

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

DOKTORA TEZİ

Durmuş DAĞHAN

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

MART 2007

D. DAĞHAN



**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

2007

D. DAĞHAN



**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

2007

D. DAĞHAN



**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

2007

D. DAĞHAN



**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

2007

D. DAĞHAN



**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

2007

**RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA
TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

**DOKTORA TEZİ
Durmuş DAĞHAN
(Enstitü No: 509992132)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 6 Şubat 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mart 2007**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ayşe H. BİLGE (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU (İTÜ)
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN (BEYKENT Ü.)
Prof. Dr. Rahmi GÜVEN (IŞIK Ü.)
Doç. Dr. Zerrin ŞENTÜRK (İTÜ)

TEŞEKKÜRLER

Doktora öğreniminin her aşamasında, benden zamanını esirgemeyen, bilgi ve birikimlerinden yararlanma imkanı veren, izlenmesi gereken bilimsel metodları öğretirken büyük bir sabır ve hoşgörü örneği gösteren, göstermeye de devam eden sayın hocam Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE'ye minnettarım.

Tez çalışması sırasındaki fikir ve katkılarından dolayı, tez izleme komitesinin değerli üyeleri hocalarım sayın Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU ve sayın Doç. Dr. Zerrin ŞENTÜRK'e teşekkür ederim. Ayrıca, tez çalışmasının bir çok aşamasında sık sık danışma ve tartışma fırsatı veren değerli hocam Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Özellikle tezin ikinci bölümündeki eksikliklerin giderilmesinde ve tezin genelinin düzenlenmesinde yaptıkları son derece önemli katkılardan dolayı, hocalarım sayın Prof. Dr. Rahmi Güven'e ve sayın Prof. Dr. Mehmet Erdoğan'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında yeterince vakit ayıramadığım sevgili eşim Neslihan, çocuklarım Emir ve Ceren'e, sabır ve anlayışlarından dolayı, ayrıca, tüm öğrenim hayatım boyunca bana her koşulda destek olan, olmaya da devam eden sevgili anne ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

Şubat 2007

Durmuş DAĞHAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	ix
1. ÖN HAZIRLIK	1
1.1. Giriş	1
1.2. Temel Tanımlar	3
1.3. Riemann(Yarı-Riemann) Geometrisi	6
1.3.1. Metrik tensör	6
1.3.2. Bağlantı	8
1.3.3. Levi-Civita Bağlantısı	8
1.3.4. Killing denklemi	9
1.3.5. Eğrilik tensörü	9
1.3.6. Ricci tensörü ve Ricci skaleri	10
1.4. B Tipi Warped Çarpım Manifoldlar	11
1.5. Adi Diferansiyel Denklemler Sistemleri: Faz Düzlemi Analizi	12
1.6. Adi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü	14
1.7. Anti de Sitter Uzayı	15
2. NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİ: RİCCİ TENSÖRÜ İÇİN RANK 1 OLMA KOŞULU	17
2.1. Giriş	17
2.2. Newman-Penrose Formalizmi	17
2.3. B Tipi Warped Çarpım Metrik ve Ricci Tensörünün Rank 1 Olma Koşulu	28
2.4. Enerji Koşulları, Petrov ve Plebanski Sınıflamaları	39
3. (3+1)-BOYUTTA SKALER ALANIN KUPLE EDİLMESİYLE ELDE EDİLEN STATİK TAM ÇÖZÜMLER	44
3.1. Giriş	44
3.2. Einstein Alan Denklemleri	45
3.3. Alan Denklemlerinin İndirgenmesi	50
3.4. Statik Özel Çözümler	52
3.5. Statik Metrik: Pozitif Dal İçin Tam Çözüm; Faz Düzlemi Analizi	54
3.6. Statik Metrik: Negatif Dal İçin Faz Düzlemi Analizi	62
3.7. Enerji Koşulları ve Mükemmel Akışkan	67
4. (2+1)-BOYUTTA SKALAR ALANIN KUPLE EDİLMESİYLE ELDE EDİLEN STATİK TAM ÇÖZÜMLER	70
4.1. Giriş	70

4.2.	(3+1)-Boyuttan (2+1)-Boyuta İndirgeme	70
4.3.	Statik Hal İçin Karşılaştırma	72
4.4.	(2+1)-Boyutta $\Lambda = 0$ İçin Statik Tam Çözüm	75
4.5.	(2+1)-Boyutta $\Lambda = -1$ İçin Statik Tam Çözüm	75
4.6.	Killing Denklemleri	82
4.7.	Geodezik Denklemleri	86
5.	SONUÇLAR	90
	KAYNAKLAR	93
	ÖZGEÇMİŞ	97

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No.
Şekil 3.1	: $\phi_s = \pm \frac{\phi_t}{y}$ ile belirlenen bölgeler 50
Şekil 3.2	: $\mu_s + \mu = \pm \frac{\mu_t}{y}$ ile belirlenen bölgeler 50
Şekil 3.3	: $c = 6\sqrt{\pi}$ için μ nün davranışı 56
Şekil 3.4	: μ nün $\psi = \phi_s$ e göre değişimi 57
Şekil 3.5	: μ nün s e göre değişimi 57
Şekil 3.6	: (3.27) sisteminde μ , y ve r nin değişimleri 58
Şekil 3.7	: (3.27) sisteminde çözüm eğrilerinin yönleri 60
Şekil 3.8	: (3.27) sistemi için integral eğrileri 61
Şekil 3.9	: (3.29) sisteminde çözüm eğrilerinin yönleri 63
Şekil 3.10	: (3.29) sistemi için integral eğrileri 65
Şekil 3.11	: (3.29) sisteminde y , μ ve ϕ_t/y 'nin değişimleri 66
Şekil 3.12	: T_i periodlarının μ_s e karşı değişimi 67
Şekil 4.1	: Zamansal geodezikler 88
Şekil 4.2	: Işıksal geodezikler 89
Şekil 4.3	: Uzaysal geodezikler 89

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{K}$	: Cisim
$\mathbf{V}$	: Vektör uzayı
$\mathbf{V}^*$	: V vektör uzayının duali
$\mathbf{S}(\mathbf{r})$	: Permütasyon grubu
$(\mathbf{r}, \mathbf{s})$	: r -kovaryant, s -kontravaryant tensör
$\mathbf{T}_s^r(\mathbf{V})$	: r -kovaryant, s -kontravaryant tensör kümesi
$\Sigma^r(\mathbf{V})$	: Simetrik r -kovaryant tensörlerin kümesi
$\wedge^r(\mathbf{V})$	: Alterne r -kovaryant tensörlerin kümesi
$\mathbf{A}$	: Alterneleyen operatör
$\otimes$	: Tensörel çarpım
$\wedge$	: Dış çarpım
$\mathbf{d}$	: Dış türev operatörü
$\mathbf{v}_p$	: p noktasındaki tanjant vektörü
$\mathbf{C}^\infty(\mathbf{M})$	: Diferansiyellenebilen manifold
$\mathbf{T}_p\mathbf{M}$	: Tanjant vektörlerinin uzayı
$\mathbf{T}_p^*\mathbf{M}$	: Kotanjant vektörlerinin uzayı
$\mathbf{TM}$	: Tanjant demeti
$\mathbf{v}$	: Vektör alanı
$\chi(\mathbf{M})$	: Diferansiyellenebilen vektör alanlarının uzayı
$\mathbf{g}$	: Metrik tensörü
∇	: Bağlantı
$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$	: İkinci tipten Christoffel sembolü
$\mathbf{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma$	: Eğrilik tensörü
$\mathbf{R}_{\mu\nu}$	: Ricci tensörü
$\mathbf{R}$	: Ricci skaleri
$\mathbf{T}_{\mu\nu}$	: Enerji momentum tensörü
ϕ	: Skaler alan
$\tilde{\mathbf{g}}$	: B tipi warped çarpım metriği
$\mathbf{s} = (\mathbf{o}, \iota)$	: Spin demetin yerel tabanı
Ω	: Eğrilik 2-form matrisi
$\{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \overline{\mathbf{m}}\}$	: Işıksal yerel taban
$\{\mathbf{D}, \Delta, \delta, \bar{\delta}\}$	: Yerel tanjant vektör alanları
$\{\kappa, \nu, \sigma, \lambda, \rho, \mu, \pi, \tau, \alpha, \beta, \epsilon, \gamma\}$	: Spin katsayıları
Φ_{ij}	: İzsiz Ricci tensörü bileşenleri
Ψ_i	: Weyl tensörü bileşenleri
Λ	: $\frac{R}{24}$ (Bölüm 2)
$\tilde{\mathbf{M}}$	: (2+1)-boyuttaki manifold
$\mathbf{K}^i$	: Killing vektörü
Λ	: Kozmolojik sabit (Bölüm 4)

RİCCİ-RANK 1 LORENTZ MANİFOLDLARINDA TAM VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER

ÖZET

Tez kapsamında yapılan çalışmalar beş ana bölümde sunulmaktadır.

Birinci bölümde, tezin genelinde kullanılacak bir takım temel kavramlar ve ana materyaller tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak kotanjant demetin $\{l, n, m, \bar{m}\}$ ışıksal yerel tabanı için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğer olan, Newman-Penrose formalizmi kullanılarak Ricci tensörünün matrisi $\{l, n, m, \bar{m}\}$ tabanına göre ifade edilmiştir. $\Phi_{00} \neq 0$ durumu için rankının 1 olma koşulu bulunmuştur. Bölüm 2.3 de, genel bir B tipi warped çarpım metrik için Newman-Penrose sistemi verilerek, bu sistemde, manifoldun ikinci kısmının sabit eğrilığe sahip, R^3 e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Ricci tensörünün rankının 1 olması ve enerji momentum tensörünün tekil olmaması durumunda fiziksel kaynağın kütesiz bir skaler alan olması gerektiği gösterilmiştir. Yine aynı bölümde, genel B tipi warped metriktan küresel simetrik bir metriğe geçilerek Newman-Penrose büyüklükleri hesaplanmıştır. Küresel simetrik metrik için Einstein alan denklemleri, Ricci tensörü için rank 1 koşulu kullanılarak elde edilmiştir. Bölüm 2.4 de, Ricci rank 1 sınıflaması kullanılarak enerji şartlarının ifadesi Newman-Penrose nicelikleri türünden ifade edilerek, şartların sağlandığı gösterilmiştir. Son olarak, kullanılan B tipi metriğin Petrov tipinin D, Plebanski sınıfının $[2S_1 - S_2 - T]_{(111)}$ olduğu belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde, (3+1)-boyutta Einstein alan denklemleri, Ricci tensörünün rank 1 olma koşulundan bağımsız bir şekilde, küresel simetrik bir metriğe kütesiz skaler alanın kuple edilmesiyle çalışılmıştır. Başlangıçta “over determined” olan orijinal sistem, a , α , r ve μ değişkenleri Choptuik (Choptuik, M. W , 1993. “Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field”, *Physical Review Letters*, **70**, 9) de olduğu gibi kullanılarak, $\mu = \frac{m}{r}$ ve $y = \frac{\alpha}{ra}$ fonksiyonları için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden normal bir sisteme (over determined olmayan) indirgenmiş ve Bölüm 3.2 de sunulmuştur. “Pozitif” ve “negatif” dal tanımları yapılmıştır. Bölüm 3.4 de, μ ve y için zamandan bağımsız (statik) durum, skaler alanın $\phi_t = 0$ (pozitif dal) veya $\phi_s = 0$ (negatif dal) olması ile karakterize edilmiş ve statik özel çözümler verilmiştir. Pozitif dal olarak adlandırdığımız statik durum için hem tam çözüm bulunmuş, hem de faz düzlemi analizi ile $\mu = 0$ aşıkâr çözümünün $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde bir genel çekim noktası olduğu Bölüm 3.5 de kanıtlanmıştır. Bulunan tam çözümün ayrıntılı grafikleri çizilip nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bölüm 3.6 da, negatif dal olarak adlandırdığımız statik durum, dinamik bir sistem olarak incelenmiş ve tüm çözüm eğrileri karakterize edilerek boşluk olmayan $(\frac{1}{4}, 0)$

noktasının $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde genel bir çekim noktası olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, negatif dal için period hesabı lineer kısımdan 3.62 olarak hesaplanmıştır. Lineer olmayan sistem için period hesabı, çözüm eğrilerinin salınımları kullanılarak nümerik olarak yapılmış ve 3.62'ye oldukça yakın bir period bulunmuştur. Bölüm 3.7, elde edilen çözümlerin enerji şartları çalışılmış ve negatif dal mükemmel bir akışkan olarak yorumlanmıştır.

Dördüncü bölümde, önce (2+1)-boyutlu manifold, (3+1)-boyutlu manifoldun ekvatoruna gömülmesi olarak tanımlanmıştır. Bölüm 4.3 de, her iki boyutta, kütesiz bir skaler alan kuplajı ile birlikte kozmolojik sabit içeren Einstein alan denklemleri elde edilmiştir. Statik duruma (3+1)-boyutta olduğu gibi, (2+1)-boyutta da ϕ skaler alanın $\phi_t = 0$ veya $\phi_s = 0$ olması durumunda geçilmiş ve bunlardan yalnızca $\phi_t = 0$ durumuyla ilgilenilmiştir. Bölüm 4.4 de, (2+1)-boyutta, kozmolojik sabitin 0 olduğu durumda tam çözüm elde edilmiştir. Yine (2+1)-boyutta, kozmolojik sabitin -1 olduğu durumda, çeşitli koordinat dönüşümleri yapılarak tam çözüm bulunmuş ve literatürdeki çözüm ve yaklaşımlarla karşılaştırılarak Bölüm 4.5 de sunulmuştur. Daha sonra, bu çözümlerin Killing denklemleri ve geodezik denklemleri sırasıyla Bölüm 4.6 ve 4.7 de incelenmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmanın sonuçları kısaca verilmiştir.

RICCI-RANK 1 LORENTZIAN MANIFOLDS EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS

SUMMARY

The studies done in this thesis can be presented in five main chapters.

In the first chapter, some general concepts and main materials used in thesis are introduced.

In the second chapter, firstly, Ricci tensor matrix is expressed with respect to $\{l, n, m, \bar{m}\}$ local base by using the Newman-Penrose formalism which consists of null 1-forms $\{l, n, m, \bar{m}\}$ for the local base of cotangent bundle. When the case $\Phi_{00} \neq 0$, the rank 1 condition of the Ricci tensor matrix is found. In Section 2.3, for the general type B warped product metric, when the second component of the manifold has the space of constant curvature and is embedded in R^3 , compact, connected and regular, it is shown that space-time must be spherically symmetric. When the Ricci tensor has rank 1 and the energy-momentum tensor is non-singular, it is shown that physical source must be a massless scalar field. Continuing in the same section, Newman-Penrose quantities are calculated by reducing the general type B warped metric to spherically symmetric metric. For the spherically symmetric metric, Einstein's field equations are obtained by using the Ricci tensor rank 1 condition. In Section 2.4, expressions of the energy conditions are expressed in terms of the Newman Penrose quantities by using the Ricci rank 1 classification and then, it is satisfied the energy conditions. Lastly, Petrov type and Plebanki classification are determined respectively for type B metric as D and $[2S_1 - S_2 - T]_{(111)}$.

In the third chapter, Einstein's field equations are studied independent of rank 1 condition via spherically symmetric metric coupled to a massless scalar field in (3+1)-dimensions. An "over-determined" original system is reduced to a second order normal system effectively for the variables $\mu = \frac{m}{r}$ and $y = \frac{\alpha}{ra}$ in time by using the variables a, α, r and μ as shown in Choptuik (W.M. Choptuik, "Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field", *Physical Review Letters* **70** (1993), 9.). The definitions of the "positive" and "negative" branches are given. In Section 3.4, for μ and y , the time independent (static) case is characterized by the scalar field may either $\phi_t = 0$ (positive brach) or $\phi_s = 0$ (negative brach) and static special solutions are given. In section 3.5, for the static case, which is called positive branch, both exact solution is obtained and by using the phase plane analysis, it is proved that the trivial solution $\mu = 0$ is a global attractor for the region $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < 1/2$. This exact solution is plotted in details and compared with the numerical solution. In Section 3.5, static case which is called negative branch is examined as a dynamical system and all of the solution curves are characterized and the non-vacuum point $(\frac{1}{4}, 0)$

is proved as a global attractor in the region $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < 1/2$. However, for the negative branch the period is calculated as 3.62 from the linearized part. The period calculation for the nonlinear system is done numerically by using the oscillations of the solution curves and a period is obtained close to 3.62. In Section 3.7, energy conditions are studied for the obtained solutions and then, negative branch is explained as a perfect fluid.

In the fourth chapter, firstly, (2+1)-dimensional manifold is defined as embedded to equatorial of the (3+1)-dimensional manifold. In Section 4.3, Einstein's field equations which contain both coupled massless scalar field and cosmological constant are obtained for the (2+1) and (3+1)-dimensions. It is reduced to static case when $\phi_t = 0$ or $\phi_s = 0$ for (2+1)-dimensions as the static case in (3+1)-dimensions, but we are only interested in $\phi_t = 0$ static case. In Section 4.4, in (2+1)-dimensions, exact solution is obtained in the case that cosmological constant is 0. As presented in Section 4.5, exact solution is found in (2+1)-dimensions for the cosmological constant is -1 by using the various coordinate transformations and then, compared to the solutions and approximation in literatures. Finally, Killing equations and geodesic equations of these solutions are examined in Section 4.6 and Section 4.7, respectively.

In the fifth chapter, conclusions of the study are given briefly.

1. ÖN HAZIRLIK

1.1. Giriş

M , herhangi bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerindeki metrik g olsun. (M, g) manifoldunda, g metriğiyle uyumlu ve burulmasız tek bir bağlantı vardır [1]. “Levi-Civita bağlantısı” olarak adlandırılan bu bağlantı, koordinat çatısında Christoffel sembolleri ile, bir hareketli çatıda ise dış türevler veya komütatörler ile hesaplanabilir.

Bağlantı kullanılarak eğrilik tensörü bileşenleri, buradan da Ricci tensörü bileşenleri elde edilir. Ricci tensörünün sıfır olduğu durumda, manifold “Ricci-düz” olarak adlandırılır. Bu koşul bize, metrik için homojen kısmi türevli diferansiyel denklemler verir.

g metriği, $(-, +, \dots, +)$ işaretine sahipse (M, g) Lorenz manifoldu olarak adlandırılır. Yarı-Riemann manifoldunda olduğu gibi, burada da metrikle uyumlu tek bir Levi-Civita bağlantısı vardır. Bağlantı, eğrilik ve Ricci tensörü hesapları aynı formüllerle yapılır. Biz bu tezde, Einstein alan denklemlerini Lorentz manifoldları üzerinde inceleyeceğiz.

Tez, 5 ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin genelinde kullanılacak birtakım temel kavramlarla birlikte ana materyaller tanıtılacaktır.

İkinci bölümde önce, Newman-Penrose formalizmi tanıtılacaktır. Bu metod, kotanjant demetin $\{l, n, m, \bar{m}\}$ şeklinde ışıksal bir yerel tabanı için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğerdir ve manifold üzerindeki spin yapısı ile alakalıdır [2],[3]-[5]. Literatürde, Newman-Penrose formalizmi Einstein alan denklemlerinin tam çözümlerinin bulunmasında [6],[7] kullanılmıştır. İkinci olarak, herhangi bir metrik için Ricci tensörünün matrisi, $\{l, n, m, \bar{m}\}$ tabanında ifade edilerek, $\Phi_{00} \neq 0$ durumu için rankının 1 olma koşulu bulunacaktır. Daha sonra, genel bir B tipi warped çarpım metrik için Newman-Penrose sistemi verilecektir. Bu sistemde, manifoldun ikinci kısmının sabit eğriliğe sahip, R^3 e gömülmüş,

kompakt, bağlantılı ve regüler olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Ricci tensörünün rankının 1 olması ve enerji-momentum tensörünün tekil olmaması durumunda fiziksel kaynağın kütesiz bir skaler alan olması gerektiği gösterilecektir. Genel B tipi warped çarpım metriktir küresel simetrik bir metriğe geçilecek ve alan denklemleri küresel simetrik metrik için, Ricci rank 1 koşulundan elde edilecektir. Yapılan Ricci rank 1 sınıflaması kullanılarak, enerji şartları Newman-Penrose nicelikleri türünden ifade edildikten sonra, şartların sağlandığı açıkça gösterilecektir. Son olarak bir B tipi metriğin Petrov tipinin D, Plebanski sınıfının $[2S_1 - S_2 - T]_{(111)}$ olduğu belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde, (3+1) boyutta Einstein alan denklemleri, küresel simetrik metriğe kütesiz skaler alanın kuple edilmesiyle çalışılacaktır. Problem, başlangıç değer problemi olarak Christodoulou [8], [9] tarafından ele alınmış ve analitik olarak çözümün varlığı ispat edilmiştir. Christodoulou'nun önerisi ile aynı problem nümerik olarak Choptuik [10] tarafından, skaler alan üzerine verilen başlangıç değerleri için nümerik olarak çalışılmış ve “eşik davranışının” keşfi olmuştur. Choptuik'in bu nümerik çalışmadan sonra, benzer nümerik çözümler diğer geometrilerde de (silindirik) çalışılmıştır [11]. Bu konuyla ilgili oldukça geniş bir literatür özeti Gundlach [12] tarafından yapılmıştır.

Öncelikle Bölüm 3.3 de, alan denklemleri efektif olarak zamana göre ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenecek ve “pozitif” ve “negatif” dal tanımları yapılacaktır. Bölüm 3.4 de, her iki dal için statik özel çözümler verilecektir. Daha sonra Bölüm 3.5 de, birinci çeşit statik durum olan pozitif dal için hem tam çözüm verilecek hem de faz uzayı analizi yapılacaktır.

Pozitif dal için tam çözüm, aslında 1948 yılında Fisher [13] tarafından elde edilmiştir. Detaylar için kaynak [14] ve [15] e bakılabilir. Daha sonraki yıllarda ise bu çözüm defalarca yeniden keşfedilmiştir [16]-[20]. Yakın bir zamanda ise, bu çözüm Newman-Penrose formalizmi kullanılarak elde edilmiştir [21].

Bizim negatif dal olarak adlandıracağımız ikinci çeşit statik durum ise, ilk olarak Wyman [20] tarafından yalnızca pertürbatif olarak çalışılmıştır. Bu tezde, Bölüm 3.5 de negatif dal için faz uzayı analizi yapılarak boşluk olmayan $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasının bir genel çekim noktası olduğu ispat edilmiş ve daha sonra, negatif

dal için period hesabı yapılmıştır. Bu bölümün sonunda, yapılan çözümlerin enerji şartları çalışılacak ve son olarak negatif dalın mükemmel bir akışkan olarak yorumlanabileceği gösterilecektir.

Tezin dördüncü bölümü, (2+1)-boyuttaki statik çözümlere ayrılmış olup, burada kütesiz bir skaler alan kuplajı ile birlikte kozmolojik sabit içeren denklemler çalışılmıştır.

(2+1)-boyutun gravitasyonda kullanılması 1963 [22] yılında başlamıştır. (2+1)-boyutta karadelikler yalnızca negatif kozmolojik sabitin varlığında oluşabilir. Bu yüzden karadelikler için en uygun uzay, içerdiği negatif kozmolojik sabit ile Anti de Sitter uzayıdır [12]. (2+1)-boyutta alan denklemlerinin lokal çözümü Anti de Sitter uzayına izometriktir ve sabit eğrilğe sahiptir [23]. (3+1)-boyuttaki eşik davranışı, (2+1)-boyutta nümerik ve analitik olarak çalışılmıştır [23], [24]-[26]. Pretorius-Choptuik in [23] (2+1)-boyutta Anti de Sitter uzay-zamanında yaptıkları çalışmadan sonra, Birkandan-Hortaçsu [27], Pretorius-Choptuik koordinatlarında statik halde, önce skaler alanın olmadığı durumda sonra da skaler alanın ilave edilmesi ile pertürbatif olarak çalışmışlardır.

Bölüm 4.2 de, (2+1)-boyutlu manifold, (3+1)-boyutlu manifoldun ekvatoruna gömülmesi olarak tanımlanacak ve Bölüm 4.3 de, (3+1) ve (2+1)-boyutlarında kozmolojik sabit içeren alan denklemleri verilecektir. (2+1)-boyutta kozmolojik sabitin sıfır olduğu durumda tam çözüm Bölüm 4.4 de verilip, kozmolojik sabitin -1 olduğu durumdaki tam çözüm koordinat dönüşümleri yapılarak Bölüm 4.5 de elde edilecektir. Daha sonra, çeşitli koordinat dönüşümlerine devam edilerek, literatürdeki çözüm ve yaklaşımlarla karşılaştırılacaktır. Son olarak, çözümlerin Killing denklemleri ve geodezik denklemleri sırasıyla Bölüm 4.6 ve 4.7 de incelenecektir.

Tezin 5. ve son bölümü ise, elde edilen sonuçların değerlendirilmesine ayrılmıştır.

1.2. Temel Tanımlar

Bu bölümde diferansiyellenebilen manifoldlarla ilgileneceğiz ve tez boyunca kullanacağımız bazı kavramları tanıtaacağız.

Tanım 1: K , reel veya kompleks sayılar cismi olsun. V , K cismi üzerinde bir

vektör uzayı olmak üzere, V üzerindeki lineer dönüşümlerin kümesine V nin **dual uzayı** denir ve V^* ile gösterilir.

Tanım 2: $V_1, V_2, \dots, V_p, K$ cismi üzerinde vektör uzayları olsunlar. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ kümesinden K ya tanımlı, her bir değişkenine göre lineer olan fonksiyona $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ üzerinde tanımlı bir **p -lineer** fonksiyon denir. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ üzerindeki p -lineer fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır [28].

Aynı anda sıfır olmayan $r \geq 0$ ve $s \geq 0$ tamsayıları için

$$\phi : (V)^r \times (V^*)^s \rightarrow K$$

şeklinde tanımlı çok-lineer ϕ fonksiyonuna (r, s) tipinde bir **tensör** denir. r ve s tamsayıları sırasıyla ϕ tensörünün **kovaryant** ve **kontravaryant** dereceleridir [28]. V vektör uzayı üzerindeki r kovaryant ve s kontravaryant tensörlerin kümesi $T_s^r(V)$ ile gösterilir ve vektör uzayı yapısına sahiptir. Notasyon olarak, çalışmamız boyunca, (r, s) ile r kovaryant, s kontravaryant tensörü göstereceğiz.

Tanım 3: $S(r), \{1, \dots, r\}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki permütasyon grubu olsun. $\sigma \in S(r)$ ise

$$\begin{aligned} \sigma : S(r) &\rightarrow S(r) \\ (1, \dots, r) &\mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \end{aligned}$$

ve σ tek ise $\text{sgn}\sigma = -1$, σ çift ise $\text{sgn}\sigma = 1$ şeklinde tanımlanır. $(V)^r$ üzerinde tanımlı ϕ tensörü için

$$\phi(X_1, \dots, X_r) = \phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})$$

oluyor ise **simetriktir** denir. ϕ tensörü için

$$\phi(X_1, \dots, X_r) = \text{sgn}\sigma \phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})$$

oluyor ise **alternedir** (veya anti-simetriktir) denir [28]. $T^r(V)$ üzerindeki bütün simetrik r -kovaryant tensörlerin kümesini $\Sigma^r(V)$ ile, bütün alterne r -kovaryant tensörlerin kümesini de $\wedge^r(V)$ ile göstereceğiz. $\Sigma^r(V)$ ve $\wedge^r(V)$, $T^r(V)$ vektör uzayının alt uzaylarıdır. r . dereceden bir alterne r -kovaryant tensöre **dış diferansiyel form** veya kısaca **r -form** denir [28]. $T^r(V)$ üzerinde,

$$\begin{aligned} A : T^r(V) &\rightarrow T^r(V) \\ \phi &\mapsto A\phi \end{aligned}$$

$$(A\phi)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \text{sgn} \sigma \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

şeklinde tanımlı dönüşüme **alterneleyen** dönüşüm denir [28].

Tanım 4: $V_1, V_2, \dots, V_r$ ve $W_1, W_2, \dots, W_s$, K cismi üzerindeki vektör uzayları, f ve g , sırasıyla $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ ve $W_1 \times W_2 \times \dots \times W_s$ üzerindeki r -lineer ve s -lineer fonksiyonlar olsunlar. f ve g nin **tensörel çarpımı** $f \otimes g$,

$$\begin{aligned} f \otimes g : \quad & V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \times W_1 \times W_2 \times \dots \times W_s \rightarrow K \\ & (v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s) \mapsto (f \otimes g)(v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s) \\ & (f \otimes g)(v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s) = f(v_1, v_2, \dots, v_r)g(w_1, w_2, \dots, w_s) \end{aligned}$$

ile tanımlanır ve $(r + s)$ -lineer bir fonksiyondur.

Tanım 5: ϕ ve φ , sırasıyla r ve s dereceli iki anti simetrik tensör olmak üzere, ϕ ve φ anti simetrik tensörlerinin **dış çarpımları** $\phi \wedge \varphi$,

$$\begin{aligned} \phi \wedge \varphi : \quad & \wedge^r(V) \times \wedge^s(V) \rightarrow \wedge^{r+s}(V) \\ & (\phi, \varphi) \mapsto \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\phi \otimes \varphi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\phi \wedge \varphi = (-1)^{rs} \varphi \wedge \phi$ şartını sağlar. [28].

Tanım 6: Diferansiyellenebilen bir M manifoldu üzerinde

$$v : C^\infty(M, p, R) \rightarrow R$$

şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları gerçekleyen bir dönüşüme, p noktasında tanımlanan **teğet vektör** denir.

1. $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$ $a, b \in R$ ve $f, g \in C^\infty(M)$ (lineerlik),
2. $v_p(fg) = v_p(f)g + v_p(g)f$ (Leibniz kuralı).

Tanım 7: Diferansiyellenebilen bir M manifoldunun p noktasındaki teğet vektörlerinin kümesine **teğet uzay** denir ve $T_p M$ ile gösterilir. $T_p M$ teğet uzayının dual uzayına M nin p noktasındaki **kotanjant uzayı** denir ve $T_p^* M$ ile gösterilir.

Tanım 8: M manifoldunun **teğet demeti** TM ile gösterilir ve

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{v \in T_p M : p \in M\}$$

şeklinde tanımlanır.

Diferansiyellenebilen bir M manifoldu üzerindeki v **vektör alanı**, her $p \in M$ noktasına bir v_p teğet vektörü karşılık getiren

$$\begin{aligned} v : M &\rightarrow T_p M \\ p &\mapsto v(p) = v_p \in T_p M \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşümdür. M manifoldu üzerindeki **diferansiyellenebilen vektör alanlarının** kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Tanım 9: M , diferansiyellenebilen bir manifold olmak üzere r -formu $(r + 1)$ -forma dönüştüren ve aşağıdaki şartları gerçekleyen

$$d : \wedge(M) \rightarrow \wedge(M)$$

dönüşümüne **dış türev** dönüşümü denir.

1. $f \in \wedge^0(M) = C^\infty(M)$, $d(f) = df$
2. $\phi \in \wedge^r(M)$ ve $\varphi \in \wedge(M)$ olmak üzere,

$$d(\phi \wedge \varphi) = d\phi \wedge \varphi + (-1)^r \phi \wedge d\varphi,$$

3. $d(d) = d^2 = 0$.

1.3. Riemann (Yarı-Riemann) Geometrisi

1.3.1. Metrik tensör

Bir g **Riemann metriği**, diferansiyellenebilen bir M manifoldu üzerinde tanımlanmış simetrik, pozitif tanımlı $(2,0)$ -tensör alanıdır. Riemann metriği, $T_p M$ teğet uzayında

$$\langle X, Y \rangle := g(X, Y), \quad X, Y \in T_p M$$

şeklinde bir iç çarpım ile verilir. Bu taktirde

$$\langle X, Y \rangle : T_p M \times T_p M \rightarrow R$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar.

1. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ (*Simetrik*)

2. $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle, \quad \langle aX, Y \rangle = a\langle X, Y \rangle, \quad a \in R \quad (\text{İki-lineer})$
3. $X \neq 0 \Rightarrow \langle X, X \rangle > 0 \quad (\text{Pozitif tanımlı})$
4. X ve Y , A bölgesinde C^∞ vektör alanları olmak üzere $\langle X, Y \rangle_p = \langle X_p, Y_p \rangle$, A bölgesinde C^∞ bir fonksiyondur.

Bir diferansiyellenebilen M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanmış ise (M, g) ye bir **Riemann manifoldu** denir. 3. şart yerine aşağıda verilecek 5. şart kullanılırsa, g ye bir **Yarı-Riemann metriği**, metriğin tanımlandığı diferansiyellenebilen manifolda da **Yarı-Riemann manifoldu** denir.

5. Her X için $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \quad (\text{Non-degenerate})$

Riemann metriği $(+, +, \dots, +)$ şeklinde pozitif işarete sahiptir. Yarı-Riemann metriği ise, $(-, -, \dots, +, \dots, +)$ şeklinde keyfi işarete sahiptir.

Lorentz metriği, metrik işaretinin $(-, +, \dots, +)$ olduğu özel durumdur. Üzerinde g Lorentz metriğiyle tanımlanmış diferansiyellenebilen manifolda **Lorentz manifoldu** denir. Lorentz manifoldunun teğet uzayının elemanları 3 gruba ayrılır [32].

1. $g(X, X) > 0 \rightarrow X$ uzaysal,
2. $X \neq 0$ ve $g(X, X) = 0 \rightarrow X$ ışıksal,
3. $g(X, X) < 0 \rightarrow X$ zamansal.

M diferansiyellenebilen bir manifold, $\{x^1, \dots, x^n\}$ de $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. $1 \leq \mu, \nu \leq n$ olmak üzere $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, U üzerindeki taban vektörleri olsun. U üzerindeki g metrik tensörünün yerel bileşenleri $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$ şeklinde verilir. X ve Y , M üzerindeki iki vektör alanı olsun. X ve Y nin ∂_μ yerel tabanına göre yerel bileşenleri X^μ ve Y^ν olmak üzere $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu$ şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(X, Y) &= \langle X, Y \rangle \\
&= g(X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu) \\
&= X^\mu Y^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\
&= X^\mu Y^\nu \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle
\end{aligned}$$

$$= g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

elde edilir. M manifoldu üzerindeki metrik form yerel koordinatlarda

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

şeklinde ifade edilir.

1.3.2. Bağlantı

Bir diferansiyellenebilen M Riemann manifoldu üzerinde bir bağlantı

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

şeklinde aşağıdaki şartları gerçekleyen bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned} \nabla_{fX_1+gX_2} Y &= f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad f, g \in C^\infty(M), \quad X_1, X_2, Y \in \chi(M) \\ \nabla_X (aY_1 + bY_2) &= a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad a, b \in R, \quad X, Y_1, Y_2 \in \chi(M) \\ \nabla_X (fY) &= (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad f \in C^\infty(M), \quad X, Y \in \chi(M). \end{aligned}$$

1.3.3. Levi-Civita bağlantısı

∇ bağlantısı için **burulma tensörü**, $(2,1)$ tipinde bir tensör olup, $X, Y \in TM$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T : \quad TM \times TM &\longrightarrow TM \\ (X, Y) &\longrightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $T = 0$ ise ∇ bağlantısına **burulmasız** veya **simetrik bağlantı** denir.

Bir M manifoldu üzerinde bir g metriği tanımlanmış ise ∇ bağlantısı ve g metriğinin uyumluluğu X bir tanjant vektörü olmak üzere

$$\nabla_X g(U, V) = g(\nabla_X U, V) + g(U, \nabla_X V)$$

ile verilir. Bir g Riemann (Yarı-Riemann) metriği için, metrikle uyumlu tek bir burulmasız bağlantı vardır. Buna **Levi-Civita bağlantısı** denir [1].

Yerel koordinatlarda, Levi-Civita bağlantısı, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ şeklindeki ikinci çeşit Christoffel sembolleri cinsinden verilebilir. Bunun için, M bir manifold, ∇ ise M üzerindeki

bağlantı olsun. Christoffel sembolleri, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ için

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \sum_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho$$

şeklinde tanımlanır. Bağlantı burulmasız ise,

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = [\partial_\mu, \partial_\nu]$$

olur. Yerel koordinatlarda

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$$

olup, buradan $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu$ ifadesi yazılır. Bu ise, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ şartını gerektirir.

∇ bağlantısı ve g metriğinin uyumluluğundan

$$\partial_\mu \langle \partial_\nu, \partial_\sigma \rangle + \partial_\nu \langle \partial_\mu, \partial_\sigma \rangle - \partial_\sigma \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = 2 \langle \partial_\sigma, \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \rangle$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\partial_\mu (g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu (g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (g_{\mu\nu}) = 2 \sum_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho}$$

elde edilir. Son ifade, iki yandan $g_{\sigma\rho}$ nın tersi ile çarpılırsa, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ **Christoffel sembolleri** yerel koordinatlarda

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^n g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$$

şeklinde yazılır [30].

1.3.4. Killing denklemi

M bir Riemann (Yarı-Riemann) manifoldu ve $X \in \chi(M)$ olsun. $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ikinci çeşit Christoffel sembolü olmak üzere, Killing denklemi

$$\partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda = 0$$

şeklinde yazılır [32].

1.3.5. Eğrilik tensörü

M bir manifold olsun. g , M üzerinde bir metrik ve ∇ da bir Levi-Civita bağlantısı olsun. $X, Y, Z \in T_p M$ olmak üzere, Riemann eğrilik tensörü (3,1) tipinde bir tensör olup

$$\begin{aligned} R : T_p M \times T_p M \times T_p M &\longrightarrow T_p M \\ (X, Y, Z) &\longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğrilik tensörünün, yerel koordinatlardaki ifadesi

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \sum_{\alpha}(\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^{\sigma})$$

şeklinde [30]. $R_{\sigma\mu\nu\rho} = g_{\sigma\alpha}R_{\mu\nu\rho}^{\alpha}$ tensörü aşağıdaki simetri özelliklerini sağlar.

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = -R_{\mu\sigma\nu\rho},$$

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = -R_{\sigma\mu\rho\nu},$$

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\sigma\mu},$$

$$R_{\nu\nu\sigma\rho} = R_{\mu\nu\rho\rho} = 0,$$

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} + R_{\sigma\nu\rho\mu} + R_{\sigma\rho\mu\nu} = 0.$$

1.3.6. Ricci tensörü ve Ricci skaleri

$X \in T_p M$ olsun. $e_1 = X$ olacak şekilde bir $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ ortonormal tabanı seçilirse, Ricci tensörü

$$R(X, X) = \sum_{k=1}^n R(e_k, e_1, e_1, e_k) = \sum_{k=2}^n K(e_1, e_k)$$

şeklinde ifade edilir. Geometrik olarak, Ricci tensör $R(X, X)$, $X \in T_p M$ ve ortonormal tabanın diğer elemanları tarafından gerilen düzlemlerin kesitsel eğriliklerinin toplamıdır. Yerel koordinatlarda

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer olarak, Skaler eğrilik

$$R = R_j^j = \sum_{j=1}^n R(e_j, e_j) = \sum_{j,k=1}^n R(e_k, e_j, e_j, e_k) = \sum_{j \neq k}^n K(e_j, e_k)$$

ile verilir. Geometrik olarak, skaler eğrilik R , ortonormal taban elemanlarının bir çifti tarafından gerilen düzlemlerin kesitsel eğriliklerinin toplamıdır. Yerel koordinatlarda

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

dır.

1.4. B Tipi Warped Çarpım Manifoldlar

Bu alt bölümde, warped çarpım manifoldların bir alt sınıfı olan, B tipi warped çarpım manifoldları kısaca tanıtacağız. Warped çarpım manifoldlar, özel bir metrik formuna sahip çarpım manifoldlardır [33]. M_1 ve M_2 iki manifold olsun. $\{x^\mu\}$, M_1 manifoldu üzerindeki yerel koordinatlar, $\{y^a\}$ da M_2 manifoldu üzerindeki yerel koordinatlar olsun. M_1 ve M_2 manifoldları üzerindeki metrikler de sırasıyla g ve h olsun. $f > 0$, M_1 manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, $M = M_1 \times_f M_2$ çarpım manifoldu üzerindeki yay elemanı

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu + f(x^\alpha)h_{ab}(y^c)dy^a dy^b$$

şeklinde tanımlanır. Bu yay elemanına M manifoldu üzerindeki warped çarpım metriği, bu metrikle birlikte M manifolduna da warped çarpım manifoldu denir. f 'ye de warped fonksiyon adı verilir. Yukarıdan da görüleceği üzere, uygun bir yerel tabanda $\tilde{g}$ warped metrik tensörü,

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & fh_{ab} \end{pmatrix}$$

şeklinde blok köşegen bir matrisle ifade edilebilir. Birinci blok matrisin elemanları, birinci grup koordinatlara bağlı iken, ikinci blok matris elemanları, f fonksiyonu ile çarpılan diğer grup koordinatlarına bağlıdır.

Genel görelilikte Robertson-Walker, Schwarzschild, ve Reissner-Nordstrom çözümleri çok iyi bilinen warped çarpım uzay-zamanlarıdır. Bütün küresel simetrik $M = M_1 \times_f M_2$ uzay-zamanları warped çarpım uzay-zamanlarıdır. Burada, M_1 Lorentz manifoldu, M_2 ise sabit eğriliğe sahiptir [34]. Warped çarpım manifoldlar veya warped çarpım metriklerle ilgili daha ayrıntılı bilgi için O'Neil [33] e bakılabilir.

4-boyutlu M warped çarpım manifoldlarının sınıflaması, Carot ve Costa [34] tarafından, M_1 ve M_2 manifoldlarının boyutlarına göre yapılmıştır. Eğer, M manifoldu $1 + 3$ ($boyut(M_1) = 1$, $boyut(M_2) = 3$) şeklinde ayrıştırılmış ise, M warped çarpım manifolduna A_1 tipinden warped çarpım manifold denir [34]. A_1 tipinden warped çarpım metriği, $\mu = 1$, $a, b = 2, 3, 4$ olmak üzere

$$ds^2 = g_{\mu\mu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\mu + f(x^\alpha)h_{ab}(y^c)dy^a dy^b$$

şeklindedir. Bir başka ifadeyle, warped çarpım metriği için yukarıda verilen blok köşegen $\tilde{g}$ matrisi, bir tane 1 lik bloktan bir tane de 3 lük bloktan oluşur. İkinci olarak, M manifoldu $3 + 1$ ($boyut(M_1) = 3, boyut(M_2) = 1$) şeklinde ayrışabilir. Bu türden bir ayrışımaya sahip warped çarpım manifolda, A_2 tipinden warped çarpım manifold denir [34]. A_2 tipinden warped çarpım metriği, $\mu, \nu = 1, 2, 3, a = 4$ olmak üzere

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu + f(x^\alpha)h_{aa}(y^c)dy^a dy^a$$

şeklindedir. Üçüncü olarak, M manifoldu $2 + 2$ ($boyut(M_1) = boyut(M_2) = 2$) şeklinde ayrışabilir. Bu türden bir ayrışımaya sahip warped çarpım manifolda, B tipinden warped çarpım manifold denir [34]. B tipinden warped çarpım metriği, $\mu, \nu = 1, 2, a, b = 3, 4$ olmak üzere

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu + f(x^\alpha)h_{ab}(y^c)dy^a dy^b$$

şeklindedir. Biz bu tezde, M_1 2-boyutlu Lorentz manifoldu, M_2 2-boyutlu Riemann manifoldu ve $f > 0$, M_1 manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, $M = 2 + 2$ şekilde ayrıştırılmış B tipi warped çarpım bir manifoldla ilgileneceğiz.

1.5. Adi Diferansiyel Denklemler Sistemleri: Faz Düzlemi Analizi

Bu bölümde, R^2 de lineer sistemler için faz uzayı analizini vereceğiz . Bunun için A , 2×2 tipinde sabit bir matris, $x \in R^2$ olmak üzere

$$x' = Ax \tag{1.1}$$

şeklindeki lineer adi difreansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada, “ $'$ ” ile t 'ye göre türev gösterilmektedir. A matrisi, tekil olmayan bir P matrisi için $B = P^{-1}AP$ şeklinde benzer bir matrise dönüştürülebilir. $x = Py$ lineer dönüşümü altında B matrisi için lineer denklem sistemi

$$y' = By \tag{1.2}$$

şeklinde yazılır [35]. (1.1) ile verilen lineer sistem için faz uzayı analizini (1.2) sisteminde verilen B matrisinin durumlarına göre inceleyeceğiz.

I. Durum: $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda (1.2) ile verilen lineer sistemi orijinde bir “semer” noktasına sahiptir. Bu durumda, A matrisinin zıt işaretli iki reel özdeğeri vardır.

II. Durum: $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \leq \mu < 0$ veya $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0$

ile verilmiş olsun. Bu durumda (1.2) ile verilen sistem için orijin bir “kararlı düğüm” noktasıdır. $\lambda \geq \mu \geq 0$ ise “kararsız düğüm” noktasıdır. $\lambda = \mu$ olması durumunda düğüm noktasına “hastır”, diğer durumlarda ise “has olmayan” düğüm noktasıdır denir. A matrisi ise aynı işarete sahip iki reel özdeğere sahiptir.

III. Durum: $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a < 0$

formunda verilmiş ise, (1.2) sistemi için, orijin “kararlı odak” noktasıdır. $a > 0$ olması durumunda ise, orijin “kararsız odak” noktasıdır. A matrisi, reel kısmı sıfır olmayan kompleks eşlenik özdeğerlere sahiptir.

IV. Durum: $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

formunda ise, (1.2) sistemi orijinde bir “merkeze” sahiptir. A matrisi, tamamen imajiner olan kompleks eşlenik özdeğerlere sahiptir.

Tanım: A matrisi yukarıda verilen B matrisinin sırasıyla I, II, III, IV durumlarına benzerse, (1.1) ile verilen lineer denklem sistemi orijinde bir semer, düğüm, odak veya merkeze sahiptir denir [35].

A matrisinin determinantının sıfırdan farklı olduğu durumda, lineer sistemin ne tür bir noktaya sahip olduğu kolay bir şekilde aşağıdaki teoremden de belirlenebilir [35].

Teorem 1.1. *Lineer denklem sistemi*

$$\dot{x} = Ax$$

şeklinde verilmiş olsun. A matrisinin determinantını ve izini sırasıyla δ ve τ ile gösterelim. Bu durumda,

- i) $\delta < 0$ ise, $\dot{x} = Ax$ lineer sistemi orijinde bir semer noktasına sahiptir.
- ii) $\delta > 0$ ve $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ ise, $\dot{x} = Ax$ lineer sistemi orijinde bir düğüm noktasına sahiptir. $\tau < 0$ ise, bu noktaya kararlı, $\tau > 0$ ise de kararsız düğüm noktası denir. Burada, $\tau^2 \geq 4 \mid \delta > 0, \tau \neq 0$ dır.
- iii) $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ ve $\tau \neq 0$ ise, $\dot{x} = Ax$ lineer sistemi orijinde bir odak noktasına sahiptir. $\tau < 0$ ise, odak noktası kararlıdır, $\tau > 0$ ise de kararsızdır.
- iv) $\delta > 0$ ve $\tau = 0$ ise, $\dot{x} = Ax$ lineer sistemi orijinde bir merkeze sahiptir.

İspat. A matrisinin özdeğerleri λ ile gösterilirse, karakteristik denklemi $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$ şeklinde yazılır. Özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

ile verilir.

- i) Eğer, $\delta < 0$ ise, A matrisinin farklı işaretli iki reel özdeğeri vardır.
- ii) Eğer, $\delta > 0$ ve $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ ise, A matrisinin aynı işaretli iki reel özdeğeri vardır.
- iii) Eğer, $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ ve $\tau \neq 0$ ise, A matrisinin kompleks eşlenik iki özdeğeri, $\lambda = a \pm ib$ vardır ve $a = \tau/2$ için III. durumda verilen matrise benzerdir.
- iv) Eğer, $\delta > 0$ ve $\tau = 0$ ise, A matrisinin sadece imajiner olan kompleks eşlenik iki özdeğeri vardır. •

1.6. Adi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü

Bu kısımda adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde kullanılan metodlardan biri olan “dört adım Runge-Kutta” yöntemini kısaca vereceğiz. Bu yöntemle; $f, [x_0, x_N]$ aralığında tek bir çözüme sahip olan bir fonksiyon, h adım aralığı, N de adım sayısı olmak üzere, $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ için

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

şeklinde verilen başlangıç değer problemi sayısal olarak çözülebilir. $O(h^2)$ yerel kesim hatasına sahip olan dört adım Runge-Kutta yöntemi, $n = 0, 1, \dots, N - 1$

için,

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0, \\
k_1 &= hf(x_n, y_n), \\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf(x_{n+1}, y_n + k_3), \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

şeklinde verilir [36]. Tez kapsamında yapılan nümerik çözümlerde, bu metotla birlikte Matlab yazılımının “Ode 45” ve Ode 23” gibi nümerik paketleri kullanılmıştır.

1.7. Anti de Sitter Uzayı

Anti de Sitter uzayı, Einstein alan denklemlerinin negatif işaretli kozmolojik sabit içeren bir çözümüdür [37]. R^{p+3} te, $p + 2$ boyutlu AdS_{p+2} uzay- zamanı,

$$x_0^2 + x_{p+2}^2 - \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 = L^2$$

şeklinde bir hiperboloid ile gösterilebilir. Metrik ise,

$$ds^2 = -dx_0^2 - dx_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dx_i^2$$

şeklinde verilebilir. Burada,

$$\begin{aligned}
x_0 &= L \cosh \chi \cos \tau, \\
x_{p+2} &= L \cosh \chi \sin \tau, \\
x_i &= L \sinh \chi \Omega_i, \\
\sum_{i=1}^{p+1} \Omega_i^2 &= 1
\end{aligned}$$

dönüşümleri yukarıdaki metrik için kullanılırsa,

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2 \chi d\tau^2 + d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2 \right)$$

elde edilir. $0 \leq \chi$ ve $0 \leq \tau \leq 2\pi$ için verilen dönüşümler hiperboloidi bir defa tarar. Bu yüzden de (τ, χ, Ω_i) Anti de Sitter uzay-zamanın global koordinatlarıdır [37].

Bu tez kapsamında, Bölüm 4 de, $(2+1)$ -boyutta Anti de Sitter uzay-zamanıyla ilgileneceğiz. $(2+1)$ -boyutta karadelikler yalnızca negatif kozmolojik sabitin varlığında oluşabilmektedir [12]. Bu yüzden karadelikler için en uygun uzay, içerdiği negatif kozmolojik sabit ile Anti de Sitter uzayıdır [12]. $(2+1)$ -boyutta alan denklemlerinin yerel çözümü Anti de Sitter uzayına izometriktir ve sabit eğrilige sahiptir [23].

2. NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİ: RİCCİ TENSÖRÜ İÇİN RANK 1 OLMA KOŞULU

2.1. Giriş

Bu bölümde, ilk olarak Einstein alan denklemlerinin çözümlerinde kullanılan ve kotanjant demetin $\{l, n, m, \bar{m}\}$ şeklinde ışıksal bir yerel tabanı için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğer olan, Newman-Penrose formalizmi [2] tanıtılarak, spin katsayıları, Weyl tensörü bileşenleri ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri için üç farklı grup ayar dönüşümünün açık ifadesi verildi [40].

Herhangi bir metrik için Ricci tensörünün yukarıdaki tabana göre matrisi, Newman-Penrose büyüklükleri cinsinden ifade edildi. $\Phi_{00} \neq 0$ durumu için rankın 1 olma koşulu bulundu. Daha sonra genel bir B tipi warped çarpım metrik için Newman-Penrose büyüklükleri açık olarak hesaplandıktan sonra, ayar dönüşümlerinden ikincisi kullanılarak, Newman-Penrose sistemi B tipi warped çarpım metrik için verildi. Bu sistemde, manifoldun ikinci kısmının, sabit eğriliğe sahip, R^3 e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Ricci tensörünün rankının 1 olması ve enerji-momentum tensörünün tekil olmaması durumunda, fiziksel kaynağın kütlesiz bir skaler alan olması gerektiği gösterildi.

Genel B tipi warped çarpım metriktir, koordinatlar ve metrik katsayılar özel seçilerek, küresel simetrik metriğe geçildi ve Newman-Penrose büyüklükleri hesaplandı. Einstein alan denklemleri, Ricci tensörü için rank 1 koşulu kullanılarak elde edildi. Ricci rank 1 sınıflaması kullanılarak, enerji şartlarının ifadesi Newman-Penrose nicelikleri cinsinden ifade edildi ve şartların sağlandığı açıkça gösterildi. Bir B tipi warped çarpım metriğin Petrov sınıfının D, Plebanski sınıfının $[2S_1 - S_2 - T]_{(111)}$ olduğu belirlendi.

2.2. Newman-Penrose Formalizmi

Burada, genel görelilikte önemli bir yere sahip olan Newman-Penrose

formalizmini vereceğiz. Bu bölümde orijinal makaledeki notasyon kullanılacaktır. Newman-Penrose formalizmi, kotanjant demetin $\{l, n, m, \bar{m}\}$ şeklinde ışıksal bir yerel tabanı (yerel kesiti) için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğer olup, manifold üzerindeki spin yapısı ile alakalıdır [2], [3]-[5].

M manifoldunun kotanjant demetinin ışıksal bir yerel tabanını $\{l, n, m, \bar{m}\}$ ile gösterelim. Bu yerel taban, “null tetrad” olarak da isimlendirilmektedir. Bu 1-formların sıfırdan farklı iç çarpımları

$$(l, n) = 1, \quad (m, \bar{m}) = -1 \quad (2.1)$$

ise, manifold üzerindeki yay elemanı

$$ds^2 = l \otimes n + n \otimes l - m \otimes \bar{m} - \bar{m} \otimes m \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır [2]. $\{l, n, m, \bar{m}\}$ yerel tabanına dual olan yerel tanjant vektör alanlarını

$$\{D, \Delta, \delta, \bar{\delta}\} \quad (2.3)$$

ile gösterelim. Bu yerel tanjant ve kotanjant tabanlar arasındaki bağıntılar

$$\Delta(l) = D(n) = 1, \quad \bar{\delta}(m) = \delta(\bar{m}) = -1 \quad (2.4)$$

şeklindedir. Dış türev operatörünün herhangi bir fonksiyon üzerine etkisi ise

$$d\varphi = (\Delta\varphi)l + (D\varphi)n - (\delta\varphi)\bar{m} - (\bar{\delta}\varphi)m.$$

ile tanımlanır [38].

Şimdi Newman-Penrose formalizminde hareketli çatı ile spinör yapısı arasındaki ilişkiyi tanımlayalım. M bir 4-manifold ve E , M üzerindeki bir spinör demeti olsun. Spin demetin yerel bir tabanını

$$s = (o, \iota)$$

ile gösterelim. Spinör demeti ve kotanjant demetinin yerel tabanları arasında

$$l = o \otimes \bar{o}, \quad n = \iota \otimes \bar{\iota}, \quad m = o \otimes \bar{\iota}, \quad \bar{m} = \iota \otimes \bar{o}$$

bağıntıları vardır. Bu ilişkiler, matris formunda

$$S = \begin{pmatrix} l & m \\ \bar{m} & n \end{pmatrix} = s \otimes \bar{s}^t = \begin{pmatrix} o \\ \iota \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{o} & \bar{\iota} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir [3].

E spinör demeti üzerindeki bir d^E bağlantısı, $Sl(2, C)$ değerli bir Γ 1-formu ile

$$d^E s = \Gamma s$$

şeklinde tanımlanır. Yerel olarak, d^E bağlantısı

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & -\Gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

matrisi ile temsil edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \gamma l + \epsilon n - \alpha m - \beta \bar{m}, \\ \Gamma_1 &= -\tau l - \kappa n + \rho m + \sigma \bar{m}, \\ \Gamma_2 &= \nu l + \pi n - \lambda m - \mu \bar{m} \end{aligned}$$

olup, $\{\gamma, \epsilon, \alpha, \beta, \tau, \kappa, \rho, \sigma, \nu, \pi, \lambda, \mu\}$ skalerleri Newman-Penrose spin katsayıları olarak adlandırılır [2].

Kotanjant demeti ve spinör demetinin yerel tabanları arasındaki ilişkiden hareketle, kotanjant uzayı üzerindeki Levi-Civita bağlantısı

$$dS = \Gamma S - S \Gamma^\dagger \quad (2.6)$$

ile elde edilebilir [4]. Spinör demeti veya kotanjant demeti üzerindeki bu bağlantı için Ω eğrilik 2-formu

$$\Omega = d\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma \quad (2.7)$$

ile tanımlanır. Bu son ifadenin dış türevi alınarak da

$$d\Omega + \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega = 0 \quad (2.8)$$

Bianchi özdeşlikleri elde edilir. Yukarıdaki yerel tabanlara göre $Sl(2, C)$ değerli eğrilik 2-formu Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

şeklindedir. Ω_i , $i = 0, 1, 2$ 2-formlarının parametrizasyonu aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki denklemlerde ve daha sonraki bölümlerde, dış çarpım işareti ihmal edilecektir.

$$\Omega_0 = (-\Psi_2 - \Phi_{11} + \Lambda)ln + \Psi_3lm + \Phi_{12}l\bar{m} - \Phi_{10}nm - \Psi_1n\bar{m} + (\Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda)m\bar{m},$$

$$\Omega_1 = (\Psi_1 + \Phi_{01})ln - (\Psi_2 + 2\Lambda)lm - \Phi_{02}l\bar{m} + \Phi_{00}nm + \Psi_0n\bar{m} + (-\Psi_1 + \Phi_{01})m\bar{m},$$

$$\Omega_2 = -(\Psi_3 + \Phi_{21})ln + \Psi_4lm + \Phi_{22}l\bar{m} - \Phi_{20}nm - (\Psi_2 + 2\Lambda)n\bar{m} + (\Psi_3 - \Phi_{21})m\bar{m}$$

şeklinde parametrize edilir. Bu 2-formun matris gösterimi de aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \Omega = & \begin{bmatrix} -(\Psi_2 + 2\Lambda) - (\Phi_{11} - 3\Lambda) & \Psi_1 + \Phi_{01} \\ -(\Psi_3 + \Phi_{21}) & (\Psi_2 + 2\Lambda) + (\Phi_{11} - 3\Lambda) \end{bmatrix} ln \\ & + \begin{bmatrix} (\Psi_2 + 2\Lambda) - (\Phi_{11} + 3\Lambda) & -\Psi_1 + \Phi_{01} \\ (\Psi_3 - \Phi_{21}) & -(\Psi_2 + 2\Lambda) + (\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{bmatrix} m\bar{m} \\ & + \begin{bmatrix} \Psi_3 & -(\Psi_2 + 2\Lambda) \\ \Psi_4 & -\Psi_3 \end{bmatrix} lm + \begin{bmatrix} -\Psi_1 & \Psi_0 \\ -(\Psi_2 + 2\Lambda) & \Psi_1 \end{bmatrix} n\bar{m} \\ & + \begin{bmatrix} \Phi_{12} & -\Phi_{02} \\ \Phi_{22} & -\Phi_{12} \end{bmatrix} l\bar{m} + \begin{bmatrix} -\Phi_{10} & \Phi_{00} \\ -\Phi_{20} & \Phi_{10} \end{bmatrix} nm. \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde, Weyl tensörü bileşenleri $\{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$, izsiz Ricci tensörü bileşenleri $\{\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}\}$, eğrilik skaleri ise $\Lambda = \frac{R}{24}$ ile gösterilmektedir.

Spin katsayılarının kotanjant demetinin yerel tabanının dış türevleri cinsinden ifadesi aşağıdadır [39].

$$dl = -(\epsilon + \bar{\epsilon})ln + (\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})lm + (\bar{\alpha} + \beta - \tau)l\bar{m} - \bar{\kappa}nm - \kappa n\bar{m} + (\rho - \bar{\rho})m\bar{m},$$

$$dn = -(\gamma + \bar{\gamma})ln + \nu lm + \bar{\nu}l\bar{m} + (\pi - \alpha - \bar{\beta})nm + (\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta)n\bar{m} + (\mu - \bar{\mu})m\bar{m},$$

$$dm = -(\tau + \bar{\pi})ln + (\bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})lm + \bar{\lambda}l\bar{m} + (\epsilon - \bar{\epsilon} - \rho)nm - \sigma n\bar{m} - (\bar{\alpha} - \beta)m\bar{m}.$$

Spin katsayıları alternatif olarak tanjant demetinin yerel tabanının komütatörleri ile de verilebilir [2].

$$(\Delta D - D\Delta) = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta,$$

$$(\delta D - D\delta) = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta,$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta) = -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta,$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta}) = (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta} - \alpha)\delta.$$

Eğrilik 2-formunun sağladığı matris denklemi Ω 'nın bileşenleri ve spin katsayılar cinsinden açıkça yazıldığında Newman-Penrose denklemleri olarak bilinen ve

aşağıda verilen 18 kompleks denklem elde edilir [7].

$$\begin{aligned}
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, \\
D\sigma - \delta\kappa &= (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0, \\
D\tau - \Delta\kappa &= (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01}, \\
D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi + \Phi_{10}, \\
D\beta - \delta\epsilon &= (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1, \\
D\gamma - \Delta\epsilon &= (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa \\
&\quad + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \\
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda + \Phi_{20}, \\
D\mu - \delta\pi &= \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \\
D\nu - \Delta\pi &= (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21}, \\
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4, \\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01}, \\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) \\
&\quad - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, \\
\delta\nu - \Delta\mu &= \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22}, \\
\delta\gamma - \Delta\beta &= (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}, \\
\delta\tau - \Delta\sigma &= \mu\sigma + \bar{\lambda}\rho + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, \\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki 36 reel denklemden 10 tanesi Weyl tensörü bileşenlerini, 10 tanesi Ricci tensörü bileşenlerini belirlerken, geriye kalan 16 denklem spin katsayıları arasında birtakım bağıntılar verir. Spin katsayıları bir metrikten elde edilmiş ise bu denklemler özdeş olarak sağlanır. Bianchi özdeşlikleri ise aşağıdaki denklemlerle verilir [7].

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\Psi_0 - D\Psi_1 + D\Phi_{01} - \delta\Phi_{00} &= (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 \\
&\quad + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00} + 2(\epsilon + \bar{\rho})\Phi_{01}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} \\
& -\bar{\kappa}\Phi_{02}, \\
\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 + D\Phi_{02} - \delta\Phi_{01} &= (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 \\
& + (2\epsilon - 2\bar{\epsilon} + \bar{\rho})\Phi_{02} + 2(\bar{\pi} - \beta)\Phi_{01} \\
& + 2\sigma\Phi_{11} - 2\kappa\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{00}, \\
\bar{\delta}\Psi_3 - D\Psi_4 + \bar{\delta}\Phi_{21} - \Delta\Phi_{20} &= (4\epsilon - \rho)\Psi_4 - 2(2\pi + \alpha)\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 \\
& + (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\Phi_{20} + 2(\bar{\tau} - \alpha)\Phi_{21} \\
& + 2\lambda\Phi_{11} - 2\nu\Phi_{10} - \bar{\sigma}\Phi_{22}, \\
\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 + \bar{\delta}\Phi_{22} - \Delta\Phi_{21} &= (4\beta - \tau)\Psi_4 - 2(2\mu + \gamma)\Psi_3 + 3\nu\Psi_2 \\
& + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\alpha)\Phi_{22} + 2(\gamma + \bar{\mu})\Phi_{21} \\
& + 2\lambda\Phi_{12} - 2\nu\Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{20}, \\
D\Psi_2 - \bar{\delta}\Psi_1 + \Delta\Phi_{00} - \bar{\delta}\Phi_{01} + 2D\Lambda &= -\lambda\Psi_0 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 \\
& + (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\Phi_{00} - 2(\bar{\tau} + \alpha)\Phi_{01} \\
& - 2\tau\Phi_{10} + 2\rho\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02}, \\
\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 + D\Phi_{22} - \delta\Phi_{21} + 2\Delta\Lambda &= \sigma\Psi_4 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 - 3\mu\Psi_2 + 2\nu\Psi_1 \\
& + (\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Phi_{22} + 2(\bar{\pi} + \beta)\Phi_{21} \\
& + 2\pi\Phi_{12} - 2\mu\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{20}, \\
D\Psi_3 - \bar{\delta}\Psi_2 - D\Phi_{21} + \delta\Phi_{20} - 2\bar{\delta}\Lambda &= -\kappa\Psi_4 + 2(\rho - \epsilon)\Psi_3 + 3\pi\Psi_2 - 2\lambda\Psi_1 \\
& + (2\bar{\alpha} - 2\beta - \bar{\pi})\Phi_{20} - 2(\bar{\rho} - \epsilon)\Phi_{21} \\
& - 2\pi\Phi_{11} + 2\mu\Phi_{10} + \bar{\kappa}\Phi_{22}, \\
\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 - \Delta\Phi_{01} + \bar{\delta}\Phi_{02} - 2\delta\Lambda &= \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 \\
& + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + 2\alpha)\Phi_{02} + 2(\bar{\mu} - \gamma)\Phi_{01} \\
& + 2\tau\Phi_{11} - 2\rho\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{00}, \\
D\Phi_{11} - \delta\Phi_{10} - \bar{\delta}\Phi_{01} + \Delta\Phi_{00} + 3D\Lambda &= (2\gamma - \mu + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\Phi_{00} \\
& + (\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{01} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\tau)\Phi_{10} \\
& + 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} + \sigma\Phi_{20} - \bar{\kappa}\Phi_{12} \\
& - \kappa\Phi_{21}, \\
D\Phi_{12} - \delta\Phi_{11} - \bar{\delta}\Phi_{02} + \Delta\Phi_{01} + 3\delta\Lambda &= (-2\alpha + 2\bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\Phi_{02} - \kappa\Phi_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\bar{\rho} + 2\rho - 2\bar{\epsilon})\Phi_{12} + 2(\bar{\pi} - \tau)\Phi_{11} + \bar{\nu}\Phi_{00} \\
& + (2\gamma - 2\bar{\mu} - \mu)\Phi_{01} - \bar{\lambda}\Phi_{10} + \sigma\Phi_{21}, \\
D\Phi_{22} - \delta\Phi_{21} - \bar{\delta}\Phi_{12} + \Delta\Phi_{11} + 3\Delta\Lambda = & (\rho + \bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\Phi_{22} \\
& + (2\bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})\Phi_{12} + (2\beta + 2\pi - \tau)\Phi_{21} \\
& - 2(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} + \nu\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{10} - \bar{\lambda}\Phi_{20} \\
& - \lambda\Phi_{02}.
\end{aligned}$$

Verilen bir yay elemanı için, kotanjant demetinin yerel tabanının seçimindeki serbestlik “ayar dönüşümleri” veya “ayar serbestliği” olarak adlandırılmaktadır. Ayar dönüşümleri, belli bir metriğe bağlı olmadan, çalışılan problemle ilgili basitleştirici varsayımların yapılabilmesi için çok elverişlidir. Spin katsayıları, Weyl tensörü bileşenleri ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri için üç farklı grup ayar dönüşümü olup bunların açık ifadesi aşağıda verilmiştir [40].

1. l Etrafında ışıksal dönme:

$$l' = l, \quad m' = \bar{z}l + m, \quad n' = z\bar{z}l + zm + \bar{z}\bar{m} + n \quad (2.10)$$

Spin katsayılarının dönüşümü:

$$\begin{aligned}
\rho' &= \rho + z\kappa, \\
\alpha' &= \alpha + z(\rho + \epsilon) + z^2\kappa, \\
\lambda' &= \lambda + z(\pi + 2\alpha) + z^2(\rho + 2\epsilon) + z^3\kappa + \bar{\delta}z + zDz \\
\kappa' &= \kappa, \\
\epsilon' &= \epsilon + z\kappa, \\
\pi' &= \pi + 2z\epsilon + z^2\kappa + Dz, \\
\sigma' &= \sigma + \bar{z}\kappa, \\
\beta' &= \beta + z\sigma + \bar{z}\epsilon + z\bar{z}\kappa, \\
\mu' &= \mu + 2z\beta + \bar{z}\pi + z^2\sigma + z\bar{z}\epsilon + z^2\bar{z}\kappa + \delta z + \bar{z}Dz, \\
\tau' &= \tau + z\sigma + \bar{z}\rho + z\bar{z}\kappa, \\
\gamma' &= \gamma + z(\tau + \beta) + \bar{z}\alpha + z^2\sigma + z\bar{z}(\rho + \epsilon) + z^2\bar{z}\kappa, \\
\nu' &= \nu + z(\mu + 2\gamma) + \bar{z}\lambda + z^2(2\beta + \tau) + z\bar{z}(2\alpha + \pi) + z^2\bar{z}(2\epsilon + \rho) + z^3\sigma \\
& \quad + z^3\bar{z}\kappa + \Delta z + z\delta z + \bar{z}\bar{\delta}z + z\bar{z}Dz.
\end{aligned}$$

Weyl tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= \Psi_0, \\
\Psi'_1 &= z\Psi_0 + \Psi_1, \\
\Psi'_2 &= z^2\Psi_0 + 2z\Psi_1 + \Psi_2, \\
\Psi'_3 &= z^3\Psi_0 + 3z^2\Psi_1 + 3z\Psi_2 + \Psi_3, \\
\Psi'_4 &= z^4\Psi_0 + 4z^3\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 + 4z\Psi_3 + \Psi_4.
\end{aligned}$$

Ricci tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Phi'_{00} &= \Phi_{00}, \\
\Phi'_{01} &= \bar{z}\Phi_{00} + \Phi_{01}, \\
\Phi'_{02} &= \bar{z}^2\Phi_{00} + 2\bar{z}\Phi_{01} + \Phi_{02}, \\
\Phi'_{11} &= \bar{z}z\Phi_{00} + z\Phi_{01} + \bar{z}\Phi_{10} + \Phi_{11}, \\
\Phi'_{12} &= \bar{z}^2z\Phi_{00} + 2\bar{z}z\Phi_{01} + z\Phi_{02} + 2\bar{z}\Phi_{11} + \bar{z}^2\Phi_{10} + \Phi_{12}, \\
\Phi'_{22} &= \bar{z}^2z^2\Phi_{00} + 2\bar{z}z^2\Phi_{01} + z^2\Phi_{02} + 2\bar{z}^2z\Phi_{10} + 4\bar{z}z\Phi_{11} + 2z\Phi_{12} + \bar{z}^2\Phi_{20} \\
&\quad + 2\bar{z}\Phi_{21} + \Phi_{22}.
\end{aligned}$$

2. $l - n$ ve $m - \bar{m}$ düzlemlerinde dönme:

$$l' = z\bar{z}l = Al, \quad m' = z\bar{z}^{-1}m = e^{i\theta}m, \quad n' = z^{-1}\bar{z}^{-1}n = A^{-1}n \quad (2.11)$$

Spin katsayılarının dönüşümü:

$$\begin{aligned}
\rho' &= z\bar{z}\rho, \\
\alpha' &= z^{-1}\bar{z}(\alpha - z\bar{\delta}z^{-1}), \\
\lambda' &= z^{-3}\bar{z}\lambda \\
\kappa' &= z^3\bar{z}\kappa, \\
\epsilon' &= z\bar{z}(\epsilon - zDz^{-1}), \\
\pi' &= z^{-1}\bar{z}\pi, \\
\sigma' &= z^3\bar{z}^{-1}\sigma, \\
\beta' &= z\bar{z}^{-1}(\beta - z\delta z^{-1}), \\
\mu' &= z^{-1}\bar{z}^{-1}\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau' &= z\bar{z}^{-1}\tau, \\
\gamma' &= z^{-1}\bar{z}^{-1}(\gamma - z\Delta z^{-1}), \\
\nu' &= z^{-3}\bar{z}^{-1}\nu.
\end{aligned}$$

Weyl tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= z^4\Psi_0, \\
\Psi'_1 &= z^2\Psi_1, \\
\Psi'_2 &= \Psi_2, \\
\Psi'_3 &= z^{-2}\Psi_3, \\
\Psi'_4 &= z^{-4}\Psi_4.
\end{aligned}$$

Ricci tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Phi'_{00} &= z^2\bar{z}^2\Phi_{00}, \\
\Phi'_{01} &= z^2\Phi_{01}, \\
\Phi'_{02} &= z^2\bar{z}^{-2}\Phi_{02}, \\
\Phi'_{11} &= \Phi_{11}, \\
\Phi'_{12} &= \bar{z}^{-2}\Phi_{12}, \\
\Phi'_{22} &= \bar{z}^{-2}z^{-2}\Phi_{22}.
\end{aligned}$$

3. n Etrafında ışıksal dönme:

$$l' = l + \bar{z}m + z\bar{m} + z\bar{z}n, \quad m' = m + zn, \quad n' = n \quad (2.12)$$

Spin katsayılarının dönüşümü:

$$\begin{aligned}
\rho' &= \rho + 2z\alpha + \bar{z}\tau + z^2\lambda + 2z\bar{z}\gamma + z^2\bar{z}\nu - \bar{\delta}z - \bar{z}\Delta z, \\
\alpha' &= \alpha + z\lambda + \bar{z}\gamma + z\bar{z}\nu, \\
\lambda' &= \lambda + \bar{z}\nu, \\
\kappa' &= \kappa + z(\rho + 2\epsilon) + \bar{z}\sigma + z^2(2\alpha + \pi) + z\bar{z}(2\beta + \tau) + z^2\bar{z}(2\gamma + \mu) + z^3\lambda \\
&\quad + z^3\bar{z}\nu - Dz - z\bar{\delta}z - \bar{z}\delta z - z\bar{z}\Delta z, \\
\epsilon' &= \epsilon + z(\pi + \alpha) + \bar{z}\beta + z^2\lambda + z\bar{z}(\mu + \gamma) + z^2\bar{z}\nu, \\
\pi' &= \pi + z\lambda + \bar{z}\mu + z\bar{z}\nu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \sigma + z(\tau + 2\beta) + z^2(\mu + 2\gamma) + z^3\nu - \delta z - z\Delta z, \\
\beta' &= \beta + z(\mu + \gamma) + z^2\nu, \\
\mu' &= \mu + z\nu, \\
\tau' &= \tau + 2z\gamma + z^2\nu - \Delta z, \\
\gamma' &= \gamma + z\nu, \\
\nu' &= \nu.
\end{aligned}$$

Weyl tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Psi'_0 &= \Psi_0 + 4z\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 + 4z^3\Psi_3 + z^4\Psi_4, \\
\Psi'_1 &= \Psi_1 + 3z\Psi_2 + 3z^2\Psi_3 + z^3\Psi_4, \\
\Psi'_2 &= \Psi_2 + 2z\Psi_3 + z^2\Psi_4, \\
\Psi'_3 &= \Psi_3 + z\Psi_4, \\
\Psi'_4 &= \Psi_4.
\end{aligned}$$

Ricci tensörü bileşenlerinin dönüşümü :

$$\begin{aligned}
\Phi'_{00} &= \Phi_{00} + 2\bar{z}\Phi_{01} + 2z\Phi_{10} + 4z\bar{z}\Phi_{11} + \bar{z}^2\Phi_{02} + z^2\Phi_{20} + 2\bar{z}z^2\Phi_{21} + 2\bar{z}^2\Phi_{12} \\
&\quad + \bar{z}^2z^2\Phi_{22}, \\
\Phi'_{10} &= \Phi_{10} + 2\bar{z}\Phi_{11} + z\Phi_{20} + 2\bar{z}z\Phi_{21} + \bar{z}^2\Phi_{12} + \bar{z}^2z\Phi_{22}, \\
\Phi'_{11} &= \Phi_{11} + \bar{z}\Phi_{12} + z\phi_{21} + \bar{z}z\Phi_{22}, \\
\Phi'_{20} &= \Phi_{20} + 2\bar{z}\Phi_{21} + \bar{z}^2\Phi_{22}, \\
\Phi'_{21} &= \Phi_{21} + \bar{z}\Phi_{22}, \\
\Phi'_{22} &= \Phi_{22}.
\end{aligned}$$

Hatırlatma 2.1. Newman-Penrose formalizmi orijinal makalede metrik işaretinin $(+, -, -, -)$ olduğu durumda tanımlanmıştır. Biz ise, ilerki bölümlerde yapacağımız hesapları da gözönüne alarak literatürde daha genel kullanıma sahip olan $(-, +, +, +)$ işaretini seçeceğiz. Bu seçim, spin katsayılarında ters işarete sebep olacak, ancak diğer bileşenleri etkilemeyecektir [41].

Burada, Ricci tensörü matrisinin rankının bir olması koşulunu Newman-Penrose büyüklüklerinden $\Phi_{00} \neq 0$ olması durumunda verelim.

Önerme 2.1. *Newman-Penrose formalizminde, $\{l, n, m, \bar{m}\}$ tabanında Ricci tensörünün matris gösterimi*

$$R_a^b = 2 \begin{pmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} & \Phi_{10} & \Phi_{01} \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & \Phi_{21} & \Phi_{12} \\ -\Phi_{12} & -\Phi_{01} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) & \Phi_{02} \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{10} & \Phi_{20} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\Phi_{01} = 0$ ayar koşulu altında, $\Phi_{00} \neq 0$ için, $\text{rank}(R_a^b) = 1$ olması ancak ve ancak

$$\Phi_{12} = 0, \quad \Phi_{11} + 3\Lambda = 0, \quad \Phi_{02} = 0,$$

$$(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0$$

durumunda sağlanır.

İspat. Kotanjant demeti için yerel tabanlar $\{l, n, m, \bar{m}\}$ olmak üzere Ricci tensörü ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri arasındaki ilişkiler [7]

$$\begin{aligned} S_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab}, \\ \Phi_{00} &= \frac{1}{2}R_{ab}l^al^b = \bar{\Phi}_{00}, \\ \Phi_{01} &= \frac{1}{2}R_{ab}l^am^b = \bar{\Phi}_{10}, \\ \Phi_{02} &= \frac{1}{2}R_{ab}m^am^b = \bar{\Phi}_{20}, \\ \Phi_{11} &= \frac{1}{4}R_{ab}(l^an^b + m^a\bar{m}^b) = \bar{\Phi}_{11}, \\ \Phi_{12} &= \frac{1}{2}R_{ab}n^am^b = \bar{\Phi}_{21}, \\ \Phi_{22} &= \frac{1}{2}R_{ab}n^an^b = \bar{\Phi}_{22} \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa, verilen herhangi bir metrik için Ricci tensörünün matris gösterimi

$$R_{ab} = 2 \begin{pmatrix} \Phi_{22} & (\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{21} & -\Phi_{12} \\ (\Phi_{11} - 3\Lambda) & \Phi_{00} & -\Phi_{10} & -\Phi_{01} \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{10} & \Phi_{20} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) \\ -\Phi_{12} & -\Phi_{01} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) & \Phi_{02} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da, b indisi yukarı çekilirse, önermenin ifadesinde verilen Ricci tensörü matrisine ulaşılır. $\text{rank}(R_a^b) = 1$ ise, 1 tane lineer bağımsız sütun

var demektir. Bu durumda, herhangi bir sütun ya tamamen sıfır ya da o sütunun katıdır. $\Phi_{00} \neq 0$ ise 2. sütun sıfırdan farklıdır ve diğer tüm sütunlar 2. sütunun katıdır. Yukarıda verilen 1. tip ayar dönüşümlerinden $\Phi_{01} = 0$ yapılabilir. Bu durumda, 2. sütun

$$\begin{pmatrix} -\Phi_{00} \\ -(\Phi_{11} - 3\Lambda) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, $rank(R_a^b) = 1$ ise $\Phi_{12} = 0$, $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$, $\Phi_{02} = 0$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantının da sıfır olması gerekir. Bu durumda da,

$$(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0$$

şartı elde edilir. •

2.3. B Tipi Warped Çarpım Metrik ve Ricci Tensörünün Rank 1 Olma Koşulu

Bu bölümde, B tipi warped çarpım metrikler için Ricci tensörünün rankının 1 olması koşulunu inceleyeceğiz. İlk aşamada genel bir B tipi warped çarpım için Newman-Penrose formalizmi kullanarak spin katsayılarını, Weyl ve Ricci tensörü bileşenlerini açıkça hesaplayacağız. Daha sonra Ricci tensörünün rankının 1 olma koşulunu inceleyeceğiz.

M manifoldu üzerindeki B tipi warped çarpım metriği, (u, v, x, y) yerel koordinatlarında,

$$a_1 = a_1(u, v), \quad a_2 = a_2(u, v), \quad a_3 = a_3(u, v), \quad a_4 = a_4(u, v), \\ G = G(u, v), \quad f = f(x, y), \quad g = g(x, y)$$

olmak üzere

$$ds^2 = -2 \left[a_1 a_3 du^2 + (a_1 a_4 + a_2 a_3) dudv + a_2 a_4 dv^2 \right] + 2G^2 \left[f^2 dx^2 + g^2 dy^2 \right] \quad (2.13)$$

şeklinde verilmiş olsun. Tetrad tabanını

$$\begin{aligned} l &= a_1 du + a_2 dv, & n &= a_3 du + a_4 dv, \\ m &= G(fdx + igdy), & \bar{m} &= G(fdx - igdy). \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlarsak, buradan $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ yerel vektör alanları

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{a_1} \partial_u + \frac{1}{a_2} \partial_v \right], & \Delta &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{a_3} \partial_u + \frac{1}{a_4} \partial_v \right], \\ \delta &= \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{f} \partial_x - \frac{1}{ig} \partial_y \right], & \bar{\delta} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{f} \partial_x + \frac{1}{ig} \partial_y \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde elde edilir ve daha sonra komütasyon bağıntıları veya dış türevlerden spin katsayıları kolaylıkla hesaplanabilir. Aşağıda belirtildiği gibi bir grup spin katsayısı sıfır, bir grubu ise reeldir.

$$\kappa = \nu = \tau = \pi = \lambda = \sigma = 0, \quad (2.16a)$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\rho} = \rho, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\alpha} + \beta = 0, \quad (2.16b)$$

Sıfır olmayan spin katsayıları metrik fonksiyonları cinsinden aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{GH} [-G_v a_3 + G_u a_4], & \rho &= \frac{1}{GH} [-G_v a_1 + G_u a_2], \\ \epsilon &= \frac{1}{2H} [-a_{2,u} + a_{1,v}], & \gamma &= \frac{1}{2H} [-a_{4,u} + a_{3,v}], \\ \alpha &= \frac{1}{4} \frac{1}{fgG} [-g_x + if_y], & \beta &= \frac{1}{4} \frac{1}{fgG} [g_x + if_y]. \end{aligned} \quad (2.16c)$$

Bu ifadelerde türevler alt indislerle gösterilmiş ve $H = a_2 a_3 - a_1 a_4$ olarak yazılmıştır. Sıfır olan Weyl tensörü ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri,

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad (2.17a)$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} = 0 \quad (2.17b)$$

olup, sıfırdan farklı bileşenlerin spin katsayıları ve türevleri cinsinden ifadeleri aşağıdadır. Bu büyüklüklerin açık ifadesini yazmak mümkünse de verdiğimiz kapalı form daha kullanışlı olacaktır.

$$\Psi_2 + 2\Lambda = D\mu - \rho\mu + 2\epsilon\mu, \quad (2.18a)$$

$$\Phi_{00} = D\rho - \rho^2 + 2\epsilon\rho, \quad (2.18b)$$

$$\Phi_{22} = -\Delta\mu - \mu^2 - 2\gamma\mu, \quad (2.18c)$$

$$\Phi_{11} + 3\Lambda = D\mu + \delta\alpha - \bar{\delta}\beta - 2\mu\rho + 2\epsilon\mu - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + 2\alpha\beta, \quad (2.18d)$$

$$\Phi_{11} - 3\Lambda = \Delta\rho + D\gamma - \Delta\epsilon - 2\gamma\rho + 4\epsilon\gamma. \quad (2.18e)$$

Şimdi bu koşulları kullanarak Newman-Penrose sistemini inceleyeceğiz. Ancak bu aşamada, ayar dönüşümlerini kullanarak sistemde bazı sadeleştirmeler elde etmek yararlı olacaktır. Örneğin, 2. tip dönüşümlerle $\bar{\alpha} = -\alpha$ alınabilir ve $\bar{\alpha} + \beta = 0$ koşulundan $\alpha = \beta$ elde edilir. Böylece, (2.13) ile verilen B tipi warped çarpım için Newman-Penrose denklemleri

$$D\rho = \rho^2 + 2\epsilon\rho + \Phi_{00}, \quad \Delta\rho = -\rho\mu + 2\gamma\rho - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad \delta\rho = 0,$$

$$D\mu = \rho\mu - 2\epsilon\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad \Delta\mu = -\mu^2 - 2\gamma\mu - \Phi_{22}, \quad \delta\mu = 0,$$

$$D\gamma = \Delta\epsilon - 4\epsilon\gamma + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \quad \delta\gamma = 0,$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \quad \Delta\alpha = -\mu\alpha, \quad \delta\alpha = \bar{\delta}\alpha + \mu\rho - 4\alpha^2 - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda$$

ve Bianchi özdeşlikleri

$$\Delta\Phi_{00} = -D(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (4\gamma - 2\mu)\Phi_{00} + 4\rho\Phi_{11}, \quad \delta\Phi_{00} = 0,$$

$$D\Phi_{22} = -\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (2\rho - 4\epsilon)\Phi_{22} - 4\mu\Phi_{11}, \quad \delta\Phi_{22} = 0,$$

$$D(\Psi_2 + 2\Lambda) = D(\Phi_{11} + 3\Lambda) + 3\rho(\Psi_2 + 2\Lambda) - 2\rho(\Phi_{11} + 3\Lambda) + \mu\Phi_{00},$$

$$\Delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - 3\mu(\Psi_2 + 2\Lambda) + 2\mu(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \mu\Phi_{22},$$

$$\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0,$$

$$\delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0$$

şeklinde olur. Bianchi özdeşliklerinde $(\Psi_2 + 2\Lambda)$ içeren denklemler için komütasyon bağıntılarından

$$D\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0 \implies \delta[D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - 2\rho(\Phi_{11} + 3\Lambda)] = 0,$$

$$\Delta\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0 \implies \delta[\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) + 2\mu(\Phi_{11} + 3\Lambda)] = 0$$

denklemleri elde edilir. Newman-Penrose sistemi bu denklemler için kullanılırsa

$$D\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 3\rho\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda)$$

$$\Delta\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = -3\mu\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda).$$

integrallenme şartlarına ulaşılır. Benzer hesaplamalar $\bar{\delta}$ için yapılırsa,

$$D\bar{\delta}(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 3\rho\bar{\delta}(\Phi_{11} + 3\Lambda),$$

$$\Delta\bar{\delta}(\Phi_{11} + 3\Lambda) = -3\mu\bar{\delta}(\Phi_{11} + 3\Lambda)$$

elde edilir. Böylece, integrallenebilir sistem

$$D\rho = \rho^2 + 2\epsilon\rho + \Phi_{00}, \quad \Delta\rho = -\rho\mu + 2\gamma\rho - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad \delta\rho = 0, \quad (2.19a)$$

$$D\mu = \rho\mu - 2\epsilon\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad \Delta\mu = -\mu^2 - 2\gamma\mu - \Phi_{22}, \quad \delta\mu = 0, \quad (2.19b)$$

$$D\gamma = \Delta\epsilon - 4\epsilon\gamma + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \quad \delta\gamma = 0, \quad (2.19c)$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \quad \Delta\alpha = -\mu\alpha, \quad \delta\alpha = \bar{\delta}\alpha + \mu\rho - 4\alpha^2 - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \quad (2.19d)$$

$$D(\Psi_2 + 2\Lambda) = D(\Phi_{11} + 3\Lambda) + 3\rho(\Psi_2 + 2\Lambda) - 2\rho(\Phi_{11} + 3\Lambda) + \mu\Phi_{00}, \quad (2.20a)$$

$$\Delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - 3\mu(\Psi_2 + 2\Lambda) + 2\mu(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \mu\Phi_{22}, \quad (2.20b)$$

$$\Delta\Phi_{00} = -D(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (4\gamma - 2\mu)\Phi_{00} + 4\rho\Phi_{11}, \quad \delta\Phi_{00} = 0, \quad (2.20c)$$

$$D\Phi_{22} = -\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (2\rho - 4\epsilon)\Phi_{22} - 4\mu\Phi_{11}, \quad \delta\Phi_{22} = 0, \quad (2.20d)$$

$$\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0, \quad \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0, \quad (2.20e)$$

$$D\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 3\rho\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda), \quad \Delta\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = -3\mu\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda). \quad (2.20f)$$

şeklinde yazılır.

B tipi warped çarpımlar için kabul edilebilir olan fiziksel kaynaklar Haddow ve Carot tarafından çalışılmıştır [42]. f warping fonksiyon olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ şeklindeki B tipi bir warped manifold için, M_2 nin hangi koşullarda sabit eğriliğe sahip olacağı aşağıda ifadesi verilecek Teorem 2.1 ile ([42]) belirlenmiştir. Sonuç 2.1 de ilgilendiğimiz durum için bu koşulların sağlandığını göstereceğiz. Burada, Teorem 2.1 in ifadesinde kullanacağımız yatay vektör kavramını açıklayalım. h_{ab} , M_2 manifoldunda verilmiş bir metrik olmak üzere, X^a şeklindeki bir vektör için $h_{ab}X^a = 0$ oluyor ise X^a ya yatay vektör denir.

Teorem 2.1. *(M, g) , f warping fonksiyon olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ şeklinde verilmiş B tipi bir warped çarpım uzay-zamanı olsun. Buna ilaveten, M deki her*

noktada, kotanjant uzayının tüm Ricci özvektörlerinin karşılığı olan özdeğerlerin gradientleri tarafından gerilen alt uzayının, yatay özvektörlerin karşılığı olan özdeğerlerin gradientleri tarafından gerildiğini varsayalım. Bu durumda, M_2 sabit eğrilığe sahiptir.

Aşağıda vereceğimiz Sonuç 2.1 ile bu teoremi kendi durumumuza uygulayalım.

Sonuç 2.1. (M, g) , (2.13) metriğiyle verilmiş bir B tipi uzay-zamanı olsun. M_2 nin sabit eğrilığe sahip olması ancak ve ancak

$$\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 0 \quad (2.21)$$

ile mümkündür. Ayrıca, M_2 , R^3 e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler ise (M, g) küresel simetriye sahiptir.

İspat. (2.13) metriği için Ricci tensörünün matrisi $\{l, n, m, \bar{m}\}$ tabanında

$$R_a^b = 2 \begin{pmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} & 0 & 0 \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Phi_{11} + 3\Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2(\Phi_{11} - 3\Lambda) - 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}, \\ \lambda_2 &= -2(\Phi_{11} - 3\Lambda) + 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = 2(\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere λ_i özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\Phi_{00}}{\Phi_{22}}} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\Phi_{00}}{\Phi_{22}}} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $V^{(1)}$ ve $V^{(2)}$ özvektörleri yatay vektörlerdir. Tüm Ricci özvektörlerinin karşılığı olan özdeğerlerin gradientleri tarafından gerilen kotanjant uzayının alt uzayını V_1 ile gösterelim.

Bu durumda $V_1 = \text{Span}\{d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3\} \subset T_p^*M$ şeklinde yazılır. Yatay vektörlerinin karşılığı olan özdeğerlerin gradientleri tarafından gerilen kotanjant uzayının alt uzayını da V_2 ile gösterelim. Bu durumda, $V_2 = \text{Span}\{d\lambda_1, d\lambda_2\} \subset T_p^*M$ olacaktır. Teorem 2.1 gereği, M_2 nin sabit eğriliğe sahip olabilmesi için $V_1 = V_2$ olması gerekmektedir. (2.13) metriği için yerel koordinatlar (u, v, x, y) olmak üzere $d\lambda = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} dx_i$ şeklinde düşünülürse

$$V_1 = \text{Span}\{(\lambda_1)_u du, (\lambda_1)_v dv, (\lambda_1)_x dx, (\lambda_1)_y dy, (\lambda_2)_u du, (\lambda_2)_v dv, (\lambda_2)_x dx, (\lambda_2)_y dy, (\lambda_3)_u du, (\lambda_3)_v dv, (\lambda_3)_x dx, (\lambda_3)_y dy\}$$

şeklinde yazılır. Benzer olarak,

$$V_2 = \text{Span}\{(\lambda_1)_u du, (\lambda_1)_v dv, (\lambda_1)_x dx, (\lambda_1)_y dy, (\lambda_2)_u du, (\lambda_2)_v dv, (\lambda_2)_x dx, (\lambda_2)_y dy\}$$

olur.

Genel B tipi warped çarpım için verilen (2.19-20) denklemlerinden $\delta(\Phi_{00}) = \delta(\Phi_{22}) = \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, bu ifadeleri içeren λ_1 ve λ_2 özdeğerleri için

$$(\lambda_1)_x = (\lambda_1)_y = (\lambda_2)_x = (\lambda_2)_y = 0$$

olacaktır. Bu durumda V_1 ve V_2 uzayları

$$V_1 = \text{Span}\{(\lambda_1)_u du, (\lambda_1)_v dv, (\lambda_2)_u du, (\lambda_2)_v dv, (\lambda_3)_u du, (\lambda_3)_v dv, (\lambda_3)_x dx, (\lambda_3)_y dy\},$$

$$V_2 = \text{Span}\{(\lambda_1)_u du, (\lambda_1)_v dv, (\lambda_2)_u du, (\lambda_2)_v dv\}$$

şeklinde yazılırlar. $V_1 = V_2$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(\lambda_3)_x = (\lambda_3)_y = 0$$

olmasıdır. λ_3 özdeğerinin ifadesinden $(\Phi_{11} + 3\Lambda)_x = (\Phi_{11} + 3\Lambda)_y = 0$ anlamı çıkarılır. Bu ise, $\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda)$ şartına eşdeğerdir. Teorem 2.1 gereği M_2 sabit eğriliğe sahiptir.

M_2 , sabit eğriliğe sahip, R^3 e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler bir manifold olduğundan M_2 küredir [31]. Böylece, (M, g) küresel simetriye sahiptir.

•

Önerme 2.2. (M, g) , (2.13) metriğiyle verilmiş bir B tipi warped çarpım uzay-zamanı olsun. $\text{rank}(\text{Ricci}) = 1$ ise ve Enerji-momentum tensörü tekil değilse, fiziksel kaynak kütleli skaler alandır.

İspat. Sonuç 2.1 in ispatında verilen B tipi warped çarpım metrik için, Ricci tensörünün rankının 1 olması aşağıda verilen (2.22) şartını gerektirir.

$$(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0, \quad (\Phi_{11} + 3\Lambda) = 0. \quad (2.22)$$

Öte yandan enerji-momentum tensörü, $(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 0$ rank 1 koşulu altında

$$\kappa T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\Phi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Phi_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12\Lambda \\ 0 & 0 & -12\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanırsa, tekil olmaması için $\Phi_{00}\Phi_{22}$ çarpımının sıfır olmaması gerektiği görülebilir. Genel B tipi warped çarpım metrik için (2.19-20) denklemleriyle verilen Newman-Penrose sisteminde, $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$ rank 1 koşulu kullanılırsa, Newman-Penrose sistemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$D\rho = \rho^2 + 2\epsilon\rho + \Phi_{00}, \quad \Delta\rho = -\rho\mu + 2\gamma\rho - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad \delta\rho = 0, \quad (2.23a)$$

$$D\mu = \rho\mu - 2\epsilon\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad \Delta\mu = -\mu^2 - 2\gamma\mu - \Phi_{22}, \quad \delta\mu = 0, \quad (2.23b)$$

$$D\gamma = \Delta\epsilon - 4\epsilon\gamma + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \quad \delta\gamma = 0, \quad (2.23c)$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \quad \Delta\alpha = -\mu\alpha, \quad \delta\alpha = \bar{\delta}\alpha + \mu\rho - 4\alpha^2 - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda. \quad (2.23d)$$

$$D(\Psi_2 + 2\Lambda) = 3\rho(\Psi_2 + 2\Lambda) + \mu\Phi_{00}, \quad (2.23e)$$

$$\Delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = -3\mu(\Psi_2 + 2\Lambda) - \mu\Phi_{22}, \quad (2.23f)$$

$$\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0, \quad \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0, \quad \delta\Phi_{00} = 0, \quad \delta\Phi_{22} = 0, \quad (2.23g)$$

$$\Delta\Phi_{00} = (4\gamma - 2\mu)\Phi_{00} + 4\rho\Phi_{11}, \quad (2.24a)$$

$$D\Phi_{22} = (2\rho - 4\epsilon)\Phi_{22} - 4\mu\Phi_{11}. \quad (2.24b)$$

(2.23-24) ile verilen Newman-Penrose sistemi tutarlıdır. (2.24a,b) denklemlerinin çözümü tek değişkene bağlı iki keyfi fonksiyon içerecektir. Bu çözüm için aşağıdaki kabulleri yapacağız.

$$\Phi_{00} = (D\phi)^2, \quad \Phi_{22} = (\Delta\phi)^2 \quad (2.25)$$

yazılırsa, (2.22) ile verilen rank 1 olma koşulundan

$$\Phi_{11} = \pm \frac{1}{2} D\phi \Delta\phi \quad (2.26)$$

elde edilir. + işaret seçilip, Φ_{00} , Φ_{11} ve Φ_{22} ifadeleri (2.24a,b) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$\Delta D\phi = (2\gamma - \mu)D\phi + \rho\Delta\phi, \quad (2.27a)$$

$$D\Delta\phi = (\rho - 2\epsilon)\Delta\phi - \mu D\phi \quad (2.27b)$$

bulunur. (2.27a,b) denklemleri komütasyon bağıntısında kullanılırsa

$$(\Delta D - D\Delta)\phi = 2\gamma D\phi + 2\epsilon\Delta\phi$$

elde edilir ki, sistem tutarlıdır. (2.27a) ve (2.27b) denklemleri taraf tarafa toplanırsa ϕ skaler alanı için dalga denklemi

$$(\Delta D + D\Delta)\phi = 2(\gamma - \mu)D\phi + 2(\rho - \epsilon)\Delta\phi \quad (2.28)$$

şeklinde elde edilir. Bu ikinci mertebeden denklemin çözümünde tek değişkene bağlı iki keyfi fonksiyon olduğu için, (2.24.a,b) denklemlerinin genel çözümü (2.28) denkleminin çözümü cinsinden ifade edilebilir. •

Küresel simetrik metrik: yerel koordinatlar

M manifoldu küresel simetrik ise, metriği, $b = b(t, r)$, $a = a(t, r)$ olmak üzere

$$ds^2 = -b^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\theta^2) \quad (2.29)$$

şeklindedir. Bu ise, genel bir B tipi warped çarpımda,

$$\begin{aligned} u &= t, & v &= r, & y &= \varphi, & x &= \theta, \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}b, & a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a, & a_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}b, & a_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}a, \\ G &= \frac{r}{\sqrt{2}}, & f &= \sin\varphi, & g &= 1 \end{aligned}$$

seçimine karşı gelmektedir. (2.29) küresel simetrik metriği için tetrad tabanı

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sqrt{2}} [b dt + a dr], & n &= \frac{1}{\sqrt{2}} [b dt - a dr], \\ m &= \frac{r}{\sqrt{2}} [i d\varphi + \sin\varphi d\theta], & \bar{m} &= \frac{r}{\sqrt{2}} [-i d\varphi + \sin\varphi d\theta] \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanırsa, $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ yerel vektör alanları

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{b} \partial_t + \frac{1}{a} \partial_r \right], \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{b} \partial_t - \frac{1}{a} \partial_r \right], \\ \delta &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[-\frac{1}{i} \partial_\varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \partial_\theta \right], \quad \bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[\frac{1}{i} \partial_\varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \partial_\theta \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

olarak elde edilir. Komütasyon bağıntıları veya dış türevlerden spin katsayıları hesaplanırsa reel ve sıfır olan spin katsayıları

$$\kappa = \nu = \tau = \pi = \lambda = \sigma = 0, \quad (2.32a)$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\rho} = \rho, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\alpha} + \beta = 0 \quad (2.32b)$$

olup, sıfır olmayan spin katsayıları ise metrik fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned} \mu = \rho &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{ar}, \\ \epsilon &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{b_r - a_t}{ab} \right], \quad \gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{b_r + a_t}{ab} \right], \\ \alpha = \beta &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{i \cos \varphi}{r \sin \varphi} \end{aligned} \quad (2.32c)$$

şeklinde elde edilir. Sıfır olan Weyl tensörü ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad (2.33a)$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} = 0, \quad (2.33b)$$

sıfırdan farklı bileşenler ise

$$\Psi_2 + 2\Lambda = \frac{1}{2a^2r} \left[\frac{a_r}{a} - \frac{b_r}{b} \right], \quad (2.34a)$$

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2a^2r} \left[-2\frac{a_t}{b} + \frac{a_r}{a} + \frac{b_r}{b} \right], \quad (2.34b)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2a^2r} \left[2\frac{a_t}{b} + \frac{a_r}{a} + \frac{b_r}{b} \right], \quad (2.34c)$$

$$\Phi_{11} + 3\Lambda = \frac{1}{2a^2r} \left[\frac{a_r}{a} - \frac{b_r}{b} \right] + \frac{1}{2r^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \right], \quad (2.34d)$$

$$\Phi_{11} - 3\Lambda = \frac{1}{2a^2r} \left[\frac{b_r}{b} - \frac{a_r}{a} \right] + \frac{1}{2a^2} \frac{b_{rr}}{b} - \frac{1}{2b^2} \frac{a_{tt}}{a} + \frac{1}{2b^2} \frac{a_t}{a} \frac{b_t}{b} - \frac{1}{2a^2} \frac{a_r}{a} \frac{b_r}{b} \quad (2.34e)$$

şeklindedir.

Şimdi (2.22) ile verilen Ricci tensörünün rankının 1 olması koşulunu kullanalım.

İlk olarak, $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$ şartından (2.34d) denklemi sıfıra eşitlenip çözülrse

$$r \frac{b_r}{b} = r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) \quad (2.35)$$

elde edilir. (2.35) denklemi (2.34b,c) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2a^2r^2} \left[2r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) - 2r \frac{a_t}{b} \right], \quad (2.36a)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2a^2r^2} \left[2r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) + 2r \frac{a_t}{b} \right] \quad (2.36b)$$

olur. Buradan da,

$$\Phi_{00}\Phi_{22} = \left(\frac{1}{2a^2r^2} \right)^2 \left(\left[2r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) \right]^2 - \left[2r \frac{a_t}{b} \right]^2 \right) \quad (2.37)$$

olarak yazılır. (2.34e) denklemi düzenlenip, (2.35) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_{11} - 3\Lambda = & \frac{1}{2a^2r^2} \left[r^2 \frac{b_{rr}}{b} - \left(r \frac{a_r}{a} \right)^2 - r a a_r + r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) \right] \\ & + \frac{1}{2a^2r^2} \left[- \left(r \frac{a}{b} \right)^2 \frac{a_{tt}}{a} + \left(r \frac{a}{b} \right)^2 \frac{a_t}{a} \frac{b_t}{b} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.35) denklemi r ye göre türetilirse,

$$r^2 \frac{b_{rr}}{b} = r^2 \frac{a_{rr}}{a} - 2r \frac{a_r}{a} + 4r a a_r + (a^2 - 1)^2 + (a^2 - 1)$$

olup, bu ifade yerine yazılırsa da

$$\begin{aligned} \Phi_{11} - 3\Lambda = & \frac{1}{2a^2r^2} \left[r^2 \frac{a_{rr}}{a} - r \frac{a_r}{a} + 3r a a_r - \left(r \frac{a_r}{a} \right)^2 + (a^2 - 1)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2a^2r^2} \left[- \left(r \frac{a}{b} \right)^2 \frac{a_{tt}}{a} + \left(r \frac{a}{b} \right)^2 \frac{a_t}{a} \frac{b_t}{b} \right] \end{aligned} \quad (2.38).$$

denkleminde ulaşılır. Şimdi,

$$b = a r y$$

olsun. Bu durumda,

$$\frac{b_t}{b} = \frac{a_t}{a} + \frac{y_t}{y}, \quad \left(r \frac{a}{b} \right) = \frac{1}{y}$$

olur ve, (2.35), (2.37) ve (2.38) denklemleri

$$r \frac{y_r}{y} = -2 + a^2, \quad (2.39)$$

$$\Phi_{00}\Phi_{22} = \left(\frac{1}{2a^2r^2} \right)^2 \left(\left[2r \frac{a_r}{a} + (a^2 - 1) \right]^2 - \left[2 \frac{a_t/y}{a} \right]^2 \right), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{11} - 3\Lambda &= \frac{1}{2a^2r^2} \left[r^2 \frac{a_{rr}}{a} - r \frac{a_r}{a} + 3raa_r - \left(r \frac{a_r}{a}\right)^2 + (a^2 - 1)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2a^2r^2} \left[-\frac{1}{y^2} \frac{a_{tt}}{a} + \frac{1}{y^2} \frac{a_t}{a} \frac{y_t}{y} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{a_t}{y}\right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.41)$$

şeklinde yeniden yazılır.

$r = e^s$ dönüşümü ile logaritmik koordinatlara geçilirse, (2.39-41) denklemleri yeni koordinatlarda

$$\frac{y_s}{y} = -2 + a^2, \quad (2.42)$$

$$\Phi_{00}\Phi_{22} = \left(\frac{1}{2a^2e^{2s}}\right)^2 \left([2\frac{a_s}{a} + (a^2 - 1)]^2 - [2\frac{a_t/y}{a}]^2\right), \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{11} - 3\Lambda &= \frac{1}{2a^2e^{2s}} \left[\frac{a_{ss}}{a} - \left(\frac{a_s}{a}\right)^2 - 2\frac{a_s}{a} + 3aa_s + (a^2 - 1)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2a^2e^{2s}} \left[-\frac{1}{y^2} \frac{a_{tt}}{a} + \frac{1}{y^2} \frac{a_t}{a} \frac{y_t}{y} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{a_t}{y}\right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.44)$$

şeklinde yazılırlar.

$$-\frac{1}{y^2} \frac{a_{tt}}{a} + \frac{1}{y^2} \frac{a_t}{a} \frac{y_t}{y} = -\frac{1}{ay} \left(\frac{a_t}{y}\right)_t$$

ifadesi (2.44) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Phi_{11} - 3\Lambda &= \frac{1}{2a^2e^{2s}} \left[\frac{a_{ss}}{a} - \left(\frac{a_s}{a}\right)^2 - 2\frac{a_s}{a} + 3aa_s + (a^2 - 1)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2a^2e^{2s}} \left[-\frac{1}{ay} \left(\frac{a_t}{y}\right)_t + \frac{1}{a^2} \left(\frac{a_t}{y}\right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.45)$$

elde edilir. Son olarak,

$$a^2 = \left[1 - \frac{2m}{e^s}\right]^{-1}, \quad m = e^s \mu$$

dönüşümü (2.42-43) ve (2.45) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1 - 2\mu}, \quad (2.46)$$

$$\Phi_{00}\Phi_{22} = \left(\frac{1 - 2\mu}{2e^{2s}}\right)^2 \frac{4}{(1 - 2\mu)^2} \left[(\mu_s + \mu)^2 - \left(\frac{\mu_t}{y}\right)^2\right], \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{11} - 3\Lambda &= \frac{(1 - 2\mu)}{2e^{2s}} \left[\frac{\mu_{ss}}{(1 - 2\mu)} + \frac{2\mu_s^2}{(1 - 2\mu)^2} - \frac{2\mu_s}{(1 - 2\mu)} + \frac{3\mu_s}{(1 - 2\mu)^2} + \frac{4\mu^2}{(1 - 2\mu)^2} \right] \\ &+ \frac{(1 - 2\mu)}{2e^{2s}} \left[-\frac{2}{(1 - 2\mu)^2} \left(\frac{\mu_t}{y}\right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{\mu_t}{y}\right)_t \frac{1}{(1 - 2\mu)} \right]\end{aligned}\quad (2.48)$$

denklemleri elde edilir. Ricci tensörünün rankının 1 olması koşulundan

$$\Phi_{11} - 3\Lambda = \mp \sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}$$

yazılır, (2.47) ve (2.48) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{ss} + \mu_s - \frac{1}{y} \left(\frac{\mu_t}{y} \right)_t + \frac{2}{(1-2\mu)} \left[(\mu_s + \mu)^2 + (\mu_s + \mu)\mu - \frac{\mu_t^2}{y^2} \right] \\ \pm 2 \left[(\mu_s + \mu)^2 - \frac{\mu_t^2}{y^2} \right]^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

elde edilir. Böylece, (2.46) ve (2.49) ile verilen sisteme, Ricci tensörünün rankının 1 olması koşulundan ulaşılmış olunur. Bu sistem, bir sonraki bölümde standart olarak alan denklemleri kullanılarak yeniden elde edilecektir.

2.4. Enerji Koşulları, Petrov ve Plebanski Sınıflamaları

Bu alt bölümde önce, Ricci rank 1 sınıflaması için enerji koşullarını Newman-Penrose niceliklerine göre inceleyeceğiz. Daha sonra, Petrov ve Plebanski sınıflamalarını vereceğiz. Enerji momentum tensörü

$$\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 12g_{ab}\Lambda$$

şeklinde yazılır [43]. $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$ Ricci rank 1 koşulu, yerine yazılırsa

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\Phi_{22} & -12\Lambda & 0 & 0 \\ -12\Lambda & 2\Phi_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan da

$$\kappa T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\Phi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Phi_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12\Lambda \\ 0 & 0 & -12\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, u^a vektörü $u^a = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ şeklinde seçilirse,

$$u_a u^a = -2u^1 u^2 + 2u^3 u^4$$

olarak hesaplanır.

Işıksal enerji koşulu: Her ışıksal u^a vektörü için, $T_{ab}u^a u^b \geq 0$ şartının sağlanmasına ışıksal enerji koşulu denir [7]. $|u_a u^a| = 0$ dan, $u^1 u^2 = u^3 u^4$ olup,

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left(\Phi_{22}(u^1)^2 + \Phi_{00}(u^2)^2 - 12\Lambda u^1 u^2 \right)$$

şeklinde yazılır. $(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 = \Phi_{00}\Phi_{22}$ Ricci rank 1 şartından, $36\Lambda^2 = \Phi_{00}\Phi_{22}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left(\Phi_{22}(u^1)^2 + \Phi_{00}(u^2)^2 - 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}u^1 u^2 \right)$$

elde edilir ki

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left(\sqrt{\Phi_{22}}u^1 - \sqrt{\Phi_{00}}u^2 \right)^2 \geq 0$$

dır.

Zayıf enerji koşulu: Her zamansal u^a vektörü için $T_{ab}u^a u^b \geq 0$ koşulunun sağlanmasına, zayıf enerji koşulu denir [7]. u^a vektörünün zamansal olması, $-2u^3 u^4 = 1 - 2u^1 u^2$ şeklinde kullanılırsa

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left(\Phi_{22}(u^1)^2 + \Phi_{00}(u^2)^2 + \sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}} - 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}u^1 u^2 \right)$$

elde edilir ve yeniden düzenlenirse

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left[(\sqrt{\Phi_{22}}u^1 - \sqrt{\Phi_{00}}u^2)^2 + \sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}} \right] \geq 0$$

olur.

Güçlü enerji koşulu: Her birim zamansal u^a vektörü için, $T = T_a^a$ olmak üzere, $(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})u^a u^b \geq 0$ şartının sağlanmasına güçlü enerji koşulu denir [7]. Enerji momentum tensörü bileşenlerinden

$$T_{ab}u^a u^b = \frac{2}{\kappa} \left(\sqrt{\Phi_{22}}u^1 - \sqrt{\Phi_{00}}u^2 \right)^2 \geq 0$$

olarak hesaplanır.

Baskın enerji koşulu: Her birim zamansal u^a vektörü için zayıf enerji koşuluna ek olarak, $q^a \equiv T_b^a u^b$ olmak üzere, $q_a q^a \leq 0$ şartının da sağlandığı koşula baskın enerji koşulu denir [7]. Zayıf enerji koşulunun sağlandığı yukarıda gösterilmişti. Burada, yalnızca ikinci şartın kontrol edilmesi yeterlidir. $q_a q^a$ ifadesi

$$q_a q^a = \frac{4}{\kappa} \left(-2\Phi_{00}\Phi_{22}u^1u^2 + 2\Phi_{00}\Phi_{22}u^3u^4 \right)$$

olarak hesaplanır. Vektörün birim zamansallığı $2u^3u^4 = -1 + 2u^1u^2$ şeklinde kullanılırsa

$$q_a q^a = -\frac{4}{\kappa} \Phi_{00}\Phi_{22} \leq 0$$

olduğu görülür.

Petrov Sınıflaması : Petrov sınıflaması için, Weyl tensörü bileşenleri 3×3 , simetrik, kompleks ve izsiz bir matris olarak şu şekilde yazılır [7].

$$Q = \begin{pmatrix} \Psi_2 - \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4) & \frac{1}{2}i(\Psi_4 - \Psi_0) & \Psi_1 - \Psi_3 \\ \frac{1}{2}i(\Psi_4 - \Psi_0) & \Psi_2 + \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4) & i(\Psi_1 + \Psi_3) \\ \Psi_1 - \Psi_3 & i(\Psi_1 + \Psi_3) & -2\Psi_2 \end{pmatrix}.$$

Sınıflama, Q matrisinin özdeğerlerinin katlılığına göre yapılır. $Qr = \lambda r$ özdeğer probleminin mümkün olan farklı çözümleri temel alınarak yapılacak sınıflandırma, Weyl tensörünün l doğrultusundaki karakterine eşdeğer olacaktır.

I. tip ayar dönüşümünün tersi uygulanırsa,

$$\Psi_0 = \Psi'_3 - 4A\Psi'_+ 6A^2\Psi'_2 - 4A^3\Psi'_3 + A^4\Psi_4$$

şeklinde A kompleks katsayısının dördüncü dereceden bir cebirsel denklemi elde edilir [7]. Petrov sınıfının belirlenmesinin yolu, bu denklemi çözmektir. Bundan sonrası için, çeşitli invaryant tanımları yapılarak bir algoritma verilebilir. $\Psi_4 \neq 0$ olduğu durumda, bu sınıflama için aşağıda tanımları verilen değişmezlerle birlikte, yine aşağıda verilen algoritmayı kullanacağız. Daha ayrıntılı bilgi için kaynak [7] ye bakılabilir.

$$\begin{aligned} I &= \Psi_0\Psi_4\Psi_1\Psi_3 - 4 + 3\Psi_2^3, & J &= \det \begin{pmatrix} \Psi_4 & \Psi_3 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_2 & \Psi_1 \\ \Psi_2 & \Psi_1 & \Psi_0 \end{pmatrix}, \\ K &= \Psi_1\Psi_4^2 - 3\Psi_4\Psi_3\Psi_2 + 2\Psi_3^3, & L &= \Psi_2\Psi_4 - \Psi_3^2, & N &= 12L^2 - \Psi_4^2I \end{aligned}$$

I. Adım: $I^3 = 27J^2$ ise II. adıma geçilir, aksi halde Petrov tipi **I** dır. Tip I, cebirsel olarak özel diğer tipler ise cebirsel olarak genel diye adlandırılır.

II. Adım: $I = J = 0$ şartı sağlanırsa III. adıma geçilir, aksi halde $K = N = 0$ durumuna bakılır. Eğer, bu şart sağlanmazsa Petrov tipi **II**, sağlanırsa da **D** olur.

III. Adım: Eğer, $K = L = 0$ şartı sağlanmazsa, Petrov tipi **III**, sağlanırsa **N** olur.

Eğer, $\Psi_4 = 0$ ve $\Psi_0 \neq 0$ ise, Ψ_0 ile Ψ_4 ve Ψ_1 ile Ψ_3 değiştirilerek yukarıda verilen algoritma aynen kullanılır. $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$ durumunda ise, köklerin katlılığı verilen cebirsel denklemden bulunur. Başka bir yöntem ise, Weyl tensörü bileşenlerinin durumlarına göre Petrov tipinin belirlenmesidir.

Petrov tipi I: $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$,

Petrov tipi II: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_4 = 0$,

Petrov tipi D: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$,

Petrov tipi III: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$,

Petrov tipi N: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$,

Petrov tipi O: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$.

Gerek (2.13) ile verilen genel B tipi warped çarpım metriği, gerekse özel hali olan (2.29) metriği için verilen hesaplamalardan da görüleceği üzere Weyl tensörü bileşenlerinden yalnızca $\Psi_2 \neq 0$ olup, Petrov tipleri D dir.

Plebanski Sınıflaması: Plebanski sınıflaması, Ricci tensör matrisinin özdeğerlerinin katlılığının, özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin, ışıksal (N), zamansal (T) ve uzaysal (S) olmalarına göre parantez içerisinde verilen notasyonlarla gösterilmesi ile yapılan bir sınıflandırmadır [7]. Ayrıca minimal polinomun formu, köşeli parantezin altında indis olarak (açık parantez ile) yazılacaktır. Burada, B tipi warped çarpım manifold için Ricci tensör matrisini

yeniden yazalım.

$$R_a^b = 2 \begin{pmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} & 0 & 0 \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Phi_{11} + 3\Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{pmatrix}$$

Bu matris için, özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2(\Phi_{11} - 3\Lambda) - 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}, \\ \lambda_2 &= -2(\Phi_{11} - 3\Lambda) + 2\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = 2(\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmişti. Ricci tensör matrisinin karakteristik polinomu

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)^2 = 0$$

şeklinde olup, minimal polinomu

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$$

dır. Bu sonuç, notasyon olarak köşeli parantezin indisi olarak $(1 \ 1 \ 1)$ ile gösterilecektir. $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere λ_i özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\Phi_{00}}{\Phi_{22}}} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\Phi_{00}}{\Phi_{22}}} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilmişti. Özvektörlerden de görüleceği üzere $V^{(1)}$, $V^{(3)}$, $V^{(4)}$ uzaysal, $V^{(2)}$ ise zamansal özvektörlerdir. $\lambda_3 = \lambda_4$ olduğu için bu özdeğerin katlılığı $2S_1$ ile, λ_1 özdeğerinin katlılığı S_2 ile ve λ_2 özdeğerinin katlılığı da T notasyonunu ile gösterilecektir. Böylece, B tipi warped çarpım bir metrik için Plebanski sınıflaması

$$[2S_1 - S_2 - T]_{(111)}$$

şeklinde olacaktır.

3. (3+1)-BOYUTTA SKALER ALANIN KUPLE EDİLMESİYLE ELDE EDİLEN STATİK TAM ÇÖZÜMLER

3.1. Giriş

Bu bölümde, (3+1)-boyutta Einstein alan denklemleri, küresel simetrik metriğe kütleli skaler alanın kuple edilmesiyle çalışıldı. Başlangıçta “over determined” olan orijinal sistem, a , α , r ve m değişkenleri kaynak [10] da olduğu gibi kullanılarak, $\mu = \frac{m}{r}$ ve $y = \frac{\alpha}{ra}$ fonksiyonları için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden normal bir sisteme (over determined olmayan) indirildi. Pozitif ve negatif dal tanımları yapıldı.

μ ve y çözümleri için, zamandan bağımsız (statik) duruma skaler alanın $\phi_t = 0$ (pozitif dal) veya $\phi_s = 0$ (negatif dal) olması durumunda geçildi. Pozitif ve negatif dallar için zamandan bağımsız özel çözümler verildi. Her iki dal için, Schwarzschild çözümünün $\phi = 0$ ve $\mu_s + \mu = 0$ durumunda olduğu görüldü.

Pozitif dal olarak adlandırdığımız statik durum için tam çözüm, ilk olarak 1948 yılında farklı bir koordinat sisteminde Fisher [13] tarafından elde edilmiş ve daha sonraki yıllarda da defalarca yeniden keşfedilmiştir. Biz de bu çalışmalardan bağımsız olarak pozitif dal için tam çözüm elde ettik. Ayrıca, pozitif dal dinamik bir sistem olarak ele alındı ve faz düzlemi analizi yapıldı. $\mu = 0$ aşık çözümlerinin $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde bir genel çekim noktası olduğu kanıtlandı.

Wyman [20] tarafından yalnızca pertürbatif olarak çalışılan ve bunun dışında literatürde dikkati çekmemiş olan, negatif dal olarak adlandırdığımız statik durum için ise, çözümün açık analitik bir ifadesi elde edilemedi. Ancak, negatif dal dinamik bir sistem olarak incelendi ve tüm çözüm eğrileri karakterize edilerek tam çözümler kapalı formda elde edildi. Bu çerçevede, sistemin iki kritik noktası $(0, 0)$ ve $(\frac{1}{4}, 0)$ etrafında lineerleştirmeler yapıldı ve $(0, 0)$ noktasının bir semer noktası, $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasının ise $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde genel bir çekim noktası olduğu ispat edildi.

Ayrıca, negatif dal için $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde nümerik çözümler $\mu - \mu_s$ düzleminde çeşitli başlangıç koşulları için çalışıldı, çözüm eğrileri Şekil 3.10 da, y, μ ve $\frac{\phi_t}{y}$ nin s e karşı değişimleri de Şekil 3.11 de verildi. Lineer kısmın periodu 3.62 olarak hesaplandı. Lineer olmayan sistem için period hesabı, $\mu - \mu_s$ düzlemindeki çözüm eğrisinin salınımları kullanılarak nümerik olarak yapıldı ve 3.62 ye oldukça yakın bir period bulundu. İndirgenmiş orijinal normal sistemde, negatif dalın lineer kısmında zaman yönündeki ikinci türev ifadesi yerine konumun birinci türevinin k katı alındı ve küçük bir dönüşümden sonra, periodun yalnızca $k = 0.3704$ için 3.44 olduğu gözlemlendi. Bu ise Choptuik tarafından kaynak [10]'da elde edilen period ve kritik üsle uyushmaktadır. Bölüm 3.7, elde edilen çözümlerin enerji şartları çalışıldı ve negatif dalın mükemmel bir akışkan olarak yorumlanabileceği gösterildi.

3.2. Einstein Alan Denklemleri

M , (3+1)-boyutlu Lorentz manifoldu olsun. $x^\mu = (t, r, \varphi, \theta)$ yerel koordinatlar olmak üzere, M manifoldu üzerindeki küresel simetrik metrik aşağıdaki şekilde verilir [10].

$$ds^2 = -\alpha(t, r)^2 dt^2 + a(t, r)^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2. \quad (3.1)$$

Burada, $t_0 \leq t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \pi$ ve $0 < \theta < 2\pi$ dir.

Şimdi, bu metrik için alan denklemlerinin elde edilmesinde kullanılacak gerekli büyüklükleri hesaplayalım.

İkinci tipten Christoffel sembolleri:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\alpha_t}{\alpha}, \quad \Gamma_{tt}^r = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \frac{\alpha_r}{\alpha}, \quad \Gamma_{tr}^t = \frac{\alpha_r}{\alpha}, \quad \Gamma_{tr}^r = \frac{a_t}{a}, \quad \Gamma_{rr}^t = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \frac{a_t}{a}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{a_r}{a}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{a^2}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\theta = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r \sin^2 \varphi}{a^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Eğrilik tensörü bileşenleri:

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= a^2 \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] + \alpha^2 \left[\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} \right], \\ R_{t\varphi t\varphi} &= r \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \frac{\alpha_r}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{t\varphi r\varphi} &= r \frac{a_t}{a}, \\
R_{r\varphi r\varphi} &= r \frac{a_r}{a}, \\
R_{t\theta t\theta} &= r \sin^2 \varphi \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \frac{\alpha_r}{\alpha}, \\
R_{t\theta r\theta} &= r \sin^2 \varphi \frac{a_t}{a}, \\
R_{r\theta r\theta} &= r \sin^2 \varphi \frac{a_r}{a}, \\
R_{\varphi\theta\varphi\theta} &= r^2 \sin^2 \varphi \left[1 - \frac{1}{a^2} \right].
\end{aligned}$$

Ricci tensörü bileşenleri:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] + \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \left[\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{2}{r} \frac{\alpha_r}{\alpha} \right], \\
R_{tr} &= \frac{2}{r} \frac{a_t}{a}, \\
R_{rr} &= \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \left[\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] + \left[-\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} + \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{2}{r} \frac{a_r}{\alpha} \right], \\
R_{\varphi\varphi} &= \frac{r}{a^2} \left[\frac{a_r}{a} - \frac{\alpha_r}{\alpha} \right] + \left[1 - \frac{1}{a^2} \right], \\
R_{\theta\theta} &= \sin^2 \varphi [R_{\varphi\varphi}].
\end{aligned}$$

Ricci skaleri R :

$$R = \frac{2}{\alpha^2} \left[\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] + \frac{2}{a^2} \left[-\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} + \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{2}{r} \frac{a_r}{a} - \frac{2}{r} \frac{\alpha_r}{\alpha} \right] + \frac{2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \right].$$

Einstein alan denklemi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Kütlesiz skaler alan için enerji momentum tensörü [43]

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi) \quad (3.3)$$

şeklinde olur ve skaler alan ϕ aşağıdaki dalga denklemini sağlar.

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (-g)^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] = 0. \quad (3.4)$$

Burada, $\det |g_{\mu\nu}| = g$ olarak tanımlanır [44].

(3.3) denkleminde, enerji momentum tensörü bileşenleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
T_{tt} &= \frac{1}{2} \left[\phi_t^2 + \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \phi_r^2 \right], \quad T_{tr} = \phi_t \phi_r, \quad T_{rr} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right], \\
T_{\varphi\varphi} &= \frac{r^2}{2} \left[\frac{\phi_t^2}{\alpha^2} - \frac{\phi_r^2}{a^2} \right], \quad T_{\theta\theta} = \sin^2 \varphi T_{\varphi\varphi}
\end{aligned}$$

elde edilir. κ gravitasyonel sabiti 8π olarak seçilip [10], (3.2) ve (3.3) denklemleri kullanılırsa, Einstein alan denklemlerinin tamamı ve skaler alan için dalga denklemi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{a_r}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 2\pi r \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 - 2\pi r \phi_r^2 = 0, \quad (3.5a)$$

$$\frac{a_t}{a} = 4\pi r \phi_t \phi_r, \quad (3.5b)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1 - a^2}{2r} - 2\pi r \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 - 2\pi r \phi_r^2 = 0, \quad (3.5c)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \right] + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] - 4\pi \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 + 4\pi \phi_r^2 = 0, \quad (3.5d)$$

$$\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right) \phi_t \right]_t = \frac{1}{r^2} \left[r^2 \left(\frac{\alpha}{a}\right) \phi_r \right]_r. \quad (3.5e)$$

(3.5.a, b) denklemleri kullanılarak, alan denklemleri yeniden düzenlenirse, aşağıda verilen (3.6a-e) denklem takımına ulaşılır.

$$\frac{a_t}{a} = 4\pi r \phi_t \phi_r \quad (3.6a)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} + \frac{1 - a^2}{r} = 0 \quad (3.6b)$$

$$\frac{a_r}{a} + \frac{\alpha_r}{\alpha} = 4\pi r \left[\phi_r^2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 \right] \quad (3.6c)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \right] + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] - 4\pi \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 + 4\pi \phi_r^2 = 0, \quad (3.6d)$$

$$\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right) \phi_t \right]_t = \frac{1}{r^2} \left[r^2 \left(\frac{\alpha}{a}\right) \phi_r \right]_r. \quad (3.6e)$$

(3.6d) ve (3.6e) denklemleri özdeş olup sistem integre edilebilirdir. Dolayısıyla, (3.6a-c,e) den meydana gelen denklem takımıyla çalışmak yeterlidir. Bu dört denklem, a , α ve ϕ için “over determined” sistem olup genel çözüm içinde serbestlik derecesi, tek değişkenli üç keyfi fonksiyon olarak görünür.

Literatürde, eşik davranışı (threshold behavior) (3.6b,c,e) den oluşan sistemde ϕ üzerine verilen çeşitli başlangıç koşulları için çalışılmıştır. Biz burada literatürden farklı olarak Harrison [45] gibi (3.6a) denklemini de kullanacağız. Önce, $a(t, r)$ yerine $m(t, r)$ fonksiyonu tanımlayıp, daha sonra da logaritmik koordinatlara geçerek over determined olmayan normal bir sistem elde edeceğiz.

(3.6.a-d) denklemleri eğrilik tensörü bileşenlerinde kullanılırsa, eğrilik tensörü bileşenleri:

$$\begin{aligned}
R_{trtr} &= \alpha^2 \left[\frac{1-a^2}{r} \right] - 4\pi\alpha^2 \left[\phi_r^2 - \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 \right], \\
R_{t\varphi t\varphi} &= \frac{\alpha^2}{2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \right] + 2\pi r^2 \left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \left[\phi_r^2 + \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 \right], \\
R_{t\varphi r\varphi} &= 4\pi r^2 \phi_t \phi_r, \\
R_{r\varphi r\varphi} &= \left[\frac{1-a^2}{2} \right] + 2\pi r^2 \left[\phi_r^2 + \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 \right], \\
R_{t\theta t\theta} &= \sin^2 \varphi [R_{t\varphi t\varphi}], \\
R_{t\theta r\theta} &= \sin^2 \varphi [R_{t\varphi r\varphi}], \\
R_{r\theta r\theta} &= \sin^2 \varphi [R_{r\varphi r\varphi}], \\
R_{\varphi\theta\varphi\theta} &= r^2 \sin^2 \varphi \left[1 - \frac{1}{a^2} \right].
\end{aligned}$$

Ricci tensörü bileşenleri:

$$R_{tt} = 8\pi\phi_t^2, \quad R_{tr} = 8\pi\phi_t\phi_r, \quad R_{rr} = 8\pi\phi_r^2.$$

Ricci skaleri R :

$$R = \frac{8\pi}{a^2} \left[\phi_r^2 - \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 \right].$$

Şimdi, bir dizi koordinat dönüşü kullanarak üç değişkenli ve üç bilinmeyenli normal bir sistem elde edelim. İlk olarak, (3.6b) denklemi $\left(\frac{\alpha}{a} \right)$ ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\left[\frac{\alpha}{a} \right]_r = \left[\frac{\alpha}{a} \right] \frac{a^2 - 1}{r}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi, aşağıda (3.7) ile verilen değişkenleri alan denklemlerinde kullanalım.

$$z = \left[\frac{\alpha}{a} \right], \quad a^2 = \left[1 - \frac{2m}{r} \right]^{-1}. \quad (3.7)$$

Burada, $r > 0$ olduğu için $a^2 > 0$ olması için $r - 2m > 0$ olması gerektiğine dikkat çekelim. (3.6a-c,e) ile verilen alan denklemleri (3.7) dönüşümü ile

$$\frac{z_r}{z} = \frac{2m}{r(r-2m)} \quad (3.8a)$$

$$\frac{m_t}{r(r-2m)} = 4\pi\phi_t\phi_r \quad (3.8b)$$

$$\frac{m_r}{r-2m} = 2\pi \left[\phi_r^2 + \frac{\phi_t^2}{z^2} \right] \quad (3.8c)$$

$$\left[\frac{\phi_t}{z} \right]_t = \frac{1}{r^2} \left[r^2 z \phi_r \right]_r \quad (3.8d)$$

şeklinde yazılırlar. Normal sisteme ulaşmak için, son adım olarak logaritmik koordinatlara aşağıdaki önermeyi vererek geçelim.

Önerme 3.1. (3.8a-d) denklem takımı,

$$s = \ln(r), \quad z = ry, \quad m = r\mu. \quad (3.9)$$

dönüşümleri ile aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (3.10a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(\frac{\mu_t}{y})}{1-2\mu} = 2\phi_s \frac{\phi_t}{y}, \quad (3.10b)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} = \phi_s^2 + \frac{\phi_t^2}{y^2}, \quad (3.10c)$$

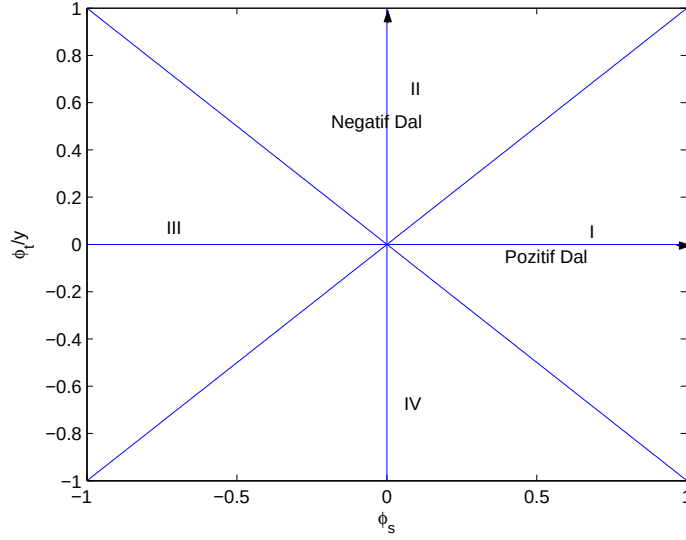
$$\left[\frac{\phi_t}{y} \right]_t = 2y\phi_s + [y\phi_s]_s. \quad (3.10d)$$

Burada, $\mu_s + \mu$ ve $\frac{\mu_t}{y}$ için şu şartlar verilir.

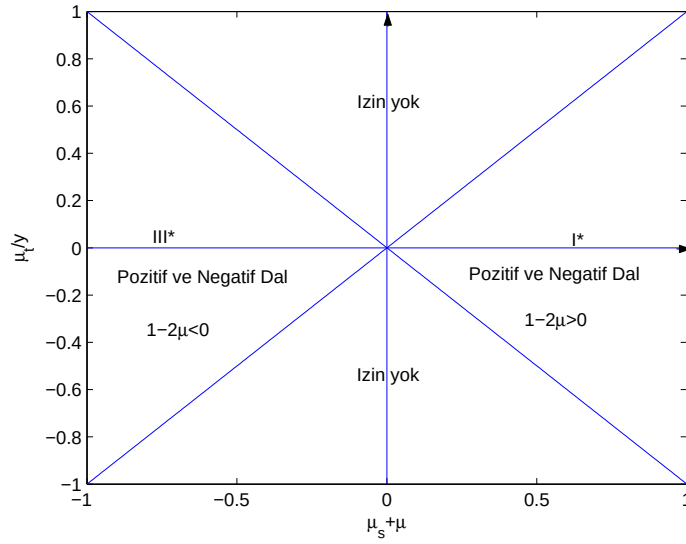
$$\frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \frac{(\mu_s + \mu) \pm (\frac{\mu_t}{y})}{1-2\mu} = \left[\phi_s \pm \frac{\phi_t}{y} \right]^2 \geq 0. \quad (3.11)$$

•

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de gösterilen bölgeler, sırasıyla $\phi_s = \pm \frac{\phi_t}{y}$ ve $\mu_s + \mu = \pm \frac{\mu_t}{y}$ şartlarından belirlenmiştir. (3.10a-d) sistemi, diskret simetri $\phi_s \rightarrow -\phi_s$ altında değişmez olduğundan I ve II bölgelerinde ϕ ile çalışmak yeterlidir. Fakat, Şekil 3.2’de gösterildiği üzere, μ ’lü sistemde $1 - 2\mu > 0$ şartına yalnızca I^* bölgesinde izin verilmektedir. Sonraki alt bölümde görüleceği üzere, I ve II yarım bölgeleri, $(\phi_s, \frac{\phi_t}{y})$ düzlemine I^* çeyrek düzleminin iki katlı örtüsü olarak dönüştürülecektir ve bunlar, “pozitif” ve “negatif” dallar olarak adlandırılacaktır. Burada, I ve II bölgelerinin sınırları, $\phi_s = \pm \frac{\phi_t}{y}$ veya eşdeğer olarak $\mu_s + \mu = \pm \frac{\mu_t}{y}$ ile belirlenmiştir. Aşağıda verilecek olan (3.12b) denklemi, boşluk olmayan $\mu_s + \mu = \pm \frac{\mu_t}{y}$ çözümünü gerektirecektir. Fakat ϕ için dalga denklemini hesaba kattığımızda, $\phi_s = \frac{\phi_t}{y} = 0$, buradan da $\mu_s + \mu = \mu_t = 0$ ifadesine ulaşacağız.



Şekil 3.1. $I - IV$ bölgeleri, $\phi_s = \pm \frac{\phi_t}{y}$ şartından belirlenmiştir. $\phi_s \rightarrow -\phi_s$ diskret simetriden dolayı, I ve II bölgelerinde ϕ ile çalışmak yeterlidir.



Şekil 3.2. I^* ve III^* bölgesi, $\mu_s + \mu = \pm \frac{\mu_t}{y}$ şartından belirlenmiştir ve $1 - 2\mu > 0$ yalnızca I^* bölgesinde pozitiftir.

3.3. Alan Denklemlerinin İndirgenmesi

μ ve y için ikinci dereceden bir sisteme geçişi, alan denklemlerini indirgeyerek yapacağız. Bunun için, (3.10a-d) denklem sisteminden ϕ yi elimine edeceğiz ve μ ve y için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden bir sistem elde edeceğiz. Bunun için aşağıdaki önermeyi verelim. Önermenin ispatı aslında oldukça karmaşık hesaba dayanmaktadır. Bu yüzden, ispatın daha kolay anlaşılması

için, X ve Y gibi yeni değişkenler tanımlayacağız.

Önerme 3.2. (3.10a-d) sistemi, $\phi_s^2 - (\frac{\phi_t}{y})^2 \neq 0$ için aşağıda verilen efektif olarak zamana göre ikinci dereceden sisteme indirgenir.

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{(1-2\mu)}, \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ss} + \mu_s - \frac{1}{y} \left(\frac{\mu_t}{y} \right)_t + \frac{2}{(1-2\mu)} \left[(\mu_s + \mu)^2 + (\mu_s + \mu)\mu - \frac{\mu_t^2}{y^2} \right] \\ \pm 2\epsilon \left[(\mu_s + \mu)^2 - \frac{\mu_t^2}{y^2} \right]^{1/2} = 0. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Burada, $\epsilon = \text{sgn}(1-2\mu)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat. İlk olarak X ve Y yi, sırasıyla (3.10c) ve (3.10b) denklemleri olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} X &= \phi_s^2 + \frac{\phi_t^2}{y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu}, \\ Y &= 2\phi_s \frac{\phi_t}{y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{\mu_t}{y}}{1-2\mu}. \end{aligned}$$

Bu iki ifadeden, $\phi_s = \pm \frac{\phi_t}{y}$ yada eşdeğer olarak $\sqrt{X^2 - Y^2} = 0$ şartını denklemlerin sol yanlarını toplayıp çıkartarak elde edebiliriz. Takip eden kısımda, $X^2 - Y^2 \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Burada şunu not edelimki, $\mu_t = 0$ olması $Y = 0$ olmasını gerektirir. Bu da, ya $\phi_s = 0$ olmasını yada $\phi_t = 0$ olmasını gerektirir. Zamandan bağımsız bu çözümler, 3.4-6 alt bölümlerinde ayrıntılı olarak tartışılacaktır.

Şimdi, $\phi_s \neq 0$ olsun. Y tanımından,

$$\frac{\phi_t}{y} = \frac{Y}{2\phi_s}$$

şeklinde çözülüp, X in tanımında kullanılırsa,

$$\phi_s^4 - X\phi_s^2 + \frac{Y^2}{4} = 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$\phi_s^2 = \frac{1}{2} [X \pm \sqrt{X^2 - Y^2}]$$

çözümleri elde edilir.

$$\Delta = X \pm \sqrt{X^2 - Y^2}$$

olacak şekilde tanımlanırsa, ϕ_s ve $\frac{\phi_t}{y}$ ifadeleri Δ cinsinden,

$$\phi_s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta^{1/2}, \quad \frac{\phi_t}{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} Y \Delta^{-1/2}$$

olarak elde edilir. 3.2 alt bölümünün sonunda da belirtildiği gibi, ϕ_s ve ϕ_t nin işaretleri arasında bir alaka yoktur. Bü yüzden, pozitif işareti seçip devam edeceğiz.

Bulunan bu ifadeler, ϕ skaler alan denkleminde yerlerine yazılıp $\Delta^{1/2}$ ile çarpılırsa, ϕ skaler alan denklemi aşağıda verilen denkleme indirgenir.

$$\frac{1}{y} \left[Y_t - \frac{1}{2} Y \frac{\Delta_t}{\Delta} \right] = \frac{1}{1-2\mu} \Delta + \frac{1}{2} \Delta_s.$$

Δ ifadesi yerine yazılıp gerekli türevler alınırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır. Burada X_s ve Y_t nin katsayıları arasında bir oran vardır.

$$\frac{1}{2} \left[1 \pm X (X^2 - Y^2)^{-1/2} \right] \left[\frac{Y_t}{y} - X_s \right] = \frac{1}{1-2\mu} \left[X \pm \sqrt{X^2 - Y^2} \right] \mp \frac{1}{2} \frac{Y(Y_s - \frac{X_t}{y})}{(X^2 - Y^2)^{1/2}}.$$

Buradan da,

$$Y_s - \frac{X_t}{y} = -\frac{4\mu}{1-2\mu} Y$$

olur. Böylece,

$$X_s - \frac{Y_t}{y} + \frac{4\mu}{1-2\mu} X \pm 2\sqrt{X^2 - Y^2} = 0$$

elde edilir ki bu (3.12b) denklemdir. •

Bundan sonra, bölümün sonuna kadar $\mu_s + \mu > 0$ olduğunu kabul edeceğiz, bu ise (3.12b) denkleminde $\epsilon = 1$ seçilmesi anlamına gelir. (3.12b) denklemindeki karekökün önündeki işaretin $+$ veya $-$ olması durumlarını sırasıyla pozitif ve negatif dal olarak adlandıracacağız. Bir sonraki bölümde de görüleceği üzere, zamandan bağımsız durumda pozitif dal $\phi_t = 0$ olması durumuna, negatif dal ise $\phi_s = 0$ olması durumuna karşılık gelecektir.

3.4. Statik Özel Çözümler

Bu alt bölümde bütün dikkatimizi, zamandan bağımsız (statik) özel çözümlere vereceğiz. Bunun için, (3.10b) denkleminde $\mu_t = 0$ alalım. Bu ise, $\phi_s = 0$ veya $\phi_t = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda alan denklemleri, pozitif ve negatif dallar için aşağıdaki şekilde yazılırlar.

I. $\phi_t = 0$ (pozitif dal):

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (3.13a)$$

$$\mu_{ss} + \mu_s + \frac{2}{1-2\mu}(\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) + 2(\mu_s + \mu) = 0, \quad (3.13b)$$

$$\phi_s^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu}. \quad (3.13c)$$

II. $\phi_s = 0$ (negatif dal):

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (3.14a)$$

$$\mu_{ss} + \mu_s + \frac{2}{1-2\mu}(\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) - 2(\mu_s + \mu) = 0, \quad (3.14b)$$

$$\frac{\phi_t^2}{y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu}. \quad (3.14c)$$

Şimdi, zamandan bağımsız özel çözümleri vereceğiz. Daha sonra da pozitif dal için tam çözümü verip, son olarak da negatif dal için çözümü Bölüm 3.6 da çalışacağız.

y_o ve μ_o keyfi integrasyon sabitleri olmak üzere, statik özel çözümler aşağıda (3.15-18) denklemleriyle verilmiştir.

1. $\mu = 0$, pozitif ve negatif dal için bir çözümdür. (3.13c) ve (3.14c) denklemlerinden de görüleceği üzere, $\phi_s = \phi_t = 0$ durumudur. (3.13a) veya (3.14a) denkleminde $y = y_o e^{-s}$ olarak elde edilir. Bu durumda aşağıda verilen düz (flat) yay elmanına ulaşılır.

$$ds^2 = -y_o^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2. \quad (3.15)$$

2. $\mu = \frac{1}{4}$, negatif dal için bir çözüm olup, $\phi_s = 0$ ve $\frac{\phi_t}{y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ durumuna karşılık gelir. Bu durumda (3.14a) denkleminde, $\frac{y_s}{y} = 0$ olup $y = y_o$ şeklinde bir sabittir. Yay elemanı ise şu şekilde yazılır.

$$ds^2 = -2y_o^2 r^2 dt^2 + 2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2. \quad (3.16)$$

Sıfırdan farklı tek Ricci tensörü bileşeni $R_{tt} = 2y_o^2$ 'dir. Ricci skaleri R ise, $R = -\frac{1}{r^2}$ olarak hesaplanır.

3. $\mu_s + \mu = 0$, pozitif ve negatif dal için ortak olan özel çözümlerden ikincisidir. İntegre edilerek, $\mu = \mu_o e^{-s}$ olarak elde edilir. (3.13a) veya (3.14a) de yerine

yazılıp gerekli integrasyon yapılsa, $y = \frac{y_o}{\mu_o} \mu |1 - 2\mu|$ olarak elde edilir. Bu çözüm çok iyi bilinen Schwarzschild çözümüdür. Yay elemanı ise,

$$ds^2 = -y_o^2 \left[1 - \frac{2\mu_o}{r} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2\mu_o}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır.

4. $\mu_s + 2\mu = 0$, yalnızca pozitif dal için özel çözüm olup, $\mu = \mu_o e^{-2s}$ olarak elde edilir. (3.13a) denkleminde yerine yazılıp integre edilirse $y = y_o \left| \frac{\mu}{\mu_o} \right|^{1/2} |1 - 2\mu|^{1/2}$ olarak bulunur. Bu durum için yay elemanı ise

$$ds^2 = -y_o^2 dt^2 + \left[1 - \frac{2\mu_o}{r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Sıfırdan farklı tek Ricci tensörü bileşeni $R_{rr} = \frac{4\mu_o}{r^2(2\mu_o - r^2)}$ olup, Ricci skaleri R ise $R = -\frac{4\mu_o}{r^4}$ olarak hesaplanmıştır.

3.5. Statik Metrik: Pozitif Dal İçin Tam Çözüm; Faz Düzlemi Analizi

Bir önceki alt bölümde (3.13a-c) ile verilen denklem takımını alalım ve hesaplarda kolaylık olması açısından $\psi = \phi_s$ notasyonu ile alan denklemlerini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım.

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1 - 2\mu} = \frac{4\mu - 1}{1 - 2\mu}, \quad (3.19a)$$

$$\mu_s = -\mu + 2\pi(1 - 2\mu)\psi^2, \quad (3.19b)$$

$$\frac{\psi_s}{\psi} = -\frac{1}{1 - 2\mu}. \quad (3.19c)$$

Şimdi, (3.19a-c) adi diferansiyel denklem sistemi için tam çözümü veren aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.3. y_o , r_o ve c integrasyon sabitleri olmak üzere, (3.19a-c) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü,

$$\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi}{\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi}} \right], \quad (3.20)$$

$$\frac{y}{y_o} = |\psi| |\psi - p|^{B_1} |\psi + q|^{B_2}, \quad (3.21)$$

$$\frac{r}{r_o} = |\psi|^{-1} |\psi - p|^{C_1} |\psi + q|^{C_2} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\psi = \phi_s$, $r = e^s$ dir. Ayrıca,

$$p = \frac{1}{8\pi} \left(c + \sqrt{c^2 + 16\pi} \right) = \frac{c}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{\delta} \right), \quad (3.23a)$$

$$q = \frac{1}{8\pi} \left(-c + \sqrt{c^2 + 16\pi} \right) = \frac{c}{8\pi} \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right), \quad (3.23b)$$

$$B_1 = -(1 - \delta), \quad B_2 = -(1 + \delta), \quad C_1 = \frac{1}{2}(1 - \delta), \quad C_2 = \frac{1}{2}(1 + \delta), \quad (3.23c)$$

olmak üzere δ sabiti,

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 16\pi}} \quad (3.24)$$

olarak verilir.

İspat. $u = (1 - 2\mu)\psi$ olsun. u nun ψ ye göre türevi alınıp, (3.19b,c) denklemleri kullanılırsa, aşağıdaki değişkenlerine ayrılabilen denkleme ulaşılır.

$$\frac{du}{d\psi} = u^2 \left(4\pi + \frac{1}{\psi^2} \right).$$

Bu denklemin çözümü, c keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u = \frac{\psi}{1 + c\psi - 4\pi\psi^2}$$

olarak elde edilir. u nun tanımından da μ , ψ nin bir fonksiyonu olarak (3.20) de verilen şekliyle elde edilir. $\psi = p$ ve $\psi = -q$ düşey asimtotlar olup, p ve q değerleri (2.23a,b) denklemlerinde verilmiştir.

y nin çözümü için, (3.19a) ve (3.19c) denklemleri kullanılırsa, $A = 1$ ve (3.23c) de verilen B_1 ve B_2 için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\psi}{\psi} (1 - 4\mu) = \frac{d\psi}{\psi} \frac{[-\psi^2 + \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi}]}{[\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi}]} = d\psi \left[\frac{A}{\psi} + \frac{B_1}{\psi - p} + \frac{B_2}{\psi + q} \right].$$

Bu ifade integre edilirse y ifadesinin (3.21) de verilen şekline ulaşılır.

Son olarak, μ değeri, (3.19c) de yerine yazılırsa

$$\frac{d\psi}{4\pi\psi(\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi})} = d\psi \left[\frac{A}{\psi} + \frac{C_1}{\psi - p} + \frac{C_2}{\psi + q} \right] = ds$$

elde edilir. Burada, $A = -1$, C_1 ve C_2 değerleri ise (3.23) de verildiği gibidir. Bu son ifade integre edilirse, gerekli düzenlemeden sonra (3.22) denkleminde ulaşılır.

•

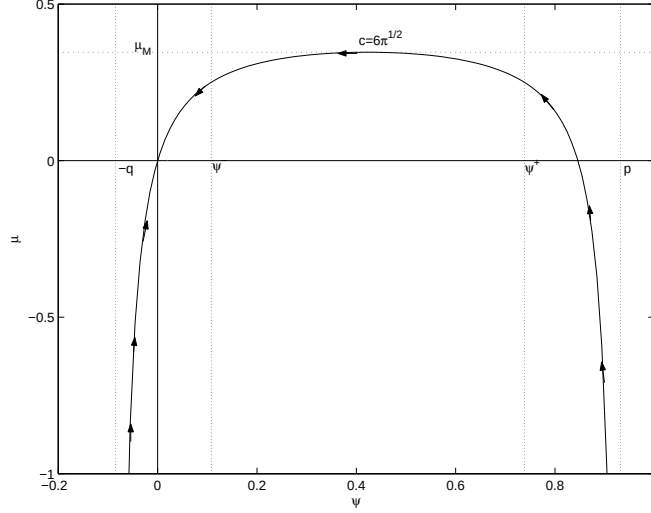
(3.20) çözümünde $\psi = p$ ve $\psi = -q$ düşey asimtotlar olup, $-q < \psi < p$ bölgesinde, μ nün değeri $\frac{1}{2}$ den küçüktür ve $\psi_M = \frac{c}{8\pi}$ de ise aşağıda verilen tek bir maksimuma sahiptir.

$$\mu_M = \mu(\psi_M) = \mu(c/8\pi) = \frac{1}{2} \frac{c^2}{c^2 + 16\pi} = \frac{1}{2} \delta^2. \quad (3.25)$$

$|c| > 4\sqrt{\pi}$ için, $\mu = 1/2$ seviyesi, $\psi^\pm$ de iki kez aşılr.

$$\psi^\pm = \frac{1}{8\pi} \left(c \pm \sqrt{c^2 - 16\pi} \right). \quad (3.26)$$

$c = 6\sqrt{\pi}$ değeri için, ψ ye karşı μ nün grafiğı Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3. $-q < \phi_s = \psi < p$ aralğında $c = 6\sqrt{\pi}$ değeri için μ nün ϕ_s e karşı değışimi. $p, q, \psi^\pm$ ve μ_M değeri ilgili denklemlerden alınmıştır.

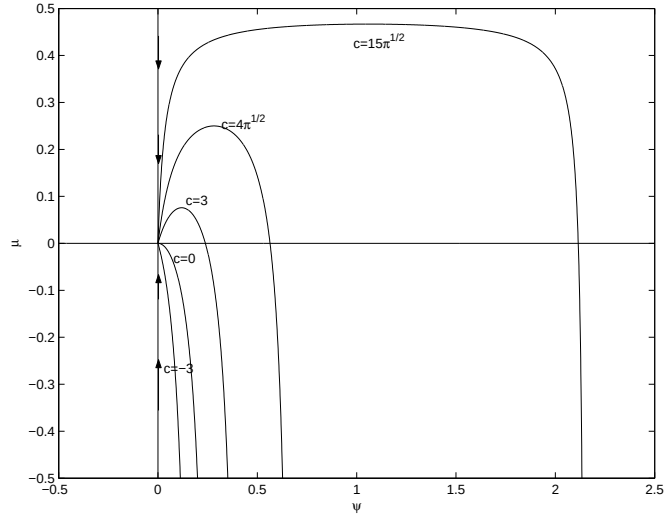
Ayrıca, şunu belirtelim ki,

$$\frac{d\mu}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \frac{1}{2}c,$$

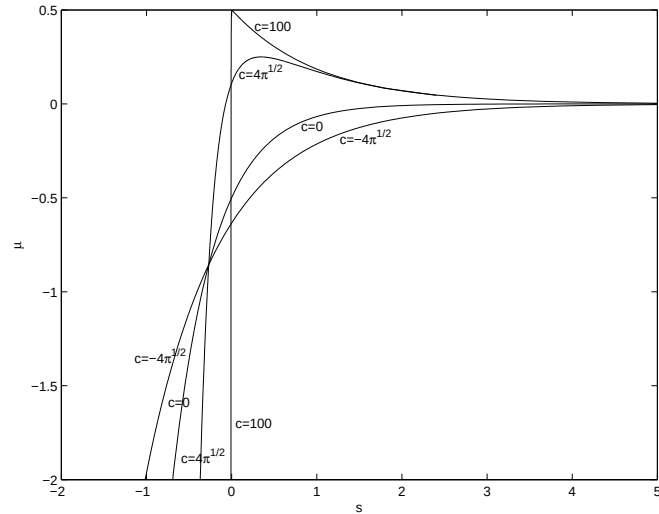
olup, c parametresi, $\mu(\psi)$ eğrisinin $\psi = 0$ noktasında veya $s \rightarrow \infty$ da eğimidir. Burada, $\psi > 0$ olduğunu kabul edeceğiz ve dikkatimizi ψ nin $0 < \psi < p$ bölgesine vereceğiz. c nin negatif ve sıfır olması, μ nün negatif olmasını gerektirmektedir. Bu durumda, ψ, p den 0'a değışirken, $\mu -\infty$ dan 0 a kadar değışir. $0 < c < 4\sqrt{\pi}$ için μ, ψ_M de bir maksimuma sahiptir fakat bu $\mu = \frac{1}{4}$ çizgisinin altında kalır. c nin gittikçe artan değeriinde, çözüm eğrisi, $\mu = \frac{1}{2}, \psi = p$ ve $\psi = -q$ tarafından sınırlanan bölgenin köşelerine çarpmadan fakat çok yakın olarak geçer. $c = 4\sqrt{\pi}$ kritik değeri için, $\psi_M = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ ve $p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(-1 + \sqrt{2})$ de $\mu_M = \frac{1}{4}$ olur. Bu durumlarla ilgili tipik çözüm eğrileri Şekil 3.4 de sunulmuştur. Ayrıca, $-\infty < s < \infty$ aralğında çeşitli c değeri için μ nün s e karşı değışimi Şekil 3.5 de verilmiştir.

Burada, çözümlerin oldukça detaylı olarak incelenmesinin ve grafiklerinin verilmesinin temel nedeni şudur. (3.19a-c) sistemi nümerik olarak da çeşitli başlangıç koşulları gözönüne alınarak çalışılmıştır. Analitik çözümden söylendiğı

gibi artan c değerlerinde çözüm eğrileri bölgenin köşelerine çarpadan çok yakın geçmektedir. Fakat, nümerik olarak bu durum gözlenememektedir. ψ için $\frac{1}{2}$ çizgisine çok yakın verilen başlangıç değerlerinde, çözüm eğrilerinin bölgenin sınırlarına çarptığı hatta kestiği gözlenmiştir. Ayrıca, çözümün genel davranışı, nümerik çalışmalarla tam olarak tespit edilememekle birlikte yalnızca $0 < \psi < p$ bölgesindeki çözümler gözlenebilmiştir. Bu yüzden, analitik incelemeler ve verilen ayrıntılı grafikler çözümlerin genel davranışının iyi anlaşılması açısından oldukça önem taşımaktadır.

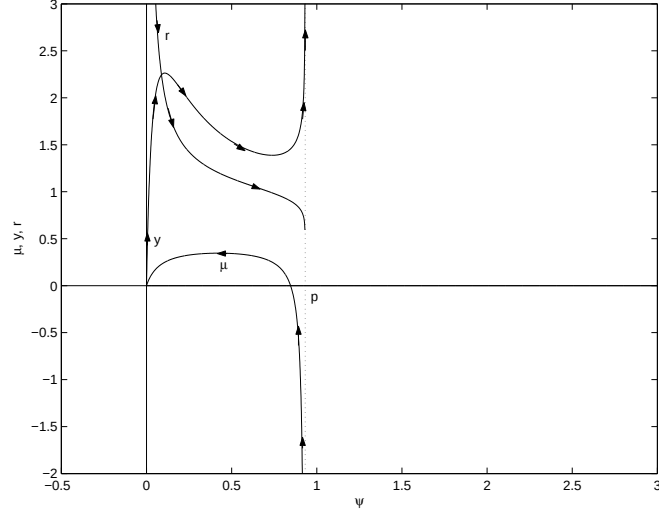


Şekil 3.4. $0 < \psi < p$ aralığında çeşitli c değerleri için μ nün $\psi = \phi_s$ e karşı değişimi.



Şekil 3.5. $-\infty < s < \infty$ aralığında çeşitli c değerleri için μ 'nün s e karşı değişimi. $c > 0$ için sonlu bir s değerinde μ_M maksimumuna sahipken, $c \leq 0$ için μ monoton olmaktadır. Ayrıca, Şekil 3.4 de görüldüğü üzere μ nün ϕ_s e karşı değişimi düzgün sayılabilir. Fakat, μ nün s e karşı değişimi, büyük c değerleri için oldukça keskin pikler yapmaktadır.

Şimdi, (3.21) ile verilen y çözümü gözönüne alalım. $\frac{dy}{d\psi}$ ifadesi $\psi^\pm$ de yok olur. Bu ise $\mu(\psi^\pm) = \frac{1}{4}$ demektir. Böylece, $|c| \leq 4\sqrt{\pi}$ için, y , ψ nin monoton artan bir fonksiyonu iken, $|c| > 4\sqrt{\pi}$ için y iki tane kritik noktaya sahiptir. Şekil 3.6 da da görüleceği üzere, büyük c değerleri için, y nin ψ ye göre değişimi oldukça keskindir. Ayrıca, $r = e^s$, ψ nin monoton azalan bir fonksiyonu olarak görülebilir. μ , y ve r nin, ψ ye karşı değişimleri Şekil 3.6 da verilmiştir.



Şekil 3.6. $0 < \psi < p$ aralığında $c = 6\sqrt{\pi}$ değeri için μ , y ve r nin $\psi = \phi_s$ e karşı değişimleri. Hatırlanacağı üzere, $c \leq 0$ için μ monotonken $c > 0$ için tek bir maksimuma sahiptir. Diğer taraftan, bütün c ler için ψ monoton azalanken, $c \leq 4\sqrt{\pi}$ için y monoton, $c > 4\sqrt{\pi}$ için ise iki kritik noktaya sahiptir. Burada, y 'nin başlangıç değeri $y_o = 1$ olarak seçilmiştir. Artan s ler için, μ , maksimum değeri μ_M ye çıkar ve daha sonra sıfıra iner. y başlangıç değerinden başlayarak maksimum değerini alır, özellikle büyük c değerleri için, sıfıra doğru yönelir sonra da keskin bir şekilde sonsuza kaçar.

Negatif dal için bu türden bir tam çözüm bulunamadığı için, (3.14b) bir dinamik sistem olarak incelenmiştir. Her iki dalın karşılaştırılması amacıyla (3.13b) pozitif dalını da μ - μ_s düzleminde bir dinamik sistem olarak inceleyeceğiz.

Şimdi $\mu_s = \nu$ alarak, pozitif dal için (3.13b) ile verilen ikinci derecen denklemi dinamik bir sistem olarak aşağıda yeniden yazalım.

$$\begin{bmatrix} \mu_s \\ \nu_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \\ -3\nu - 2\mu - \frac{2}{1-2\mu}(\nu^2 + 3\mu\nu + 2\mu^2) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Bu sistemin tek kritik noktası $(0,0)$ olup bu noktada sistem lineerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) lineer sistemi için özdeğerler -2 ve -1 olarak bulunur. -2 ve -1 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla, $(1, -2)$ ve $(1, -1)$ dir. $\mu_s + \mu = 0$ ve $\mu_s + 2\mu = 0$ tam çözümler, $(0, 0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Şimdi, $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ tarafından sınırlanan yarım düzlemde, $(0, 0)$ noktasının genel bir çekim noktası olduğunu aşağıdaki teoremle ispat edelim.

Toerem 3.1. D , $\mu + \nu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ tarafından sınırlanmış bölge ve $(\mu(s), \nu(s))$ (3.27) sisteminin $(\mu(0), \nu(0))$ ile D bölgesinde başlayan çözüm eğrisi olsun. $(\mu(s), \nu(s))$, $s \in (-\infty, \infty)$ için yine D bölgesinde kalır ve

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mu(s), \nu(s)) = (0, 0)$$

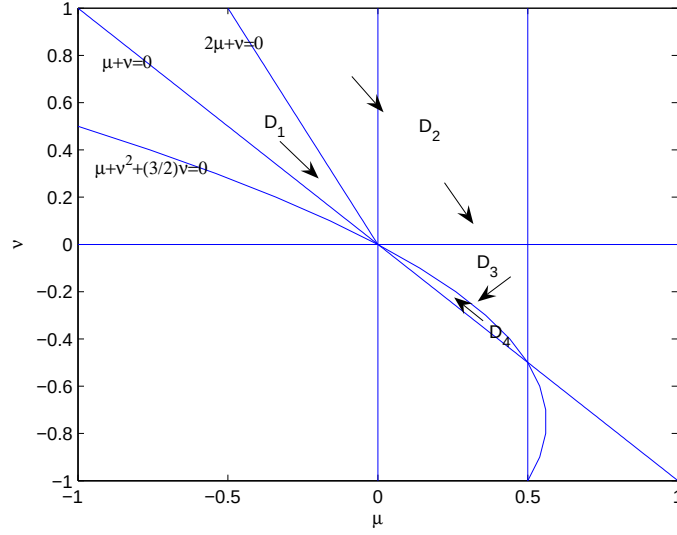
olur.

İspat. (3.27) sistemi düzenlenir ve çözüm eğrilerinin hız vektörü de V ile gösterilirse, V aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V = \left[\nu, -\frac{2}{1-2\mu}(\nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \mu) \right].$$

$1-2\mu$ ifadesi, verilen bölgenin tamamında pozitifdir. Çözüm eğrisinin hız vektörü V nin yönü; ν , $\nu + \mu = 0$, $\nu + 2\mu = 0$ ve $\nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \mu = 0$ kullanılarak belirlenebilir. Bu ise, D bölgesini Şekil 3.7 de de görüleceği üzere aşağıda sınırları verilen dört alt bölgeye ayırır.

Bölge	μ_s	ν_s
$D_1:$ $\nu > 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad 2\mu + \nu < 0.$	> 0	< 0
$D_2:$ $\nu > 0, \quad 2\mu + \nu \geq 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	> 0	< 0
$D_3:$ $\nu \leq 0, \quad \nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \mu > 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	< 0	< 0
$D_4:$ $\nu \leq 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad \nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \mu \leq 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	< 0	> 0



Şekil 3.7. $\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde, (3.27) dinamik sisteminin çözüm eğrilerinin yönleri. Bölge, D_i , $i = 1, \dots, 4$ şeklinde dört alt bölgeye ayrılmış, ve çözüm eğrilerinin yönleri her bir bölge için belirlenmiştir.

Şimdi, dört bölge için çözüm eğrilerinin durumlarını inceleyelim. D_1 bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadranttadır. $\mu + \nu = 0$ ve $2\mu + \nu = 0$ tam çözümlerdir. Çözümün tekliğinden dolayı, hız vektörü bu iki doğruyu kesemez. Yerel davranışı çözüm eğrilerinin orijine gitmesini garantiler.

D_2 bölgesinde de, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur. Burada, çözüm eğrilerinin, $\mu = \frac{1}{2}$ sınırına çarpmadan bir sonraki bölgeye geçeceğini ispat edelim. Bunun için, V hız vektörünün, (μ, ν) noktası ile $(\frac{1}{2}, 0)$ noktasından daha önce birleşeceği ispat edilmelidir. Bunun için de,

$$\left| \frac{\nu_s}{\mu_s} \right| > \left| \frac{\nu}{(\frac{1}{2} - \mu)} \right|$$

eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir. $(1 - 2\mu)$ ve $\mu_s = \nu$ ifadeleri bu bölgede pozitiftir. Buradan,

$$|\nu_s| (1 - 2\mu) - 2\nu^2 > 0$$

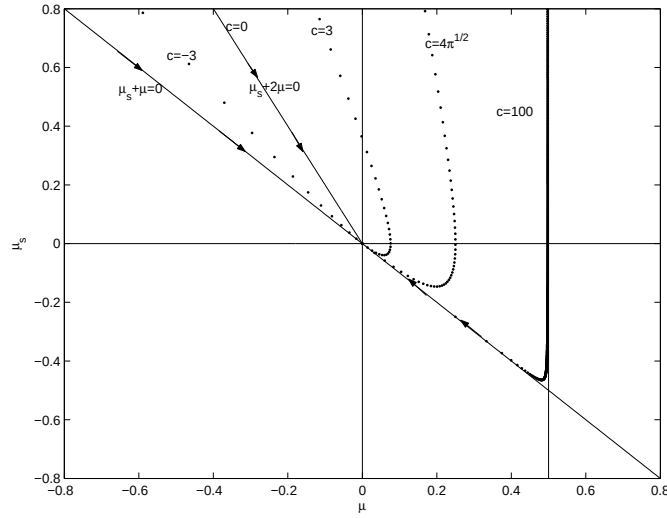
yazılır. Son ifade de ν_s değeri yerine yazılırsa,

$$3\nu + 2\mu > 0$$

elde edilir. ν ve μ bu bölgede pozitif olduğundan eşitsizlik sağlanmış olur ve çözüm eğrileri $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisine çarpmadan $\mu = 0$ eksenini keserek üçüncü bölgeye geçerler.

D_3 bölgesinde, çözüm eğrisinin hız vektörü üçüncü kuadrantta bulunur. Bu bölgede, $\nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \mu = 0$ eğrisine kadar her iki yönde de azalan çözüm eğrilerinin hız vektörü bu eğriyi keserek dördüncü bölgeye düşer. D_4 bölgesinde ise, çözüm eğrilerinin hız vektörü ikinci kuadrantta. Çözümün tekliğinden, $\mu + \nu = 0$ çizgisi kesilemez ve yerel davranışı orijine gitmesini garanti eder. Sonuç olarak, D bölgesinin herhangi bir yerinden başlayan çözüm eğrileri orijine giderler. Bu ise orijinin bir çekim noktası olduğunu gösterir. •

Pozitif dal için, $\mu - \mu_s$ düzlemindeki tipik çözüm eğrileri Şekil 3.8 de tam çözümden yararlanılarak verilmiştir. ψ , s nin monoton bir fonksiyonudur. Faz düzleminde çizilecek eğriler, ψ tarafından parametrize edilmiş gibi düşünülebilir, μ ve μ_s parametrik şekilleri verilebilir. Şekilden de görülebileceği üzere, $\mu_s + \mu = 0$ ve $\mu_s + 2\mu = 0$ doğruları arasında kalan çözüm eğrileri, tam çözümden verilen c sabitinin $-\infty$ dan 0 a kadar değişimine karşılık gelir. $\mu_s + 2\mu = 0$ çözümü ise $c = 0$ olması durumudur. $\mu_s + 2\mu = 0$ doğrusunun ötesindeki çözümler, $s \rightarrow \infty$ için parametrenin sonlu bir değerinde, $\mu = 0$ çizgisini geçerek orijine yaklaşırlar.



Şekil 3.8. $\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde pozitif dal için (3.27) dinamik sisteminin integral eğrileri. $\mu_s + \mu = 0$ ve $\mu_s + 2\mu = 0$ doğruları tam çözümlerdir. $\mu_s + \mu = 0$, $\mu < 0$ yarım çizgisi $c \rightarrow -\infty$ değerine karşılık gelmektedir. Bu yarım çizgi ile $\mu_s + 2\mu = 0$ tam çözümü arasındaki kalan çözüm eğrileri, c nin $-\infty$ dan sıfıra kadar olan değişimine karşılık gelmektedir. Burada μ çözümleri negatif olup, $s \rightarrow \infty$ için monoton artandır ve sıfıra giderler. c pozitif iken, bütün çözüm eğrileri $\mu_M < \frac{1}{2}$ olan maksimum değerlerini alırlar ve $s \rightarrow \infty$ için orijine giderler. Keskin değişiklikler büyük c değerleri için $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisi yakınlarında olmaktadır.

$\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde, $\mu - \mu_s$ düzleminde, (3.27) dinamik sistemi

nümerik olarak da çalışılmıştır ve μ nün $\frac{1}{2}$ değerine çok yakın olarak verilen başlangıç şartlarında çözüm eğrilerinin bölgenin sınırlarına çarptığı gözlenmiştir. Bu ise, analitik çözümünden de anlaşılacağı üzere mümkün değildir.

3.6. Statik Metrik: Negatif Dal İçin Faz Düzlemi Analizi

Faz düzlemi analizi için, önce ikinci dereceden (3.14b) denklemini μ için bir dinamik sistem olarak yazalım.

$$\begin{bmatrix} \mu_s \\ \nu_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \\ \nu + 2\mu - \frac{2}{1-2\mu}(\nu^2 + 3\mu\nu + 2\mu^2) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

burada yine $\nu = \mu_s$ olarak tanımlanmıştır. (3.29) dinamik sisteminin kritik noktaları $(0, 0)$ ve $(\frac{1}{4}, 0)$ dır. $(0, 0)$ noktasında sistem lineerleştirilmesi,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ile verilir. (3.30) lineer sisteminin özdeğerleri -1 ve 2 olup, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla, $(1, -1)$ ve $(1, 2)$ dir. Orijin bir semer noktası olup, çözüm eğrileri, $\nu = -\mu$ boyunca orijine yaklaşırken, $\nu = 2\mu$ boyunca ise orijinden uzaklaşır.

İkinci olarak, (3.29) sistemi $(\frac{1}{4}, 0)$ kritik noktasında lineerleştirilirse aşağıdaki sisteme ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

(3.31) lineer sisteminin özdeğerleri $-1 \pm i\sqrt{3}$ olup, $(\frac{1}{4}, 0)$ noktası kararlı odak noktasıdır.

Çözüm eğrilerinin, $(0, 0)$ ve $(\frac{1}{4}, 0)$ noktalarının yakınlarındaki yerel davranışları, çözümlerin global davranışları için oldukça önemlidir. Şimdi, $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ tarafından sınırlanan yarım düzlemde, $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasının genel bir çekim noktası olduğunu ispat edeceğiz.

Toerem 3.2. *D , $\mu + \nu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ tarafından sınırlanmış bölge ve $(\mu(s), \nu(s))$ (3.29) sisteminin $(\mu(0), \nu(0))$ ile D bölgesinde başlayan çözüm eğrisi olsun. $(\mu(s), \nu(s))$, $s \in (-\infty, \infty)$ için yine D bölgesinde kalır ve*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mu(s), \nu(s)) = (\frac{1}{4}, 0)$$

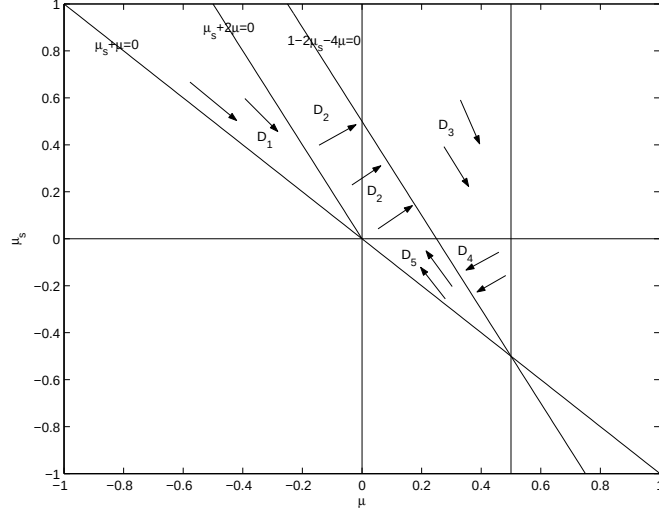
olur.

İspat. V , çözüm eğrilerinin hız vektörü olsun. Bu durumda, V aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V = \left[\nu, -\frac{2}{(1-2\mu)}(\nu+2\mu)(\nu+2\mu-\frac{1}{2}) \right]. \quad (3.32)$$

$1-2\mu$ ifadesi, D bölgesinin tamamında pozitiftir. Çözüm eğrisinin hız vektörü V nin yönü, ν , $\nu+2\mu$ ve $\nu+2\mu-\frac{1}{2}$ ifadelerinin işaretlerinden belirlenebilir. Bu ise, D bölgesini Şekil 3.9 da da görüleceği üzere aşağıda sınırları verilen beş alt bölgeye ayırır.

Bölge	μ_s	ν_s
$D_1: \quad \nu > 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad 2\mu + \nu < 0.$	> 0	< 0
$D_2: \quad \nu > 0, \quad 2\mu + \nu \geq 0, \quad 1 - 4\mu - 2\nu < 0.$	> 0	> 0
$D_3: \quad \nu > 0, \quad 1 - 4\mu - 2\nu \geq 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	> 0	< 0
$D_4: \quad \nu \leq 0, \quad 1 - 4\mu - 2\nu > 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	< 0	< 0
$D_5: \quad \nu \leq 0, \quad \mu + \nu > 0, \quad 1 - 4\mu - 2\nu \leq 0, \quad \mu < \frac{1}{2}.$	< 0	> 0



Şekil 3.9. $\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde, (3.29) dinamik sisteminin çözüm eğrilerinin yönleri. Bölge, D_i , $i = 1, \dots, 5$ şeklinde beş alt bölgeye ayrılmış, ve çözüm eğrilerinin yönleri her bir bölge için belirlenmiştir.

Şimdi, yukarıda verilen her bir bölge için çözüm eğrilerinin durumlarını inceleyelim. D_1 bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta

bulunur. $\mu + \nu = 0$ tam çözümdür. Çözümün tekliğinden dolayı, hız vektörü bu doğruyu kesemez. Dahası, orijinin bir semer noktası olmasından dolayı yön olarak orijine yönelen çözüm eğrileri, orijine yaklaştıkça orijin tarafından uzaklaştırılacaktır. Dolayısıyla $\nu + 2\mu = 0$ çizgisini keserek D_2 bölgesine geçecektir.

D_2 bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü birinci kuadrantta bulunur. Bu bölgedeki yönden dolayı, s artarken her bir çözüm eğrisi D_3 bölgesine geçer.

D_3 bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur. Burada, çözüm eğrilerinin, $\nu + 2\mu = \frac{1}{2}$ ve $\mu = \frac{1}{2}$ sınırlarına çarpmadan bir sonraki bölgeye geçeceğini ispat edelim.

Öncelikle, çözüm eğrisinin $\nu = -2\mu + \frac{1}{2}$ sınırına çarpmaması için, hız vektörünün eğiminin -2 den daha büyük olduğunu ispat etmemiz gerekecektir. Bunun için de,

$$(\nu + 2\mu)(\nu + 2\mu - \frac{1}{2}) < \nu(1 - 2\mu)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. Yukarıdaki ifadenin eşitliği durumu bir hiperbol tanımlar. Bölgedeki $\nu + 2\mu = \frac{1}{2}$ yarım çizgisi, $\mu < \frac{1}{4}$ çizgileri eşitsizliği sağlarlar. Böylece, $\nu = 0$ seviyesinden gelen V hız vektörü, $\nu + 2\mu = \frac{1}{2}$ çizgisinden gittikçe uzaklaşır. Diğer taraftan, $(\frac{1}{4}, 0)$ noktası bir odak noktası olduğundan, çözüm eğrileri ν gittikçe sıfıra yaklaşırken asla bu noktaya çarpmazlar ve böylece $\mu = \frac{1}{4}$ düşey çizgisini keserler.

Çözüm eğrilerinin bir (μ, ν) noktasında, $\mu > \frac{1}{4}$ için, $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisine çarpmayacağını ispat edelim. Bunun için, V hız vektörünün, (μ, ν) noktası ile $(\frac{1}{2}, 0)$ noktasından daha önce birleşeceğini ispat etmemiz gerekir. Bunun içinde şu eşitsizliği ispat etmek yeterlidir.

$$| \frac{\nu_s}{\mu_s} | > | \frac{\nu}{(\frac{1}{2} - \mu)} | .$$

$(1 - 2\mu)$ ve $\mu_s = \nu$ nün bu bölgede pozitifliğinden,

$$| \nu_s | (1 - 2\mu) - 2\nu^2 > 0$$

yazılır. Bu ifadede ν_s değeri yerine yazılırsa,

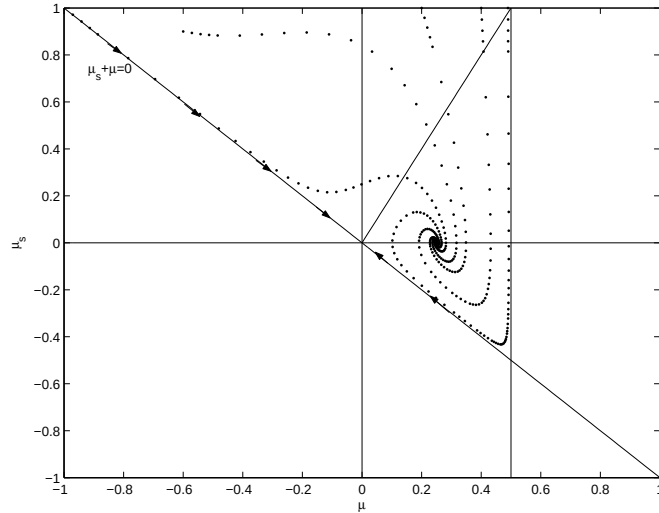
$$4\mu\nu + (\nu + 2\mu)(4\mu - 1) > 0$$

elde edilir. $\mu > \frac{1}{4}$ için bu eşitsizlik sağlanmış olur ve çözüm eğrileri μ eksenini $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisine çarpmadan geçerek dördüncü bölgeye düşerler.

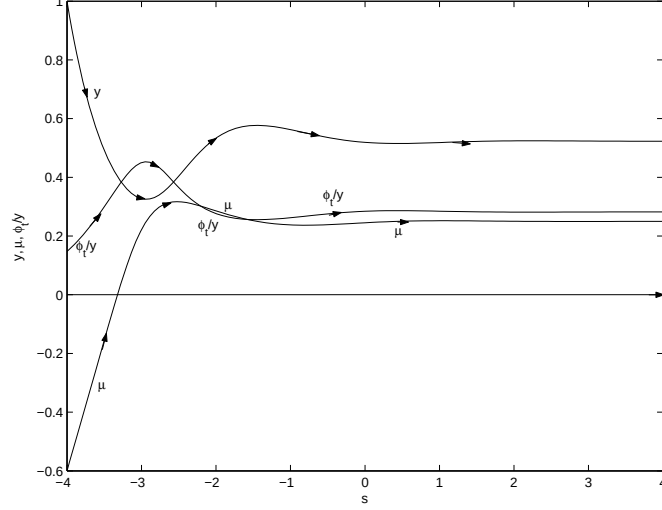
D_4 bölgesinde, çözüm eğrisinin hız vektörü üçüncü kuadrantta bulunur. İkinci bölgedekine benzer bir hareketle $\nu + 2\mu = \frac{1}{2}$ çizgisine çarparak D_5 bölgesine geçer. D_5 bölgesinde ise, çözüm eğrilerinin hız vektörü ikinci kuadrantta. Çözümün tekliğinden, $\mu + \nu = 0$ çizgisi kesilemez ve yerel davranışı orijine gitmemesini garanti eder. Ayrıca, orijinin bir semer noktası olmasından dolayı, çözüm eğrileri μ eksenini keserler. Tekrar, çözümün tekliğinden, çözüm eğrileri $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasında dolanır ki bu nokta zaten kararlı odak noktasıdır. •

$\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde, (3.29) dinamik sisteminin integral eğrileri için nümerik çözüm Şekil 3.10 da verilmiştir. $\mu_s + \mu = 0$ çizgisinin dışındaki bütün çözüm eğrileri, çalışılan bölgede $s \rightarrow \infty$ için $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasının etrafında dönmektedir. Bölgenin sağına doğru ilerlendikçe çözüm eğrileri $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisine oldukça yaklaşmaktadırlar, fakat çabucak $\mu = \frac{1}{4}$ seviyesine doğru durum dönmektedir.

Ayrıca, μ , y ve $\frac{\phi_t}{y}$ nin s e karşı değişimlerinde Şekil 3.11 de de görüleceği üzere ani değişim salınımlar gözlenmektedir.



Şekil 3.10. $\mu_s + \mu > 0$ ve $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde, negatif dal için (3.29) dinamik sisteminin integral eğrileri. $\mu_s + \mu = 0$ çizgisi bir tam çözümdür. Bölgedeki bütün çözüm eğrileri, $s \rightarrow \infty$ için $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasının etrafında spiral şeklinde dönmektedir. Çözüm eğrileri, $(\mu(0), \mu_s(0))$ başlangıç koşulları, soldan sağa sırasıyla $(-1, 1.001)$, $(-0.6, 0.9)$, $(0.2, 1)$, $(0.4, 1)$ ve $(0.49, 1)$ alınarak nümerik olarak elde edilmiştir. Sağa doğru ilerledikçe çözüm eğrileri $\mu = \frac{1}{2}$ çizgisini çok yakın olarak takip etmekte beraber bu çabucak $\mu = \frac{1}{4}$ seviyesine, bu seviye civarında küçük genlikli salınımlar yaparak bozulmaktadır.



Şekil 3.11. Negatif dal için, y , μ ve $\frac{\phi_t}{y}$ nin s e karşı değişimleri. Burada, μ çözümü için (3.29) dinamik sistemi, y çözümü için (3.14a), ve $\frac{\phi_t}{y}$ çözümü için de (3.14c) denklemi kullanılmıştır. Nümerik çözümler $(y(0), \mu(0), \mu_s(0))$ başlangıç şartları, $(1, -0.6, 0.9)$ alınarak elde edilmiştir.

(3.29) dinamik sistemin, $(\frac{1}{4}, 0)$ noktasındaki lineer kısmı olan (3.31) sistemi için period, $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \simeq 3.62$ dir. (3.29) ile verilen lineer olmayan sistem için, nümerik olarak yalnızca 3 salınım gözlemlenmiştir. $\mu = 0$ ve $\mu_s(0) = \mu_s^0$, 10^{-7} den 10^3 e kadar değişen çeşitli başlangıç koşulları için, integral eğrilerinin, $\mu = \frac{1}{4}$ dikey doğrusunu kestiği $\mu_s = a_i$, $i = 1, \dots, 4$ noktaları belirlenmiş, T_i , $i = 1, 2, 3$ periyotları, peş peşe gelen noktalar arasındaki mesafe olarak s cinsinden hesaplanmıştır. Bu a_i ler ve T_i ler için aşağıda listelenmiştir.

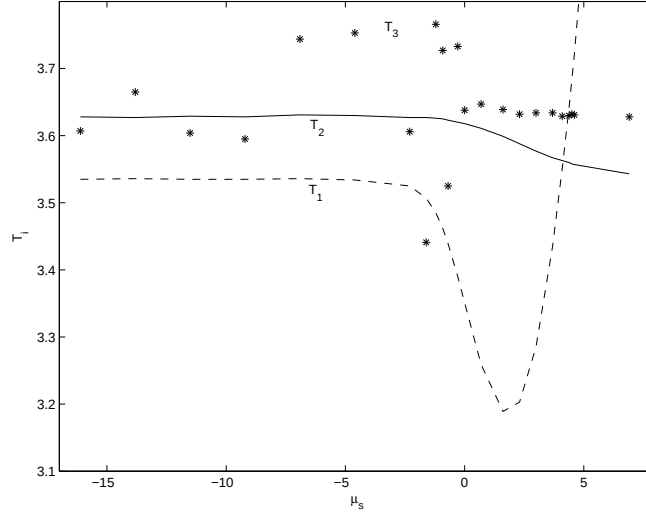
$\mu_s^0 = 10^{-7} :$	a_1, a_2, a_3	0.0923	0.0022	0.0001
	T_1, T_2, T_3	3.5350	3.6280	3.6070
$\mu_s^0 = 1 :$	a_1, a_2, a_3	0.4698	0.0089	0.0002
	T_1, T_2, T_3	3.3510	3.6180	3.6380
$\mu_s^0 = 10^3 :$	a_1, a_2, a_3	567.4564	0.0837	0.0020
	T_1, T_2, T_3	4.7040	3.5430	3.6280

μ_s^0 sonsuza giderken, ilk kesim yeri olan a_1 de sonsuza gitmektedir. Yani, $\lim_{\mu_s^0 \rightarrow \infty} a_1 = \infty$ olur. $i > 1$ integral eğrilerinin kesim noktası için limit durumu a_i^* ile gösterilirse,

$$\lim_{\mu_s^0 \rightarrow \infty} a_{i+1} = a_i^* = \lim_{\mu_s^0 \rightarrow 0} a_i.$$

$i = 1, 2, 3$ için, $a_1^* \cong 0.092$, $a_2^* \cong 0.0022$, $a_3^* \cong 0.0001$ sonuçları elde edilir.

Birinci salınım başlangıç şartına bağlı iken, $\mu_s = 0.0022 - 0.0090$ yakınından başlayan ikinci salınım, lineer kısmın periodu olan 3.62'ye oldukça yakın düzenli bir perioda sahiptir. Bu period T_2 ile gösterilmiştir ve $i = 1, 2, 3$ için, T_i lerin μ_s e göre değişimi de Şekil 3.12 de verilmiştir.



Şekil 3.12. $i = 1, 2, 3$ için, T_i periodlarının μ_s e karşı değişimleri.

(3.12b) tam sisteminin negatif dalını gözönüne alalım. Lineer kısmında önce $\mu_{tt} = k\mu_s$ yazılır ve daha sonra $\mu = \frac{1}{4} + u$ değişken değişimi yapılırsa,

$$u_{ss} + (2 - k)u_s + 4u = 0$$

elde edilir. $k = 2$ için, lineer ve lineer olmayan sistemlerin çözümü Hartman-Grobman teoreminden dolayı alakasızdır [46]. $0 < k < 2$ olan keyfi bir k için lineer kısmın çözümü $u = e^{-\alpha s} e^{\pm i\omega s}$ formunda olup, burada $\alpha = 1 - \frac{k}{2}$ ve $\omega^2 + \alpha^2 = 4$. İlginç bir tesadüf olarak, $k = 0.3704$ için period, $T = \frac{2\pi}{1.8265} = 3.44$ olmaktadır. Bu da Choptuik'in [10] sonucuyla uyushmaktadır.

3.7. Enerji Koşulları ve Mükemmel Akışkan

Bu alt bölümde önce, elde edilen çözümlerin enerji koşullarını tartışacağız. Daha sonra, negatif dalı mükemmel akışkan olarak yorumunu yapacağız. (3.1) metriği için (3.3) denkleminin kullanılması ile elde edilen enerji momentum tensör bileşenlerini burada yeniden yazalım.

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[\phi_t^2 + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \phi_r^2 \right], \quad T_{tr} = \phi_t \phi_r, \quad T_{rr} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right],$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\phi_t^2}{\alpha^2} - \frac{\phi_r^2}{a^2} \right], \quad T_{\theta\theta} = \sin^2 \varphi T_{\varphi\varphi}.$$

$u^a = (u^t, u^r, u^\varphi, u^\theta)$ vektörünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$u_a u^a = \left(-(\alpha u^t)^2 + (a u^r)^2 + (r u^\varphi)^2 + (r \sin \varphi u^\theta)^2 \right)$$

olacaktır. Şimdi dört farklı tip enerji koşulunu inceleyelim.

Işıksal enerji koşulu: Her ışıksal u^a vektörü için, $|u_a u^a| = 0$ 'dan

$$(r u^\varphi)^2 + (r \sin \varphi u^\theta)^2 = (\alpha u^t)^2 - (a u^r)^2$$

olarak yazılır. Işıksal enerji koşulu, bu ifade ile birlikte

$$T_{ab} u^a u^b = \left(\phi_t u^t + \phi_r u^r \right)^2 \geq 0$$

olup, şart gerçekleşir.

Zayıf enerji koşulu: u^a vektörünün zamansal olması kullanılırsa, $T_{ab} u^a u^b$ ifadesi

$$T_{ab} u^a u^b = \left(\phi_t u^t + \phi_r u^r \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 - \left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 \right]$$

şeklinde elde edilir. İfadenin ikinci yanı, $\frac{1}{16\pi} R = \frac{3}{2\pi} \Lambda$ olup, yerine yazılırsa

$$T_{ab} u^a u^b = \left(\phi_t u^t + \phi_r u^r \right)^2 + \frac{3}{2\pi} \Lambda$$

elde edilir. $\Lambda > 0$ durumunda $T_{ab} u^a u^b \geq 0$ olup, şart sağlanır. $\Lambda > 0$ olması $\phi_t = 0$ olmasını gerektirir ki, bu da pozitif dala karşılık gelir. $\Lambda < 0$ olması $\phi_r = 0$ olmasını gerektirir, bu ise negatif daldır. Bu durumda ifade

$$T_{ab} u^a u^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 \left[2(\alpha u^t)^2 - 1 \right]$$

şeklinde yazılır. Vektörün zamansal olması tekrar kullanılırsa

$$T_{ab} u^a u^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 \left[(\alpha u^t)^2 + (a u^r)^2 + (r u^\varphi)^2 + (r \sin \varphi u^\theta)^2 \right]$$

elde edilir. Bu ifade her zaman pozitifdir. Böylece, negatif dal için de zayıf enerji şartı sağlanmış olur.

Güçlü enerji koşulu: Enerji momentum tensörü bileşenlerinden

$$T = \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right]$$

şeklinde hesaplanır ve yerine yazılırsa

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})u^au^b = (\phi_t u^t + \phi_r u^r)^2 \geq 0$$

olur.

Baskın enerji koşulu: Zayıf enerji koşulu sağlandığı için, yalnızca $q_a q^a \leq 0$ şartının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. q^a ifadesi

$$q^a = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right] [-u^t + u^r] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right] [u^\varphi + u^\theta]$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} q_a q^a &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right]^2 [-(\alpha u^t)^2 + (a u^r)^2] \\ &+ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right]^2 [(r u^\varphi)^2 + (r \sin \varphi u^\theta)^2] \end{aligned}$$

olarak bulunur. $|u_a u^a| = -1$ şartı son ifade için uygun şekilde kullanılırsa,

$$q_a q^a = -\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 [1 + (r u^\varphi)^2 + (r \sin \varphi u^\theta)^2] - \frac{9}{4\pi^2} \Lambda^2 \leq 0$$

olduğu görülür.

Mükemmel akışkan: u_a zamansal bir vektör olmak üzere, mükemmel akışkan

$$T_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + p g_{ab}$$

şeklinde tanımlanır [7]. Skaler alanın gradienti $v_a = (\phi_t, \phi_r, 0, 0)$ şeklinde bir vektör ile gösterilirse, $\phi_r = 0$ durumunda

$$v_a v^a = -\alpha^2 (\phi_t)^2$$

elde edilir ki vektör zamansal olur ve $\phi_r = 0$ olması negatif dala karşılık gelir.

Dolayısıyla, skaler alanın gradientinin negatif olması negatif dal için geçerlidir.

Böylece, negatif dal mükemmel akışkan olarak yorumlanabilir. Genel halde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right], \\ p_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right], \\ p_2 &= p_3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\phi_r}{a} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

olup, mükemmel akışkanlık şartı $\phi_r = 0$ kullanılırsa

$$\mu = p = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_t}{\alpha} \right)^2$$

elde edilir ki bu durum ise katı madde (stiff matter) olarak yorumlanır.

4. (2+1)-BOYUTTA SKALAR ALANIN KUPLE EDİLMESİYLE ELDE EDİLEN STATİK TAM ÇÖZÜMLER

4.1. Giriş

Çalışmamızın ilk aşamasında (2+1)-boyutta çalışılmış ve statik bir metriğe kütlesiz skalar alan kuplağı için kozmolojik sabitli Einstein denklemlerinin tam çözümü elde edilmişti [47]. Bu tam çözüme varmak için çeşitli koordinat dönüşümleri yapmak gerekmiş ve bu koordinatlardaki çözümler literatürdeki diğer tam çözümlerle [48],[49] çözüm ve yaklaşımlarla [50] karşılaştırılmıştı. Elde ettiğimiz tam çözüm ve ilgili yorumlar Bölüm 4.5’de verilmiş olup bu bölümün temel sonuçlarıdır.

Çalışmalarımızın sonraki aşamalarında elde ettiğimiz, (3+1)-boyuta ilişkin sonuçlar ile ilk çalışmalarımızın ilintilendirilmesi amacı ile, Bölüm 4.2 de, (2+1)-boyutlu manifold, (3+1)-boyutlu manifoldun bir alt manifoldu olarak ifade edilmiştir. Yine karşılaştırma amacı ile, (3+1) ve (2+1)-boyutta kozmolojik sabitli denklemler Bölüm 4.3 de verilmiş, ancak tam çözümlerin karşılaştırılması sadece kozmolojik sabitsiz durum için Bölüm 4.4 de yapılmıştır. Bu çözümlerin Killing vektörleri ve geodezik denklemleri ise sırası ile Bölüm 4.6 ve Bölüm 4.7 de elde edilmiştir.

4.2. (3+1)-Boyuttan (2+1)-Boyuta İndirgeme

Bu bölümde, (2+1)-boyutlu $\tilde{M}$ manifoldunu, (3+1)-boyutlu M manifoldunun bir alt manifoldu olarak ifade edeceğiz. Yerel koordinatları (t, r, φ, θ) olan, M (3+1)-boyutlu küresel simetrik bir manifold ve $\tilde{M}$ da (2+1)-boyuttaki manifold ise, $\tilde{M}$ manifoldunun M manifoldunun ekvatoruna gömülmesi

$$(t, r, \theta) \rightarrow (t, r, \frac{\pi}{2}, \theta)$$

ile tanımlanır. Bu gömmeye göre, $\tilde{M}$ ’nin normalisi ∂_φ yönündedir. Hatırlanacağı gibi, M nin yerel koordinatları $t_o \leq t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \pi$ ve $0 < \theta < 2\pi$ aralığında olup, (3+1)-boyutta (3.1) ile verilen küresel simetrik metrik ve bu

metrikte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ alınarak elde edilen (2+1)-boyuttaki yay elemanı aşağıdadır.

$$ds^2 = -\alpha(t, r)^2 dt^2 + a(t, r)^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 \quad (4.1a),$$

$$ds^2 = -\alpha(t, r)^2 dt^2 + a(t, r)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (4.1b).$$

Yukarıda tanımlanan gömmenin tümel geodezik olduğu aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.1. $\tilde{M}$, (2+1)-boyutta (4.1b) yay elemanı ile verilen manifold, M de, (3+1)-boyutta (4.1a) yay elemanı ile verilen manifold olsun. $\tilde{M}$, M nin tümel geodezik bir alt manifoldudur.

İspat. Tümel geodezik alt manifold tanımı [33] gereği ikinci esas formun sıfır olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. İkinci esas form $II(X, Y)$, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ nin bağlantıları ise, her $X, Y \in T_p(\tilde{M})$ için

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + II(X, Y)$$

bağıntısını sağlamaktadır [33]. M manifoldu için ∇ bağlantısı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} \partial_t &= \frac{\alpha_t}{\alpha} \partial_t + \frac{\alpha}{a^2} \alpha_r \partial_r, \\ \nabla_{\partial_t} \partial_r &= \nabla_{\partial_r} \partial_t = \frac{\alpha_r}{\alpha} \partial_t + \frac{a_t}{a} \partial_r, \\ \nabla_{\partial_t} \partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi} \partial_t = 0, \\ \nabla_{\partial_t} \partial_\theta &= \nabla_{\partial_\theta} \partial_t = 0, \\ \nabla_{\partial_r} \partial_r &= \frac{a}{\alpha^2} a_t \partial_t + \frac{a_r}{a} \partial_r, \\ \nabla_{\partial_r} \partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi} \partial_r = \frac{1}{r} \partial_\varphi, \\ \nabla_{\partial_r} \partial_\theta &= \nabla_{\partial_\theta} \partial_r = \frac{1}{r} \partial_\theta, \\ \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi &= -\frac{r}{a^2} \partial_r, \\ \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta &= \nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \partial_\theta, \\ \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta &= -\frac{r \sin^2 \varphi}{a^2} \partial_r - \cos \varphi \sin \varphi \partial_\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{M}$ manifoldu için ise $\tilde{\nabla}$ bağlantısı,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= \frac{\alpha_t}{\alpha} \partial_t + \frac{\alpha}{a^2} \alpha_r \partial_r, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_r &= \tilde{\nabla}_{\partial_r} \partial_t = \frac{\alpha_r}{\alpha} \partial_t + \frac{a_t}{a} \partial_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_\theta &= \tilde{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_t = 0, \\
\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_r &= \frac{a}{\alpha^2}a_t\partial_t + \frac{a_r}{a}\partial_r, \\
\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_\theta &= \tilde{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta, \\
\tilde{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\theta &= -\frac{r}{a^2}\partial_r
\end{aligned}$$

ifadesi ile verilir. Buradan da, denklemdeki X ve Y ifadeleri, ∂_t , ∂_r , ∂_θ olarak alınıp, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması kullanılırsa,

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$$

olup,

$$II(X, Y) = 0$$

olarak elde edilir. •

Yukarıdaki önerme, alt manifold geodezikleri ile (3+1)-boyuttaki ekvatorial geodeziklerin aynı olduğunu söylemektedir. Ancak bu sonuç çözümlerimizin karşılaştırılmasında henüz kullanılmamıştır.

4.3. Statik Hal İçin Karşılaştırma

Bu bölümde, (3+1) ve (2+1)-boyutlarında kozmolojik sabit (Λ) içeren, kütlesiz skaler alan kuple edilmiş denklemleri (t, r, φ, θ) koordinatlarında verecek ve logaritmik koordinatlara geçeceğiz. Ancak, (3+1)-boyutta kozmolojik sabitli denklemler otonom bir sistem oluşturmadığı için faz düzlemi analizi yapılması mümkün değildir ve karşılaştırmalar çok anlamlı olmamıştır.

Kozmolojik sabit içeren Einstein alan denklemleri,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

şeklinde [43] olup, skaler alan kuplağı durumunda enerji momentum tensörü ve skaler alan için dalga denklemi sırasıyla (3.3) ve (3.4) numaralı denklemlerle verilmiştir. Şimdi sırasıyla (3+1) ve (2+1)-boyutta (4.1a) ve (4.1b) yay elemanları için, kozmolojik sabit içeren Einstein alan denklemlerini verelim. Aşağıdaki denklemlerde, (3+1) ve (2+1)-boyutlarda gravitasyonel sabit $\kappa^{(i)}$, sırasıyla $i = 4$ ve $i = 3$ ile gösterilmiştir.

(3+1)-boyutta skaler alan kuplajı için kozmolojik sabitli Einstein denklemleri:

$$\frac{a_r}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - \frac{\kappa^{(4)}}{4} r \left[\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right] - \frac{1}{2} r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{a_t}{a} = \frac{\kappa^{(4)}}{2} r \phi_t \phi_r, \quad (4.2b)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1 - a^2}{2r} - \frac{\kappa^{(4)}}{4} r \left[\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right] + \frac{1}{2} r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.2c)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \right] + \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] - \frac{\kappa^{(4)}}{2} \left[\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 - \phi_r^2 \right] + a^2 \Lambda = 0, \quad (4.2d)$$

$$\left[\left(\frac{a}{\alpha} \right) \phi_t \right]_t = \frac{1}{r^2} \left[r^2 \left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r \right]_r. \quad (4.2e)$$

(2+1)-boyutta skaler alan kuplajı için kozmolojik sabitli Einstein denklemleri:

$$\frac{a_r}{a} - \frac{\kappa^{(3)}}{2} \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right] - r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.3a)$$

$$\frac{a_t}{a} = \kappa^{(3)} r \phi_t \phi_r, \quad (4.3b)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{\kappa^{(3)}}{2} \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 \phi_t^2 + \phi_r^2 \right] + r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.3c)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \left[-\frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] - \frac{\kappa^{(3)}}{2} \left[\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 - \phi_r^2 \right] + a^2 \Lambda = 0, \quad (4.3d)$$

$$\left[\left(\frac{a}{\alpha} \right) \phi_t \right]_t = \frac{1}{r} \left[r \left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r \right]_r. \quad (4.3e)$$

Üçüncü bölümde, metriğin zamandan bağımsız olma durumunun, $\phi_t = 0$ veya $\phi_r = 0$ ile ortaya çıktığı görülmüştü. (2+1)-boyuttaki ilk çalışmalarımızda, sadece $\phi_t = 0$ durumunu incelediğimiz için, bu aşamada karşılaştırma yaparken de sadece $\phi_t = 0$ durumunu inceleyeceğiz. $\phi_t = 0$ olduğu zaman (4.2) ve (4.3) denklemleri, aşağıdaki sistemlere indirgenmektedir.

(3+1)-boyutta $\phi_t = 0$, statik durumu:

$$\frac{a_r}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - \frac{\kappa^{(4)}}{4} r \phi_r^2 - \frac{1}{2} r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1 - a^2}{2r} - \frac{\kappa^{(4)}}{4} r \phi_r^2 + \frac{1}{2} r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.4b)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \right] + \frac{\kappa^{(4)}}{2} \phi_r^2 + a^2 \Lambda = 0, \quad (4.4c)$$

$$r \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r \right]_r + 2 \left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r = 0. \quad (4.4d)$$

(2+1)-boyutta $\phi_t = 0$ durumu:

$$\frac{a_r}{a} - \frac{\kappa^{(3)}}{2} \phi_r^2 - r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.5a)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{\kappa^{(3)}}{2} \phi_r^2 + r a^2 \Lambda = 0, \quad (4.5b)$$

$$\frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{\kappa^{(3)}}{2} \phi_r^2 + a^2 \Lambda = 0, \quad (4.5c)$$

$$r \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r \right]_r + \left(\frac{\alpha}{a} \right) \phi_r = 0. \quad (4.5d)$$

Yukarıdaki denklemlerin $r = e^s$ logaritmik koordinatlarda, $a^2 = \frac{1}{1-2\mu}$, $\alpha = rya$ dönüşümleri ile elde edilen ifadeleri aşağıdadır.

(3+1)-boyutta, logaritmik koordinatlarda $\phi_t = 0$ statik durumu:

$$\mu_s = -\mu + 2\pi(1-2\mu)\psi^2 + \frac{e^{2s}}{2}\Lambda, \quad (4.6a)$$

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu} - \frac{e^{2s}}{1-2\mu}\Lambda, \quad (4.6b)$$

$$\frac{\psi_s}{\psi} = -\frac{1}{1-2\mu} + \frac{e^{2s}}{1-2\mu}\Lambda. \quad (4.6c)$$

(4.6a) ve (4.6c) denklemlerinden de

$$\mu_{ss} + \mu_s + \frac{2}{1-2\mu} [(\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu)] + 2[\mu_s + \mu] - \frac{e^{2s}\Lambda}{(1-2\mu)^2} [3\mu_s + e^{2s}\Lambda] = 0 \quad (4.7)$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemlerde, $\kappa^{(4)} = 8\pi$ olarak seçilmiştir [10].

(2+1)-boyutta, logaritmik koordinatlarda $\phi_t = 0$ statik durumu:

$$\mu_s = 2\pi(1-2\mu)\psi^2 + e^{2s}\Lambda, \quad (4.8a)$$

$$\frac{y_s}{y} = -1 - 2\frac{e^{2s}}{1-2\mu}\Lambda, \quad (4.8b)$$

$$\frac{\psi_s}{\psi} = 2\frac{e^{2s}}{1-2\mu}\Lambda. \quad (4.8c)$$

(4.8a) ve (4.8c) denklemlerinden

$$\mu_{ss} + \frac{2}{1-2\mu} [\mu_s^2 - 3e^{2s}\mu_s\Lambda + 2e^{4s}\Lambda^2] - 2e^{2s}\Lambda = 0 \quad (4.9)$$

olarak yazılabilir. Burada da, $\kappa^{(3)} = 4\pi$ olarak seçilmiştir [23].

Daha önce de belirtildiği gibi (3+1)-boyutta kozmolojik sabitli denklemlerin faz düzlemi analizi yapılamamıştır. Kozmolojik sabitin sıfır olduğu durum ise daha önce tam çözüm elde edilen pozitif daldır. Bu koordinatlarda, (2+1)-boyutta, kozmolojik sabitsiz durum için tam çözüm Bölüm 4.4 de verilmiştir.

4.4. (2+1)-Boyutta $\Lambda = 0$ İçin Statik Tam Çözüm

Bu bölümde, (2+1)-boyutta $\Lambda = 0$ durumundaki tam çözümü vereceğiz. $\Lambda = 0$ için (4.8-9) denklemleri

$$\mu_s = 2\pi(1 - 2\mu)\psi^2, \quad (4.10a)$$

$$\frac{y_s}{y} = -1, \quad (4.10b)$$

$$\frac{\psi_s}{\psi} = 0, \quad (4.10c)$$

$$\mu_{ss} + \frac{2\mu_s^2}{1 - 2\mu} = 0. \quad (4.11)$$

şeklinde yazılır. (4.10c) denkleminde ψ_o bir integrasyon sabiti olmak üzere $\psi = \psi_o$ olarak elde edilip (4.10a) denkleminde yerine yazıldıktan sonra integre edilirse, μ_o bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\mu = \frac{1}{2} \left[1 - \mu_o e^{-4\pi\psi_o^2 s} \right]$$

elde edilir. (4.10b) denkleminde de, y_o bir integrasyon sabiti olmak üzere, $y = y_o e^{-s}$ olarak bulunur. Elde edilen ifadeler a^2 ve α^2 de yerlerine yazılıp, daha sonra da $e^s = r$ kullanılırsa

$$a^2 = \frac{r^{4\pi\psi_o^2}}{\mu_o}, \quad \alpha^2 = \frac{y_o^2}{\mu_o} r^{4\pi\psi_o^2}$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.1b) metriğinde kullanılırsa,

$$ds^2 = \frac{r^{4\pi\psi_o^2}}{\mu_o} \left(-y_o^2 dt^2 + dr^2 \right) + r^2 d\theta^2 \quad (4.12)$$

elde edilir.

4.5. (2+1)-Boyutta $\Lambda = -1$ İçin Statik Tam Çözüm

Bu bölümün temel sonucu, (2+1)-boyutta $\Lambda = -1$ için tam çözümün elde edilmesidir. Bu çözümün elde edilmesi için bir dizi koordinat dönüşümü yapılması gerekmiştir. İlk aşamada, çözümümüz ile doğrudan ilişkili olmasa

da, (3+1)-boyutta kullandığımız koordinatlar ile, çözüm elde etmek için kullandığımız koordinatlar arasındaki dönüşümü vereceğiz.

1. Koordinat sistemi:

- **Yerel koordinatlar:** (t, r, θ) , $t_0 \leq t < \infty$, $0 < r < \infty$ ve $0 < \theta < 2\pi$.
- **Yay elemanı:**

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + a(r)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (4.13)$$

Eğer $Y = Y(\tilde{r})$ monoton bir fonksiyon ise, aşağıdaki dönüşümler ile (4.13) yay elemanından, ilk çalışmalarımızda [47] kullandığımız yay elemanına ulaşılır. Çözümlerimizde, Y nin gerçekten de monoton bir fonksiyon olduğu görülecektir.

2. Koordinat sistemi:

- **Yerel koordinatlar:** $(t, \tilde{r}, \theta)$, $t_0 \leq t < \infty$, $-\infty < \tilde{r} < \infty$ ve $0 < \theta < 2\pi$.
- **Dönüşümler:**

$$r = e^{-Y(\tilde{r})}, \quad \alpha = e^{X(\tilde{r})}, \quad a = \frac{e^{X(\tilde{r})} e^{Y(\tilde{r})}}{\frac{dY}{d\tilde{r}}}. \quad (4.14)$$

- **Yay elemanı:**

$$ds^2 = -e^{2X(\tilde{r})} dt^2 + e^{2X(\tilde{r})} d\tilde{r}^2 + e^{-2Y(\tilde{r})} d\theta^2. \quad (4.15)$$

Şimdi, 2. koordinat sisteminde Christoffel sembollerini ve eğrilik tensörü bileşenlerini verelim. Aşağıda $\tilde{r}$ ya göre türevi, “ ’ ” işareti ile göstereceğiz.

İkinci tipten Christoffel sembolleri:

$$\Gamma_{tt}^{\tilde{r}} = X', \quad \Gamma_{t\tilde{r}}^t = X', \quad \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} = X', \quad \Gamma_{\tilde{r}\theta}^{\theta} = -Y', \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\tilde{r}} = Y' e^{-2(X+Y)}.$$

Eğrilik tensörü bileşenleri:

$$R_{t\tilde{r}t\tilde{r}} = e^{2X} X'', \quad R_{t\theta t\theta} = e^{-2Y} (-X'Y'), \quad R_{\tilde{r}\theta\tilde{r}\theta} = e^{-2Y} (Y'' - X'Y' - Y'^2).$$

Ricci tensörü bileşenleri:

$$R_{tt} = X'' - X'Y', \quad R_{\tilde{r}\tilde{r}} = -X'' + Y'' - X'Y' - Y'^2, \quad R_{\theta\theta} = e^{-2(X+Y)} (Y'' - Y'^2).$$

Ricci skaleri R :

$$R = 2e^{-2X}(-X'' + Y'' - Y'^2).$$

Enerji momentum tensörü bileşenleri:

$$T_{tt} = \frac{1}{2}\phi'^2, \quad T_{\tilde{r}\tilde{r}} = \frac{1}{2}\phi'^2, \quad T_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}e^{-2(X+Y)}\phi'^2. \quad (4.16)$$

Skaler alan için dalga denklemi:

$$\phi'' - Y'\phi' = 0. \quad (4.17)$$

Skaler alan için dalga denklemi kolaylıkla integre edilerek, λ keyfi bir integral sabiti olmak üzere

$$\phi' = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}e^Y \quad (4.18)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki ifade kullanılarak, kozmolojik sabit içeren Einstein denklemleri X , Y ve λ içeren aşağıdaki diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

2. Koordinat sisteminde Einstein alan denklemleri:

$$\begin{aligned} X'' + \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} &= 0, \\ X'Y' - \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} &= 0, \\ Y'' - X'Y' - Y'^2 - \Lambda e^{2X} - \lambda^2 e^{2Y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) adi diferansiyel denklem sisteminde $Y = X$ alınırsa, uygun eliminasyonlardan sonra sistemin tutarlılığı için $-4\Lambda e^{2X} = 0$ şartına ulaşılır. Bu yüzden, tutarlı bir sistem için Λ sıfır olmalıdır. Bu durumda ise tam çözüm bir önceki alt bölümde verilmiştir. $Y \neq X$, durumunda ise (4.19) sistemi tutarlı olup, bundan sonraki aşamalarda $Y \neq X$ kabul edilecektir.

Şimdi de, (4.19) diferansiyel denklem sistemini ikinci dereceye indirgeyelim.

Önerme 4.2. (4.19) adi diferansiyel denklem sistemi, c ve λ integrasyon sabitleri olmak üzere, X ve Y metrik fonksiyonlar için aşağıda verilen ikinci dereceden sisteme indirgenir.

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{2}ce^Y \mp \frac{1}{2} \left[c^2 e^{2Y} + 4(-\Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y}) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ Y' &= \frac{1}{2}ce^Y \pm \frac{1}{2} \left[c^2 e^{2Y} + 4(-\Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y}) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

İspat. (4.19) sistemi basit cebirsel eliminasyon ile

$$\begin{aligned} X'' + \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} &= 0, \\ X'Y' - \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} &= 0, \\ Y'' &= Y'^2 + 2\Lambda e^{2X} \end{aligned} \quad (4.21)$$

şekilde yazılır. Şimdi, $Z = X + Y$ olduğunu varsayalım. Bu denklem $\tilde{r}$ ya göre iki kez türetilirse $Z'' = X'' + Y''$ olur. X'' ve Y'' (4.21) den çözülüp yerlerine yazılırsa

$$Z'' = \Lambda e^{2X} - \lambda^2 e^{2Y} + Y'^2 = X'Y' + Y'^2 = Z'Y' \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada, $Z' = 0$ özel bir çözümdür. (4.22) denklemi $Z' \neq 0$ için integre edilirse, c integrasyon sabiti olmak üzere $Z' = ce^Y$ denkleminde ulaşılır. Böylece, (4.21) sistemi aşağıda verilen (4.23) sistemine dönüşür.

$$\begin{aligned} X' + Y' &= ce^Y, \\ X'Y' - \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

(4.23) in ilk denkleminde X' çözülüp ikincisinde yerine yazılırsa,

$$(ce^Y - Y')Y' - \Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} = 0$$

elde edilir. Son denklem yeniden düzenlenip tam kareye tamamlanırsa,

$$(Y' - \frac{1}{2}ce^Y)^2 = -\Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y} + \frac{1}{4}c^2 e^{2Y}$$

olur. Karekök alınıp gerekli düzenleme yapılırsa (4.20) deki Y' ve X' denklemlerine ulaşılır. •

Burada, $Z' = X' + Y' = 0$ özel çözümü, genel çözüm içinde c integral sabitinin sıfır olmasına karşılık gelir. Bu durumda ise, (4.15) yay elemanı, Y_o integrasyon sabiti olmak üzere,

$$ds^2 = e^{2X} \left(-dt^2 + d\tilde{r}^2 + e^{-2Y_o} d\theta^2 \right),$$

şeklindedir. Bundan sonraki aşamalarda ise $c \neq 0$ kabul edeceğiz ve

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{2}ce^Y - \frac{1}{2} \left[c^2 e^{2Y} + 4(-\Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y}) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ Y' &= \frac{1}{2}ce^Y + \frac{1}{2} \left[c^2 e^{2Y} + 4(-\Lambda e^{2X} + \lambda^2 e^{2Y}) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

sistemi ile çalışacağız.

(4.21), Ricci tensörü bileşenlerinde ve Ricci skaleri ifadesinde kullanılırsa,

$$R_t^t = 2\Lambda, \quad R_{\tilde{r}}^{\tilde{r}} = 2\Lambda + 2\lambda^2 e^{-2X+2Y}, \quad R_\theta^\theta = 2\Lambda, \quad R = 6\Lambda + 2\lambda^2 e^{-2X+2Y}$$

elde edilir. Burada, eğrilik tekillikleri, Λ kozmolojik sabiti veya skaler alanın kuple edilmesinden gelen λ ile alakalıdır.

Kozmolojik sabitin -1 olduğu durumdaki tam çözüm, (4.24) sisteminde $\Lambda = -1$ alınarak ve 3. koordinat sistemine geçilerek elde edilmiştir. Aşağıda ilk önce bu koordinat sistemini verecek, daha sonra bu geçişin ayrıntılarını sunacağız.

3. Koordinat sistemi ve tam çözüm:

- **Yerel koordinatlar:** (t, ω, θ) , $t_0 \leq t < \infty$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ ve $0 < \theta < 2\pi$.
- **Dönüşümler:**

$$e^X = \frac{1}{2}\rho \cos \omega, \quad r = e^Y = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 4\lambda^2}}\rho \sin \omega, \quad \mu = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4\lambda^2}}.$$

Yukarıda, ω , $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında olduğu için, koordinat dönüşümü geçerlidir. $\rho = \rho(\omega)$ fonksiyonu bu koordinatlarda metrik fonksiyonu olup açık ifadesinin elde edilişi bu bölümün temel sonucudur.

- **Yay elemanı:**

$$ds^2 = - \left[\frac{1}{2}\rho \cos \omega \right]^2 dt^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \omega} \right]^2 d\omega^2 + \left[\frac{\sqrt{c^2 + 4\lambda^2}}{\rho \sin \omega} \right]^2 d\theta^2, \quad (4.25)$$

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} [1 + \sin \omega]^{\frac{\mu}{2}} [\sin \omega]^{-\frac{1}{2}} [\cos \omega]^{\frac{-1-\mu}{2}}. \quad (4.26)$$

Verilen dönüşümler, $\Lambda = -1$ için (4.24) sisteminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \rho' \cos \omega - \omega' \rho \sin \omega &= \frac{1}{2}\rho^2 [\mu \sin \omega \cos \omega - \cos \omega], \\ \rho' \sin \omega + \omega' \rho \cos \omega &= \frac{1}{2}\rho^2 [\mu \sin^2 \omega + \sin \omega] \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci denklem $\cos \omega$, ikinci denklem $\sin \omega$ ifadeleriyle çarpılıp toplanırsa ρ' , benzer bir eliminasyon ile de ω' aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\rho' = \frac{1}{2}\rho^2 [\mu \sin \omega - \cos 2\omega], \quad (4.27)$$

$$\omega' = \rho \sin \omega \cos \omega. \quad (4.28)$$

(4.27) ve (4.28) denklemlerinden,

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho \left[\frac{1}{2} \frac{\mu}{\cos \omega} - \cot 2\omega \right]$$

yazılırsa, denklem

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left[\frac{1}{2} \frac{\mu}{\cos \omega} - \cot 2\omega \right] d\omega$$

şekinde değişkenlerine ayrılır. Her iki yandan integral alınırsa ρ , ω nın bir fonksiyonu olarak (4.26) da verilen şekliyle elde edilir. e^X ve e^Y pozitiftir. Böylece ω , 0 ile $\frac{\pi}{2}$ arasında değişir. ρ değeri, e^X ve e^Y de yerine yazılır ve $d\tilde{r} = \frac{d\tilde{r}}{d\omega} d\omega$, $d\tilde{r} = \left(\frac{d\omega}{d\tilde{r}}\right)^{-1} d\omega$ ifadesi kullanılırsa,

$$d\tilde{r}^2 = \left[\frac{1}{\rho \sin \omega \cos \omega} \right]^2 d\omega^2$$

olarak elde edilir. e^X , e^Y ve $d\tilde{r}^2$ ifadeleri (4.15) yerlerine yazılırsa (4.25) elde edilir. Elde edilen (4.25) tam çözümünüyle birlikte, Ricci tensörü bileşenleri ve Ricci skaleri aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

3. Koordinat sisteminde R^μ_ν ve R :

$$R^t_t = -2, \quad R^\omega_\omega = -2 + \frac{8\lambda^2}{(c^2 + 4\lambda^2)} \tan^2 \omega, \quad R^\theta_\theta = -2,$$

$$R = -6 + \frac{8\lambda^2}{(c^2 + 4\lambda^2)} \tan^2 \omega.$$

Şimdi, (4.25) ile verilen tam çözümden 4. koordinat sistemine geçilecek daha sonra da ρ_0 ve c katsayıları yok edilerek, 5. koordinat sisteminde $[0, 1]$ aralığında değişen μ parametresine bağlı bir çözüm ailesi verilecektir. Bu çözümler, $\mu = 1$ durumunda Anti de Sitter metriğine indirgenmektedir [50].

4. Koordinat sistemi:

- **Yerel koordinatlar:** (t, χ, θ) , $t_0 \leq t < \infty$, $0 < \chi < \infty$ ve $0 < \theta < 2\pi$.
- **Dönüşümler:**

$$\chi = -\frac{1}{2} \ln \left(\tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \right).$$

- **Yay elemanı:**

$$ds^2 = -\frac{\rho_0^2}{4} \left[\frac{\cosh \chi}{\sinh \chi} \right]^\mu \cosh \chi \sinh \chi dt^2 + d\chi^2$$

$$+ \frac{4}{\rho_0^2} (c^2 + 4\lambda^2) \left[\frac{\cosh \chi}{\sinh \chi} \right]^{-\mu} \cosh \chi \sinh \chi d\theta^2. \quad (4.29)$$

Önce, (4.26) ile verilen ρ değeri yerine yazılırsa, (4.25) ile verilen tam çözüm açık olarak

$$ds^2 = -\frac{\rho_0^2}{8} [\sec \omega + \tan \omega]^\mu \cot \omega dt^2 + \left[\frac{1}{2 \sin \omega} \right]^2 d\omega^2 + \frac{2(c^2 + 4\lambda^2)}{\rho_0^2} [\sec \omega + \tan \omega]^{-\mu} \cot \omega d\theta^2$$

ile ifade edilebilir. Verilen dönüşüm çift aç formülleriyle birlikte son denklemde kullanılırsa da (4.29) denkleminde ulaşılır.

5. Koordinat sistemi:

- **Yerel koordinatlar:** $(\tilde{t}, \chi, \tilde{\theta})$, $\tilde{t}_0 \leq \tilde{t} < \infty$, $0 < \chi < \infty$ ve $0 < \tilde{\theta} < 2\pi$.

- **Dönüşümler:**

$$\tilde{t} = \frac{\rho_0}{2} t, \quad \tilde{\theta} = \frac{2c}{\rho_0} \theta.$$

- **Yay elemanı:**

$$ds^2 = - \left[\frac{\cosh \chi}{\sinh \chi} \right]^\mu \cosh \chi \sinh \chi d\tilde{t}^2 + d\chi^2 + \mu^{-2} \left[\frac{\cosh \chi}{\sinh \chi} \right]^{-\mu} \cosh \chi \sinh \chi d\tilde{\theta}^2. \quad (4.30)$$

Yukarıdaki metrikte, $\mu = 1$ alınırsa kaynak [50] (1.1) denklemiyle verilen (2+1) boyutlu Anti de Sitter uzayındaki metriğe ulaşılmış olunur.

$$ds^2 = -\cosh^2 \chi d\tilde{t}^2 + d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\tilde{\theta}^2.$$

Litaratürle karşılaştırma: Bu bölümde verilen sonuçlar yayımlandıktan sonra, elde ettiğimiz tam çözümlerin daha önce elde edilmiş olduğuna dair iki yazardan uyarı gelmiştir. Bunlardan birincisi, hareket noktamız olan (4.15) yay elemanının çok özel bir hali olup, Dias ve Lemos tarafından $\lambda = e^{-Y}$ ve $\nu(\lambda) = X$ için [48] de çözülmüştür. Öte yandan, Clement ve Fabbri nin çözümü, $(+, -, -)$ işaret farkı ile, bizim çözümümüzle eşdeğerdir. (4.30) denklemiyle verdiğimiz çözüm ile [49] de (3.7) denklemi ile verilen çözümler tutarlı olup aşağıda gösterilmiştir. Kaynak [49] deki (3.7) denklemi,

$$ds^2 = A |\rho - \rho_+|^{\frac{1}{2}+a} |\rho - \rho_-|^{\frac{1}{2}-a} dt^2 - \frac{4|\Lambda|}{A} |\rho - \rho_+|^{\frac{1}{2}-a} |\rho - \rho_-|^{\frac{1}{2}+a} d\theta^2 + \frac{1}{4\Lambda(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)} d\rho^2$$

olup $\Lambda = -1$, $a = -\frac{\mu}{2}$ ve $\rho = \frac{1}{2}[(\rho_+ - \rho_-) \cosh 2\chi + (\rho_+ + \rho_-)]$ için

$$ds^2 = A |\rho_+ - \rho_-| |\cosh \chi|^{1+\mu} |\sinh \chi|^{1-\mu} dt^2 - \frac{4 |\rho_+ - \rho_-|}{A} |\cosh \chi|^{1-\mu} |\sinh \chi|^{1+\mu} d\theta^2 - d\chi^2$$

denkleme indirgenir. Burada A ve $|\rho_+ - \rho_-|$ keyfi sabitlerdir. Buradan, uygun ölçeklemelerle (4.30) denkleme varılır.

4.6. Killing Denklemleri

Simetri analizi için, Killing vektörü hesabımızı, (4.15) metriği için, 2. koordinat sisteminde $(t, \tilde{r}, \theta)$ değişkenleri için yapacağız. Killing vektörünü

$$K = K^t \partial_t + K^{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} + K^\theta \partial_\theta$$

şeklinde parametrize edelim. Notasyonun basitliği açısından,

$$K_t = A, \quad K_{\tilde{r}} = B, \quad K_\theta = C$$

yazalım ve t , $\tilde{r}$ ve θ yönlerindeki türevleri de alt indislerde gösterelim. Bu durumda, (4.15) yay elemanı için Killing denklemleri aşağıdadır.

$$\begin{aligned} A_t - X_{\tilde{r}} B &= 0, \\ A_{\tilde{r}} + B_t - 2X_{\tilde{r}} A &= 0, \\ A_\theta + C_t &= 0, \\ B_{\tilde{r}} - X_{\tilde{r}} B &= 0, \\ B_\theta + C_{\tilde{r}} + 2Y_{\tilde{r}} C &= 0, \\ C_\theta - Y_{\tilde{r}} e^{-2(X+Y)} B &= 0. \end{aligned}$$

Dördüncü denklemin $\tilde{r}$ ye göre integrasyonundan, $B = B_0(t, \theta)e^X$ elde edilir. Bu durumda Killing denklemleri aşağıdaki 5 denklemlili sisteme indirgenir.

$$\begin{aligned} A_t - X_{\tilde{r}} B_0 e^X &= 0, \\ A_{\tilde{r}} + B_{0t} e^X - 2X_{\tilde{r}} A &= 0, \\ A_\theta + C_t &= 0, \\ B_{0\theta} e^X + C_{\tilde{r}} + 2Y_{\tilde{r}} C &= 0, \\ C_\theta - Y_{\tilde{r}} e^{-2(X+Y)} B_0 e^X &= 0. \end{aligned}$$

Birinci denklem $\tilde{r}$ ya, ikinci denklem t ye göre türetilirse,

$$\begin{aligned} A_{t\tilde{r}} &= X_{\tilde{r}\tilde{r}}B_0e^X + X_{\tilde{r}}^2B_0e^X, \\ A_{\tilde{r}t} &= -B_{0tt}e^X + 2X_{\tilde{r}}A_t \end{aligned}$$

elde edilir. İki denklemin eşitliğinden,

$$(X_{\tilde{r}\tilde{r}} - X_{\tilde{r}}^2)B_0 + B_{0tt} = 0$$

elde edilir. Son denklem, $\tilde{r}$ ya göre türetilirse,

$$(X_{\tilde{r}} - Y_{\tilde{r}})_{\tilde{r}}B_0 = 0$$

olarak bulunur. Burada $(X_{\tilde{r}} - Y_{\tilde{r}})_{\tilde{r}} \neq 0$ ve $B_0 = 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda, yukarıda verilen 5 denklemlı Killing sistemi şu şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} A_t &= 0, \\ A_{\tilde{r}} - 2X_{\tilde{r}}A &= 0, \\ A_{\theta} + C_t &= 0, \\ C_{\tilde{r}} + 2Y_{\tilde{r}}C &= 0, \\ C_{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

A ve C sırasıyla, ilk iki denklemden ve son iki denklemden,

$$A = A_0(\theta)e^{2X}, \quad C = C_0(t)e^{-2Y}$$

olarak elde edilir. Son ifadeler, $A_{\theta} + C_t = 0$ denkleminde yerlerine yazılıp düzenlenirse,

$$A_{0\theta} + C_{0t}e^{-2(X+Y)} = 0$$

elde edilir. Bu ifade, $\tilde{r}$ ye göre türetilip düzenlenirse,

$$(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}})C_{0t} = 0$$

olarak yazılır.

1. Durum: $(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}}) \neq 0, C_{0t} = 0$

Bu durumda,

$$A = A_0e^{2X}, \quad B = 0, \quad C = C_0e^{-2Y}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler, kontravaryant formdaki metrik katsayıları ile çarpılıp, genel Killing vektöründe yerlerine yazılırsa,

$$K = -A_0\partial_t + C_0\partial_\theta$$

olur. Killing vektörleri ise şu şekilde yazılır.

$$(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}}) \neq 0 : \quad K^{(1)} = \partial_t, \quad K^{(2)} = \partial_\theta. \quad (4.31)$$

Burada şunu hatırlatalım ki, $(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}}) \neq 0$ olması, genel çözümde verilen c integral sabitinin $c \neq 0$ olmasıdır. Böylece, (4.15) yay elemanı, $c \neq 0$ için $\frac{\partial}{\partial t}$ ve $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 'lerden üretilmiş $\mathbf{G}_2$ değişmeli simetri cebri sahiptir.

2. Durum: $(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}}) = 0$, $C_{0t} \neq 0$

Y_o bir integrason sabiti olmak üzere, $(X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}}) = 0$ dan, $-Y = X - Y_o$ elde edilir.

Bu ifade, A ve C de yerlerine yazılırsa,

$$A = A_0(\theta)e^{2X}, \quad C = C_0(t)e^{2X}e^{-2Y_o}$$

olur. A ve C nin, sırasıyla, θ ve t ye göre türevleri alınıp, $A_\theta + C_t = 0$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$A_{0\theta} + C_{0t}e^{-2Y_o} = 0$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha + \gamma e^{-2Y_o} = 0$ demektir. Buradan da, $\gamma = -\alpha e^{2Y_o}$ olarak yazılabilir. $A_{0\theta\theta} = 0$, $C_{0tt} = 0$ olup,

$$A_0 = \alpha\theta + \beta, \quad C_0 = \gamma t + \delta$$

ifadelerine ulaşılır. A_0 ve C_0 yerlerine yazılırsa

$$A = (\alpha\theta + \beta)e^{2X}, \quad B = 0, \quad C = (-\alpha e^{2Y_o}t + \delta)e^{2X}e^{-2Y_o}$$

elde edilir. A , B ve C ifadeleri yine kontravaryant formdaki metrik katsayılarıyla çarpılıp genel Killing vektöründe yerlerine yazılırlarsa,

$$K = (-\alpha\theta - \beta)\partial_t + 0\partial_{\tilde{r}} + (-\alpha e^{2Y_o}t + \delta)\partial_\theta.$$

elde edilir. Yeniden düzenlenirse,

$$K = c_1[\theta\partial_t + e^{2Y_o}t\partial_\theta] + c_2\partial_t + c_3\partial_\theta$$

elde edilir. Böylece, Killing vektörleri,

$$X_{\tilde{r}} + Y_{\tilde{r}} = 0 : \quad K^{(1)} = \partial_t, \quad K^{(2)} = \partial_\theta, \quad K^{(3)} = \theta \partial_t + e^{2Y_0} t \partial_\theta \quad (4.32)$$

şeklinde olur. Böylece, (4.15) yay elemanı, $c = 0$ için, üreteçleri (4.32) ile verilen simetri cebrine sahiptir. Bu cebirin, $\mathbf{G}_3 \mathbf{VI}_h$, $h = -1$ Bianchi tipi olduğu gösterilebilir. Bunun için, kaynak [51] de verilen yöntemi kullanalım. İlk olarak, $X_1 = K^{(1)}$, $X_2 = K^{(2)}$ ve $X_3 = K^{(3)}$ ile tanımlanır ve X_1 , X_2 ve X_3 için komütatörler hesaplanırsa,

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = e^{2Y_0} X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1$$

olduğu görülür.

$[X_1, X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2$ ve $[X_2, X_3] = \gamma X_1 + \delta X_2$ olmasından dolayı, $\alpha = 0$, $\beta = e^{2Y_0}$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$ olup, $\delta\alpha - \beta\gamma = e^{2Y_0} \neq 0$ şartı sağlanır. $\rho \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $\overline{X_1} = aX_1 + bX_2$ alınır ve $[\overline{X_1}, X_3] = \rho \overline{X_1}$ şartı kullanılırsa $\beta = 0$ yapılabilir. Ayrıca, $\frac{a}{b}$ oranı da hesaplanabilir. Bu işlem yapılırsa, $b = \rho a$ ve $\rho^2 = e^{2Y_0}$ olup, $b = e^{Y_0} a$ elde edilir ve yerine yazılırsa, $\overline{X_1} = aX_1 + ae^{Y_0} X_2$ olarak dönüşmüş olur. Böylece, $\overline{X_1}$, X_2 ve X_3 arasındaki komütatörler,

$$[\overline{X_1}, X_2] = 0, \quad [\overline{X_1}, X_3] = e^{Y_0} \overline{X_1}, \quad [X_2, X_3] = \frac{1}{a} \overline{X_1} - e^{Y_0} X_2$$

şeklinde hesaplanır. $[\overline{X_1}, X_3] = \rho \overline{X_1}$ ve $[X_2, X_3] = \gamma \overline{X_1} + \delta X_2$ eşitliklerinden, $\rho = e^{Y_0}$, $\gamma = \frac{1}{a}$ ve $\delta = -e^{Y_0}$ olduğu görülür.

$X_3 = e^{Y_0} \overline{X_3}$ ile $\rho = 1$ yapılabilir. Bu durumda, vektörler

$$\overline{X_1} = aX_1 + ae^{Y_0} X_2, \quad X_2 = X_2, \quad \overline{X_3} = e^{-Y_0} X_3$$

şeklinde değişirken, komütatörleri ise,

$$[\overline{X_1}, X_2] = 0, \quad [\overline{X_1}, \overline{X_3}] = \overline{X_1}, \quad [X_2, \overline{X_3}] = \frac{e^{-Y_0}}{a} \overline{X_1} - X_2$$

olur. $[X_2, \overline{X_3}] = \gamma \overline{X_1} + \delta X_2$ ifadesinden, $\gamma = \frac{e^{-Y_0}}{a}$ ve $\delta = -1$ elde edilir. $\delta \neq 0$ olduğundan dolayı X_2 , $\overline{X_2} = X_2 + (\frac{\gamma}{1-\delta}) \overline{X_1}$ şeklinde değiştirilebilir. Bu durumda, vektörler

$$\overline{X_1} = aX_1 + ae^{Y_0} X_2, \quad \overline{X_2} = -\frac{1}{2} e^{-Y_0} X_1 + \frac{1}{2} X_2, \quad \overline{X_3} = e^{-Y_0} X_3$$

şeklinde yazılır. Komütatörleri hesaplanırsa

$$[\overline{X_1}, \overline{X_2}] = 0, \quad [\overline{X_1}, \overline{X_3}] = \overline{X_1}, \quad [\overline{X_2}, \overline{X_3}] = -\overline{X_2}$$

elde edilir. Bu ise G_3VI_h , $h = -1$ Bianchi tipidir.

4.7. Geodezik Denklemleri

(2+1)-boyutta, (4.15) ile verilen statik yay elemanı gözönüne alıp geodezik denklemlerini τ ya göre parametrize edelim ve τ ya göre türevler yerine “.” işaretini kullanalım. $\tilde{r}$ ye göre türevleri ise alt indiste gösterelim. Bu durumda, $f = f(\tilde{r})$ ise $\dot{f} = f_{\tilde{r}}\dot{\tilde{r}}$, yani

$$\dot{X} = \dot{\tilde{r}}X_{\tilde{r}}, \quad \dot{Y} = \dot{\tilde{r}}Y_{\tilde{r}} \quad (4.33)$$

olacaktır. $\gamma = \gamma(\tau)$

$$\gamma = \gamma(t(\tau), \tilde{r}(\tau), \theta(\tau)) \quad (4.34)$$

şeklinde parametrize edilmiş bir geodezik ise, türevinin kovaryant ve kontravaryant ifadeleri

$$\dot{\gamma}^\mu = \gamma(\dot{t}, \dot{\tilde{r}}, \dot{\theta}), \quad (4.35)$$

$$\dot{\gamma}_\mu = \gamma(-e^{2X}\dot{t}, e^{2X}\dot{\tilde{r}}, e^{-2Y}\dot{\theta}) \quad (4.36)$$

şeklindedir. Bu durumda, (4.15) yay elemanı için geodezik denklemleri, $\tilde{r} \neq 0$ için aşağıda verilmiştir.

$$\ddot{t} + 2\dot{X}\dot{t} = 0, \quad (4.37)$$

$$\dot{\tilde{r}}\ddot{\tilde{r}} + \dot{X}\dot{t}^2 + \dot{X}\dot{\tilde{r}}^2 + \dot{Y}\dot{\theta}^2 e^{-2(X+Y)} = 0, \quad (4.38)$$

$$\ddot{\theta} - 2\dot{Y}\dot{\theta} = 0. \quad (4.39)$$

Önerme 4.3. (4.37-39) ile verilen geodezik denklemleri, c_1, c_2 ve c_3 integrasyon sabitleri olmak üzere, aşağıda verilen üçüncü dereceden denklem sistemine indirgenir. Geodeziğin tipi ise, c_3 ün $-$, 0 , $+$ olduğu durumlarda sırasıyla zamansal, ışıksal ve uzaysal olur.

$$\dot{t} = c_1 e^{-2X}, \quad (4.40)$$

$$\dot{\tilde{r}} = \pm e^{-X} \left[c_1^2 e^{-2X} - c_2^2 e^{2Y} + c_3 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.41)$$

$$\dot{\theta} = c_2 e^{2Y}. \quad (4.42)$$

İspat. (4.37) denklemi integre edilirse, $\dot{t}$ için (4.40) ile verilen denkleme ulaşılır. Benzer olarak, (4.39) denkleminin integre edilmesiyle de, $\dot{\theta}$ için verilen (4.42) denkleme varılır. $\dot{t}$ ve $\dot{\theta}$ ifadeleri (4.38) de yerlerine yazılırsa,

$$\ddot{\tilde{r}}\tilde{r} + \dot{X}\dot{\tilde{r}}^2 + c_1^2\dot{X}e^{-4X} + c_2^2\dot{Y}e^{-2X+2Y} = 0 \quad (4.43)$$

denkleme ulaşılır. (4.43) denklemi, $2e^{2X}$ ifadesi ile çarpılırsa aşağıda verilen tam diferansiyel denklem elde edilir.

$$[\dot{\tilde{r}}^2 e^{2X}] \cdot - c_1^2 [e^{-2X}] \cdot + c_2^2 [e^{2Y}] \cdot = 0.$$

Her iki yandan integre edilirse, c_3 integral sabiti olmak üzere

$$\dot{\tilde{r}}^2 e^{2X} = c_1^2 e^{-2X} - c_2^2 e^{2Y} + c_3$$

elde edilir. Son denklem tekrar düzenlenerek, (4.41) daki $\dot{\tilde{r}}$ ifadesi elde edilir.

Geodeziğin normu,

$$\|\gamma\| = \gamma_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$$

şeklinde yazılır ve (4.40-42) denklemleri kullanılırsa,

$$\|\gamma\| = -e^{2X} [c_1^2 e^{-4X}] + e^{2X} [g_1^2 e^{-4X} - c_2^2 e^{-2X+2Y} + c_3 e^{-2X}] + e^{-2Y} [g_2^2 e^{4Y}]$$

elde edilir. Buradan da,

$$\|\gamma\| = c_3 \quad (4.44)$$

olur ki, c_3 sabitinin işaretine göre geodeziğin tipi belirlenir. •

Bu aşamada geodezik denklemlerinin çeşitli parametre değerleri için nümerik incelemesi yapılmıştır. Nümerik çalışma için, (4.24) denkleminde $\Lambda = -1$ için, $X_{\tilde{r}}$ ve $Y_{\tilde{r}}$ ifadeleri, (4.41) denkleminde de $\dot{\tilde{r}}$ ifadesi alınıp, (4.36) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki denklem takımına ulaşılır. Burada, t ve θ çözümleri için (4.40) ve (4.42) denklemleri kullanılacaktır.

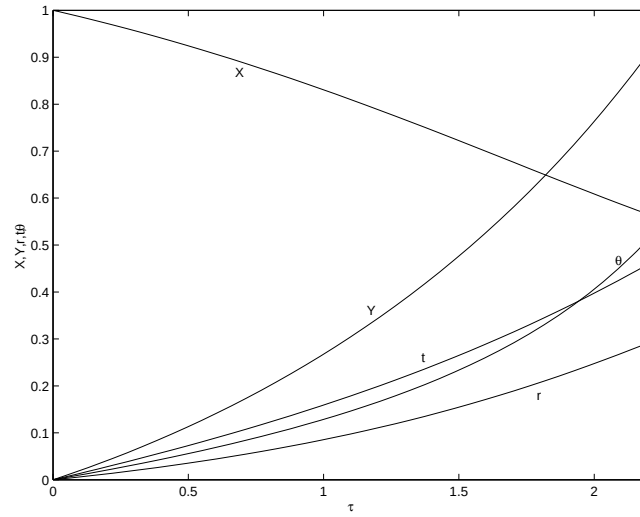
$$\begin{aligned} \dot{X} &= e^{-X} [c_1^2 e^{-2X} - c_2^2 e^{2Y} + c_3]^{1/2} \left[\frac{1}{2} c e^Y - \frac{1}{2} \sqrt{c^2 e^{2Y} + 4(e^{2X} + \lambda^2 e^{2y})} \right], \\ \dot{Y} &= e^{-X} [c_1^2 e^{-2X} - c_2^2 e^{2Y} + c_3]^{1/2} \left[\frac{1}{2} c e^Y + \frac{1}{2} \sqrt{c^2 e^{2Y} + 4(e^{2X} + \lambda^2 e^{2y})} \right]. \end{aligned}$$

Bu denklem takımının çözümünde, başlangıç şartlarının ve c_1 parametresinin çözüme etkisi oldukça azdır. Bu yüzden, nümerik hesaplamalarda $c_1 = 1$

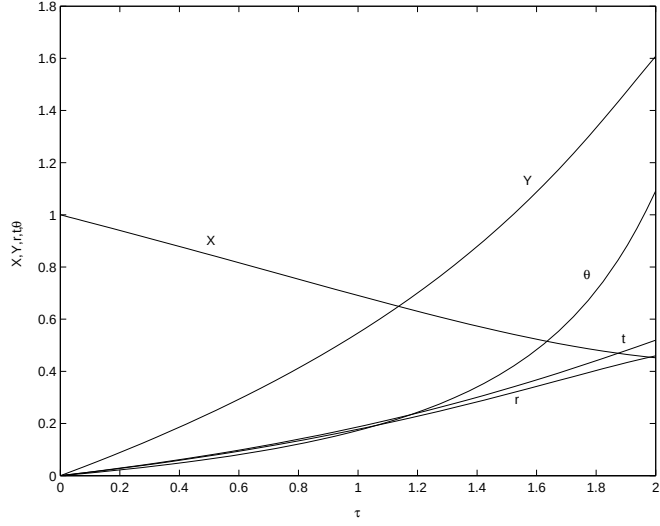
olarak alınmıştır. Ancak, c_2 parametresinin çözüm için oldukça etkili olduğu gözlenmiştir. c_2 parametresi yeteri kadar küçük olmalı, aksi takdirde $\dot{\tilde{r}}^2$ negatif olmaktadır. Bu yüzden de $c_2 = 0.1$ olarak alınmıştır. c_3 parametresi çözümlerde -0.1 , 0 veya 1 olarak kullanılmıştır.

Ayrıca, $\lambda = 0$ durumu Anti de Sitter uzay durumu olup, bu parametre 0 veya 1 olarak seçilecektir. Son olarak, c parametresi de çözümlerde -1 , 0 veya 1 olarak alınacaktır.

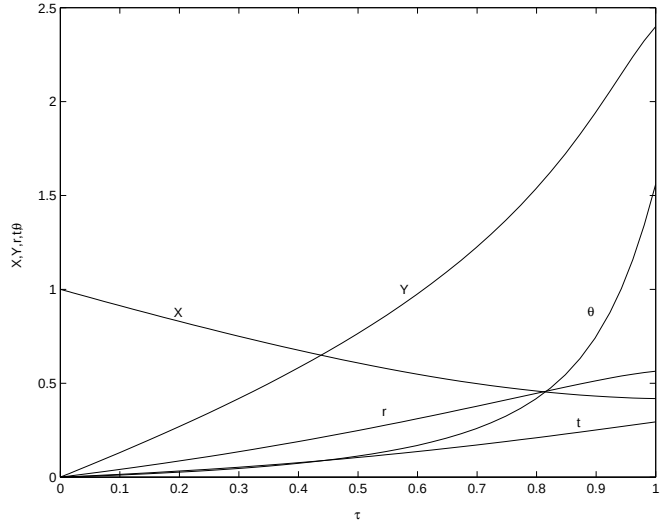
Yukarıda gerekli detayları verilen parametrelerin bazı değerleri için nümerik çözümler Şekil 4.1-4.3 de grafiklerle gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Zamansal geodezikler için c_3 parametresi -0.1 olarak seçilmiştir. $(X(\tau), Y(\tau), \tilde{r}(\tau), t(\tau), \theta(\tau))$ çözümü için, başlangıç şartları sırasıyla, $(1, 0, 0, 0, 0)$ olarak kullanılmıştır. c_1 , c_2 , c ve λ parametreleri sırasıyla 1 , 0.1 , 1 ve 0 olarak seçilmiştir.



Şekil 4.2. Işıksal (null) geodezikler için c_3 parametresi 0 alınmalıdır. $(X(\tau), Y(\tau), \tilde{r}(\tau), t(\tau), \theta(\tau))$ çözümü için başlangıç şartları sırasıyla, $(1, 0, 0, 0, 0)$ olarak kullanılmıştır. c_1, c_2, c ve λ parametreleri sırasıyla 1, 0.1, 1 ve 0 olarak seçilmiştir.



Şekil 4.3. Uzaysal geodezikler için c_3 parametresi 1 olarak seçilmiştir. $(X(\tau), Y(\tau), \tilde{r}(\tau), t(\tau), \theta(\tau))$ çözümü için, başlangıç şartları sırasıyla, $(1, 0, 0, 0, 0)$ olarak kullanılmıştır. c_1, c_2, c ve λ parametreleri için sırasıyla 1, 0.1, 1 ve 0 değerleri kullanılmıştır.

5. SONUÇLAR

Tez kapsamında yapılan yeni çalışmalar 2., 3. ve 4. Bölümde sunulmuştur.

İkinci bölümde, ilk olarak Newman-Penrose formalizmi tanıtılmış ve herhangi bir metrik için Ricci tensörünün matrisi $\{l, n, m, \bar{m}\}$ yerel tabanında, Newman-Penrose büyüklükleri cinsinden ifade edilmiştir. $\Phi_{00} \neq 0$ durumu için rankının 1 olma koşulu Önerme 2.1. de verilmiştir. Bölüm 2.3 de, Sonuç 2.1 ile, genel bir B tipi warped çarpım metrik için, manifoldun ikinci bileşeninin sabit eğriliğe sahip, R^3 e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler bir manifold olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Önerme 2.2 ile Ricci tensörü matrisinin rankının 1 ve enerji-momentum tensörü matrisinin tekil olmaması durumunda, fiziksel kaynağın kütesiz bir skaler alan olması gerektiği ispatlanmıştır. Yine Bölüm 2.3 de, genel B tipi warped çarpım metrikten, küresel simetrik metriğe geçilmiş ve Newman-Penrose büyüklükleri hesaplanmıştır. Daha sonra, Einstein alan denklemleri, üçüncü bölümde verilen alan denklemlerinden bağımsız olarak, Ricci tensörü için rank 1 koşulundan elde edilmiş (2.46) ve (2.49) denklemlerinde verilmiştir. Bölüm 2.4 de, Ricci rank 1 sınıflaması kullanılarak, enerji şartlarının ifadeleri Newman-Penrose nicelikleri türünden ifade edilmiş ve şartların sağlandığı açıkça gösterilmiştir. Son olarak, kullanılan B tipi warped metriğin Petrov ve Plebanski sınıflamaları belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde, (3+1)-boyutta Einstein alan denklemleri, literatürdeki çalışmalar doğrultusunda küresel simetrik metriğe kütesiz skaler alanın kuple edilmesiyle çalışılmıştır. Başlangıçta “over determined” olan orijinal sistem, a , α , r ve m değişkenleri kaynak [10] da olduğu gibi kullanılarak, $\mu = \frac{m}{r}$ ve $y = \frac{\alpha}{ra}$ fonksiyonları için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden normal bir sisteme (over determined olmayan) indirgenmiş ve Bölüm 3.3 de Önerme 3.2 ile verilmiştir. Pozitif ve negatif dal tanımları yapılmıştır. Zamandan bağımsız çözümler için, zamandan bağımsız duruma skaler alanın $\phi_t = 0$ (pozitif dal)

veya $\phi_s = 0$ (negatif dal) olması durumunda geçilerek zamandan bağımsız özel çözümler Bölüm 3.4 de sunulmuştur.

Pozitif dal olarak adlandırdığımız statik durum için tam çözüm Bölüm 3.4 de Önerme 3.3 ile verilmiş ve detaylı grafikleri çizilmiştir. Ayrıca, pozitif dal dinamik bir sistem olarak ele alınmış ve faz düzlemi analizi yapılmıştır. $\mu = 0$ aşıkâr çözümünün $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde bir genel çekim noktası olduğu Toerem 3.1 de ispat edilmiştir.

Wyman [20] tarafından pertürbatif olarak çalışılan ve bunun dışında literatürde dikkati çekmemiş olan, negatif dal olarak adlandırdığımız statik durum için çözümün açık analitik bir ifadesi elde edilememiş, ancak negatif dal dinamik bir sistem olarak Bölüm 3.5 de incelenmiş ve Teorem 3.2 ile de tüm çözüm eğrileri karakterize edilerek tam çözümler kapalı formda elde edilmiştir. Bu kapsamda, sistemin iki kritik noktasından $(0,0)$ 'ın semer noktası, $(\frac{1}{4},0)$ noktasının ise $\mu_s + \mu > 0$, $\mu < \frac{1}{2}$ bölgesinde bir genel çekim noktası olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, negatif dalın lineer kısmı için period 3.62 olarak hesaplanmış, lineer olmayan sistem için period hesabı, $\mu - \mu_s$ düzlemindeki çözüm eğrisinin salınımları kullanılarak nümerik olarak yapılmış ve 3.62'ye oldukça yakın bir period bulunmuştur. İlginç bir tesadüfle de μ için orijinal normal sistemde negatif dalın lineer kısmında zaman yönündeki ikinci türev ifadesi yerine konumun birinci türevinin k katı alınarak ve küçük bir dönüşüm yapılarak, periodun yalnızca $k = 0.3704$ için 3.44 olduğu gözlenmiştir. Bu ise, Choptuik [10] tarafından verilen sırasıyla kritik üs ve period ile oldukça uyumludur. Fakat, bu uyumun nedeni izah edilememiştir. Son olarak, Bölüm 3.7 de, her iki dalın da enerji koşullarını sağladığı gösterilmiş ve negatif dal mükemmel bir akışkan olarak yorumlanmıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak üçüncü bölümde elde ettiğimiz, $(3+1)$ -boyuta ilişkin sonuçlar ile ilk çalışmalarımızın [47] ilintilendirilmesi amacı ile, $(2+1)$ -boyutlu manifold, $(3+1)$ -boyutlu manifoldun ekvatoruna gömülmesi olarak tanımlanmıştır. Yine her iki boyuttaki çözümlerin karşılaştırma amacı ile, $(3+1)$ ve $(2+1)$ -boyutta kozmolojik sabitli denklemler Bölüm 4.3 de verilmiş, her iki boyutta da statik hale, $\phi_t = 0$ veya $\phi_s = 0$ durumlarında inileceği görülmüştür. Ancak tam çözümlerin karşılaştırılması sadece kozmolojik sabitsiz

durum için yapılmıştır. (2+1)-boyutta, kozmolojik sabitin sıfır olduğu durum için tam çözüm Bölüm 4.4 de verilmiştir.

Bu bölümün temel sonucu olarak, (2+1)-boyutta daha önceden pertürbatif olarak [27]'da çalışılan negatif kozmolojik sabit içeren, skaler alan kuplajı ile elde edilen Einstein alan denklemleri için bulunan ve Bölüm 4.5 de verilen tam çözümdür. Öncelikle, koordinat değişimi yapılarak (t, r, θ) orijinal koordinatlarından, 2. çeşit koordinatlar olan $(t, \tilde{r}, \theta)$ 'ya geçilerek alan denklemleri elde edilmiş ve tam çözüm, 3. çeşit koordinatlar olan (t, ω, θ) da bulunmuştur. Elde edilen tam çözümden, çeşitli koordinat dönüşümleri kullanılarak kaynak [50]'de verilen genel Anti de Sitter metriğine ulaşılmıştır. Bölüm 4.6 da, (4.15) metriğinin $c \neq 0$ olduğu durumda değişmeli $\mathbf{G}_2$ simetri cebirine, $c = 0$ durumunda ise, $\mathbf{G}_3 \mathbf{VI}_h$, $h = -1$ Bianchi tipine sahip olduğu gösterilmiştir. Geodezik denklemleri Bölüm 4.7 de, $(t, \tilde{r}, \theta)$ koordinatlarında hesaplanmış, denklemler indirgenerek, c_3 parametresinin durumuna göre geodeziklerin tipleri belirlenmiş ve daha sonra nümerik çözümler elde edilmiştir.

Çalışmanın başlangıç amacı eşik davranışının incelenmesi idi. Bu amaçla, (3+1)-boyutta Einstein alan denklemleri efektif olarak zamana göre ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş ve (3.12a,b) ile verilmiştir. Ancak, bu denklem sisteminin tam çözümü elde edilememiştir. Nümerik olarak çözüm denemeleri yapılmışsa da başarılı olunamamıştır. Literatürde önemli bir yere sahip olan “eşik davranışı”, aynı yay elemanı için, orijinal alan denklemlerinde (indirgenmemiş hali) skaler alan üzerine verilen başlangıç değerleri için 1993 yılında Choptuik [10] tarafından keşfedilmiştir. Kısa bir süre içinde de bu çalışma 100'ün üzerinde atıf almıştır. Bizim indirgemiş olduğumuz (3.12a,b) sistemi, Choptuik'in çalıştığı sisteme nazaran daha basittir. Bu yüzden de, nümerik olarak daha iyi sonuçlar verebileceğini düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

- [1] **Do Carmo, M. P.**, (1992). Riemannian geometry, *Birkhäuser*, Boston.
- [2] **Newman, E. T., and Penrose, R.**, (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *J. Math. Phys.* **3**, 566. Erratum (1963): *J. Math. Phys.* **4**, 998.
- [3] **Bilge, A. H. and Gurses, M.**, (1986). Cartan ideal, prolongation and Bäcklund transformations for Einstein's equations, *J. Math. Phys.*, **27**, (7), 1819.
- [4] **Nutku, Y.**, (1976). Differential geometry of general relativity as an Utiyama field. *Unpublished*.
- [5] **Güven, R.**, (1982). Talk given at the 8th Ettore Majorana School of Cosmology and Gravitation, Erice, Italy.
- [6] **Frolov, V. P.**, (1977). Newman-Penrose formalism in general relativity, *Akad. Nauk SSR* **96**, 72.
- [7] **Stephani, H., Kramer, D., Maccallum, M., Hoenselaers, C., Herlt, E.**, (2003). Exact solutions of Einstein's field equations, *Cambridge University Press*.
- [8] **Christodoulou, D.**, (1986). The problem of a self-gravitating scalar field, *Commun. Math. Phys.* **105**, 337.
- [9] **Christodoulou, D.**, (1986). Global existence of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations in the large, *Commun. Math. Phys.* **106**, 587.
- [10] **Choptuik, W. M.**, (1993). Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field, *Phys. Rev Lett.*, **70**, 9.
- [11] **Abrahams, A. M. and Evans, C. R.**, (1993). Critical behavior and scaling in vacuum axisymmetric gravitational collapse, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2980.
- [12] **Gundlach, C.**, (2003). Critical phenomena in gravitational collapse, *Phys. Rept.*, **376**, 339, gr-qc/0210101.
- [13] **Fisher, I. Z.**, (1948). Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **18**, 636. Zloshchastiev, K. G., (1999). Translation and foreword, gr-qc/9911008.

- [14] **Grumiller, D.**, (2001). Quantum dilaton gravity in two dimensions with matter, PhD thesis, *Technische Universität, Wien*, gr-qc/0105078.
- [15] **Grumiller, D. and Mayerhofer, D.**, (2004). On static solutions in 2D dilaton gravity with scalar matter, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5893, gr-qc/0404013.
- [16] **Bergmann, O., Leipnik, R.**, (1957). Space-time structure of a static spherically symmetric scalar field, *Phy. Rev.* **107**, 1157.
- [17] **Buchdahl, H. A.**, (1959). Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity, *Phy. Rev.* **115**, 1325.
- [18] **Janis, A. I., Newman, E. T., Winicour, J.**, (1968). Relativity of the Schwarzschild singularity, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 878.
- [19] **Katanaev, M. O.**, (2002). Effective action for scalar fields in two-dimensional gravity, *Annals Phys.* **296**, 1, gr-qc/0101033.
- [20] **Wyman, M.**, (1981). Static spherically symmetric scalar fields in general relativity, *Phys. Rev. D* **24**, 839.
- [21] **Zecca, A.**, (2006). Comoving self-gravitating scalar field in the Newman Penrose formalism, *Inter. J. of Theor. Phys.* **45**, No.2, 385.
- [22] **Staruszkiewicz, A.**, (1963). Gravitational theory in three-dimensional space, *Acta Phys. Polon.* **24**, 735.
- [23] **Pretorius, F. and Choptuik, W. M.**, (2000). Gravitational collapse in $2 + 1$ dimensional AdS spacetime, *Phys. Rev. D* **62**, 124012.
- [24] **Garfinkle, D.**, (2001). Exact solution for (2+1)-dimensional critical collapse, *Phys. Rev. D* **63**, 044007.
- [25] **Husian, V and Oliver, M.**, (2001). Scalar field collapse in three-dimensional AdS spacetime, *Class. Quant. Grav.* **18**, L1-L9.
- [26] **Celement, G and Fabbri, A.**, (2001). Analytical treatment of the critical collapse in 2+1 dimensional AdS spacetime: a toy model, *Class. Quant. Grav.* **18**, 3665. gr-qc/0101073.
- [27] **Birkandan, T., and Hortacsu, M.**, (2003). Three dimensional gravity in the presence of scalar fields, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 457.
- [28] **Boothby, W. M.**, (1975). An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, *Academic Press*, New York.
- [29] **Kobayashi, S., and Nomizu, K.**, (1963). Foundations of differential geometry, volume 1, *Interscience*, New York, London.

- [30] **Weatherburn, C. E.**, (1966). An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus, *Cambridge University Press*, London.
- [31] **Do Carmo, M. P.**, (1976). Differential geometry of curves and surfaces, *Prentice-Hall*, New Jersey.
- [32] **Nakahara, M.**, (1990). Geometry, topology and physics, *Adam Hilger*, Philadelphia and New York.
- [33] **O’Neil, B.**, (1983). Semi Riemannian geometry, *Academic Press, inc.*, London.
- [34] **Carot, J., Costa, J. da.**, (1993). On the geometry of warped spacetimes, *Class. Quant. Grav.* **10**, 461.
- [35] **Perko, L.**, (1991). Differential equations and dynamical systems, *Springer-Verlag*, New York.
- [36] **Bayram, M.**, (2002). Nümerik analiz, *Aktif Yayınevi*, İstanbul.
- [37] **Birkandan, T.**, (2002). Üç boyutlu Anti de Sitter uzayında Einstein alan denklemlerinin skaler alan varlığında çözümleri, yüksek lisans tezi, *İ.T.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.
- [38] **Stewart, J.**, (2003). Advanced general relativity, *Cambridge University Press*.
- [39] **Frolov, V. P.**, (1979). The Newman-Penrose method in the theory of general relativity. *Problems in the general theory of relativity and the theory of group representation*, editor: Bossov, N. G., Consultants Bureau.
- [40] **Carmeli, M. and Kaye, M.**, (1976). Transformation Laws of the Newman-Penrose field variables, *Annals. of Phys.* **99**, 188.
- [41] **Ernst, F. J.**, (1978). Coping with different languages in the null tetrad formulation of general relativity, *J. Math. Phys.* **19** 2, 489. Erratum (1979): *J. Math. Phys.* **20**, 11 2371.
- [42] **Haddow, B. M ., Carot, J.**, (1996). Energy-momentum types of warped spacetimes, *Class. Quant. Grav.* **13**, 289.
- [43] **Wald, R. M.**, (1984). General relativity, *The University of Chicago Press*, Chicago.
- [44] **Birrel, N. D., Davies, P. C. W.**, (1982). Quantum fields in curved spacetime, *The University of Cambridge Press*, Cambridge.
- [45] **Harrison, B. K.**, (2004). Applications of symmetry to general Relativity, *The Fifth International Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, **Part 1**, 131.

- [46] **Hartman, P.**, (1964). Ordinary diferantial equations, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [47] **Daghan, D., and Bilge, A.H.**, (2005). An exact solution for static scalar fields coupled to gravity in (2+1)-dimensions, *Gen. Rel. Grav.* **37** 7, 1289.
- [48] **Dias, O. J. C., Lemos, J. P. S.**, (2001). Static and rotating electrically charged black holes in three-dimensional Brans-Dicke gravity theories. *Phys. Rev. D*, **64**, 064001.
- [49] **Celement, G., and Fabbri, A.**, (2000). The cosmological gravitating σ model: solitons and black holes. *Class. Quant. Grav.* **17**, 2437, gr-qc/9912023.
- [50] **Matschull, H. J.**, (1999). Black hole creation in $2 + 1$ dimensions, *Class. Quant. Grav.* **16**, 1069.
- [51] **Jantzen, R. T.**, (1999). Editorial commentary on the Lie-Bianchi classification of 3-dimensional Lie algebras, *Unpublished*.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Kayseri’de doğdu. İlk, orta ve liseyi Kayseri’de tamamladıktan sonra, 1991 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 1995 yılında tamamladığı lisans öğreniminden sonra, aynı yıl Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Yüksek lisansını Gazi Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik programında tamamladı. 2000 yılında Y.Ö.K. tarafından 35. madde ile İ.T.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü’nde araştırma görevlisi olarak görevlendirildi. Halen İ.T.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü kadrosunda araştırma görevlisidir. Evli ve iki çocuk babasıdır.

Bu tez çalışmasından, “An exact solution for static scalar fields coupled to gravity in (2+1)-dimensions ” başlıklı çalışma, General Relativity and Gravitation, 37(7), 1289-1296 (2005) isimli dergide basılmış olup, “Scalar fields coupled to gravity in (3+1)-dimensions: static perfect fluid solutions” başlıklı çalışma yayın için hazırlanmaktadır. Ayrıca, “Scalar fields coupled to gravity in spherically symmetric background in (2+1)-dimensions” başlıklı bildiri, “American Institute of Physics” tarafından konferans yayını olarak basılmıştır. “Exact static solutions coupled to gravity in (3+1)-dimensions” başlıklı bildiri ise “World Scientific, Singapore, 2007” tarafından konferans yayını olarak basılacaktır. Bununla beraber, “Workshop on Quantization, Dualities and Integriable systems IV, 1-4 February 2005, Abant İzzet Baysal University, Bolu” ve “Workshop on Quantization, Dualities and Integriable systems V, 23-27 January 2006, Pamukkale University, Denizli” isimli ulusal toplantılarda iki adet bildiri sunulmuştur.