenmiş dairesel çubukta ortaya çıkmaktadır. En büyük frekans iki ucu ankastre mesnetli dairesel çubukta görülmektedir. Doğal frekans değerleri sınır koşullarına bağlı olarak değişmektedir.

Tablo-6.3 Değişik sınır koşullarına ait doğal frekanslar (Hz)

Frekanslar (Hz)	Ankastre-Ankastre	Ankastre-Sabit mesnet	Ankastre-Boş uç
ω_1	3.7564	1.7898	0.7822
ω_2	10.7535	7.3691	2.7270
ω_3	22.3975	18.0956	6.6292

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Gâteaux türevi kullanılarak daire eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri için fonksiyonel elde edilmiştir. Dinamik analizde problem, standart özdeğer problemine indirgenerek sıkıştırılmış kütle matrisi formülasyonunu esas alan karışık sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir. İki noda sahip dairesel çubuk eleman kullanılmıştır. Dairesel çubukta her eleman, bir eğilme ve bir burulma momenti(M_t , M_n), bir kesme kuvveti(T_b), iki dönme(Ω_n , Ω_t) ve bir yer değiştirme (u_b) olmak üzere (2×6) serbest derecesine sahiptir.

Düzlem dışı titreşimi analiz edebilmek için karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak Fortran bilgisayar programı yardımıyla yazılmıştır. Sonlu eleman modeli her nod da 6 adet bilinmeyene sahiptir. Kullanılan yöntem ile dairesel kiriş için çeşitli sınır şartları altında dinamik analiz yapılmıştır. Dairesel kirişlerin doğal titreşim periyodu karışık sonlu eleman metoduyla hesaplanmıştır. Bu kirişler için kesme deformasyonu içeren Timoshenko kiriş teorisi dikkate alınmıştır

Bu çalışmada bu geliştirilen yöntemle çözülen doğal açısal frekanslar, dairesel kirişler için literatürde daha önceden çözülen problemlerle karşılaştırılıp sonuçları değerlendirilmiştir. Bu karşılaştırma, hazırlanan program ve formülasyonun geçerliğini ve doğruluğunu gösterebilmek amacıyla yapılmıştır. Karşılaştırma sonucu bulunan değerler ile literatürdeki değerler çok yakın çıkmıştır. Hazırlanan programın ve formülasyonun geçerli ve güvenilir olduğunu göstermektedir. Karışık sonlu eleman formülasyonunun kullanımı ile sadece yer değiştirmeleri değişken olarak alan klasik sonlu eleman formülasyonunun kullanımında ortaya çıkan türev ve yuvarlama hataları minimize edilmektedir. Çalışmada Gateaux (yönsel) türev metodunun kullanılması eleman matrisin hem daha kolay hem daha hızlı bulunmasını sağlamaktadır.

Sonuç olarak, sayısal örnekler de gösteriyor ki Gâteaux (yönsel) türev yaklaşımlı kullanarak elde edilen fonksiyon ile karışık sonlu eleman metoduna geçilirse elde edilecek olan değerler hem deneysel sonuçlar ile yeter yakınsaklıkta, hem de hızlı ve rahat olmaktadır. Bu alışma düzlem dışı, dairesel veya her hangi bir eğriliğe sahip kirişler üzerinde yapılacak çalışmalar için de bir kaynak olabilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Love, A.E.H.** , 1944. A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publication. NewYork.
- [2] **E. Volterra ve J.D. Morell** ,1961. Lowest Natural Frequency of Elastic Arc for Vibrations Outside The Plane of Initial Curvature, Journal of Applied Mechanics , **28** 624–627.
- [3] **T. Irie, G. Yamada, I. Takahashi**, 1980. The steady state out-of-plane response of a Timoshenko curved beam with internal damping, Journal of Sound and Vibration, **71**,145–156.
- [4] **T. Irie, G. Yamada, I. Takahashi**, 1982. Natural frequencies of out-of-plane vibration of arcs, Journal of Applied Mechanics, **49**, 910–913.
- [5] **T.M. Wang, A. Laskey, M. Ahmad**, 1984. Natural frequencies for out-of-plane vibrations of continuous curved beams considering shear and rotary inertia, International Journal of Solids and Structures, **20**, 257–265.
- [6] **W.B. Bickford, S.P. Maganty**, 1986.On the out-of-plane vibrations of thick rings, Journal of Sound and Vibration, **108**, 503–507.
- [7] **J.M.M. E Silva, A.P.V. Urgueira**, 1988. Out-of-plane dynamic response of curved beams—An analytical model, International Journal of Solids and Structures, **24**, 271–284.
- [8] **M. Kawakami, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita**, 1995. In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable sections, Journal of Sound and Vibration, **187**, 381–401.
- [9] **K. Kang, C.W. Bert, A.G. Stritz**, 1995. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method, Journal of Sound and Vibration, **181**, 353–360.

- [10] **W.P. Howson, A.K. Jemah, J.Q. Zhou**, 1995. Exact natural frequencies for out-of-plane motion of plane structures composed of curved beam members, *Computers and Structures*, **55**, 989–995.
- [11] **Petyt, M. and Fleischer, C.C.** , 1971. Free Vibration of Curved Beam, *Journal of Sound and Vibration*, **18(1)**, 17-30.
- [12] **C.S. Huang, Y.P. Tseng, S.H. Chang**, 1998. Out-of-plane dynamic responses of non-circular curved beams by numerical Laplace transform, *Journal of Sound and Vibration*, **215(3)**, 407–424.
- [13] **C.S. Huang, Y.P. Tseng, S.H. Chang, C.L. Hung**, 2000. Out-of-plane dynamic analysis of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section by dynamic stiffness matrix method, *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 495–513
- [14] **S.Y. Lee, J.C. Chao**, 2000. Out-of-plane vibrations of curved non-uniform beams of constant radius, *Journal of Sound and Vibration*, **238**, 443–458.
- [15] **Rubin, M.B. and Tufekci, E.** , 2005. Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a Cosserat point, *J. of Sound and Vibration*, **286**, 799-816..
- [16] **E. Tüfekçi, O.Y. Doğruer**, 2006. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, **291**, 525–538.
- [17] **Volterra, E. and Morell, J.D.** , 1960. A Note on the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs, *Trans ASME, Journal of Applied Mechanics*, **83**, 744-746.
- [18] **Rao, S.S.** , 1971. Effects of transverse shear and rotatory inertia on the coupled twist-bending vibrations of circular rings, *J. Sound Vibr.*, **16**, 551-566.
- [19] **Kirchope, J.** , 1976. Out-of-plane vibration of thick circular ring, *J. Eng. Mech. Div. ASCE* **102**, 239-247.
- [20] **Petyt M. , Fleischer C.C.** , 1971. Free Vibration of Curved Beam, *Journal of Sound and Vibration*, **18(1)**, 17-30.

- [21] **Raveendranath, P, Singh, G. and Pradhan B.** , 2000. Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement field, Computers and structures, **78**, 583-590.
- [22] **Ozyigit, H. A., Oz, H. R. and Tekelioglu, M.,** 2004. Linear forced in-plane and out-of plane vibrations of frames having a curved member, Mathematical and Computational Applications, **9**, 371-380.
- [23] **Wu, J.S. and Chiang, L.K.** , A new approach for displacement functions of a curved Timoshenko beam element in motions normal to its initial plane, Int.J.for Numerical Methods in Engineering, **64**,1375-1399.
- [24] **Aköz, A.Y. ve Kadioğlu, F.** , 1996. The Mixed Finite Element Solutions of Circular Beam on Elastic Foundation, Computers and Structures, **60(4)**, 643-657.
- [25] **De Rosa, M.A. and Franciosi, C.** , 2000. Exact and Approximate dynamic analysis of circular arches using DQM, International Journal of Solid and Structures, **37**, 1103-1117 .
- [26] **A. Y. Aköz, M. H. Omurtag, A. Doğruoğlu,** 1991. The Mixed Finite Element Formulation For Three-dimensional Bars, Int. J. Solids Struct., **28**, 225-234.
- [27] **İnan, M., Elastik Çubukların Genel Teorisi,** İstanbul Teknik Üniversitesi, 1966.
- [28] **Prof. B. Bandhyopadhyay, Juhi Khanna,** 2004. Modeling and Control of Smart Cantilever Beam, Degree of Master of Technology, Indian Institute of Technology .
- [29] **Tacettin SARIOĞLU, Selim ŞENGEL, Yunus ÖZÇELİKÖRS, Hakan EROL,** Osmangazi Üniversitesi Mukavemet Ders Notları
- [30] **Yıldırım V. , Elbir G.** , 1996. Çember Eksenli Çubuklarda Geometrik Büyüklüklerin Doğal Frekanslara Etkisi, Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi, **20**, 345-356.
- [31] **AKÖZ A.Y. , 1987.** Şekil Değiştirebilen Cisimler Mekaniğinde Varyasyon Hesabı, Trabzon, 216-289.

- [32] **Oden, J. ve Reddy, J.N.** , 1976. Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer, Berlin.
- [33] **N. Huebner, The Finite Element Method for Engineers**, Wiley, New York.
- [34] **Tabarrok, B., Sinclair, A.N., Farshad, M. and Yi H.** , 1988. On the dynamics of spatially curved and twisted rods-A Finite Element Formulation, Journal of Sound and Vibration, **123(2)**, 315-326.
- [35] **Yildirim, V.** , 1995. Helisel yayların serbest titreşiminin rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi, Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi, **19(4)**, 343-356.
- [36] **Yildirim, V.** , 1997. A computer program for the free vibration analysis of elastic arcs, Computers and Structures, **62(3)**, 475-485.
- [37] **Kang, K., Bert, C.W. and Stritz A.G.** , 1995. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method, Journal of Sound and Vibration, **181**, 353-360.
- [38] **Irie, T. and Yamada, G.** , 1982. Natural frequencies of out-of-plane vibration of arcs, Journal of Applied Mechanics, **49**, 910-913.
- [39] **Howson, W.P. and Jemah A.K.** , 1999. Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams, Journal of Engineering Mechanics, **125**, 19-25.
- [40] **Tufekci, E. and Dogruer, O.Y.** , 2006. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution, J.of Sound and Vibration, **291**, 525-538.

EK A: Eleman matrisi

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{L}{3C_b} & -\frac{L}{6C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 -\frac{L}{6C_b} & -\frac{L}{3C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & -\frac{L}{3D_n} & -\frac{L}{6D_n} & 0 & 0 & \frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{L}{6D_n} & -\frac{L}{3D_n} & 0 & 0 & \frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{3D_t} & -\frac{L}{6D_t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{3R} & -\frac{L}{6R} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{6D_t} & -\frac{L}{3D_t} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6R} & -\frac{L}{3R} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{3R} & -\frac{L}{6R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6R} & -\frac{L}{3R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{3}(\rho\omega^2 A) & -\frac{L}{6}(\rho\omega^2 A) \\
 \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{6}(\rho\omega^2 A) & -\frac{L}{3}(\rho\omega^2 A)
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_{bi} \\ T_{bj} \\ M_{ni} \\ M_{nj} \\ M_{ti} \\ M_{tj} \\ \Omega_{ti} \\ \Omega_{tj} \\ \Omega_{ni} \\ \Omega_{nj} \\ u_{bi} \\ u_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

EK B: Şekil Fonksiyonunun Fonksiyoneldeki İntegral İfadeleri

$$\Psi_i = \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \quad \Psi_i' = -\frac{R}{L_e}$$

$$\Psi_j = \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \quad \Psi_j' = \frac{R}{L_e}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(-\frac{R}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = \frac{R}{L_e}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(-\frac{R}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = -\frac{R}{L_e}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = \frac{R}{L_e}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_i' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta_i \theta \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j' \Psi_i' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_i' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \left(\theta_j^2 \theta - \frac{2\theta^2 \theta_j}{2} + \frac{\theta^3}{3} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{L_e}{3R}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \left(\frac{\theta_j \theta^2}{2} - \theta_j \theta_i \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^2 \theta_i}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{L_e}{6R}$$

$$\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j' \Psi_j' d\theta = \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \right) d\theta = \frac{L_e}{3R}$$

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet ÇOBAN 1982 yılında Eynesil’de doğmuştur. İlk öğretimini Ünye Anafarta İlkokulu’nda tamamlamıştır.1993 yılında girdiği Ünye Anadolu Lisesi’nde ortaokul ve liseyi bitirmiştir. 2000 yılında Selçuk Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümüne başlamış, 2005 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Ana Bilim Dalı Yapı Mühendisliği Programında Yüksek Lisans eğitimine başlamıştır. Halen bu bölümün öğrencisidir.