

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DİKDÖRTGEN PLAKLARIN  
DİNAMİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Nihan SATIR**

**Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği**

**Programı : Yapı Mühendisliği Programı**

**HAZİRAN 2011**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DİKDÖRTGEN PLAKLARIN  
DİNAMİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Nihan SATIR  
(501081054)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Mayıs 2011**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2011**

**Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr.Fethi KADIOĞLU (İTÜ)  
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr.Nihal ERATLI (İTÜ)  
Doç.Dr.Zafer KÜTÜĞ (YTÜ)**

**HAZİRAN 2011**



*Değerli Aileme,*



## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli zamanını ve bilgisini hiç bir zaman esirgemeyen, çalışmanın her aşamasında yardımcı olan Danışman Hocam Sn.Yrd.Doç.Dr. Fethi KADIOĞLU'na, verdiği destekten dolayı Doç.Dr.Nihal Eratlı'ya, çok sevdiğim arkadaşım ve meslektaşım Nurten ATEŞ'e ve her zaman yanımda olan desteğini ve emeğini benden hiç bir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Haziran 2011

Nihan SATIR  
(İnşaat Mühendisi)



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖNSÖZ.....                                                                | v    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                         | vii  |
| KISALTMALAR .....                                                         | ix   |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                      | xi   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                        | xiii |
| ÖZET.....                                                                 | xv   |
| SUMMARY .....                                                             | xvii |
| 1. GİRİŞ .....                                                            | 1    |
| 1.1 Tezin Amacı .....                                                     | 3    |
| 1.2 Literatür Özeti .....                                                 | 3    |
| 2. ORTOTROP MALZEME ÖZELLİKLERİ .....                                     | 7    |
| 3. KOMPOZİT MALZEMELER.....                                               | 11   |
| 3.1 Kompozit Malzemelerin Davranışı .....                                 | 11   |
| 3.2 Ortotropik Tabakalarda Gerilme Durumu.....                            | 11   |
| 3.2.1 Mekanik Davranışın Çapraz Tabakalanmaya Bağlı Olarak Değişimi ..... | 12   |
| 3.2.2 Tek Tabakalı Plaklarda Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntısı.....      | 15   |
| 3.2.3 Tabakalı Plaklarda Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı.....          | 15   |
| 3.2.4 Simetrik Tabakalanma .....                                          | 21   |
| 4. PLAK DENKLEMLERİNİN VE FONKSİYONELİN ELDE EDİLİŞİ .....                | 23   |
| 4.1 Kalın Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi .....                         | 23   |
| 4.2 Plak Denge Denklemleri .....                                          | 25   |
| 4.2.1 Gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları .....                       | 26   |
| 5. ELEMAN MATRİSİNİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU İLE OLUŞTURULMASI .....    | 33   |
| 5.1 Kalın Plaklar İçin Eleman Matrisinin Elde Edilişi .....               | 36   |
| 6. DİNAMİK ANALİZ .....                                                   | 39   |
| 7. SAYISAL ÖRNEKLER .....                                                 | 41   |
| 7.1 Basit Mesnetli İzotrop Tek Tabakalı Örnekler.....                     | 42   |
| 7.2 Basit Mesnetli Ortotrop Tek Tabakalı Örnekler.....                    | 42   |
| 7.3 Basit Mesnetli Ortotrop Tabakalı Örnekler.....                        | 43   |
| 8. SONUÇLAR .....                                                         | 47   |
| KAYNAKLAR .....                                                           | 49   |



## KISALTMALAR

|                 |                                                     |
|-----------------|-----------------------------------------------------|
| $\epsilon_i$    | : Şekil değiştirme bileşeni                         |
| $\sigma_i$      | : Gerilme bileşeni                                  |
| $E_i$           | : Elastisite Modülü                                 |
| $\mu_{ij}$      | : Poisson Oranı                                     |
| $\gamma_{ij}$   | : Kayma Şekil Değiştirmesi                          |
| $M_{ij}$        | : Eğilme Momenti                                    |
| $h$             | : Plak Kalınlığı                                    |
| $Q_i$           | : Kesme Kuvveti                                     |
| $w$             | : Düşey yer değiştirme                              |
| $q$             | : Düşey yayılı yük                                  |
| $\Omega_i$      | : Şekil değiştirme büyüklükleri                     |
| $G_{ij}$        | : Kayma Modülü                                      |
| $D_i$           | : Eğilme Rijitliği                                  |
| $Q$             | : Operatör                                          |
| $[\cdot]$       | : İç çarpım                                         |
| $\Psi_i$        | : Şekil Fonksiyonları                               |
| $\xi, \eta$     | : Doğal Koordinat Takımı                            |
| $\xi_i, \eta_i$ | : $i$ düğüm noktası doğal koordinatları             |
| $a, b$          | : Dikdörtgen sonlu eleman boyutları                 |
| $X_G, Y_G$      | : Dikdörtgen elemanın ağırlık merkezi koordinatları |
| $[K]$           | : Dikdörtgen eleman rijitlik matrisi                |
| $\bar{\omega}$  | : Frekans                                           |
| $[M_e]$         | : Kütle Matrisi                                     |
| $\rho$          | : Yoğunluk                                          |
| $[C]$           | : Elastik Sabitler Matrisi                          |
| $[S]$           | : Esneklik Matrisi                                  |
| $[T]$           | : Transformasyon(dönüşüm) Matrisi                   |
| $[R]$           | : Reuter Matrisi                                    |
| $\kappa$        | : Bükülme Eğrisi                                    |
| $A_{ij}$        | : Uzama Rijitlik Matrisi                            |
| $B_{ij}$        | : Bağlama Rijitlik Matrisi                          |
| $D_{ij}$        | : Eğilme Rijitlik Matrisi                           |



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 1.1 :</b> Basit mesnetli tek tabakalı izotrop kalın plağa ait frekans değerleri....                                                     | 42 |
| <b>Çizelge 1.2 :</b> Basit mesnetli tek tabakalı ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.                                                       | 42 |
| <b>Çizelge 1.3 :</b> Basit mesnetli çapraz tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.....                                            | 43 |
| <b>Çizelge 1.4 :</b> Eleman sayısına göre elde edilen ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.....                                              | 43 |
| <b>Çizelge 1.5 :</b> Basit mesnetli farklı mesnet koşullarına sahip ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.....                                | 44 |
| <b>Çizelge 1.6 :</b> Basit mesnetli farklı $E_1/E_2$ oranına sahip 0/90/90/0 şeklinde tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri..... | 45 |
| <b>Çizelge 1.7 :</b> Basit mesnetli 0/90/0 şeklinde tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.....                                   | 45 |



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1 : Kompozit malzemeyi oluşturan elemanlar ve ara yüzey.....                  | 1  |
| Şekil 1.2 : Farklı doğrultu açılarına sahip tabakalardan oluşan kompozit plak.....    | 2  |
| Şekil 3.1 : x-y eksenlerinden malzeme asal yönlerine pozitif yönde dönüş.....         | 12 |
| Şekil 3.2 : x-y düzleminde deformasyon. ....                                          | 16 |
| Şekil 3.3 : Plak kuvvetleri.....                                                      | 18 |
| Şekil 3.4 : Plak momentleri. ....                                                     | 18 |
| Şekil 3.5 : Üç tabakalı simetrik açılı tabakalanma. ....                              | 21 |
| Şekil 4.1 : Gerilme bileşenleri. ....                                                 | 23 |
| Şekil 4.2 : Kesit tesirleri. ....                                                     | 23 |
| Şekil 5.1 : Global ve doğal koordinat sisteminde dikdörtgen eleman. ....              | 33 |
| Şekil 5.2 : Kenarlarından basit mesnetlenmiş plak.....                                | 39 |
| Şekil 5.3 : Eleman sayısına göre elde edilen frekans değerleri için yaklaşım testi .. | 44 |



## ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DİKDÖRTGEN PLAKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

### ÖZET

Bu çalışmada, dikdörtgen kalın ve çapraz tabakalı kompozit bir plağın serbest titreşim analizi ve buna bağlı olarak meydana gelecek olan doğal frekanslar karışık sonlu eleman formülasyonu ile incelenmiştir. Kullanılan yöntemin geçerliliğini test etmek amacıyla, şu ana kadar yapılmış olan konuyla bağlantılı çalışmalar incelenmiş ve elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Toplam sekiz bölümden oluşan çalışmada;

Birinci bölümde öncelikle plaklarla ilgili genel bilgiler verilmiş ve daha sonra da kompozit malzemeler tanıtılmıştır. Sonrasında tezin amacı belirtilmiş ve literatürde yer alan çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, ortotrop malzemenin genel özellikleri belirtilmiş olup ortotrop malzemeler için elde edilen bağıntılar matris formu şeklinde yazılmıştır.

Üçüncü bölümde, ortotrop tabakalarda gerilme durumu incelenmiş olup, ortotrop bir malzemenin Hooke Bağıntısı çıkarılmıştır. Daha sonra ortotrop malzemelerin çapraz tabakalanmaya bağlı olarak mekanik davranışı incelenmiştir. Hem tek tabakalı hem de çok tabakalı plaklarda gerilme şekil değiştirme bağıntısı çıkarılmış ve buna bağlı olarak, momentin ve kuvvetin matris formunda yazılması sağlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise, kalın plak denklemleri, denge denklemleri ve gerilme şekil değiştirme bağıntıları elde edilmiştir. Elde edilen 8 adet plak denklemi kullanılarak  $Q$  operatörünün potansiyel olup olmadığı incelenmiş ve bu operatör doğrultusunda Gateaux türevleri alınarak  $I(y)$  fonksiyoneli elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, sonlu eleman formülasyonu kullanılarak ve sonlu eleman fonksiyonelinin içinde bulunan en büyük türev derecesine bakılarak şekil fonksiyonları belirlenmiştir. Kısmi türev bağıntıları kullanılarak şekil fonksiyonları ve şekil fonksiyonları üzerinde, alan integrasyonu yapılarak da eleman matrisi elde edilir.

Altıncı bölümde ise, çapraz tabakalı kompozit plağın doğal frekansları ele alınmıştır. Gateaux türevine bağlı olarak geliştirilen formülasyonun dinamik problemler için geçerliliği gösterilip problem öz değer-öz vektör problemine dönüştürülmüştür.

Yedinci bölümde ise çapraz tabakalı kompozit plaklarda farklı tabaka açısı, tabaka sayısı, mesnet koşulu ve değişik  $E_1/E_2$  oranına sahip örnekler FORTRAN dilinde yazılmış, programda tekrar çözülmüş ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

Sekizinci bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.



## **DYNAMIC ANALYSIS OF RECTANGULAR CROSS-PLY LAMINATED COMPOSITE PLATES**

### **SUMMARY**

In this study, it is aimed to analyse the free vibration and displacements of rectangular thick laminated composite plates with mixed finite element method.

The study is composed of eight chapters.

In the first chapter first of all informations about plates and composite materials are given. And then the aim of thesis is emphasized, the studies in the literature are informed.

In the second chapter, the general properties of orthotrop materials are obtained and the relations for orthotrop materials are written in the matrix form.

In the third chapter of the study, stress in orthotrop plates are observed and so Hooke relation is found. And then the mechanic behaviours of orthotrop materials are analysed. Tensile strain relation is written for laminated plates and depending on this, moment and force are written in matrix form.

In the fourth chapter, the general equations of thick plates, equations of equilibrium and tensile strain relations are obtained. Eight plate equations that were obtained, are use to realize if operator of  $\mathbf{Q}$  is potential or not. And then after getting derivatives of Gateaux, functional of  $\mathbf{I}(\mathbf{y})$  is studied out.

In the fifth chapter, shape functions are determined with using finite element formulation. Element matrix and load matrix is obtained with using partial derivative relations.

In the sixth chapter, the natural frequencies of laminated composite plates are handled.

In the seventh chapter of the study, numerical examples of laminated composite plates that have different angles and laminate numbers, are solved in the program of FORTRAN.

In the eight chapter the results are commented.

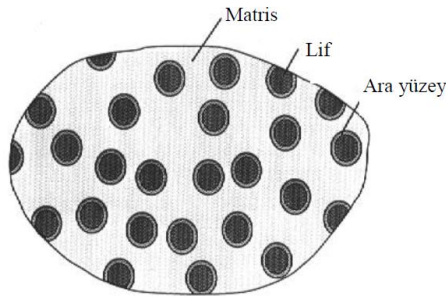


## 1. GİRİŞ

Plaklar genel olarak, bir boyutu diğer iki boyutuna oranla küçük olan yapı, uçak ve gemi mühendisliği gibi bir çok mühendislik alanında kullanılan taşıyıcı elemanlardır. Plaklar kalınlıklarına göre ince ve kalın plaklar olmak üzere iki kısma ayrılırlar. "a" plak uzunluğu ve "h" plak kalınlığı olmak üzere  $a/h$  oranı 10'dan büyükse ince plak, küçükse kalın plak olarak tanımlanır. İnce plaklarda Kirchhoff plak teorisi (klasik plak teorisi) geçerli iken, kalın plaklarda ise Reissner ve Mindlin teorileri geçerlidir. İnce plaklarda kayma gerilmeleri ve  $\sigma_z$  normal gerilmesi ihmal edilmektedir, kalın plaklarda ise kayma deformasyonu dikkate alınmaktadır.

Plaklar yalnız yapı mühendisliğinde kullanılmayıp uçak ve gemi mühendisliği gibi bir çok mühendislik dalında da taşıyıcı düzlemin oluşturulmasında kullanılan sistemlerdir. Plak sistemlerinin modellenmesi yapılırken göz önünde bulundurulması gereken parametlerden biri de kullanılan malzemedir. Ortotrop malzeme özelliklerine bakılacak olunursa, birbirine dik üç düzleme göre elastik simetri özelliklerinin bulunduğu görülür.

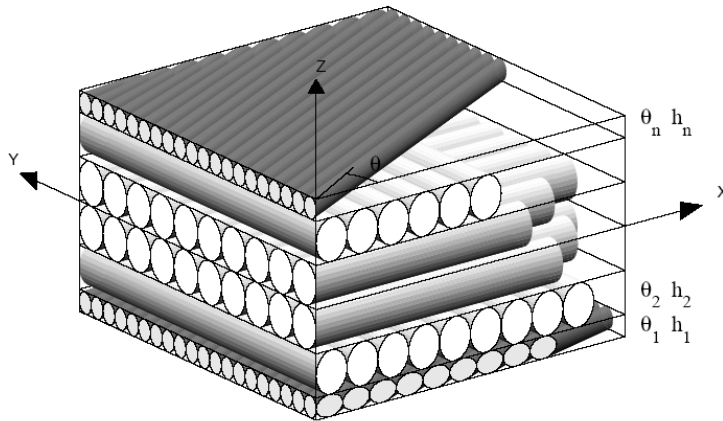
İki veya daha fazla malzemenin üstün özelliklerinin toplanarak biraraya getirilmesiyle, yeni özelliğe sahip bir malzeme elde edilmesi kompozit malzemeleri oluşturur. Kompozit malzemeler yapay ve çok fazlı malzemeler olup, yapıyı oluşturan bileşenlerin kimyasal özellikleri birbirinden farklıdır ve fazları birbirinden ayıran belirgin ara yüzeyleri vardır. Şekil 1.1 buna örnek olarak gösterilebilir[29].



Şekil 1.1 : Kompozit malzemeyi oluşturan elemanlar ve ara yüzey.

Kompozit malzemeler, matris ve liflerden oluşmaktadır. Lif malzemesi sertlik, sağlamlık gibi yapısal özellikleri, matris malzemesi ise lifin yapısal bütünlüğü oluşturması için birbirine bağlanmasını, yükün lif arasında dağılmasını ve lifin kimyasal etkilerden ve atmosfer şartlarından korunmasını sağlar. Liflerin matris içindeki yerleşimi, kompozit yapının mukavemetini etkileyen önemli bir unsurdur. Uzun liflerin matris içinde birbirlerine paralel şekilde yerleştirilmeleri ile lif doğrultusunda mukavemet sağlanırken, liflere dik doğrultuda düşük mukavemet elde edilir. İki boyutlu yerleştirilmiş lif takviyeleriyle her iki yönde de eşitlik sağlanır.

Tabakalı kompozitlere bakıldığında ise, bu malzemenin değişik özelliklere sahip bir çok malzemenin üst üste yapıştırılmasıyla oluştuğu görülmektedir. Üst üste yapışan bu malzemeler bazen farklı türden, bazen de aynı türden olabilir. Tabakalı lifli kompozit malzemelerde ise, malzeme tabakaları farklı yönlerde yer alır ve böylelikle kompozite farklı dayanım özelliği kazandırır. Farklı doğrultu açılarına sahip tabakalardan oluşan kompozit plağa örnek olarak aşağıdaki şekil verilebilir[29].



**Şekil 1.2 :** Farklı doğrultu açılarına sahip tabakalardan oluşan kompozit plak.

Bu malzemelerin mukavemetleri yüksektir ve neme dayanıklıdır, aynı zamanda daha hafiftirler. Bu özellikleri onların daha çok tercih edilmesini sağlamıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışları mühendislik alanındaki uygulamalarda büyük önem taşımaktadır ve dinamik yüklere maruz kalan, plak, otomotiv, uçak, gemi, hidrolik yapı ve köprü gibi yapıların önemli kısımlarını teşkil etmektedirler[33].

## 1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmada, çapraz tabakalı kompozit dikdörtgen bir plağın serbest titreşim analizi ve buna bağlı olarak meydana gelebilecek olan doğal titreşimleri incelenmiştir. Bu amaçla öncelikli olarak, plaklarla ilgili kavramlar açıklanmıştır. Kalın plak denklemlerinin elde edilişi bulunmuş olup, plak denge denklemleri çıkarılmıştır. Elde edilen denklemler kullanılarak oluşturulan potansiyel operatör, sınır koşulları ile birlikte fonksiyonel elde edilmiştir. Daha sonra eleman matrisi sonlu eleman formülasyonu ile oluşturulmuş ve kalın plaklar için eleman matrisi elde edilmiştir. Ardından ortotrop malzemenin özellikleri belirtilmiş olup, ortotrop malzeme için Hooke Yasası bağıntıları verilmiştir. Daha sonra ortotropik malzemelerde gerilme durumu ve mekanik davranışın çapraz tabakalanmaya bağlı olarak değişimi incelenmiştir. Hem tek tabakalı hem de çok tabakalı plaklarda gerilme şekil değiştirme bağıntısı ve aynı zamanda simetrik tabakalanma incelenmiştir. Analiz kısmında serbest titreşime bağlı olarak dinamik analiz incelenmiş ve doğal frekans bağıntıları çıkarılmıştır. Son olarak da literatürde bulunan çalışmalar incelemiş ve kullanılan yöntemin geçerliliği araştırılmış, daha sonra da elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Geliştirilen sonlu eleman formülasyonunun, gerekli uygulamalar için yeterli uygunlukta olduğu görülmüş ve ileride yapılacak çalışmalar için iyi bir kaynak olacağı düşünülmüştür.

## 1.2 Literatür Özeti

Son yıllarda kompozit plaklar hakkında yapılmış literatürde mevcut olan çalışmalardan başlıcaları aşağıda sıralanmıştır;

K.Y.Dai ve arkadaşları [3], ince ve kalın plakların statik ve serbest titreşim analizini yüksek dereceden kayma deformasyonu teorisi kullanarak analiz etmiştir.

Y.Ohta ve arkadaşları [9], yaptıkları çalışmada tabakalı kompozit plakların serbest titreşim analizlerinde elde edilen yerdeğiştirmeleri incelemiştir. Elde edilen çözüm tabakalı plakların maksimum gerilme ve kinetik enerjisi baz alınarak elastisitenin 3 boyutlu teorisine dayandırılmıştır. Dikdörtgen basit mesnet üzerine oturan plakların kalınlığa bağlı polinomial formları Ritz metoduyla formüle edilmiştir.

D.Zhou ve arkadaşları[12], kalın ve izotrop tabakalı kompozit dikdörtgen plakların serbest titreşim analizini sonlu tabaka yöntemiyle yapmıştır. Plâğın kenar noktalarında kinematik sınır koşullarını sağlayan ve mesnet noktalarında yerdeğiştirme yapmayan 2.dereceden basit fonksiyonlar, geliştirilerek ince sonlu tabakanın 3.dereceden yerdeğiştirme varyasyonunun tanımlanmasına yardımcı olmuştur.

R.P.Shimpi ve A.V.Ainapure [13], trigonometrik kısmi deformasyon teorisiyle 2 tabakalı kompozit plakların serbest titreşimini incelemiştir.Tabaka kalınlığı boyunca sinuzoidal değerler uygulanarak düzlem içi yerdeğiştirmenin elde edilmesi diferansiyel denklemlerle sağlanmıştır.

G.S.Ramtekhar ve Y.M.Desai [14], yaptıkları çalışmada karışık, 18 düğüm noktalı sonlu eleman modeli kullanarak ve minimum potansiyel enerji yöntemiyle kompozit plakların analizini yapmıştır.

G.R.Liu ve arkadaşları[15], çalışmalarında kompozit plakların statik ve serbest titreşim analizlerini açısız nokta interpolasyon metoduyla bulmuştur. Kullanılacak olan açısız fonksiyonlar, şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında fayda sağlayacak şekilde belirlenmiştir.

Ferreira ve arkadaşları[47], simetrik tabakalı kalın kompozit plakların serbest titreşim analizini, 1.dereceden kesme deformasyonu teorisiyle incelemiştir.

Rastgaar ve arkadaşları [48], tabakalı kompozit kare plakların farklı mesnet koşullarındaki doğal frekanslarını 3.dereceden kesme deformasyonu teorisiyle incelemiştir.

Senthil S.Vel ve R.C.Batra [22], yaptıkları çalışmada basit mesnet üzerine oturan dikdörtgen plakların serbest ve zorlanmış titreşimi 3 boyutlu kesin sonuç ile incelenmiş olup, kesin çözüm hem kalın hem de ince plaklar için geçerli olmuştur.

R.C Batra ve S.Aimmanae [25], yapmış oldukları çalışmada kalın izotrop ve homojen plakların yüksek dereceden kayma deformasyonu kullanılarak serbest titreşim ve gerilme analizlerini, sonlu eleman yöntemini kullanarak bulmuştur.

Kyo-Nam Koo [18], yapmış olduğu çalışmada, kompozit tabakalı plakların frekanslarına ve sönümleme kapasitesine bağılı olarak, düzlem içi şekil değıştirmesinde tabakaların etkisi sonlu eleman yöntemiyle incelemiştir ve tabakalı kompozit plaklarda basit mesnet koşullarını kullanmıştır.

L.X.Luccioni ve S.B.Dong [19], yaptıkları çalışmada tabakalı dikdörtgen plakların stabilite ve serbest titreşim analizini hem klasik hem de 1.dereceden kayma deformasyonu teorisi kullanarak yapmıştır.

A.A.Khdeir ve J.N.Reddy [20], tabakalı kompozit plakları 2.dereceden lineer denklemlerle çözmüştür. Antisimetrik açılı ve açısız tabakalı plakların serbest titreşim analizi Levy tipi çözümle yapılmıştır. Kesin analitik çözümler hem kalın hem de ince plaklar için geçerlidir.

Ashish Sharma ve arkadaşları [16], yaptıkları çalışmada, silindirik ortotrop tabakalardan oluşan tabakalı plakların serbest titreşim ve burkulma analizini analitik formülasyonla sonuçlandırmışlardır.

Memet Yıldırım [28], hazırlamış olduğu yüksek lisans tezinde, çeşitli mesnetlenme ve yükleme durumlarına göre bazı ortotropik dikdörtgen plakların çözümünü, sayısal bir çözüm yöntemi olan sonlu farklar yöntemi kullanılarak bilgisayar ortamında yapmıştır.

Sait Özmen Eruslu[30], yaptığı doktora tezinde, kısa elyaf takviyeli dik katmanlı kompozit plakların serbest titreşim analizini yapmıştır.

Mehmet Özakıncı [34], yaptığı yüksek lisans tezinde, düzlem gerilme durumunda olduğu kabul edilen simetrik tabakalı dikdörtgen kompozit plakların titreşim analizlerini, mukayese fonksiyonu olarak, trigonometrik fonksiyonları kullanarak Rayleigh-Ritz yöntemi ile yapmıştır.

Gülşah Alar [37], yaptığı çalışmada, tabakalı kompozit plaklarda sonlu eleman yöntemiyle elastik-plastik gerilme analizi yapılmış olup, delikli ve deliksiz tabakalı kompozit plağın farklı takviye açılarındaki plastik şekil değışimini incelemiştir.

Aynı zamanda tabakalı kompozit ince plaklar için de , Akavcı S.S. ve arkadaşları [31] , Yağcı E. [44], çalışmalarında statik ve dinamik analiz yapmışlardır.

## 2. ORTOTROP MALZEME ÖZELLİKLERİ

Ortotropik malzemelerde, birbirine göre dik malzeme simetrisi vardır ve birbirine dik üç düzleme göre simetri şartları otomatik olarak sağlanır. Malzeme sabitlerinin sayısı dokuzdur. Bununla birlikte gerilme şekil değiştirme tansörü altı bağımsız elemana sahiptir.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{33} &= \sigma_3 \\
 \sigma_{23} &= \sigma_4 & \sigma_{13} &= \sigma_5 & \sigma_{12} &= \sigma_6 \\
 \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\
 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 & 2\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5 & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aynı zamanda;

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntı matris formu şeklinde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

elde edilir.

Yukarıda malzeme sabitlerinin bulunduğu matris ortotrop malzemeler için yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

elde edilir.

$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j$  bağıntısı ters dönüşüm ile  $\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j$  şeklini alır. Burada  $S_{ij}$  matrisi  $C_{ij}$  matrisinin tersidir. Matris formunda yazılışı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ortotropik malzemede xyz eksen takımlarına göre Hooke yasası;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{xx}} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_{yy}} \sigma_y - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} \sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{zz}} \sigma_z - \frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} \sigma_y \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindedir.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \quad (2.7)$$

Yukarıda verilen denklemlerde görülen  $E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, \nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, \nu_{zx}, \nu_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  değerleri malzeme sabitleri olup, toplam 12 tanedir. Fakat  $S_{ij}$  matrisinden dolayı yazılan ;

$$\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} = \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} \quad (2.8)$$

eşitlikleri ile malzeme sabit sayısı 9'a iner. Malzeme sabitlerinden  $E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}$  değerleri malzemenin sıra ile x, y ve z doğrultularındaki elastisite modülleri,  $G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  değerleri ise malzemenin xy, yz ve zx düzlemlerindeki kayma modülleridir[29].

Yukarıda bulunan (2.5) bağıntısı sadeleştirilip tekrar yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ve ters dönüşüm yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{xx}}{1-\nu_{xy}\nu_{xy}} & \frac{\nu_{xy}E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{xy}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{xy}} & \frac{E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

şeklini alır.



### 3. KOMPOZİT MALZEMELER

#### 3.1 Kompozit Malzemelerin Davranışı

#### 3.2 Ortotropik Tabakalarda Gerilme Durumu

Ortotropik tabakalarda gerilme durumunun geçerli olması, düzleme dik gerilmelerin etkimediği varsayılarak sağlanır. Bu durumda;

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{31} = 0 \quad (3.1)$$

Yukarıdaki bağıntılara bağlı olarak Hooke Bağıntısı;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

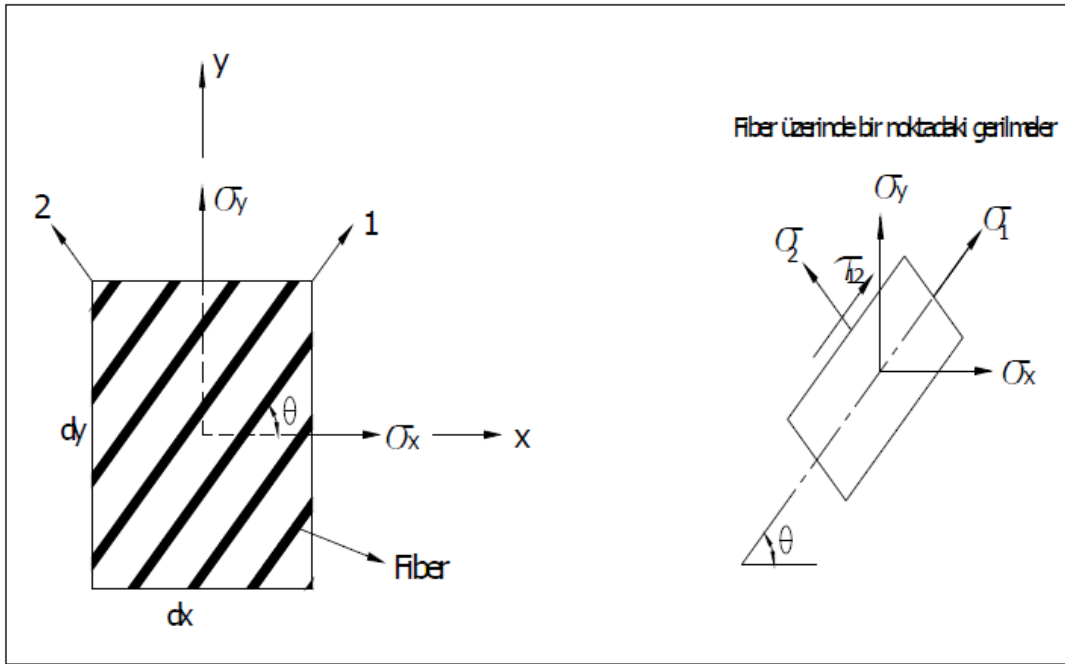
şeklini alır. Matriste bulunan değerlerin açılımları aşağıdaki gibidir;

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.3)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Mekanik Davranışın Çapraz Tabakalanmaya Bağlı Olarak Değişimi

Yukarıda bulunan bağıntı, malzemenin asal doğrultusundaki gerilme-şekil değiştirme bağıntıları olup, uygulanan gerilmeler malzemenin asal eksenleriyle her zaman çakışmayabilir. Aşağıda Şekil 3.1’ de görüldüğü gibi  $\theta$  kadar bir açıyla malzeme eksenini döndüğünde oluşan yeni asal eksenlere bağlı dönüşümler  $T_{ij}$  tansörü kullanılarak bulunabilir. x-y eksenlerinden malzeme asal yönlerine dönüş Şekil 3.1 de gösterilmiştir[33].



Şekil 3.1 : x-y eksenlerinden malzeme asal yönlerine pozitif yönde dönüş.

Malzeme asal eksenini x ve y olup  $\theta$  kadar pozitif yönde bir dönüşle yeni asal eksenini 1 ve 2 olan bir malzemede koordinat sistemindeki dönüşüm aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. Burada [T] matrisi, dönüşüm matrisidir ve şekil değiştirmeler arasındaki dönüşüm;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır ve [T] dönüşüm matrisi;

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ayrıca bir [R] Reuter matrisi,

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

kullanılır ve böylece 1/2 çarpanı yok edilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

bağıntısı yazılır.

Malzeme asal eksenleriyle gerilmenin uygulandığı eksenlerin çakışmaması durumunda, şekil değiştirme bağıntısı tekrar yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

şekline dönüşür. Burada,

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \quad (3.14)$$

olarak yazılırsa, x-y eksenlerine ait gerilme-şekil değiştirme bağıntısı,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır.  $[\bar{Q}]$  matrisinin açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} + 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Tek Tabakalı Plaklarda Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntısı

Ortotropik bir malzemenin düzlem gerilme altında şekil değiştirme bağıntısı;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Tabaka düzlemindeki her hangi bir eksen takımının gerilme şekil değiştirme bağıntısı ise;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

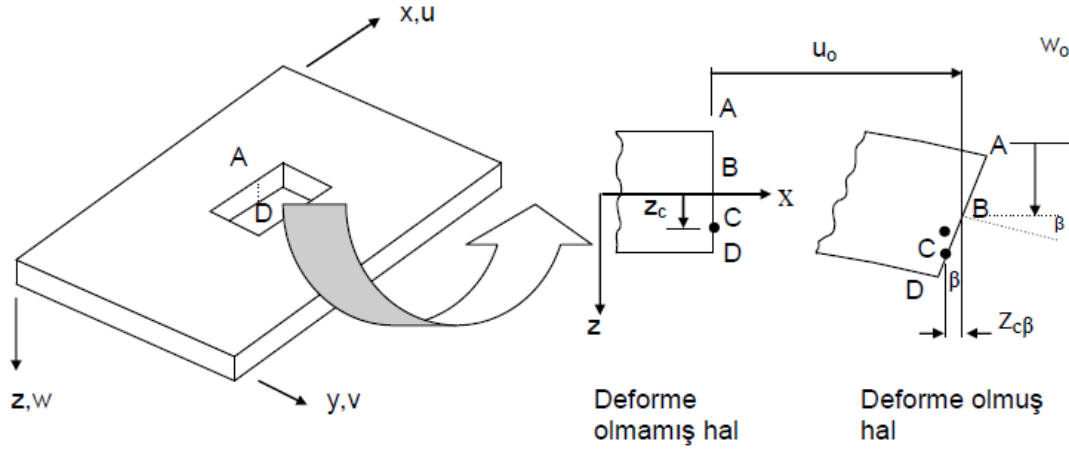
şeklinde yazılır. Çok sayıda tabakadan oluşan bir levhanın k. tabakasının gerilme şekil değiştirme bağıntısı;

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (3.19)$$

olarak yazılır.

### 3.2.3 Tabakalı Plaklarda Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı

Tabakalı plaklarda mekanik davranış incelenirken; çok tabakalı plağın tek tabaka gibi davrandığı, orta düzleme dik düzlemlerde kayma olmadığı, ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) ve normal doğrultudaki kalınlığın sabit kaldığı ( $\varepsilon_z = 0$ ) kabul edilir. x-y düzleminde deformasyon Şekil 3.2' de verilmiştir[32].



**Şekil 3.2 : x-y düzleminde deformasyon.**

Deformasyon altında ABCD düzlemi orta düzleme dik olarak kaldığından, x doğrultusunda orta düzlemdeki tabaka eğimi  $\beta$ , aşağıdaki gibi yazılır;

$$\beta = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.20)$$

Tabaka kalınlığı boyunca, herhangi bir z noktasındaki u deplasmanı yazıldığında;

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.21)$$

olur. Aynı işlemler y doğrultusunda meydana gelen v deplasmanı için yapıldığında;

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Çok tabakalı plakların mekanik davranışında,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \epsilon_z = 0$  dır ve  $\gamma_{xy}$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ise sıfırdan farklıdır. Şekil değiştirmeler açısından deplasmanlar aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.23)$$

Denklem 3.21 ve Denklem 3.22' nin türevi alınıp tekrar yazılırsa;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (3.26)$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen birim deformasyonlar matris formunda yazıldığında,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  ve  $\gamma_{xy}^0$  orta düzlemdeki şekil değiştirmeler olup;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

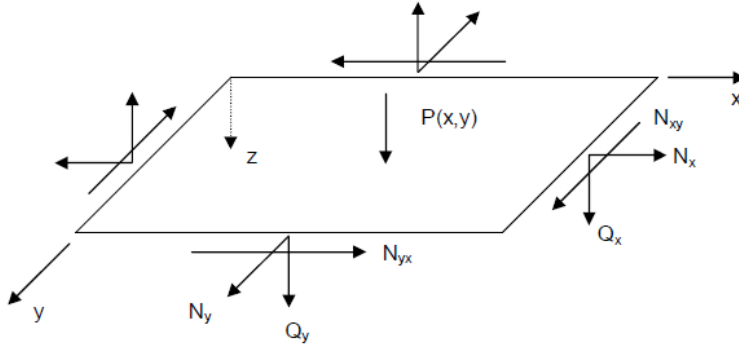
ve

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

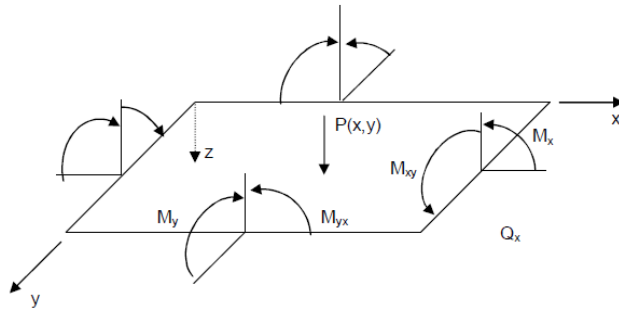
Yukarıda bulunan denklemde son terim, denklemin bükülme eğrileri olup gerilme şekil değiştirme bağıntısında yerine konmasıyla aşağıdaki ifade elde edilmiş olur,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Tabaka kalınlığı boyunca bulunan gerilmelerin integrasyonu ile tabaka üzerindeki kuvvetler ve momentler elde edilmiş olur.



**Şekil 3.3 : Plak kuvvetleri.**



**Şekil 3.4 : Plak momentleri.**

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (3.31)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (3.32)$$

Denklem 3.18 ve Denklem 3.27, Denklem 3.31 ve Denklem 3.32 de yerine konursa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left( \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz + \right) \right) \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left( \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz + \right) \right) \quad (3.34)$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = (h_k - h_{k-1}) \quad (3.35)$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz = (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (3.36)$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz = \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (3.37)$$

Denklem 3.33 ve Denklem 3.34 de bulunan integraller alındığında, kuvvet ve momentler aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \left( \bar{Q}_{ij} \right)_k (h_k - h_{k-1}) \quad (3.40)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \bar{Q}_{ij} \right)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (3.41)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( \bar{Q}_{ij} \right)_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (3.42)$$

Yukarıdaki bağıntılarda;

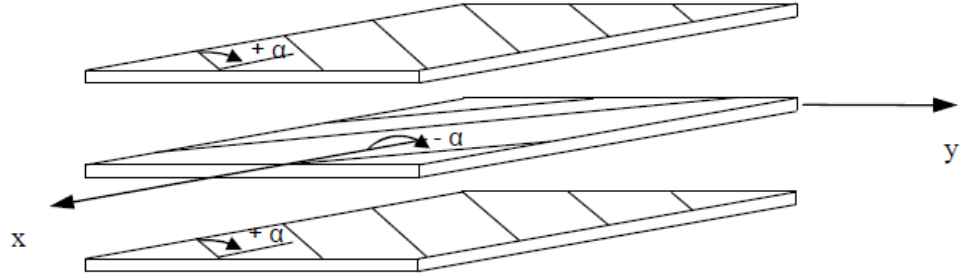
$A_{ij}$  = Uzama Rijitlik Matrisi

$B_{ij}$  = Eğilme- Uzama Arasındaki Bağlama Rijitlik Matrisi

$D_{ij}$  = Eğilme Rijitlik Matrisi

### 3.2.4 Simetrik Tabakalanma

Simetrik tabakalanmanın özünde açı, malzeme ve tabaka kalınlığındaki farklılıklar yer alır. Bu farklılıklar  $[A]$ ,  $[B]$  ve  $[D]$  matrislerinden bir veya bir kaçının sıfır olmasına neden olur. Hem malzeme özelliği hem de geometrik özellikleri ile orta düzleme göre simetrik olan tabakalanmaya "simetrik tabakalanma" denir.  $\left(\bar{Q}_{ij}\right)_k$  nın ve tabaka kalınlığının simetrik olması sebebiyle tüm bağlanma rijitlikleri olan  $B_{ij}$ 'ler sıfır olur[44]. Simetrik tabakalanmada  $[B]$  matrisinin sıfır olması simetrik tabaka analizini daha kolay hale getirir. Şekil 3.5 tabakalı simetrik açılanmaya örnektir.



Şekil 3.5 : Üç tabakalı simetrik açılı tabakalanma.



## 4. PLAK DENKLEMLERİNİN VE FONKSİYONELİN ELDE EDİLİŞİ

### 4.1 Kalın Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_x - \mu_{xy} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_y - \mu_{yx} (\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad (4.2)$$

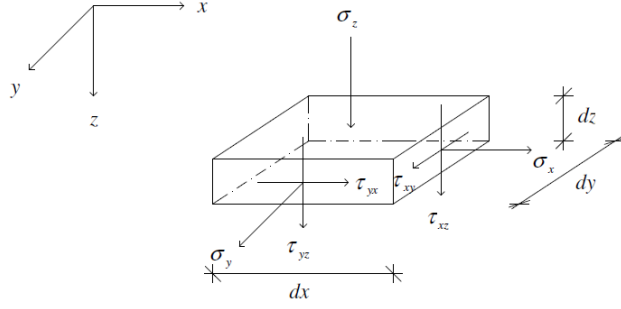
Kayma gerilmelerinin açı değişikliğine neden olacağı varsayıldığında aşağıdaki denklemler elde edilmiş olur;

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1 + \mu_{xy})}{E_{xy}} \tau_{xy} \quad (4.3)$$

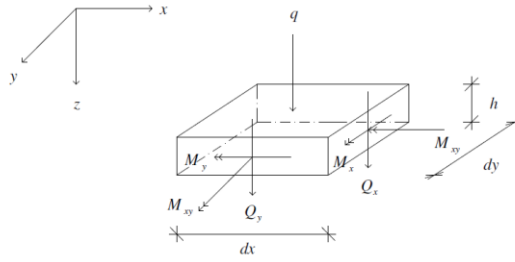
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2(1 + \mu_{xz})}{E_{xz}} \tau_{xz} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1 + \mu_{yz})}{E_{yz}} \tau_{yz} \quad (4.5)$$

dx, dy, dz boyutlarına sahip bir plak elemanına etki eden gerilme bileşenleri ve bu bileşenlere ait bileşkelerle birim boyda denk gelen kesit tesirleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir[27].



**Şekil 4.1 : Gerilme bileşenleri.**



**Şekil 4.2 : Kesit tesirleri.**

Klasik plak teorisine göre gerilme şekil değiştirme bağıntılarından aşağıdaki denklemler elde edilmiştir;

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z^2 dz, \quad D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12} z^2 dz, \quad A_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66} z^2 dz \quad (4.6)$$

$$\sigma_x = \frac{Q_{11} M_x}{D_{11}} z \quad (4.7)$$

$$\sigma_y = \frac{Q_{22} M_y}{D_{22}} z \quad (4.8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_{66} M_{xy}}{A_{xy}} z \quad (4.9)$$

$z = \pm h/2$  olarak düşünüldüğünde ve kayma gerilmeleri sıfır olarak kabul edildiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\tau_{xz} = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \cdot \frac{h^2}{8} Q_x \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad \tau_{yz} = \frac{Q_{22}}{D_{22}} \cdot \frac{h^2}{8} Q_y \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Yukarıdaki bağıntıya bağlı olarak;

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{-\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{-\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (4.11)$$

elde edilir.  $z=+h/2$  ve  $z=-h/2$  sınır koşullarında  $\sigma_z = 0$  ve  $\sigma_z = -q$  değerlerini alır.

Buna bağlı olarak;

$$\sigma_z = q \frac{Q_{11}}{D_{11}} \left[ \frac{h^2}{8} \left( z - \frac{4}{3h^2} \frac{z^3}{3} \right) + \frac{h^3}{24} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir.

## 4.2 Plak Denge Denklemleri

Genel olarak denge denklemlerini yazacak olursak;

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (4.13)$$

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (4.14)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (4.15)$$

elde edilir. İç kuvvetler ve  $q$  yükünün etkisi altındaki denge denklemleri;

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (4.17)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q = 0 \quad (4.18)$$

şeklindedir.

#### 4.2.1 Gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları

Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri olarak tanımlanan ve  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  ve  $w$  olan şekil değiştirme büyüklükleri iç kuvvetlerle aynı işi yaparlar. Böylece;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u dz = M_x \Omega_x \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v dz = M_y \Omega_y \quad (4.19)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u dz = M_{xy} \Omega_x \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v dz = M_{xy} \Omega_y \quad (4.20)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w_0 dz = Q_x w \quad (4.21)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w_0 dz = Q_y w \quad (4.22)$$

denklemleri elde edilir.  $w_0 = w_0(x,y,z)$  değişkenleri cinsinden düşey yer değiştirmeyi tanımlamaktadır. Denklem (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) ve (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\Omega_x = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \int_{-h/2}^{h/2} u dz \quad , \quad \Omega_y = \frac{Q_{22}}{D_{22}} \int_{-h/2}^{h/2} v dz \quad (4.23)$$

$$w = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \cdot \frac{h^2}{8} \int_{-h/2}^{h/2} w_0 \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad (4.24)$$

Denklem (4.23) deki ifadelerin sırasıyla x ve y'ye göre türevleri alındıktan sonra, Denklem (4.1), Denklem (4.3) ve Denklem (4.13) kullanılarak tekrar düzenleme yapıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \left( M_x - \mu_{xy} M_y - \frac{h^2}{10} \mu_{xz} q \right) = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} - \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \left( M_y - \mu_{yx} M_x - \frac{h^2}{10} \mu_{yz} q \right) = 0 \quad (4.26)$$

Denklem (4.23) deki ifadelerin sırasıyla x ve y'ye göre türevleri alındıktan sonra, Denklem (4.3) ve Denklem (4.7) kullanılarak tekrar düzenleme yapıldığında;

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}} M_{xy} = 0 \quad (4.27)$$

Kaymanın yaptığı iş yazıldığında;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \bar{\tau}_{xz} dz = \frac{1}{G_{xz}} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.28)$$

yukarıdaki bağıntı elde edilir. Aynı şekilde;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{yz} \bar{\tau}_{yz} dz = \frac{1}{G_{yz}} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.29)$$

elde edilir. Denklem 4.28 de  $\tau_{xz}$  değeri yazıldığında;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \bar{\tau}_{xz} dz = \frac{2(1 + \mu_{xz})}{E_{xz}} \frac{9}{4h^2} Q_x \int_{-h/2}^{h/2} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \frac{2(1 + \mu_{xz})}{E_{xz}} \frac{6}{5h} Q_x \quad (4.30)$$

ve Denklem 4.28 ile Denklem 4.30'dan

$$\Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6}{5G_{xz}h} Q_x = 0 \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde ;

$$\Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{6}{5G_{yz}h} Q_y = 0 \quad (4.32)$$

Yukarıda bulunan (4.25), (4.26), (4.27) denklemleri tekrar düzenlenir ve sadeleştirilirse, plak denklemleri elde edilir.

$$\Omega_{x,x} = \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \left( M_x - \mu_{xy} M_y - \frac{Q_{11}}{D_{11}} \cdot \frac{qh^5}{120} \mu_{xz} q \right) \quad (4.33)$$

$$\Omega_{y,y} = \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \left( M_y - \mu_{yx} M_x - \frac{Q_{22}}{D_{22}} \cdot \frac{qh^5}{120} \mu_{yz} q \right) \quad (4.34)$$

$$\Omega_{x,y} + \Omega_{y,x} = \frac{Q_{11}}{D_{11} G_{xy}} M_{xy} \quad (4.35)$$

$$\Omega_x + w_{,x} = \frac{6}{5G_{xy}h} Q_x \quad (4.36)$$

$$\Omega_y + w_{,y} = \frac{6}{5G_{yx}h} Q_y \quad (4.37)$$

Dinamik sınır koşulları ve geometrik sınır koşulları yazılırsa;

Dinamik Sınır Koşulları

$$M - \hat{M} = 0$$

$$Q - \hat{Q} = 0$$

### Geometrik Sınır Koşulları

$$-\Omega + \hat{\Omega} = 0$$

$$-w + \hat{w} = 0$$

olarak ifade edilir.

Yukarıda bulunan sekiz adet plak denklemi sınır koşullarında uygulanır. Elde edilen denklemler kullanılarak  $Ly=f$  diferansiyel denklemi bulunur. Aynı zamanda  $Ly=f=Q$  şeklinde de yazılabilen bu denklemde  $Q$ 'nun potansiyel bir operatör olması gerekmektedir. Yukarıda bulunan sekiz adet plak denklemi lineer denklem takımı şeklinde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{17} & P_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{24} & 0 & P_{26} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{35} & P_{36} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & P_{44} & P_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & P_{54} & P_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{62} & P_{63} & 0 & 0 & P_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{71} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{81} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ w \\ \Omega \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ -A_1 \\ -A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{Q} \\ \hat{M} \\ -\hat{\Omega} \\ -\hat{w} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Denklem (4.38) de bulunan P katsayılarının açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} P_{17} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{18} &= -\frac{\partial}{\partial y}, & P_{24} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{26} &= -\frac{\partial}{\partial y}, & P_{35} &= -\frac{\partial}{\partial y}, \\ P_{36} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{42} &= \frac{\partial}{\partial x}, & P_{44} &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}}, & P_{45} &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \mu_{xy}, & P_{53} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ P_{54} &= \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \mu_{yx}, & P_{55} &= -\frac{Q_{22}}{E_y D_{22}}, & P_{62} &= \frac{\partial}{\partial y}, & P_{63} &= \frac{\partial}{\partial x}, & P_{71} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ P_{77} &= -\frac{6}{5G_{xz}h}, & P_{81} &= \frac{\partial}{\partial y}, & P_{88} &= -\frac{6}{5G_{yz}h}, & A_1 &= \frac{Q_{11}qh^5}{D_{11}120} \mu_{xz}, \\ A_2 &= \frac{Q_{22}qh^5}{D_{22}120} \mu_{yz}, & [q, w] &= \frac{1}{2} \rho \omega [w, w] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$Q$  operatörünün potansiyel olabilmesi için aşağıdaki bağıntının sağlanması gerekmektedir.

$$\langle dQ(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle dQ(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (4.40)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $dQ(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}})$  ve  $dQ(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*)$  operatörünün  $\bar{\mathbf{y}}$  ve  $\mathbf{y}^*$  doğrultusundaki Gâteaux türevleri gösterilmektedir. Operatörün Gâteaux türev açılımı aşağıda belirtilmiştir.

$$dQ(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial Q(\mathbf{y} + \tau \bar{\mathbf{y}})}{\partial \tau} \right|_{\tau} = 0 \quad (4.41)$$

Bu eşitlik kullanılarak iç çarpımlar yazıldığında,

$$\begin{aligned} [dQ(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] &= [-\bar{Q}_x, w^*] + [\bar{Q}_x, w_{,x}^*] - [\bar{Q}_y, w^*] + [\bar{Q}_y, w_{,y}^*] \\ &- [\bar{M}_x, \Omega_x^*] + [\bar{M}_x, \Omega_{x,x}^*] - [\bar{M}_{xy}, \Omega_x^*] + [\bar{M}_{xy}, \Omega_{x,y}^*] + [\bar{Q}_x, \Omega_x^*] \\ &- [\bar{M}_y, \Omega_y^*] + [\bar{M}_y, \Omega_{y,y}^*] - [\bar{M}_{xy}, \Omega_y^*] + [\bar{M}_{xy}, \Omega_{y,x}^*] + [\bar{Q}_y, \Omega_y^*] \\ &+ [\bar{\Omega}_x, M_x^*] - [\bar{\Omega}_x, M_{x,x}^*] + [\bar{\Omega}_y, M_y^*] - [\bar{\Omega}_y, M_{y,y}^*] + [\bar{\Omega}_x, M_{xy}^*] \\ &- [\bar{\Omega}_x, M_{xy,y}^*] + [\bar{\Omega}_y, M_{xy}^*] - [\bar{\Omega}_y, M_{xy,x}^*] + [\bar{\Omega}_x, Q_x^*] + [\bar{w}, Q_x^*] \\ &- [\bar{w}, Q_{x,x}^*] + [\bar{\Omega}_y, Q_y^*] + [\bar{w}, Q_y^*] - [\bar{w}, Q_{y,y}^*] \end{aligned} \quad (4.42)$$

aynı işlemler tekrar yapıldığında,

$$\begin{aligned}
[d\mathbf{Q}(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] = & [-Q_x^*, \bar{w}] + [-Q_x^*, \bar{w}_{x,x}] - [Q_y^*, \bar{w}] + [Q_y^*, \bar{w}_{y,y}] \\
& - [M_x^*, \bar{\Omega}_x] + [M_x^*, \bar{\Omega}_{x,x}] - [M_{xy}^*, \bar{\Omega}_x] + [M_{xy}^*, \bar{\Omega}_{x,y}] + [Q_x^*, \bar{\Omega}_x] \\
& - [M_y^*, \bar{\Omega}_y] + [M_y^*, \bar{\Omega}_{y,y}] - [M_{xy}^*, \bar{\Omega}_y] + [M_{xy}^*, \bar{\Omega}_{y,x}] + [Q_y^*, \bar{\Omega}_y] \\
& + [\Omega_x^*, \bar{M}_x] - [\Omega_x^*, \bar{M}_{x,x}] + [\Omega_y^*, \bar{M}_y] - [\Omega_y^*, \bar{M}_{y,y}] + [\Omega_x^*, \bar{M}_{xy}] \\
& - [\Omega_x^*, \bar{M}_{xy,y}] + [\Omega_y^*, \bar{M}_{xy}] - [\Omega_y^*, \bar{M}_{xy,x}] + [\Omega_x^*, \bar{Q}_x] + [w^*, \bar{Q}_x] \\
& - [w^*, \bar{Q}_{x,x}] + [\Omega_y^*, \bar{Q}_y] + [w^*, \bar{Q}_y] - [w^*, \bar{Q}_{y,y}]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Yukarıdaki denklemlerde bulunan köşeli parantezler, o bölge üzerindeki iç çarpımları belirtmektedir.  $f=f(y)$  ve  $g=g(y)$  fonksiyonları bölgede tanımlı iki fonksiyon olarak kabul edildiğinde iç çarpımları;

$$[f, g] = \int_0^L fg dz \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

$$[f, g]_0 = f \cdot g \quad \begin{array}{l} \text{Dinamik ve Geometrik Sınır} \\ \text{koşularının verildiği noktalar için geçerli} \end{array}$$

$$[f, g]_\sigma = f \cdot g \quad \begin{array}{l} \text{Dinamik Sınır} \\ \text{koşularının verildiği noktalar için geçerli} \end{array}$$

$$[f, g]_\varepsilon = f \cdot g \quad \begin{array}{l} \text{Geometrik Sınır} \\ \text{koşularının verildiği noktalar için geçerli,} \end{array}$$

Yukarıda bulunan  $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle$  denklem eşitliği ve  $\mu_{xy}E_y = \mu_{yx}E_x$  eşitliği göz önüne alınıp sınır koşulları için sağlandığında  $\mathbf{Q}$  operatörünün potansiyel olduğu anlaşılır ve sınır koşullarında;

$$[Q, w]_0 = [(Q_x n_x + Q_y n_y), w] \tag{4.44}$$

$$[M, \Omega]_0 = [(M_x n_x + M_{xy} n_y), \Omega_x] + [(M_{xy} n_x + M_y n_y), \Omega_y] \tag{4.45}$$

bağıntıları uygulandıktan sonra  $\mathbf{I}(\mathbf{y})$  ;

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_0^L \langle Q(sy, y) y ds \rangle \quad (4.46)$$

bağıntısına bağlı olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{y}) = & [Q_x, (\Omega_x + w_{,x})] + [Q_y, (\Omega_y + w_{,y})] + [M_x, \Omega_{x,x}] + [M_y, \Omega_{y,y}] + [M_{xy}, \Omega_{x,y}] \\ & + [M_{xy}, \Omega_{y,x}] - \frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \{ [M_x, M_x] + [M_y, M_y] - 2\mu_{xy} [M_x, M_y] + 2(1 + \mu_{xy}) [M_{xy}, M_{xy}] \} \\ & - \frac{3}{5G_{xz}h} \{ [Q_x, Q_x] + [Q_y, Q_y] \} + \frac{6\mu_{xz}}{5E_x h} \{ [q, M_x] + [q, M_y] \} - [q, w] - [(w - \hat{w}), Q]_{\varepsilon} \\ & - [(\Omega - \hat{\Omega}), M]_{\varepsilon} - [w, \hat{Q}]_{\sigma} - [\hat{M}, \Omega]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.47)$$

## 5. ELEMAN MATRİSİNİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU İLE OLUŞTURULMASI

Sonlu eleman formülasyonu kullanılırken, değişik sonlu eleman çeşitleri kullanılabilir. İki boyutlu sonlu eleman, dikdörtgen veya üçgen seçilebileceği gibi aynı zamanda da lineer, quadratik ve kübik olarak da seçilebilir. Bu seçim yapılırken sonlu eleman fonksiyonelinin içinde bulunan en büyük türev derecesine bakılır ve buna göre şekil fonksiyonu belirlenir[27]. Bu çalışmada analizler dikdörtgen sonlu eleman analizi kullanılarak yapılacaktır.

Sonlu eleman tanımında, eleman koordinatları doğal koordinat sistemiyle tanımlanabilir. Genel koordinat ifadesi;

$$x = \sum_{i=1}^q \hat{\psi}_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^q \hat{\psi}_i y_i \quad \sum_{i=1}^q \hat{\psi}_i = 1 \quad (5.1)$$

şeklindedir.

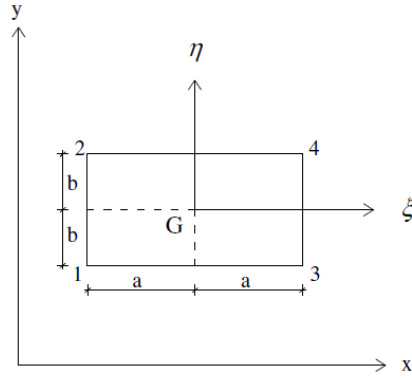
Denklem (5.1) de x ve y elemandaki herhangi bir düğüm noktasının genel koordinatlarını,  $x_i$  ve  $y_i$  de elemanın i noktasının koordinatlarını göstermektedir.  $\hat{\psi}_i$  ler de elemanın doğal koordinat sisteminde her biri  $\pm 1$  aralığında değişen  $\xi$ ,  $\eta$  değişkenleri cinsinden tanımlanmıştır.  $\hat{\psi}_i$  lerin en büyük özellikleri; doğal koordinat sisteminde, i düğüm noktasında bir birim olurken diğer düğüm noktalarında sıfır olmalarıdır.

Şekil fonksiyonları;

$$\psi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (5.2)$$

bağıntısından elde edilir.

Şekilde G ; ağırlık merkezidir ve;



**Şekil 5.1 :** Global ve doğal koordinat sisteminde dikdörtgen eleman.

$$\xi = \frac{x - x_G}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_G}{b} \quad (5.3)$$

$$x_G = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2}, \quad y_G = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2} \quad (5.4)$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_3 = -1, \quad \xi_3 = \xi_4 = \eta_2 = \eta_4 = 1 \quad (5.5)$$

Yukarıdaki bağıntılara bağlı olarak her bir düğüm noktası için teker teker işlem yapıldığında şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Eleman matrisinin elde edilmesi için, ikinci bölümde elde edilen fonksiyonelin  $\frac{\partial}{\partial x}$  ve

$\frac{\partial}{\partial y}$  kısmi türevlerine ihtiyaç duyulur. Bu kısmi türevlerin elde edilmesinde zincir kuralı kullanıldığında;

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (5.7)$$

bağıntıları elde edilir. Burada;

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x - x_G}{a} \right) = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y - y_G}{b} \right) = \frac{1}{b} \quad (5.8)$$

olarak bulunan ifadeler Denklem 5.7'de yerine konulursa Denklem 5.7

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \quad (5.9)$$

haline gelir.

i ; 1,2,3,4, değerlerini aldığıında;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x} &= \frac{1}{4a}(-1+\eta), \quad \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y} = \frac{1}{4b}(-1+\xi) \\ \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} &= \frac{1}{4a}(-1-\eta), \quad \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y} = \frac{1}{4b}(1-\xi) \\ \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x} &= \frac{1}{4a}(1-\eta), \quad \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial y} = \frac{1}{4b}(-1-\xi) \\ \frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial x} &= \frac{1}{4a}(1+\eta), \quad \frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial y} = \frac{1}{4b}(1+\xi) \end{aligned} \quad (5.10)$$

bağıntıları elde edilir.

Eleman matrisinin hesaplanmasında şekil fonksiyonu bağıntıları ile bu bağıntıların dikdörtgen eleman üzerinde alan integrasyonu bulunmalıdır.

i=1,2,3,4 ve j=1,2,3,4 olarak alındığında alan integrasyonu [k] ;

$$[k_1] = \int_A \psi_i \psi_j dA = \begin{bmatrix} 4ab/9 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/36 \\ 4ab/18 & 4ab/9 & 4ab/36 & 4ab/18 \\ 4ab/18 & 4ab/36 & 4ab/9 & 4ab/18 \\ 4ab/36 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/9 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[k_2] = \int_A \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \psi_j dA = \begin{bmatrix} -b/3 & -b/6 & -b/3 & -b/6 \\ -b/6 & -b/3 & -b/6 & -b/3 \\ b/3 & b/6 & b/3 & b/6 \\ b/6 & b/3 & b/6 & b/3 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$[k_3] = \int_A \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \psi_j dA = \begin{bmatrix} -a/3 & -a/3 & -a/6 & -a/6 \\ a/3 & a/3 & a/6 & a/6 \\ -a/6 & -a/6 & -a/3 & -a/3 \\ a/6 & a/6 & a/3 & a/3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

olarak elde edilir.

### 5.1 Kalın Plaklar İçin Eleman Matrisinin Elde Edilişi

Kalın plaklar için eleman matrisi elde edilirken Denklem 5.11, 5.12, kullanılır.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}}, & \gamma_2 &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}}, & \gamma_3 &= -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}}, \\ \gamma_4 &= -\frac{Q_{11}}{2G_{xy} D_{11}}, & \gamma_5 &= -\frac{3}{5G_{xz} h}, & \gamma_6 &= -\frac{3}{5G_{yz} h}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\gamma_7 = -\frac{1}{E_x} \frac{Q_{11}}{D_{11}} \mu_{xz} \frac{Q_{11}}{D_{11}} \frac{qh^5}{120}, \quad \gamma_8 = \frac{1}{E_y} \frac{Q_{22}}{D_{22}} \mu_{yz} \frac{Q_{22}}{D_{22}} \frac{qh^5}{120}$$

$$[K] = \begin{matrix} \begin{matrix} M_x \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} M_y \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} M_{xy} \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} Q_x \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} Q_y \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \Omega_x \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \Omega_y \\ \Downarrow \\ \end{matrix} & \begin{matrix} w \\ \Downarrow \\ \end{matrix} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} -2\gamma_1[k_1] & \gamma_2[k_1] & 0 & 0 & 0 & [k_1]^T & 0 & 0 \\ \gamma_2[k_1] & 2\gamma_3[k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & [k_3]^T & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_4[k_1] & 0 & 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_5[k_1] & 0 & [k_1] & 0 & [k_2]^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_6[k_1] & 0 & [k_1] & [k_3]^T \\ [k_2]^T & 0 & [k_3]^T & [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 & [k_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_2]^T & [k_3]^T & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (5.15)$$

şeklindedir.



## 6. DİNAMİK ANALİZ

Tabakalı kompozit plakların doğal frekansları bu bölümde ele alınmıştır. Gateaux türevine bağlı olarak geliştirilen formulasyonun dinamik problemler için uygulanabilirliği gösterilecek olursa, bu amaçla ilk olarak problem özdeğer-öz vektör problemine dönüştürülür [45].

$$[K_e] - \omega^2 [M_e] = \{0\} \quad (6.1)$$

Yukarıda verilen bağıntıda  $[M_e]$  kütle matrisidir. Elde edilmiş olan  $\mathbf{I}(\mathbf{y})$  fonksiyonelinde  $[q, w]$  terimi dinamik analizde aşağıdaki gibi kullanılır.

$$[q, w] = \frac{1}{2} \rho \omega [w, w] \quad (6.2)$$

Yukarıdaki denkleme göre  $[M_e]$  kütle matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$[M_e] = \rho h [k_1] \quad (6.3)$$

Burada " $\rho$ " yoğunluk, " $h$ " ise plak kalınlığıdır. Denklem 6.1 matris formunda yazılırsa;

$$\left( \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.4)$$

halini alır.

$\{f\}$  sistem matrisindeki momentleri, kesme kuvvetlerini ve dönmeleri,  $\{w\}$  ise çökmeleri göstermektedir. Yukarıdaki bağıntıdan yararlanılarak;

$$[K^*] = [K_{22}] - [K_{12}]^T [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \quad (6.5)$$

denklemini elde edilir. Artık Denklem 6.1 öz değer- öz vektör probleminin çözümünde kullanılacaktır ve tabakalı kompozit plakların doğal frekanslarını verecektir.

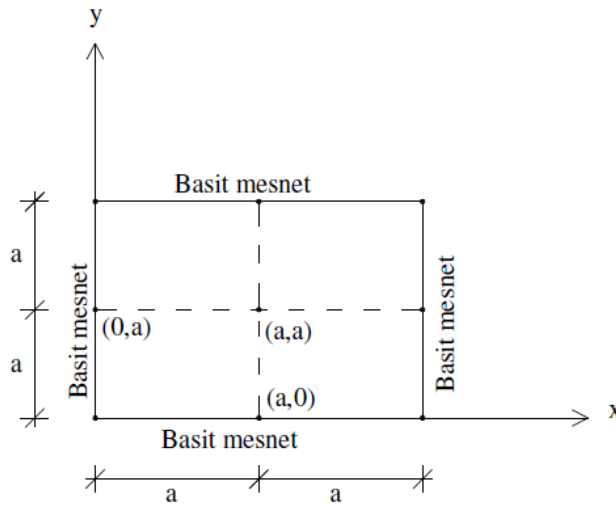
Bu durumda Denklem 6.1;

$$([K^*] - \omega^2 [M]) \{w\} = \{0\} \quad (6.6)$$

halini alır.

## 7. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde çapraz tabakalı kompozit plakların farklı tabaka açısı, tabaka sayısı, mesnet koşulu ve  $E_1/E_2$  oranına sahip örnekler FORTRAN dilinde yazılmış olan programda tekrar çözüldükten sonra karşılaştırmalar yapılmıştır. Ele alınan örneklerde kare plak kullanılmıştır. Mesnetlenme koşulu olarak plağın tüm kenarları basit mesnet (SSSS) ve sınır koşulları  $w=0$ ,  $M_n=0$  ve  $\Omega_t=0$  olacak şekilde, simetri koşulu düşünülerek dörtte bir eleman için  $9 \times 9$ 'luk sonlu eleman ağı kullanılarak analiz yapılmıştır. Çalışmanın asıl amacı ortotrop tek ve çok tabakalı plaklarda dinamik analizdir, bununla birlikte uygulamanın geçerliliğini göstermek amacıyla izotrop plaklarla ilgili örnekler ve aynı zamanda da ankastre mesnet (SSSC, SSCC) koşuluna ait örnekler de verilmiştir. Bu örneklerde bütün elemanda  $10 \times 10$ 'luk sonlu eleman ağı kullanılmıştır.



Şekil 5.2 : Kenarlarından basit mesnetlenmiş plak.

### 7.1 Basit Mesnetli İzotrop Tek Tabakalı Örnekler

Basit mesnetli simetrik tek tabakalı izotrop plaklar için,  $2a/h=5$  ve  $\nu=0.3$  alınarak analiz yapılmıştır. Sonlu eleman çözümünde doğal frekanslar  $\bar{\omega} = \omega(2a^2/h)\sqrt{\rho/E}$  bağıntısı kullanılarak boyutsuz hale getirilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**Çizelge 1.1 :** Basit mesnetli tek tabakalı izotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| 2a/h | REDDY[46] | *M.Ç. | Fark(%) |
|------|-----------|-------|---------|
| 5    | 5.812     | 5.807 | 0.08    |

\* M.Ç.=Mevcut Çalışma

### 7.2 Basit Mesnetli Ortotrop Tek Tabakalı Örnekler

Basit mesnetli simetrik tek tabakalı ortotrop plaklar için, farklı  $2a/h$  oranlarında  $E_1=25E_2$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ ,  $G_{23}=0.2E_2$ ,  $\nu_{12}=0.25$  olarak alınmış ve frekanslar  $\bar{\omega} = \omega(2a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$  olarak boyutsuzlaştırılıp doğal frekanslar bulunmuştur.

**Çizelge 1.2 :** Basit mesnetli tek tabakalı ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| 2a/h | REDDY[46] | M.Ç.   | Fark(%) |
|------|-----------|--------|---------|
| 5    | 8.909     | 8.828  | 0.9     |
| 10   | 12.452    | 12.477 | 0.2     |

### 7.3 Basit Mesnetli Ortotrop Tabakalı Örnekler

Basit mesnetli simetrik tabakalı ortotrop plaklar için,  $E_1=25E_2$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ ,  $G_{23}=0.2E_2$ ,  $\nu_{12}=0.25$  olarak alınmış ve frekanslar  $\bar{\omega} = \omega(2a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$  olarak boyutsuzlaştırılıp doğal frekanslar bulunmuş ve Çizelge 1.3 oluşturulmuştur. Plak tabakalanması  $0^\circ/90^\circ/0^\circ/...$  şeklinde devam etmektedir.

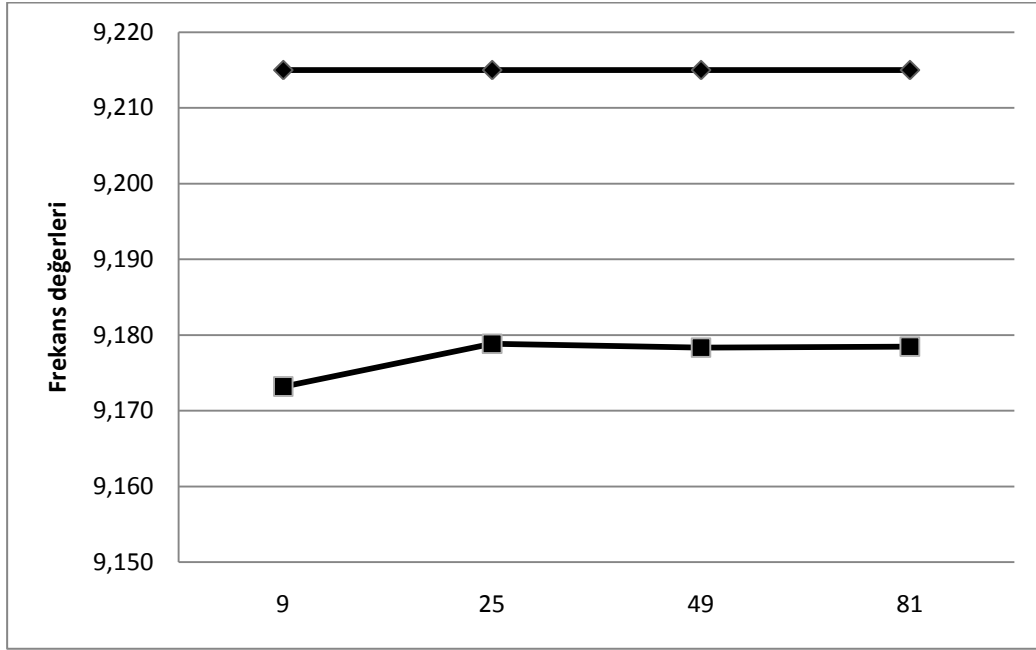
**Çizelge 1.3 :** Basit mesnetli çapraz tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| Tabaka dizilimi       | 2a/h | Reddy[46] | M.Ç.   | Fark(%) |
|-----------------------|------|-----------|--------|---------|
| 0/90/0                | 5    | 8.766     | 8.563  | 2,31    |
|                       | 10   | 12.227    | 12.257 | 0,24    |
| 0/90/0/90/0           | 5    | 9.215     | 9.178  | 0,4     |
|                       | 10   | 12.633    | 12.977 | 2,72    |
| 0/90/0/90/0/90/0      | 5    | 9.301     | 9.335  | 0,36    |
|                       | 10   | 12.720    | 13.225 | 3,9     |
| 0/90/0/90/0/90/0/90/0 | 5    | 9.333     | 9.404  | 0,76    |
|                       | 10   | 12.754    | 13.347 | 4,64    |

Yukarıda elde edilen verilere ek olarak 0/90/0/90/0 şeklinde tabakalanmış ve bütün eleman kullanılarak, 2a/h=5 için farklı sonlu elemana bölünerek elde edilen frekanslarla Çizelge 1.4 oluşturulmuş ve buna bağlı olarak Şekil 5.3 de yaklaşım grafiği verilmiştir.

**Çizelge 1.4 :** Eleman sayısına göre elde edilen ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| Eleman Sayısı | M.Ç.     | Reddy |
|---------------|----------|-------|
| 3x3           | 9,173190 | 9,215 |
| 5x5           | 9,178828 | 9,215 |
| 7x7           | 9,178338 | 9,215 |
| 9x9           | 9,178446 | 9,215 |



**Şekil 5.3 :** Eleman sayısına göre elde edilen frekans değerleri için yaklaşım testi.

Yukarıda belirtilen verilerle aynı verileri kullanarak Khdeir ve Reddy'nin [20] yaptığı çalışmaya ek olarak ankastre mesnetin değişik durumlardaki frekansları da incelenmiştir. Burada tabakalanma  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  şeklinde 3 tabaka halindedir. Ankastre mesnetin eklendiği örneklerde elemanın bütünü alınarak 10x10'luk sonlu eleman ağı kullanılarak ve  $2a/h=10$  alınarak analiz yapılmıştır.

**Çizelge 1.5 :** Basit mesnetli farklı mesnet koşullarına sahip ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| Sınır Koşulları | [20]<br>[FOT] | M.Ç.   | Fark(%) |
|-----------------|---------------|--------|---------|
| SSSS            | 12.163        | 12.256 | 0,76    |
| SSSC            | 14.248        | 14.307 | 0,41    |
| SSCC            | 16.383        | 16.405 | 0,13    |

\*FOT:First Order Shear Deformation Theory(Birinci dereceden kayma deformasyonu teorisi)

Bunun dışında tabakalı ortotrop plaklara diğer bir örnek olarak, Ferreira ve arkadaşlarının[47] yapmış olduğu çalışma verilebilir.  $2a/h=5$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$ ,  $G_{23}=0.5E_2$ ,  $\nu_{12}=0.25$  değerleriyle, boyutsuzlaştırmanın  $\bar{\omega} = \omega(2a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$  olarak alınmasıyla  $9 \times 9$  elemana bölünerek  $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$  olarak simetrik tabakalanmış bir plağa ait farklı  $E_1/E_2$  değerlerindeki veriler incelenmiştir.

**Çizelge 1.6 :** Basit mesnetli farklı  $E_1/E_2$  oranına sahip  $0/90/90/0$  şeklinde tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| $E_1/E_2$ | [47]   | M.Ç.   | Fark(%) |
|-----------|--------|--------|---------|
| 10        | 8.340  | 8.519  | 2,14    |
| 20        | 9.613  | 9.798  | 1,92    |
| 30        | 10.372 | 10.547 | 1,68    |
| 40        | 10.899 | 11.061 | 1,48    |

Bir başka örnek olarak da M.Rastgaar ve arkadaşlarının[48] yaptığı  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  simetrik tabakalanmış bir plağa ait sonuçlar karşılaştırılabilir. Bu örneğe ait veriler;

$E_1=175$  GPa,  $E_2=7$  GPa,  $G_{12}=G_{13}=3.5$  GPa,  $G_{23}=1.4$  GPa,  $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$  şeklindedir. Bu verilerden Çizelge 1.7 oluşturulmuştur.

**Çizelge 1.7 :** Basit mesnetli  $0/90/0$  şeklinde tabakalanmış ortotrop kalın plağa ait frekans değerleri.

| $2a/h$ | [48]   | M.Ç.   | Fark(%) |
|--------|--------|--------|---------|
| 10     | 12.190 | 12.272 | 0,67    |



## 8. SONUÇLAR

- ✓ Bu çalışmada karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak çapraz tabakalı ortotrop kalın plaklar için dinamik analiz yapılmış olup bu analizden elde edilen sonuçlarla, literatürde daha önce mevcut olan sonuçlar karşılaştırılmıştır.
- ✓ Kullanılan malzeme, ortotrop malzeme olduğundan bu malzemeye ait genel denklemler matris formunda yazılmıştır. Mekanik davranışın çapraz tabakalanmaya bağlı olarak değiştiği ve malzeme asal ekseninin değişmesi durumunda gerilme şekil değiştirme bağıntılarının da değiştiği gözlemlenmiştir. Daha sonra bu açılı değişime bağlı olarak rijitlik matrisi elde edilmiştir.
- ✓ Plak denge denklemleri incelenmiş ve buna bağlı olarak Gateaux türevi alınarak  $\mathbf{I}(\mathbf{y})$  fonksiyoneli elde edilmiştir. Sonlu eleman formülasyonunun elde edilmesiyle, şekil fonksiyonları belirlenmiş ve şekil fonksiyonu üzerinde alan integrasyonu yapılarak da eleman matrisi elde edilmiştir.
- ✓ Öz değer ve öz vektör probleminin çözümünde kullanılacak olan ve tabakalı kompozit bir plağın doğal frekanslarını verecek olan denklemler Fortran dilinde yazılmış olan programa aktarılmıştır. Literatürde yapılan incelemelerle, elde edilen analiz sonuçları karşılaştırılmıştır.
- ✓ Çalışmanın asıl amacı; tabakalı kompozit ortotrop plaklarda doğal frekans değerlerini incelemektir fakat uygulamanın geçerliliğini göstermek amacıyla izotrop plaklara ait örnekler de verilmiştir. İzotrop plaklarla ilgili yapılan analiz Redy[46] ile karşılaştırılmış ve aradaki farkın % 0.08 olduğu görülmüş ve çıkan sonuç tatmin edici bulunmuştur.
- ✓ Ardından ortotrop plaklara ait örnekler incelenmiştir. Ortotrop plaklarda değişik plak kalınlığına, farklı  $E_1/E_2$  oranına, farklı tabaka açılarına ve değişik mesnet koşullarına sahip örnekler üzerinde incelemeler yapılmıştır. Sadece basit mesnetle ilgili örnekler incelenmemiş olup aynı zamanda ankastre mesnetle ilgili örnekler de incelenmiştir. Elde edilen analiz sonuçlarıyla literatürdeki örnekler karşılaştırıldığında aradaki farkın çok küçük olduğu gözlemlenmiştir.

✓ Serbest titreşim analizi yapılırken dörtte bir elemanda  $9 \times 9 = 81$  eleman kullanılmıştır. 9, 16, 25, 49 ve 81 eleman kullanılarak elde edilen frekans değerlerinin yakınsadığı görülmüştür.

✓ Sonuç olarak; çapraz tabakalı kompozit ortotrop plakların karışık sonlu eleman yöntemiyle dinamik analizinde elde edilen sonuçların yeterli yakınsaklıkta ve uygun değerde olduğu ve ileride yapılacak çalışmalar için iyi bir kaynak oluşturacağı öngörülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] **P.Vidal, O.Polit**, 2008: A Family of Sinus Finite Elements for the Analysis of Rectangular Laminated Beam, *Composite Structures*, **84**, 56-72.
- [2] **Edward A.Sadek, Samer A.Tawfik**, 2000: A Finite Element Model for the Analysis of Stiffened Laminated Plates, *Computers&Structures*, **75**,369-383.
- [3] **K.Y.Dai, G.R.Liu, K.M.Lim, X.L.Chen**, 2004: A mesh Free Method for Static and Free Vibration Analysis of Shear Deformable Laminated Composite Plates, *Journal of Soun&Vibration*, **269**, 633-652.
- [4] **Akavcı S.S.**, 2005: Analysis of Thick Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation with the use of Various Plate Theories, *Mechanics of Composite Materials*, **41**, 445-460.
- [5] **T.Pervez, A.C.Seibi. F.K.S. Al-Jahwari**, 2005: Analysis of Thick Orthotropic Laminated Composite Plates Based on Higher Order Shear Deformation Theory, *Composite Structures*, **71**,414-422.
- [6] **Civelek Ö.**, 2008: Analysis of Thick Rectangular Plates with Symmetric Cross-Ply Laminates Based on First Order Shear Deformation Theory, *Journal of Composite Materials*, **42**, 2853-2867.
- [7] **M.Karama, B.Abou Harb, S.Mistou and S.Caperaa**, 1998: Bending Buckling and Free Vibration of Laminated Composite with a Transverse Shear Stress Continuity Model, *Composites Part B*, **29**, 223-234.
- [8] **Akavcı S.S.**, 2007: Buckling and Free VibrationAnalysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **26**, 1907-1919.
- [9] **Yoshiki Ohta, Toshihiro Ikuno**, 2002: The Study of the Analytical Models For Vibartion of Cross-Ply Laminated Thick Plates, *JSME İnternational Journal Series*, **45**, 107-112.
- [10] **Eugenio Onate, Francisco Zarate**, 2010: Extended Rotation -Free Plate and Beam Elements with Shear Deformation Effects, *İnternational Centre for Numaerical Methods in Engineering*, **83**, 196-227.
- [11] **C.C.Chen ,S.Kitipornchai**, 2000: Free Vibration of Symmetrically Laminated Thick-Perforated Plates, *Journal of Sound&Vibration*, **230**, 111-132.
- [12] **D.Zhou, Y.K.Cheung, J.Kong**, 2000: Free Vibration of Thick Layered Retangular Plates with Point Supports by Finite Layer Method, *İnternational Journal of Solids and Structures*, **37**, 1483-1499.
- [13] **R.P.Shimpi, A.V.Ainapure**, 2004: Free Vibration of Two-Layered Cross-Ply Laminated Plates Using Layer-Wise Trigonometric Shear Deformation Theory, *Journal of Reinforced Platics&Composites*, **23**, 389-405.

- [14] **G.S.Ramtekkar, Y.M.Desai**, 2002: Mixed Finite Element Model for Thick Composite Laminated Plates, *Mechanics of Advanced Materials&Structures*, **9**, 133-156.
- [15] **G.R.Liu, X.Zhao, K.Y.Dai, Z.H.Zhong, G.Y.Li, X.Han**, 2008: Static and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Using the Confirming Radial Point Interpolation Method, *Composites Science&Technology*, **68**, 354-366.
- [16] **Ashish Sharma, H.B.Sharda, Y.Nath**, 2005: Stability and Vibration of Thick Laminated Composite Sector Plates, *Journal of Sound&Vibration*, **287**, 1-3.
- [17] **F.-L.Liu**, 2000: Static Analysis of Thick Rectangular Laminated Plates: Three Dimensional Elasticity Solutions Via Differential Quadrature, *International Journal of Solids&Structures*, **37**, 7671-7688.
- [18] **Kyo-Nam Koo**, 2002: Vibration and Damping Analysis of Composite Plates Using Finite Elements with Layerwise in-plane Displacements, *Computers&Structures*, **80**, 1393-1398.
- [19] **L.X.Luccioni, S.B.Dong**, 1998: Levy-Type Finite Element Analysis of Vibration and Stability of Thin and Thick Laminated Composite Rectangular Plates, *Composites Part B*, **29**, 459-475.
- [20] **A.A.Khdeir, J.N.Reddy**, 1999: Free Vibrations of Laminated Composite Plates Using Second-Order Shear Deformation Theory, *Computers & Structures*, **71**, 617-626.
- [21] **A.N.Bambole, Y.M.Desai**, 2007: Hybrid-Interface Element for Thick Laminated Composite Plates, *Computers&Structures*, **85**, 1484-1499.
- [22] **Senthil S.Vel, R.C.Batra**, 2004: Three Dimensional Exact Solution for the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates, *Journal of Sound&Vibration*, **272**, 703-730.
- [23] **P.Malakzadeh, A.Afsari, P.Zahedinejad, R.Bahadori**, 2010: Three Dimensional Layerwise-Finite Element Free Vibration Analysis of Thick Laminated Annular Plates On Elastic Foundation, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 776-790.
- [24] **P.Vidal, O.Polit**, 2010: Vibration of Multilayered Beams Using Sinus Finite Elements with Transverse Normal Stress, *Composite Structures*, **92**, 1524-1534.
- [25] **R.C.Batra, S.Aimmanee**, 2005: Vibration of Thick Isotropic Plates with Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories, *Computers&Structures*, **83**, 934-955.
- [26] **J.Golas, A.Padhorecka, M.Delyavski, M.Kravchuk**, 2002: On Approach to The Solution of the Bending Problem for Laminated Plates, *Mechanics of Composite Materials*, **38**, 253-262.
- [27] **Çalışkan Halim**, 2007. Ortotrop Kalın Plakların Statik ve Dinamik Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, İSTANBUL.
- [28] **Yıldırım M.**, 2007. Bazı Ortotropik Plakların Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, İSTANBUL.

- [29] **Çolak A.**, 2008. Ortasında Delik Bulunan Tabakalı Kompozit Plaklarda Elasto-Plastik Gerilme Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Atatürk Üniversitesi, ERZURUM.
- [30] **Eruslu S.Ö.**, 2008. Kısa Elyaf Takviyeli Kompozit Plaklarda Titreşim Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Trakya Üniversitesi, EDİRNE.
- [31] **Akavcı S.S., Arslan H.M., BİKÇE M.**, 2003: Tabakalı Kompozit Plakların Analizi, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Cilt:1, Sayı:2.
- [32] **Arslan H.M., Doğan A.**, 2004: Fiber Çubuklarla Güçlendirilmiş Tabakalı Plakların Plak Düzlemine Dik Yükleme Etkisindeki Davranışı, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Cilt:19, Sayı:2.
- [33] **Tolun C.**, 2008. Dikdörtgen Elasto-Plastik Kompozit Plakların Dinamik Analizi, *Doktora Tezi*, Gazi Üniversitesi, ANKARA.
- [34] **Özakıncı M.**, 2006. Tabakalı Kompozit Plakların Titreşim Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, İSTANBUL.
- [35] **Orhan O.**, 2007. Statik Yayılı Yük Altındaki Katmanlı Kompozit Plakların Deneysel ve Sayısal İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, İSTANBUL.
- [36] **Yıldız Y.O.**, 2007. Desteklenmiş Kompozit Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Burkulma Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi, ANKARA.
- [37] **Alar G.**, 2002. Tabakalı Kompozit Plaklarda Sonlu Eleman Yöntemiyle Elastik-Plastik Gerilme Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Atatürk Üniversitesi, ERZURUM.
- [38] **Günay E.**, 1996. İnce ve Kalın Kompozit Plakların Nonlineer Analizi için Kayma-Kilitlenmesiz Bir Sonlu Eleman Modeli, *Doktora Tezi*, Gazi Üniversitesi, ANKARA.
- [39] **Yıldız A., Eröz M.**, 2006: Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Kompozit Bir Plaktaki Yerdeğiştirme ve Gerilme Analizi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, Cilt:10, Sayı:2.
- [40] **Kazancı Z., Mecitoğlu Z.**, 2007: Anlık Basınç Yüküne Maruz Kompozit Konsol Bir Plagın Lineer Olmayan Dinamik Cevabı, *İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik Dergisi*, Cilt:6, Sayı:1, 77-87.
- [41] **Tanrıöver H., Şenocak E.**, 2006: Kompozit Plakların Dinamik Nonlineer Davranışı, *İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik Dergisi*, Cilt:5, Sayı:3, 225-230.
- [42] **Topal U.**, 2008. Tabakalı Kompozit Dikdörtgen Plakların Değiştirilmiş Uygun Doğrultular Metodu'na Göre Optimizasyonu, *Doktora Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, TRABZON.
- [43] **Baltacı A., Sarıkanat A.**, 2006: Değişik Fiber Oryantasyonlarına Sahip Tabakalı Kompozit Kirişlerin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Titreşim Analizi, *Denizli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, Cilt:8, Sayı:3, 85-97.

- [44] **Yağcı E.**, 2007. Tabakalı Kompozit İnce Plakların Plak Düzlemine Dik Yükleme Etkisi Altındaki Eğilme Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Çukurova Üniversitesi, ADANA.
- [45] **Şamdan F.**, 2009. Dairesel Kalın Plakların Statik ve Dinamik Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, İSTANBUL.
- [46] **J.N.Reddy**, 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, CRC Press.
- [47] **A.J.M.Ferreira, C.M.Roque, R.M.N.Jorge**, 2005: Free Vibration Analysis of Symmetric Laminated Composite Plates by FSDT and Radial Basis Functions, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **194**, 4265-4278.
- [48] **M.Rastgaar Aagaah, M.Mahinfalah, G.Nakhie Jazar**, 2006: Natural Frequencies of Laminated Composite Plates Using Third Order Shear Deformation Theory, Composite Structures, **72**, 273-279.

## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad Soyad: Nihan SATIR**

**Doğum Yeri ve Tarihi:İSTANBUL/15.09.1986**

**Adres: ÜSKÜDAR/İSTANBUL**

**Lisans Üniversite: Kocaeli Üniversitesi/2008**