

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RİJİTLİĞİ DEĞİŞEN YAPILARIN TİTREŞİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Erol DEMİRKAN**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Yapı Mühendisliği Programı**

**HAZİRAN 2012**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RİJİTLİĞİ DEĞİŞEN YAPILARIN TİTREŞİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Erol DEMİRKAN  
(501091106)**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Yapı Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. F. Necla KADIOĞLU**

**7 HAZİRAN 2012**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501091106 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Erol DEMİRKAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**RİJİTLİĞİ DEĞİŞEN YAPILARIN TİTREŞİMİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. F. Necla KADIOĞLU** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. Reha ARTAN** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Semih SEZER** .....  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**      **2 Mayıs 2012**  
**Savunma Tarihi :**      **7 Haziran 2012**



*Aileme,*





## **ÖNSÖZ**

Bu çalışma sırasında bilgi ve tecrübelerini özveri ile bana aktaran ve çalışmanın her safhasında yapıcı, yol gösterici teşvik ve tavsiyeleri ile bana destek olan sayın hocam Prof. Dr. F. Necla KADIOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme ve desteklerini eksik etmeyen arkadaşlarıma da teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Haziran 2012

Erol DEMİRKAN  
İnşaat Mühendisi



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                  |       |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖNSÖZ.....                                                                       | vii   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                | ix    |
| KISALTMALAR .....                                                                | xi    |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                             | xiii  |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                               | xv    |
| SEMBOL LİSTESİ .....                                                             | xvii  |
| ÖZET.....                                                                        | xix   |
| SUMMARY .....                                                                    | xxiii |
| 1. GİRİŞ .....                                                                   | 1     |
| 2. SİSTEMİN RİJİTLİK MATRİSİ VE DEPLASMANLARIN HESABI.....                       | 3     |
| 2.1 Sistem Bilgisi .....                                                         | 4     |
| 2.2 Sistemin Kuvvet Deplasman Bağlılıları .....                                  | 4     |
| 2.3 Çubuğun Rijitlik Matrisinin Bulunması .....                                  | 5     |
| 2.3.1 Castigliano teoremi .....                                                  | 6     |
| 2.4 Sistem Rijitlik Matrisinin (K) Bulunması ve Yük Deplasman Bağlılıları .....  | 10    |
| 2.4.1 Çubuk rijitlik matrisinin sistem koordinatlarında elde edilmesi .....      | 10    |
| 2.4.2 Q Dönüşüm matrisinin bulunması .....                                       | 10    |
| 2.4.3 Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik matrisinin $k_{XYZ}$ bulunması..... | 13    |
| 2.4.4 Çerçevenin sistem koordinatlarında K sistem rijitlik matrisi.....          | 14    |
| 3. SİSTEMİN RİJİTLİK MATRİSİNİN DEĞİŞMESİ.....                                   | 19    |
| 3.1 Plastik Mafsal Hipotezi .....                                                | 19    |
| 3.2 Eğilme Altında Bir Kesitin Plastik Mafsal Momenti Hesabı.....                | 19    |
| 3.2.1 Elasto-plastik malzeme .....                                               | 21    |
| 3.3 Limit Yük .....                                                              | 22    |
| 3.3.1 Limit yükün yük artımı yöntemi ile hesabı .....                            | 22    |
| 3.3.2 Sistemin limit yükünün bulunması .....                                     | 23    |
| 3.4 İdealize Edilmiş Sisteme Ait Yay Katsayılarının Bulunması .....              | 28    |
| 4. SİSTEMİN TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ.....                                        | 31    |
| 4.1 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler .....                                      | 31    |
| 4.1.1 Hareket denklemi .....                                                     | 32    |
| 4.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerde Zorlanmış Titreşimler .....              | 33    |
| 4.2.1 Harmonik kuvvet altında titreşim .....                                     | 33    |
| 4.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sönümlü Titreşimi.....                      | 34    |
| 4.3.1 Kuvvetli sönüm durumu.....                                                 | 35    |
| 4.3.2 Kritik sönüm durumu .....                                                  | 36    |
| 4.3.3 Zayıf sönüm durumu .....                                                   | 37    |
| 4.4 Sistemin Deplasman Zaman Bağlılısı .....                                     | 39    |
| 4.4.1 Artan yükler altında deplasman zaman bağlılısı .....                       | 39    |
| 4.4.2 Azalan yükler altında deplasman zaman bağlılısı .....                      | 44    |
| 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....                                                    | 47    |

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| <b>KAYNAKLAR.....</b> | <b>49</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>  | <b>51</b> |

## **KISALTMALAR**

**TSD** : Tek Serbestlik Dereceli



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 2.1 : Seçilen çeliğin özellikleri .....                                          | 4  |
| Çizelge 2.2 : Kolonun ve kirişin özellikleri.....                                        | 15 |
| Çizelge 3.1 : Kesitlerin akma ve plastik momentleri.....                                 | 22 |
| Çizelge 3.2 : Plastik mafsall oluşumundan sonra yay katsayıları.....                     | 29 |
| Çizelge 3.3 : Rijitlikler ve geçerli oldukları kuvvet aralıkları .....                   | 30 |
| Çizelge 4.1 : Kuvvet-rijitlik çizelgesi.....                                             | 39 |
| Çizelge 4.2 : Sistemin artan yükler altında uygulanış zamanları.....                     | 41 |
| Çizelge 4.3 : Rijitlikler ve geçerli oldukları zaman aralıkları .....                    | 41 |
| Çizelge 4.4 : Açısal hızın ve sönümün zamana göre değişimi .....                         | 43 |
| Çizelge 4.5 : Sistemin azalan yükler altında uygulanış zamanları .....                   | 44 |
| Çizelge 4.6 : Azalan yükler altında rijitlikler ve geçerli oldukları zaman aralıkları .. | 45 |





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1 : Sistem görünüşü .....                                                      | 4  |
| Şekil 2.2 : Düzlem çerçeve çubuğu .....                                                | 5  |
| Şekil 2.3 : Bir ucu ankastre bir ucu sabit mesnetli giriş .....                        | 5  |
| Şekil 2.4 : $k_{ij}$ , ( $i=1$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 7  |
| Şekil 2.5 : $k_{ij}$ , ( $i=2$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 7  |
| Şekil 2.6 : $k_{ij}$ , ( $i=3$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 8  |
| Şekil 2.7 : $k_{ij}$ , ( $i=4$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 8  |
| Şekil 2.8 : $k_{ij}$ , ( $i=5$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 9  |
| Şekil 2.9 : $k_{ij}$ , ( $i=6$ ve $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.....     | 9  |
| Şekil 2.10: Sistem ve çubuk koordinatları .....                                        | 11 |
| Şekil 2.11: Özel çubuk durumları .....                                                 | 12 |
| Şekil 2.12: Özel çubuk durumları .....                                                 | 12 |
| Şekil 2.13: Düzlem çerçeve .....                                                       | 14 |
| Şekil 2.14: Kolon ve giriş kesiti .....                                                | 15 |
| Şekil 2.15: Sistem serbestliklerinin numaralanması.....                                | 16 |
| Şekil 3.1 : Elasto-plastik malzemeden oluşan dikdörtgen kesitte eğilme.....            | 19 |
| Şekil 3.2 : Dikdörtgen kesitte eğilme momenti-kuvvet değişimi .....                    | 20 |
| Şekil 3.3 : Çelik çerçevenin kolon ve giriş boyutları.....                             | 21 |
| Şekil 3.4 : Düzlem çerçeve .....                                                       | 23 |
| Şekil 3.5 : Birinci plastik mafsallardan oluşuktan sonra sistemin serbestlikleri ..... | 25 |
| Şekil 3.6 : İkinci plastik mafsallardan oluşuktan sonra sistemin serbestlikleri .....  | 26 |
| Şekil 3.7 : Sistemde yük artımıyla sırasıyla oluşan plastik mafsallar.....             | 28 |
| Şekil 3.8 : Tek serbestlik dereceli sistem.....                                        | 29 |
| Şekil 3.9 : Kuvvet-rijitlik grafiği .....                                              | 30 |
| Şekil 4.1 : Tek serbestlik dereceli sistem.....                                        | 32 |
| Şekil 4.2 : Tek serbestlik dereceli sönümlü sistem.....                                | 34 |
| Şekil 4.3 : Artan yükler altında kuvvet-zaman grafiği .....                            | 41 |
| Şekil 4.4 : Rijitlik değişimi zaman grafiği.....                                       | 42 |
| Şekil 4.5 : $\omega$ açısal frekansların zamana göre değişimi.....                     | 43 |
| Şekil 4.6 : $\xi$ sönüm oranlarının zamana göre değişimi.....                          | 43 |
| Şekil 4.7 : Sistemin artan yükler altında deplasman zaman grafiği.....                 | 44 |
| Şekil 4.8 : Kuvvet-zaman grafiği.....                                                  | 45 |
| Şekil 4.9 : Deplasman-zaman grafiği.....                                               | 45 |



## SEMBOL LİSTESİ

|                        |                                                   |
|------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>M</b>               | : Moment                                          |
| <b>N</b>               | : Eksenel kuvvet                                  |
| <b>V</b>               | : Kesme kuvveti                                   |
| <b>E</b>               | : Elastisite modülü                               |
| <b>I</b>               | : Atalet momenti                                  |
| <b>k<sub>xyz</sub></b> | : Çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi   |
| <b>k<sub>XYZ</sub></b> | : Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi  |
| <b>K</b>               | : Sistem koordinatlarında sistem rijitlik matrisi |
| <b>Q</b>               | : Dönüşüm matrisi                                 |
| <b>p</b>               | : Çubuk koordinatlarında çubuk uç kuvvetleri      |
| <b>P</b>               | : Sistem koordinatlarında çubuk uç kuvvetleri     |
| <b>d</b>               | : Çubuk koordinatlarında çubuk uç deplasmanları   |
| <b>D</b>               | : Sistem koordinatlarında çubuk uç deplasmanları  |
| <b>F</b>               | : Kesit alanı                                     |
| <b>k<sub>n</sub></b>   | : Kod numaraları matrisi                          |
| <b>D</b>               | : Sistem deplasman matrisi                        |
| <b>P</b>               | : Sisteme etkiyen kuvvet                          |
| <b>σ</b>               | : Gerilme                                         |
| <b>σ<sub>F</sub></b>   | : Akma gerilmesi                                  |
| <b>σ<sub>max</sub></b> | : En büyük eğilme gerilmesi                       |
| <b>M<sub>F</sub></b>   | : Akma momenti                                    |
| <b>M<sub>U</sub></b>   | : Plastik moment                                  |
| <b>k</b>               | : Yay sabiti                                      |
| <b>m</b>               | : Kütle                                           |
| <b>c</b>               | : Sönüm sabiti                                    |
| <b>ξ</b>               | : Sönüm oranı                                     |
| <b>x(t)</b>            | : Tek serbestlik dereceli sistemde yer değiştirme |
| <b>ẋ(t)</b>            | : Tek serbestlik dereceli sistemde hız            |
| <b>ẍ(t)</b>            | : Tek serbestlik dereceli sistemde ivme           |
| <b>f(t)</b>            | : Yük fonksiyonu                                  |
| <b>ω</b>               | : Doğal titreşim frekansı                         |
| <b>T</b>               | : Doğal titreşim periyodu                         |
| <b>Ω</b>               | : Kuvvet frekansı                                 |
| <b>Ø</b>               | : Faz açısı                                       |
| <b>T<sub>F</sub></b>   | : Kuvvet periyodu                                 |
| <b>P(t)</b>            | : Yük fonksiyonu                                  |
| <b>W</b>               | : Wronskian matrisi                               |
| <b>G</b>               | : Ağırlık                                         |
| <b>g</b>               | : Yer çekimi ivmesi                               |
| <b>t</b>               | : Zaman                                           |



## RİJİTLİĞİ DEĞİŞEN YAPILARIN TİTREŞİMİ

### ÖZET

Yapıların dinamik davranışı incelenirken genellikle sistemin rijitliğinin sabit kaldığı kabul edilir. Ancak bu tamamen doğru değildir. Yükler arttıkça yapıda deformasyonlar da artar. Bu deformasyonların tamamı elastik yani yük kalkınca geri dönen deformasyonlar değildir. Kalıcı yani plastik deformasyonlar yapının rijitliğinin değişimine neden olur. Bu çalışmanın amacı değişen yükler altında bu rijitliğin değişimini dikkate alarak titreşimlerin incelenmesidir.

Bu çalışmada seçilen sistem tek katlı, temel bağlantıları ankastre olan bir çerçevedir. Çerçevede kullanılan malzemenin tamamı çeliktir ve sistem yatay yönde bir kuvvet etkisindedir. İlk olarak sistemin rijitlik matrisi elde edilmelidir. Rijitlik matrisini bulmak için önce çerçeveyi oluşturan çubukların tek tek çubuk rijitlik matrisleri bulunmuştur. Bir çubuğun rijitlik matrisini bulabilmek için çubuğa bağlı eksen takımında uç birim kuvvetlerinin uygulanması durumunda oluşabilecek deplasmanların bulunması gerekir. Bu rijitlik terimleri Castigliano teoremi kullanılarak bulunmuştur. Daha sonra çubuk koordinatlarında elde edilen çubuk rijitlik matrisini sistem koordinatlarında elde etmek için bir koordinat dönüşümü yapılmıştır. Bu işlem iki koordinat sistemi arasındaki açılara bağlı olarak yazılan ortogonal matrisler kullanılarak gerçekleştirilir. Her bir çubuğun ortogonal dönüşüm matrisi kullanılarak çubuk koordinatlarında yazılan çubuk rijitlik matrisleri sistem koordinatlarında bulunmuştur. Sistem koordinatlarında elde edilen çubuk rijitlik matrislerinden kod numaraları matrisi yardımıyla sistem rijitlik matrisi elde edilmiştir. Böylece elde edilen sistemin rijitlik matrisi ile sistemin düğüm noktalarındaki deplasmanları ve dış kuvvetleri arasında bir bağıntı kurulmuştur. Bu şekilde elde edilen matris formundaki denklem takımı çözülür, bilinmeyen düğüm noktası deplasmanları hesaplanır ki bunlar sistemin serbestlikleridir. Sistem deplasmanları bulunduktan sonra yine sistem koordinatlarında çubuk uç deplasmanları yine kod numaraları matrisi kullanılarak hesaplanır. Sonra çubuk dönüşüm matrisleri kullanılarak çubuk koordinatlarında çubuk uç deplasmanları bulunmuştur. Bu uç deplasmanları ile çubukların uç kuvvetleri arasındaki bağıntılar yardımıyla da çubuk uç kuvvetleri yani kesit tesirleri bulunur. Bütün bu anlatılanlara bağlı olarak yapının belli bir noktasının statik yük altında yapacağı yatay deplasman ve sistemin kesit tesirleri matris deplasman yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Sadece bir noktadaki deplasman dikkate alınacağı için yapı tek kütle yay sistemine indirgenmiştir. Bu durumda sistemin yay katsayısı da deplasman ve yük belli iken hesaplanmış olur.

Bir yapı dış yükler altındayken kalıcı deformasyonlar yapabilir. Yapıda kalıcı deformasyonlar meydana geldiğinde rijitlik matrisi değişir sonuç olarak yapının dinamik davranışı değişecektir. Bunun için titreşim hesapları yapılmadan önce yapıya gelen dış yük arttırılarak artan yük değerleri için yapı statik olarak incelenmiştir. Artan dış yükler altında çerçevenin davranışını incelemek için sistemin tamamında ideal elasto plastik malzeme kullanıldığı kabulü yapılmıştır. Sistemde

artan yükler altında rijitliğin değişimi plastik hesap yapılarak göz önüne alınacaktır. Malzeme ideal elasto plastik malzeme alındığından bir kesitte oluşan maksimum moment ancak belli bir değere kadar artabilir. Bu durumdan sonra yük artarsa bu kesit artık ilave moment taşımaz ve mafsalsal gibi davranır. Nerede ilk plastik mafsalsal oluşacağı bellidir. Ancak birinci plastik mafsalsal oluşuktan sonra sisteme etkiyen yük arttırılırsa diğer bir noktada ikinci bir plastik mafsalsal oluşacaktır. Bu işlem yapılabileceğine kadar devam eder. Bir plastik mafsalsal oluşuktan sonra sistem artık başlangıçtaki sistem değildir. Rijitlik matrisi farklılık gösterir. Bu durumlarda sistemin rijitlik matrisleri bulunmuştur. Ancak rijitlik matrisinin sürekli azalmasına rağmen burada bir kabul yapılarak birinci plastik mafsalsal oluşuncaya kadar rijitlik matrisinin sabit olduğu kabul edilmiştir. Keza birinci ve ikinci plastik mafsalsal oluşturan yük değerleri arasında da yine rijitlik matrisinin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Bu yaklaşım yük-rijitlik matrisi arasında bir eğri elde edilmesini sağlar. Çalışmada kullanılan örnekte sırasıyla plastik mafsalsalların nerelerde olduğu şeklinde gösterilmiştir. Plastik mafsalsalların olduğu durumlardaki deplasmanlar hesap edilmiştir. İdealleştirilmiş olan tek kütle yay sistemindeki yay katsayıları bulunmuştur. Sonuçta yükün şiddetine bağlı olarak yay katsayılarının değişimini gösteren bir tablo elde edilmiştir. Ayrıca plastik mafsalsal oluşumları SAP2000 paket programı ile de kontrol edilmiştir ve kuvvet-rijitlik grafiği çizilmiştir.

Son olarak bütün bu yapılan hesaplar doğrultusunda yapının titreşimi incelenmiştir. Yapılara gelen yükler belirli bir zaman içinde etkir ve yapıda zamana bağlı yerdeştirmelere, şekil deştirmelere ve gerilmelere neden olurlar. Statik hesapta yapıdaki şekil deştirmelerin zamana bağlı olmadığı kabul edilir. Dinamik hesapta ise, yapının her noktasına etkiyen ve her an deştirebilen eylemsizlik kuvvetleri de işin içine katıldığı için sonuçlar zamana bağlıdır. Modeli oluşturduktan sonra dinamik çözüm için hareket denkleminin yazılması ve modelin davranışının belirlenmesi gerekir. Sönümlü serbest titreşim ve zorlanmış titreşim taşıyıcı sistemin önemli olan iki dinamik davranışdır. Bunlardan birincisi verilen başlangıç koşullarının etkisiyle meydana gelir, ikincisi ise sisteme etkiyen dış yüklerden veya mesnet hareketlerinden ortaya çıkar. Bu çalışmada harmonik kuvvet altında zorlanmış sistemin titreşimi incelenmiştir. Buna bağlı olarak sistemin titreşimini incelemek için hareket denklemi oluşturulmuştur. Denklemin çözümü özel ve homojen çözümlerin toplamıdır. Özel çözüm ya belirsiz katsayılar metodu veya sabitlerin değişimi metodları kullanılarak bulunur. Homojen denklem çözülürken üç farklı sönüm durumu söz konusudur bunlardan birincisi kuvvetli sönüm durumu ikincisi kritik sönüm durumu üçüncüsü ise zayıf sönüm durumudur. Çalışmada zayıf sönüm durumu dikkate alınmıştır ve oluşturulan bu hareket denklemi tek serbestlik dereceli zayıf sönüm etkisinde bir zorlanmış titreşim denklemdir. Kat kütlelerinin bir noktada toplandığı kabul edilmiştir. Sistemin yatayda yapmış olduğu deplasman göz önüne alınmıştır. Dinamik yüklemde dış yükün zamana bağlı olarak deştireceği açıktır. Bu yüzden daha önce hesaplanan plastik mafsalsalların meydana geldiği artan yük değerlerinin hangi zamanlarda uygulandığı bulunmuştur. Artan yükler altında kuvvet-zaman grafiği çizilmiştir. Daha sonra rijitliklerin hangi zaman aralıklarında geçerli olduğunu gösteren rijitlik-zaman grafiği elde edilmiştir. Sistemin her bir zaman aralığı için doğal titreşim frekansları hesap edilmiştir. Sistemin sönüm katsayısı hesap edilmesi gereken bir değerdir. Bunun için başlangıçta sistemin sönümü belirli bir değer seçilerek her bir rijitlik değeri için diğer sönüm değerleri de hesap edilmiştir. Bunlara bağlı olarak açısal frekansın ve sönüm oranının zamana göre değişim grafikleri çizilmiştir. Yük rijitlik eğrisinden yararlanırken iki yük değeri arasında rijitliğin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Sistem bu yüklere karşı gelen bir

zaman aralığında çözülmüştür. İntegral sabitlerinin tayini için bir önceki zaman aralığının sonundaki değerler kullanılmış ve deplasman-zaman eğrisi elde edilmiştir. Artan yükler altında yapılan bu işlemler azalan yükler durumu için de tekrarlanmıştır. Artan ve azalan yüklerin zamana göre değişimi tek bir eğride gösterilmiştir. Burada hesap yapılırken artan yükler için hesaplanan her bir aralıktaki rijitlik değerleri ile azalan yükler için hesaplanan her bir aralık için rijitlik değerleri aynı alınmıştır. Bu şartlar altında azalan yükler için deplasman zaman eğrisi çizilmiştir. Artan yükler altındaki deplasman zaman eğrisi ile azalan yükler altındaki deplasman zaman eğrisi birleştirilerek tek bir eğride gösterilmiştir.





## **THE VIBRATION OF THE STRUCTURES WITH VARIABLE STIFFNESS**

### **SUMMARY**

In general it is assumed that stiffness matrix remains constant in dynamic analysis of structures. However, this is not completely correct. The deformations of structure increase with increasing loads. All of these deformations are not elastic which totally recover when the loads decrease. Permanent or plastic deformations are the reason of the variation of the stiffness matrix of the structure. For this purpose, the system stiffness matrix is calculated then the system displacements of node points are calculated. The stress resultants are found by using relations between the end displacements and end forces of the rods. After this process is done, under increasing loads, plastic hinges will occur and stiffness matrix will not remain constant was checked of this situation. The aim of this study is to analyze the vibration of a structure under consideration of the variation of stiffness matrix with varying loads.

The chosen sample system in this study is a single storey frame of which foundation supports are build in. The material used in the frame is steel and the system is under the effect of an horizontal force. At first the stiffness matrix of the system must be determined. To find the stiffness matrix of the system the stiffness matrices of whole bars are obtained in bar coordinates. The displacements must be determined depending upon to the unit end loads to calculate the stiffness matrix of a bar. These stiffness terms have been found via theorem of Castigliano. Later a coordinate transformation is performed for every individual bar to transform the stiffness matrix, which is written in a coordinate system connected to this bar, to a chosen local fixed system which is valid for whole system. This operation has been done using orthogonal matrices which is related to the angles between two coordinate systems for every individual bar. The stiffness matrix in system coordinates has been obtained via orthogonal transformation matrix of this bar from the stiffness matrix which has been obtained in bar coordinates before. The stiffness matrix in system coordinates has been constructed by code-numbers matrix from stiffness matrices of bars which is written in system coordinates. A relation is also constructed by the stiffness matrix of the system between the system displacements and external loads acting on nodal points. The system of linear algebraic equations that has been obtained by this way, is solved. The unknown displacements of node points are calculated in matrix form. These are the freedoms of the system. The end displacements of a bar in system coordinates are calculated by using code-numbers matrices after finding system displacements. After these, the end displacements in bar coordinates have been found by orthogonal transform matrices from the end displacements in system coordinates. The stress resultants are found by using relations between the end displacements and end forces of the rods. According to these descriptions, the horizontal displacement of a certain point and stress resultants of the system are calculated via matrix methods under static loading. Then the structure has been reduced to an unique mass spring system since only the

displacement of one point is considered. In this case, the spring constant of the system, has been calculated while the displacement and load is known.

A structure can make permanent deformations under external loads. The stiffness matrix cannot be constant, when permanent deformations occur and consequently dynamic behavior of the structure changes. In this case, the problem becomes nonlinear. Because of this the external load has been increased and at any value of this load the structure has been solved as a static system. It is accepted that elasto plastic materials have been used in the entire system for examining the behavior of the frame under increasing loads. The change of stiffness under increasing loads will be calculated by plastic analysis. The maximum moment of a cross-section can increase up to a certain value since the material is assumed that the material ideal elasto plastic. After this stage, if the load increases, section doesn't carry any more moment and it acts as a hinge. By the method of load increment is determined where plastic hinges will occur. Then it is known where the first plastic hinge will occur. But, if the load on structure increased after first plastic hinge occurs, second plastic hinge occurs at another point. This process continues until the structure becomes unstable. Plastic hinge hypothesis are used in these calculations. Showing adequate ductility and plastic deformations, ie the length of the plastic hinge length is not very large deformations of nonlinear systems, certain sections called plastic hinge is collected, it is considered to regions outside of the system behaves as a linear-elastic. The system is not like the beginning after first plastic hinge occurs. Degrees of freedom of the system changes after plastic hinge occurs . Stiffness matrix shows a difference. The stiffness matrix of system has been found in each interval. However, the decreasing of stiffness matrix continues, it is accepted that stiffness matrix is constant until first plastic hinge occurs. Also, it is accepted that the stiffness matrix is also constant between first and the second plastic hinges. By this way, a curve is obtained between load and stiffness matrix. In the sample problem that used in this study, it is shown on the figure where the plastic hinges occur respectively. The displacements in the case of plastic hinges occur, have also been calculated. The spring constant in the idealized single mass-spring system, has been found. As a result, a table has been obtained indicating the variation of spring constant by the value of the load. As a result, the variation of spring constants depending on the size of the load were obtained in the table. In addition, the formations of plastic hinges have been controlled by SAP2000 computer program and the diagram of stiffness-force has been plotted.

Finally, depending upon these calculations, the vibration of the structure has been examined. The loads on the structures acts on a certain time interval and produce time-dependent strain and stresses. It is accepted that deformations is not depended on time in static calculations. But in dynamic calculation, results are depended on time because of the loads that act on the structure and change by the inertia forces which varies by time are considered. Dynamic calculation performed using specific models. The results are highly accurate the models used depends on how far close to reality. After creating the model, the equation of motion must be written for the dynamic solution and dynamic behavior of model must be determined. The equation of motion, defines the movement of mass over time. Free damping vibration and forced vibration are two important behaviors of structural system. First occur by act of assuming initial conditions. The second one occurs by external loads acting on the system or the movements of the supports. In this study, the forced vibration under an harmonic load has been investigated. According to this, equation of motion has been

formed to examine the vibration of system. The first step that appears in the literature, the equation system formed by equations of motion so that only a freedom discretization in each equation. Each equation of motion is a forced vibration equation that is with single degree of freedom and under effect of damping. A structure is idealized to be a freedom at each storey in dynamic of structure. Solution of this equation is the sum of particular and homogenous solutions. Particular solution is processed by using undetermined coefficients method or variation of parameters method. There are three different damping cases while solving homogenous equation. First one is heavy damping case. The second one is critical damping case. The third is weak damping case. The weak damping has been considered in this work. This equation of motion is a forced vibration equation that is with single degree of freedom and under effect of weak damping. It is considered that the mass of a storey has been collected to one point. The horizontal displacement has been considered only. It is clear that the external load varies by time in the dynamic loading. Therefore, the time values have been evaluated for increasing load values using the load values at which the plastic hinges occur. Then the force-time diagram has been drawn under increasing loads. After that, the stiffness-time graphic has also been drawn which shows time intervals of this stiffness. Natural frequency values of the system have been calculated for every time interval. The damping coefficient of the system must be calculated for every stiffness value by choosing a initial value for system damping. According to this, the natural frequency-time and damping rate of system-time graphics have been plotted. It is assumed that the stiffness matrix remains constant between two values of the load when using the stiffness-load diagram. The system has been solved in a time interval that corresponds to these loads. The values, at the end of the previous interval have been used as initial condition to determine the integration constants of on interval. The displacement-time curve has been drawn. The operations of increasing loads have been repeated for decreasing loads. The changes of increased and decreased loads depending on time, has been represented in a single curve. During calculation, the stiffness values of every time range that is calculated for increasing loads and decreasing loads have been taken as the same. The displacement-time curve, for decreasing loads has been drawn under these conditions. The displacement-time curves for increasing loads and decreasing loads have been combined and they have been shown on one diagram.



## 1. GİRİŞ

Yapıların dinamik davranışı incelenirken yapıya gelen etkilerin artması veya azalması durumunda sistemin rijitliğinin sabit kaldığı kabul edilir. Bu çalışmanın amacı değişen yükler altında yapı da oluşan plastikleşmelerden dolayı rijitliğin değişimini dikkate alarak sistemin titreşiminin incelenmesidir.

Bu çalışmada ilk olarak yapının rijitlik matrisi elde edilip verilen yatay yük altında matris deplasman yöntemi ile deplasmanları ve kesit tesirleri hesaplanmıştır.

İkinci olarak incelenen yapı sistemlerinde ortaya çıkan bir sorun olan artan yükler altında sistemde plastik mafsalların meydana gelmesi ve rijitlik matrisinin değişmesidir. Bu durumda problem nonlineer hale gelir. Bunu inceleyebilmek için dinamik problemi çözmeden önce incelenecek bir yapıya etkiyen statik yükler arttırılarak plastik mafsalların meydana geldiği yük değerleri hesaplanmış ve her plastik mafsalın oluşumundan sonra deplasmanlar bulunarak idealize edilmiş sisteme ait yay katsayıları bulunmuştur. Sonuç olarak yükün şiddetine bağlı olarak yay katsayılarının değişimini belirleyen bir tablo elde edilmiştir. Ayrıca Plastik mafsal oluşumları SAP2000 paket programı ile kontrol edilmiştir.

Son bölümde anlatılan konu yapıların titreşimlerinin incelenmesidir. Literatürde görünen ilk adım hareket denkleminin oluşturduğu denklem sisteminin her bir denklemden sadece bir serbestlik olacak şekilde ayrıklaştırılmasıdır. Ayrıklaştırılan denklemlerin her biri tek serbestlikli sönümlü bir zorlanmış titreşim denklemdir. Yapı dinamiğinde bir yapı her katta bir serbestlik olacak şekilde idealize edilir. Kat kütlelerinin bir noktada toplandığı kabul edilir. Sistemde sadece yatay deplasmanlar göz önüne alınmaktadır. İdealize edilmiş sisteme ait yay katsayılarının gerçek sistemde statik yükler altında yatay kat deplasmanları hesaplanarak bulunduğu daha önce ikinci bölümde anlatılmıştı buna ek olarak bundan sonra dinamik yüklemde yükün zamanla arttığı düşünülmüş ve iki plastik mafsal oluşumu arasında yük artarken rijitlik matrisinin sabit kaldığı kabul edilmiş ve sistem ardışık iki plastik mafsalın oluşumu arasındaki zamanda çözülmüştür dolayısıyla zaman rijitlik eğrisi

bölgelere ayrılmıştır ve her bölgede rijitlik sabit alınmıştır. Bir bölümden diğerine geçişte sistem yer değiştirmelerinin ve hızlarının aynı olduğu kabulü yapılarak integral sabitleri de her bir bölüm için hesaplanmıştır. Sonuçta her aralık için elde edilen eğriler birleştirilerek deplasman zaman eğrisi çizilmiştir. Son olarak artan yükler altında yapılan bu işlemler Rasim HATİPOĞLU'nun Yapıların Dinamik Davranışlarının Kontrolü tezinde de aynı şekilde yapılmıştır. Bu çalışmada ilave olarak azalan yükler altında yapının deplasman zaman eğrisi elde edilip artan yükler altında oluşan deplasman zaman eğrisi ile birleştirilmiştir.

## 2. SİSTEMİN RİJİTLİK MATRİSİ VE DEPLASMANLARININ HESABI

Bu bölümde, Yapı Sistemlerinde karşılaşılan düzlem kafes, düzlem çerçeve v.b. çubuklardan oluşan taşıyıcı sistemlerin çözümünde kullanılan Matris-Deplasman yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Bu yöntemde diğer deplasman yöntemlerinde olduğu gibi deplasmanlar sistemin bilinmeyenleridir. Bahsedilen bu deplasmanlar yapı sisteminin tümü için geçerli olan bir koordinat sistemine göre tarif edilir. Deplasmanlar ve sisteme etkiyen yükler sistem koordinatlarında tarif edilirken çubuklarda oluşan kesit tesirleri ise çubukların kendi koordinatlarında diğer bir deyişle çubuk koordinatlarında tarif edilirler. Düzlem taşıyıcı sistemlerde yapının geometrik şekline uygun olarak alınan düğüm noktaları arası, çubuk denilen elemanlarla birleştirilir. Taşıyıcı sistemin rijitliği sistemi oluşturan bu çubukların rijitliğine bağlıdır. Kafes sistemlerde çubuklar sadece eksen boyunca kuvvetlere maruz kalır. Buna karşılık düzlem çerçevelerde taşıyıcı sistemlerin çubuklarında, eksenlerine dik doğrultularda da kuvvetler bulunur (Çağdaş, 2006).

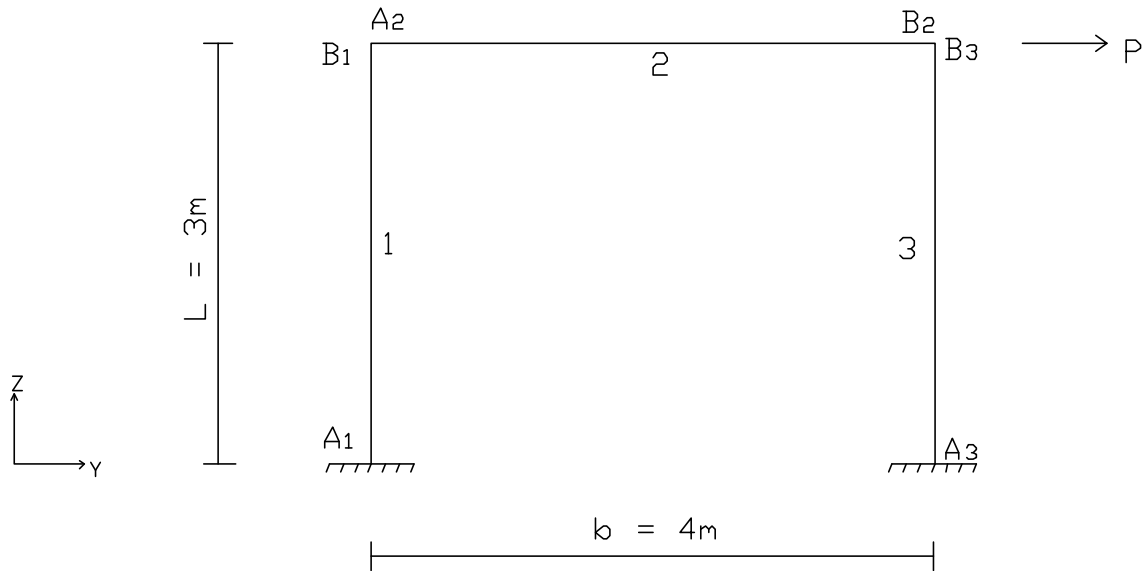
Bütün bu söylenenler dikkate alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilmelidir. Rijitlik matrisini bulmak için önce bir çubuğun kendi koordinatlarında rijitlik matrisi hesaplanır. Bir çubuğun rijitlik matrisini bulabilmek için çubuğa bağlı eksen takımında uç birim kuvvetlerinin uygulanması durumunda oluşabilecek deplasmanların bulunması gerekir. Bu rijitlik terimleri Castigliano teoremi kullanılarak bulunmuştur. Daha sonra da çubukların birleştirilmesi ile oluşturulan taşıyıcı sistemin sistem koordinatlarında sistem rijitlik matrisi elde edilir. Böylece elde edilen sistemin rijitlik matrisi ile, sistemin düğüm noktalarındaki deplasmanları ve dış kuvvetleri arasında bir bağıntı kurulur. Bu şekilde elde edilen matris şeklindeki denklem takımı çözülür, bilinmeyen düğüm noktası deplasmanları hesaplanır ki bunlar sistemin serbestlikleridir. Sistemin düğüm noktalarında hesaplanan deplasmanlar ile çubuk uç deplasmanları arasında bir bağıntı kurularak çubuk uç deplasmanları hesaplanır. Bu uç deplasmanları ile de çubukların uç kuvvetleri arasındaki bağlantılar yardımıyla da çubuk uç kuvvetleri yani kesit tesirleri bulunur.

## 2.1 Sistem Bilgisi

Seçilen sistem temele bağlantıları ankastre olacak şekilde dűşeyde 3m yüksekliğinde yatay da 4m genişliğinde bir elik çerçevedir. Sistemin kesit özelliklerinin tamamı bir başka deyişle kiriş ve kolonları S275 (Fe 44) yapı çeliğinden tasarlanmış olup sistem yatay bir kuvvet etkisindedir.

**Çizelge 2.1 :** Seçilen eliėin özellikleri.

|                               |                                                 |
|-------------------------------|-------------------------------------------------|
| Akma Gerilmesi ( $\sigma_F$ ) | 275 N/mm <sup>2</sup>                           |
| Elastisite Modűlű (E)         | $2.1 \times 10^7$ N/cm <sup>2</sup>             |
| elik zgűl Aėırlıėı          | 7,85 kg/dm <sup>3</sup> =7850 kg/m <sup>3</sup> |



**řekil 2.1 :** Sistem gűrűnűřű.

## 2.2 Sistemin Kuvvet Deplasman Bağıntıları

Dűzlem çerçevede çubuk eksenleri ve dıř kuvvetler řekil 2.1’de gűrűldűėű gibi YZ dűzlemi içindedir. X,Y,Z eksen takımı bir çubuėun konumunu belirlemek için kullanılır ve sistem eksenleri olarak isimlendirilir. Ayrıca her çubuėa baėlı bir x,y,z eksen takımı tanımlanır buna da çubuk eksenleri denir. Çubuklar birbirlerine rijit veya mafsallı olarak baėlanır. Ayrıca dűzlem ereve izostatik veya hiperstatik bir sistem oluřturacak řekilde baėlanmalıdır. Burada sadece doėru eksenli çubuklar gűz nűne



alınmıştır ve sisteme etkiyen dış yük çubukların birleşim noktasına etkidiği kabul edilmiştir. Bir düzlem çubuğun kendi  $x,y,z$  takımındaki serbestlikleri incelenir. A noktası çubuğun başlangıç noktası B noktası ise bitiş noktası olsun.

Bir sistemin birbirinden bağımsız yapabileceği deplasman sayısına serbestlik derecesi denir. Düzlem çerçeve çubuğunda A ucunda üç, B ucunda üç olmak üzere altı serbestlik bulunur.

### 2.3 Çubuğun Rijitlik Matrisinin Bulunması

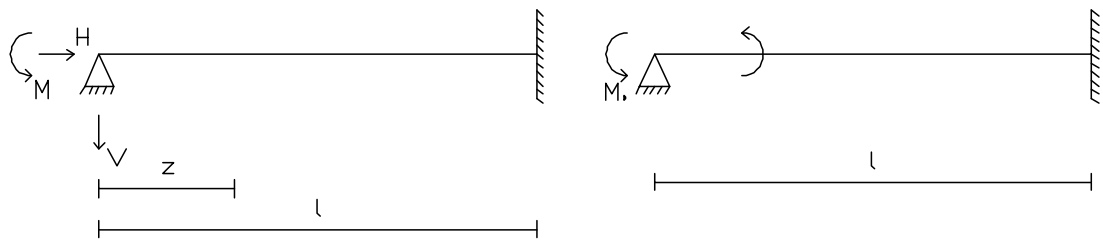
Düzlem çubuğun rijitlik matrisini bulabilmek için önce bir çubukta çubuğa bağlı eksen takımı  $x,y,z$  olarak tanımlanır **Şekil 2.2**.



**Şekil 2.2 :** Düzlem çerçeve çubuğu.

Bu deplasmanlar **Şekil 2.2**'de gösterilmiştir. Çubuğun diğer bütün serbestlik dereceleri doğrultusundaki deplasmanlar sıfır iken, yalnız  $j$  doğrultusunda birim deplasman oluşturabilmek için,  $i$  doğrultusunda uygulanması gereken kuvvet çubuğun  $k$  rijitlik matrisinin  $ij$  numaralı elemanıdır. Bu rijitlik  $k_{ij}$  olarak ifade edilir.  $k_{ij}$  değerleri hesaplanırken Castigliano teoreminden yararlanılır.

Örnek olarak **Şekil 2.3**'de sabit mafsallı mesnetin olduğu taraftaki ucun dönmesini bir yapan  $M$  değeri  $k_{11}$ 'i verir ve  $k_{11}$  'in hesabı yapılırsa;



**Şekil 2.3 :** Bir ucu ankastre, bir ucu sabit mesnetli kiriş.

Bir z kesitinde kesit tesirleri;

$$N = -H, \quad M_x = V \cdot z - M \quad (2.1)$$

Düzlem bir çubukta yz düzlemi içinde  $M_x$  eğilme momenti,  $N$  normal kuvveti ve  $T_y$  kesme kuvveti oluşur. Kesme kuvvetinin etkisi göz önüne alınmazsa çubuktaki toplam şekil değiştirme işi;

$$U = \int_0^l \left( \frac{N^2}{2EF} + \frac{M_x^2}{2EI} \right) dz \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplanır. Burada  $F$  çubuk kesit alanını,  $I$  kesitin  $x$  eksenine göre atalet momentini göstermektedir.  $E$  çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

### 2.3.1 Castigliano teoremi

Çubuğun bir noktasına  $P$  kuvveti etkirse bu noktada, kuvvet doğrultusundaki deplasman;

$$\delta_p = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \left( \frac{N}{EF} \frac{\delta N}{\delta P} + \frac{M_x}{EI} \frac{\delta M_x}{\delta P} \right) dz \quad (2.3)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca bir noktada  $M$  momenti etkiliyorsa o noktada, moment yönünde dönme açısı ise;

$$\theta_M = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^l \left( \frac{\delta N}{\delta M} + \frac{\delta M_x}{\delta M} \right) dz \quad (2.4)$$

olarak bulunur.

Denklem (2.1), (2.2), (2.3) ve (2.4) kullanılarak çökme ve dönme hesaplanırsa

$$\delta = 0 = \int_0^l \frac{M-Vz}{EI} dz \rightarrow 0 = V \frac{l^3}{3} - M \frac{l^2}{2} \quad (2.5)$$

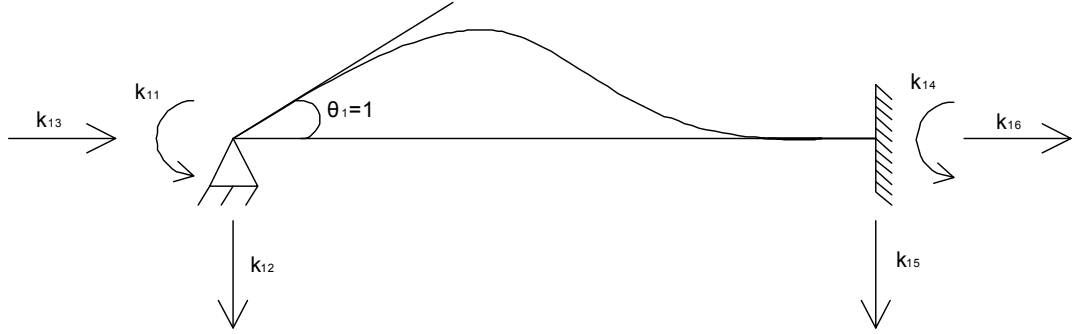
$$\frac{\partial M_x}{\partial M} = -1$$

$$\theta = 1 = \int_0^l \frac{Vz-M}{EI} (-1) dz \rightarrow EI = V \frac{l^2}{2} + Ml \quad (2.6)$$

$$\rightarrow k_{11} = M = \frac{4EI}{l} \quad (2.7)$$

bulunur.

Benzer şekilde diğerleri de hesaplanırsa,



**Şekil 2.4 :**  $k_{ij}$ , ( $i=1$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\rightarrow k_{11} = M = \frac{4EI}{l} \quad (2.8)$$

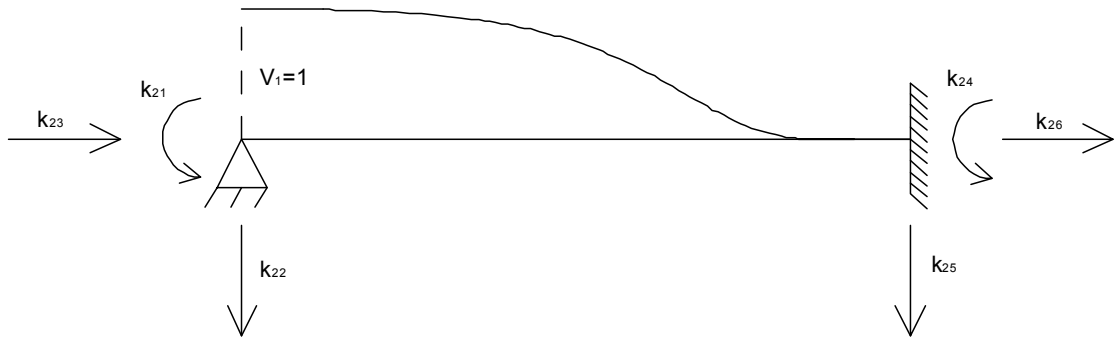
$$\rightarrow k_{12} = \frac{-6EI}{l^2} \quad (2.9)$$

$$\rightarrow k_{13} = 0 \quad (2.10)$$

$$\rightarrow k_{14} = \frac{2EI}{l} \quad (2.11)$$

$$\rightarrow k_{15} = \frac{6EI}{l^2} \quad (2.12)$$

$$\rightarrow k_{16} = 0 \quad (2.13)$$



**Şekil 2.5 :**  $k_{ij}$ , ( $i=2$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\rightarrow k_{21} = \frac{-6EI}{l^2} \quad (2.14)$$

$$\rightarrow k_{22} = \frac{12EI}{l^3} \quad (2.15)$$

$$\rightarrow k_{23} = 0 \quad (2.16)$$

$$\rightarrow k_{24} = \frac{-6EI}{l^2} \quad (2.17)$$

$$\rightarrow k_{25} = \frac{12EI}{l^3} \quad (2.18)$$

$$\rightarrow k_{26} = 0 \quad (2.19)$$



Şekil 2.6 :  $k_{ij}$ , ( $i=3$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\frac{k_{33}}{EF}l = 1 \rightarrow k_{33} = \frac{EF}{l} \quad (2.20)$$

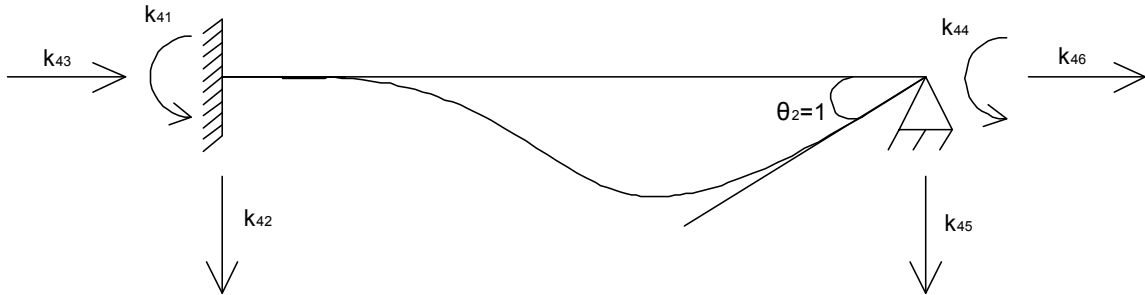
$$\rightarrow k_{32} = 0 \quad (2.21)$$

$$\rightarrow k_{31} = 0 \quad (2.22)$$

$$\rightarrow k_{34} = 0 \quad (2.23)$$

$$\rightarrow k_{35} = 0 \quad (2.24)$$

$$\rightarrow k_{36} = \frac{-EF}{l} \quad (2.25)$$



Şekil 2.7 :  $k_{ij}$ , ( $i=4$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\rightarrow k_{41} = \frac{2EI}{l} \quad (2.26)$$

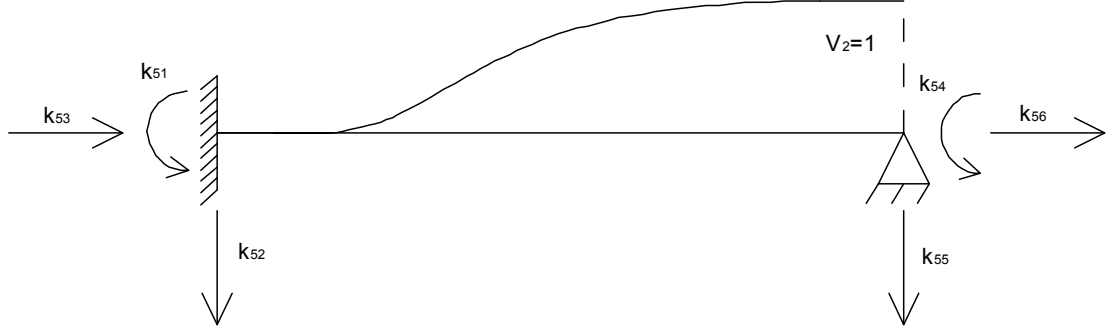
$$\rightarrow k_{42} = \frac{-6EI}{l^2} \quad (2.27)$$

$$\rightarrow k_{43} = 0 \quad (2.28)$$

$$\rightarrow k_{44} = \frac{4EI}{l} \quad (2.29)$$

$$\rightarrow k_{45} = \frac{6EI}{l^2} \quad (2.30)$$

$$\rightarrow k_{46} = 0 \quad (2.31)$$



**Şekil 2.8 :**  $k_{ij}$ , ( $i=5$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\rightarrow k_{51} = \frac{6EI}{l^2} \quad (2.32)$$

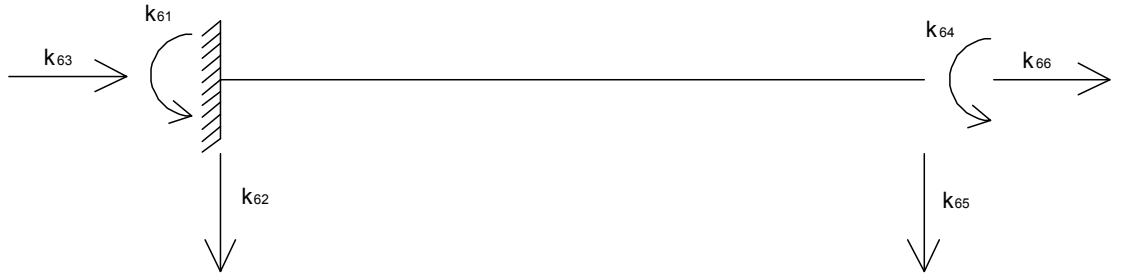
$$\rightarrow k_{52} = \frac{-12EI}{l^3} \quad (2.33)$$

$$\rightarrow k_{53} = 0 \quad (2.34)$$

$$\rightarrow k_{54} = \frac{6EI}{l^2} \quad (2.35)$$

$$\rightarrow k_{55} = \frac{12EI}{l^3} \quad (2.36)$$

$$\rightarrow k_{56} = 0 \quad (2.37)$$



**Şekil 2.9 :**  $k_{ij}$ , ( $i=6$  ve  $1 \leq j \leq 6$ ) iken rijitlik terimleri.

$$\rightarrow k_{61} = 0 \quad (2.38)$$

$$\rightarrow k_{62} = 0 \quad (2.39)$$

$$\rightarrow k_{63} = \frac{-EF}{l} \quad (2.40)$$

$$\rightarrow k_{64} = 0 \quad (2.41)$$

$$\rightarrow k_{65} = 0 \quad (2.42)$$

$$\rightarrow k_{66} = \frac{EF}{l} \quad (2.43)$$

olarak bulunur ve çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{-EF}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

(2.44) ifadesinden  $k_{ij}$  matrisinin simetrik bir matris olduğu görülür (Tezcan,1970).

## 2.4 Sistem Rijitlik Matrisinin (K) Bulunması ve Yük Deplasman Bağlıları

Herhangi bir düzlem çubuk için,  $k_{xyz}$  rijitlik matrisi, çubuk koordinatlarında bulunmuştur. Bu matris bir çubuk için sistemde tanımlanmış olan sistem koordinatlarına dönüşümü yapılır ve sistem koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi  $k_{XYZ}$  elde edilir. Bu işlem bütün çubuklara uygulanır. Daha sonra elde edilen bu matrisler kullanılarak tüm sisteme ait K sistem rijitlik matrisi oluşturulur.

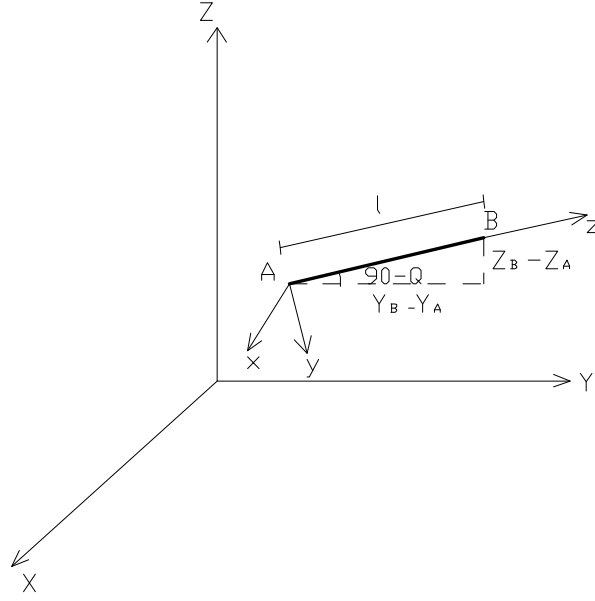
### 2.4.1 Çubuk rijitlik matrisinin sistem koordinatlarında elde edilmesi

Sistem koordinatlarındaki çubuk rijitlik matrisinin  $k_{XYZ}$  elde edilmesi için bir dönüşüm yapılması gerekir. Bu işlemin hesap şekli iki koordinat sistemi arasındaki açılara bağlı olarak trigonometrik ifadeler kullanılarak yapılabilir. Sistemli olması açısından bu çözümde dönüşüm matrisleri Q ile yapılır. Her çubuğun dönüşüm matrisi farklıdır.

### 2.4.2 Q Dönüşüm matrisinin bulunması

Bir AB düzlem çerçeve çubuğu XYZ sistem koordinatlarında Şekil 2.10'da gösterilmiştir. Ayrıca bu çubuğa bağlı olan xyz çubuk koordinatları da Şekil 2.10'da gösterilmektedir. X, Y, Z eksenlerini x, y, z eksenlerini dönüştüren Q matrisi

$$\cos\theta = \frac{Z_B - Z_A}{l} \quad \sin\theta = \frac{Y_B - Y_A}{l} \quad (2.45)$$



**Şekil 2.10 :** Sistem ve çubuk koordinatları.

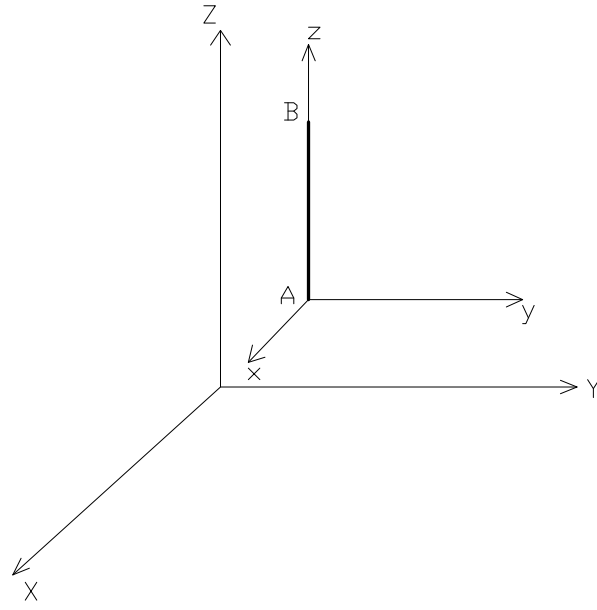
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Denklem (2.46) daki eşitlik bir vektörün bileşenlerinin herhangi bir noktada dönüşümünü gösterir. Aynı noktada açısıl bir vektörün de bulunması durumunda açısıl vektörlerin her iki koordinat sisteminde aynı bileşene sahiptir ve diğer doğrusal bileşenlerden bağımsızdır.

Bir düzlem çubukta dönüştürülmesi gerekli olan 6 serbestlik derecesi yani iki dönme ve dört öteleme söz konusudur. Bu dönüşüm **Q** transformasyon matrisi ile sağlanır.

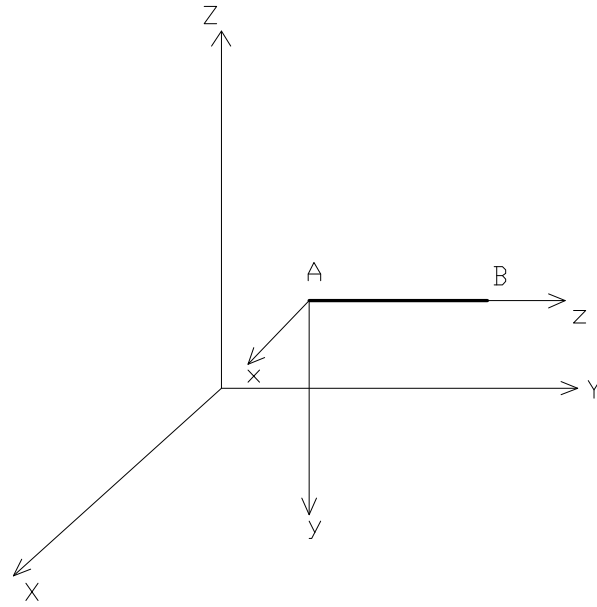
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Bu çalışmada verilen sistem için  $\theta$  açısının  $90^\circ$  (düşey çubuk) veya  $0^\circ$  (yatay çubuk) olduğu haller için, çubuk koordinatlarının yönüne bağlı olarak dönüşüm matrisi incelenirse;



**Şekil 2.11 : Özel çubuk durumları.**

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



**Şekil 2.12 : Özel çubuk durumları.**

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$



### 2.4.3 Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik matrisinin $k_{XYZ}$ bulunması

Sistem koordinatlarındaki herhangi bir kuvvet veya yerdeğiştirme de çubuk koordinatlarına aşağıdaki denklemler yardımı ile dönüştürülür.

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad \text{ve} \quad \mathbf{d} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \quad (2.50)$$

$\mathbf{p}$  çubuk koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri,  $\mathbf{d}$  çubuk koordinatlarındaki çubuk uç deplasmanları,  $\mathbf{P}$  sistem koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri,  $\mathbf{D}$  sistem koordinatlarındaki çubuk uç deplasmanlarıdır.

Herhangi bir çubukta, çubuk koordinatlarında çubuk uç kuvvetleri ile çubuk koordinatlarında çubuk uç deplasmanları arasındaki bağıntı şu şekilde yazılır.

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}_{xyz} \mathbf{d} \quad (2.51)$$

$\mathbf{k}_{xyz}$  : çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi

Denklem (2.51) sistem koordinatlarında, denklem (2.50) deki denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{k}_{xyz} \mathbf{Q} \mathbf{D} \quad (2.52)$$

$\mathbf{Q}$  matrisi ortogonal bir matris olduğundan, transpozesi ile çarpılırsa  $\mathbf{I}$  birim matrisi elde edilir. Bu durumda (2.52) soldan  $\mathbf{Q}^T$  ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}_{xyz} \mathbf{Q} \mathbf{D} \quad (2.53)$$

Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik denklemi;

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}_{XYZ} \mathbf{D} \quad (2.54)$$

olur.

(2.53) ve (2.54) denklemleri kullanılarak;

$$\mathbf{k}_{XYZ} = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}_{xyz} \mathbf{Q} \quad (2.55)$$

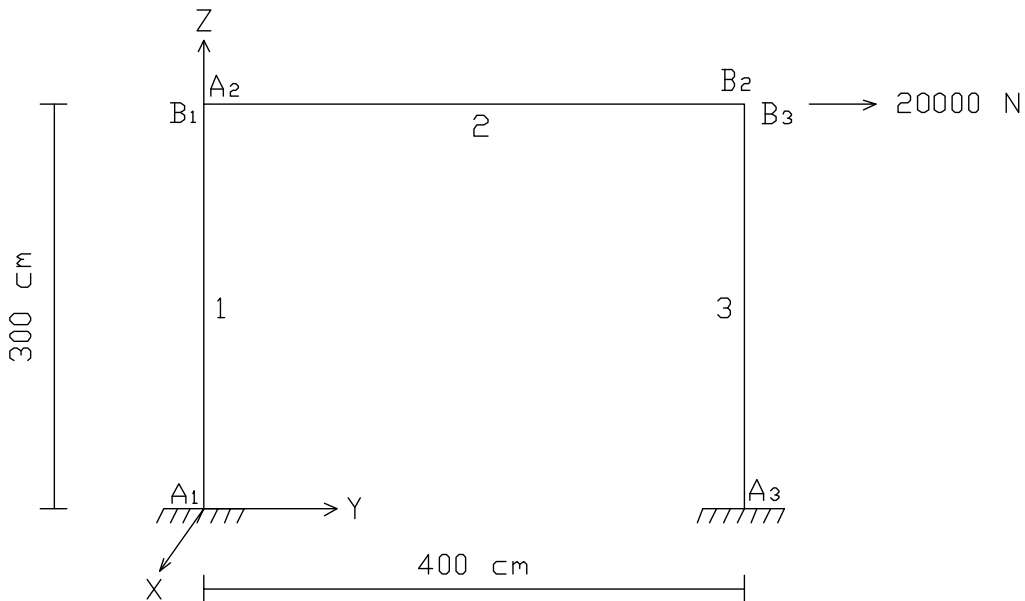
olarak bir çubuğun sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi  $\mathbf{k}_{XYZ}$  bulunur.

#### 2.4.4 Çerçevenin sistem koordinatlarında K sistem rijitlik matrisi

$\mathbf{K}'$  nın oluşturulabilmesi için düzlem çerçevenin serbestliklerinin çerçeve içinde numaralanması gerekir. Çerçevenin  $m$  serbestliği varsa  $\mathbf{K}$   $m \times m$  mertebesinde olacaktır. Serbestlikler çubukların dış ortama ve birbirlerine bağlandığı noktalardaki deplasmanlardır. Eğer çerçeve bir dış ortama bir noktadan ankastre olarak bağlanmışsa bu noktada serbestlik yoktur. Bağlantı noktası kayıcı mesnetse iki, sabit mesnetse bir serbestlik vardır. Çubukların bağlantı noktalarında ise daima üç serbestlik bulunur ancak bu bağlantı noktasında bir ara mafsal olmadığı durumda geçerlidir. Ara mafsal bu birleşim noktasında dört ilave serbestlik olmasına neden olur. Bundan sonra kod numaraları matrisi tanımlanır. Sistemdeki çubuk sayısı  $n$  ise kod numaraları matrisi  $n \times 6$  mertebesinde bir matristir. Bu matris  $\mathbf{k}_n$  matrisi olarak isimlendirilirse,  $k_{nij}$   $i$  numaralı çubuktaki  $j$  numaralı çubuk deplasmanının sistem serbestliklerindeki numarasına eşittir. Daha sonra sistem koordinatlarındaki çubuk rijitlik matrisleri kod numaraları matrisi yardımı ile sistem rijitlik matrisine yerleştirilir. Eğer kod numaralarından biri 0 ise o eleman hiçbir terime eklenmez.  $\mathbf{D}$  sistemin deplasmanların sayısı ise  $\mathbf{P}$  de bu deplasmanların tanımlandığı noktalardaki yükler olmak üzere;

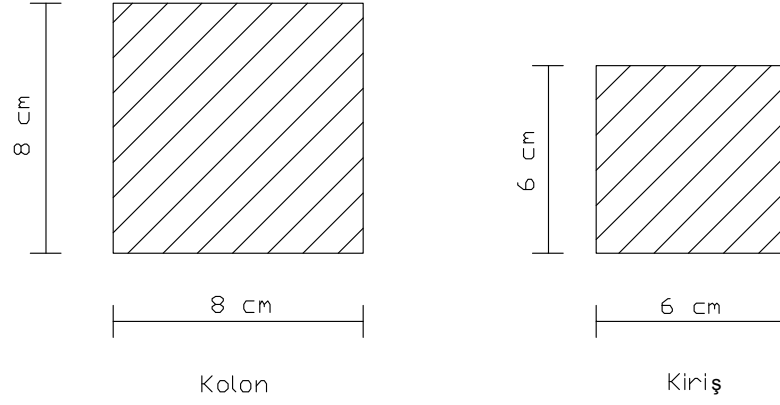
$$\mathbf{K} \times \mathbf{D} = \mathbf{P} \quad (2.56)$$

dir.  $\mathbf{K}$  ve  $\mathbf{P}$  biliniyorsa  $\mathbf{D}$  sistem deplasmanları hesaplanır.



Şekil 2.13 : Düzlem çerçeve.

Çerçeve sistemi **Şekil 2.13**'de gösterilmiştir ve B<sub>2</sub> noktasında 20000 N' luk bir yatay yük ile yüklenmiştir. Çubuklar A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> 1 numaralı, A<sub>2</sub>B<sub>2</sub> 2 numaralı, A<sub>3</sub>B<sub>3</sub> 3 numaralı çubuk olarak isimlendirilmiştir.



**Şekil 2.14** : Kolon ve kiriş kesiti.

**Çizelge 2.2** : Kolonun ve kirişin özellikleri.

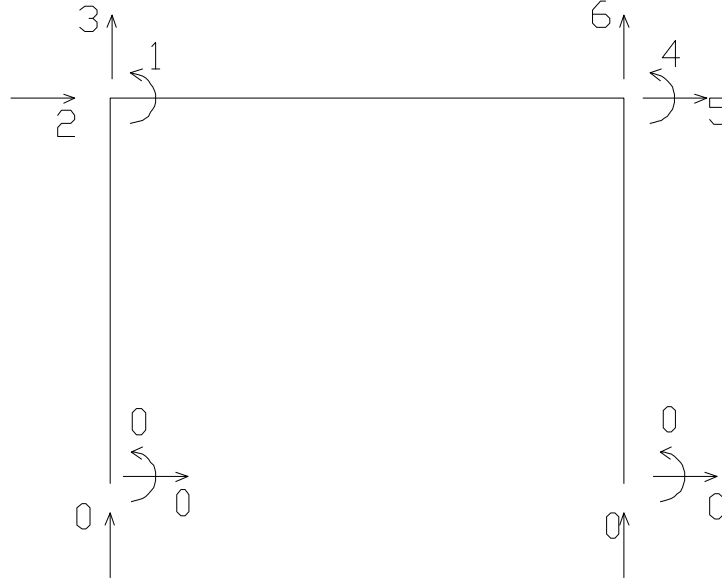
| Kolon                                | Kiriş                                |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $I = 341.33 \text{ cm}^4$            | $I = 108 \text{ cm}^4$               |
| $F = 64 \text{ cm}^2$                | $F = 36 \text{ cm}^2$                |
| $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ | $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ |

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

çubuk dönüşüm matrisleri yukarıdaki gibi hesaplanmıştır.



**Şekil 2.15 :** Sistem serbestliklerinin numaralanması.

Şekil 2.15’deki numaralamaya ve daha önce belirlenen çubuk numaralarına göre kod numaraları matrisi;

$$\mathbf{k}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

olur. Çubuk rijitlik matrisleri  $\mathbf{k}_{xyz}$  çubuk koordinatlarındadır. Her çubuğun  $\mathbf{Q}_i$  dönüşüm matrisi ve  $\mathbf{k}_{xyz}$  çubuk rijitlik matrisleri kullanılarak (2.55) denklemi yardımı ile her çubuğun sistem koordinatlarında  $\mathbf{k}_{XYZ}$  rijitlik matrisi bulunur. Bu matrisler sistem rijitlik matrisine kod numaraları matrisi yardımı ile yerine yerleştirilerek  $\mathbf{K}$  sistem rijitlik matrisi bulunur. Bu 6 x 6 mertebesinde bir matristir(2.61).

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.183 \times 10^8 & 477862 & 85050 & 1.134 \times 10^7 & 0 & -85050 \\ 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 \\ 85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 85050 & 0 & -425.25 \\ 1.134 \times 10^7 & 0 & 85050 & 1.183 \times 10^8 & 477862 & -85.050 \\ 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 \\ -85050 & 0 & -425.25 & -85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

(2.56) denklemi kullanılarak sistem deplasmanları bulunur.

$$\mathbf{K} \times \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

olur.

Sistem deplasmanları bu denklem çözülerek

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.0259 \\ 7.0218 \\ 0.0009 \\ -0.0259 \\ 7.0271 \\ -0.0009 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

olarak bulunur (birimler rad. ve cm cinsindendir).

1 numaralı kolonun kesit tesirleri denklem (2.51)'de verilen bağıntı kullanılarak hesaplanırsa (birimler kN ve m cinsindendir);

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 21.18 \\ -9.99 \\ -4.41 \\ 8.80 \\ 9.99 \\ 4.41 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

2 numaralı kirişin kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -8.80 \\ 4.41 \\ -9.99 \\ -8.81 \\ -4.41 \\ 9.99 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

3 numaralı kolonun kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 21.19 \\ -10.00 \\ 4.41 \\ 8.81 \\ 10.00 \\ -4.41 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

olarak bulunur.



### 3. SİSTEMİN RİJİTLİK MATRİSİNİN DEĞİŞMESİ

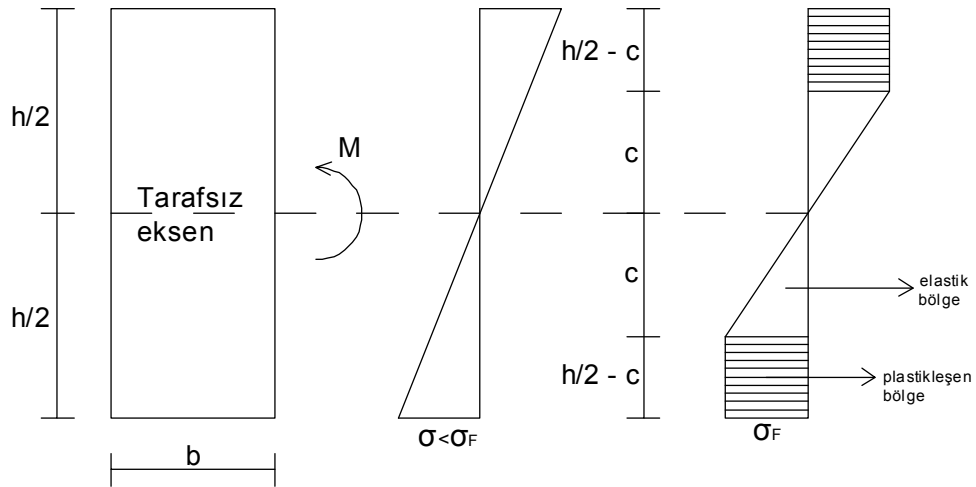
Sistemde artan yükler altında plastik mafsalların meydana gelmesi ve rijitlik matrisinin değişmesi söz konusudur (Zareian ve Medina, 2010). Bu durumda problem nonlinear hale gelir. Yükler zamana bağlı olarak artarken rijitlik matrisi de zamana bağlı olarak azalır.

#### 3.1 Plastik Mafsalsal Hipotezi

Yeterli derecede süneklik gösteren ve plastik şekil değiştirmelerin uzunluğunun yani plastik mafsalsal boyunun çok büyük olmadığı sistemlerde lineer olmayan şekil değiştirmelerin plastik mafsalsal adı verilen belirli kesitlerde toplandığı, bunun dışındaki bölgelerde sistemin lineer-elastik olarak davrandığı kabul edilir. Bu hipoteze plastik mafsalsal hipotezi denir (Özer ve Orakdöğen, 2008). Plastik mafsalsalın dönmesi, dönme kapasitesi adı verilen bir sınır değere eşit olunca kesit kırılır ve sistem geçer.

#### 3.2 Eğilme Altında Bir Kesitin Plastik Mafsalsal Momenti Hesabı

Yukarıda anlatılanlara bağlı olarak bir kesitte plastik mafsalsal momenti aşağıdaki gibi hesaplanır;



Şekil 3.1 : Elasto-plastik malzemeden oluşan dikdörtgen kesitte eğilme.

**Şekil 3.1** deki malzemesi elasto-plastik davranışa sahip dikdörtgen kesitin basit eğilme etkisindeki davranışı, gerilmelerin akma sınırının altında olduğu kabul edildiğinde yani  $\sigma \leq \sigma_F$  ise;

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.2)$$

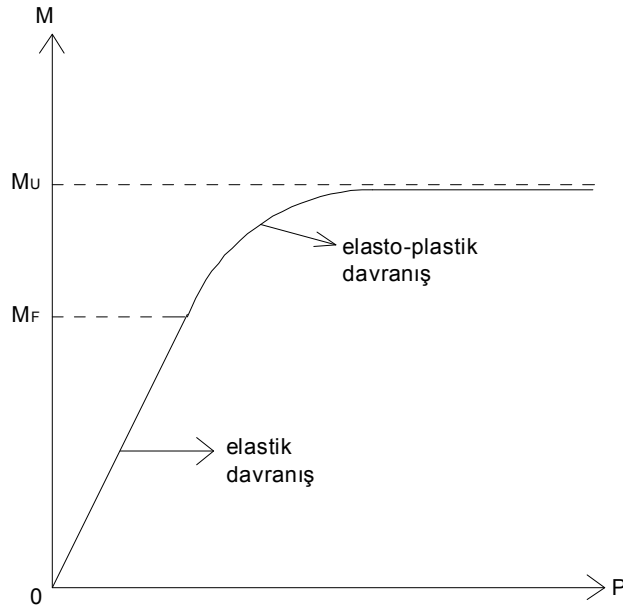
Burada M kesite etki eden eğilme momenti,  $\sigma_{\max}$  en büyük eğilme gerilmesi, I kesit atalet momentini ifade etmektedir.

Maksimum gerilmenin akma gerilmesine eşit olması durumunda, plastikleşmenin başladığı görülür.

$$\sigma_{\max} = \sigma_F \quad (3.3)$$

$$M_F = \sigma_F \frac{I}{h/2} = \sigma_F \frac{bh^2}{6} \quad (3.4)$$

Burada  $M_F$  akma momentine karşı gelir. Kesite etkiyen momentin akma momentinden büyük olması durumunda kesit plastikleşmeye başlar ve **Şekil 3.1**'de görüldüğü gibi plastikleşme kesit ortasındaki tarafsız eksene doğru genişler.



**Şekil 3.2** :Dikdörtgen kesitte eğilme momenti-kuvvet değişimi.

**Şekil 3.2** de moment ile kuvvet arasındaki bağıntı gösterilmiştir. Akma momentinden küçük değerlerde doğrusal elastik davranış ortaya çıkarken, kesitin bir kısmının plastikleşmesiyle oluşan elasto-plastik davranışın doğrusal olmadığı görülür



momentin  $M_U$  plastik momentine yaklaştığı görülür. Kesitin tamamen plastikleşmesi durumunda;

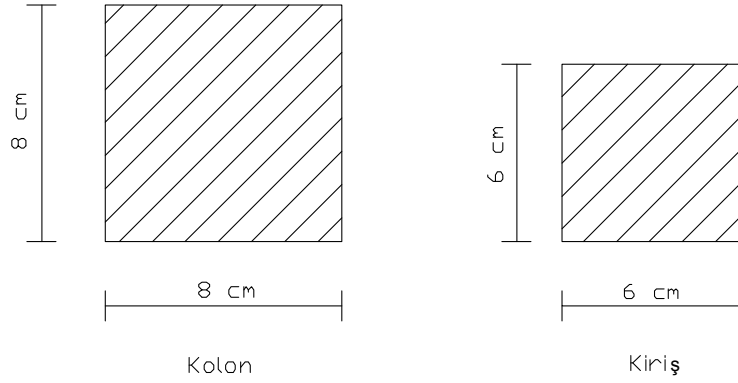
$$M_U = \sigma_F b \frac{h}{2} \frac{h}{2} = \sigma_F \frac{bh^2}{4} = \frac{3}{2} M_F \quad (3.5)$$

olur.

### 3.2.1 Elasto-plastik malzeme

Elasto-plastik malzemede malzeme elastik davranışın sonunda akmaya ulaşmakta olup, bundan sonra gerilmede bir artış olmaksızın elastik şekil değiştirmeler üzerine plastik şekil değiştirmeler meydana gelir. Boşalma elastik olarak oluşurken plastik şekil değiştirmeler geri dönmeyerek kalmaktadır (Celep, 2008).

Buna göre verilen yapının akma ve plastik momenti hesaplanırsa;



**Şekil 3.3 : Çelik çerçevenin kolon ve kiriş boyutları.**

Kolonun akma momenti;

Çeliğin akma gerilmesi  $\rightarrow \sigma_F = 275000 \text{ kN/m}^2$

$$M_F = \sigma_F \frac{bh^2}{6} = 275000 \frac{0.08 \times (0.08)^2}{6} = 23,46 \text{ kNm} \quad (3.6)$$

Kirişin akma momenti;

$$M_F = \sigma_F \frac{bh^2}{6} = 275000 \frac{0.06 \times (0.06)^2}{6} = 9,9 \text{ kNm} \quad (3.7)$$

Kolonun plastik momenti;

$$M_U = \frac{3}{2} M_F = \frac{3}{2} \times 23,46 = 35,20 \text{ kNm} \quad (3.8)$$

Kirişin plastik momenti;

$$M_U = \frac{3}{2} M_F = \frac{3}{2} \times 9,9 = 14,85 \text{ kNm} \quad (3.9)$$

bulunur.

**Çizelge 3.1 : Kesitlerin akma ve plastik momentleri.**

| Kesitler  | Akma Momenti | Plastik Momenti |
|-----------|--------------|-----------------|
| Kolon (1) | 23,46 kNm    | 35,20 kNm       |
| Kiriş (2) | 9,9 kNm      | 14,85 kNm       |
| Kolon (3) | 23,46 kNm    | 35,20 kNm       |

### 3.3 Limit Yük

İzostatik sistemlerde en çok zorlanan kesitte plastik mafsallın oluşması ile sistem yük taşıyamaz duruma gelir. Hiperstatik sistemlerde oluşan plastik mafsall sistemin hiperstatiklik derecesini düşürür. Yüklemeye devam edilirse, plastik mafsalların sayılarının artmasıyla, taşıyıcı sistem, yerel olarak veya tüm sistem olarak mekanizma durumuna gelir ve bu durumda yük de sınır değerine erişir (Celep, 2008). Yükün en son değeri limit yük olarak adlandırılır. Limit yüke erişinceye kadar plastik mafsallarda dönmeler ve bunun sonucu sistemde yerdeğiştirmeler ortaya çıkar. Limit yükün kabul edilebilmesi için bu dönme ve yerdeğiştirmelerin kabul edilebilir olması gerekir yani oluşan yerdeğiştirme ve şekil değiştirmelerin sistemin ve ilgili kesitin kapasitesini geçmemelidir ya da plastik yerdeğiştirme ve şekil değiştirme kalıcı ise kabul edilebilir olması gereklidir.

#### 3.3.1 Limit yükün yük artımı yöntemi ile hesabı

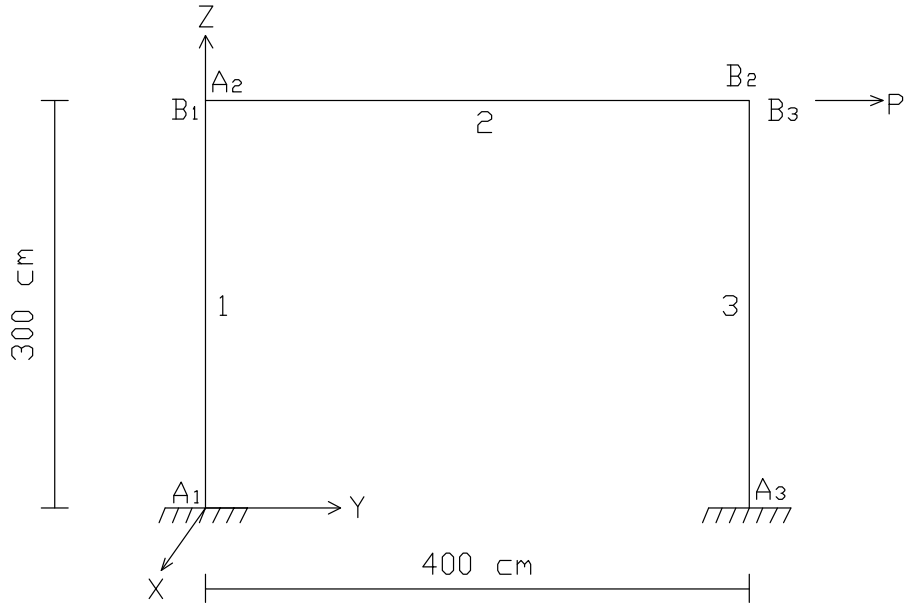
Plastik mafsall hipotezi kullanılarak, bir taşıyıcı sistemin limit yükünün elde edilmesinde yük artımı yöntemi kullanılır bu yöntemde yük arttırılarak adım adım sistemin davranışının plastik mafsall oluşumu da göz önünde tutularak incelenir. Bu yöntemde, eğilme momentinin sınır değere ulaştığı kesitlere adi mafsall yerleştirilir

ve  $M_u$  momentini dış yük olarak etkitmek şartıyla, taşıyıcı sistemde mekanizma durumu oluşuncaya kadar devam edilir ve limit yük bulunur.

### 3.3.2 Sistemin limit yükünün bulunması

Birinci plastik mafsallın oluşacağı zamana kadar ki rijitlik matrisi ilk bölümde denklem (2.61)'de hesaplanan rijitlik matrisidir.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.183 \times 10^8 & 477862 & 85050 & 1.134 \times 10^7 & 0 & -85050 \\ 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 \\ 85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 85050 & 0 & -425.25 \\ 1.134 \times 10^7 & 0 & 85050 & 1.183 \times 10^8 & 477862 & -85.050 \\ 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 \\ -85050 & 0 & -425.25 & -85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$



Şekil 3.4 : Düzlem çerçeve.

20000 N olan yük 33210 N a kadar artırılır.

(2.56) denklemi kullanılarak sistemin artan yük altındaki deplasmanları bulunur.

$$\mathbf{K} \times \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33210 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

olur.

Sistem deplasmanları bu denklem çözülerek;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.043 \\ 11.674 \\ 0.0016 \\ -0.043 \\ 11.6828 \\ -0.0016 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

olarak bulunur (birimler rad. ve cm cinsindendir).

1 numaralı kolonun kesit tesirleri denklem (2.51)'de verilen bağıntı kullanılarak hesaplanırsa (birimler kN ve m cinsindendir);

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.17 \\ -16.6 \\ -7.31 \\ 14.62 \\ 16.6 \\ 7.31 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

2 numaralı kirişin kesit tesirleri;

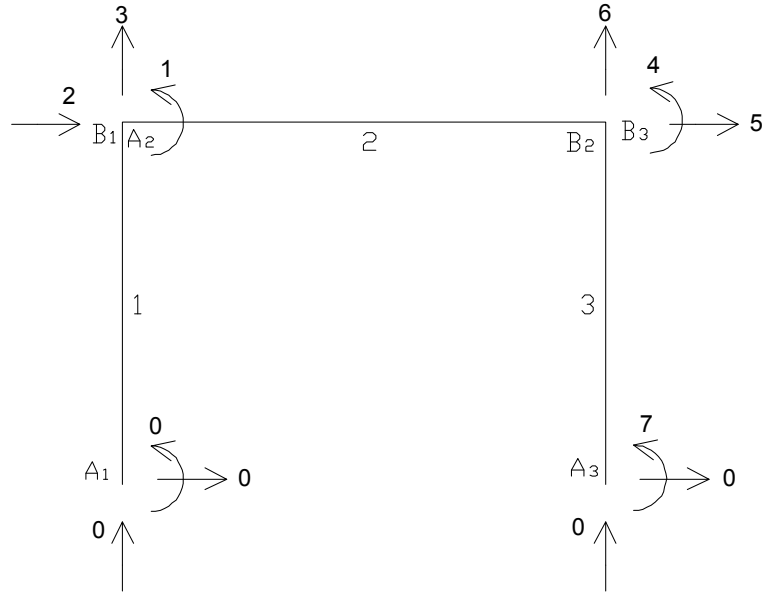
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -14.62 \\ -7.31 \\ -16.6 \\ -14.62 \\ 7.31 \\ 16.6 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3 numaralı kolonun kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.20 \\ -16.6 \\ 7.31 \\ 14.63 \\ 16.6 \\ -7.31 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

bulunur. Denklem (3.15)'de görüldüğü gibi  $A_3$  noktasındaki moment değeri plastik moment değerine ulaşmış olup o bölgede plastik mafsall oluşmuştur.

Birinci plastik mafsall oluştuğundan sonra oluşan bölgede gerçekten bir mafsall varmış gibi kabul edilir ve mafsallın olduğı bölgeye plastik mafsall momenti büyüklüğünde bir moment etkililir böylece yeni sistem yedi bilinmeyenli bir sistem olur ve yük artımına devam edilir.



**Şekil 3.5 :** Birinci plastik mafsal oluşuktan sonra sistemin serbestlikleri.

Yukarıdaki işlemler aynı şekilde tekrarlanır denklem (3.16)'da gösterildiği gibi 7x7'lik bir rijitlik matrisi elde edilmiştir ve yük 33210 N dan 33225 N a kadar arttırılır.

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.183 \times 10^8 & 477862 & 85050 & 1.134 \times 10^7 & 0 & -85050 & 0 \\ 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 85050 & 0 & -425.25 & 0 \\ 1.134 \times 10^7 & 0 & 85050 & 1.183 \times 10^8 & 477862 & -85050 & 4.77862 \times 10^7 \\ 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 477862 \\ -85050 & 0 & -425.25 & -85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.77862 \times 10^7 & 477862 & 0 & 9.55724 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

(2.56) denklemi kullanılarak sistemin artan yük altındaki deplasmanları bulunur.

$$\mathbf{K} \times \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33225 \\ 0 \\ 3520000 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

olur. Sistem deplasmanları bu denklem çözülerek

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.043 \\ 11.6832 \\ 0.0016 \\ -0.043 \\ 11.692 \\ -0.0016 \\ 0.0004 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

olarak bulunur (birimler rad. ve cm cinsindendir).

1 numaralı kolonun kesit tesirleri denklem (2.51)'de verilen bağıntı kullanılarak hesaplanırsa (birimler kN ve m cinsindendir);

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.20 \\ -16.61 \\ -7.32 \\ 14.63 \\ 16.61 \\ 7.32 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

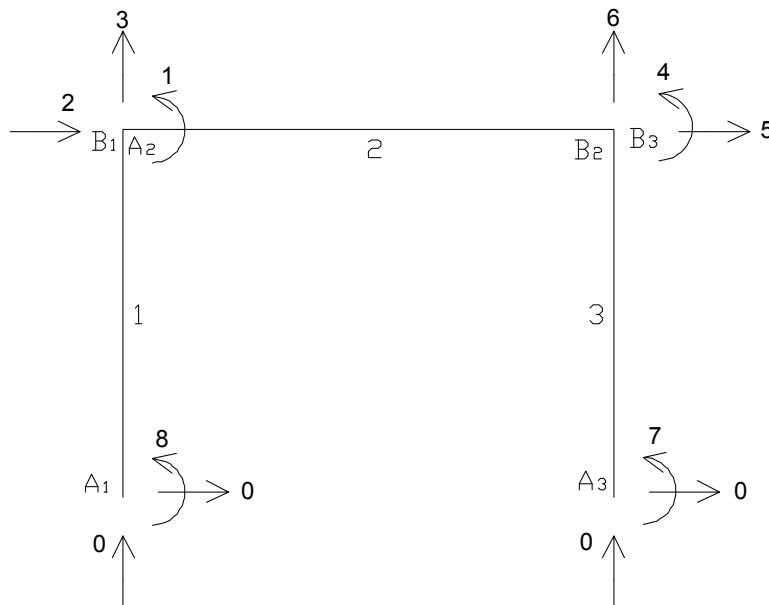
2 numaralı kirişin kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -14.63 \\ -7.32 \\ -16.61 \\ -14.63 \\ 7.32 \\ 16.61 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3 numaralı kolonun kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.20 \\ -16.61 \\ 7.32 \\ 14.63 \\ 16.61 \\ -7.32 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Bu çözümün sonunda ikinci plastik mafsall 1 numaralı kesitte yani  $A_1$  noktasında oluşur.  $A_1$  noktasına da gerçek bir mafsall varmış gibi kabul edilerek sistem sekiz bilinmeyenli bir sistem olur ve yük artımına devam edilir.



**Şekil 3.6 :** İkinci plastik mafsall oluşuktan sonra sistemin serbestlikleri.

Yukarıdaki işlemler aynı şekilde tekrarlanır denklem (3.22)'de gösterildiği gibi 8x8'lik bir rijitlik matrisi elde edilmiştir ve yük 33225 N dan 33370 N a kadar arttırılır.

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 9.557 \times 10^7 & 4.778 \times 10^7 & 477862 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.778 \times 10^7 & 1.183 \times 10^8 & 477862 & 85050 & 1.134 \times 10^7 & 0 & -85050 & 0 \\ 477862 & 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 85050 & 0 & -425.25 & 0 \\ 0 & 1.134 \times 10^7 & 0 & 85050 & 1.183 \times 10^8 & 477862 & -85050 & 4.778 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -1.89 \times 10^6 & 0 & 477862 & 1.893 \times 10^6 & 0 & 477862 \\ 0 & -85050 & 0 & -425.25 & -85050 & 0 & 4.480 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.778 \times 10^7 & 477862 & 0 & 9.557 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

(2.56) denklemi kullanılarak sistemin artan yük altındaki deplasmanları bulunur.

$$\mathbf{K} \times \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3520000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33370 \\ 0 \\ 3520000 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

olur. Sistem deplasmanları bu denklem çözülerek;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ -0.044 \\ 11.97 \\ 0.0017 \\ -0.044 \\ 11.98 \\ -0.0017 \\ 0.0012 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

olarak bulunur (birimler rad. ve cm cinsindendir).

1 numaralı kolonun kesit tesirleri denklem (2.51)'de verilen bağıntı kullanılarak hesaplanırsa (birimler kN ve m cinsindendir);

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.20 \\ -16.68 \\ -7.43 \\ 14.85 \\ 16.68 \\ 7.43 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

olarak bulunmuştur.

2 numaralı kirişin kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -14.85 \\ -7.43 \\ -16.68 \\ -14.85 \\ 7.43 \\ 16.68 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

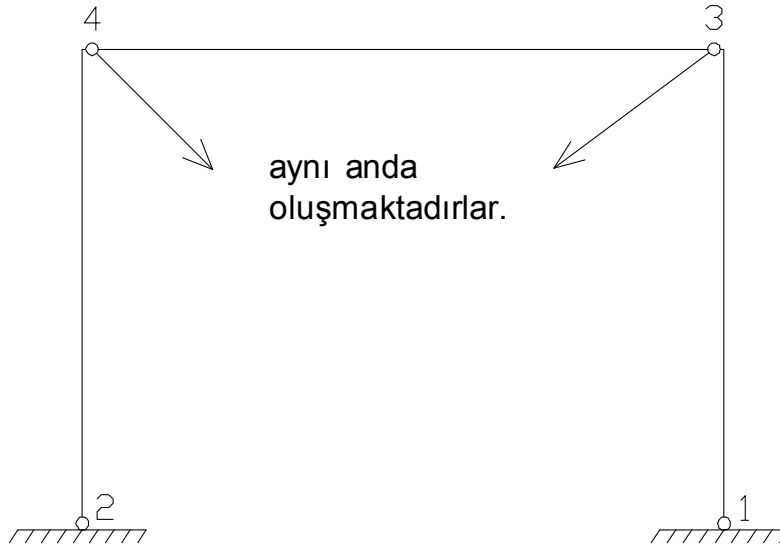
3 numaralı kolonun kesit tesirleri;

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 35.20 \\ -16.68 \\ 7.43 \\ 14.85 \\ 16.68 \\ -7.43 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

bunun sonucunda kirişte aynı anda  $A_2$  ve  $B_2$  noktalarında birer tane plastik mafsall oluştuğu görülür ve sistem labil hale gelir.

Sistemin limit yükü 33370 N' dur.

Plastik mafsallar oluşum sırasına göre aşağıdaki gibidir.



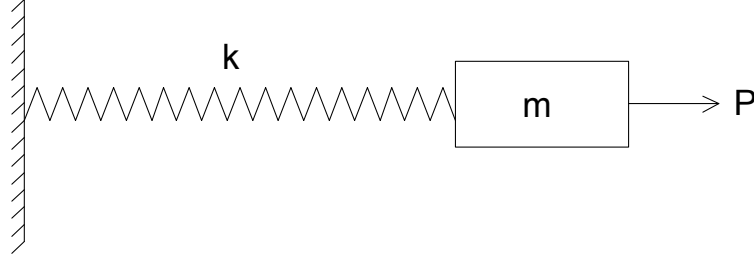
**Şekil 3.7 :** Sistemde yük artımıyla sırasıyla oluşan plastik mafsallar.

### 3.4 İdealize Edilmiş Sisteme Ait Yay Katsayılarının Bulunması

Plastik mafsall oluşumlarından sonra kat deplasmanları hesabı bir önceki anlatılan bölümde yapıldı. Bu bölümde idealize edilmiş sisteme ait yay katsayıları



bulunmuştur ve yükün şiddetine bağlı olarak yay katsayılarının değişimini belirleyen bir tablo yapılmıştır.



**Şekil 3.8 :** Tek serbestlik dereceli sistem.

Yay katsayıları hesaplanırken sistemde yatay yönde verilen kuvvetin o noktada oluşturduğu yatay deplasman göz önüne alınır ve her bir kuvvet artımı için ayrı ayrı hesaplanır.

Yay katsayıları;

$$k_1 = \frac{P_0}{\delta_0} = \frac{20000}{7,02717} = 2846,096 \text{ N/cm} \quad (3.28)$$

$$k_2 = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{33210}{11,6828} = 2842,640 \text{ N/cm} \quad (3.29)$$

$$k_3 = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{33225}{11,692} = 2841,687 \text{ N/cm} \quad (3.30)$$

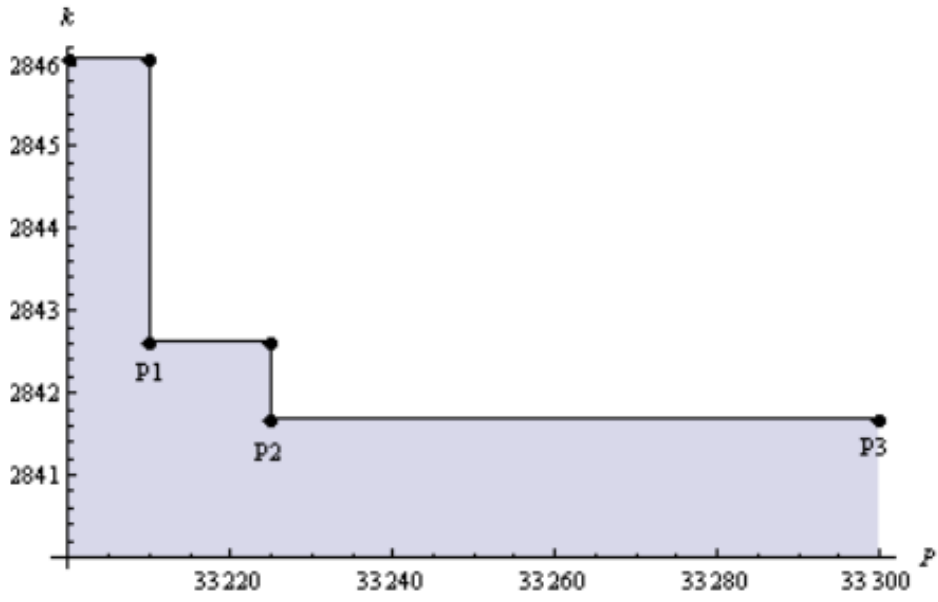
**Uyarı:** 33370 N'luk kuvvetin yay katsayısı hesaplanamaz çünkü bu kuvvet durumunda sistem labil hale gelir titreşim hesabında sistem labil olmadan önce yani bu kuvvete gelmeden önce maksimum bir kuvvet belirlenir  $P_{\max} = 33300 \text{ N}$  ve hesaplar bu kuvvete göre yapılır.

**Çizelge 3.2 :** Plastik mafsall oluşumundan sonra yay katsayıları.

| Oluşan plastik mafsallar | B2 Noktasına etkiyen yük (N) | Yatay deplasman $\delta_n$ (cm) | Yay katsayısı $k = F/x$ (N/cm) |
|--------------------------|------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 0                        | 20000                        | 7,02717                         | 2846,096                       |
| 1. plastik mafsall       | 33210                        | 11,6828                         | 2842,640                       |
| 2. plastik mafsall       | 33225                        | 11,692                          | 2841,687                       |

**Çizelge 3.3 :** Rijitlikler ve geçerli oldukları kuvvet aralıkları.

| Kuvvet aralığı | Rijitlik                     |
|----------------|------------------------------|
| $P_0-P_1$      | $k_1= 2846,096 \text{ N/cm}$ |
| $P_1-P_2$      | $k_2= 2842,640 \text{ N/cm}$ |
| $P_2-P_{\max}$ | $k_3= 2841,687 \text{ N/cm}$ |



**Şekil 3.9 :** Kuvvet-rijitlik grafiği.

#### **4. SİSTEMİN TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ**

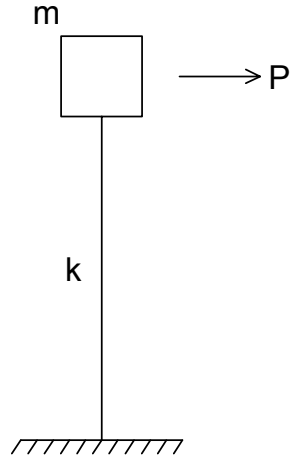
Yapılara gelen bütün yükler belirli bir zaman içinde etkir ve yapıda zamana bağlı yerdeğiştirmelere, şekil değiştirmelere ve gerilmelere neden olurlar. Bunlar arasındaki ilişkiyi yapının geometrisi, malzemenin davranışı, yapının kütlelerinin dağılımı gibi özellikler belirler (Yerlici ve Luş, 2007). Statik hesapta yapıdaki şekil değiştirmelerin zamana bağlı olmadığı kabul edilir ve sabit bir sonuç elde edilir. Dinamik hesapta ise, yapının her noktasına etkiyen ve her an değişebilen ivme tepki kuvvetleri de işin içine katıldığı için sonuçlar zamana bağlıdır.

Dinamik hesap, belirli modeller kullanılarak yapılır. Sonuçların ne derece doğru olduğu, kullanılan modellerin gerçeğe ne kadar yakın olduğuna bağlıdır. Sonucu belirleyen başlıca etkenler, kütlelerin yapı içindeki dağılımı, dış kuvvet ve yerdeğiştirmelerin özellikleri, elemanların şekil değiştirmeye karşı gösterdikleri direnç ve hareketi sönmölemeye çalışan, iç sürtünme ve çatlamalar gibi sönmö mekanizmalarıdır (Yerlici ve Luş, 2007).

##### **4.1 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler**

Bir sistemin hareket halinde bulunduğu konum, tek bir parametrenin verilmesi ile bilinebiliyorsa, bu tür sistemlere tek serbestlik dereceli (TSD) denir. Başka bir ifadeyle sistemi temsil eden model, cismin yalnızca bir doğrultuda ötelenmesine ya da bir eksenin çevresinde dönmesine sebep oluyorsa, bu modele TSD sistem denir (Yerlici ve Luş, 2007). Bir yapının dinamik dış etkiler altındaki davranışı, bu etkilerin büyüklük, şekil ve süreleri kadar, sistemin kütlesi, rijitliği ve sistemdeki enerji kaybına da bağlı olarak değişir.

Böylece bir sistemin dinamik davranışının belirlenebilmesi için sistemin hareket denkleminin yazılması gerekir. Hareket denklemi, sisteme etkiyen kuvvetlere, atalet kuvvetinin de eklenmesi ile kuvvet dengesi olarak görülür. Tek serbestlik dereceli sistemin dinamik davranışını belirlemek için tek denklem yeterlidir (Celep ve Kumbasar, 2001).



**Şekil 4.1 :** Tek serbestlik dereceli sistem.

#### 4.1.1 Hareket denklemi

Kütlenin, zaman içinde meydana gelen hareketini tanımlar. Bu denklemi oluşturmanın yolu, sisteme etki eden bütün kuvvet ve momentlerin, kütlede oluşturacak ivmeye etkisini doğrudan değerlendirmektir. Hareket yasasına göre kütleye etkiyen tüm kuvvetlerin toplamı, kütlenin ivmeyle çarpımına, momentleri toplamı da, kütlenin atalet momentinin dönme ivmesiyle çarpımına eşittir.

Tek serbestlik dereceli  $m$  kütleli bir sistemin genel hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (4.1)$$

Burada  $x$  kütlenin yatay hareket mesafesi,  $\dot{x}$  kütlenin yatay hızı,  $\ddot{x}$  kütlenin yatay ivmesi,  $m$  kütle,  $c$  sönüm ve  $k$  da kütlenin birim hareket etmesini sağlayan çubuk tarafından kütleye aktarılan kuvvettir.

Tek kütleli sistemin serbest ve sönümsüz titreşim yaptığı düşünüldüğünde bu denklem;

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Bu ikinci derece diferansiyel denklemin çözümü

$$x = De^{i\omega t} \quad (4.3)$$

kabul edilir ve hareket denkleminde yerine konulursa

$$Dm(i)^2 \omega^2 e^{i\omega t} = -kDe^{i\omega t} \quad (4.4)$$

$$-m\omega^2 + k = 0 \quad (4.5)$$

bulunur.

Buradan

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (4.6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.7)$$

bulunur ve  $\omega$ 'ın bu değeri sistemin doğal frekansı olarak adlandırılır.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.8)$$

T değerine sistemin doğal titreşim periyodu denir.

Model oluşturulduktan sonra dinamik çözüm için hareket denkleminin yazılması ve modelin davranışının belirlenmesi gerekir. Serbest Titreşim ve Zorlanmış Titreşim taşıyıcı sistemin önemli olan iki dinamik davranışdır. Bunlardan birincisi öngörülen başlangıç koşullarının etkisiyle meydana gelir, ikincisi ise sisteme etkiyen dış yüklerden veya mesnet hareketlerinden ortaya çıkar. Bu tezde zorlanmış sistemin titreşimi incelenecektir.

## 4.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerde Zorlanmış Titreşimler

Dinamik dış etkilerin bir yapıda neden olduğu yer değiştirmelerin büyüklüğü zaman içindeki değişimi, etkinin genliği ve zaman içindeki durumuna bağlıdır. Buradaki dış etki dinamik kuvvetlerdir (Yerlici ve Luş, 2007).

### 4.2.1 Harmonik kuvvet altında titreşim

Dış kuvvetin zaman içindeki değişiminin sinüs ya da kosinüs fonksiyonlarıyla tanımlanabilmesi haline denir. Harmonik bir kuvvet, en genel haliyle,

$$P(t) = P\cos(\Omega t - \phi) = P\cos\left(\frac{2\pi}{T_F}t - \phi\right) \quad (4.9)$$

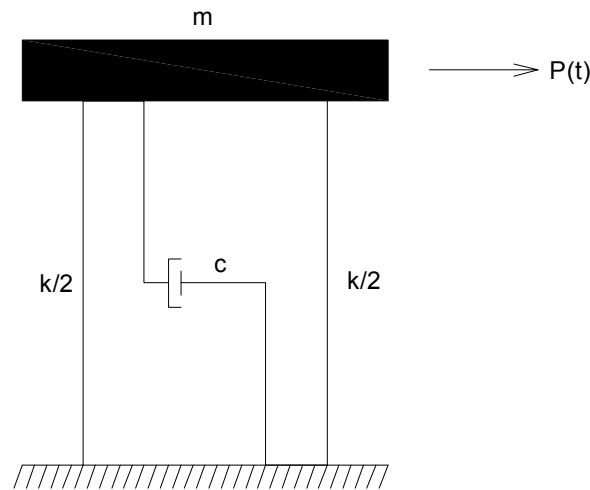
şeklinde ifade edilir. Burada  $\Omega$ , kuvvetin frekansını,  $T_F = 2\pi/\Omega$ , periyodunu,  $\phi$  ise faz açısını gösterir. Faz açısı sistemde oluşacak tepkilerin büyüklüğünü etkilemediğinden, harmonik kuvvetler çoğu kez,

$$P(t) = P \cos(\Omega t) \quad \text{veya} \quad P(t) = P \sin(\Omega t) \quad (4.10)$$

biçiminde ele alınır. Harmonik yüklerin sisteme etkileri çok büyük olduğu için göreceli olarak sistemin kendi titreşimleri ihmal edilir ve yalnızca zorlanmış titreşimler incelenir. Daha hassas bir çözüm için ise her ikisi ele alınabilir.

#### 4.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sönümlü Titreşimi

Şekil 4.2'deki gibi bir sistem söz konusu ise, burada  $c$  katsayısı sönüm olmak üzere, sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır.



**Şekil 4.2 :** Tek serbestlik dereceli sönümlü sistem.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (4.11)$$

$$P(t) = P \sin(\Omega t) \quad (4.12)$$

Hareket denklemi sadeleştirilirse

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_{\max}}{m} \sin \Omega t \quad (4.13)$$

halini alır. Denklemin çözümü özel ve homojen çözümlerin toplamıdır.

$$x = x_h + x_p \quad (4.14)$$

Homojen çözüm denklemin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek yapılır ve bu homojen çözüm serbest titreşimi karakterize eder. Özel çözüm yapılırken ya direk integral yoluyla çözüme gidilir ya da denklemin bilinmeyen katsayıları ile aynı değişkenlere ait katsayıların karşılaştırılması kuralı ile bulunur (Leylek, 2005).

Homojen kısmın çözümü için;

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.15)$$

denklemini yazılır ve

$$x_h = e^{\alpha t} \quad (4.16)$$

$$\frac{c}{2m} = \xi\omega \quad (4.17)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (4.18)$$

çözümüne gidilirse

$$\alpha^2 + \xi\omega\alpha + \omega^2 = 0 \quad (4.19)$$

yazılır ve  $\alpha$  çözülürse

$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega \mp \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} \quad (4.20)$$

bulunur. Buradan çözüme gidilirse üç ayrı durum ile karşılaşılır.

- $\xi > 1$  ise kuvvetli sönüm durumu
- $\xi = 1$  ise kritik sönüm durumu
- $\xi < 1$  ise zayıf sönüm durumu

#### 4.3.1 Kuvvetli sönüm durumu

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \quad (4.21)$$

olacaktır ve  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  negatif reel sayılar olur. Bu durumda homojen denklemin çözümü

$$x_h = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} \quad (4.22)$$

olur.

Kuvvetli sönümün özel çözümü için (4.22) çözümü dikkate alınır.

Wronskian matrisi oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

olur.

$$WU' = P(t) \quad (4.24)$$

çözümü yapılırsa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P(t) \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

yazılır. Çözülürse;

$$U_1' = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} P(t) e^{-\alpha_1 t} ; \quad U_2' = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} P(t) e^{-\alpha_2 t} \quad (4.26)$$

$$U_1 = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t P(t) e^{-\alpha_1 t} dt ; \quad U_2 = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t P(t) e^{-\alpha_2 t} dt \quad (4.27)$$

bulunur. Bu durumda (4.13) denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{\alpha_1 t} U_1 + e^{\alpha_2 t} U_2 \quad (4.28)$$

genel çözüm de

$$x = e^{\alpha_1 t} (U_1 + C_1) + e^{\alpha_2 t} (U_2 + C_2) \quad (4.29)$$

#### 4.3.2 Kritik sönüm durumu

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \quad (4.30)$$

ve

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{c}{2m} \quad (4.31)$$

olur. Bu durumda homojen denklemin çözümü

$$x_h = e^{\alpha_1 t} (c_1 + c_2 t) \quad (4.32)$$

olacaktır.



Kiritik sönümün özel çözümü için (4.32) çözümü dikkate alınır ve Wronskian matrisi oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$WU' = P(t) \quad (4.34)$$

çözümü yapılırsa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P(t) \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

yazılır. Çözülürse

$$U_1' = -P(t)te^{-\alpha t} \quad ; \quad U_2' = P(t)e^{-\alpha t} \quad (4.36)$$

$$U_1 = -\int_0^t P(t)te^{-\alpha t}dt \quad ; \quad U_2 = \int_0^t P(t)e^{-\alpha t}dt \quad (4.37)$$

olur. Bu durumda (4.13) denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{\alpha t}(U_1 + tU_2) \quad (4.38)$$

genel çözümü de

$$x = e^{\alpha t}((U_1 + C_1) + t(U_2 + C_2)) \quad (4.39)$$

### 4.3.3 Zayıf sönüm durumu

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \quad (4.40)$$

ve

$$\alpha_{1,2} = \omega(-\xi \mp i\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (4.41)$$

yazılabilir. Kökler sanaldır ve homojen denklemin çözümü

$$a = -\xi\omega \quad b = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.42)$$

olmak üzere

$$x_h = c_1 e^{at} \sin bt + c_2 e^{at} \cos bt \quad (4.43)$$

olacaktır.

Zayıf sönümün özel çözümü için (4.43) çözümü dikkate alınır ve Wronskian matrisi oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{-at} \sin bt & e^{-at} \cos bt \\ be^{-at} \cos bt - ae^{-at} \sin bt & -ae^{-at} \cos bt - be^{-at} \sin bt \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

olur. Burada

$$WU' = P(t) \quad (4.45)$$

çözümü yapılırsa

$$U_1' = \frac{1}{b} P(t) e^{at} \cos bt \quad ; \quad U_2' = -\frac{1}{b} P(t) e^{at} \sin bt \quad (4.46)$$

$$U_1 = \frac{1}{b} \int_0^t P(t) e^{at} \cos bt \, dt \quad ; \quad U_2 = -\frac{1}{b} \int_0^t P(t) e^{at} \sin bt \, dt \quad (4.47)$$

olur. Bu durumda (4.13) denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{-at} U_1 \sin bt + e^{-at} U_2 \cos bt \quad (4.48)$$

olacaktır. Genel çözümü;

$$x = e^{-at} ((U_1 + C_1) \sin bt + (U_2 + C_2) \cos bt) \quad (4.49)$$

olur.

**Uyarı:** Özel çözümü bulmak için ikinci bir yol aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{m} \quad (4.50)$$

P(t) yerine yazılır.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_{\max}}{m} \sin \Omega t \quad (4.51)$$

$$x_p = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t \quad (4.52)$$

$$\dot{x}_p = A_1 \Omega \cos \Omega t - A_2 \Omega \sin \Omega t \quad (4.53)$$

$$\ddot{x}_p = -A_1 \Omega^2 \sin \Omega t - A_2 \Omega^2 \cos \Omega t \quad (4.54)$$

denklem (4.52), (4.53) ve (4.54) denklem (4.51) de yerine yazılarak

$$-A_1\Omega^2 - 2\xi\omega A_2\Omega + \omega^2 A_1 = \frac{P_{\max}}{m} \quad (4.55)$$

$$-A_2\Omega^2 - 2\xi\omega A_1\Omega + \omega^2 A_2 = 0 \quad (4.56)$$

$A_1$  ve  $A_2$  (4.55) ve (4.56) denklemleri kullanılarak bulunur.

Genel denklem;

$$x = c_1 e^{at} \sin bt + c_2 e^{at} \cos bt + A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t \quad (4.57)$$

yazılır.

#### 4.4 Sistemin Deplasman Zaman Bağıntısı

Sistemde artan ve azalan yükler olmak üzere iki durum için deplasman zaman bağıntısı bulunacaktır.

##### 4.4.1 Artan yükler altında deplasman zaman bağıntısı

Bu tez çalışmasında anlatılan sönüm durumlarından zayıf sönüm durumu ele alınacaktır.

Üçüncü bölümde anlatılan plastik mafsalların oluşmasına neden olan kuvvetlerin hangi zaman aralıklarında etkili oldukları hesap edilir. Burada sistemi labil eden kuvvete ulaşmadan önce tepe noktasında sistemin taşıyacağı maksimum bir kuvvet belirlenir.

**Çizelge 4.1 : Kuvvet – rijitlik çizelgesi.**

|            | Yük Değeri | Rijitlik                      |
|------------|------------|-------------------------------|
| $P_1$      | 33210 N    | $k_1 = 2846,096 \text{ N/cm}$ |
| $P_2$      | 33225 N    | $k_2 = 2842,640 \text{ N/cm}$ |
| $P_{\max}$ | 33300 N    | $k_3 = 2841,687 \text{ N/cm}$ |

Kuvvetin frekansı hesaplanırsa;

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_F} \quad (4.58)$$

Kuvvetin periyodu bu problem için  $T_F = 0,4 \text{ sn}$  seçilmiştir.

$$\Omega = 15,708 \text{ rad/sn} \quad (4.59)$$

bulunmuştur.

Sistemin kütlesi;

$$G = \text{çelik özgül ağırlığı} \times \text{kirişin hacmi} \quad (4.60)$$

$$G = 7850 \times (0,06) \times (0,06) \times 4 = 113,04 \text{ kg} = 1130,4 \text{ N} \quad (4.61)$$

Yer çekimi ivmesi  $g=9,81 \text{ m/s}^2$

$$G = mg \quad (4.62)$$

$$m = 115,23 \text{ N.s}^2/\text{m} \quad (4.63)$$

hesaplanır.

$$P = P_{\max} \sin \Omega t \quad (4.64)$$

formülünden her aralık için t zamanları hesaplanır.

$$P_1 = P_{\max} \sin \Omega t_1 \quad (4.65)$$

$$t_1 = 0,095 \text{ sn} \quad (4.66)$$

bulunur.

$$P_2 = P_{\max} \sin \Omega t_2 \quad (4.67)$$

verilenler denklem (4.67)'de yerine yazılarak;

$$t_2 = 0,096 \text{ sn} \quad (4.68)$$

bulunur.

$$P_3 = P_{\max} \sin \Omega t_3 \quad (4.69)$$

veriler denklem (4.69)'da yerine yazılır;

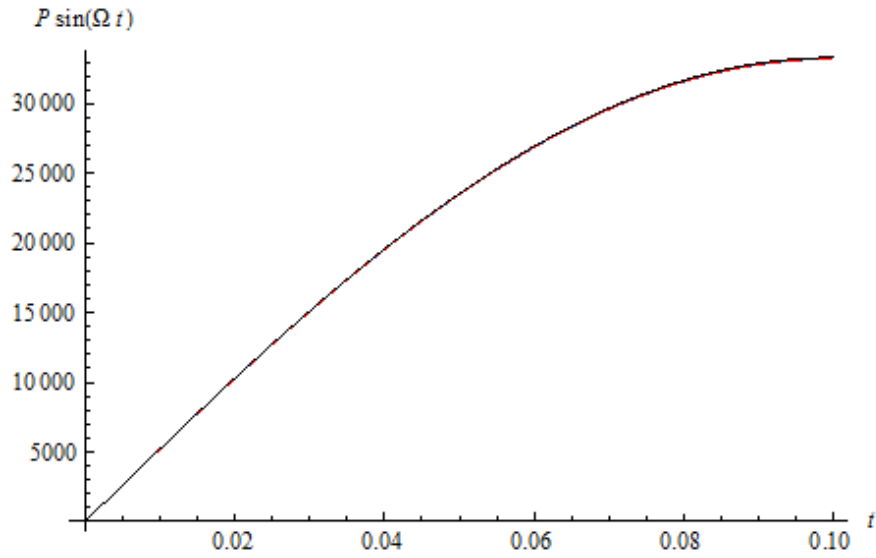
$$t_3 = 0,1 \text{ sn} \quad (4.70)$$

hesaplanır.

Her bir kuvvetin hangi zamanlarda uygulandığı bulunduğundan sonra **Çizelge 4.2**'de görüldüğü gibi sistemin artan yükler altında uygulanma zamanları gösterilmiştir buna bağlı olarak kuvvet-zaman grafiği **Şekil 4.3**'teki gibi elde edilmiştir. Daha sonra Bu artan yükler altında sistemin zamanla rijitliğindeki değişimini gösteren **Çizelge 4.3** elde edilmiş olup bu çizelgeye bağlı olarak rijitlik-zaman grafiği **Şekil 4.4**'teki gibi çizilmiştir.

**Çizelge 4.2** : Sistemin artan yükler altında uygulanış zamanları.

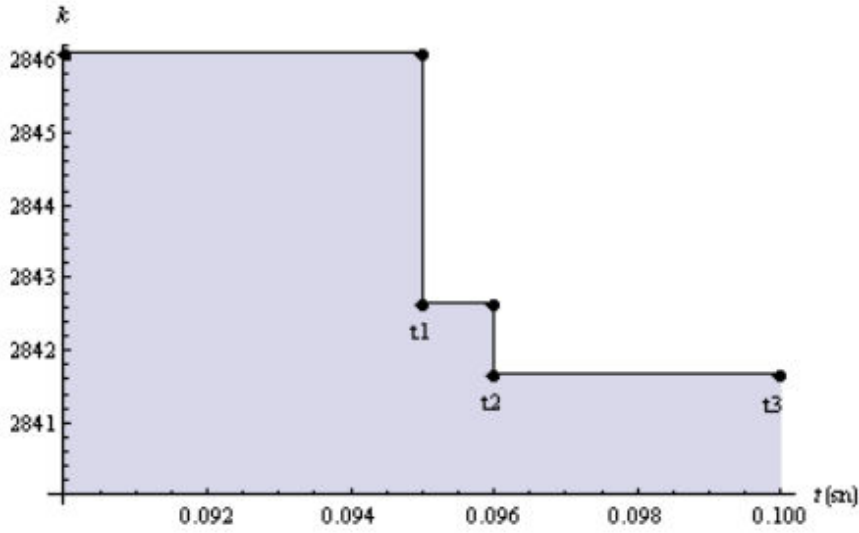
|       | Yük Değeri | Zaman    |
|-------|------------|----------|
| $P_1$ | 33210 N    | 0,095 sn |
| $P_2$ | 33225 N    | 0,096 sn |
| $P_3$ | 33300 N    | 0,1 sn   |



**Şekil 4.3** : Artan yükler altında kuvvet – zaman grafiği.

**Çizelge 4.3** : Rijitlikler ve geçerli oldukları zaman aralıkları.

| Zaman aralığı | Rijitlik             |
|---------------|----------------------|
| $t_0-t_1$     | $k_1= 2846,096$ N/cm |
| $t_1-t_2$     | $k_2= 2842,640$ N/cm |
| $t_2-t_3$     | $k_3= 2841,687$ N/cm |



**Şekil 4.4 :** Rijitlik değişimi zaman grafiği.

Sistemin her bir aralık için doğal titreşim frekansları denklem (4.18)'den hesaplanır.

$$\frac{k_1}{m} = \omega_1^2 \rightarrow \omega_1 = 49,698 \text{ rad/sn} \quad (4.71)$$

$$\frac{k_2}{m} = \omega_2^2 \rightarrow \omega_2 = 49,668 \text{ rad/sn} \quad (4.72)$$

$$\frac{k_3}{m} = \omega_3^2 \rightarrow \omega_3 = 49,659 \text{ rad/sn} \quad (4.73)$$

olarak bulunur.

Başlangıçta sistemin sönümü  $\xi_1 = 0,02$  seçildi ve buradan, denklem (4.17)'den sönüm katsayısı hesaplanır.

$$\frac{c}{m} = 2\xi_1\omega_1 \rightarrow c = 229,068 \text{ N.s/m} \quad (4.74)$$

bulunur.

Buradan her aralık için yani  $\xi_2$  ve  $\xi_3$  hesaplanır.

$$\frac{c}{m} = 2\xi_2\omega_2 \rightarrow \xi_2 = 0,0200121 \quad (4.75)$$

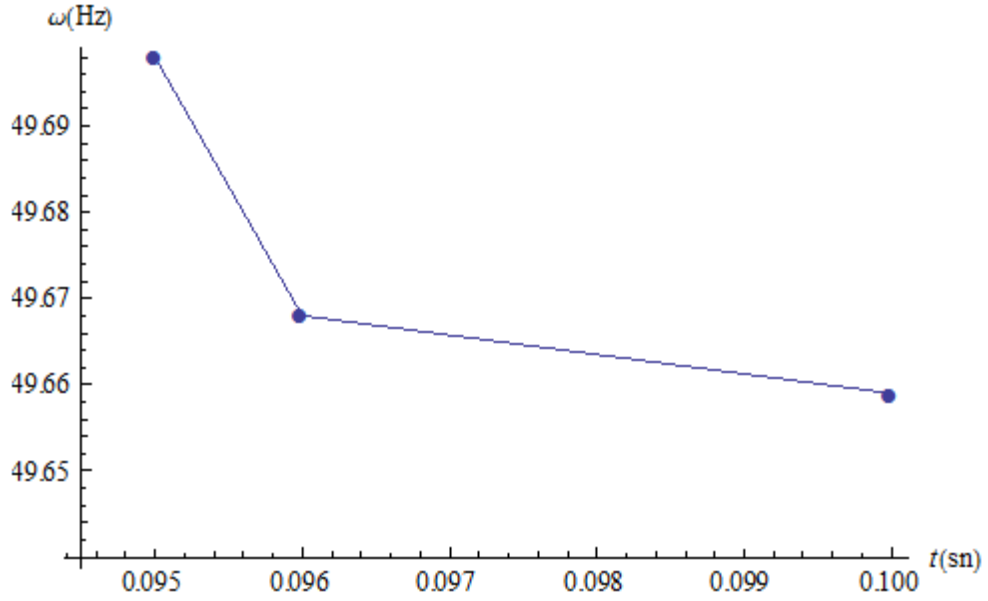
hesaplanır.

$$\frac{c}{m} = 2\xi_3\omega_3 \rightarrow \xi_3 = 0,0200157 \quad (4.76)$$

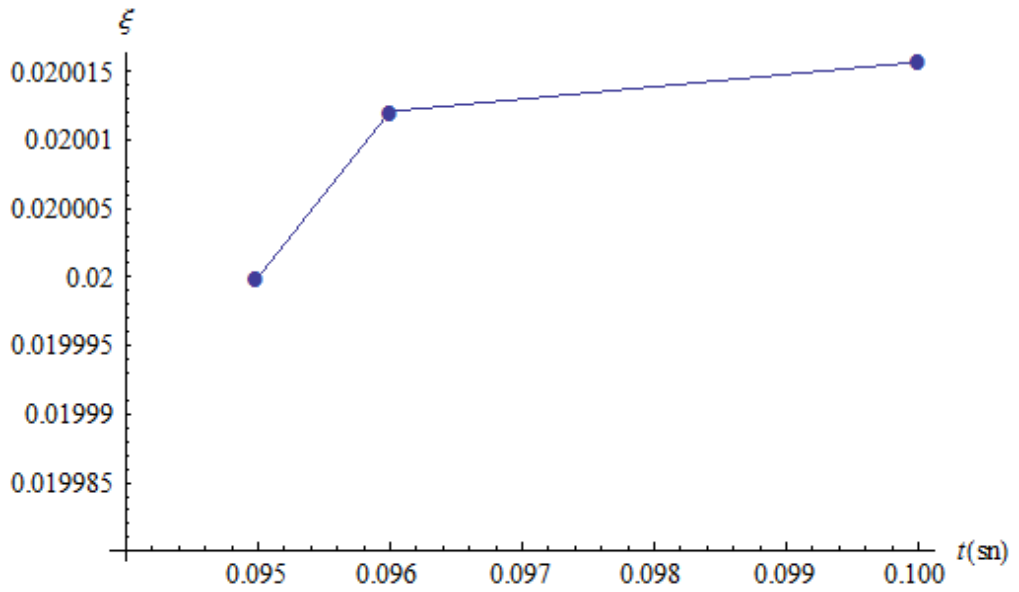
olarak bulunur.

**Çizelge 4.4 :** Doğal titreşim frekansı ve sönümün zamana göre değişimi.

| Zaman (sn) | Doğal Titreşim Frekansı ( $\omega$ ) (rad/sn) | Sönüm ( $\xi$ ) |
|------------|-----------------------------------------------|-----------------|
| 0,095      | 49,698                                        | 0,02            |
| 0,096      | 49,668                                        | 0,0200121       |
| 0,1        | 49,659                                        | 0,0200157       |

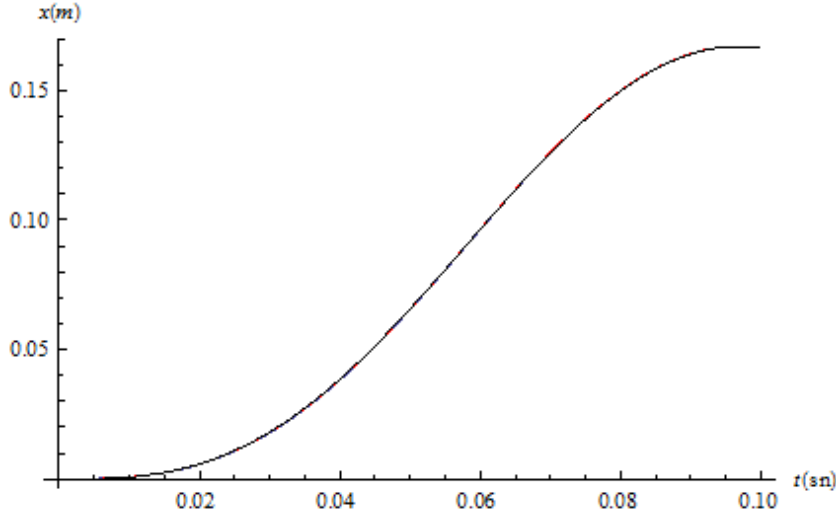


**Şekil 4.5 :**  $\omega$  doğal titreşim frekanslarının zamana göre değişimi.



**Şekil 4.6 :**  $\xi$  sönüm oranlarının zamana göre değişimi.

Başlangıçta  $t = 0$  iken başlangıç deplasmanı  $x = 0$  ve başlangıç hızı  $\dot{x} = 0$  olduğu kabul edilir. Bu koşullar altında denklem (4.49) veya (4.57)'den her bir aralık için deplasmanları hesaplanıp deplasman zaman eğrisi çizilir.



**Şekil 4.7 :** Sistemin artan yükler altında deplasman zaman grafiği.

#### 4.4.2 Azalan yükler altında deplasman zaman bağıntısı

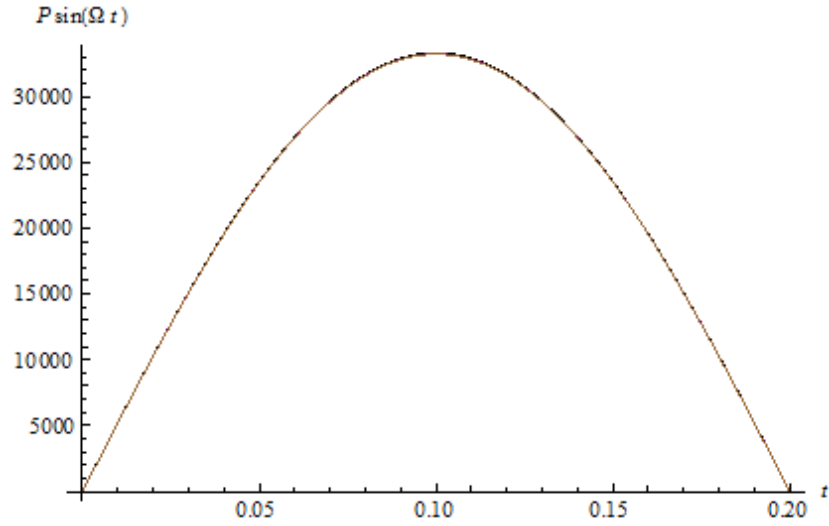
Sistemin artan yükler altında deplasman zaman bağıntısı **Şekil 4.7**'de elde edilmiştir. Şimdi de geriye dönüşte yani azalan yükler altında davranışı incelenecek olursa;

**Çizelge 4.5 :** Sistemin azalan yükler altında uygulanış zamanları.

| Yük   | Zaman    |
|-------|----------|
| $P_4$ | 0,104 sn |
| $P_5$ | 0,105 sn |
| $P_6$ | 0,2 sn   |

**Çizelge 4.5**'de görüldüğü gibi artan yük değerleri azalan yüklerde de aynı değerler alınarak hesap yapıldı ve yüklerin uygulanış zamanları artan yüklerde hesaplanan zaman değerlerine göre,  $P_3$  ve  $P_2$  arasındaki zaman farkı ile  $P_3$  ve  $P_4$  arasındaki zaman farkı,  $P_2$  ve  $P_1$  arasındaki zaman farkı ile  $P_4$  ve  $P_5$  arasındaki zaman farkı,  $P_1$  ve  $P_0$  arasındaki zaman farkı ile  $P_5$  ve  $P_6$  arasındaki zaman farkı aynı kabul edilerek azalan yükler altında zaman değerleri hesaplanmıştır ve artan yükler altındaki kuvvet zaman grafiği ile azalan yükler altındaki kuvvet zaman grafiği **Şekil 4.8**'de tek bir egride gösterilmiştir.



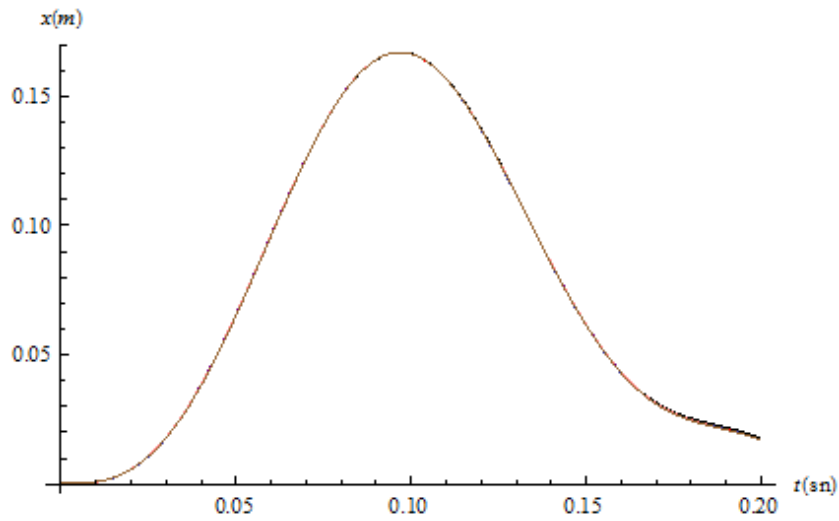


**Şekil 4.8 :** Kuvvet-zaman grafiği.

**Çizelge 4.6 :** Azalan yükler altında rijitlikler ve geçerli oldukları zaman aralıkları.

| Zaman aralığı | Rijitlik                     |
|---------------|------------------------------|
| $t_3-t_4$     | $k_4= 2841,687 \text{ N/cm}$ |
| $t_4-t_5$     | $k_5= 2842,640 \text{ N/cm}$ |
| $t_5-t_6$     | $k_6= 2846,096 \text{ N/cm}$ |

**Çizelge 4.6'**de görüldüğü gibi  $t_3$  ve  $t_2$  arasındaki rijitlik ile  $t_3$  ve  $t_4$  arasındaki rijitlik,  $t_2$  ve  $t_1$  arasındaki rijitlik ile  $t_4$  ve  $t_5$  arasındaki rijitlik,  $t_1$  ve  $t_0$  arasındaki rijitlik ile  $t_5$  ve  $t_6$  arasındaki rijitlik aynı kabul edilmiş olup azalan yükler altında deplasman zaman eğrisi elde edilmiş ve artan yükler altındaki deplasman zaman eğrisi ile **Şekil 4.9'**da görüldüğü gibi tek bir egride gösterilmiştir.



**Şekil 4.9 :** Deplasman-zaman grafiği.



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yapı sistemlerinin artan ve azalan yükler altında zorlanmış sönümlü titreşimi incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle sistemin rijitlik matrisi hesaplanmış olup daha sonra verilen yatay yük altında sistem deplasmanları, çubuk deplasmanları ve çubuk kesit tesirleri hesaplanmıştır. Bu işlem yapıldıktan sonra artan yükler altında rijitlik matrisinin sabit kalmayacağı ve plastik mafsallar oluşacağı düşünülerek bu durumun kontrolü yapılmıştır.

Bir plastik mafsal oluştuktan sonra sistemin rijitlik matrisi değişmekte ve sistemde ilave bir serbestlik meydana gelmektedir. Ayrıca bu mafsalin olduğu kesit, o kesitin taşıyabileceği maksimum moment değerini geçmemektedir. Yükler artmaya devam ettiği sürece diğer kesitlerde de plastik mafsallar ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla yükler altında rijitlik matrisinin değişimi bilinmeyen bir nonlinear fonksiyondur. Bu durumda hesap için şu yol izlenmiştir. İki plastik mafsalin oluşmasına neden olan yük değerleri arasında sistemin rijitliği birinci mafsalin olduğu andaki rijitlik olarak alınmıştır rijitliğin bu şekilde alınması aslında doğru değildir. Bu sistemi gerçekte olduğu durumdan güçlü kabul etmektir. Plastik mafsal oluşumu statik yükler etkisi altında gerçek sistem üzerinden hesap yapılarak incelenmiş ve SAP2000 programıyla kontrol edilmiştir. Sistemin bir plastik mafsal oluştuktan sonra hesaplanan deplasman değerleri kullanılarak idealleştirilmiş sistemdeki yay katsayıları bulunmuştur. Bundan dolayı belli yük aralıkları için idealleştirilmiş sistemin rijitliği elde edilmiştir. Bunun sonucunda dinamik yükler altında idealleştirilmiş sistemin titreşimleri belirli bir yük aralığında çözülebilir. Her yük aralığında sistemin deplasmanlarının ve hızlarının bulunması için bir yük aralığının sonundaki değerlerin bir sonraki yük aralığının başlangıcındaki değerlere eşit olduğu yazılarak bu son aralıktaki integral sabitleri bulunur. Bu işlemler Mathematica programı ile yapılmıştır. Sistem artan yükler altında çözülmüş olup deplasman-zaman eğrisi çizilmiştir. Daha sonra aynı işlemler azalan yükler için yapılmıştır. Burada hesap yapılırken artan yükler için hesaplanan her bir aralıktaki rijitlik değerleri ile azalan yükler için hesaplanan her bir aralık için rijitlik değerleri aynı alınarak hesap

yapılmıştır aslında azalan yükler için yapılan bu işlem doğru değildir ancak literatürde de azalan yükler altında rijitliğin eski rijitliğin belli bir yüzdesine gerilediği kabul edilerek hesap yapılır ve bu yüzde keyfi seçilir. Son olarak azalan yükler için deplasman zaman eğrisi çizilmiş olup artan yükler altındaki deplasman zaman eğrisi ile azalan yükler altındaki deplasman zaman eğrisi birleştirilerek tek bir egride gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Caughey, T. K.**, (1960). Classical normal modes in damped linear systems, *J. Appl. Mech.*, (27, 269-271).
- Celep, Z. ve Kumbasar, N.**, (2001). *Yapı Dinamiği* (3. baskı), Beta Dağıtım, İstanbul.
- Celep, Z. ve Kumbasar, N.**, (2004). *Deprem Mühendisliğine Giriş* (3. baskı), Beta Dağıtım, İstanbul.
- Celep, Z.**, (2008). *Betonarme Taşıyıcı Sistemlerde Doğrusal Olmayan Davranış ve Çözümleme* (2. baskı), Beta Dağıtım, İstanbul.
- Chopra, A. K.**, (2007). *Dynamics of Structures* (3th edition), Prentice Hall, N.J.
- Clough, R. W. ve Penzien, J.**, (1975). *Dynamics of Structures*, Mcgraw-Hill College.
- Cullen, C. G.**, (1979). *Linear Algebra and Differential Equations: An Integrated Approach*, Prindle Weber Schmit, Boston.
- Çağdaş, S.**, (2006). *Yapı Mekaniği'nde Nümerik Metodlar ve Matris-Deplasman Yöntemi*, Türkmen Kitabevi, İstanbul.
- Çakıroğlu, A., Özden E. ve Özmen, G.**, (1970). *Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları*, Dizerkonca Matbaası, İstanbul.
- Deren, H., Uzgider, E., Piroğlu, F. ve Çağlayan, Ö.**, (2008). *Çelik Yapılar*, Çağlayan Kitabevi, İstanbul.
- Gümüş, H.**, (2008). Bir Yapının Titreşimlerinin Kontrolü için Geri Beslemeli Bir Kapalı Çevrim, *Yüksek Lisans Tezi*, Yapı Mühendisliği, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Hatipoğlu, R.**, (2011). *Yapıların Dinamik Davranışının Kontrolü*, (doktora tezi), Yapı Mühendisliği, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Leylek, İ. E.**, (2005). *Yapı Dinamiği*, Çağlayan Kitabevi, İstanbul.
- Omurtag, M. H.**, (2010). *Çubuk Sonlu Elemanlar*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Özer, E. ve Orakdöğen, E.**, (2008). *İleri Yapı Statiğ Ders Notları*, İnşaat Mühendisliği, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Öztorun, N. K.**, (2000). *Matris Deplasman Yöntemi Ders Notu*, İnşaat Mühendisliği, İstanbul Üniversitesi.
- Sağlam, M. R.**, (2001). *Yapı Sistemlerinde Matris Metotları* (1. baskı), Çağlayan Kitabevi, İstanbul.
- Sneddon, I. H.**, (1972). *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, St Louis, Sanfransisco.

- Thomas, G. B., Korkmaz, R.,** (2010). *Calculus* (Cilt 1 çeviri), Beta Yayın Dağıtım, İstanbul.
- Tezcan, S.,** (1970). *Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü*, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul.
- Uzsoy, Ş. Z.,** (2006). *Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliği* (2. baskı), Birsan Yayınevi, İstanbul.
- Wilson, E. L.,** (1995). *Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computers and Structures, Inc.
- Yerlici, V. ve Luş, H.,** (2007). *Yapı Dinamiğine Giriş*, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul.
- Zareian, F. ve Medina, R. A.,** (2010). *A practical method for proper modeling of structural damping in elastic plane structural systems*, Computers and Structures, (88, Sf. 45-53).

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Erol DEMİRKAN

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Rize - 1986

**Adres:** İstanbul

**E-Posta:** setoz53@hotmail.com

**Lisans:** Balıkesir Üniversitesi (2005-2006)

İstanbul Üniversitesi (2006-2009)

**Yüksek Lisans:** İstanbul Teknik Üniversitesi (2009- ---)

**Mesleki Deneyim ve Ödüller:** 2005 yılında Balıkesir Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazanan Erol DEMİRKAN buradaki eğitiminin ilk yılını başarı ile tamamladı. 2006-2007 Öğretim yılında İstanbul Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümüne yatay geçiş yaparak 2009 yılı Haziran ayında bölümünü ikincilikle bitirdi.

İnşaat Mühendisliğine ait kurum stajlarını 2007 yaz döneminde şantiye stajını Elite Life Ümraniye konutlarında 2008 yaz döneminde Büro stajını Kadıköy Arzık Mühendislik'te tamamladı.