

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER DİSPERSİF ELASTİK DALGALAR

DOKTORA TEZİ

Ali DEMİRCİ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

MART 2013

NONLİNEER DİSPERSİF ELASTİK DALGALAR

DOKTORA TEZİ

ALİ DEMİRCİ
(509072004)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR

MART 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509072004 numaralı Doktora Öğrencisi **Ali DEMİRCİ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**NONLINEER DİSPERSİF ELASTİK DALGALAR**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hasan ENGİN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Adı Semra AHMETOLAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan TAŞELİ
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Tanıl ERGENÇ
Atılım Üniversitesi

Teslim Tarihi : **26 Aralık 2012**

Savunma Tarihi : **15 Mart 2013**

Annem'e ve Babam'a,

ÖNSÖZ

Tez çalışması, çalışmayı yapan için küçük bir hayat simülasyonu gibidir. Karşılaştığımız en küçük zorlukta bir an için yenilgi duygusu altında ezilirken, çok kısa bir süre sonra çalışmanızda gösterdiğiniz ilerleme sayesinde zafer hissini en derinden hissedersiniz. Kimi zaman umutsuzluk, çaresizlik hissiyle karşı karşı iken, kimi zaman da mutluluk ve azim sizin yanınızda olur. Akademik çalışmanın doğasında olan bu iniş çıkışlar, çalışmayı yapan akademisyen adayı için çalışmanın içeriğinden çok daha zorlayıcı olmaktadır. Nitel bir çalışma yapıyor olmanıza rağmen, duyguların bu kadar işin içine girmesi de diğer bir ilginç durumdur. Ama bu zorluklarla tek başınıza mücadele etmediğinizi belirtmek isterim. Çalışmanızın her aşamasında sizi destekleyen ve yukarıda ifade ettiğim zorluklara karşı yanınızda olan, çalışmanın gizli kahramanları diyebileceğimiz kişiler hep var olmaktadır. Bu çalışma özelinde benim kahramanlarımı bu desteklerinin karşılığı olmayacağını bildiğim halde, burada anmak isterim.

Bu çalışma kapsamındaki benim kişisel mücadelemın her aşamasında yanımda olan, üzerimdeki emeğini asla ödeyemeyeceğim, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Mevlüt Teymür'e bana gösterdiği sabır ve destek için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Hasan Engin'e ve Yrd. Doç. Dr. Semra Ahmetolan'a çalışma raporlarında yaptıkları öneriler ve gösterdikleri destek için teşekkür ederim.

Birlikte çalıştığım arkadaşlarım ve meslektaşlarım olan araştırma görevlileri Cihangir Özemer'e, Hale Aytaç'a, Nurettin Cenk Turgay'a ve Sevgi Harman'a akademik bilgi paylaşımında olsun, sıkıntılı anlarımdaki destekleyici tavırları olsun, paylaştıkları her şey için minnettarım. Arkadaşlarım Atilla Polat'a ve Ercüment Hançer'e de çalışma boyunca sıkıntılı anlarımda gösterdikleri dostluk için de ayrıca teşekkür ederim. Ayrıca, İTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü ailesindeki tüm elemanlara, üzerimde emeği olan hocalarıma yürekten sevgilerimi ifade etmek istiyorum.

Cihangir Özemer, tezin yazım döneminde en yakınımıdaki kişiydi. Kendisine paylaştığı arkadaşlık ve yaptığı abilik için ne kadar teşekkür etsem azdır. İlerde hayalini kurduğumuz akademik çalışmaları yapacak fırsatları bulmak ve gerçekleştirmeyi çok arzuladığımız ülkemizdeki sayıların artmasının elzem olduğunu düşündüğüm "Uygulamalı Matematik Enstitüsü" projesini hayata geçirme konularında umarım başarılı oluruz.

Son olarak, gelişimin her döneminde benden desteklerini esirgemeyen, her türlü sorununda benimle dertlenen, hayata bakış açımı her zaman olumlu yönde şekillendiren başta annem Mükerrrem Demirci'ye ve babam Mustafa Demirci'ye olmak üzere tüm Demirci ailesi fertlerine teşekkürlerimi sunuyorum. Bu çalışmayı sevgili anneme ve babama ithaf ediyorum.

Bu çalışmaya ilgi gösterecek sayın okuyucu. Umarım bu çalışma akademik çalışmalarınızda karşılaştığınız zorlukları aşmada yardımcı olur. Bilimin tarihi gelişiminde, okyanusta bir su damlası olan bu çalışma, bir akademisyen adayının elinden çıkmaktadır. İçerdiği her hata da doğal olarak o akademisyen adayına, yani bana aittir. Bu çalışmanın, gelecekteki başka çalışmalara da ilham olması dileğiyle, kişisel olarak karşılaştığım ve insanoğlunun da üstesinden geldiği her türlü zorluğa atıf yapan bir Latince cümle ile sözlerimi bitirmek istiyorum:

Ad astra per aspera.

Mart 2013

Ali DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ.....	1
2. HİPERELASTİK BİR TABAKADA DÜZLEM İÇİ DALGALARIN YAYILMASI.....	7
2.1 Giriş	7
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler.....	7
2.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağlılıkları.....	10
2.3.1 $c_T < c_L < c$ durumu	12
2.3.2 $c_T < c < c_L$ durumu	14
2.3.3 $c < c_T < c_L$ durumu	15
2.3.4 Dispersiyon bağıntıları	16
3. HİPERELASTİK BİR TABAKADA SONLU FAKAT KÜÇÜK GENLİKLİ NONLİNEER SİMETRİK DALGALARIN YAYILMASI	23
3.1 Giriş	23
3.2 Simetrik Dalgalar İçin Asimptotik Analiz.....	23
3.3 Asimptotik Yaklaşım Denkleminin (K-dV Denklemini) Bazı Çözümleri ve Tartışma	34
4. HİPERELASTİK BİR TABAKADA SİMETRİK NONLİNEER DALGALARIN MODÜLASYONU.....	39
4.1 Giriş	39
4.2 Nonlineer Dalgaların Self Modülasyonu.....	40
4.2.1 $c_T < c_L < c$ için analiz	46
4.2.2 $c_T < c < c_L$ için analiz	66
4.2.3 $c < c_T < c_L$ için analiz	67
4.2.4 Asimptotik yaklaşım denkleminin (NLS denklemini) bazı çözümleri	81
4.2.5 Sayısal sonuçlar ve tartışma	85
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	91
KAYNAKLAR.....	95

EKLER	99
EK A: İkinci Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar	101
EK B: Üçüncü Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar	107
EK C: Şekiller.....	153
ÖZGEÇMİŞ	187

KISALTMALAR

BO	: Benjamin-Ono
ÇÖY	: Çoklu Ölçekler Yöntemi
K-dV	: Korteweg-de Vries
NLS	: Nonlinear Schrödinger
SH	: Shear Horizontal

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1: Tabakayı oluşturan gerçek malzeme modellerine ait boyutlu lineer malzeme sabitleri ve boyutsuz parametre değerleri	19
Çizelge 4.1: Tabakayı oluşturan gerçek malzeme modellerine ait boyutlu ve boyutsuz nonlinear malzeme parametre değerleri	88

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

- Şekil C.1** : Simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinde boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 153
- Şekil C.2** : Simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 154
- Şekil C.3** : Simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi 155
- Şekil C.4** : Simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 156
- Şekil C.5** : Simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi 157
- Şekil C.6** : Simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 158
- Şekil C.7** : Anti-simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 159
- Şekil C.8** : Anti-simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 160
- Şekil C.9** : Anti-simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi 161
- Şekil C.10** : Anti-simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 162
- Şekil C.11** : Anti-simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi 163
- Şekil C.12** : Anti-simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi..... 164
- Şekil C.13** : $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi . 165

Şekil C.14 : $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	166
Şekil C.15 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	167
Şekil C.16 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	168
Şekil C.17 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	169
Şekil C.18 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	170
Şekil C.19 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	171
Şekil C.20 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	172
Şekil C.21 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	173
Şekil C.22 : Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	174
Şekil C.23 : Demir malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	175
Şekil C.24 : Demir malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	176
Şekil C.25 : Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	177
Şekil C.26 : Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	178
Şekil C.27 : Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	179
Şekil C.28 : Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	180
Şekil C.29 : Bakır malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	181
Şekil C.30 : Bakır malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	182
Şekil C.31 : Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	183

Şekil C.32 : Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	184
Şekil C.33 : Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi	185
Şekil C.34 : Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi.....	186

NONLİNEER DİSPERSİF ELASTİK DALGALAR

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı nonlinear homojen izotrop elastik bir malzemeden oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi nonlinear dalgaların yayılması ile ilgili bazı problemler asimptotik pertürbasyon yöntemleri kullanılarak incelenmiştir. Çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, lineer ve nonlinear elastik dalgaların yayılmasıyla ilgili çalışmaların tarihi gelişimi hakkında bilgi verildikten sonra bu tez kapsamında incelenen problemlerin bu çalışmalar arasındaki yeri ve genel olarak bu problemlerle ilgilenme amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, düzgün kalınlıklı nonlinear homojen izotrop elastik bir malzemeden oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi dalgaların yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilmiştir. İncelenen dalgaların küçük ama sonlu genlikli olmaları nedeniyle tabakayla ilgili gerilme deformasyon bağıntıları, nonlinearlik derecesi ikiden büyük olan terimler ihmal edilerek yaklaşılmıştır. Buna bağlı olarak hareket denklemleri ve sınır koşulları da aynı mertebede yaklaşılmıştır. Daha sonra, bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilerek tabakada yayılan lineer dalgaların yayılımı ele alınmıştır. Bu inceleme, düzlem içi dalgaların simetrik (extensional) ve anti-simetrik (flexural) dalga modları için ayrı ayrı yapılmıştır. Dalgaların faz hızı c ile lineer enine ve boyuna dalgaların hızları c_T ve c_L 'lerin sağladığı tüm durumları kapsayan $c_T < c_L < c$, $c_T < c < c_L$ ve $c < c_T < c_L$ eşitsizlikleri için hem simetrik hem de anti-simetrik dalgaların varlığı ve bu dalgaların dispersif oldukları gösterilmiştir. Bu bölümde son olarak, simetrik ve anti-simetrik dalgalara ait bu üç faz eşitsizliği için ayrı ayrı olmak üzere dispersiyon bağıntıları elde edilmiş ve bu bağıntıların ayrıntılı analizleri tabakayı oluşturan yapay ve gerçek malzeme modelleri için yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, düzlem içi nonlinear dalgaların yayılımı ile ilgili ilk problem olan, küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılımı problemi incelenmiştir. Bu amaç için, özellikleri daha önce tanımlanan dalga kılavuzunda ikinci bölümde türetilen dalga yayılımını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşullarının tanımladığı sınır değer probleminin asimptotik çözümünün inşası, bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemde, simetrik dalgaların tanımlanan elastik ortamda yayılmasını modelleyen düzlem içi hareketlere bağlı olarak enine ve boyuna doğrultuda yer değiştirmelerin fonksiyonları cinsinden hareket denklemleri ve sınır koşulları ilk olarak boyutsuz değişkenlerle boyutsuz hale getirilmiştir. Daha sonra, uniform olarak geçerli bir asimptotik seri açılımı kullanılarak ve nonlinearlikle dispersiyon arasındaki denge sağlatılarak küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılmasını asimptotik olarak karakterize eden denklem olan Korteweg-de Vries

(K-dV) denklemi elde edilmiştir. Bir sinyalizasyon problemi tanımlanarak simetrik dalgaları üretebilecek sınır etkisiyle, K-dV denkleminin bir çözümünü elde etmek için tanımlanan başlangıç koşulu arasındaki bağıntı inşa edilmiştir. Ayrıca, K-dV denkleminin tekil dalga çözümlerinin ayrıntılı olarak elde edilmesi gösterilmiş ve singüler çözüm yapıları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, nonlinear sınır değer problemi, simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden çözüm, her üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumlar için ayrı ayrı olmak üzere bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak incelenmiştir. İncelemenin sonunda üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumda da simetrik dalgaların self modülasyonunun bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra asimptotik yaklaşım denklemi olan NLS denkleminin bilinen bazı çözümleri verilmiş, uniform dalga çözümlerinin küçük pertürbasyon altında kararlılıkları incelenmiştir. Bu incelemenin sonunda, daha önceden de bilinen NLS denkleminin çözümlerinin kararlılığı ve zarf soliton tipi çözümlerinin varlığı gibi çözüm özellikleri, NLS denkleminin dispersiyon teriminin katsayısı Γ ile nonlinear teriminin katsayısı Δ 'nın çarpımının işaretine bağlı olduğu görülecektir. Bu katsayılardan Γ tabakayı oluşturan malzemenin lineer malzeme sabitlerine ve dalga sayısına bağlıyken, Δ ise tabakayı oluşturan malzemenin lineer ve nonlinear malzeme sabitleriyle dalgaların dalga sayısına bağlıdır. Bu katsayı çarpımının NLS denkleminin çözüm davranışının belirlenmesindeki öneminden dolayı, $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin dalga sayısına ve malzeme sabitlerine göre değişimini bilmek gerekir. Fakat bu katsayıların yapıları çok karmaşık olduğundan bu değişimi belirleyebilmek için analiz, çeşitli malzeme modelleri seçilerek katsayılar sayısal olarak hesaplanmışlardır. Bu amaç için, ilk olarak hipotetik malzeme modelleri için ve daha sonra da gerçek malzeme modelleri için ayrı ayrı denklemin katsayıları Γ ve Δ ile, $\Gamma\Delta$ 'nın boyutsuz dalga sayısı kh 'ya göre değişimleri, malzeme modelleri için elde edilen dispersiyon bağıntılarının ilk iki dalı için hesaplanmış ve şekillerle ifade edilmişlerdir. Bu şekillerden, boyutsuz dalga sayılarının sağladığı alt aralıklar için $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin farklılık gösterdiği görülmüştür. Yani, dalga yayılımı esnasında, dalga sayısının bulunduğu aralık değerine ve seçilen malzemeye göre çözüm formları ve kararlılığı farklılık göstermektedir. Ayrıca, simetrik dalgaların dalga sayıları, seçilen lineer modele bağlı olarak ikinci harmonik rezonans etkileşim koşulunun sağlandığı kritik dalga sayılarına yaklaştıkça Δ 'nın sınırsız olarak büyüdüğü gözlemlenmiştir. Diğer yandan, bazı kritik dalga sayıları için de seçilen lineer malzeme sabitlerine bağlı olarak $\Gamma = 0$, nonlinear malzeme sabitlerine göre ise $\Delta = 0$ olabilmektedir, yani bu kritik dalga sayıları civarında marjinal kararlılık hali olarak adlandırılan $\Gamma\Delta = 0$ durumunun oluştuğu görülmüştür. İkinci harmonik rezonansın ve marjinal stabilite halinin ortaya çıktığı bu kritik dalga sayıları civarında asimptotik dalga alanı bir NLS denklemi ile karakterize edilemez. Bu durumlarda asimptotik dalga alanını temsil etmek için asimptotik yöntem uygun bir şekilde kullanılarak, simetrik dalgaların modülasyonunun asimptotik olarak karakterize edecek yeni denklemler türetmek gerekmektedir.

NONLINEAR DISPERSIVE ELASTIC WAVES

SUMMARY

In this work, the propagation of small, but finite amplitude in-plane waves in a nonlinear elastic layer of uniform thickness is considered. Let x_1, x_2, x_3 and X_1, X_2, X_3 be respectively the spatial and material coordinates of a point in space referred to the same Cartesian system of axes. In the reference frame X_K , a layer of uniform thickness $2h$ occupies the region

$$D = \{ (X_1, X_2, X_3) \mid -h < X_2 < h, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty \} \quad (1)$$

It is assumed that the boundaries $X_2 = h$ and $X_2 = -h$ are free of traction. Then a wave motion described by the equations

$$x_1 = X_1 + u_1(X_1, X_2, t), \quad x_2 = X_2 + u_2(X_1, X_2, t), \quad x_3 = X_3 \quad (2)$$

propagates along the X_1 -axis in the plate is considered. Here u_1 and u_2 are displacements in the (X_1, X_2) -plane, in X_1 and X_2 directions respectively, and t is the time. The constituent material of the layer is assumed to be compressible, homogenous, isotropic and hyperelastic.

Let $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$ and $u = u_1, v = u_2$. To investigate the small but finite amplitude wave motion, proceedings with the approximate equations rather than the exact ones, will be more convenient. Therefore, in the absence of body forces the following approximate expressions, involving terms not higher than the second order degree in the deformation gradients, are obtained

$$\mathcal{L}_1(u, v) = \mathcal{N}_1(u, v), \quad \mathcal{L}_2(u, v) = \mathcal{N}_2(u, v), \quad (3a, b)$$

$$\mathcal{B}_1(u, v) = 0, \quad \mathcal{B}_2(u, v) = 0. \quad \text{at } Y = \pm h \quad (4a, b)$$

where $\mathcal{L}_i, i = 1, 2$ are linear differential operators defined as

$$\mathcal{L}_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y}, \quad (5a)$$

$$\mathcal{L}_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \quad (5b)$$

and $\mathcal{N}_i, \mathcal{B}_i, i = 1, 2$, are nonlinear differential operators defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(u, v) = & \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial u}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial v}{\partial X} \right) \mathcal{K}_2 \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\eta_2 \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1 \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2(u, v) = & \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial v}{\partial X} + \eta_3 \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \mathcal{K}_2 \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\eta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\eta_2 \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1 \right],\end{aligned}\quad (6b)$$

$$\mathcal{B}_1(u, v) = c_T^2 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \left(\eta_3 \frac{\partial v}{\partial X} + 2\eta_4 \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \mathcal{K}_2, \quad (6c)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2(u, v) = & c_L^2 \frac{\partial v}{\partial Y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u}{\partial X} + \eta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 \\ & + 2\eta_2 \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1.\end{aligned}\quad (6d)$$

Here $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}_2$ are defined as

$$\mathcal{K}_1 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \right], \quad \mathcal{K}_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right). \quad (7a,b)$$

In the differential operators given above the constants c_T and c_L are the linear shear and longitudinal wave velocities in the layer defined as

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \quad (8a,b)$$

and the constants η_i , $i = 1, \dots, 4$ are defined as $\eta_i = \beta_i / \rho_0$ where

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\lambda + 3l + 3\mu, \quad \beta_2 = \frac{\lambda}{2} + 3l + m, \quad \beta_3 = \mu - \frac{m}{2}, \quad \beta_4 = \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{m}{4}. \quad (9)$$

Here λ, μ are linear material constants (Láme constants) and l, m, n are nonlinear material constants (Murnaghan's constants).

Thereafter, the propagation of linear in-plane waves in an elastic plate is examined. In this examination, a symmetric motion in the layer where the displacement functions u and v satisfy the symmetry conditions

$$u(X, Y, t) = u(X, -Y, t), \quad v(X, Y, t) = -v(X, -Y, t) \quad (10)$$

and an anti-symmetric motion in the layer where the displacement functions satisfy the symmetry conditions

$$u(X, Y, t) = -u(X, -Y, t), \quad v(X, Y, t) = v(X, -Y, t) \quad (11)$$

are considered separately. The inequality $c_T < c_L$ holds, between the phase velocities of the shear and longitudinal waves propagating in a homogenous isotropic linear elastic medium. Considering this inequality, the phase velocity c of the symmetric (extensional) and anti-symmetric (flexural) waves satisfy either of the following inequalities

$$c_T < c_L < c, \quad c_T < c < c_L, \quad c < c_T < c_L. \quad (12a,b,c)$$

The symmetric waves and the anti-symmetric waves are investigated separately, and the dispersion relations are derived and examined for all three cases.

Then two different wave propagation problems governed by the equations (3-4) are considered. First the propagation of small, but finite amplitude symmetric waves is investigated by a perturbation method. In the analysis, nondimensional variables are defined and are employed in the boundary value problems (3-4). For this boundary value problem to develop a uniformly valid asymptotic solution, new independent variables $x_0 = x = X/L$, $x_1 = \varepsilon x = \varepsilon X/L$, $\tau = (c/L)t$, $y = Y/h$ are introduced where c and L denote a characteristic velocity and a characteristic wavelength. Here $x_1 = \varepsilon x$ characterizes the slow spatial variation along the x -axis. Then it is assumed that nondimensional displacement functions $u = u/L$ and $v = v/h$ are functions of x_0, x_1, τ and y . Thereafter following usual procedure of the method they are expanded in the following asymptotic series in ε

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, \tau, y), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, \tau, y). \quad (13a,b)$$

Here, it is also assumed that $h^2/L^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$, i.e. $\varepsilon = h^2/L^2$. Hence employing the expansions (13) in the new nondimensional boundary value problem, then collecting the terms of like powers in ε , a hierarchy of problems are obtained from which it is possible to determine u_n and v_n , successively. The solutions of the first and second order problems are found to be;

$$u_1 = \mathcal{A}(x_0, x_1, \tau), \quad v_1 = \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_0} y, \quad (14)$$

$$u_2 = \left[c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} + c_T^2 \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 3 \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} \right] \frac{y^2}{2} + J_1(x_0, x_1, \tau) \quad (15)$$

where J_1 is an arbitrary function to be determined in high order perturbation problems and if c is chosen as the longitudinal thin plate velocity, $\mathcal{A}$ satisfies the wave equation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} = 0. \quad (16)$$

The solution of this equation for the waves propagating along the positive x -axis is of the form $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau - x_0, x_1)$. The result implies that $\mathcal{A}$ remains constant in a frame of reference moving with the unit velocity. The dependence of $\mathcal{A}$ on $\tau - x_0$ and x_1 is determined proceeding to the next order. From the third order problem, a compatibility condition yields

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi \partial x_1} - \frac{\Lambda_0}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\Lambda_1}{2} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \xi^4} = 0 \quad (17)$$

where $\xi = \tau - x_0$. Here, the constant Λ_1 depends only on linear elastic constants, while Λ_0 also depends on nonlinear ones. To complete the first order solutions (14) $\mathcal{A}$ should be determined as a solution of (17). Defining $\partial \mathcal{A} / \partial \xi = (1/|\Lambda_0|) w$ the equation (17) becomes

$$w_{x_1} - \alpha w_{\xi} - \beta w_{\xi \xi \xi} = 0 \quad (18)$$

where $\alpha = \text{sgn}\Lambda_0 = \pm 1, \beta = \Lambda_1/2$. The equation (18) is a K-dV equation and it is derived in various branches of science and engineering to describe long wave behavior of waves asymptotically. Once a solution for w is derived from (18) for a given initial value of the form $w(0, \xi) = w_0(\xi)$ which is related with an applied boundary traction creating a symmetric motion in the layer, then the first order solutions (14) can be constructed. Finally for this wave propagation problem, the solitary wave solutions and singular solutions of the K-dV equation are introduced.

In the second problem, the aim is to investigate how the slowly varying amplitude of a weakly nonlinear symmetric wave is modulated by nonlinear self interaction. For this purpose the method of multiple scales is employed by introducing new independent variables

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y_i = \varepsilon^i Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (19)$$

instead of X, Y, t , where $\varepsilon > 0$ is a small parameter which measures the degree of the nonlinearity and at the same time the narrowness of the side-band width of a carrier wave centered around a specific wave number. The variables x_0, y_0, t_0 are fast variables describing the fast variations in the problem while $x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2$ are slow variables describing the slow variations. It is then assumed that the displacement components are functions of these new variables, i.e.

$$u = u(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2), \quad v = v(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) \quad (20)$$

Then, they are expanded in the following asymptotic power series in ε

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n. \quad (21)$$

First, writing the governing equations (3a,b) and the boundary conditions (4a,b) in terms of the new independent variables (19) and then employing the asymptotic expansions (21) in the resulting expressions and collecting the terms of like powers in ε yield a hierarchy of problems from which it is possible to determine u_n and v_n successively. Moreover, the first order problem is simply the classical linear problem in an elastic layer.

The analysis, then begins with the construction of the first order problem. Since the nonlinear self modulation of symmetric waves is under consideration, it is assumed that the wave number of fundamental wave does not satisfy the harmonic resonance condition and the long wave components are identically zero in the first order solutions. Here, the analysis is employed for the waves satisfying the phase inequalities (12a,b,c), separately. Under the assumptions mentioned above first order solutions are found for the first case as;

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cos(kp_L y_0) + p_T R_{12} \cos(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c., \quad (22a)$$

$$v_1 = i\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [p_L R_{11} \sin(kp_L y_0) - R_{12} \sin(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (22b)$$

for the second case as;

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cosh(kr_L y_0) + p_T R_{12} \cos(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c., \quad (23a)$$

$$v_1 = -i\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [r_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + R_{12} \sin(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (23b)$$

and for the third case as;

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cosh(kr_L y_0) + ir_T R_{12} \cosh(kr_T y_0)] e^{i\phi} + c.c., \quad (24a)$$

$$v_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [-ir_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + R_{12} \sinh(kr_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (24b)$$

Here "c.c." symbol denotes the complex conjugate of the preceding terms and $\mathcal{A}_1$ is the complex function of the slow variables (x_1, x_2, t_1, t_2) representing the first order slowly varying amplitude of the wave motion. Also, $\phi = kx_0 - \omega t_0$, $p_\alpha = (c^2/c_\alpha^2 - 1)$, $r_\alpha = (1 - c^2/c_\alpha^2)$, ($\alpha = L, T$), and R_{ij} 's are the components of the column vector $\mathbf{R}$ satisfying $\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0}$ where $\mathbf{W}_1$ is the dispersion matrix.

Since the work is restricted to the propagation of small but finite amplitude waves, the aim was to construct only a uniformly valid first order solutions. Obviously, to complete these first order solutions of the nonlinear problem, $\mathcal{A}_1$ has to be determined. This can be achieved by examining the higher order perturbation problems. If the first order solutions given above are used in the second order problem and if the resulting non-homogenous linear problem is solved, a compatibility condition related with fundamental mode yields for all cases

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0, \quad V_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (25)$$

This equation states that the amplitude $\mathcal{A}_1$ remains constant in a frame of reference moving with the group velocity V_g of the waves. That is, $\mathcal{A}$ depends on x_1 and t_1 only through the combination of $x_1 - V_g t_1$. To reveal dependence of $\mathcal{A}_1$ on x_2 and t_2 the third order problem has been examined. A compatibility condition for all cases related with the fundamental mode at this order yield the following equations $\mathcal{A} = k\mathcal{A}_1$;

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0, \quad \tau = \omega t_2, \quad \xi = k(x_1 - V_g t_1). \quad (26)$$

Here, the coefficient Δ depends on nonlinear material parameters. The equation (26) is a NLS equation and it is derived in various fields to describe the nonlinear self modulation of waves. Thus, once a solution for $\mathcal{A}$ is derived from this equation for a given initial value of the form $\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi)$ then the first order solutions u_1, v_1 can be constructed by (22-24) for corresponding cases. It is obvious that the initial value $\mathcal{A}_0(\xi)$ is related to the initial values of first orders displacement via (22-24) for each cases.

It is known that the stability of the solutions of the NLS equation describing the asymptotic wave field and the existence of various types of soliton solutions depend on the sign of the product of the coefficients of the dispersion term, Γ , and the coefficients of the nonlinear term, Δ . Therefore to investigate the dependence of the sign of $\Gamma\Delta$ on the nonlinearity of the constituent material, the numerical evaluation of this product with respect to wave number is performed for hypothetical material models and real material models. It has been observed that, in the neighborhood of the critical wave numbers k_c , satisfying the second harmonic resonance, Δ grows without bound, i.e., Δ goes to infinity as $k \rightarrow k_c$ for some material models and then asymptotic expansions become non-uniform. Thus the asymptotic wave field cannot be characterized by a NLS equation in the neighborhood of a k_c . To obtain uniformly valid solutions around a k_c the asymptotic method may be modified suitably.

1. GİRİŞ

Jeofizik, malzemelerin hasarsız muayene teknolojileri, elektronik sinyal işleme cihazlarının geliştirilmesi gibi uygulama alanlarında öneme sahip olan homojen, izotrop malzemelerden oluşan çubuk, plak ve tabakalı yarım uzaylar gibi dalga kılavuzlarındaki lineer elastik dalgaların yayılımı bir çok çalışmanın konusu olmuştur. Benzer nedenlerden dolayı son yıllarda bünyesel nonlineerliğin dispersif elastik dalgaların yayılımı üzerindeki etkisi çeşitli araştırmaların konusu olarak öne çıkmaktadır. Bu tür problemleri inceleme metotları olarak, nonlineer dispersif dalga yayılımına bağlı bir çok araştırmada görüldüğü gibi [1–8], daha önceleri plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi alanlarda karşılaşılan zayıf nonlineer dalgaların yayılması problemlerinde kullanılan asimptotik pertürbasyon metotlarının ağırlıklı olarak kullanıldığı görülmektedir. Bu çalışmalarda, pertürbasyon metotları kullanılarak nonlineerlikle dispersiyon dengelenerek yukarıdaki uygulama alanlarında karşılaşılan modellere ait dalga hareketlerini asimptotik olarak karakterize eden (KdV, NLS vb.) skaler nonlineer evrim denklemleri türetilmektedir. Bu evrim denklemlerinin çözümlerinin üzerinde solitary dalgaların varlığı, modüle dalgaların kararlılığı gibi problemlerin incelenmesi ile nonlineer dispersif dalgaların çeşitli ortamlardaki yayılma karakteristikleri anlaşılmaya çalışılmaktadır.

Elastik dalgaların incelenmesine dair daha ayrıntılı bir kronolojik bilgi verilmek istenirse, başlangıç olarak sınırsız bir homojen, izotrop lineer elastik ortamda enine ve boyuna dalgaların varlığının Navier denklemlerinin çözümlerinin Stokes tarafından verilmesi alınabilir [9]. Daha sonra, serbest yüzeyin normaliyiyle yerdeğiştirme vektörünün yayılma doğrultusunun oluşturduğu düzlemde, serbest yüzey boyunca yüzey dalgalarının yayılacağını Rayleigh [10] göstermiştir. Bu ilk çalışmaların etkisiyle, özellikle deprem dalgalarının ayrıntılı incelenmesi yapılmış, bu tip dalgaların enine, boyuna ve Rayleigh dalgalarından meydana geldiği anlaşılmıştır. Deprem dalgalarının bu üç bileşeninin sonsuz ortamda yayılmasında faz hızları sabit kalır. Yani

bu dalgalar dispersif değildirler. Fakat daha sonra sismografik kayıtların dispersif dalgaların varlığını göstermesiyle, A.E.H. Love bunun yerin tabakalı özelliğinden kaynaklandığını öne sürerek farklı elastik özelliklere sahip düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı homojen, izotrop, lineer elastik bir yarım uzayda yatay olarak polarize olmuş enine yüzey dalgaların varlığını göstermiştir [11]. Bu temel çalışmalara ek olarak, lineer elastik yüzey dalgalarına ait çalışmalar devam etmiş; Yu.V. Gulyaev, Stoneley, H. Lamb adlı araştırmacılar daha sonraları kendi adları ile anılan yüzey dalgaların varlıklarını göstermişlerdir. Ayrıca, her ne kadar Rayleigh dalgalarının dispersif olmama özelliği olsa da, ilk paragrafta adlandırılan dalga kılavuzlarında yayılan dalgaların sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların etkisi de göz önüne alındığında, tabakalı bir yarım uzayda Rayleigh dalgalarının da faz hızlarının dalga sayısına bağlı olarak değiştiği, dispersif oldukları, anlaşılmıştır [7, 12–17].

Bünyesel nonlinearliğin elastik dalgaların yayılması üzerindeki etkilerinin incelenmesi II. Dünya Savaşı yıllarında ilk olarak görülmeye başlanmıştır. Bu ilk incelemeler ivme ve şok dalgalarının yayılması üzerinedir. Daha sonra çubuk, plak gibi ortamlarda sonlu statik yerdeğiştirme alanları üzerine etkiyen sonsuz küçük yerdeğiştirme alanları kabulü altında dalga yayılması olayları incelenmiştir. Bu tür problemler nonlinearliğin etkisinin katsayı fonksiyonlarında ortaya çıktığı değişken katsayılı lineer kısmi türevli denklemlerle modellenirler. Bu denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve incelenmesi ile bünyesel nonlinearliğin lineer dalga yayılımına nasıl etkilediği araştırılmıştır [18]. Daha sonraları asimptotik pertürbasyon yöntemleri nonlinear elastik dalga yayılımı problemlerinde kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalara bir örnek olarak; homojen izotrop elastik bir ortamda nonlinear Rayleigh dalgalarının yayılması ile ilgili bir çalışmada, çeşitli malzemelerin nonlinear özelliklerinin akustik yüzey dalgaları üzerindeki etkisinin incelendiği deneysel çalışmalara teorik bir temel oluşturma amacıyla Ljamov'un yaptığı inceleme gösterilebilir [19]. Bu çalışmada yüzey akustik dalgalarının faz hızlarının nonlinear etkilere bağlılığıyla ilgili bir bağıntı türetilmiştir. Fakat bu çalışmada türetilen çözümler geliştirilen yaklaşımın mertebesindeki serbest yüzey koşulları sağlanmamaktadır. Bu çalışmaya benzer diğer bir çalışmada ise [20], verilen çözümler sınır koşullarını sağlamalarına rağmen alan denklemlerini sağlamamaktadır. Bu iki çalışmanın sonuçlarında ortaya çıkan

uygunsuz çözümlerin altında yatan sebep, uzaklığa veya uzaklık ve zamanın lineer birleşimine göre asimptotik olarak düzgün geçerli çözümlerin bulunamamasıdır. Bu eksikleri gidermek için Kalyanasundaram [21] çoklu ölçekler yöntemi (method of multiple scales) kullanarak belirli kabuller altında geçerli asimptotik çözümlerin varlığını göstermiştir. Yine Lardner'in yaptığı diğer bir çalışmada [22], çoklu ölçekler yöntemi (ÇÖY) kullanarak keyfi bir dalga formu için zamanda ve iki uzaysal boyutta düzgün geçerli bir yaklaşım elde etmiştir. Bu çalışmaya ek olarak, bütün harmoniklerin genliklerini içeren sonsuz elemanlı bir denklem sistemi David [23] tarafından türetilmiştir.

Diğer bir problem silsilesi ise, yarım uzayın bir veya daha fazla tabaka ile kaplı olduğunda dispersif yüzey dalgaların oluşumunun incelemesi üzerinedir. Bu tip özelliklerinin incelendiği bazı çalışmalarda [1], genellikle enine yüzey dalgaları, yani Love (SH) dalgalarıyla ilgilidir. Kalyanasundaram ÇÖY kullanarak sonlu genlikli kuazi-monokromatik Love dalgalarının yayılımını araştırmış ve genliğin yavaş değişiminin bir semi-lineer kısmi türevli denklemle karakterize edilebileceğini göstermiştir [24]. Bu çalışmada SH dalgalarının en önemli özelliği olan dispersiyonun etkisi dikkate alınmamaktadır. Bu tür dalgalarda dispersif özelliğin incelenmesi için dalga kılavuzunun nonlinearliğini barındıran model denklemler fiziksel argümanlara dayandırılarak sezgisel olarak [25]'de türetilmiştir. Bu iki çalışmayı göz önüne alarak Teymur [2], homojen, izotrop hiperelastik malzemelerden oluşan tabakalı bir yarım uzayda sonlu fakat küçük genlikli SH dalgalarının modülasyonunun ÇÖY'ni kullanarak incelemiş, SH dalgalarının nonlinear self modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceğini göstermiştir. Dispersiyonu gösteren terim ihmal edildiğinde [24]'de türetilen semi-lineer denklem elde edilmektedir. Ayrıca, NLS denkleminin belirli şartlarda zarf soliton çözümlere sahip olması [25] çalışmasının sonuçlarıyla da çakışmaktadır. Daha sonra Maugin ve Hadouaj [26], ince lineer elastik bir film ile kaplı elastik yarım uzayda nonlinear SH dalgalarının modülasyonu için bir NLS denklemi türetmişlerdir. Fakat [2]'de gösterildiği gibi üst tabakanın nonlinearliği modülasyonda etkili olmasına rağmen [26] çalışmasındaki ince tabaka yaklaşımında ise üst tabakanın nonlinearliğinin etkisi görülmemektedir. [27]'de gösterildiği üzere yarım

uzay üzerine ince tabaka yaklaşımı altında tabakanın nonlinearliğinin SH dalgalarının self modülasyonunda belirgin bir etkisinin olduğu gösterilmiştir. [7]'deki çalışmada ise farklı homojen, izotrop, sıkışamaz elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan elastik bir ortamda yüzey SH dalgalarının nonlinear self modülasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmalarda nonlinear yüzey dalgalarının Rayleigh dalgalarıyla bir etkileşime girmediği varsayılmıştır [24–26]. Etkileşim problemi ise, üzeri farklı bir homojen izotrop ve lineer elastik malzemeden yapılmış ince bir elastik tabaka ile kaplı homojen, izotrop nonlinear elastik bir yarım uzay için [28]'de incelenmiştir. Bu çalışmada Rayleigh dalgalarının dispersif olmadıkları kabulüyle SH ve Rayleigh modlarının etkileşimlerinin asimptotik olarak karakterize eden bir denklem sistemi elde edilmiş ve bu sistemin bir dönüşümle Genelleştirilmiş Zakharov Sistemi'ne dönüştürülebildiği gösterilmiştir. Bu sistemin bir alt sınıfı için tek zarf soliton çözümünün varlığı gösterilmiştir.

Ayrıca, Porubov ve Samsonov [5] tabakanın nonlinear elastik bir malzemeden meydana gelen tabakalı bir yarım uzayda uzun nonlinear Rayleigh dalgalarının yayılmasını asimptotik olarak incelemişlerdir. Bu çalışmada ilk olarak tabaka ile yarım uzay arasındaki etkileşimin normal gerilmeler ve yerdeğistirmeler ile sağlandığı kabul edilmiş ve dalga alanının bir Benjamin-Ono (BO) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir [29,30]. İkinci varsayım olarak da, arayüzeyde tüm gerilme ve yerdeğistirmelerin sürekli olduğu varsayımı altında dalga alanının BO'dan farklı olarak bir integro-diferansiyel denklem ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bu denklemler incelendiğinde, BO denkleminin nonlinear teriminin katsayısı tabaka ve yarım uzayın lineer malzeme sabitlerine ve sadece tabakanın nonlinear malzeme sabitlerine bağlıken; integro-diferansiyel denklemin nonlinear katsayısı tabakaninkilerin yanında yarım uzayın da nonlinear malzeme sabitlerine bağlılığı dikkat çekmektedir. Bu iki asimptotik sonuçlar karşılaştırıldığında, ilk varsayım altında BO tipi periyodik ve tekil dalgalar ile zarf solitonları ortaya çıkarken, ikinci varsayım altında zarf soliton çözümlerinin varlığı gösterilmiştir.

Nonlinear dispersif elastik dalgalara ait yukarıda verilen örnekler çoğaltılabilir. Yapılan bu çalışmada, düzgün kalınlıklı homojen izotrop nonlinear elastik malzemedan oluşan bir tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi nonlinear dalgalardan yayılması ile ilgili iki problem asimptotik pertürbasyon yöntemleri kullanılarak incelenmektedir. Çalışmanın ilk bölümünü oluşturan bu bölümde elastik dalgalardan üzerinde yapılan çalışmaların kısa bir tarihi özetlenmiş ve nonlinear dispersif elastik dalgalara ait bazı çalışma örnekleri verilmiştir. İkinci bölümde, düzgün kalınlıklı nonlinear homojen izotrop elastik bir malzemedan oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi dalgalardan yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilmiştir. Bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilerek tabakada yayılan lineer dalgalardan yayılımı ele alınmıştır. Yukarıda özellikleri tanımlanan dalga kılavuzunda yayılan düzlem-içi dalga hareketi, simetrik ve anti-simetrik dalga hareketi olarak birbirinden bağımsız dalga formları şeklinde incelenebilir. Problemin matematiksel tabiatı bunu mümkün kılmaktadır [13]. Lineerleştirilen sınır problemi, düzlem içi dalgalardan simetrik (extensional) ve anti-simetrik (flexural) dalga modları için ayrı ayrı yapılmıştır. Dalgalardan faz hızı c ile enine ve boyuna dalgalardan lineer hızları c_T ve c_L 'lerin sağladığı tüm durumları kapsayan $c_T < c_L < c$, $c_T < c < c_L$ ve $c < c_T < c_L$ eşitsizlikleri için hem simetrik hem de anti-simetrik dalgalardan varlığı ve bu dalgalardan dispersif oldukları gösterilmiştir. Bu bölümde son olarak, simetrik ve anti-simetrik dalgalara ait bu üç faz eşitsizliği için ayrı ayrı olmak üzere dispersiyon bağıntıları elde edilmiş ve bu bağıntıların ayrıntılı analizleri tabakayı oluşturan yapay ve gerçek malzeme modelleri için yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, ilk problem olan düzgün kalınlıklı nonlinear homojen izotrop elastik bir malzemedan oluşan plakta küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgalardan yayılma problemi incelenecektir. Bu amaç için, ikinci bölümde türetilen düzlem-içi dalga hareketini betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşullarının tanımladığı sınır değer probleminin asimptotik çözümünün inşası, [6]'da geliştirilen pertürbasyon yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemde, simetrik dalgalardan tanımlanan elastik ortamda yayılmasını modelleyen düzlem içi hareketlere bağılı olarak enine ve boyuna doğrultuda yer değiştirmelerin fonksiyonları cinsinden hareket denklemleri ve sınır koşulları ilk olarak boyutsuz değişkenlerle boyutsuz hale getirilmiştir.

Daha sonra, asimptotik olarak uniform geçerli bir asimptotik açılımla nonlinearlikle dispersiyon arasındaki denge sağlatılarak küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılmasını asimptotik olarak karakterize eden denklem olan Korteweg-de Vries (K-dV) denklemi elde edilmiştir. Bir sinyalizasyon problemi tanımlanarak simetrik dalgaları üretebilecek sınır etkisiyle, K-dV denkleminin bir çözümünü elde etmek için tanımlanan başlangıç koşulu arasındaki bağıntı inşa edilmiştir. Ayrıca, K-dV denkleminin tekil dalga çözümlerinin ayrıntılı olarak elde edilmesi gösterilmiş ve singüler çözüm yapıları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, çalışmada incelenen ikinci problem olan, hiperelastik bir tabakada simetrik nonlinear dalgaların yayılımını modelleyen sınır değer probleminin, simetrik dalgaların nonlinear modülasyonu için asimptotik analizi yapılmıştır. Simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden çözümü her üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumlar için ayrı ayrı olmak üzere ÇÖY'ü kullanılarak incelenmiştir. İncelemenin sonunda üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumda da simetrik dalgaların self modülasyonunun bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin kararlılığı ve zarf soliton tipi çözümlerin varlığı, denklemin dispersiyon teriminin katsayısı ile nonlinear terimin katsayısının çarpımının işaretine bağlılığı bilinmektedir [31, 32]. Simetrik dalgaların modülasyonunu karakterize eden NLS denkleminin katsayılarının dalga sayılarına göre değişimleri elde edilmiştir. Bu inceleme sayısal olarak gerçekleştirilmiş, iki yapay malzeme modeli ve iki de gerçek malzeme modeli göz önüne alınmıştır. Bu hesaplamalardan, dalga sayılarının sağladığı alt aralıklar ve seçilen malzeme modeline bağlı olarak NLS denkleminin katsayılarının çarpımının işaretinin farklılık gösterdiği, yani, dalga yayılımı esnasında, dalga sayısının bulunduğu aralık değerine ve seçilen malzemeye göre çözüm formlarının ve çözümlerin kararlılığının farklılık gösterdiği anlaşılmıştır. Bunların yanında, simetrik dalgaların dalga sayıları, seçilen lineer modele bağlı olarak ikinci harmonik rezonans etkileşim koşulunun sağlandığı kritik dalga sayılarına yaklaştıkça NLS denkleminin nonlinear teriminin katsayısının sınırsız olarak büyüdüğü görülmektedir.

2. HİPERELASTİK BİR TABAKADA DÜZLEM İÇİ DALGALARIN YAYILMASI

2.1 Giriş

Bu bölümde, düzgün kalınlıklı nonlinear homojen izotrop elastik malzemeden oluşan bir tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi dalgaların yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilenektir. Daha sonra bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilerek tabakada yayılan lineer dalgaları karakterize eden sınır değer problemi incelenecektir. İnceleme, tabakada yayılan boyuna ve enine dalgaların faz hızları c_L ve c_T ile, dalgaların faz hızı c 'nin sağladığı

$$c_T < c_L < c, \quad c_T < c < c_L, \quad c < c_T < c_L \quad (2.1a,b,c)$$

eşitsizliklerden herbiri için ayrı ayrı dalga hareketinin varlığının gösterilmesiyle ve bu üç durumun tümü için dispersiyon bağıntılarının elde edilmesiyle devam edecektir. Son olarak da, seçilen lineer malzeme parametreleri için faz hızlarının ve grup hızlarının dalga sayısına göre değişimleri sayısal olarak hesaplanmaktadır.

2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen tanımına göre uzaysal ve maddesel koordinatlarını (x_1, x_2, x_3) ve X_1, X_2, X_3 şeklinde ifade edelim. Başlangıç konumunda, $h > 0$ olmak üzere

$$D = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -h < X_2 < h, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.2)$$

bölgesini dolduran $2h$ kalınlığında elastik bir malzemeden oluşan düzgün kalınlıklı bir tabakayı ele alalım. Dalga hareketi esnasında $X_2 = h$ ve $X_2 = -h$ serbest yüzeyleri üzerinde gerilmelerin sıfır olduğunu varsayalım. Tanımlanan bu tabakada X_1 eksenini boyunca yayılan ve

$$x_1 = X_1 + u_1(X_1, X_2, t), \quad x_2 = X_2 + u_2(X_1, X_2, t), \quad x_3 = X_3 \quad (2.3)$$

denklemleri ile tanımlanan dalga hareketini göz önüne alalım. Dikkat edilirse bu bir düzlem içi hareketidir ve burada u_1 ve u_2 , (X_1, X_2) düzleminde sırasıyla X_1 ve X_2 yönündeki yerdeğiştirmeleri, t ise zamanı göstermektedir. Dalga hareketinin kütle kuvveti altında oluşmadığı varsayılırsa, maddesel koordinatlarda hareket denklemleri

$$T_{B1,B} = \rho_0 \ddot{u}_1, \quad T_{B2,B} = \rho_0 \ddot{u}_2 \quad (2.4)$$

olarak yazılırlar. Burada T_{Kk} birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünü temsil etmektedir. Bu tansörde virgülden sonraki bir alt indis, bu indisin belirlediğı kartezyen koordinata göre kısmi türevi ve yerdeğiştirme fonksiyonlarının üzerindeki noktaların her biri ise zamana bağılı kısmi türevi göstermektedir. ρ_0 ise (2.2) ile tanımlanmış bölgede yerleşmiş elastik malzemenin başlangıçtaki yoğunluğunu belirtmektedir. Serbest yüzeylerde gerilmenin sıfır olması varsayımından

$$X_2 = \pm h' \text{ de} \quad T_{21} = T_{22} = 0 \quad (2.5)$$

sınır koşulları elde edilir. (2.2) bölgesiyle tanımlanan tabakayı dolduran malzemenin homojen, izotrop, sıkışabilir, nonlinear hiperelastik bir malzeme olduğunu varsayalım. Buna ek olarak, genel olarak küçük fakat sonlu genlikli dalgalar ile ilgilenileceğinden bu tür malzemeler için gerilme deformasyon bağıntıları, daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilerek, şu kuadratik nonlinear formla yaklaştırılabilir:

$$\begin{aligned} T_{Kk} = & \left[\lambda \left(\text{tr} \tilde{E} \right) + \frac{\lambda}{2} u_{p,M} u_{p,M} + \frac{1}{2} (6l + 3m + n) \left(\text{tr} \tilde{E} \right)^2 - \frac{1}{2} (m + n) \left(\text{tr} \tilde{E}^2 \right) \right] \delta_{Kk} \\ & + \left[2\mu - (m + n) \left(\text{tr} \tilde{E} \right) \right] \tilde{E}_{KL} \delta_{Lk} + \left[\lambda \left(\text{tr} \tilde{E} \right) \right] u_{k,K} + 2\mu \tilde{E}_{KL} u_{k,L} \\ & + \mu u_{p,M} u_{p,M} \delta_{LK} + n \tilde{E}_{KN} \tilde{E}_{NL} \delta_{LK}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Burada $\tilde{E}$, bileşenleri

$$\tilde{E}_{KL} = \frac{1}{2} (u_{k,K} \delta_{Lk} + u_{k,L} \delta_{Kk}) \quad (2.7)$$

ile verilen lineer Lagrangian şekil değıştirme tansörüdür. Gerilme deformasyon bağıntısında görülen λ, μ lineer elastik malzeme sabitleri (Làme sabitleri); l, m ve n ise nonlinear (Murnaghan) malzeme sabitleridir. Burada (2.4) ile verilen hareket denklemlerinde ve (2.5) ile verilen sınır koşullarında, (2.6)'da tanımlanan gerilme-deformasyon bağıntıları kullanılır; (X_1, X_2, X_3) yerine (X, Y, Z) değışkenleri yazılırsa ve yapılan varsayımlar altında (2.2) ile verilen elastik tabaka üzerinde yayılan

nonlinear dalgaların yayılmasını betimleyen hareket denklemleri

$$\mathcal{L}_1(u_1, u_2) = \mathcal{N}_1(u_1, u_2), \quad \mathcal{L}_2(u_1, u_2) = \mathcal{N}_2(u_1, u_2), \quad (2.8a, b)$$

ve sınır koşulları;

$$Y = \pm h' de \quad \mathcal{B}_1(u_1, u_2) = 0, \quad \mathcal{B}_2(u_1, u_2) = 0 \quad (2.9a, b)$$

elde edilirler. (2.8a,b) ve (2.9a,b)'de görülen $\mathcal{L}_i$ 'ler, ($i = 1, 2$); aşağıda tanımlanan lineer diferansiyel operatörleri temsil etmekte;

$$\mathcal{L}_1(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial X \partial Y}, \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{L}_2(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y}. \quad (2.10b)$$

$\mathcal{N}_i$ ve $\mathcal{B}_i$ 'ler ise, ($i = 1, 2$) aşağıda tanımlanan ikinci mertebe nonlinear diferansiyel operatörleri temsil etmektedirler;

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(u_1, u_2) = & \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u_2}{\partial X} \right) \mathcal{K}_2 \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial Y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial X} \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \frac{\partial u_2}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1 \right], \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(u_1, u_2) = & \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial u_2}{\partial X} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \mathcal{K}_2 \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial Y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial X} \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \frac{\partial u_2}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1 \right], \end{aligned} \quad (2.11b)$$

$$\mathcal{B}_1(u_1, u_2) = c_T^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{\partial u_2}{\partial X} \right) + \left(\eta_3 \frac{\partial u_2}{\partial X} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) \mathcal{K}_2, \quad (2.11c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(u_1, u_2) = & c_L^2 \frac{\partial u_2}{\partial Y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_1}{\partial X} + \eta_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial Y} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X} \right)^2 \\ & + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial X} \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \frac{\partial u_2}{\partial X} + \eta_4 \mathcal{K}_1. \end{aligned} \quad (2.11d)$$

Nonlinear operatörlerde görülen $\mathcal{K}_1$ ve $\mathcal{K}_2$

$$\mathcal{K}_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X} \right)^2, \quad \mathcal{K}_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial u_2}{\partial Y} \right) \quad (2.12a, b)$$

şeklinde tanımlanırlar. (2.10a,b) denklemlerindeki c_T^2 ve c_L^2 sabitleri

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanmakta olup, sırasıyla lineer enine ve boyuna dalgaların yayılma hızlarını temsil etmektedirler. Nonlinear operatörlerdeki η_i , $i = 1, \dots, 4$ sabitleri ise tabakanın yapıldığı malzemenin nonlinear davranışlarını karakterize ederler ve

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{\rho_0} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{3}{2}\lambda + 3l + 3\mu, & \beta_2 &= \frac{\lambda}{2} + 3l + m, \\ \beta_3 &= \mu - \frac{m}{2}, & \beta_4 &= \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{m}{4} \end{aligned} \quad (2.15)$$

dır.

2.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağlılıkları

Daha sonraki bölümlerde hiperelastik bir tabakada yayılan küçük ama sonlu genlikli nonlinear düzlem için dalgaların yayılmasını betimleyen ve (2.8-2.9) denklemleri ile tanımlanan nonlinear sınır değer probleminin asimptotik çözümleri simetrik dalgalar için inşa edilecektir. Bu incelemelere geçmeden önce bazı noktalara ışık tutmak amacı ile lineer dalgaların yayılması hem simetrik dalgalar hem de anti-simetrik dalgalar için ele alınacaktır. Nonlinear anti-simetrik dalgalar için analiz yapılmayacak olmasına rağmen, bütünlüğü bozmamak için lineer anti-simetrik dalgalar için de inceleme yapılacaktır. Lineer dalgaları betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları, nonlinear dalga yayılımını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları olan (2.8-2.9)'da nonlinear malzeme sabitleri olan $\eta_i = 0$, yani $\beta_i = 0$ alınarak aşağıdaki gibi yazılırlar;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (2.16b)$$

$$Y = \pm h' de \quad \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} = 0, \quad (2.17a)$$

$$Y = \pm h' de \quad c_L^2 \frac{\partial v}{\partial Y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u}{\partial X} = 0. \quad (2.17b)$$

Ayrıca, yerdeğiştirme fonksiyonları u ve v ; simetrik dalga hareketi için,

$$u(X, Y, t) = u(X, -Y, t), \quad v(X, Y, t) = -v(X, -Y, t) \quad (2.18)$$

anti-simetrik dalga hareketi için ise,

$$u(X, Y, t) = -u(X, -Y, t), \quad v(X, Y, t) = v(X, -Y, t) \quad (2.19)$$

koşullarını sağlamalıdır.

Pozitif X eksen yönünde yayılan harmonik dalgalar için (2.16a,b) denklemlerinin çözümlerini

$$u = U(Y)e^{i(kX - \omega t)} + c.c., \quad (2.20a)$$

$$v = V(Y)e^{i(kX - \omega t)} + c.c. \quad (2.20b)$$

formlarında arayabiliriz. Burada k dalga sayısını, ω açısal frekansı, $c.c$ bir önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir ve dalgaların faz hızı

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır. (2.20a,b) çözüm formları (2.16a,b) denklemlerinde kullanılırsa, U ve V için

$$k^2 (c^2 - c_L^2) U + c_T^2 U'' + ik (c_L^2 - c_T^2) V' = 0 \quad (2.22a)$$

$$k^2 (c^2 - c_T^2) V + c_L^2 V'' + ik (c_L^2 - c_T^2) U' = 0 \quad (2.22b)$$

denklemleri elde edilir.

Homojen, izotrop, lineer elastik bir ortamda yayılan enine ve boyuna dalgaların hızları arasında (2.13)'ten de görüleceği üzere

$$c_T < c_L \quad (2.23)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik göz önünde bulundurularak, simetrik ve anti-simetrik dalgaların faz hızlarının (2.1a,b,c) eşitsizliklerini sağladığını kabul edeceğiz. Daha sonra bu eşitsizlikler ile karakterize edilen her bir problem için ayrı ayrı olmak üzere (2.22a,b) denklemlerinin çözümlerinin varlığı, yani lineer dalga hareketlerinin varlığı, simetrik ve anti-simetrik dalga hareketleri için gösterilecektir.

2.3.1 $c_T < c_L < c$ durumu

Bu halde ilk olarak (2.18) koşullarının sağlandığı simetrik dalga hareketi için analizi yapalım. Bu koşul altında (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U = A_1 \cos(k p_L Y) + p_T A_2 \cos(k p_T Y) \quad (2.24a)$$

$$V = i p_L A_1 \sin(k p_L Y) - i A_2 \sin(k p_T Y) \quad (2.24b)$$

olarak elde edilirler. Burada p_L ve p_T

$$p_L = \left(\frac{c^2}{c_L^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad p_T = \left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu çözümler (2.17) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U} = (A_1, A_2)^T \quad (2.26)$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -2k p_L \sin(k p_L h) & k(1 - p_T^2) \sin(k p_T h) \\ i k (c^2 - 2c_T^2) \cos(k p_L h) & -2i k p_T c_T^2 \cos(k p_T h) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

homojen cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin aşık olmayan çözümü sahip olabilmesi için

$$\det \mathbf{W} = 0 \quad (2.29)$$

olması gerekir. Yukarıda tanımlanan $\mathbf{W}$ matrisine dispersiyon matrisi, (2.29) denklemine de, dispersiyon bağıntısı adı verilir. Bu incelediğimiz faz eşitsizliğini sağlayan simetrik dalgalar için dispersiyon bağıntısı (2.29)'dan

$$i k^2 [4 p_L p_T c_T^2 \cos(k h p_T) \sin(k h p_L) + (c^2 - 2c_T^2) (p_T^2 - 1) \cos(k h p_L) \sin(k h p_T)] = 0 \quad (2.30)$$

olarak hesaplanır. Dikkat edilirse, $k \neq 0$ olduğundan (2.30) dispersiyon bağıntısı bazı ara işlemlerden sonra

$$D_1(c, k) = 4 p_L p_T c_T^2 \tan(k h p_L) - (c^2 - 2c_T^2) (1 - p_T^2) \tan(k h p_T) = 0 \quad (2.31)$$

formuna indirgenir. (2.31) bağıntısı, değişkenleri (c, k) olan bir denklemdir. Bilindiği gibi (2.31) dispersiyon bağıntısını özdeş olarak sağlayan (c_0, k_0) noktası civarında eğer

$\partial D_1/\partial c$ ve $\partial D_1/\partial k$ türevleri sürekli ve

$$\frac{\partial D_1}{\partial c} \neq 0 \quad (2.32)$$

ise (2.30) denklemi bu nokta civarında

$$c = c(k) \quad (2.33)$$

formunda bir fonksiyonu kapalı olarak tanımlar. (2.33) ifadesi faz hızının dalga sayısına nasıl bağlı olduğunu belirtir ve bu nedenle dispersiyon bağıntısı olarak adlandırılır. (2.31) denklemi periyodik terimler içerdiğinden (2.33) formunda birden fazla fonksiyon tanımlar ve bu fonksiyonlardan her biri dispersiyon bağıntısının bir dalını oluşturur. Bu dallara ait fonksiyonları (2.31)'den, bu denklemin yapısı gereği analitik olarak hesaplamak mümkün değildir. Daha sonra bazı tabaka modelleri seçilerek bu kısımdaki faz eşitsizliği için elde edilen ve bundan sonraki diğer iki eşitsizlik için de elde edilecek olan $c = c(k)$ şeklindeki dispersiyon bağıntılarının grafikleri nümerik olarak hesaplanıp, çizdirileceklerdir.

Şimdi ise (2.19) koşullarının sağlandığı anti-simetrik dalgalar için analiz tekrarlınsın. Bu koşul altında (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U_a = iA_{1a} \sin(kp_L Y) + iA_{2a} p_T \sin(kp_T Y) \quad (2.34a)$$

$$V_a = A_{1a} p_L \cos(kp_L Y) - A_{2a} \cos(kp_T Y) \quad (2.34b)$$

olarak elde edilirler. Burada değişkenlerde ve keyfi sabitlerdeki "a" alt indisi ilgili ifadenin anti-simetrik dalgalara ait olduğunu ifade etmektedir. Yine bu çözümler (2.17) sınır koşullarında kullanılırsa, bu sefer

$$\mathbf{U}_a = (A_{1a}, A_{2a})^T \quad (2.35)$$

ve dispersiyon matrisi

$$\mathbf{W}_a = \begin{bmatrix} 2ikp_L \cos(kp_L h) & ik(p_T^2 - 1) \cos(kp_T h) \\ -k(c^2 - 2c_T^2) \sin(kp_L h) & 2kp_T c_T^2 \sin(kp_T h) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{W}_a \mathbf{U}_a = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

homojen cebirsel denklem sistemi elde edilir. Simetrik dalgalarda olduğu gibi (2.37) denklem sisteminin aşık olmaya sahip olabilmesi için dispersiyon

matrisinin determinantı $\det \mathbf{W}_a = 0$ olmalıdır. Bu determinant koşulundan da simetrik dalgalar için de uygulanan gerekli ara işlemlerden sonra bu kısımda incelenen faz eşitsizliğini sağlayan anti-simetrik dalgalar için

$$D_{1_a}(c, k) = 4p_L p_T c_T^2 \tan(kh p_T) - (c^2 - 2c_T^2) (1 - p_T^2) \tan(kh p_L) = 0 \quad (2.38)$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Yukarıda da belirtildiği üzere daha sonra bu dispersiyon bağıntısının da tanımladığı $c = c(k)$ dispersiyon eğrilerinin grafikleri bazı tabaka modelleri için nümerik olarak hesaplanıp, grafikleri çizdirileceklerdir.

2.3.2 $c_T < c < c_L$ durumu

Bu kısımda, faz hızları (2.1b) eşitsizliğini sağlayan simetrik dalgalar için analize başlayalım. Bu eşitsizliği sağlayan simetrik dalgalar için (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U = A_1 \cosh(kr_L Y) + p_T A_2 \cos(kp_T Y), \quad (2.39a)$$

$$V = -ir_L A_1 \sinh(kr_L Y) - iA_2 \sin(kp_T Y) \quad (2.39b)$$

formunu alır. Burada r_L

$$r_L = \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right)^{1/2} \quad (2.40)$$

olarak tanımlanmaktadır ve

$$p_L = ir_L \quad (2.41)$$

dir. (2.41) dönüşümü (2.31) dispersiyon bağıntısında kullanılırsa, (2.1b) eşitsizliğinin geçerli olduğu simetrik dalgalar için dispersiyon bağıntısı

$$D_2(c, k) = 4r_L p_T c_T^2 \tanh(khr_L) - (c^2 - 2c_T^2) (p_T^2 - 1) \tan(kh p_T) = 0 \quad (2.42)$$

olarak elde edilir. Anti-simetrik dalgalar için ise, (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U_a = -A_{1_a} \sinh(kr_L Y) + iA_{2_a} p_T \sin(kp_T Y), \quad (2.43a)$$

$$V_a = iA_{1_a} r_L \cosh(kr_L Y) - A_{2_a} \cos(kp_T Y) \quad (2.43b)$$

olarak elde edilirler. Simetrik dalgalar için yapıldığı gibi, (2.41) dönüşümü (2.38) dispersiyon bağıntısında kullanıldığında (2.1b) eşitsizliğinin geçerli olduğu anti-simetrik dalgalar için dispersiyon bağıntısı

$$D_{2_a}(c, k) = 4r_L p_T c_T^2 \tan(kh p_T) + (c^2 - 2c_T^2) (p_T^2 - 1) \tanh(khr_L) = 0 \quad (2.44)$$

elde edilir.

(2.1b) eşitsizliğini sağlayan simetrik ve anti-simetrik dalgalar için sırasıyla elde ettiğimiz (2.42) ve (2.44) dispersiyon bağıntıları da periyodik terim içerdiğinden faz hızı için belirtilen kısıt altında gerekli diferansiyellenebilme koşulları sağlandığında (2.33) formunda birden fazla dispersiyon fonksiyonu tanımlar.

2.3.3 $c < c_T < c_L$ durumu

Bu kısımda ise, son faz hızı eşitsizliği (2.1c) için diğer iki eşitsizlik için yaptığımız analizi tekrarlayalım. Faz hızları bu eşitsizliği sağlayan simetrik dalgalar için (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U = A_1 \cosh(kr_L Y) + ir_T A_2 \cosh(kr_T Y), \quad (2.45a)$$

$$V = -ir_L A_1 \sinh(kr_L Y) + A_2 \sinh(kr_T Y) \quad (2.45b)$$

şeklinde elde edilirler. Burada

$$r_T = \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2} \quad (2.46)$$

olarak tanımlanır ve

$$p_T = ir_T \quad (2.47)$$

dir. (2.47) dönüşümü (2.42) dispersiyon bağıntısında kullanılırsa, (2.1c) eşitsizliğinin geçerli olduğu simetrik dalgalar için dispersiyon bağıntısı

$$D_3(c, k) = 4r_L r_T c_T^2 \tanh(khr_L) + (c^2 - 2c_T^2)(r_T^2 + 1) \tanh(khr_T) = 0 \quad (2.48)$$

şeklinde elde edilir. Bir önceki kısımda yapılan analize benzer olarak, faz hızları (2.1c) eşitsizliğini sağlayan anti-simetrik dalgalar için de (2.22a,b) denklemlerinin çözümleri

$$U_a = -A_{1a} \sinh(kr_L Y) - iA_{2a} r_T \sinh(kr_T Y) \quad (2.49a)$$

$$V_a = iA_{1a} r_L \cosh(kr_L Y) - A_{2a} \cosh(kr_T Y) \quad (2.49b)$$

olarak bulunurlar. Simetrik dalgalar için yapılan uygulamadaki gibi (2.47) dönüşümü (2.44) dispersiyon bağıntısında kullanıldığında (2.1b) eşitsizliğinin geçerli olduğu anti-simetrik dalgalar için dispersiyon bağıntısı

$$D_{3a}(c, k) = 4r_L r_T c_T^2 \tanh(khr_T) + (c^2 - 2c_T^2)(1 + r_T^2) \tanh(khr_L) = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir.

Dikkat edilirse, bu kısımda elde edilen iki dispersiyon bağıntısı (2.48) ve (2.50), diğer iki kısımda elde edilen dispersiyon bağıntılarından farklı olarak periyodik terim içermemektedirler. Bu nedenle faz hızı için belirtilen (2.1c) kısıtı altında gerekli diferansiyellenebilme koşulları sağlandığında bu kısımda elde edilen dispersiyon bağıntıları, (2.33) formunda sadece bir tane dispersiyon fonksiyonu tanımlar.

2.3.4 Dispersiyon bağıntıları

Önceki bölümlerde simetrik ve anti-simetrik dalgaların hangi koşullarda var olacağı incelenmiş ve bu durumlara karşı gelen dispersiyon bağıntıları elde edilmiştir. Daha önce de belirtildiği gibi dispersiyon bağıntılarının yapıları çok karmaşık olduğu için, bu denklemlerden $c = c(k)$ dispersiyon fonksiyonlarını analitik olarak hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle bu bölümde (2.1a,b,c) faz eşitsizlikleri için ayrı ayrı elde edilen dispersiyon bağıntılarından, $c = c(k)$ fonksiyonlarının (c, k) düzleminin birinci dörtte bir kısmında, yani $c \geq 0, k \geq 0$ bölgesinde, uzanan parçalarının grafikleri nümerik hesaplamalar sonucunda çizileceklerdir.

Yukarıda anlatılan işlemi ilk olarak simetrik dalgalar için elde ettiğimiz dispersiyon bağıntıları için yapalım. Öncelikle

$$m = \frac{c_T}{c_L}, \quad K = kh, \quad C = \frac{c}{c_T} \quad (2.51)$$

boyutsuz sabiti ve değişkenleri tanımlayalım. Burada K dalgaların boyutsuz dalga sayısını, C ise dalgaların boyutsuz faz hızını temsil etmektedirler. (2.51) boyutsuz sabitleri ve değişkenleri, simetrik dalgalar için elde edilen (2.31), (2.42) ve (2.48) dispersiyon bağıntılarında yerine koyup, sırası ile hesaplamalar için daha uygun olan

$$D_1(C, K) = 4(m^2 C^2 - 1)^{1/2} (C^2 - 1)^{1/2} \sin \left[K(m^2 C^2 - 1)^{1/2} \right] \cos \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] \\ + (2 - C^2)^2 \cos \left[K(m^2 C^2 - 1)^{1/2} \right] \sin \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] = 0, \quad (2.52a)$$

$$D_2(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (C^2 - 1)^{1/2} \sinh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \cos \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] \\ - (C^2 - 2)^2 \cosh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \sin \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] = 0, \quad (2.52b)$$

$$D_3(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (1 - C^2)^{1/2} \sinh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \cosh \left[K(1 - C^2)^{1/2} \right] - (2 - C^2)^2 \cosh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \sinh \left[K(1 - C^2)^{1/2} \right] = 0 \quad (2.52c)$$

formlarında yazalım. Burada bu denklemler kullanılarak $C = C(K)$ fonksiyonlarının (C, K) düzleminin birinci dörtte bir kısmında, yani $C \geq 0$, $K \geq 0$ olan bölgesinde uzanan parçalarının grafiklerinin çizilmesi istenmektedir.

(2.1a) eşitsizliğinin boyutsuz hali dikkate alınırsa, $D_1(C, K)$ fonksiyonu (C, K) düzleminde

$$B_1 : \quad K \geq 0, \quad 1 < \frac{1}{m} < C \quad (2.53)$$

eşitsizlikleriyle tanımlanan bölgede tanımlı ve süreklidir. Ayrıca bu bölgede kapalı fonksiyon teoremine göre $\partial D_1 / \partial C$ ve $\partial D_1 / \partial K$ de süreklidirler. Dolayısıyla $D_1(C, K) = 0$ denklemi bu bölgede $\partial D_1 / \partial C \neq 0$ olduğu noktalar civarında $C = C(K)$ fonksiyonlarını tanımlar.

Benzer şekilde, (2.1b) ve (2.1c) eşitsizliklerinin boyutsuz halleri göz önünde bulundurularak, $D_2(C, K) = 0$ ve $D_3(C, K) = 0$ denklemleri de

$$B_2 : \quad K \geq 0, \quad 1 < C < \frac{1}{m}, \quad (2.54)$$

$$B_3 : \quad K \geq 0, \quad C < 1 < \frac{1}{m} \quad (2.55)$$

eşitsizlikleriyle tanımlı bölgelerde aynı koşullar altında $C = C(K)$ fonksiyonlarını tanımlarlar.

(2.52a) ve (2.52b) denklemleri dikkatlice incelenirse, $C \rightarrow 1/m$ limitinde bu iki denklemden de

$$\sin \left[K \left(\frac{1}{m^2} - 1 \right)^{1/2} \right] = 0 \quad (2.56)$$

elde edilir. Bu sonuç ise hem $D_1(C, K) = 0$ hem de $D_2(C, K) = 0$ denklemleri ile B_1 ve B_2 bölgelerinde tanımlanan $C = C(K)$ eğrilerinin, bu bölgenin sınırını oluşturan $C = 1/m$ doğrusu üzerinde aynı noktalarda bulaşacaklarını gösterir. Yani B_1 ve B_2 bölgelerinde $D_1(C, K) = 0$ ve $D_2(C, K) = 0$ denklemleriyle tanımlanan eğriler bu doğru üzerinde süreklidirler. Benzer şekilde $C \rightarrow 1$ limitinde hem $D_2(C, K) = 0$ hem de $D_3(C, K) = 0$ denklemlerinin çözümleri çakışmaktadır. Bu nedenle B_2 ve B_3 bölgelerinde $D_2(C, K) = 0$ denklemiyle tanımlı ilk $C = C(K)$ eğrisiyle $D_3(C, K) = 0$

denklemleriyle tanımlı tek $C = C(K)$ eğrisi $C = 1$ doğrusu üzerinde kesiştikleri noktada sürekli bir eğri yapısı göstereceklerdir.

B_1 bölgesine bakıldığında, boyutsuz faz hızının bir üst sınırının olmadığı görülür, yani B_1 bölgesinde $C = C(K)$ fonksiyonları bir üst sınıra sahip değildir. Diğer taraftan B_2 bölgesinde bu eğrilerin davranışlarıyla ilgili olarak $K \rightarrow 0$ limitinde inceleme yapılmak istenirse, bu amaç için (2.52b) denklemini

$$D_2(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (C^2 - 1)^{1/2} \tanh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] - (C^2 - 2)^2 \tanh \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] = 0 \quad (2.57)$$

formunda yazalım. Bu denklemde, $K \rightarrow 0$ için

$$4(1 - m^2 C^2) - (C^2 - 2)^2 = 0 \quad (2.58)$$

denklemine indirgenir. Bu denklemin B_2 bölgesindeki kökü olan $C = C_p$ değeri, B_2 bölgesindeki ilk dalın başlangıç noktası, $(C_p, 0)$ 'ın ilk koordinatını vermektedir. Ayrıca, C_p ince tabakada yayılan simetrik dalgaların faz hızını vermektedir. Diğer taraftan, B_2 bölgesinde $C = C(K)$ fonksiyonlarının eğrilerinin $K \rightarrow \infty$ limitinde davranışları için, yani ya sabit bir dalga sayısında $h \rightarrow \infty$ için veya sabit bir tabaka kalınlığında $k \rightarrow \infty$ için, yukarı da belirtildiği gibi, dispersiyon bağıntısının birinci dalının dışında (birinci dal B_3 uzanmaya devam eder), $C = 1$ değerine yaklaştıkları görülür.

$C = C(K)$ eğrilerinin B_3 bölgesindeki davranışları içinse, $K \rightarrow \infty$ limitinde inceleme yapılmak istenirse, (2.52c) denklemini

$$D_3(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (1 - C^2)^{1/2} \tanh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] - (2 - C^2)^2 \tanh \left[K(1 - C^2)^{1/2} \right] = 0 \quad (2.59)$$

formunda yazalım. Bu denklemde, $K \rightarrow \infty$ limitinde

$$4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (1 - C^2)^{1/2} - (2 - C^2)^2 = 0 \quad (2.60)$$

halini alır. (2.60) denklemini Rayleigh denklemi olarak bilinmektedir ve bu denklemin kökü olan C_R değeri yüzey dalgaları için Rayleigh hızını vermekte ve B_3 bölgesinde geçerli olan dispersiyon bağıntısının tek dalının, $K \rightarrow \infty$ limitinde yaklaştığı değeri

vermektedir. Yukarıda açıklanan yolu izleyerek $C = C(K)$ fonksiyonlarının grafiklerini hesaplayarak çizmek için tabakayı oluşturan malzemelerin lineer özellikleri ile ilgili parametrenin verilmesi gerekir. Bu amaçla değişik malzeme modelleri seçilmiştir. İlk olarak lineer malzeme özellikleri ile ilgili parametre

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.61)$$

olarak seçilmiştir [33]. Bu değer kullanılarak hesaplanan boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimini veren grafik Şekil C.1'de gösterilmektedir. Şekil C.1 dikkatlice incelenirse, dispersiyon bağıntısının ilk dalı, $C = C_p = 1.6329$ değerinden başlar, $C < 1$ bölgesinde $(C, K) = (1, 3.246)$ noktasından giriş yaparak bu bölgede $K \rightarrow \infty$ için $C = C_R = 0.9194$ değerine yaklaşmaktadır. Diğer taraftan ikinci dal ise, B_1 bölgesinden B_2 bölgesine $(C, K) = (1.7320, 2.231)$ noktasından giriş yaparak, B_2 bölgesinde $K \rightarrow \infty$ için yukarıda da belirtildiği gibi $C = 1$ değerine yaklaşmaktadır.

Aynı lineer model için grup hızının, $V_g = d\omega/dk$ dalga sayısına bağlı olarak değişimi ilk iki dal için hesaplanmış ve boyutsuz grup hızı $V_G = V_g/c_T$ 'nin K 'ya göre değişimi Şekil C.2'de verilmiştir. Dikkat edilirse $K \rightarrow \infty$ için faz ve grup hızları birbirlerine yaklaşmaktadırlar.

Diğer taraftan, Çizelge 2.1'de tabakanın lineer malzeme parametreleri için iki farklı gerçek model verilmiştir. Bu malzemeler için lineer parametre değerleri [34]'ten alınmışlardır. Literatürde başka malzemeler için de lineer malzeme sabitleri bulunabilir [35,36]. Bu iki model için verilen değerler kullanılarak simetrik dalgaların boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimini veren grafikte, faz grafiğinin ilk iki dalı için dalgaların grup hızı eğrileri nümerik olarak hesaplanarak grafikleri Şekil C.3,4 ve Şekil C.5,6'da gösterilmişlerdir.

Çizelge 2.1: Tabakayı oluşturan gerçek malzeme modellerine ait boyutlu lineer malzeme sabitleri ve boyutsuz parametre değerleri

Malzeme	λ (kp/mm ²)	μ (kp/mm ²)	m
Demir	11.49×10^3	8.26×10^3	1.841478
Bakır	10.72×10^3	4.77×10^3	2.060921

Şimdi simetrik dalgaların dispersiyon bağıntıları için yapılan analizi anti-simetrik dalgalar için tekrarlayalım. Bunun için ilk olarak (2.51) ile verilen boyutsuz sabit ve

değişkenleri, anti-simetrik dalgalar için elde edilen (2.38), (2.44) ve (2.50) dispersiyon bağıntılarında yerine koyup, dispersiyon bağıntılarını sırası ile hesaplamalar için daha uygun olan

$$D_{1a}(C, K) = 4(m^2 C^2 - 1)^{1/2} (C^2 - 1)^{1/2} \cos \left[K(m^2 C^2 - 1)^{1/2} \right] \sin \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] \\ + (2 - C^2)^2 \sin \left[K(m^2 C^2 - 1)^{1/2} \right] \cos \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] = 0, \quad (2.61a)$$

$$D_{2a}(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (C^2 - 1)^{1/2} \cosh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \sin \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] \\ + (C^2 - 2)^2 \sinh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \cos \left[K(C^2 - 1)^{1/2} \right] = 0, \quad (2.61b)$$

$$D_{3a}(C, K) = 4(1 - m^2 C^2)^{1/2} (1 - C^2)^{1/2} \cosh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \sinh \left[K(1 - C^2)^{1/2} \right] \\ - (2 - C^2)^2 \sinh \left[K(1 - m^2 C^2)^{1/2} \right] \cosh \left[K(1 - C^2)^{1/2} \right] = 0 \quad (2.61c)$$

formlarında yazalım. Anti-simetrik dalgaların dispersiyon bağıntılarından elde edilen $C = C(K)$ fonksiyonlarının (C, K) düzlemindeki (2.53), (2.54) ve (2.55) bölgelerindeki davranışlarını inceleyelim. Bu amaçla ilk olarak, (2.53)'e bakıldığında, boyutsuz faz hızının bir üst sınıra sahip olmadığı anlaşılmaktadır. Diğer taraftan, B_2 bölgesinde bu eğrilerin $K \rightarrow 0$ limitindeki davranışı incelenirse, bu limit altında (2.61b) denklemi

$$4(C^2 - 1) + (2 - C^2)^2 = 0 \quad (2.62)$$

halini alır. Bu denklemin reel tek kökü $C = 0$, B_2 bölgesinde tanımlı değildir. Bu sonuca göre simetrik dalgalardan farklı olarak anti-simetrik dalgalar için elde edilen $C = C(K)$ eğrilerinin B_2 bölgesinde C -ekseni üzerinde bir başlangıç noktası yoktur.

Diğer taraftan B_3 bölgesinde, (2.61c) denklemi $K = 0$ civarında seriye açılırsa

$$C^2 = \frac{4}{3} K^2 (1 - m^2)^2 \quad (2.63)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem ince bir tabakada eğilme titreşimlerinin Bernoulli-Euler teorisi ile uyumludur [13]. Bu denklemin B_3 bölgesindeki $C(K)$ eğrileri için önemi, $K \rightarrow 0$ için $C \rightarrow 0$ olduğunu, yani B_3 bölgesindeki ilk dispersiyon dalının başlangıcının orijin noktası olduğunu göstermesidir. Ayrıca, dispersiyon eğrilerinin B_3 bölgesindeki $K \rightarrow \infty$ limitindeki durumunu inceleyelim. Bu amaçla $K \rightarrow \infty$ limitinde, (2.61c) denklemi simetrik dalgalarda da olduğu gibi (2.60) Rayleigh

denkleminde indirgenir. Bu denklemin kökü olan Rayleigh hızı C_R , simetrik dalgalarındaki gibi B_3 bölgesinde geçerli olan dispersiyon bağıntısının tek dalının, $K \rightarrow \infty$ limitinde yaklaştığı değeri vermektedir.

Son olarak, davranışları yukarıda açıklanan anti-simetrik dalgaların dispersiyon eğrilerinin grafikleri simetrik dalgalar için seçilen aynı lineer malzeme parametreleri için nümerik hesaplamalar yapılarak çizdirilmiştir. İlk olarak (2.61)'de verilen malzeme parametresi için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimini veren grafikte, faz grafiğinin ilk iki dalı için anti-simetrik dalgaların grup hızlarının grafikleri Şekil C.7 ve Şekil C.8'de verilmişlerdir. Şekil C.8 dikkatlice incelenirse, dispersiyon bağıntısının ilk dalı orijinden başlar ve $K \rightarrow \infty$ için $C = C_R = 0.9194$ değerine yaklaşır. İkinci dalı ise, B_1 bölgesinden B_2 bölgesine $(C, K) = (1.7320, 3.246)$ noktasından giriş yaparak, B_2 bölgesinde $K \rightarrow \infty$ için yukarıda da belirtildiği gibi $C = 1$ değerine yaklaşmaktadır.

Ayrıca, anti-simetrik dalgalar için, Çizelge 2.1'de verilen gerçek malzeme modelleri için de boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimini veren grafiklerle, faz grafiğinin ilk iki dal için dalgaların grup hızlarının grafikleri nümerik olarak hesaplanarak Şekil C.9,10 ve Şekil C.11,12'de gösterilmişlerdir.

3. HİPERELASTİK BİR TABAKADA SONLU FAKAT KÜÇÜK GENLİKLİ NONLİNEER SİMETRİK DALGALARIN YAYILMASI

3.1 Giriş

Bu bölümde, düzgün kalınlıklı homojen izotrop nonlinear elastik bir malzemeden oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli simetrik (extensional) dalgaların yayılma problemi incelenecektir. Bu amaç için, yukarıda tanımlanan elastik ortamda Bölüm 2.2’de türetilen dalga yayılımını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşullarının tanımladığı sınır değer probleminin asimptotik çözümünün inşası için [6]’da geliştirilen pertürbasyon yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemde, simetrik dalgaların tanımlanan elastik ortamda yayılmasını modelleyen düzlem içi hareketlere bağlı olarak iki yöndeki yerdeğiştirmelerin fonksiyonları cinsinden hareket denklemleri ve sınır koşulları ilk olarak uygun boyutsuz değişkenlerle boyutsuz hale getirilmektedir. Bu işlemin ardından, asimptotik olarak düzgün geçerli bir asimptotik açılımla nonlinearlikle dispersiyon arasındaki denge sağlatılarak küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılmasını karakterize eden denklem olan K-dV denklemi elde edilmektedir. Daha sonra, bu şekilde elde edilen nonlinear dalga yayılımını karakterize eden K-dV denkleminin çözümleri incelenecektir.

3.2 Simetrik Dalgalar İçin Asimptotik Analiz

Bu kısımda, küçük ama sonlu genliğe sahip nonlinear simetrik dalgaların yayılımını betimleyen (2.8-9) sınır değer probleminin asimptotik çözümü bir pertürbasyon yöntemi kullanarak inşa edilecektir [6]. Bu amaçla ilk olarak,

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad \tau = \frac{c}{L}t, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad v = \frac{u_2}{h}, \quad \delta = \frac{h}{L} \quad (3.1)$$

boyutsuz değişkenleri tanımlansın. Bu değişkenlerde görülen c , karakteristik hızı ve L , karakteristik dalga boyunu temsil etmektedir. δ ise, düşey ve yatay uzunluklar arasındaki oranın ölçüsünü göstermektedir. Simetrik dalgalar için yerdeğiştirme

fonksiyonları,

$$u(x, y, \tau) = u(x, -y, \tau), \quad v(x, y, \tau) = -v(x, -y, \tau) \quad (3.2)$$

simetri koşullarını sağlamalıdır. Simetrik dalga yayılımının, $x = 0$ 'da zamana bağımlı bir sınır yüklemesiyle pozitif x-ekseni doğrultusunda tek yönlü (3.2) simetri koşulunu sağlayan bir yayılım ile tanımlanan bir sinyalizasyon problemi varsayalım. Bu varsayım altında, (2.8a,b) ve (2.9a,b) denklemleriyle tanımlanan sınır değer problemi için yukarıda da belirtildiği üzere bir pertürbasyon yöntemi kullanarak düzgün geçerli asimptotik çözüm inşa etmek amacıyla, $\varepsilon > 0$ nonlinearlığın derecesini ölçen küçük bir parametre olmak üzere u ve v yer değiştirme fonksiyonlarını,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, y, \tau), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x, y, \tau) \quad (3.3)$$

asimptotik kuvvet serilerine açalım. Burada δ üzerinde, $\delta^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken; varsayımı yapılsın, yani ε ile δ arasında, $\varepsilon = \delta^2$ bağıntısının var olduğu kabul edilsin. (3.1) boyutsuz değişkenleriyle, (2.8a,b) hareket denklemleri ve (2.9a,b) sınır koşulları boyutsuz hale getirilip; bu yeni boyutsuz sınır-değer probleminde (3.3) asimptotik açılımı kullanılıp, ε 'un aynı kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenerek, u_n ve v_n bilinmeyenlerinin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi inşa edilir. Bunlardan ilk üçü şu şekildedir:

$\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad (3.4)$$

$$y = \pm 1' de \quad c_T^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (3.5)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$-c_T^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \mathcal{L}^{21}(u_1, v_1) = \mathcal{N}^{21}(u_1, v_1), \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}^{22}(u_1, v_1) = \mathcal{N}^{22}(u_1), \quad (3.7)$$

$$y = \pm 1' de \quad c_T^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \mathcal{B}^{21}(u_1, v_1) = 0, \quad (3.8)$$

$$y = \pm 1' de \quad \mathcal{B}^{22}(u_1, v_1) = 0, \quad (3.9)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$:

$$-c_T^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \mathcal{L}^{31}(u_2, v_2) = \mathcal{N}^{31}(u_1, u_2, v_1, v_2), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}^{32}(u_2, v_1, v_2) = \mathcal{N}^{32}(u_1, u_2, v_1, v_2), \quad (3.11)$$

$$y = \pm 1'de \quad c_T^2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + \mathcal{B}^{31}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 0, \quad (3.12)$$

$$y = \pm 1'de \quad \mathcal{B}^{32}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 0. \quad (3.13)$$

Problem hiyerarşisinde görülen lineer ve nonlinear operatörler ise,

$$\mathcal{L}^{21} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}, \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{L}^{22} = -c_L^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}, \quad (3.14b)$$

$$\mathcal{L}^{31} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y}, \quad (3.14c)$$

$$\mathcal{L}^{32} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}, \quad (3.14d)$$

$$\mathcal{N}^{21} = \eta_4 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right], \quad (3.14e)$$

$$\mathcal{N}^{22} = \eta_4 \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3.14f)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{31} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right) + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14g)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{32} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14h)$$

$$\mathcal{B}^{21} = 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + c_T^2 \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad (3.14i)$$

$$\mathcal{B}^{22} = c_L^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \eta_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2, \quad (3.14j)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{31} = & c_T^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + 2\eta_4 \frac{\partial u_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ & + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.14k)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{32} = & c_L^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ & + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.14l)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Şimdi sırasıyla bu problemleri çözelim. Birinci merteye problemde, (3.4) denklemi y 'ye göre iki defa integre edilirse,

$$u_1 = A_1(x, \tau)y + A_2(x, \tau) \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.5) sınır koşulundan

$$A_1(x, \tau) \equiv 0 \quad (3.16)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Böylece u_1 ,

$$u_1 = \mathcal{A}(x, \tau) = A_2(x, \tau) \quad (3.17)$$

şeklinde bulunur. (3.17) çözümü; (3.2) simetri koşulundan gelen,

$$u_1(x, y, \tau) = u_1(x, -y, \tau), \quad v_1(x, y, \tau) = -v_1(x, -y, \tau) \quad (3.18)$$

simetri koşulunu da sağlar. Burada $\mathcal{A}$ keyfi bir fonksiyonu göstermektedir.

İkinci merteye problemde, (3.17) çözümü (3.7) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.19)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem y 'ye göre iki defa integre edilirse,

$$v_1 = \gamma_1(x, \tau)y + \gamma_2(x, \tau) \quad (3.20)$$

çözümü elde edilir. (3.18) simetri koşulunun sağlanabilmesi için $\gamma_2(x, \tau) = 0$ olmalıdır.

Bu sonuç altında (3.20) çözümünü, (3.9) sınır koşulunda yerine konup gerekli düzenlemeler yapılırsa, γ_1 keyfi fonksiyonu,

$$\gamma_1 = \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Böylelikle birinci merteye çözümler,

$$u_1 = \mathcal{A}(x, \tau), \quad v_1 = \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} y \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilirler. Burada $\mathcal{A}$ keyfi fonksiyonunun tam formunu ikinci mertebedeki kullanılmayan diğer denklem ile sınır koşulundan ve üçüncü merteye

problem kullanılarak bulunacaktır. Bu amaçla, u_2 çözümünü bulabilmek için (3.22) çözümleri (3.6) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} + c_T^2 \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 3 \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) denklemini y 'ye göre iki defa integre edilirse, u_2

$$u_2 = \left[c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} + c_T^2 \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 3 \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \right] \frac{y^2}{2} + B_2(x, \tau)y + B_1(x, \tau) \quad (3.24)$$

olarak bulunur. (3.2) simetri koşulunun ikinci mertebe problemde karşılığı

$$u_2(x, y, \tau) = u_2(x, -y, \tau), \quad v_2(x, y, \tau) = -v_2(x, -y, \tau) \quad (3.25)$$

şeklindedir. (3.24) çözümünün u_2 'nin bu simetri koşulunu sağlayabilmesi için B_2 keyfi fonksiyonu sıfır olmalıdır. Burada B_1 keyfi fonksiyonun tam yapısı daha üst mertebe problemler yardımıyla bulunabilir. Fakat bizim amacımız birinci mertebe uniform geçerli asimptotik çözüm bulmak olduğu için B_1 keyfi fonksiyonuyla ilgilenmeyeceğiz. (3.24) çözümü simetri koşulundan gelen sonuç altında ($B_2 = 0$) (3.8) sınır koşulunda yerine konulup, terimler düzenlenirse; $\mathcal{A}$ keyfi fonksiyonunun

$$\frac{c^2}{c_T^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} - 4 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.26)$$

dalga denklemini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. Özel olarak, (3.26)'da c^2 ,

$$c^2 = 4c_T^2 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) = \sqrt{E/(1-\nu^2)}\rho \quad (3.27)$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçilirse, (3.26) denklemini,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.28)$$

denklemine indirgenir. (3.27) bağıntısında E , Young modülünü temsil ederken, bu bağıntıyı sağlayan c değerine literatürde "ince plakta boyuna dalgaların yayılma hızı" adı verilir [16]. (3.28) denkleminin genel çözümü,

$$\mathcal{A} = F(\tau - x) + G(\tau + x) \quad (3.29)$$

şeklindedir. Bu aşamadan sonra, pozitif x -ekseni doğrultusunda yayılan dalgayı göz önüne alacağız. Bu nedenle, $\mathcal{A}$ için sadece

$$\mathcal{A} = F(\tau - x) \quad (3.30)$$

çözümü kullanılacaktır.

$\mathcal{A}$ fonksiyonunu tam olarak belirleyebilmek için simetri koşulları da göz önünde bulundurularak, (3.22), (3.24) ve (3.30) çözümleri (3.11) denkleminde yerine konup terimler düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \left\{ \frac{c^2}{c_L^2} \left[\frac{2c_T^2}{c_L^2} - \frac{c_L^2}{c_T^2} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial \tau^2} + \left(3 - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right\} y \quad (3.31)$$

denklemini elde edilir. (3.31) denklemini y 'ye göre iki defa integre edilirse (3.31) denkleminin sağ tarafı χ olarak tanımlanırsa),

$$v_2 = \chi \frac{y^3}{6} + K_1(x, \tau)y + K_2(x, \tau) \quad (3.32)$$

çözümü elde edilir. (3.25) simetri koşulunun sağlanması için $K_2 = 0$ olmalıdır. Bu sonuç altında; (3.22), (3.24) ve (3.32) çözümleri (3.13) sınır koşulunda yerlerine konulursa K_1 keyfi fonksiyonu

$$K_1(x, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) \left[\frac{2c^2}{c_L^2} \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x \partial \tau^2} - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x^3} \right] - \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{1}{c_L^2} \left[\eta_1 \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right)^2 + 2\eta_2 \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) - \eta_2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)^2 \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilir ve v_2 çözümü belirlenmiş olur.

Bu aşamaya kadar belirlenen u_1, u_2, v_1 ve v_2 çözümleri (3.10) denkleminde yerine konulup terimler düzenlenirse, u_3 'ün sağlanması gereken denklem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \frac{1}{c_T^2} \left\{ \left[\frac{c^4}{c_T^2} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \tau^4} + 2c^2 \left(\frac{c_T^4}{c_L^4} - 2 \right) \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \tau^2 \partial x^2} + (c_T^2 - c_L^2) \left(3 - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x^4} \right] \frac{y^2}{2} \right. \\ - \left[4\eta_4 \frac{c^2}{c_L^2} \left(\frac{2c_T^4 - c_L^4}{c_L^6} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} + \left(\eta_3 \frac{(4c_T^4 - 2c_T^2 c_L^2)}{c_L^4} + 4\eta_4 \frac{c_T^2}{c_L^2} \left(3 - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \right) \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \\ \left. - \left[\eta_1 + \eta_2 \left(\frac{4c_T^4}{c_L^4} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)^2 + (c_T^2 - c_L^2) \frac{\partial K_1}{\partial x} + c^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial \tau^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir. (3.34) denklemini y 'ye göre bir kere integre edilip, sonucu (3.22), (3.24) ve (3.30) çözümleriyle birlikte $\xi = \tau - x$ değişken dönüşümü altında (3.12) sınır koşulunda yerine konulup terimler düzenlenirse (u_3 çözümünün açık hali hesaplanmak istendiğinde keyfi fonksiyonlarından birisi, simetri koşulunun sağlanabilmesi için sıfır olarak bulunur ve u_3 çözümünün açık halinin inşa etmek istediğimiz çözüm şeklinin

elde edilmesinde gerekmemesinden dolayı ikinci keyfi fonksiyonu belirlemeye ihtiyaç yoktur),

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = -\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 - \Omega_1 \frac{\partial^4 F}{\partial^4 \xi} \quad (3.35)$$

denkleminde ulaşılır. Sağ tarafta görülen katsayılarından Ω_1 katsayısı lineer malzeme sabitlerini ve Ω_0 katsayısı ise hem lineer hem de nonlinear malzeme sabitlerini içermektedir. (3.35) denkleminin çözümü H keyfi fonksiyon olmak üzere,

$$B_1 = (x + \tau) \left[-\frac{\Omega_0}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\Omega_1}{4} \frac{\partial^3 F}{\partial^3 \xi} \right] + H(\xi) \quad (3.36)$$

olarak elde edilir.

Yukarıda da bahsedildiği gibi bu problemde pozitif x -ekseni doğrultusunda yayılan dalgalar göz önünde bulundurulmaktadır. (3.36) ile verilen $B_1(x, \tau)$ fonksiyonu $x \geq 0, \tau \geq 0$ bölgesinde tanımlıdır. ξ =sabit doğruları üzerinde $\xi \rightarrow \infty$ veya $\tau \rightarrow \infty$ 'a giderken $B_1 \rightarrow \infty$ olmakta yani, B_1 fonksiyonu sınırsız büyümektedir. Yani, u ve v için yazılan (3.3) asimptotik seri açılımları seküler davranış göstermektedirler. $x = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ veya $\tau = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ olduğunda, birinci ve ikinci mertebe çözümler aynı mertebede olurlar ve (3.3) ile verilen asimptotik açılımlar uniform geçerli olmazlar.

Yine bir sinyalizasyon problemini düşünelim. τ =sabit kabul ettiğimizde $x = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ mertebesinde iken ikinci mertebe çözüm seküler davranış göstermekte ve (3.3) açılımı uniform olmamaktadır. Bu sekülerlik çoklu ölçekler metodu kullanılarak kaldırılabilir [6]. Bu yöntemin uygulanabilmesi için öncelikle

$$x_0 = x, x_1 = \varepsilon x, \quad \tau = \tau, \quad y = y \quad (3.37)$$

yeni bağımsız değişkenleri tanımlayalım. Burada $x_1 = \varepsilon x$, x -ekseni boyunca yavaş maddesel değişimi göstermektedir. u ve v 'nin x_0, x_1, τ, y 'nin fonksiyonu olduğunu kabul edelim. (3.3)'te verilen asimptotik açılımlar yerine de

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, y, \tau), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, y, \tau) \quad (3.38)$$

asimptotik açılımlarını yazalım. Yeni değişkenlere göre türev operatöründe

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.39)$$

şeklinde yapılan değişiklikle beraber (3.38) seri açılımları da (2.8a,b) ve (2.9a,b) hareket denklemleri ve sınır koşullarında yerlerine konur ve daha önceki pertürbasyon yönteminde yapıldığı gibi ε 'un aynı kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenerek, u_n ve v_n bilinmeyenlerinin ardışık olarak hesaplanabileceği yeni bir problem hiyerarşisi elde edilir. Bu yeni hiyerarşinin birinci ve ikinci mertebe problemlerindeki denklemler, (3.4), (3.5) ve (3.6)-(3.9)'da tanımlanan denklem gruplarında görülen operatörlerde $\partial/\partial x$ yerine $\partial/\partial x_0$ konularak tanımlanabilir. Yeni durumda üçüncü mertebe problem ise aşağıdaki formu alır:

$$-c_T^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \mathcal{L}^{31*}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \mathcal{N}^{31*}(u_1, u_2, v_1, v_2), \quad (3.40)$$

$$\mathcal{L}^{32*}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \mathcal{N}^{32*}(u_1, u_2, v_1, v_2), \quad (3.41)$$

$$y = \pm 1' de \quad c_T^2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + \mathcal{B}^{31*}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 0, \quad (3.42)$$

$$y = \pm 1' de \quad \mathcal{B}^{32*}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 0. \quad (3.43)$$

(3.40)-(3.43)'te görülen lineer ve nonlinear operatörler ise,

$$\mathcal{L}^{31*} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - c_L^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial x_1} \right) - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_0 \partial y} \right), \quad (3.44a)$$

$$\mathcal{L}^{32*} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_0 \partial y} \right), \quad (3.44b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{31*} = & \frac{\partial}{\partial x_0} \left[2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + 2\eta_4 \frac{\partial u_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.44c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{32*} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.44d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{31*} = & c_T^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + 2\eta_4 \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right] \\ & + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{32*} = & c_L^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + (c_L^2 - 2c_T^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} \right) + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ & + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \end{aligned} \quad (3.45b)$$

olarak tanımlanırlar.

Yukarıdaki asimptotik açılımlar kullanılarak elde edilen birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümü (3.22) ve (3.24) çözümlerine benzer şekilde (simetri koşulları da göz önünde bulundurularak),

$$u_1 = \mathcal{A}(x_0, x_1, \tau), \quad v_1 = \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_0} y, \quad (3.46)$$

$$u_2 = \left[c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} + c_T^2 \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 3 \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} \right] \frac{y^2}{2} + J_1(x_0, x_1, \tau) \quad (3.47)$$

olarak elde edilir. (3.47)'de J_1 keyfi bir fonksiyon olup daha üst mertebe problemlerden belirlenecektir. $\mathcal{A}$ fonksiyonu da (3.26) denklemine benzer olarak,

$$\frac{c^2}{c_T^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} - 4 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} = 0 \quad (3.48)$$

dalga denklemini sağlamaktadır. Eğer c^2 , (3.27) bağıntısını sağlayacak şekilde seçilirse, (3.48) denklemi,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} = 0 \quad (3.49)$$

haline indirgenir. (3.49) dalga denkleminin pozitif x -ekseni boyunca yayılan dalga göz önüne alınırsa, çözüm

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau - x_0, x_1) \quad (3.50)$$

olarak bulunur. Bu sonuç, $\mathcal{A}$ 'nın birim hızla ilerleyen referans çerçevesinde sabit kaldığını göstermektedir. (3.50) çözümü $\mathcal{A}$ fonksiyonunun yapısını tam olarak belirleyememektedir. Bu nedenle, $\mathcal{A}$ 'nın $\tau - x_0$ ve x_1 'e bağıllığı üçüncü mertebe problemin yardımıyla belirlenecektir.

Üçüncü mertebe problemde; (3.46) ve (3.47) çözümlerini (3.41) denkleminde yerine koyup, terimler düzenlenirse, v_2 için

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \left\{ \frac{c^2}{c_L^2} \left[\frac{2c_T^2}{c_L^2} - \frac{c_L^2}{c_T^2} \right] \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x_0 \partial \tau^2} + \left(3 - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x_0^3} \right\} y \quad (3.51)$$

denklemi elde edilir. (3.51) denklemi y 'ye göre iki defa integre edilirse (denklemin sağ tarafına χ^* değişkeni atanırsa),

$$v_2 = \chi^* \frac{y^3}{6} + K_1^*(x_0, x_1, \tau) y + K_2^*(x_0, x_1, \tau) \quad (3.52)$$

çözümü elde edilir. Simetri koşulunun sağlanabilmesi için $K_2^* = 0$ olmalıdır. Bu sonuç kullanıldığında; (3.46), (3.47) ve (3.52) çözümleri (3.43) sınır koşulunda yerlerine konulursa K_1^* keyfi fonksiyonu

$$K_1^*(x, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) \left[\frac{2c^2}{c_L^2} \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x_0 \partial \tau^2} - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x_0^3} \right] - \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial B_1}{\partial x_0} + \frac{1}{c_L^2} \left[\eta_1 \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right)^2 + 2\eta_2 \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) - \eta_2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_0} \right)^2 \quad (3.53)$$

olarak elde edilir.

Seküler sonuca yol açan analizdeki gibi yine bu aşamaya kadar formları belirlenen u_1, u_2, v_1, v_2 çözümlerini (3.40) denkleminde yerine konulup terimler düzenlenirse, u_3 'ün sağlaması gereken denklem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \frac{1}{c_T^2} \left\{ \left[\frac{c^2 (c_L^2 - c_T^2) (c_L^4 - 2c_T^4)}{c_T^2 c_L^4} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \tau^2 \partial x_0^2} + (c_T^2 - c_L^2) \left(3 - \frac{4c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x_0^4} \right] \frac{y^2}{2} \right. \\ + \frac{c^4}{c_T^2} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \tau^4} - \frac{c^2 c_L^2}{c_T^2} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \tau^2 \partial x_0^2} - c_L^2 \left(\frac{2c_T^2}{c_L^2} - 3 \right) \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x_0^4} + \left[\frac{2c_T^4}{c_L^2} - 3c_T^2 - c_L^2 \right] \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0 \partial x_1} \\ - \left[\eta_1 + \eta_2 \left(\frac{4c_T^4}{c_L^4} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_3 \frac{2c_T^2}{c_L^2} \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_0^2} \\ \left. + (c_T^2 - c_L^2) \frac{\partial K_1^*}{\partial x_0} + c^2 \frac{\partial^2 J_1}{\partial \tau^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 J_1}{\partial x_0^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

olarak elde edilir. (3.54) denklemini y 'ye göre bir kere integre edip, (3.46), (3.47) ve (3.52) çözümleriyle birlikte $\xi = \tau - x_0$ değişken dönüşümü altında (3.42) sınır koşulunda yerine koyup terimler düzenlenirse (u_3 'ün keyfi fonksiyonlarından birisi simetri koşulunun sağlanabilmesi için sıfır olduğundan ve diğer keyfi fonksiyon ise inşa etmek istediğimiz çözümün elde edilmesinde gerekmediği için u_3 'ün açık formuna ihtiyaç yoktur), J_1 fonksiyonunun

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 J_1}{\partial x_0^2} = 2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi \partial x_1} - \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right)^2 - \Lambda_1 \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \xi^4} \quad (3.55)$$

homojen olmayan dalga denklemini sağladığı görülür. (3.55) denkleminin sağ tarafında görülen katsayıların açık halleri

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = \frac{1}{c^2 c_L^6} \left\{ 4c_L^2 c_T^4 (3\eta_1 - 3\eta_2 + \eta_4) - 8c_T^4 \eta_4 - c_L^6 [6c_T^2 (\eta_1 - \eta_2 + \eta_4) - 2c^2 n_4] \right\} \\ \Lambda_1 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{44c_T^4}{c_L^2} - \frac{24c_T^6}{c_L^4} - 20c_T^2 \right] + \frac{8c_T^4}{c_L^4} - \frac{18c_T^2}{c_L^2} - \frac{c_L^2}{c_T^2} - \frac{c^2}{c_L^2} + 12 \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere, Λ_0 lineer ve nonlinear malzeme özelliklerini yansıtırken, Λ_1 sadece lineer malzeme özelliklerini yansıtmaktadır. (3.55) denkleminin çözümü bir seküler davranış sergiler. Fakat bu sorun (3.55) denkleminin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek aşılabılır;

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi \partial x_1} - \frac{\Lambda_0}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\Lambda_1}{2} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (3.57)$$

Bu işlem sayesinde, (3.38) asimptotik açılımlarının uniformluluğunun sağlanmasının yanında, bir önceki adımda karşımıza çıkan, $\mathcal{A}$ fonksiyonunun tam olarak belirlenememe probleminin çözümü için (3.57) denkleminin elde edilmesi sağlanmıştır. (3.57) koşulu altında (3.55) denkleminin pozitif x -ekseni doğrultusunda yayılan dalga çözümü $J_1 = J_1(\tau - x_0)$ olarak bulunur. Bu sonuç da, J_1 'in de $\mathcal{A}$ gibi birim hızla ilerleyen referans çerçevesinde sabit kaldığını göstermektedir. J_1 'in kalan iki değişkene göre tam olarak belirlenebilmesi için daha üst mertebe problemlere başvurulmalıdır. Fakat bu çalışmada küçük ama sonlu genlikli dalgalar ile ilgilenildiğinden düzgün geçerli birinci mertebe u_1 ve v_1 çözümlerini bulmak yeterli olacaktır. Bu amaç için ise, (3.57) denkleminin çözümü olan $\mathcal{A}$ fonksiyonunu belirlemek yeterlidir.

Şimdi, $w(\xi, x_1)$ fonksiyonunu,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} = \frac{1}{|\Lambda_0|} w \quad (3.58)$$

bağıntısıyla tanımlayalım. Bu tanım kullanılırsa (3.57)

$$w_{x_1} - \alpha w w_\xi - \beta w_{\xi \xi \xi} = 0 \quad (3.59)$$

denklemine dönüştür. (3.59)'da,

$$\alpha = \text{sgn} \Lambda_0 = \pm 1, \quad \beta = \frac{\Lambda_1}{2} \quad (3.60)$$

şeklindedirler. (3.59) denklemi K-dV denklemi olarak bilinir ve verilen

$$w(\xi, 0) = w_0(\xi) \quad (3.61)$$

şeklindeki başlangıç koşulu için (3.59) denkleminde bir çözüm elde edilir. Elde edilen bu çözüm kullanılarak, birinci mertebe çözümler u_1 ve v_1 , (3.46) ve (3.58) yardımıyla tam olarak belirlenirler.

(3.59) denkleminin çözümlerini incelemeye geçmeden önce; (3.61) başlangıç koşuluyla, simetrik dalgaları üretebilecek sınır etkisi arasındaki bağıntıyı inşa edelim. Bu tür bir bağıntıyı elde edebilmek için yine sinyalizasyon problemini düşünelim. Bunun için, tabakamızın yarı sonsuz olduğu kabul edilsin yani, $X_1 \geq 0$ bölgesi ele alınsın. Pozitif x -ekseni doğrultusunda yayılan simetrik dalga hareketinin oluşabilmesi için serbest yüzeyler olan $X_2 = \pm h$ düzlemlerinin her noktasında her bir düzlemde birbirlerine zıt yönde eşit şiddette zamana bağlı t_2 gerilme vektörleri (traction) uygulanmalıdır (t_2 gerilme vektörleri X_2 'den bağımsızdırlar). Bu sınır gerilme vektörü $X_2 = h$ düzleminde

$$t_2 = T_{K2}N_K = T_{22}(X_1, h, t) = -\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}\varepsilon f\left(\frac{c_0}{L}t\right) \quad (3.62)$$

olarak uygulanmalıdır. Burada N_K , deformasyon öncesi $X_2 = h$ yüzeyinin dış yönlü birim normal vektörlerinin bileşenlerini göstermekte, yani $N_K = (0, 1, 0)$ vektörünü temsil etmektedir ($X_2 = -h$ yüzeyinde zıt doğrultuda etki söz konusudur). Boyutsuz olarak, T_{22} gerilme bileşeni için aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$\frac{T_{22}}{\lambda} \approx \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.63)$$

Birinci mertebe çözümler (3.63) bağıntısında kullanılırsa,

$$\frac{T_{22}}{\lambda} \approx -\varepsilon \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.64)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece (3.62) ve (3.64) bağıntıları da kullanılarak simetrik dalga hareketi için (3.61) başlangıç koşulunun yapısı belirlenir

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi}(\xi, 0) = f(\xi) = w_0(\xi). \quad (3.65)$$

3.3 Asimptotik Yaklaşım Denkleminin (K-dV Denklemini) Bazı Çözümleri ve Tartışma

Önceki bölümde hiperelastik bir tabakada sonlu fakat küçük genlikli nonlinear simetrik dalgaların yayılmasını asimptotik olarak (3.59) formundaki K-dV denkleminin karakterize ettiği gösterilmişti. Bu bölümde ise, K-dV denkleminin bilinen bazı çözümleri verilecek ve bu çözümlerin davranışı hakkında bu çalışmada incelenen dalga hareketi çerçevesinde bazı gözlemlerde bulunulacaktır. K-dV denkleminin çözümleri

standart yöntemlerle [37] ve ters saçılma metodlarıyla (inverse scattering method) [38,39] elde edilmişlerdir. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçları vermeye başlamadan önce (3.59) denklemi, eğer $\alpha = -1$ ise

$$w \rightarrow -w, \quad \xi \rightarrow -\xi, \quad x_1 \rightarrow x_1 \quad (3.66)$$

değişken dönüşümleriyle; eğer $\alpha = 1$ ise

$$w \rightarrow w, \quad \xi \rightarrow -\xi, \quad x_1 \rightarrow x_1 \quad (3.67)$$

değişken dönüşümleriyle

$$w_{x_1} + ww_\xi + \beta w_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.68)$$

standart formuna getirilsin. İlk olarak, (3.68) K-dV denkleminin

$$w = w(\xi - Vx_1) \equiv w(\eta), \quad V = \text{sabit}. \quad (3.69)$$

formundaki ilerleyen dalga çözümlerini inşa etmeye çalışalım. Bu amaç için, (3.69) çözüm formu (3.68) denklemine yerine konup, elde edilen denklem η 'ya göre iki defa integre edilirse,

$$3\beta \left(\frac{dw}{d\eta} \right)^2 = -w^3 + 3Vw^2 - 6Zw - 6S \equiv F(w), \quad Z, S = \text{sabit}. \quad (3.70)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki üçüncü dereceden polinomun köklerinin yapısına göre (3.69) çözümleri farklı davranış göstermektedirler. Bu F polinomu

$$F(w) = (w - c_1)(w - c_2)(c_3 - w), \quad c_1 < c_2 < c_3 \quad (3.71)$$

çarpanlarına ayrılabilir ve bu polinomun kökleri olan c_i 'lerle (3.70) denkleminin katsayıları arasında

$$V = \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3), \quad Z = \frac{1}{6}(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3), \quad S = -\frac{1}{6}c_1c_2c_3 \quad (3.72)$$

bağıntıları mevcuttur. (3.68) denkleminin (3.69) formunda reel sınırlı çözümlere sahip olabilmesi için $F(w) = 0$ cebrik denkleminin üç reel kökü olmalıdır. Eğer bu denklem üç ayrık reel köke sahipse, (3.69) çözümleri uniform dalga katarı veya cnoidal dalga şeklinde olurlar. Eğer $F(w) = 0$ denklemi $c_1 = c_2$ şeklinde iki katlı köklere sahipse, cnoidal dalga çözümleri tekil (solitary) dalga çözümlerine indirgenebilirken, $c_2 = c_3$

şeklinde iki katlı köke sahipse, tek muhtemel çözüm $w = c_3$ şeklindeki sabit çözüm olmaktadır [1].

Cnoidal dalga çözümleri Jakobiyen eliptik fonksiyonları cn cinsinden

$$w = c_2 + (c_3 - c_2)cn^2 \left[\left(\frac{c_3 - c_1}{12\beta} \right)^{1/2} [\xi - (c_1 + c_2 + c_3)x_1], m \right] \quad (3.73)$$

formunda elde edilir [37]. Burada m ,

$$m^2 = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1}, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (3.74)$$

bağıntısını sağlar, cn eliptik fonksiyonunun modülünü temsil etmektedir. $c_1 \equiv w_\infty$ ve $c_3 - c_1 = a$ ise, $c_2 \rightarrow c_1 (m \rightarrow 1)$ limitinde (3.69) çözümü

$$w = w_\infty + a \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{a}{12\beta}} \zeta \right), \quad \zeta = \xi - \left(w_\infty + \frac{a}{3} \right) x_1 \quad (3.75)$$

tekil (solitary) dalga çözümüne indirgenir [1]. Burada w_∞ , sonsuzdaki uniform davranışını temsil ederken, a ise tekil dalğanın genliğini göstermektedir. (3.75) çözümü dikkatlice incelendiğinde, dalgaların uniform duruma göre hızları dalgaların genliğiyle orantılı olarak değişirken, tekil dalgaların eninin dalga genliğinin karekökü ile ters orantılı olarak değiştiği görülür. Bu da enine dar büyük genlikli tekil dalgaların küçük genlikli dalgalara göre daha hızlı yayıldıklarını göstermektedir.

Özel olarak $w_\infty = 0$ alınırsa, incelenen simetrik dalga yayılımı problem için (3.46) ve (3.75)'ten yer değiştirmeler

$$u_1 = \sqrt{\frac{12a\beta}{|\Lambda_0|}} \tanh \Theta, \quad v_1 = \left(1 - \frac{2c_T^2}{c_L^2} \right) \frac{a}{|\Lambda_0|} y \operatorname{sech}^2 \Theta, \quad \Theta = \sqrt{\frac{a}{12\beta}} \zeta \quad (3.76)$$

olarak elde edilirler. Bu çözümler sırasıyla, pozitif x-ekseninde aynı hızla yayılan şok ve tekil dalgaları temsil etmektedirler.

(3.68) denkleminin farklı tekil dalga çözümleri de mevcuttur. Bunlardan bir başkasını elde etmek için

$$w \rightarrow 6\beta w, \quad x_1 \rightarrow x_1/\beta, \quad \xi \rightarrow \xi \quad (3.77)$$

değişken dönüşümü (3.68) denklemine uygulandığında

$$w_{x_1} + 6ww_\xi + w_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.78)$$

denklemini elde edilir. (3.78) denkleminin sech^2 fonksiyonu cinsinden tekil dalga çözümü

$$w = \frac{1}{2}V\text{sech}^2 \left[\frac{1}{2}V^{1/2}(\xi - Vx_1 - \xi_0) \right], \quad \xi_0 = \text{sabit}. \quad (3.79)$$

olarak elde edilebilir. Burada $e^{\xi_0 V^{1/2}} = -1$ olduğu kabul edilirse, (3.79) çözümü

$$w = -\frac{1}{2}V\text{cosech}^2 \left[\frac{1}{2}V^{1/2}(\xi - Vx_1) \right] \quad (3.80)$$

çözümüne indirgenir. Bu çözüm (3.68) denkleminin singüler bir çözümüdür [40]. $\xi - Vx_1 = 0$ doğruları üzerinde (3.80) çözümü singüler davranış göstermektedir. Son olarak, başka bir singüler ilerleyen dalga çözümü elde etmek için (3.78) denkleminin $w(\xi, x_1) = -6x_1^{-2/3}f(\eta)$, $\eta = \xi x_1^{-1/3}$ formunda çözümü aranır, f fonksiyonu için elde edilen adi diferansiyel denklemin η 'ya göre iki defa integre edilmesiyle bulunan f fonksiyonu yardımıyla

$$w = 6\xi \frac{(\xi^3 - 24x_1)}{(\xi^3 + 12x_1)^2} \quad (3.81)$$

çözümü elde edilir. Dikkat edilirse, bu çözümün de $\xi^3 + 12x_1 = 0$ eğrisi üzerinde singüler olduğu görülür. (3.81) çözümüne cebirsel tekil dalga çözümü adı verilmektedir [41]. Bu cebirsel tekil dalga çözümleri ilgili tekil dalga çözümlerinden uygun limitler altında indirgenerek de elde edilebilirler [40].

Yukarıda ifade edilen (3.68) denkleminin çözüm davranışlarında, (3.68) denkleminin katsayılarını tanımlayan tabakayı oluşturan malzemenin lineer ve nonlineer malzeme sabitlerinin fonksiyonu olan (3.56) katsayıları üzerinden bir koşulun tanımlanmadığını vurgulamak gerekmektedir. Yani, çözüm formunun ne olacağı, (3.62) sınır yüklemesini kontrol etmenin yanında tabakayı oluşturan malzemenin lineer ve nonlineer malzeme parametrelerinin de bilinmesine bağlı olmaktadır.

4. HİPERELASTİK BİR TABAKADA SİMETRİK NONLİNEER DALGALARIN MODÜLASYONU

4.1 Giriş

Düzgün kalınlıklı homojen izotrop nonlinear elastik bir malzemedan oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi dalgaların yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları Bölüm 2.2’de türetilmişlerdir. Daha sonra Bölüm 2.3’de lineer dalgaların yayılması ele alınmış, simetrik ve anti-simetrik dalgalar için ayrı ayrı olmak üzere lineer özelliklere bağlı olarak yayılma karakteristikleri incelenmiştir. Dalgaların faz hızlarının enine ve boyuna lineer dalga hızları arasındaki sağlamaları gereken koşullara göre dalgaların varlığı tartışılmış ve ilgili koşulların hepsi için yine simetrik ve anti-simetrik dalgalar için farklı olmak üzere dalgaların sağlamaları gereken dispersiyon bağıntıları elde edilmiştir. Bölüm 2.3.4’de de dispersiyon bağıntıları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu bölümde hiperelastik bir tabakada yayılan simetrik dalgaların self modülasyonu bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmektedir. Lineer dalgaların faz hızı c ’nin

$$c_T < c_L < c \quad (4.1)$$

$$c_T < c < c_L \quad (4.2)$$

ve

$$c < c_T < c_L \quad (4.3)$$

eşitsizliklerini sağladığı durumlar ayrı ayrı ele alınmaktadır. Her üç durum için de simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunun asimptotik olarak bir Nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Daha sonra NLS denkleminin bazı çözümleri incelenecektir. NLS denkleminin çözümleri denklemin katsayılarının işaretine bağlı oldukları için bu çalışmada elde edilen NLS denkleminin katsayıları incelenmektedir. Bu katsayılar genel olarak

tabakayı oluşturan malzemenin lineer ve nonlinear malzeme sabitlerine ve dalgaların dalga sayısına bağlıdır. Bu nedenle katsayıların seçilen yapay ve gerçek malzeme parametreleri için dalga sayısına göre değişimleri sayısal olarak hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir.

4.2 Nonlinear Dalgaların Self Modülasyonu

Hiperelastik bir tabakada yayılan küçük ama sonlu genlikli nonlinear simetrik dalgaların self modülasyonu çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenecektir [2]. Bu amaçla, $\varepsilon > 0$ nonlinearliğin mertebesini ölçen küçük bir parametre olmak üzere, problemin bağımsız değişkenleri olan X, Y ve t yerine

$$\begin{aligned} x_0 &= X, & x_1 &= \varepsilon X, & x_2 &= \varepsilon^2 X, \\ y_0 &= Y, & y_1 &= \varepsilon Y, & y_2 &= \varepsilon^2 Y, \\ t_0 &= t, & t_1 &= \varepsilon t, & t_2 &= \varepsilon^2 t \end{aligned} \quad (4.4)$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlanmaktadır. Yerdeğiştirme fonksiyonları u ve v 'nin bu yeni değişkenlerin fonksiyonları oldukları kabul edilmektedir. Bu yeni değişkenlerde (x_0, y_0, t_0) değişkenleri, yayılma hareketindeki hızlı değişimleri; $(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2)$ değişkenleri ise yayılma hareketindeki yavaş değişimi karakterize etmektedir.

Bu tanımlamaları yaptıktan sonra, yerdeğiştirme fonksiyonları olan u ve v 'nin ε parametresinin oluşturduğu $\{\varepsilon^n\}$ asimptotik dizisine göre

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2), \quad (4.5a)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) \quad (4.5b)$$

yapılarında uniform geçerli asimptotik açılımlara sahip olduklarını varsayalım. Dikkat edilirse eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türev operatörleri arasında

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bağıntıları geçerlidir.

Şimdi (2.8a,b)'de verilen hareket denklemlerine ve (2.9a,b) ile verilen sınır koşullarına (4.6) türev dönüşümleri uygulanır ve daha sonra da (4.5a,b)'de verilen asimptotik açılımlar kullanılırsa, ε 'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n ve v_n fonksiyonlarının ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi inşa edilir. Bunlardan ilk üçü; simetrik dalgaların nonlinear modülasyonunun incelenmesi için yeterli olacağından, simetrik dalgalar için yerdeğiştirme fonksiyonlarının sağlanması gereken (2.18) simetri koşulu da göz önünde bulundurularak aşağıda verilmektedir.

Birinci merteye problem:

$\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_1, v_1) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(u_1, v_1) = 0. \quad (4.7a,b)$$

$$y_0 = \pm h' de \quad \mathcal{B}_1^{(1)}(u_1, v_1) = 0, \quad \mathcal{B}_2^{(1)}(u_1, v_1) = 0. \quad (4.8a,b)$$

$$u_1(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = u_1(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2), \quad (4.9a)$$

$$v_1(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = -v_1(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2). \quad (4.9b)$$

Burada $\mathcal{L}_i^{(1)}$ ve $\mathcal{B}_i^{(1)}$ diferansiyel operatörleri;

$$\mathcal{L}_1^{(1)} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_0^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_0^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_0^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0^2} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (4.10b)$$

$$\mathcal{B}_1^{(1)} = c_T^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right), \quad (4.10c)$$

$$\mathcal{B}_2^{(1)} = c_L^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \quad (4.10d)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu operatörlerde parantez içerisindeki üst indis, pertürbasyon probleminin mertebesini göstermektedir. Benzer indisleme ikinci ve üçüncü merteye problemlerde tanımlanacak operatörlerde de kullanılacaktır.

İkinci merteye problem:

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_2, v_2) + \mathcal{L}_1^{(2)}(u_1, v_1) = \mathcal{N}_1^{(2)}(u_1, v_1), \quad (4.11a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_2, v_2) + \mathcal{L}_2^{(2)}(u_1, v_1) = \mathcal{N}_2^{(2)}(u_1, v_1). \quad (4.11b)$$

$$y_0 = \pm h' de \quad \mathcal{B}_1^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = 0, \quad \mathcal{B}_2^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = 0. \quad (4.12a,b)$$

$$u_2(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = u_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2), \quad (4.13a)$$

$$v_2(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = -v_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2). \quad (4.13b)$$

Bu problemdeki $\mathcal{L}_i^{(1)}$ diferansiyel operatörleri birinci merteye problemde (4.10a,b) ile tanımlanan operatörlerdir. $\mathcal{L}_i^{(2)}$, $\mathcal{N}_i^{(2)}$ ve $\mathcal{B}_i^{(2)}$ diferansiyel operatörleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0 \partial t_1} - 2c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial x_1} - 2c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_0 \partial y_1} - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial y_0} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0 \partial y_1} \right), \quad (4.14a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(2)} = 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_0 \partial t_1} - 2c_T^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0 \partial x_1} - 2c_L^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_0 \partial y_1} - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial y_0} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial y_1} \right), \quad (4.14b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right)^2 + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_0} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \eta_4 \mathcal{K}_1^{(2)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right) \mathcal{K}_2^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (4.14c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_0} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \eta_4 \mathcal{K}_1^{(2)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(2\eta_4 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right) \mathcal{K}_2^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (4.14d)$$

$$\mathcal{B}_1^{(2)} = c_T^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_0} + \frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \left(\eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right) \mathcal{K}_2^{(2)}, \quad (4.14e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2^{(2)} &= c_L^2 \frac{\partial v_2}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} \right) + \eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 \\ &+ 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_0} + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \eta_4 \mathcal{K}_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.14f)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki $\mathcal{K}_i^{(2)}$ diferansiyel operatörleri de

$$\mathcal{K}_1^{(2)} = \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right)^2 \right], \quad \mathcal{K}_2^{(2)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) \quad (4.15)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Üçüncü merteye problem:

$\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_3, v_3) + \mathcal{L}_1^{(2)}(u_2, v_2) + \mathcal{L}_1^{(3)}(u_1, v_1) = \mathcal{N}_1^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2), \quad (4.16a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_3, v_3) + \mathcal{L}_2^{(2)}(u_2, v_2) + \mathcal{L}_2^{(3)}(u_1, v_1) = \mathcal{N}_2^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2). \quad (4.16b)$$

$$y_0 = \pm h' de \quad \mathcal{B}_1^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) = 0, \quad \mathcal{B}_2^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) = 0. \quad (4.17a,b)$$

$$u_3(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = u_3(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2), \quad (4.18a)$$

$$v_3(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) = -v_3(x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_0, t_1, t_2). \quad (4.18b)$$

Bu problemdeki $\mathcal{L}_i^{(1)}$ ve $\mathcal{L}_i^{(2)}$ operatörleri birinci ve ikinci merteye problemlerde (4.10a,b) ve (4.14a,b) ile tanımlanan operatörlerdir. $\mathcal{L}_i^{(3)}$, $\mathcal{N}_i^{(3)}$ ve $\mathcal{B}_i^{(3)}$ diferansiyel operatörleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(3)} = & \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0 \partial t_1} - c_L^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - c_T^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_0 \partial y_2} \right) \\ & - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial y_0} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0 \partial y_2} \right), \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{(3)} = & \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_0 \partial t_1} - c_T^2 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - c_L^2 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_0 \partial y_2} \right) \\ & - (c_L^2 - c_T^2) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial y_0} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0 \partial y_2} \right), \end{aligned} \quad (4.19b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1^{(3)} = & \frac{\partial}{\partial x_0} \left[2\eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right. \\ & + 2\eta_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right) \\ & + \eta_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right) + 2\eta_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right) \right) \\ & \left. + 2\eta_4 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + \eta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right) + \eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \frac{\partial u_1}{\partial y_0} + \eta_4 \mathcal{K}_1^{(2)} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y_0} \left[\eta_3 \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_0} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + 2\eta_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \mathcal{K}_2^{(2)} \right. \\
& + \left. \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\left(\eta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + 2\eta_4 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right) \mathcal{K}_2^{(2)} \right], \tag{4.19c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_2^{(3)} = & \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\eta_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) \right) \right. \\
& + 2\eta_4 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) + \mathcal{K}_2^{(2)} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) \left(\eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} + 2\eta_4 \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y_0} \left[2\eta_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) + 2\eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) \right. \right. \\
& + \left. \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right) + 2\eta_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_0} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\eta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right)^2 + 2\eta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right. \\
& + \left. \eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \eta_4 \mathcal{K}_1^{(2)} \right], \tag{4.19d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1^{(3)} = & c_T^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y_0} + \frac{\partial v_3}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) + \eta_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_0} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right. \\
& + \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) \Big) \\
& + 2\eta_4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial y_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \right) \right), \tag{4.19e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2^{(3)} = & c_L^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_0} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) + (c_L^2 - 2c_T^2) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\
& + 2\eta_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \right) \\
& + \eta_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \right) \right) + 2\eta_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \right) \\
& + 2\eta_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \right). \tag{4.19f}
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse (2.16-17) denklemleri ile tanımlanan lineer problemle, (4.7-8) denklemleri ile tanımlanan birinci mertebe pertürbasyon problemi eş yapıdadırlar. Yalnız lineer problemde u ve v 'ler

$$u = u(X, Y, t), \quad v = v(X, Y, t) \quad (4.20)$$

yapısında fonksiyonlardır. Bunlar, problemi tanımlayan denklemler, problemin sınır koşulları sağlanacak şekilde çözülerek tamamen belirlenirler. Yukarıda tanımlanan birinci mertebe lineer problemde ise yerdeğiştirme fonksiyonları

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2), \\ v_1 &= v_1(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

yapılarındadırlar ve aşağıda görülebileceği gibi birinci mertebe problemin çözümünden bu fonksiyonların ancak x_0, y_0, t_0 hızlı değişkenlerine bağılılıkları açık olarak hesaplanabilmektedir. Bu fonksiyonların kalan yavaş değişkenlere bağılılıkları ise daha üst mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümlerinden belirlenebilmektedir.

İkinci mertebe problemin yapısına dikkatlice bakıldığında, problemin yapısında görünen u_1 ve v_1 fonksiyonları birinci mertebe problemin çözümünden belirlenecekleri için, bu problemin de birinci mertebe problem gibi lineer olduğu anlaşılır. Fakat bu çözümlerin katkılarından dolayı ikinci mertebedeki hareket denklemleri ve sınır koşulları homojen olmayan yapıda olacaklardır. Benzer şekilde üçüncü mertebe problemdeki u_1, v_1 ve u_2, v_2 fonksiyonları da önceki pertürbasyon problemlerinden belirlenmiş olacakları için bu mertebedeki denklemler ve sınır koşulları da lineer ve homojen olmayan yapıda olacaklardır. Şimdi birinci mertebe problemde başlayarak bu problemlerin çözümlerini elde edeceğiz. Yalnız Bölüm 2'de incelenen lineer problemlerin çözümlerinden görülebileceği üzere ilk mertebeden problemlerin çözümleri ve bunlara bağlı olarak da yüksek mertebeden problemlerin çözümleri, lineer dalgaların faz hızları c 'nin (4.1-3) eşitsizliklerinden birinin sağlanmasına bağlı olarak farklı yapıda olacaklardır. Bu nedenle analizi ilk olarak (4.1) eşitsizliğinin sağlandığını kabul ederek devam ettireceğiz. Daha sonra da (4.2-3) eşitsizlikleri için de inceleme yapılacaktır.

4.2.1 $c_T < c_L < c$ için analiz

Bu halde birinci merteye problemlerin çözümlerini

$$u_1 = \hat{u}_1(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + u_1(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2), \quad (4.22a)$$

$$v_1 = \hat{v}_1(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + v_1(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) \quad (4.22b)$$

formlarında iki parçaya ayırılım. Burada; $\hat{u}_1$ ve $\hat{v}_1$ uzun dalgaları, u_1 ve v_1 fonksiyonları ise dalga modülasyonunu temsil eden çözümleri belirtmektedirler. Bu çalışmada simetrik dalgaların nonlinear modülasyonu ile ilgilendiğimiz için, birinci merteye problemin çözümünü bu çerçevede inşa edeceğiz. Dolayısıyla ilk merteye çözümde uzun dalgayı temsil eden çözüm parçaları özdeş olarak sıfır alınacaklardır;

$$\hat{u}_1 \equiv 0, \quad \hat{v}_1 \equiv 0. \quad (4.23)$$

Dalga modülasyonunu temsil eden çözümler ise, (4.7a,b) denklemlerinin (4.9a,b) simetri koşullarını sağlayan çözümleri değişkenlerin ayrılması yöntemi ile,

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_1^{(m)} \cos(mkp_L y_0) + p_T B_2^{(m)} \cos(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.24a)$$

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} i \left[p_L B_1^{(m)} \sin(mkp_L y_0) - B_2^{(m)} \sin(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.24b)$$

formlarında elde edilirler. Burada "c.c." sembolleri önceki terimlerin kompleks eşleniğini temsil etmektedirler. Ayrıca, k dalga sayısı, ω açısal frekans olmak üzere

$$\phi = kx_0 - \omega t_0 \quad (4.25)$$

ve simetrik dalgalar için (4.1) eşitsizliğinin sağlandığı durum incelendiğinden

$$p_T = \left(\frac{\omega^2}{k^2 c_T^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad p_L = \left(\frac{\omega^2}{k^2 c_L^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

olarak tanımlanmaktadırlar. Çözüm ifadelerindeki $B_i^{(m)}$ katsayı fonksiyonları da (x_1, x_2, t_1, t_2) yavaş değişkenlerine bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır ve birinci merteye problemin sınır koşulları kullanılarak belirleneceklerdir. Bu genlik fonksiyonlarını belirlemek için, (4.24a,b) ile verilen çözümler (4.8a,b) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_1^{(m)} = \left[B_1^{(m)} B_2^{(m)} \right]^T \quad (4.27)$$

ve

$$\mathbf{W}_m = \begin{bmatrix} -2mkp_L \sin(mkp_L h) & mk(1-p_T^2) \sin(mkp_T h) \\ ikm(c_L^2(p_L^2+1) - 2c_T^2) \cos(mkp_L h) & -2ikmp_T c_T^2 \cos(mkp_T h) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

olarak tanımlanmak üzere $\mathbf{U}_1^{(m)}$ vektörleri için

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_1^{(m)} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. (4.29) denklem sistemi $m = 1$ için incelenirse, sıfırdan farklı çözüm elde edebilmek için (4.28) ile tanımlanan $\mathbf{W}_1$ matrisi için

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (4.30)$$

eşitliğinin sağlanması gereklidir. (4.30) hesaplanırsa (2.31) dispersiyon bağıntısıyla aynı bağıntının elde edildiği görülür. Bundan dolayı $\mathbf{W}_1$ dispersiyon matrisi olarak adlandırılır.

Bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının self modülasyonunu incelediğimiz için yayılan simetrik dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıklarını kabul ediyoruz. Yani $m \geq 2$ için

$$\det \mathbf{W}_m \neq 0 \quad (4.31)$$

olduğunu varsayıyoruz. (4.31) koşulu altında (4.29) denkleminin çözümleri, $\mathbf{R}$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

denklemini sağlayan bir sütun vektör olmak üzere

$$m = 1, \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad (4.33)$$

ve

$$m \geq 2, \quad \mathbf{U}_1^{(m)} \equiv \mathbf{0} \quad (4.34)$$

olarak elde edilirler. Burada $\mathcal{A}_1$ dalga modülasyonunun yavaş değişkenlere bağlı birinci mertebe kompleks genlik fonksiyonudur. (4.32) denkleminin bir çözümü

$$R_{11} = \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9-m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2-1}\right) (1-p_T^2) \sin(khp_T)}{2k^2c_T^2p_L\sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)}\sin(khp_L)} \quad (4.35a)$$

$$R_{12} = \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9-m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2-1}\right)}{k^2c_T^2\sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)}} \quad (4.35b)$$

olmak üzere

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \end{bmatrix}^T \quad (4.36)$$

olarak yazılır. (4.33) ve (4.34) kullanılarak birinci mertebe çözümler için (4.24)'ten

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cos(k p_L y_0) + p_T R_{12} \cos(k p_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (4.37a)$$

$$v_1 = i \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [p_L R_{11} \sin(k p_L y_0) - R_{12} \sin(k p_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (4.37b)$$

olarak elde edilirler. Bu çözümlere bakılırsa, birinci mertebe çözümlerin tamamen belirlenebilmesi için $\mathcal{A}_1$ genlik fonksiyonunun hesaplanmasının yeterli olacağı görülür. Bu fonksiyonun (x_1, x_2, t_1, t_2) değişkenlerine bağıllığı daha yüksek mertebe pertürbasyon problemlerinden belirlenecektir.

Bu amaç için (4.37) ile verilen birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümleri, ikinci mertebe pertürbasyon probleminin (4.11a,b)'de verilen hareket denklemlerinde yerlerine konulup, nonlinear elastik sabitleri arasındaki

$$\eta_1 - \eta_2 = \eta_3 + 2\eta_4 \quad (4.38)$$

bağıntısı kullanılarak, bu denklemler aşağıdaki formlara indirgenirler;

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\beta_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \gamma_1^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \quad (4.39a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_2, v_2) = \alpha_2^{(2)} |\mathcal{A}_1|^2 + \left[\left(\beta_{21}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \beta_{22}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \gamma_2^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \right]. \quad (4.39b)$$

Bu denklemlerin sağ yanlarındaki $\alpha_2^{(2)}, \beta_{ij}^{(2)}$ ve $\gamma_i^{(2)}$ katsayı fonksiyonları y_0 değişkenine bağılırlar. Bu katsayı fonksiyonlarında parantez içerisindeki üst indis pertürbasyon probleminin mertebesini göstermektedir. $\alpha_2^{(2)}, \beta_{ij}^{(2)}$ ve $\gamma_i^{(2)}$ katsayı fonksiyonlarının açık yapıları aşağıda verilmektedir;

$$\alpha_2^{(2)} = 2k^3 \left\{ p_T R_{12} \left[H_1^{(2)} \sin(k p_L y_0) + H_2^{(2)} \sin(k p_T y_0) \right] \cos(k p_T y_0) + p_L R_{11} \left[H_3^{(2)} \sin(k p_L y_0) + H_4^{(2)} \sin(k p_T y_0) \right] \cos(k p_L y_0) \right\} \quad (4.40a)$$

$$\beta_{11}^{(2)} = ik \left\{ [2c_L^2 + (c_L^2 - c_T^2) p_L^2] R_{11} \cos(k p_L y_0) + (c_L^2 + c_T^2) p_T R_{12} \cos(k p_T y_0) \right\} \quad (4.40b)$$

$$\beta_{12}^{(2)} = 2i\omega \{ R_{11} \cos(k p_L y_0) + p_T R_{12} \cos(k p_T y_0) \} \quad (4.40c)$$

$$\beta_{21}^{(2)} = -k \{ [(c_L^2 - c_T^2) p_T^2 - 2c_T^2] R_{12} \sin(k p_T y_0) + (c_L^2 - c_T^2) p_L R_{11} \sin(k p_L y_0) \} \quad (4.40d)$$

$$\beta_{22}^{(2)} = 2\omega \{ R_{12} \sin(k p_T y_0) - p_L R_{11} \sin(k p_L y_0) \} \quad (4.40e)$$

$$\gamma_1^{(2)} = -ik^3 \left\{ X_{10}^{(2)} + X_{11}^{(2)} \cos(2k p_T y_0) + X_{12}^{(2)} \cos(2k p_L y_0) + X_{13}^{(2)} \cos(k p_T y_0) \cos(k p_L y_0) + X_{14}^{(2)} \sin(k p_T y_0) \sin(k p_L y_0) \right\} \quad (4.40f)$$

$$\gamma_2^{(2)} = k^3 \left\{ X_{21}^{(2)} \sin(2k p_T y_0) + X_{22}^{(2)} \sin(2k p_L y_0) + X_{23}^{(2)} \cos(k p_T y_0) \sin(k p_L y_0) + X_{24}^{(2)} \sin(k p_T y_0) \cos(k p_L y_0) \right\}. \quad (4.40g)$$

Bu bağıntılardaki $H_i^{(2)}$ ve $X_{ij}^{(2)}$ katsayıları lineer ve nonlinear malzeme sabitlerine, ω açısal frekansına ve k dalga sayısına bağlıdır. Bunların açık ifadeleri EK.A'da (A.1 – A.3) denklemleri ile verilmektedirler.

Şimdi ikinci merteye problemi çözmeye başlayalım. (4.39) denklemleri dikkatlice incelendiğinde sağ tarafta temel ve ikinci harmonikleri temsil eden terimlerin yanında, yani $e^{i\phi}$ ve $e^{2i\phi}$ 'li terimler, x_0, t_0 hızlı değişkenlerine bağlı olmayan terim bulunmaktadır. Bu terim, (4.39)'daki $\alpha_2^{(2)} |\mathcal{A}_1|^2$ terimidir. Bu terim uzun dalga yayılımı ile ilgili terimdir ve ikinci merteye problemdeki birinci merteye çözümlerin getirdiği kaynak terimini oluşturur. Bu durum şunu ifade etmektedir: Birinci merteye çözümlerde uzun dalga katkısının olmadığı varsayılsa bile, yani başlangıç uyarıları ve karakteristik dalga sayısı nonlinear self modülasyonu oluşturacak şekilde seçilse bile ikinci merteye çözümlerde nonlinear self modülasyon uzun dalgaların çıkmasına sebep olmaktadır. Bu kaynak terimine benzer terimin sınır koşullarında da ortaya çıkacağı açıktır. Bu nedenle birinci merteye problemde olduğu gibi ikinci merteye problemin çözümlerini de

$$u_2 = \widehat{u}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + u_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2), \quad (4.41a)$$

$$v_2 = \widehat{v}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + v_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) \quad (4.41b)$$

şeklinde iki parçaya ayırıyoruz. Burada; $\widehat{u}_2$ ve $\widehat{v}_2$ uzun dalgaları, u_2 ve v_2 fonksiyonları ise dalga modülasyonunu temsil eden çözümleri belirtmektedirler. Bu parçalama dikkate alınarak (4.41) ile verilen çözümler (4.39) denklemlerinde ve (4.12a,b) sınır koşullarında birinci merteye çözümlerle beraber kullanılırsa, $\widehat{u}_2$ ve $\widehat{v}_2$ fonksiyonlarının

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\widehat{u}_2, \widehat{v}_2) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(\widehat{u}_2, \widehat{v}_2) = \alpha_2^{(2)} |\mathcal{A}_1|^2 \quad (4.42a,b)$$

denklemlerinin aşağıdaki sınır koşullarını

$$y_0 = \pm h' de$$

$$c_T^2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y_0} = 0, \quad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} c_L^2 \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_0} = & -k^2 \left\{ P_1 + 2p_L R_{11} R_{12} (n_3 + 2n_4) (p_T^2 - 1) \sin(kh p_L) \sin(kh p_T) \right. \\ & - 4p_L^2 p_T R_{11} R_{12} (n_3 + 2n_4) \cos(kh p_L) \cos(kh p_T) \\ & \left. - \frac{H_2^{(2)}}{2} R_{12} \cos(2kh p_T) - H_3^{(2)} R_{11} \cos(2kh p_L) \right\} |\mathcal{A}_1|^2. \end{aligned} \quad (4.43b)$$

ve simetri koşullarını

$$\hat{u}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) = \hat{u}_2(x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_1, t_2), \quad (4.43c)$$

$$\hat{v}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) = -\hat{v}_2(x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_1, t_2) \quad (4.43d)$$

sağlayan çözümleri olabilecekleri ortaya çıkar. Bu çözümler (4.43c,d) simetri koşulları da göz önünde bulundurularak

$$\hat{u}_2 = D_1^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2), \quad (4.44a)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_2 = & -\frac{k^2}{c_L^2} P_1 y_0 |\mathcal{A}_1|^2 + \frac{k}{c_L^2} \left\{ \frac{R_{12} H_2^{(2)}}{4p_T} \sin(2k p_T y_0) + \frac{R_{11} H_3^{(2)}}{p_L} \sin(2k p_L y_0) \right. \\ & + \frac{2p_L p_T R_1 (n_3 + 2n_4) (1 + 2p_L^2 - p_T^2) R_{11} R_{12}}{(p_L^2 - p_T^2)} \cos(k p_T y_0) \sin(k p_L y_0) \\ & \left. - \frac{2p_L^2 R_1 (n_3 + 2n_4) (1 + p_T^2) R_{11} R_{12}}{(p_L^2 - p_T^2)} \cos(k p_L y_0) \sin(k p_T y_0) \right\} |\mathcal{A}_1|^2 \end{aligned} \quad (4.44b)$$

olarak elde edilirler. (4.43b) sınır koşulunda ve (4.44b) çözümünde görünen P_1 katsayısının açık hali aşağıda verilmektedir

$$P_1 = [\eta_2 + (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) p_L^2 + \eta_1 p_L^4] R_{11}^2 + \eta_4 (1 + p_T^2)^2 R_{12}^2. \quad (4.45)$$

Uzun dalga ile ilgili olarak yukarıda elde edilen çözümlerdeki $D_1^{(2)}$ fonksiyonu ikinci mertebe problem ile tam olarak belirlenmemektedir. Eğer bu fonksiyonun tam yapısı bulunmak istenirse, daha üst mertebe problemler yardımıyla elde edilebilir. Dikkat edilirse amacımız olan birinci mertebe uniform geçerli çözümlerin bulunması için bu fonksiyonun açık yapısına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Dalga modülasyonunu temsil eden u_2 ve v_2 çözümlerinin ise, (4.41) ile verilen toplamsal ayrıştırma, (4.39)'da verilen denklemlerde ve $\hat{u}_2$, $\hat{v}_2$ için bulunan (4.44a,b) çözümleri ile birlikte ikinci mertebe pertürbasyon probleminin (4.12a,b) ile verilen sınır koşullarında kullanılırsa aşağıdaki denklemleri

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\beta_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \gamma_1^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c., \quad (4.46a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\beta_{21}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \beta_{22}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \gamma_2^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c.. \quad (4.46b)$$

ve sınır koşulları

$$y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_0} + \frac{\partial v_2}{\partial x_0} \right) + \left\{ K_1^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 K_2^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\} = 0, \quad (4.47a)$$

$$c_L^2 \frac{\partial v_2}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \left\{ K_3^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 K_4^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\} = 0. \quad (4.47b)$$

ve simetri koşullarını

$$u_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) = u_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, t_0, t_1, t_2), \quad (4.47c)$$

$$v_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) = -v_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, t_0, t_1, t_2) \quad (4.47d)$$

sağlamaları gerektiği ortaya çıkar. Sınır koşullarında görülen $K_i^{(2)}$ katsayılarının açık yapıları EK A'da (A.4) ile verilmektedirler.

Şimdi u_2 ve v_2 için (4.46-47) ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümlerini bulacağız. Bunun için bu problemin çözümlerini de

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2, \quad v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2 \quad (4.48)$$

şeklinde iki parçaya ayıracağız. Burada, $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$ (4.46) denklemlerinin özel çözümleri; $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{v}_2$ 'ler ise

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) = 0 \quad (4.49)$$

homojen denklemleri ve (4.47)'de verilen sınır koşullarında (4.48) çözüm ayrıştırması kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümler olsunlar:

$$y_0 = \pm h' de$$

$$c_T^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_0} \right) = -c_T^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_0} \right) - \left\{ K_1^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 K_2^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\}, \quad (4.50a)$$

$$c_L^2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_0} = -c_L^2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y_0} - (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_0} - \left\{ K_3^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 K_4^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\}. \quad (4.50b)$$

(4.48) ile verilen çözüm ayrışımının da (4.47c,d) simetri koşullarını da sağlamaları gerektiğini belirttikten sonra (4.46)'da verilen homojen olmayan denklemlerin $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$ özel çözümlerini inşa etmeye başlayalım. Bu özel çözümleri belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak bulabiliriz. (4.46)'da verilen denklemlerin sağ yanlarındaki fonksiyonların yapıları göz önünde bulundurarak bu çözümleri aşağıdaki formlarda seçebiliriz;

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = & \left\{ C_1^{(2)} y_0 \cos(k p_L y_0) + i C_2^{(2)} y_0 \sin(k p_L y_0) + (p_T C_5^{(2)} y_0 + C_7^{(2)}) \cos(k p_T y_0) \right. \\ & + i (p_T C_6^{(2)} y_0 + C_8^{(2)}) \sin(k p_T y_0) \left. \right\} e^{i\phi} \\ & + \left\{ C_9^{(2)} + C_{10}^{(2)} y_0 \cos(2k p_L y_0) + i C_{11}^{(2)} y_0 \sin(2k p_L y_0) \right. \\ & + (p_T C_{14}^{(2)} y_0 + C_{16}^{(2)}) \cos(2k p_T y_0) + i (p_T C_{15}^{(2)} y_0 + C_{17}^{(2)}) \sin(2k p_T y_0) \\ & + C_{18}^{(2)} \cos(k(p_L + p_T)y_0) + C_{19}^{(2)} \sin(k(p_L + p_T)y_0) + C_{20}^{(2)} \cos(k(p_L - p_T)y_0) \\ & \left. + C_{21}^{(2)} \sin(k(p_L - p_T)y_0) \right\} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 = & \left\{ i (p_L C_1^{(2)} y_0 + C_3^{(2)}) \sin(k p_L y_0) + (p_L C_2^{(2)} y_0 + C_4^{(2)}) \cos(k p_L y_0) \right. \\ & - i C_5^{(2)} y_0 \sin(k p_T y_0) - C_6^{(2)} y_0 \cos(k p_T y_0) \left. \right\} e^{i\phi} \\ & + i (p_L C_{10}^{(2)} y_0 + C_{12}^{(2)}) \sin(2k p_L y_0) + (p_L C_{11}^{(2)} y_0 + C_{13}^{(2)}) \cos(2k p_L y_0) \\ & - i C_{14}^{(2)} y_0 \sin(2k p_T y_0) - C_{15}^{(2)} y_0 \cos(2k p_T y_0) + C_{22}^{(2)} \cos(k(p_L + p_T)y_0) \\ & + C_{23}^{(2)} \sin(k(p_L + p_T)y_0) + C_{24}^{(2)} \cos(k(p_L - p_T)y_0) \\ & \left. + C_{25}^{(2)} \sin(k(p_L - p_T)y_0) \right\} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (4.51b)$$

Burada $C_i^{(2)}$ 'ler ($i = 1, \dots, 25$) belirsiz katsayılarıdır. Bu çözüm formları (4.47a,b)'deki denklemlere yerleştirilir ve belirsiz katsayılar yönteminin kuralları yerine getirilirse ara işlemlerden sonra $C_i^{(2)}$ katsayıları elde edilirler. Bu katsayıların açık ifadeleri EK

A'da (A.5-6) ile verilmektedirler. Bu katsayılar dikkatlice incelendiğinde, (4.51a,b) özel çözümlerinin de (4.47c,d) simetri koşullarını sağlayacak şekilde elde edildikleri görülür.

Diğer taraftan, (4.49) homojen denklemlerinin $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{v}_2$ çözümleri de birinci mertebe problemde olduğu gibi (4.47c,d) simetri koşullarını da sağlatacak şekilde değişkenlerine ayrılması yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda elde edilirler;

$$\tilde{u}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[G_1^{(m)} \cos(mkp_L y_0) + p_T G_2^{(m)} \cos(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.52a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} i \left[p_L G_1^{(m)} \sin(mkp_L y_0) - G_2^{(m)} \sin(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. . \quad (4.52b)$$

Bu çözümlerde görünen $G_i^{(m)}$ 'ler ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar (4.50a,b) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaklardır. Şimdi ilk mertebe problemin çözümünde yaptığımız gibi dalga genliği fonksiyonlarını kullanarak

$$\mathbf{U}_2^{(m)} = \left[G_1^{(m)} G_2^{(m)} \right]^T \quad (4.53)$$

vektörünü tanımlayalım. (4.52)'de verilen çözüm formları (4.50a,b) sınır koşullarında kullanılırsa $\mathbf{U}_2^{(m)}$ 'ler için

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_2^{(m)} = \mathbf{b}_2^{(m)} \quad (4.54)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (4.54)'ün sağ tarafında tanımlanan vektörler için

$$\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b}_2^{(2)} \neq \mathbf{0} \text{ ve } m \geq 3, \mathbf{b}_2^{(m)} \equiv \mathbf{0} \quad (4.55)$$

bağıntıları sağlanır. $m = 1$ için, $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğu için (4.54) homojen olmayan cebrik denklem sisteminin $m = 1$ için bir çözüme sahip olabilmesi için $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

denklemini ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

olması gerekir. (4.56) denkleminin bir çözüm vektörü

$$L_1 = \frac{ic_T^2 k^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} (1-p_T^2) \sin(khp_T)}{2p_L \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9-m^2}\omega \right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2-1}\omega \right) \sin(khp_L)} \quad (4.58a)$$

$$L_2 = \frac{k^2 m^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} (1-p_T^2) \sin(kh p_T)}{(p_L^2 - 2m^2 + 1) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9-m^2}\omega\right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2-1}\omega\right) \cos(kh p_L)} \quad (4.58b)$$

olmak üzere

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

şeklinde hesaplanır. Diğer taraftan $\mathbf{b}_2^{(1)}$ vektörü de gerekli ara işlemlerden sonra aşağıdaki formda yazılabilir;

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R}. \quad (4.60)$$

Bu bağıntıya ek olarak, (4.32) denklemi k 'ya göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.62)$$

olarak tanımlanmaktadır, yani dalgaların grup hızlarını göstermektedir. (4.61)

denklemini soldan $\mathbf{L}$ vektörü ile çarpılıp (4.56) dikkate alınır

$$V_g = - \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right) / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \quad (4.63)$$

olduğu ortaya çıkar. Bu bağıntı dikkate alınır ve (4.60) kullanılırsa (4.57)'de verilen uygunluk koşulundan genlik modülasyonunu temsil eden $\mathcal{A}_1$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (4.64)$$

denklemini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. Bu denklem $\mathcal{A}_1$ 'in V_g grup hızıyla ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kalacağını gösterir. Yani $\mathcal{A}_1$ fonksiyonu

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (4.65)$$

yapısında olacaktır. $m = 1$ için (4.54) denkleminin çözümü ise, (4.61) ve (4.64) sonuçları da kullanılarak

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2(x_1, t_1, x_2, t_2) \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (4.66)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathcal{A}_2$ fonksiyonu dalga modülasyonunun ikinci mertebe yavaş değişen genliğini temsil etmektedir. Gerektiği takdirde daha üst mertebe pertürbasyon

problemlerinin çözümleri kullanılarak elde edilebilir. Fakat bizim çalışmamızda sonlu ama küçük genlikli dalga yayılımı ile ilgilenildiğinden yalnızca birinci mertebe unifom çözüm elde edilmeye çalışılmaktadır. Daha önceden de belirtildiği gibi bu amaç için sadece $\mathcal{A}_1$ 'in tam formunun elde edilmesi yeterlidir.

$m = 2$ için $\det \mathbf{W}_2 \neq 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(2)} \neq 0$ olduğundan, $m = 2$ için (4.54) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(2)} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{b}_2^{(2)} = \mathcal{A}_1^2 \mathbf{h} \quad (4.67)$$

olarak yazılır.

Bağıntının sağ tarafında görünen $\mathbf{h}$ sabit bir vektördür ve elemanları

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T \quad (4.68)$$

olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{h}$ vektörünün açık ifadesi EK A'da (A.7) ile verilmektedir.

$m \geq 3$ için (4.54) denklem sisteminin çözümleri, $m \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_m \neq 0$ olduğu kabul edildiği için ve $m \neq 1, 2$ için $\mathbf{b}_2^{(m)} \equiv \mathbf{0}$ olduğundan

$$\mathbf{U}_2^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \geq 3 \quad (4.69)$$

dır.

Böylece birinci ve ikinci mertebe çözümler tamamlanmış oldu, fakat bu aşamada $\mathcal{A}_1$ genlik fonksiyonunun yalnızca x_1 ve t_1 'e bağlılığı belirlendi. Diğer değişkenlere bağlılığını da belirlemek için üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Bu amaçla, (4.37)'de verilen birinci mertebe çözümlerle, (4.41) ve (4.48) toplamsal çözüm ayrıştırmaları ile tanımlanan (4.44), (4.51) ve (4.52)'de verilen ikinci mertebe çözümler, üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (4.16) ile verilen hareket denklemlerinde kullanılırsa, gerekli ara işlemler yapılarak bu denklemler aşağıdaki formlara indirgenirler;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(3)}(u_3, v_3) = & \alpha_1^{(3)} + \left[\beta_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \beta_{12}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \beta_{13}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\ & + \beta_{14}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) + \beta_{15}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \beta_{16}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \left. \right] e^{i\phi} \\ & + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.70a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{(3)}(u_3, v_3) = & \alpha_2^{(3)} + \left[\beta_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \beta_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \beta_{23}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\
& + \beta_{24}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) + \beta_{25}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \beta_{26}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \left. \right] e^{i\phi} \\
& + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right). \tag{4.70b}
\end{aligned}$$

Bu denklemlerdeki $\alpha_i^{(3)}$ ve $\beta_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(3)} = & T_1^{(3)} + T_2^{(3)} \cos(2kp_L y_0) + T_3^{(3)} \cos(2kp_T y_0) + T_4^{(3)} \cos(k(p_L - p_T)y_0) \\
& + T_5^{(3)} \cos(k(p_L + p_T)y_0) + y_0 \left[T_6^{(3)} \sin(k(p_L - p_T)y_0) + T_7^{(3)} \sin(k(p_L + p_T)y_0) \right] \tag{4.71a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(3)} = & T_8^{(2)} \sin(2kp_L y_0) + T_9^{(2)} \sin(2kp_T y_0) + y_0 \left[T_{10}^{(2)} \cos(2kp_L y_0) + T_{11}^{(2)} \cos(2kp_T y_0) \right. \\
& T_{12}^{(2)} \sin(k(p_L - p_T)y_0) + T_{13}^{(2)} \sin(k(p_L + p_T)y_0) + y_0 \left[T_{14}^{(2)} \cos(k(p_L - p_T)y_0) \right. \\
& \left. \left. + T_{15}^{(2)} \cos(k(p_L + p_T)y_0) \right] \right] \tag{4.71b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{1i}^{(3)} = & X_{i1}^{(3)} \cos(kp_L y_0) + X_{i2}^{(3)} \cos(kp_T y_0) + X_{i3}^{(3)} y_0 \sin(kp_L y_0) \\
& + X_{i4}^{(3)} y_0 \sin(kp_T y_0), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.71c}
\end{aligned}$$

$$\beta_{1j}^{(3)} = X_{j1}^{(3)} \cos(kp_L y_0) + X_{j2}^{(3)} \cos(kp_T y_0), \quad (j = 4, 5) \tag{4.71d}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{16}^{(3)} = & X_{61}^{(3)} \cos(kp_L y_0) + X_{62}^{(3)} \cos(kp_T y_0) + X_{63}^{(3)} y_0 \sin(kp_L y_0) \\
& + X_{64}^{(3)} \cos(k(2p_L - p_T)y_0) + X_{65}^{(3)} \cos(k(2p_L + p_T)y_0) \\
& + X_{66}^{(3)} \cos(k(p_L + 2p_T)y_0) + X_{67}^{(3)} \cos(k(p_L - 2p_T)y_0) + X_{68}^{(3)} y_0 \sin(k(2p_L + p_T)y_0) \\
& + X_{69}^{(3)} y_0 \sin(k(2p_L - p_T)y_0) + X_{610}^{(3)} \cos(3kp_L y_0) + X_{611}^{(3)} \cos(3kp_T y_0) \\
& + y_0 X_{612}^{(3)} \sin(3kp_L y_0) \tag{4.71e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{2i}^{(3)} = & Y_{i1}^{(3)} y_0 \cos(kp_L y_0) + Y_{i2}^{(3)} y_0 \cos(kp_T y_0) + Y_{i3}^{(3)} \sin(kp_L y_0) \\
& + Y_{i4}^{(3)} \sin(kp_T y_0), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.71f}
\end{aligned}$$

$$\beta_{2j}^{(3)} = Y_{j1}^{(3)} \sin(kp_L y_0) + Y_{j2}^{(3)} \sin(kp_T y_0), \quad (j = 4, 5) \tag{4.71g}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{26}^{(3)} = & Y_{61}^{(3)} y_0 \cos(kp_L y_0) + Y_{62}^{(3)} \sin(kp_L y_0) \\
& + Y_{63}^{(3)} \sin(kp_T y_0) + Y_{64}^{(3)} \sin(k(2p_L - p_T)y_0) + Y_{65}^{(3)} \sin(k(2p_L + p_T)y_0) \\
& + Y_{66}^{(3)} \sin(k(p_L + 2p_T)y_0) + Y_{67}^{(3)} \sin(k(p_L - 2p_T)y_0) + Y_{68}^{(3)} y_0 \cos(k(2p_L + p_T)y_0) \\
& + Y_{69}^{(3)} y_0 \cos(k(2p_L - p_T)y_0) + Y_{610}^{(3)} \sin(3kp_L y_0) + Y_{611}^{(3)} \sin(3kp_T y_0) \\
& + Y_{612}^{(3)} y_0 \cos(3kp_L y_0) \tag{4.71h}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu bağıntılardaki $T_i^{(3)}, X_{ij}^{(3)}$ ve $Y_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonlarının açık ifadeleri de EK B'de (B.1-3) ile verilmektedirler. Bunlar lineer ve nonlinear malzeme sabitlerine ve k dalga sayısına bağlıdır. Dikkat edilirse, üçüncü mertebe probleme ait (4.70) denklemleri de, ikinci mertebe problemdeki gibi sağ yanlarında dalga modülasyonu ile ilgili terimler yanında, uzun dalga ile ilgili terimlerini de barındırdıkları için bu denklemlerin çözümlerini de, ikinci mertebe problemde olduğu gibi

$$u_3 = \hat{u}_3(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + u_3(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2), \quad (4.72a)$$

$$v_3 = \hat{v}_3(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) + v_3(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) \quad (4.72b)$$

formlarında iki parçaya ayırıyoruz. Bu çözümlerde $\hat{u}_3$ ve $\hat{v}_3$ fonksiyonları uzun dalgaları; u_3 ve v_3 fonksiyonları ise dalga modülasyonunun temsil etmektedirler. Bu toplumsal ayrıştırma, (4.70) denklemlerinde ve üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (4.17) ile verilen sınır koşullarında kullanılırsa $\hat{u}_3$ ve $\hat{v}_3$ uzun dalga fonksiyonlarının

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) = \alpha_1^{(3)}, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(\hat{u}_3, \hat{v}_3) = \alpha_2^{(3)} \quad (4.73a,b)$$

denklemlerinin ve

$$y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial y_0} = B_{01}^{(3)} - c_T^2 \frac{\partial D_1^{(2)}}{\partial y_1}, \quad c_L^2 \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_0} = B_{02}^{(3)} + (2c_T^2 - c_L^2) \frac{\partial D_1^{(2)}}{\partial x_1} \quad (4.74a,b)$$

sınır koşullarını sağlayan çözümleri olacakları ortaya çıkar. Sınır koşullarında görünen $B_{0i}^{(3)}$ katsayılarının açık yapıları EK B'de (B.6) ile verilmektedirler. Bu sınır değer probleminin çözümleri (4.18) simetri koşulları altında şu formlarda elde edilirler;

$$\begin{aligned} \hat{u}_3 = D_1^{(3)} - \frac{1}{c_T^2 k^2} & \left\{ \frac{T_1^{(3)}}{2} y_0^2 - \frac{T_2^{(3)} \cos(2k p_L y_0)}{4 p_L^2} - \frac{T_3^{(3)} \cos(2k p_T y_0)}{4 p_T^2} \right. \\ & - \frac{1}{(p_L - p_T)^2} \left[T_4^{(3)} + \frac{2T_6^{(3)}}{c_T k (p_L - p_T)} \right] \cos(k(p_L - p_T) y_0) \\ & - \frac{1}{(p_L + p_T)^2} \left[T_5^{(3)} + \frac{2T_7^{(3)}}{c_T k (p_L + p_T)} \right] \cos(k(p_L + p_T) y_0) \\ & \left. - \frac{T_6^{(3)} y_0}{(p_L - p_T)^2} \sin(k(p_L - p_T) y_0) - \frac{2T_7^{(3)} y_0}{(p_L + p_T)^2} \sin(k(p_L + p_T) y_0) \right\}, \quad (4.75a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}_3 = & -\frac{1}{4c_L^2 k^2} \left\{ \frac{(T_{11}^{(3)} - kp_T T_9^{(3)}) \sin(2kp_T y_0)}{kp_T^3} - \frac{(T_{10}^{(3)} - kp_L T_8^{(3)}) \sin(2kp_L y_0)}{kp_L^3} \right. \\
& - \frac{T_{10}^{(3)} y_0 \cos(2kp_L y_0)}{p_L^2} - \frac{T_{11}^{(3)} y_0 \cos(2kp_T y_0)}{p_T^2} - \frac{4T_{14}^{(3)} y_0 \cos(k(p_L - p_T) y_0)}{(p_L - p_T)^2} \\
& + \frac{4(kT_{12}^{(3)}(p_T - p_L) + 2T_{14}^{(3)}) \sin(k(p_L - p_T) y_0)}{k(p_L - p_T)^3} - \frac{4T_{15}^{(3)} y_0 \cos(k(p_L + p_T) y_0)}{(p_L + p_T)^2} \\
& \left. + \frac{4(kT_{13}^{(3)}(p_T + p_L) - 2T_{15}^{(3)}) \sin(k(p_L + p_T) y_0)}{k(p_L + p_T)^3} \right\} + D_2^{(3)} y_0 \quad (4.75b)
\end{aligned}$$

Bu çözümlerdeki $D_i^{(3)}$ katsayı fonksiyonları ikinci mertebe problemde olduğu gibi $(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2)$ yavaş değişkenlerine bağlıdır. Amacımız olan birinci mertebe uniform geçerli çözümün inşası için bu katsayı fonksiyonlarının açık ifadelerine gerek olmamasına rağmen bu katsayılar için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$D_2^{(3)}$ fonksiyonu; (4.75b) çözümü (4.74b) sınır koşulunda kullanılırsa,

$$D_2^{(3)} = \frac{1}{c_T^2} \left\{ (2c_T^2 - c_L^2) \frac{\partial D_1^{(2)}}{\partial x_1} + B_{02}^{(3)} - K_2^{(3)} \right\} \quad (4.76)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan, bu bağıntıyı sağlayan katsayı fonksiyonunun ve $D_1^{(3)}$ fonksiyonunun formunu tam olarak belirleyebilmek için ise daha yüksek mertebeden problem incelenmelidir. Ayrıca, ikinci mertebe problemde tam olarak belirlenemeyen uzun dalga çözümlerinde görülen yavaş değişkenlere bağlı $D_1^{(2)}$ katsayı fonksiyonunun, (4.75a) çözümünün (4.74a) sınır koşulunda yerine konulmasıyla elde edilen aşağıdaki denklemi sağlaması gerektiği ortaya çıkar;

$$y_1 = 0 \text{ da, } c_T^2 \frac{\partial D_1^{(2)}}{\partial y_1} = B_{01}^{(3)} - K_1^{(3)}. \quad (4.77)$$

Bu denklemlerde tanımlanan $K_i^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri EK B'de (B.8) ile verilmektedirler. Diğer taraftan (4.77) denklemi tek başına $D_1^{(2)}$ fonksiyonunun yapısını tam olarak belirlemek için yeterli değildir. Bu fonksiyonu yapısını tam olarak belirleyebilmek için, analize dördüncü ve daha yüksek mertebe pertürbasyon problemiyle devam edilmelidir. Fakat amacımız birinci mertebe uniform geçerli çözümü elde etmek olduğu için, uzun dalga çözümlerine ait analizi burada noktalayalım ve amacımızın dışında olması nedeniyle, diğer faz hızı eşitsizliklerinin

sağlandığı durumlar için uzun dalgalara ait analizin yeniden yapılmayacağını belirtelim.

Şimdi üçüncü mertebe problemde u_3 ve v_3 çözümleri için analizi devam ettirelim. (4.72) ile verilen toplamsal ayrıştırma (4.70)'te verilen denklemlerde $\hat{u}_3$ ve $\hat{v}_3$ için elde edilen (4.75) çözümleri ile birlikte üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (4.17) ile verilen sınır koşullarıyla birlikte kullanılırsa aşağıdaki denklemler;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(3)}(u_3, v_3) = & \left[\beta_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \beta_{12}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \beta_{13}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \beta_{14}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) \right. \\ & \left. + \beta_{15}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \beta_{16}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.78a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{(3)}(u_3, v_3) = & \left[\beta_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \beta_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \beta_{23}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \beta_{24}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) \right. \\ & \left. + \beta_{25}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \beta_{26}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right) \end{aligned} \quad (4.78b)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y_0} + \frac{\partial v_3}{\partial x_0} \right) = & \left[Z_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + Z_{12}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + Z_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.79a)$$

$$\begin{aligned} c_T^2 \frac{\partial v_3}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = & \left[Z_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + Z_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + Z_{23}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right) \end{aligned} \quad (4.79b)$$

elde edilirler. Yukarıda sınır koşullarında $e^{\pm 2i\phi}$ ve $e^{\pm 3i\phi}$ terimlerinin katsayıları self modülasyon incelemesinde hesaplamaya bir katkıda bulunmayacakları için açık ifadeleri verilmeyecektir. $e^{i\phi}$ 'nin katsayı fonksiyonlarının açık yapıları ise EK B'de (B.9-10) ile verilmektedirler. Şimdi u_3 ve v_3 için (4.78-79) ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümlerini bulalım. Bu amaç için, ikinci mertebe çözümleri elde ederken yaptığımız gibi u_3 ve v_3 çözümlerini

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3, \quad v_3 = \bar{v}_3 + \tilde{v}_3 \quad (4.80a,b)$$

formlarında iki parçaya ayıracağız. Burada, $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$ (4.78a,b) denklemlerinin özel çözümlerini; $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ 'ler ise

$$\mathcal{L}_1^{(3)}(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(3)}(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3) = 0 \quad (4.81a,b)$$

homojen denklemlerinin (4.79a,b)'de verilen sınır koşullarında (4.80a,b)'de verilen toplamsal çözüm ayrışımı kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar;

$$y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_0} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_0} \right) = -c_T^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_0} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_0} \right) \\ + \left[Z_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + Z_{12}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + Z_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} \\ + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \quad (4.82a)$$

$$c_T^2 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_0} = -c_T^2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_0} - (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_0} \\ + \left[Z_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + Z_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + Z_{23}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} \\ + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right). \quad (4.82b)$$

İlk olarak, (4.78)'de verilen homojen olmayan denklemlerin $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$ özel çözümlerini inşa edeceğiz. Bu çözümler de ikinci mertebe problemdeki gibi belirsiz katsayılar yöntemi ile bulunabilirler. (4.78)'deki denklemlerin sağ tarafındaki fonksiyonların yapıları dikkate alınarak aşağıdaki gibi parçalara ayırabiliriz;

$$\bar{u}_3 = \sum_{l=1}^3 e_l^{(3)}(x_1, x_2, y_0, t_1, t_2) e^{il\phi} + c.c., \quad (4.83a)$$

$$\bar{v}_3 = \sum_{l=1}^3 f_l^{(3)}(x_1, x_2, y_0, t_1, t_2) e^{il\phi} + c.c. \quad (4.83b)$$

Bu toplamlardaki fonksiyonlar superpozisyon ilkesince hesaplanabilirler. $l = 1$ için $e_1^{(3)}$ ve $f_1^{(3)}$, denklemlerin sağ taraflarındaki $e^{i\phi}$ 'nin katsayı fonksiyonlarının yapıları dikkate alınarak şu formlarda seçilebilirler;

$$e_1^{(3)} = \left\{ \left(C_1^{(3)} + C_2^{(3)} y_0 \right) y_0 \cos(k p_L y_0) + i \left(C_3^{(3)} + C_4^{(3)} y_0 \right) y_0 \sin(k p_L y_0) \right. \\ + \left[p_T \left(C_9^{(3)} + C_{10}^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_{13}^{(3)} + C_{14}^{(3)} y_0 \right) \right] \cos(k p_T y_0) \\ + i \left[p_T \left(C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_{15}^{(3)} + C_{16}^{(3)} y_0 \right) \right] \sin(k p_T y_0) \\ + C_{17}^{(3)} \cos(k (p_L + 2p_T) y_0) + C_{18}^{(3)} \sin(k (p_L + 2p_T) y_0) + C_{19}^{(3)} \cos(k (p_L - 2p_T) y_0) \\ + C_{20}^{(3)} \sin(k (p_L - 2p_T) y_0) + \left(C_{21}^{(3)} + C_{22}^{(3)} y_0 \right) \cos(k (2p_L + p_T) y_0) \\ \left. + \left(C_{23}^{(3)} + C_{24}^{(3)} y_0 \right) \sin(k (2p_L + p_T) y_0) + \left(C_{25}^{(3)} + C_{26}^{(3)} y_0 \right) \cos(k (2p_L - p_T) y_0) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(C_{27}^{(3)} + C_{28}^{(3)} y_0 \right) \sin(k(2p_L - p_T)y_0) + \left(C_{29}^{(3)} + C_{30}^{(3)} y_0 \right) \cos(3kp_L y_0) \\
& + \left(C_{31}^{(3)} + C_{32}^{(3)} y_0 \right) \sin(3kp_L y_0) + \left(C_{33}^{(3)} + C_{34}^{(3)} y_0 \right) \cos(3kp_T y_0) \\
& + \left(C_{35}^{(3)} + C_{36}^{(3)} y_0 \right) \sin(3kp_T y_0) + c.c. \} \quad (4.84a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1^{(3)} = & \left\{ i \left[p_L \left(C_1^{(3)} + C_2^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_7^{(3)} + C_8^{(3)} y_0 \right) \right] \sin(kp_L y_0) \right. \\
& + \left[p_L \left(C_3^{(3)} + C_4^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_5^{(3)} + C_6^{(3)} y_0 \right) \right] \cos(kp_L y_0) \\
& - i \left(C_9^{(3)} + C_{10}^{(3)} y_0 \right) y_0 \sin(kp_T y_0) - \left(C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} y_0 \right) y_0 \cos(kp_T y_0) \\
& + C_{37}^{(3)} \cos(k(p_L + 2p_T)y_0) + C_{38}^{(3)} \sin(k(p_L + 2p_T)y_0) + C_{39}^{(3)} \cos(k(p_L - 2p_T)y_0) \\
& + C_{40}^{(3)} \sin(k(p_L - 2p_T)y_0) + \left(C_{41}^{(3)} + C_{42}^{(3)} y_0 \right) \cos(k(2p_L + p_T)y_0) \\
& + \left(C_{43}^{(3)} + C_{44}^{(3)} y_0 \right) \sin(k(2p_L + p_T)y_0) + \left(C_{45}^{(3)} + C_{46}^{(3)} y_0 \right) \cos(k(2p_L - p_T)y_0) \\
& + \left(C_{47}^{(3)} + C_{48}^{(3)} y_0 \right) \sin(k(2p_L - p_T)y_0) + \left(C_{49}^{(3)} + C_{50}^{(3)} y_0 \right) \cos(3kp_L y_0) \\
& + \left(C_{51}^{(3)} + C_{52}^{(3)} y_0 \right) \sin(3kp_L y_0) + \left(C_{53}^{(3)} + C_{54}^{(3)} y_0 \right) \cos(3kp_T y_0) \\
& \left. + \left(C_{55}^{(3)} + C_{56}^{(3)} y_0 \right) \sin(3kp_T y_0) + c.c. \right\} \quad (4.84b)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde görülen $C_i^{(3)}$ 'ler belirsiz katsayılardır. Bu çözüm formları (4.78)'deki denklemlerde yerleştirilir ve belirsiz katsayılar yönteminin kuralları uygulanırsa gerekli ara işlemlerden sonra $C_i^{(3)}$ 'ler elde edilirler. Bunların açık ifadeleri EK B'de (B.12) ile verilmektedirler. $m = 2$ ve $m = 3$ için de benzer şekilde hareket edilerek $e_2^{(3)}$, $f_2^{(3)}$ ve $e_3^{(3)}$, $f_3^{(3)}$ fonksiyonları da hesaplanabilirler. Fakat ileride görüleceği üzere birinci mertebe uniform geçerli çözümler inşa edilirken bu çözüm parçalarına ihtiyaç duyulmayacağından hesaplanmayacaklardır.

Diğer taraftan (4.81a,b)'deki homojen denklemlerin $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ çözümleri de birinci ve ikinci mertebe problemlerde yapıldığı gibi değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak ve (4.18) simetri koşulları da dikkate alınarak aşağıdaki formlarda elde edilirler;

$$\tilde{u}_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[L_1^{(m)} \cos(mkp_L y_0) + p_T L_2^{(m)} \cos(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.85a)$$

$$\tilde{v}_3 = \sum_{m=1}^{\infty} i \left[p_L L_1^{(m)} \sin(mkp_L y_0) - L_2^{(m)} \sin(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.85b)$$

Bu çözümlerde görünen $L_i^{(m)}$ 'ler üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar (4.82a,b) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaklardır. Şimdi

birinci ve ikinci merteye problemlerin çözümlerinde yaptığımız gibi dalga genliği fonksiyonlarını kullanarak

$$\mathbf{U}_3^{(m)} = \left[L_1^{(m)} L_2^{(m)} \right]^T \quad (4.86)$$

genlik vektörlerini tanımlayalım. (4.85)'te verilen çözümler (4.82a,b) sınır koşullarında kullanılırsa $\mathbf{U}_3^{(m)}$ 'ler için aşağıdaki cebrik denklem sistemi elde edilir;

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_3^{(m)} = \mathbf{b}_3^{(m)}. \quad (4.87)$$

Sağ tarafta tanımlanan vektörler için

$$\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_3^{(2)} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_3^{(3)} \neq \mathbf{0} \quad (4.88a)$$

ve

$$\mathbf{b}_3^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \geq 4 \quad (4.88b)$$

dır. Bu nedenle, $m \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_m \neq 0$ varsayımı hatırlanırsa $m \geq 2$ için (4.87) sisteminin çözümleri

$$\mathbf{U}_3^{(2)} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{b}_3^{(2)}, \quad \mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1} \mathbf{b}_3^{(3)} \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_3^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \geq 4 \quad (4.89)$$

olarak elde edilirler. Diğer taraftan $m = 1$ için $\det \mathbf{W}_m = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, bu durumda (4.87) sisteminin bir çözüme sahip olabilmesi için, $\mathbf{L}$, (4.59) ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_3^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.90)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Diğer taraftan, ara işlemlerden sonra $\mathbf{b}_3^{(1)}$ vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} = & -i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{R} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_s \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \end{aligned} \quad (4.91)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\mathbf{F}$ iki bileşenli ve bileşenleri lineer, nonlineer malzeme parametrelerine ve dalga sayısına bağlı olan bir sütun vektördür. Bu vektörlerin bileşenleri EK B'de (B.14) ile verilmektedirler.

(4.90) uygunluk denkleminde (4.61) ve (4.62) bağıntıları kullanılırsa

$$i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0 \quad (4.92)$$

bağıntısı elde edilir. Burada, $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\tilde{\Gamma} = - \left[\frac{1}{2} \mathbf{L} \left(V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + 2V_g \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \right) \mathbf{R} \right. \\ \left. + \mathbf{L} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \right] / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right), \quad (4.93a)$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right). \quad (4.93b)$$

Bu bağıntılar incelenirse, $\tilde{\Gamma}$, tabakayı oluşturan malzemenin lineer özelliklerine ve k dalga sayısına bağlı iken; $\tilde{\Delta}$, bunlara ek olarak tabakayı oluşturan malzemenin nonlineer özelliklerine de bağlıdır. Ayrıca, (4.32) denklemi, k 'ya göre iki defa kapalı türetilip, sonuç denklem soldan $\mathbf{L}$ vektörü ile çarpılıp, elde edilen bağıntı (4.93a) ile karşılaştırıldığında

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \quad (4.94)$$

olduğu ortaya çıkar.

Eğer $\mathcal{A}_2$ fonksiyonu bir şekilde belirlenirse (4.92) denklemi $\mathcal{A}_1$ 'in hesaplanabilmesi için kullanılabilir. Böylece, amacımız olan birinci mertebe uniform geçerli çözümün tam olarak bulunması tamamlanabilir. (4.92) denkleminde $\mathcal{A}_2$ 'yi içeren terimler incelendiğinde görülür ki, eğer $\mathcal{A}_2$ 'nin x_1 ve t_1 değişkenlerine bağıllığı $\mathcal{A}_1$ 'in bu değişkenlere bağıllığı gibi kabul edilirse, yani $\mathcal{A}_2$ 'nin

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (4.95)$$

yapısında olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} = 0 \quad (4.96)$$

olacaktır. (4.96) koşulu altında, (4.92) denklemi sadece $\mathcal{A}_1$ için bir denkleme dönüşür;

$$i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0. \quad (4.97)$$

Aşağıdaki boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlanarak

$$\tau = \omega t_2 = \omega \varepsilon t_1 = \omega \varepsilon^2 t \\ \xi = k \varepsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k (x_1 - V_g t_1) = \varepsilon k (x - V_g t) \\ \mathcal{A} = k \mathcal{A}_1, \quad \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta} / \omega k^2 \quad (4.98)$$

(4.97) denklemini

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 \quad (4.99)$$

formunda yazılabilir. (4.99) denklemini bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemdir ve bir çok değişik alanda nonlinear dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir [2, 31, 32, 42].

(4.99) denkleminin verilen bir

$$\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi) \quad (4.100)$$

başlangıç koşulu için çözümü bulunursa birinci mertebe çözümler, (4.37a,b) bağıntıları kullanılarak elde edilirler. Buradaki $\mathcal{A}_0(\xi)$ başlangıç değeri de tabakadaki yerdeğiştirmelerin başlangıç değerlerine bağlıdır. Örneğin $Y = h$ yüzeyi üzerinde (4.37a,b) çözümlerinden

$$u_1(X, h, 0) = \frac{\varepsilon}{k} [R_1 \cos(k p_L h) + p_T \cos(k p_T h)] \mathcal{A}_0(\varepsilon k X) e^{ikX} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.101a)$$

$$v_1(X, h, 0) = i \frac{\varepsilon}{k} [p_L R_1 \sin(k p_L h) - \sin(k p_T h)] \mathcal{A}_0(\varepsilon k X) e^{ikX} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.101b)$$

yazılabilir.

Bölümün başında da ifade ettiğimiz gibi hedefimiz, ele aldığımız problemin birinci mertebe uniform geçerli çözümünü inşa etmektir. Yukarıdaki sonuçlar bunun, (4.100)'de verilen NLS denkleminin çözümünü bulma problemine dönüştürülebileceğini göstermektedir. Daha yüksek mertebeden uniform geçerli çözümler inşa edilmek istendiğinde, üçüncü mertebeden daha yüksek pertürbasyon problemlerinin çözümleri elde edilerek, (4.90) gibi uygunluk koşulları kullanılarak $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$ genlik fonksiyonlarının ve uzun dalgaları temsil eden $D_1^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, \dots$ fonksiyonlarının hesaplanabileceği denklemler türetilir.

Bazı kritik dalga sayıları için, elde ettiğimiz birinci mertebe çözüm uniform geçerliliğini kaybedebilir. Örneğin, bir k_c dalga sayısında temel dalganın ($m = 1$) faz hızı, bunun ikinci harmoniğinin (en genel halde j . harmoniğinin) faz hızı aynı ise böyle bir durumda $\omega_c = \omega(k_c)$ olmak üzere; (k_c, ω_c) ve $(2k_c, 2\omega_c)$ çiftleri aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlayacaktır. Yani, (k_c, ω_c) için hem

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (4.102a)$$

hem de

$$\det \mathbf{W}_2 = 0 \quad (4.102b)$$

olacaktır. Bu olaya ikinci harmonik rezonans adı verilir. Bu durumda (4.67)'den $k \rightarrow k_c$ için $\mathbf{U}_2^{(2)}$ 'nin sınırsız olarak büyüyeceği görülür. Dolayısıyla, $\varepsilon^2 \mathbf{U}_2$, $\varepsilon \mathbf{U}_1$ 'den daha baskın olur. Böyle bir durumda (4.5) asimptotik açılımları uniform olarak geçerli olmayacaklardır. Yani, dalga katarının merkezlendiği k dalga sayısı, $k \rightarrow k_c$ 'ye çok yakın olduğunda elde ettiğimiz birinci mertebe çözüm uniform geçerli olmayacaktır. Böyle bir kritik dalga sayısı civarında $\det \mathbf{W}_2 = 0$ olacağı için birinci mertebe çözümde $\mathbf{U}_1^{(1)}$ 'den başka $\mathbf{U}_1^{(2)}$ de sıfırdan farklı olacaktır. Yani, böyle bir dalga sayısı civarında birinci mertebe çözüm, eğer $m \neq 1, 2$ için $\det \mathbf{W}_m \neq 0$ ise,

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1^{(1)} \mathbf{R}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_1^{(2)} = \mathcal{A}_1^{(2)} \mathbf{R}^{(2)}, \quad \mathbf{U}_1^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \neq 1, 2 \quad (4.103)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{R}^{(1)}$ ve $\mathbf{R}^{(2)}$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_2 \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (4.104)$$

denklemlerini sağlayan sütun vektörleri, $\mathcal{A}_1^{(1)}$ ve $\mathcal{A}_1^{(2)}$ de sırasıyla temel dalganın ve ikinci harmoniğinin genlik fonksiyonlarıdır.

Bu durumu genelleştirmek istediğimizde; kritik dalga k_c ve ona karşı gelen $\omega_c = \omega(k_c)$ için hem

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (4.105a)$$

hem de

$$\det \mathbf{W}_j = 0 \quad (4.105b)$$

dir. Bu durumda, bu dalga sayısı civarında merkezlenmiş temel mod ile onun j . harmoniği arasında j . harmonik rezonans oluşur. Bu durumda birinci mertebe çözüm (4.29)'dan

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1^{(1)} \mathbf{R}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_1^{(j)} = \mathcal{A}_1^{(j)} \mathbf{R}^{(j)}, \quad \mathbf{U}_1^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \neq 1, j \quad (4.106)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{R}^{(j)}$,

$$\mathbf{W}_j \mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{0} \quad (4.107)$$

denklemini ile tanımlanır. Eğer pertürbasyon işlemi buradan itibaren ilerletilirse $\mathcal{A}_1^{(1)}$ ve $\mathcal{A}_1^{(j)}$ için lineer olmayan bir denklem sistemi türetilir [43].

4.2.2 $c_T < c < c_L$ için analiz

Bu halde birinci mertebeye problemin hareket denklemlerinin çözümlerini ilk halde olduğu gibi (4.22) formlarında iki parçaya ayırıp, uzun dalgaları temsil eden çözümleri de aynı şekilde $\hat{u}_1 \equiv 0$ ve $\hat{v}_1 \equiv 0$ olarak alalım. Fakat bu halde dalga modülasyonuna ait olan (4.24a,b) birinci mertebeye problemin çözüm yapıları, $c_T < c < c_L$ olduğu için değişeceklerdir. Bu nedenle (4.7a,b) denklemlerinin çözümleri (4.9) simetri koşulu altında değişkenlerin ayrılması yöntemi ile,

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_1^{(m)} \cosh(mkr_L y_0) + p_T B_2^{(m)} \cos(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.108a)$$

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} -i \left[r_L B_1^{(m)} \sinh(mkr_L y_0) + B_2^{(m)} \sin(mkp_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.108b)$$

olarak elde edilirler. Dikkat edilirse, (4.108) çözümleri, birinci hale ait (4.24) çözümlerinde p_L yerine ir_L yazılarak elde edilebilecekleri görülür. Dolayısı ile (4.108) ile verilen çözümlerin (4.8a,b) sınır koşullarında kullanılması sonucu elde edilen

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_1^{(m)} = \mathbf{0} \quad (4.109)$$

cebrîk denklem sistemlerinin katsayı matrisi $\mathbf{W}_m$ de (4.28) matrisinde p_L yerine ir_L yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\mathbf{W}_m = \begin{bmatrix} 2mkr_L \sinh(mkr_L h) & mk(1 - p_T^2) \sin(mkp_T h) \\ ikm(c_L^2(1 - r_L^2) - 2c_T^2) \cosh(mkr_L h) & -2ikmp_T c_T^2 \cos(mkp_T y) \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

Aynı şekilde bu hale ait dispersiyon bağıntısı da hesaplandığında (2.42) dispersiyon bağıntısıyla aynı bağıntının elde edildiği görülür. (4.32) ve (4.56) denklemleri ile tanımlanan $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{L}$ vektörlerinin bileşenleri de

$$R_{11} = \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9 - m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2 - 1}\right) (p_T^2 - 1) \sin(khp_T)}{2k^2 c_T^2 r_L \sqrt{(9 - m^2)(9m^2 - 1)} \sinh(khr_L)} \quad (4.111a)$$

$$R_{12} = \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9 - m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2 - 1}\right)}{k^2 c_T^2 \sqrt{(9 - m^2)(9m^2 - 1)}} \quad (4.111b)$$

ve

$$L_1 = \frac{ic_T^2 k^2 \sqrt{(9 - m^2)(9m^2 - 1)} (p_T^2 - 1) \sin(khp_T)}{2r_L \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9 - m^2} \omega\right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2 - 1} \omega\right) \sinh(khr_L)}, \quad (4.112a)$$

$$L_2 = \frac{k^2 m^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} (1-p_T^2) \sin(kh p_T)}{(1-r_L^2-2m^2) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9-m^2}\omega\right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2-1}\omega\right) \cosh(khr_L)} \quad (4.112b)$$

formlarını alırlar.

(4.109) denklemlerinin çözümleri, $\mathbf{R}$ bileşenleri (4.111) bağıntılarıyla tanımlanan vektör olmak üzere $m = 1$ için (4.33) ile, $m \neq 1$ için ise (4.34) ile verilir ve dolayısı ile birinci mertebe problemin çözümleri bu hal için

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cosh(kr_L y_0) + p_T R_{12} \cos(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c., \quad (4.113a)$$

$$v_1 = -i\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [r_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + R_{12} \sin(kp_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (4.113b)$$

olarak elde edilirler.

Dikkat edilirse bu çözüm (4.37)'de p_L yerine ir_L yazılarak da elde edilir. Bu işlem yüksek mertebe problemlerin çözümlerinde ve bu çözümleri elde ederken tanımlanan EK A ve EK B'de karşılaşılan her katsayı için de geçerlidir. Yani bu çözümler önceki bölümde verilen çözümlerden, bunlarla ilgili ifadelerde p_L yerine ir_L yazılarak elde edilirler. Bu nedenle yüksek mertebeden problemlerin çözümlerini türetme işlerini yeniden yapmaya gerek yoktur.

Sonuçta $c_T < c < c_L$ için birinci mertebe nonlinear modülasyonu karakterize eden NLS denkleminin katsayıları $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$, (2.42)'de verilen dispersiyon bağıntısı kullanılarak ve (4.91)'de görülen $\mathbf{F}$ vektörünün EK B'de (B.10) ile verilen bileşenlerinin açık yapılarında p_L yerine ir_L yazılarak, (4.93) bağıntılarıyla hesaplanırlar.

4.2.3 $c < c_T < c_L$ için analiz

Bu halde ise diğer iki halde yapıldığı gibi birinci mertebe hareket denklemlerinin çözümlerini, (4.22) formlarında iki parçaya ayırıp, uzun dalgaları temsil eden çözümleri de özdeş olarak sıfır alarak inşa etmeye başlayalım. Burada $c < c_T < c_L$ halini incelediğimiz için, bu eşitsizliğin geçerli olduğu dalgaların modülasyonuna ait çözüm yapıları, (4.9) simetri koşulu altında (4.7a,b) denklemlerine değişkenlerin

ayrılması yönteminin uygulanmasıyla

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_1^{(m)} \cosh(mkr_L y_0) + ir_T B_2^{(m)} \cosh(mkr_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.114a)$$

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-ir_L B_1^{(m)} \sinh(mkr_L y_0) + B_2^{(m)} \sinh(mkr_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.114b)$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse, (4.114) çözümleri, ikinci hale ait (4.108) çözümlerinde p_T yerine ir_T yazılarak elde edilebilecekleri görülür. Bu nedenle (4.114) ile verilen çözümlerin (4.8a,b) sınır koşullarında kullanılması sonucu elde edilen

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_1^{(m)} = \mathbf{0} \quad (4.115)$$

cebrîk denklem sistemlerinin katsayı matrisi $\mathbf{W}_m$ de (4.110) matrisinde p_T yerine ir_T yazılarak

$$\mathbf{W}_m = \begin{bmatrix} 2mkr_L \sinh(mkr_L h) & imk(1+r_T^2) \sinh(mkr_T h) \\ ikm(c_L^2(1-r_L^2) - 2c_T^2) \cosh(mkr_L h) & 2kmr_T c_T^2 \cosh(mkr_T y) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

olarak elde edilir. Bu hale ait dispersiyon bağıntısı hesaplandığında (2.48) dispersiyon bağıntısıyla aynı bağıntı elde edilir. (4.32) ve (4.56) denklemleri ile tanımlanan $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{L}$ vektörlerinin bileşenleri de sırasıyla

$$R_{11} = -i \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9-m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2-1}\right) (1+r_T^2) \sinh(khr_T)}{2k^2 c_T^2 r_L \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} \sinh(khr_L)}, \quad (4.117a)$$

$$R_{12} = \frac{\left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9-m^2}\right) \left(2\sqrt{2}kc_T - w\sqrt{9m^2-1}\right)}{k^2 c_T^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)}} \quad (4.117b)$$

ve

$$L_1 = \frac{ic_T^2 k^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} (1+r_T^2) \sinh(khr_T)}{2r_L \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9-m^2}\omega\right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2-1}\omega\right) \sinh(khr_L)}, \quad (4.118a)$$

$$L_2 = \frac{k^2 m^2 \sqrt{(9-m^2)(9m^2-1)} (1+r_T^2) \sinh(khr_T)}{(r_L^2 + 2m^2 - 1) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9-m^2}\omega\right) \left(2\sqrt{2}c_T k - \sqrt{9m^2-1}\omega\right) \cosh(khr_L)} \quad (4.118b)$$

şeklinde hesaplanırlar.

(4.115) denklem sistemlerinin çözümleri, $\mathbf{R}$ bileşenleri (4.117) bağıntılarıyla tanımlanan vektör olmak üzere $m = 1$ için (4.33) ile, $m \neq 1$ için ise (4.34) ile verilir ve

dolayısı ile birinci mertebe problemin çözümleri bu hal için

$$u_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [R_{11} \cosh(kr_L y_0) + ir_T R_{12} \cosh(kr_T y_0)] e^{i\phi} + c.c., \quad (4.119a)$$

$$v_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) [-ir_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + R_{12} \sinh(kr_T y_0)] e^{i\phi} + c.c. \quad (4.119b)$$

olarak elde edilirler.

Dikkat edilirse bu çözüm (4.113)'te p_T yerine ir_T yazılarak da elde edilir. Fakat bu halde ikinci haldeki hesaplamalardan farklı olarak yüksek mertebe problemlerin çözümlerini ve bu çözümleri elde ederken tanımlanan katsayıları elde etmek için bu yerine koyma işlemi yeterli olmamaktadır. Bu nedenle $c < c_T < c_L$ için ikinci ve üçüncü mertebe problemlerin çözümleri yeniden inşa edilmelidir. Bu amaçla yapılacak işlemler birinci hal için gerçekleştirilen ikinci ve üçüncü mertebe problemlerin çözümlerinin inşa edilme süreciyle aynı olacaktır. Bu hal için elde edilen denklemlerin ve sınır koşulların genel yapısı diğer iki hal için elde edilenlerle aynı olacaklardır. Farklılıklar inşa sürecinde elde edilen denklemlerin katsayılarının içeriklerinde ve özel çözüm formlarında görülecektir. Ayrıca, bu hal için de diğer iki halde olduğu gibi ikinci ve üçüncü mertebe problemlerde uzun dalgalara ait terimler yine elde edilecektirler. Fakat, birinci hal için yapılan analizde de belirtildiği üzere çalışmanın bu bölümünün amacı dalga modülasyonu için birinci mertebe uniform geçerli çözümü elde etmek olduğundan ve uzun dalgalara ait sadece ikinci mertebe problemin çözümleri dalga modülasyonuna ait sonuçlara etki etmesi nedeniyle, birinci hal için yapılan uzun dalgalara ait üçüncü mertebe problemin çözümleri elde etmek için analiz bu hal için tekrar edilmeyecektir.

Bu amaçla, $c < c_T < c_L$ eşitsizliğinin geçerli olduğu durum için elde edilen (4.118) birinci mertebe çözümlerin tam olarak belirlenebilmesi için birinci halde olduğu gibi $\mathcal{A}_1$ genlik fonksiyonunun (x_1, x_2, t_1, t_2) değişkenlerine bağıllığı daha yüksek mertebe pertürbasyon problemlerinden belirlenecektir. Bu sebeple (4.118) ile verilen birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümleri, ikinci mertebe pertürbasyon probleminin (4.11a,b)'de verilen hareket denklemlerinde yerlerine koyup, nonlinear elastik sabitler arasındaki (4.38) bağıntısı da kullanılarak, bu denklemler

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\kappa_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \kappa_{12}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \lambda_1^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c., \quad (4.120a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_2, v_2) = \rho_2^{(2)} |\mathcal{A}_1|^2 + \left[\left(\kappa_{21}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \kappa_{22}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \lambda_2^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \right] \quad (4.120b)$$

formlarına indirgenirler. Görüldüğü üzere bu denklemlerin sağ tarafları birinci hal için elde edilen (4.39) denklemlerinin sağ taraflarıyla aynı yapıdadırlar. Bu denklemlerin sağ yanlarında görülen, $\rho_2^{(2)}$, $\kappa_{ij}^{(2)}$ ve $\lambda_i^{(2)}$ katsayı fonksiyonlarının açık yapıları aşağıda verilmektedir;

$$\rho_2^{(2)} = 2k^3 \left\{ r_T R_{12} \left[J_1^{(2)} \sinh(kr_L y_0) + J_2^{(2)} \sinh(kr_T y_0) \right] \cosh(kr_T y_0) + r_L R_{11} \left[J_3^{(2)} \sinh(kr_L y_0) + J_4^{(2)} \sinh(kr_T y_0) \right] \cosh(kr_L y_0) \right\}, \quad (4.121a)$$

$$\kappa_{11}^{(2)} = k \left\{ i \left(2c_L^2 + (c_T^2 - c_L^2) r_L^2 \right) R_{11} \cosh(kr_L y_0) - r_T R_{12} (c_L^2 + c_T^2) \cosh(kr_T y_0) \right\}, \quad (4.121b)$$

$$\kappa_{12}^{(2)} = 2\omega \left\{ i R_{11} \cosh(kr_L y_0) - r_T R_{12} \cosh(kr_T y_0) \right\}, \quad (4.121c)$$

$$\kappa_{21}^{(2)} = k \left\{ (c_L^2 + c_T^2) r_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + i \left(2c_T^2 + (c_L^2 - c_T^2) r_T^2 \right) R_{12} \sinh(kr_T y_0) \right\}, \quad (4.121d)$$

$$\kappa_{22}^{(2)} = 2\omega \left\{ r_L R_{11} \sinh(kr_L y_0) + i R_{12} \sinh(kr_T y_0) \right\}, \quad (4.121e)$$

$$\lambda_1^{(2)} = ik^3 \left\{ M_{10}^{(2)} + M_{11}^{(2)} \cosh(2kr_T y_0) + M_{12}^{(2)} \cosh(2kr_L y_0) + M_{13}^{(2)} \cosh(kr_T y_0) \cosh(kr_L y_0) + M_{14}^{(2)} \sinh(kr_T y_0) \sinh(kr_L y_0) \right\}, \quad (4.121f)$$

$$\lambda_2^{(2)} = k^3 \left\{ M_{21}^{(2)} \sinh(2kr_T y_0) + M_{22}^{(2)} \sinh(2kr_L y_0) + M_{23}^{(2)} \cosh(kr_T y_0) \sinh(kr_L y_0) + M_{24}^{(2)} \sinh(kr_T y_0) \cosh(kr_L y_0) \right\}. \quad (4.121g)$$

Bu bağıntılardaki $J_i^{(2)}$, $M_{ij}^{(2)}$ katsayıları lineer ve nonlineer malzeme sabitlerine, ω açısal frekansına ve k dalga sayısına bağlıdır. Bunların açık ifadeleri EK.A'da (A.9-10) denklemleri ile verilmektedirler.

Şimdi ikinci mertebe problemin çözümüne, ilk halde yapıldığı gibi uzun dalga yayılımı ile ilgili çözüm parçasını bulmaya çalışarak başlayalım. Bu amaç için ikinci mertebe problemin çözümünü (4.41) ile verilen toplamsal ayrıştırma şeklinde iki parçaya ayıralım. Bu parçalama dikkate alınarak (4.41) ile verilen çözümler (4.121) denklemlerinde ve (4.12a,b) sınır koşullarında kullanılırsa, $\hat{u}_2$ ve $\hat{v}_2$ uzun dalgaları temsil eden fonksiyonların

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\hat{u}_2, \hat{v}_2) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(\hat{u}_2, \hat{v}_2) = \rho_2^{(2)} |\mathcal{A}_1|^2 \quad (4.122a,b)$$

denklemlerinin, aşağıdaki sınır koşullarını

$$y_0 = \pm h' de$$

$$c_T^2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y_0} = 0, \quad (4.123a)$$

$$\begin{aligned} c_L^2 \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_0} = & -k^2 \left\{ P_1 + 2r_L R_{11} R_{12} (n_3 + 2n_4) (r_T^2 - 1) \sinh(khr_L) \sinh(khr_T) \right. \\ & - 4r_L^2 r_T R_{11} R_{12} (n_3 + 2n_4) \cosh(khr_L) \cosh(khr_T) \\ & \left. - \frac{J_2^{(2)}}{2} R_{12} \cosh(2khr_T) - J_3^{(2)} R_{11} \cosh(2khr_L) \right\} |\mathcal{A}_1|^2 \end{aligned} \quad (4.123b)$$

ve simetri koşullarını

$$\hat{u}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) = \hat{u}_2(x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_1, t_2), \quad (4.123c)$$

$$\hat{v}_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, t_1, t_2) = -\hat{v}_2(x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2, t_1, t_2) \quad (4.123d)$$

sağlayan çözümleri olacakları ortaya çıkar. Bu problemlerin çözümleri de (4.123c,d) simetri koşulları da göz önünde bulundurularak

$$\hat{u}_2 = D_1^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2), \quad (4.124a)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_2 = & -\frac{k^2}{c_L^2} P_1 y_0 |\mathcal{A}_1|^2 + \frac{k}{c_L^2} \left\{ \frac{R_{12} J_2^{(2)}}{4r_T} \sinh(2kr_T y_0) + \frac{R_{11} J_3^{(2)}}{r_L} \sinh(2kr_L y_0) \right. \\ & + \frac{2r_L r_T R_{11} (n_3 + 2n_4) (1 + 2r_L^2 - r_T^2) R_{11} R_{12}}{(r_L^2 - r_T^2)} \cosh(kr_T y_0) \sinh(kr_L y_0) \\ & \left. - \frac{2r_L^2 R_{11} (n_3 + 2n_4) (1 + r_T^2) R_{11} R_{12}}{(p_L^2 - p_T^2)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \right\} |\mathcal{A}_1|^2 \end{aligned} \quad (4.124b)$$

olarak elde edilirler. (4.123b) sınır koşulunda ve (4.124b) çözümünde görünen P_1 katsayısının açık hali aşağıda verilmektedir;

$$P_1 = [\eta_2 + (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) r_L^2 + \eta_1 r_L^4] R_{11}^2 + \eta_4 (1 + r_T^2)^2 R_{12}^2. \quad (4.125)$$

Uzun dalga ile ilgili olarak yukarıda elde edilen çözümlerdeki $D_1^{(2)}$ fonksiyonu ikinci mertebe problem ile tam olarak belirlenememektedir. Eğer bu fonksiyonun tam yapısı bulunmak istenirse, bu fonksiyon daha üst mertebe problemler yardımıyla elde edilebilir. Dikkat edilirse amacımız olan birinci mertebe uniform geçerli çözümlerin bulunması için bu fonksiyonun açık yapısına ihtiyaç duyulmamaktadır.

İkinci merteye problemin dalga modülasyonunu temsil eden u_2 ve v_2 çözümlerinin, (4.41) ile verilen toplamsal ayrıştırmaların (4.121)'de verilen denklemlerde ve $\hat{u}_2$ ve $\hat{v}_2$ için bulunan (4.124a,b) ile birlikte ikinci merteye pertürbasyon probleminin (4.12a,b) sınır koşullarında kullanılırsa aşağıdaki denklemleri

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\kappa_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \kappa_{12}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \lambda_1^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c., \quad (4.126a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)}(u_2, v_2) = \left(\kappa_{21}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \kappa_{22}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \right) e^{i\phi} + \lambda_2^{(2)} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \quad (4.126b)$$

ve sınır koşulları

$$y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_0} + \frac{\partial v_2}{\partial x_0} \right) + \left\{ N_1^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 N_2^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\} = 0, \quad (4.127a)$$

$$c_L^2 \frac{\partial v_2}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \left\{ N_3^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 N_4^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\} = 0. \quad (4.127b)$$

ve simetri koşullarını

$$u_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) = u_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, t_0, t_1, t_2), \quad (4.127c)$$

$$v_2(x_0, x_1, x_2, y_0, t_0, t_1, t_2) = -v_2(x_0, x_1, x_2, -y_0, t_0, t_1, t_2) \quad (4.127d)$$

sağlamaları gerektiği ortaya çıkar. Sınır koşullarında görülen $N_i^{(2)}$ katsayılarının açık yapıları EK A'da (A.11) bağıntıları ile verilmektedirler. Şimdi u_2 ve v_2 için (4.126-127) ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümlerini bulacağız. Bunun için bu problemin çözümlerini birinci durum için yapıldığı gibi

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2, \quad v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2 \quad (4.128)$$

şeklinde iki parçaya ayıracağız. Burada, $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$ (4.126) denklemlerinin özel çözümleri; $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{v}_2$ 'ler ise

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(1)}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) = 0 \quad (4.129)$$

homojen denklemlerinin, (4.127)'de verilen sınır koşullarında (4.128) çözüm şekilleri kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar:

$$y_0 = \pm h' de$$

$$c_T^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_0} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_0} \right) = -c_T^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_0} \right) - \left\{ N_1^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 N_2^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\}, \quad (4.130a)$$

$$c_L^2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_0} = -c_L^2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y_0} - (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_0} - \left\{ N_3^{(2)} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} e^{i\phi} + \mathcal{A}_1^2 N_4^{(2)} e^{2i\phi} + c.c. \right\}. \quad (4.130b)$$

(4.128) ile verilen çözüm ayrışımının da (4.127c,d) simetri koşullarını da sağlamaları gerektiğini belirttikten sonra (4.126)'da verilen homojen olmayan denklemlerin $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$ özel çözümlerini inşa etmeye başlayalım. Bu özel çözümleri belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak bulabiliriz. (4.126)'da verilen denklemlerin sağ yanlarındaki fonksiyonların yapıları göz önünde bulundurularak bu çözümleri aşağıdaki formlarda seçebiliriz;

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = & \left\{ C_1^{(2)} y_0 \cosh(kr_L y_0) - C_2^{(2)} y_0 \sinh(kr_L y_0) + \left(ir_T C_5^{(2)} y_0 + C_7^{(2)} \right) \cosh(kr_T y_0) \right. \\ & \left. - (ir_T C_6^{(2)} y_0 + C_8^{(2)}) \sinh(kr_T y_0) \right\} e^{i\phi} \\ & + \left\{ C_9^{(2)} - C_{10}^{(2)} y_0 \cosh(2kr_L y_0) - C_{11}^{(2)} y_0 \sinh(2kr_L y_0) \right. \\ & + \left(ir_T C_{14}^{(2)} y_0 + C_{16}^{(2)} \right) \cosh(2kr_T y_0) - \left(ir_T C_{15}^{(2)} y_0 + C_{17}^{(2)} \right) \sinh(2kr_T y_0) \\ & + C_{18}^{(2)} \cosh(kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) + C_{19}^{(2)} \sinh(kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \\ & \left. + C_{20}^{(2)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + C_{21}^{(2)} \sinh(kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \right\} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (4.131a)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 = & \left\{ - \left(ir_L C_1^{(2)} y_0 + C_3^{(2)} \right) \sinh(kr_L y_0) + \left(ir_L C_2^{(2)} y_0 + C_4^{(2)} \right) \cosh(kr_L y_0) \right. \\ & \left. + C_5^{(2)} y_0 \sinh(kr_T y_0) - C_6^{(2)} y_0 \cosh(kr_T y_0) \right\} e^{i\phi} \\ & + \left\{ - \left(ir_L C_{10}^{(2)} y_0 + C_{12}^{(2)} \right) \sinh(2kr_L y_0) + \left(ir_L C_{11}^{(2)} y_0 + C_{13}^{(2)} \right) \cosh(2kr_L y_0) \right. \\ & + C_{14}^{(2)} y_0 \sinh(2kr_T y_0) - C_{15}^{(2)} y_0 \cosh(2kr_T y_0) \\ & + C_{22}^{(2)} \cosh(kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) + C_{23}^{(2)} \sinh(kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \\ & \left. + C_{24}^{(2)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + C_{25}^{(2)} \sinh(kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \right\} \mathcal{A}_1^2 e^{2i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (4.131b)$$

Burada $C_i^{(2)}$ 'ler ($i = 1, \dots, 25$) belirsiz katsayılardır. Bu çözüm formları (4.126a,b)'deki denklemlere yerleştirilir ve belirsiz katsayılar yönteminin kuralları yerine getirilirse ara

işlemlerden sonra $C_i^{(2)}$ katsayıları elde edilirler. Bu katsayıların açık ifadeleri EK A'da (A.12-13) ile verilmektedirler. Bu katsayılar dikkatlice incelendiğinde, (4.131a,b) özel çözümlerinin de (4.127c,d) sınır koşullarını sağlayacak şekilde elde edildikleri görülür.

Diğer taraftan, (4.129) homojen denklemlerinin $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{v}_2$ çözümleri de birinci mertebe problemde olduğu gibi (4.127c,d) simetri koşullarını da sağlayacak şekilde değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda elde edilirler;

$$\tilde{u}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[G_1^{(m)} \cosh(mkr_L y_0) + ir_T G_2^{(m)} \cosh(mkr_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.132a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-ir_L G_1^{(m)} \sinh(mkr_L y_0) + G_2^{(m)} \sinh(mkr_T y_0) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.132b)$$

İlk durum için yapılan analizde de belirtildiği gibi bu çözümlerdeki $G_i^{(m)}$ 'ler ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonları hesaplamak için (4.132) çözümleri (4.127a,b) sınır koşullarında kullanılırsa, $\mathbf{U}_2^{(m)}$ (4.53) ile verilen vektör olmak üzere

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_2^{(m)} = \mathbf{b}_2^{(m)} \quad (4.133)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin sağ tarafındaki vektörler ilk halde olduğu gibi (4.55) bağıntılarını sağlarlar. $m = 1$ için (4.133) cebrik denklem sisteminin bir çözüme sahip olabilmesi için, $\mathbf{L}$ bu halde bileşenleri (4.118) bağıntıları ile verilen vektör olmak üzere

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.134)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Buradaki $\mathbf{b}_2^{(1)}$ vektörü birinci halde de olduğu gibi gerekli ara işlemlerden sonra

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R}. \quad (4.135)$$

formunda yazılabilir. Bu bağıntıyla beraber (4.60) kullanılırsa, (4.134)'te verilen uygunluk koşulundan genlik modülasyonunu temsil eden $\mathcal{A}_1$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (4.136)$$

denklemini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. Birinci hal için de belirtildiği gibi bu denklem $\mathcal{A}_1$ 'in V_g grup hızıyla ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kalacağını gösterir. Yani $\mathcal{A}_1$ fonksiyonu $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ yapısında olacaktır. Yine $m = 1$

için (4.133) denklem sisteminin çözümü ise, (4.61) ve (4.136) sonuçları da kullanılarak $U_2^{(1)}$ için ilk halde edilen (4.66) şeklinde elde edilir. $m = 2$ için $\det \mathbf{W}_2 \neq 0$ olduğundan, $m=2$ için (4.133) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(2)} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{b}_2^{(2)} = \mathcal{A}_1^2 \mathbf{w} \quad (4.137)$$

olarak yazılır.

Bağıntının sağ tarafında görünen $\mathbf{w}$ sabit bir vektördür ve elemanları

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T \quad (4.138)$$

olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{w}$ vektörünün açık ifadesi EK A'da (A.14) ile verilmektedir.

$m \geq 3$ için (4.133) denklem sistemlerinin çözümleri, $m \neq 1$ için bu denklemin katsayı matrisinin determinantları ve sağ taraf vektörleri birinci hal için olanlarla aynı olduğundan, (4.69) şeklinde elde edilirler.

Böylece bu hal için de birinci ve ikinci mertebe çözümleri tamamlamış olduk. Görüldüğü üzere ilk iki mertebe için bulunan sonuçlar bundan önceki iki eşitsizlik hali için elde edilen sonuçlarla aynıdır. Farklılıklar katsayı fonksiyonlarının tanımlanmasında ortaya çıkmaktadır. Yine bu halde ilk halde elde edilen sonuçla aynı olan ikinci mertebe problemin çözümleri ve $\mathcal{A}_1$ genlik fonksiyonunun yalnızca x_1 ve t_1 'e bağlılığı belirlendi. Diğer değişkenlere bağlılığını da belirlemek için üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Bu amaçla, (4.119)'da verilen birinci mertebe çözümlerle, (4.41) ve (4.128) toplamsal çözüm ayrıştırılmaları ile tanımlanan (4.124), (4.131) ve (4.132)'de verilen ikinci mertebe çözümler üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (4.16) ile verilen hareket denklemlerinde kullanılırsa, hareket denklemleri gerekli ara işlemler yapılarak aşağıdaki formlarda indirgenirler;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(3)}(u_3, v_3) = & \rho_1^{(3)} + \left[\kappa_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \kappa_{12}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \kappa_{13}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\ & + \kappa_{14}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) + \kappa_{15}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \kappa_{16}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \left. \right] e^{i\phi} \\ & + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.139a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{(3)}(u_3, v_3) = & \rho_2^{(3)} + \left[\kappa_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \kappa_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \kappa_{23}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\
& + \kappa_{24}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) + \kappa_{25}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \kappa_{26}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \left. \right] e^{i\phi} \\
& + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right). \tag{4.139b}
\end{aligned}$$

Yukarıda belirttiğimiz nedenlerden ötürü bu hal için üçüncü mertebe problemdeki uzun dalgalara ait çözümlerle ilgilenmeyeceğimiz için bu denklemlerdeki $\rho_i^{(3)}$ katsayı fonksiyonlarının dışındaki $\kappa_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\kappa_{1i}^{(3)} = & M_{i1}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) + M_{i2}^{(3)} \cosh(kr_T y_0) + M_{i3}^{(3)} y_0 \sinh(kr_L y_0) \\
& + M_{i4}^{(3)} y_0 \sinh(kr_T y_0), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.140a}
\end{aligned}$$

$$\kappa_{1j}^{(3)} = M_{j1}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) + M_{j2}^{(3)} \cosh(kr_T y_0), \quad (j = 4, 5), \tag{4.140b}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{16}^{(3)} = & M_{61}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) + M_{62}^{(3)} \cosh(kr_T y_0) \\
& + M_{63}^{(3)} y_0 \sinh(kr_L y_0) + M_{64}^{(3)} \cosh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + M_{65}^{(3)} \sinh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + M_{66}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) \\
& + M_{67}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) + M_{68}^{(3)} y_0 \cosh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \\
& + M_{69}^{(3)} y_0 \sinh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) + M_{610}^{(3)} \cosh(3kr_L y_0) \\
& + M_{611}^{(3)} \cosh(3kr_T y_0) + M_{612}^{(3)} y_0 \sinh(3kr_L y_0), \tag{4.140c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{2i}^{(3)} = & V_{i1}^{(3)} y_0 \cosh(kr_L y_0) + V_{i2}^{(3)} y_0 \cosh(kr_T y_0) + V_{i3}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \\
& + V_{i4}^{(3)} \sinh(kr_T y_0), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.140d}
\end{aligned}$$

$$\kappa_{2j}^{(3)} = V_{j1}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) + V_{j2}^{(3)} \sinh(kr_T y_0), \quad (j = 4, 5), \tag{4.140e}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{26}^{(3)} = & V_{61}^{(3)} y_0 \cosh(kr_L y_0) + V_{62}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \\
& + V_{63}^{(3)} \sinh(kr_T y_0) + V_{64}^{(3)} \sinh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + V_{65}^{(3)} \cosh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + V_{66}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) \\
& + V_{67}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) + V_{68}^{(3)} y_0 \cosh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + V_{69}^{(3)} y_0 \sinh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + V_{610}^{(3)} \sinh(3kr_L y_0) \\
& + V_{611}^{(3)} \sinh(3kr_T y_0) + V_{612}^{(3)} y_0 \cosh(3kr_L y_0) \tag{4.140f}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu bağıntılardaki $M_{ij}^{(3)}$ ve $V_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonlarının açık ifadeleri de EK B’de (B.15-16) ile verilmektedirler. Bunlar lineer ve nonlinear malzeme sabitlerine ve k dalga sayısına bağlıdır. Bu hal için elde edilen üçüncü

mertebe probleme ait elde edilen (4.139) denklemlerinin çözümlerini ararken ilk hal için kullandığımız (4.72) toplamsal ayrışımı kullanılmalıdır. Fakat yukarıda da belirtildiği gibi üçüncü mertebe problemin uzun dalgalara ait çözümleri, dalga modülasyonuna ait birinci mertebe uniform geçerli çözümün inşasında gerekmediği için bu hal için verilmeyecektir. Bu kısımda incelenen faz eşitsizliği hali için de ilk halde edilen üçüncü mertebe uzun dalga çözümlerine ait sonuçların elde edileceğini belirttikten sonra üçüncü mertebe problemin dalga modülasyonuna ait çözümlerini elde etmeye çalışalım.

Üçüncü mertebe problemde dalga modülasyonuna ait u_3 ve v_3 çözümleri için (4.72) ile verilen toplamsal ayrıştırma (4.139)'da verilen denklemlerde ve üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (4.17) ile verilen sınır koşullarında elde edilen birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümleriyle birlikte kullanılırsa aşağıdaki denklemler

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(3)}(u_3, v_3) = & \left[\kappa_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \kappa_{12}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \kappa_{13}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \kappa_{14}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) \right. \\ & \left. + \kappa_{15}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \kappa_{16}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.141a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{(3)}(u_3, v_3) = & \left[\kappa_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + \kappa_{22}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \kappa_{23}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \kappa_{24}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right) \right. \\ & \left. + \kappa_{25}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + \kappa_{26}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right) \end{aligned} \quad (4.141b)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y_0} + \frac{\partial v_3}{\partial x_0} \right) = & \left[N_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + N_{12}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + N_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.142a)$$

$$\begin{aligned} c_T^2 \frac{\partial v_3}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = & \left[N_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + N_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + N_{23}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right) \end{aligned} \quad (4.142b)$$

elde edilirler. Yukarıdaki sınır koşullarında $e^{\pm 2i\phi}$ ve $e^{\pm 3i\phi}$ terimlerinin katsayıları self modülasyon incelemesinde hesaplamaya bir katkıda bulunmayacakları için açık ifadeleri verilmeyecektir. $e^{i\phi}$ 'nin katsayı fonksiyonlarının açık yapıları ise EK B'de (B.18-19) ile verilmektedirler. Şimdi u_3 ve v_3 için (4.141-142) ile tanımlanan sınır

değer probleminin çözümlerini bulalım. Bu amaç için, ikinci mertebe çözümleri elde ederken yaptığımız gibi üçüncü mertebe modülasyon çözümlerini

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3, \quad v_3 = \bar{v}_3 + \tilde{v}_3 \quad (4.143a,b)$$

formlarında iki parçaya ayıralım. Burada, $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$ (4.141a,b) denklemlerinin özel çözümleri; $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ 'ler ise

$$\mathcal{L}_1^{(3)}(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3) = 0, \quad \mathcal{L}_2^{(3)}(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3) = 0 \quad (4.144a,b)$$

homojen denklemlerinin (4.142a,b)'de verilen sınır koşullarında (4.143a,b)'te verilen toplamsal çözüm ayrışımı kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar;

$$\begin{aligned} y_0 = \pm h' de, \quad c_T^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_0} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_0} \right) = -c_T^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_0} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_0} \right) \\ + \left[N_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + N_{12}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + N_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} \\ + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right), \end{aligned} \quad (4.145a)$$

$$\begin{aligned} c_T^2 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y_0} + (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_0} = -c_T^2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_0} - (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_0} \\ + \left[N_{21}^{(3)} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + N_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) + N_{23}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \right] e^{i\phi} \\ + c.c + \left(e^{\pm 2i\phi} \text{ ve } e^{\pm 3i\phi'} \text{ li terimler} \right). \end{aligned} \quad (4.145b)$$

İlk olarak, (4.141)'de verilen homojen olmayan denklemlerin $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$ özel çözümlerini inşa edeceğiz. Bu çözümler de ikinci mertebe problemdeki gibi belirsiz katsayılar yöntemi ile bulunabilirler. (4.141)'deki denklemlerin sağ tarafındaki fonksiyonların yapıları dikkate alınarak (4.83)'te verilen formlarda parçalayabiliriz. (4.83) ile verilen toplamlardaki fonksiyonlar ilk halde de belirtildiği gibi süperpozisyon ilkesi uygulanarak ayrı ayrı hesaplanabilir. $l = 1$ için bu toplamlardaki fonksiyonlardan $e_1^{(3)}$ ve $f_1^{(3)}$ fonksiyonları bu hal için (4.141) denklemlerinin sağ tarafındaki $e^{i\phi}$ 'nin katsayı fonksiyonlarının yapıları dikkate alınarak aşağıdaki formlarda seçilebilirler;

$$\begin{aligned}
e_1^{(3)} = & \left\{ \left(C_1^{(3)} + C_2^{(3)} y_0 \right) y_0 \cosh(kr_L y_0) - \left(C_3^{(3)} + C_4^{(3)} y_0 \right) y_0 \sinh(kr_L y_0) \right. \\
& + \left[ir_T \left(C_9^{(3)} + C_{10}^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_{13}^{(3)} + C_{14}^{(3)} y_0 \right) \right] \cosh(kr_T y_0) \\
& - \left[ir_T \left(C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_{15}^{(3)} + C_{16}^{(3)} y_0 \right) \right] \sinh(kr_T y_0) \\
& + C_{17}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) + C_{18}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) \\
& + C_{19}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) + C_{20}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) \\
& + \left(C_{21}^{(3)} + C_{22}^{(3)} y_0 \right) \cosh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{23}^{(3)} + C_{24}^{(3)} y_0 \right) \sinh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{25}^{(3)} + C_{26}^{(3)} y_0 \right) \sinh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{27}^{(3)} + C_{28}^{(3)} y_0 \right) \cosh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + \left(C_{29}^{(3)} + C_{30}^{(3)} y_0 \right) \cos(3kr_L y_0) \\
& + \left(C_{31}^{(3)} + C_{32}^{(3)} y_0 \right) \sinh(3kr_L y_0) + \left(C_{33}^{(3)} + C_{34}^{(3)} y_0 \right) \cosh(3kr_T y_0) \\
& + \left. \left(C_{35}^{(3)} + C_{36}^{(3)} y_0 \right) \sinh(3kr_T y_0) + c.c. \right\}, \tag{4.146a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1^{(3)} = & \left\{ -i \left[r_L \left(C_1^{(3)} + C_2^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_7^{(3)} + C_8^{(3)} y_0 \right) \right] \sinh(kr_L y_0) \right. \\
& + \left[ir_L \left(C_3^{(3)} + C_4^{(3)} y_0 \right) y_0 + \left(C_5^{(3)} + C_6^{(3)} y_0 \right) \right] \cosh(kr_L y_0) \\
& + \left(C_9^{(3)} + C_{10}^{(3)} y_0 \right) y_0 \sinh(kr_T y_0) - \left(C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} y_0 \right) y_0 \cosh(kr_T y_0) \\
& + C_{37}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) + C_{38}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) \\
& + C_{39}^{(3)} \sinh(kr_L y_0) \cosh(2kr_T y_0) + C_{40}^{(3)} \cosh(kr_L y_0) \sinh(2kr_T y_0) \\
& + \left(C_{41}^{(3)} + C_{42}^{(3)} y_0 \right) \cosh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{43}^{(3)} + C_{44}^{(3)} y_0 \right) \sinh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{45}^{(3)} + C_{46}^{(3)} y_0 \right) \sinh(2kr_L y_0) \cosh(kr_T y_0) \\
& + \left(C_{47}^{(3)} + C_{48}^{(3)} y_0 \right) \cosh(2kr_L y_0) \sinh(kr_T y_0) + \left(C_{49}^{(3)} + C_{50}^{(3)} y_0 \right) \cosh(3kr_L y_0) \\
& + \left(C_{51}^{(3)} + C_{52}^{(3)} y_0 \right) \sinh(3kr_L y_0) + \left(C_{53}^{(3)} + C_{54}^{(3)} y_0 \right) \cosh(3kr_T y_0) \\
& + \left. \left(C_{55}^{(3)} + C_{56}^{(3)} y_0 \right) \sinh(3kr_T y_0) + c.c. \right\}. \tag{4.146b}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde görülen $C_i^{(3)}$ 'ler belirsiz katsayılardır. Bu çözüm formları (4.78)'deki denklemlerde yerleştirilir ve belirsiz katsayılar yönteminin kuralları uygulanırsa gerekli ara işlemlerden sonra $C_i^{(3)}$ 'ler elde edilirler. Bunların açık ifadeleri EK B'de (B.21) ile verilmektedirler. $m = 2$ ve $m = 3$ için de benzer şekilde hareket edilerek $e_2^{(3)}$, $f_2^{(3)}$ ve $e_3^{(3)}$, $f_3^{(3)}$ fonksiyonları da hesaplanabilirler. Fakat ileride

görüreceği üzere birinci mertebe uniform geçerli çözümler inşa edilirken bu çözüm parçalarına ihtiyaç duyulmayacağından hesaplanmayacaklardır.

Diğer taraftan (4.144a,b)'deki homojen denklemlerin $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ çözümleri de birinci ve ikinci mertebe problemlerde yapıldığı gibi değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak ve (4.18) simetri koşulları da dikkate alınarak aşağıdaki formlarda elde edilirler;

$$\tilde{u}_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[L_1^{(m)} \cosh(mkr_{LY_0}) + ir_T L_2^{(m)} \cosh(mkr_{TY_0}) \right] e^{im\phi} + c.c., \quad (4.147a)$$

$$\tilde{v}_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-ir_L L_1^{(m)} \sinh(mkr_{LY_0}) + L_2^{(m)} \sinh(mkr_{TY_0}) \right] e^{im\phi} + c.c. \quad (4.147b)$$

Bu çözümlerde görünen $L_i^{(m)}$ 'ler birinci hal için yapılan analizde de belirtildiği gibi üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonları hesaplamak için (4.147) çözümleri (4.145a,b) sınır koşullarında kullanılırsa, $\mathbf{U}_3^{(m)}$ (4.86) ile verilen vektör olmak üzere

$$\mathbf{W}_m \mathbf{U}_3^{(m)} = \mathbf{b}_3^{(m)} \quad (4.148)$$

cebrîk denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin sağ tarafındaki vektörler birinci halde elde edildiği gibi (4.88)'de verilen formlarda elde edilirler. Bu nedenle, $m \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_m \neq 0$ varsayımı hatırlanırsa $m \geq 2$ için (4.87) sisteminin çözümleri

$$\mathbf{U}_3^{(2)} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{b}_3^{(2)}, \quad \mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1} \mathbf{b}_3^{(3)} \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_3^{(m)} \equiv \mathbf{0}, \quad m \geq 4 \quad (4.149)$$

olarak elde edilirler. Diğer taraftan $m = 1$ için $\det \mathbf{W}_m = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, bu durumda (4.148) sisteminin bir çözüme sahip olabilmesi için, $\mathbf{L}$, (4.59) ile tanımlanan ve bileşenleri bu eşitsizlik hali için (4.118) bağıntılarını sağlayan bir vektör olmak üzere

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_3^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.150)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Diğer taraftan, ara işlemlerden sonra buradaki $\mathbf{b}_3^{(1)}$ vektörü birinci eşitsizlik halinde ifade edildiği gibi

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} = & -i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{R} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \end{aligned} \quad (4.151)$$

formunda yazılabilir. Burada, yine ilk eşitsizlik halindeki gibi $\mathbf{F}$ iki bileşenli ve bileşenleri lineer, nonlinear malzeme parametrelerine ve dalga sayısına bağlı olan bir sütun vektördür ve bileşenleri bu kısımda incelediğimiz eşitsizlik hali için EK B’de (B.23) ile verilmektedirler. $\mathbf{F}$ vektöründe ilk eşitsizlik durumu için söylenenler bu durum için de geçerlidir. (4.150) uygunluk denkleminde, (4.61) ve (4.62) bağıntıları ile beraber $\mathcal{A}_2$ genlik fonksiyonunun yine (4.95) ile verilen $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ yapısında olduğu kabulü kullanılırsa

$$i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0 \quad (4.152)$$

denklemi elde edilir. Dikkat edilirse bu denklem ilk eşitsizlik hali için elde edilen (4.97) denkleminin aynısıdır. (4.152) denkleminin katsayıları $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ yine (4.93) şeklinde tanımlanmaktadır ama açık ifadeleri farklıdır.

(4.98) ile tanımlanan boyutsuz değişkenler ve sabitler ile (4.152) denklemi

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 \quad (4.153)$$

şeklinde bir NLS denklemine dönüşür.

Diğer iki faz hızı eşitsizliğinin geçerli olduğu durumlardaki sonuçlara benzer şekilde, (4.153) denkleminin verilen bir (4.100) formundaki başlangıç koşulu için çözümü bulunursa birinci mertebe çözümler, $c < c_T < c_L$ eşitsizliğini sağlayan dalgalar için (4.119) bağıntıları kullanılarak elde edilirler.

4.2.4 Asimptotik yaklaşım denkleminin (NLS denklemi) bazı çözümleri

Bu kısımdan önceki üç kısımda, hiperelastik bir tabakada yayılan simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bu bölümde ise, NLS denkleminin bilinen bazı çözümleri verilecek, uniform dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlılıkları incelenecektir ve NLS denkleminin lineer ve nonlinear katsayılarının çarpımı $\Gamma\Delta$ ’nın , çözümlere ve kararlılığa etkisi incelenecektir.

(4.99) ile verilen NLS denkleminin, ϕ reel bir fonksiyon ve K, Ω sabitler olmak üzere

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi(\eta) e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad \eta = \xi - V_0\tau, \quad V_0 = \text{sabit} \quad (4.154)$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri, Jakobien eliptik fonksiyonlarıyla ifade edilebilirler. Bu çözümler $\Gamma\Delta > 0$ ise dn ve $\Gamma\Delta < 0$ ise sn fonksiyonları olarak bulunurlar [44]. Bu çözümlerin türetilmesine yer vermeden önce, bazı basit fakat önemli ilerleyen dalga çözümlerini türeteceğiz. Bu amaçla, (4.154) çözüm formu (4.99)'da verilen NLS denkleminde yerleştirilirse

$$\Gamma \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + i(2K\Gamma - V_0) \frac{d\phi}{d\eta} + (\Omega - \Gamma K^2)\phi + \Delta\phi^3 = 0 \quad (4.155)$$

denklemini elde edilir. $V_0 = 2K\Gamma$ olarak kabul edilirse, (4.155) denklemini

$$\Gamma \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + (\Omega - \Gamma K^2)\phi + \Delta\phi^3 = 0 \quad (4.156)$$

halini alır. (4.156) denklemini, $d\phi/d\eta$ ile çarpılıp bir defa integre edilirse,

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\Gamma K^2 - \Omega}{\Gamma} \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \quad (4.157)$$

denklemini bulunur. Bu aşamada, (4.157) denkleminin bazı durumlara karşılık gelen çözümlerini verelim.

$\Gamma\Delta > 0$ olması durumunda, $\Gamma K^2 - \Omega = \Delta\phi_0^2/2$ ise (4.157) denklemini

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi_0^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \quad (4.158)$$

formuna indirgenir. Eğer $|\eta| \rightarrow \infty$ için $\phi \rightarrow 0$ ve $d\phi/d\eta \rightarrow 0$ ise $C = 0$ olur ve bu son durum için (4.158) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\Delta}{2\Gamma} \right)^{1/2} \phi_0 \eta \right] \quad (4.159)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda (4.159) çözümü "zarf soliton" veya "bright soliton" çözümü olarak adlandırılmaktadır [31, 32, 36, 41, 45].

$\Gamma\Delta < 0$ olması durumunda, $\Gamma K^2 - \Omega = \Delta\phi_0^2$ ise (4.157) denklemini

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\Delta}{\Gamma} \phi_0^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \quad (4.160)$$

formuna indirgenir. Eğer $|\eta| \rightarrow \infty$ için $\phi \rightarrow \phi_0$ ve $d\phi/d\eta \rightarrow 0$ ise $C = -\Delta\phi_0^4/2\Gamma$ olur ve bu son durum için (4.160) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \tanh \left[\left(-\frac{\Delta}{2\Gamma} \right)^{1/2} \phi_0 \eta \right] \quad (4.161)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda (4.161) çözümü bir şok dalgası yayılımını karakterize eder.

Bu çözümlerden farklı olarak, $\Gamma\Delta > 0$ veya $\Gamma\Delta < 0$ için NLS denkleminin

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi_0 e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (4.162)$$

formunda düzlem dalga çözümü de mevcuttur. (4.162) çözümü NLS denkleminde yerine konulursa, düzlem dalğanın ϕ_0 genliği

$$\phi_0^2 = \frac{\Gamma K^2 - \Omega}{\Delta} \quad (4.163)$$

bağıntısını sağlar. Özel olarak $K = 0$ alındığında, düzlem dalga çözümü

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi_0 e^{i\Delta|\phi_0|^2\tau} \quad (4.164)$$

şeklini alır.

Diğer yandan, $\Gamma\Delta < 0$ için NLS denkleminin

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi(\eta) e^{i(\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau - F(\eta))} \quad (4.165)$$

şeklinde bir çözümü aranır ve $|\eta| \rightarrow \infty$ için $\mathcal{A} \rightarrow \phi_0 e^{i\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau}$ ve $d\mathcal{A}/d\eta \rightarrow 0$ olduğu kabul edilirse ϕ ve F fonksiyonları

$$\phi^2 = \phi_0^2 (1 - \sin^2 B \operatorname{sech}^2 \psi) \quad (4.166a)$$

$$F = \arctan(\tan B \tanh \psi) \quad (4.166b)$$

olarak elde edilirler [46]. Burada B bir sabit ve ψ ile V_0 aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır;

$$\psi = \left(-\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^{1/2} \phi_0 \eta \sin B \quad (4.167a)$$

$$V_0 = \pm 2^{-\frac{3}{2}} \Gamma(-\Gamma\Delta)^{\frac{1}{2}} \phi_0. \quad (4.167b)$$

(4.166) ile tanımlanan çözüme "dark soliton" çözümü adı verilir ve bütün soliton çözümü özelliklerine sahiptir [46, 47].

Yukarıda türetilen ilerleyen dalga çözümleri formlarından $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin çözüm yapısını etkilediği açıkça gözlenmektedir. Dikkat edilirse, $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinden

bağımsız olarak NLS denkleminin (4.162) ile verilen düzlem dalga çözümü mevcuttur. Şimdi bu düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığına $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinin etkisini inceleyelim. Eğer NLS denkleminin çözümü

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \frac{a(\xi, \tau)}{2} e^{i\theta(\xi, \tau)} \quad (4.168)$$

şeklinde aranıp, NLS denkleminde yerine yazılıp, reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa, a ve θ için

$$a_\tau + \Gamma(a\theta_{\xi\xi} + 2a_\xi\theta_\xi) = 0 \quad (4.169a)$$

$$a\theta_\tau - \Gamma\left(a_{\xi\xi} - a(\theta_\xi)^2\right) - \frac{1}{4}\Delta a^3 = 0 \quad (4.169b)$$

nonlinear diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Şimdi NLS denkleminin $a_0 = \text{sabit}$, $\theta_0 = \text{sabit}$ ile belirtilen düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığını incelemek için a ve θ 'yı a_0 ve θ_0 civarında $\varepsilon \ll 1$ olmak üzere ε 'a göre seriye açalım;

$$a(\xi, \tau) = a_0 + \varepsilon a_1(\xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.170a)$$

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1(\xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.170b)$$

Bu seri açılımları (4.169) denklemlerinde kullanılır ve ε 'dan büyük mertebeli terimler ihmal edilirse aşağıdaki lineer denklemler elde edilir;

$$a_{1\tau} + \Gamma a_0 \theta_{1\xi\xi} = 0 \quad (4.171a)$$

$$a_0 \theta_{1\tau} - \Gamma \theta_{1\xi\xi} - \frac{3}{4} \Delta a_0^2 a_1 = 0. \quad (4.171b)$$

a_1 ve θ_1 için elde edilen bu lineer denklem sisteminin

$$a_1(\xi, \tau) = A e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad \theta_1(\xi, \tau) = \Theta e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (4.172)$$

formunda düzlem dalga çözümlerini arayalım. Bu çözümler (4.171) denklemlerinde kullanılırsa, sıfırdan farklı çözüm elde edilebilmesi için Ω ve K arasında

$$\Omega^2 = K^2(-\Gamma\Delta) \left(\frac{3}{4} a_0^2 - \frac{\Gamma}{\Delta} K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.173)$$

ilişkisinin sağlanması gerektiği ortaya çıkar. (4.173) bağıntısı (4.168) ile tanımlanan sonsuz küçük pertürbasyon dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Burada, reel bir

K değeri için, $\Gamma\Delta < 0$ ise, Ω reel olacaktır ve bu koşul altında a_1 ve Θ_1 sınırlı kalacaklardır. Diğer taraftan, $\Gamma\Delta > 0$ ise, $K < [(3/4)(\Delta/\Gamma)]^{(1/2)}a_0$ değerleri için Ω kompleks değerli olacak ve buna bağlı olarak a_1 ve Θ_1 sınırsız olarak büyüyeceklerdir. Sonuç olarak a_0 ve Θ_0 sabitleri ile tanımlanan bir nonlinear uniform düzlem katari sonsuz küçük bir pertürbasyon altında eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise kararlı, $\Gamma\Delta > 0$ ise kararsız olacaktır.

Yukarıda incelenen lineerleştirilmiş a_1 ve Θ_1 çözümleri kısa zaman aralığında geçerli olmalarına rağmen, NLS denkleminin (4.100) başlangıç koşulu altında çözümünün uzun zaman aralığında davranışı da $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretine bağlıdır. $|\xi| \rightarrow \infty$ için sıfır olan başlangıç uyarıları, eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere, $\Gamma\Delta > 0$ ise bir dizi zarf solitona dönüşürler [31,32,41,45].

Ayrıca, bir k_c kritik dalga sayısı civarında dispersif ortamda, $\Delta = 0$ yani $\Gamma\Delta = 0$ oluyorsa, bu durumda sistemde marjinal hal olarak adlandırılan durum ortaya çıkar. Bu halde, NLS denkleminde dispersiyon ile nonlinearlik birbirlerini dengeleyemezler ve NLS denklemi dalga modülasyonunu karakterize edemez. Yani, dalgaların self modülasyonunu incelemek için kullanılan asimptotik açılım bu kritik k_c dalga sayısı civarında geçersiz olur. Bu halde, nonlinearliğin etkisini k_c civarında dengelemek için farklı bir asimptotik açılım uygulanmalıdır [48,49].

4.2.5 Sayısal sonuçlar ve tartışma

Önceki bölümde verilen incelemeden anlaşılacağı üzere NLS denklemi ile karakterize edilen bir asimptotik dalga alanının kararlılığı $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretine bağlıdır. Bu nedenle, hiperelastik bir tabakada yayılan simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden NLS denkleminin çözümlerinin davranışlarını belirleyebilmek için bu denklemin katsayı fonksiyonlarının, $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin, dalga sayısına ve malzeme özelliklerine göre değişimini incelemek gerekir. Fakat bu terimlerin yapıları çok karmaşık olduğu için yukarıda bahsedilen değişimi belirleyebilmek için, çeşitli malzeme modelleri seçilerek NLS denkleminin katsayıları sayısal olarak hesaplanacaktır. Nonlinear malzeme parametrelerinin özelliklerinin Δ üzerine dolayısı ile de $\Gamma\Delta$ çarpımı üzerine etkilerini gözlemleyebilmek için tabakayı meydana getiren malzemenin lineer özellikleri sabit

tutularak ve nonlinear özellikler değiştirilerek Δ 'nın, yani $\Gamma\Delta$ 'nın boyutsuz dalga sayısı $K = kh'$ 'ya göre değişimi sayısal olarak dispersiyon bağıntılarının ilk iki dalı için hesaplanıp sonuçlar şekiller ile verileceklerdir.

İlk olarak, tabakanın linear özellikleri için, (2.51) ile tanımlanan boyutsuz linear parametre, $m = 1/\sqrt{3}$ olarak alınmaktadır. Nonlinear parametreler de aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılmıştır;

$$l = \frac{l}{\mu}, \quad m = \frac{m}{\mu}. \quad (4.173)$$

Önce $m = 1/\sqrt{3}$ olarak verilen linear model için ve (2.52) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk iki dalı için Γ 'nın K ile değişimleri hesaplanmış ve sırası ile Şekil C.13 ve Şekil C.14'de verilmişlerdir. Burada ilk dal için $0 < K \leq 7$ aralığında ve ikinci dal için ise bu dalda ilk dispersiyon bağıntısı için dalgaların faz hızları (4.1) eşitsizliğini sağlamaları gerektiğinden dolayı $0.6931 < K \leq 7$ aralığı için hesaplamalar yapılmıştır. $K > 7$ eşitsizliğini sağlayan dalga sayıları için de hesap genişletilebilir fakat burada yukarıda verilen aralıklar amacımız için yeterli sonuçlar vermektedirler.

Şimdi de yapay malzeme modeli için linear özellikler sabit tutularak ($m = 1/\sqrt{3}$) ve (4.173)'te tanımlanan boyutsuz nonlinear malzeme parametreleri için değişik değerler seçilerek Δ 'nın ve $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimleri incelenecektir. Bu amaçla sıralı boyutsuz nonlinear parametre grubu (l, m) için sırasıyla $(-1.419432, -7.269751)$ ve $(1.419432, 7.269751)$ modelleri seçilmişlerdir. Bu değerler, gerçek malzeme modellerinin nonlinear sabitleri arasındaki oran göz önünde bulundurularak seçilmişlerdir. Bu modeller için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalı üzerinde hesaplanan, $\Delta - K$ grafikleriyle, $\Gamma\Delta - K$ grafikleri sırasıyla Şekil C.15,19 ve Şekil C.16,20'de verilmektedirler.

Şekil C.16 ve Şekil C.20'ye dikkatlice bakıldığında, K dalga sayısına ve nonlinear malzeme parametrelerine bağlı olarak $\Gamma\Delta > 0$ ve $\Gamma\Delta < 0$ olduğu aralıkların varlığı görülür. Bu aralıklarda, Bölüm 4.2.4'te anlatıldığı üzere $\Gamma\Delta$ katsayılarının çarpımının işaretine bağlı çözüm davranışları kararlılık bakımından boyutsuz dalga sayısı K 'nın sağladığı değişik aralıklarda farklılık göstereceklerdir.

Diğer taraftan yine Şekil C.19 incelendiğinde yaklaşık olarak $K_{C_1} = 1.8531$ değerinde $\Delta - K$ eğrilerinin, dolayısıyla $\Gamma\Delta - K$ eğrilerinin, bir düşey asimptota sahip oldukları

görülür. Yani Δ , seçilen nonlinear malzeme parametrelerinden bağımsız olarak $K \rightarrow K_{C_1}$ için sınırsız olarak büyümektedir. Bu kritik dalga sayıları ilginç bir fiziksel durum olan ikinci harmonik rezonansa karşılık gelmektedir. Daha önce belirtildiği gibi eğer bir k_c dalga sayısında temel dalganın faz hızı ile bunun ikinci harmoniğinin faz hızı aynı ise böyle bir durumda (k_c, ω_c) ve $(2k_c, 2\omega_c)$ çiftlerinin her ikisi de dispersiyon bağıntısını sağlayacaklar, yani (k_c, ω_c) için hem $\det \mathbf{W}_1 = 0$ hem de $\det \mathbf{W}_2 = 0$ olacaktır. Bu durumda $k \rightarrow k_c$ için $\mathbf{U}_2^{(2)}$ çözümü sınırsız olarak büyüyecektir. Bu çözümün Δ 'ya katkısı nedeni ile de Δ , $k \rightarrow k_c$ için sınırsız büyümektedir. Bu durumda (4.5)'te verilen asimptotik açılımların uniform geçerli olmadıkları ve k_c 'nin civarında uniform geçerli bir çözümün nasıl elde edileceği hakkında Bölüm 4.2.4'ün sonunda bilgi verilmişti. Kısaca yukarıda verilen K_{C_1} boyutsuz dalga sayısı değerinde nonlinear dalga yayılımını temsil eden asimptotik dalga alanı bir NLS denklemiyle karakterize edilemez. Ayrıca, Şekil C.13 ve Şekil C.14'den de görüleceği üzere ilk dal için yaklaşık olarak $K_{C_2} = 1.976$, ikinci dal için de $K_{C_3} = 2.374$ ve $K_{C_4} = 4.972$ değerlerinde $\Gamma = 0$ olduğu; Şekil C.15 ve Şekil C.19'dan da $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme parametresine ait $\Delta - K$ eğrilerinde, yine yaklaşık olarak ilk daldaki $K_{C_5} = 0.847$, $K_{C_6} = 2.377$ ve $K_{C_7} = 2.637$, ikinci dalda ise $K_{C_8} = 1.3611$, $K_{C_9} = 2.1321$, $K_{C_{10}} = 2.1561$ ve $K_{C_{11}} = 3.128$ değerlerinde $\Delta = 0$ olduğu görülmektedir. Yani bu K_{C_i} ($i = 2, \dots, 11$) kritik boyutsuz dalga sayıları civarında $\Gamma \Delta = 0$ olduğu, yani marjinal hal olarak adlandırılan durumun ortaya çıktığı görülmektedir. Benzer gözlem $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme parametreleri için elde edilen $\Delta - K$ eğrilerinde de bazı kritik dalga sayıları için de yapılabilir. Bu dalga sayıları civarında dispersiyon ile nonlinearlik dengelenemeyeceği için asimptotik dalga alanı bir NLS denklemiyle karakterize edilemez. Bu dengenin sağlanabileceği farklı bir asimptotik analiz marjinal halin ortaya çıktığı kritik dalga sayıları civarında uygulanmalıdır [48].

Şimdi nonlinear simetrik dalgaların yayılabileceği, yani lineer özellikleri (4.1-3) eşitsizliklerini sağlayan gerçek malzemelerden oluşan bazı modeller için ilgili malzemelere ait dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait Γ , Δ ve $\Gamma \Delta$ 'nın K ile değişimleri incelenecektir. Nonlinear malzeme modelleri çeşitli uygulama alanlarında çok kullanılıyor olmalarına rağmen, bu malzeme modellerinin nonlinear parametrelerinin değerlerine bilimsel literatürde nadiren rastlanmaktadır. Lineer

özellikleri Çizelge 2.1’de verilen malzemeler için nonlinear malzeme sabitlerinin değerleri [34] numaralı kaynaktan alınıp, (l, m) değerleri hesaplanarak Çizelge 4.1’de verilmektedirler. Farklı malzemeler için nonlinear malzeme parametreleri [35] ve [36]’da da bulunabilir. Bu çizelgedeki modeller için Γ , Δ ve bunlara bağlı olarak $\Gamma\Delta$

Çizelge 4.1: Tabakayı oluşturan gerçek malzeme modellerine ait boyutlu ve boyutsuz nonlinear malzeme parametre değerleri

Malzeme	l (kp/mm ²)	m (kp/mm ²)	l	m
Demir	-1.7×10^4	-7.7×10^4	-2.058111	-9.3222034
Bakır	-1.6×10^4	-6.2×10^4	-3.354298	-12.997904

çarpımının K ’ya göre değişimleri dispersiyon bağıntısının ilk iki dalı için sayısal olarak hesaplanmışlardır. Şekil C.23, Şekil C.25 ve Şekil C.26 ’da demir için dispersiyon bağıntısının ilk dalının $0 < K \leq 7$ aralığındaki değerleri için sırasıyla Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ ’nın K ’ya göre değişimleri; Şekil C.24, Şekil C.27 ve Şekil C.28 ’de ise aynı malzeme için dispersiyon bağıntısının ikinci dalının $0.7061 \leq K \leq 7$ aralığındaki değerleri için katsayıların ve katsayı çarpımının K ’ya göre değişimleri aynı sırada verilmektedir. İkinci dala ait eğrilerden de görüleceği üzere, bu dal üzerinde hesaplanan $\Gamma\Delta$ çarpımının işareti seçilen K aralığına bağlı olarak farklılık göstermektedir. Bu durum ilk dal için (4.2) eşitsizliğini sağlayan kısmında da devam etmektedir. Fakat Şekil C.26 dikkatlice incelendiğinde anlaşılabacağı üzere, ilk dalın (4.3) eşitsizliğinin geçerli olduğu kısmı için $\Gamma\Delta > 0$ olmaktadır. Yani demir modeli için ilk dalın bu kısmındaki dalga sayıları için NLS denkleminin zarf soliton çözümü vardır. Yine her iki dal için hipotetik malzemelerde olduğu gibi demir için de bazı kritik dalga sayıları için marjinal durumun ortaya çıktığı görülmektedir.

Çizelge 4.1’deki ikinci model olan bakırdan oluşan tabakada yayılan simetrik dalgaların dispersiyon bağıntısının ilk iki dalı için $\Gamma - K$, $\Delta - K$ ve $\Gamma\Delta - K$ eğrileri sayısal olarak hesaplanmış ve bunlar ilk dal için sıra ile Şekil C.29, Şekil C.31 ve Şekil C.32’de; ikinci dal için ise Şekil C.30, Şekil C.33 ve Şekil C.34’te verilmektedirler.

Bu modelde ilk dal için dalga sayısının değişim aralığı diğer modellerde de olduğu gibi yine $0 < K \leq 7$ aralığı iken, ikinci dal ise değişim aralığı $0.7151 \leq K \leq 7$ şeklindedir. Şekil C.33’ten de görüleceği üzere ikinci dal üzerinde $K_{C_{12}} = 1.7431$ değeri civarında Δ sınırsız olarak büyümektedir. Bu kritik dalga sayısı bakır modeli için ikinci harmonik

rezonansa karşı gelmektedir. Ayrıca, her iki daldaki alt aralıklarda $\Gamma\Delta$ 'nın işareti farklılık göstermekte olup, diğer modellerde de görülen bazı kritik dalga sayılarında marjinal durumun oluşması bakır modeli için de görülmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı homojen izotrop sıkışabilir nonlinear elastik bir malzemeden oluşan tabakada küçük ama sonlu genlikli düzlem içi nonlinear dalgaların yayılması ile ilgili bazı problemlerin asimptotik çözümleri incelenmiştir.

İncelenen dalgaların sonlu ve küçük genliğe sahip olmaları dikkate alınarak dalga kılavuzu ile ilgili gerilme deformasyon bağıntıları, nonlinearlik derecesi ikiden büyük olan terimler ihmal edilerek yaklaştırılmışlardır. Buna bağlı olarak da hareket denklemleri ve sınır koşulları aynı mertebede yaklaştırılmışlardır. Bunlara ek olarak, sınır koşulları elde edilirken, serbest yüzeylerde gerilmelerin sıfır oldukları varsayılmıştır.

Bu koşullarda tanımlanan dalga hareketini betimleyen nonlinear sınır değer probleminde önce nonlinear malzeme sabitleri sıfır alınarak, düzlem içi lineer dalgaların hareketini tanımlayan lineer sınır değer probleminin çözümleri incelenmiştir. Bu inceleme, düzlem içi dalgaların simetrik (extensional) ve anti-simetrik (flexural) dalga modları için ayrı ayrı yapılmıştır. Dalgaların faz hızı c ile enine ve boyuna dalgaların lineer hızları c_T ve c_L 'lerin sağladığı tüm durumları kapsayan $c_T < c_L < c$, $c_T < c < c_L$ ve $c < c_T < c_L$ eşitsizlikleri için hem simetrik hem de anti-simetrik dalgaların varlığı ve bu dalgaların dispersif oldukları gösterilmiştir. Ayrıca, simetrik ve anti-simetrik dalgalara ait bu üç faz eşitsizliği için ayrı ayrı olmak üzere dispersiyon bağıntıları elde edilmiş ve bu bağıntıların ayrıntılı analizleri yapılmıştır.

Düzlem içi nonlinear dalgaların yayılımı ile ilgili ilk olarak küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılımı problemi incelenmiştir. Bu amaç için, yukarıda tanımlanan tabaka özelliklerinde dalga yayılımını betimleyen nonlinear sınır değer probleminin asimptotik çözümleri çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak, nonlinearlikle dispersiyon arasındaki denge sağlatılarak, küçük ama sonlu genlikli simetrik dalgaların yayılmasını asimptotik olarak karakterize eden K-dV denklemi elde edilmiştir. Daha sonra bir sinyalizasyon problemi tanımlanarak simetrik dalgaları üretebilecek sınır

yüklemesi etkisiyle, K-dV denkleminin bir çözümünü elde etmek için tanımlanan başlangıç koşulu arasındaki bağıntı inşa edilmiştir. Ayrıca, K-dV denkleminin tekil (solitary) dalga çözüm formları ile bunların dışındaki diğer çözümleri ifade edilmişlerdir. Bu çözüm formlarının spesifik olarak hangi lineer ve nonlinear malzeme sabitleri için elde edilebileceği konusunda, bu lineer ve nonlinear malzeme sabitlerinin değerleri ve dalga hareketini oluşturan sınır etkisi bilinerek çözüm formlarının yapısının tam olarak belirlenebileceği görülmüştür.

Daha sonra, nonlinear sınır değer probleminin simetrik dalgaların nonlinear self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden çözümü her üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumlar için ayrı ayrı olmak üzere çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenmiştir. İncelemenin sonunda üç faz eşitsizliğinin sağlandığı durumda da simetrik dalgaların self modülasyonunun bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin kararlılığı ve zarf soliton tipi çözümlerinin varlığı gibi çözüm özellikleri, NLS denkleminin dispersiyon teriminin katsayısı Γ ile nonlinear teriminin katsayısı Δ 'nın çarpımının işaretine bağlılığı bilinmektedir. Bu nedenle ilk olarak hipotetik malzeme modelleri için ve daha sonra gerçek malzeme modelleri için ayrı ayrı denklemin katsayıları Γ ve Δ ile, katsayı çarpımlarının $\Gamma\Delta$ 'nın boyutsuz dalga sayısı kh 'ya göre değişimleri, malzeme modelleri için elde edilen dispersiyon bağıntılarının ilk iki dalı için hesaplanmış ve şekillerle ifade edilmişlerdir.

Bu şekillerden ilk olarak, boyutsuz dalga sayılarının sağladığı alt aralıklar için $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin farklılık gösterdiği görülmüştür. Yani, dalga yayılımı esnasında, dalga sayısının bulunduğu aralık değerine ve seçilen malzemeye göre çözüm formları ve kararlılığı farklılık göstermektedir. Ayrıca, simetrik dalgaların dalga sayıları, seçilen lineer modele bağlı olarak ikinci harmonik rezonans etkileşim koşulunun sağlandığı kritik dalga sayılarına yaklaştıkça Δ 'nın sınırsız olarak büyüdüğü gözlemlenmiştir. Diğer yandan, bazı kritik dalga sayıları için de seçilen lineer malzeme sabitlerine bağlı olarak $\Gamma = 0$, nonlinear malzeme sabitlerine göre ise $\Delta = 0$ olabilmektedir.

Δ 'nın sınırsız olarak büyüdüğü ve Γ veya Δ 'nın sıfır olduğu dalga sayıları civarında asimptotik dalga alanı bir NLS denklemi ile karakterize edilemez. Bu durumlarda

asimptotik dalga alanını temsil etmek için yeni denklemler türetmek gerekir. Bu ifade edilen durumlar birbirinden bağımsız olarak farklı şekillerde ortaya çıktığı için bunları türetmek için asimptotik çözüm elde etme süreçlerini farklı şekillerde ortaya koymak gerekir. Bu çalışmanın sonuçlarından ortaya çıkan, gelecekteki çalışmalar için zengin bir problem takımı oluşturan bu durumlar için bu tür analizlerin nasıl yapılabileceği üzerinde duralım.

İlk olarak, yayılan dalgaların dalga sayısı, ikinci harmonik rezonansın koşullarının sağlandığı kritik dalga sayısına yaklaştığında, ikinci moda ait çözüm daha baskın hale gelir ve buna bağlı olarakta yer değiştirme fonksiyonlarının asimptotik açılımları bu kritik dalga sayısı civarında uniform geçerli olmazlar. Bu nedenle uniform geçerli bir çözüm inşa etmek için analiz, ilk mertebe çözümde temel mod ile ilgili $\mathcal{A}_1^{(1)}$ genlik fonksiyonunun yanında ikinci mod ile ilgili bir $\mathcal{A}_1^{(2)}$ fonksiyonu içerecek şekilde güncellenmelidir. Eğer pertürbasyon işlemi birinci mertebe probleminden sonra daha yüksek mertebe problemlerde bu değişiklik ile ilerletilirse, $\mathcal{A}_1^{(1)}$ ve $\mathcal{A}_1^{(2)}$ için lineer olmayan bir denklem sistemi türetilebilir.

Diğer bir problem olarak, NLS denklemin kararlılığı konusunda, denklemin katsayılarının çarpımının $\Gamma\Delta = 0$ olduğu ve marjinal stabilite hali olarak adlandırılan durumun incelenmesi düşünülebilir. $\Gamma = 0$ veya $\Delta = 0$ olduğu kritik dalga sayıları civarında nonlineerlik ve dispersiyon dengelenmemektedir. Bu dalga sayıları civarında nonlineerlik ve dispersiyonu dengeleyecek ve dalga hareketini asimptotik olarak karakterize edecek yeni bir denklem elde edecek şekilde asimptotik analiz değiştirilmelidir.

Bu problemlerin yanında, simetrik dalgaların birbirleriyle etkileşimlerinin asimptotik olarak analizi başka bir çalışmanın konusu olabilir. Ayrıca, nonlineer anti-simetrik dalgalar için, bu çalışma çerçevesinde tanımlanan dalga kılavuzunda oluşan küçük ama sonlu genlikli dalgaların yayılması problemi ile anti-simetrik dalgaların nonlineer self modülasyonu problemi de açık problemler olarak gelecekteki çalışmaların konuları olabilirler.

KAYNAKLAR

- [1] **Jeffrey, A. ve Kawahara, T.** (1981). *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*. Boston: Pitman.
- [2] **Teymur, M.** (1988). Non-linear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space, *Int. J. Eng. Sci.*, 26, 907-927.
- [3] **Fu, Y.B.** (1994). On the propagation of nonlinear travelling waves in an incompressible elastic plate, *Wave Motion*, 19, 271-292.
- [4] **Mayer, A.P.** (1995). Surface acoustic waves in nonlinear elastic media, *Physics Reports*, 256, 4-5.
- [5] **Porubov, A.V. ve Samsonov, A.M.** (1995). Long non-linear strain waves in layered elastic half space, *Int. J. Non-Linear Mechs.*, 30(6), 861-877.
- [6] **Teymur, M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two-layered incompressible elastic medium, *Int. J. Eng. Sci.*, 34, 227-241.
- [7] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2003). Nonlinear modulation of SH waves in a two layered plate and formation of surface SH waves, *Int. J. Non-Linear Mechs.*, 38, 1237-1250.
- [8] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2007). Nonlinear modulation of SH waves in an incompressible hyperelastic plate, *ZAMP*, 58, 457-474.
- [9] **Love, A.E.H.** (1944). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications Inc.
- [10] **Miklowitz, J.** (1978). *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Amsterdam: North Holland Publishing Co.
- [11] **Love, A.E.H.** (1911). *Some Problems of Geodynamics*. London: Cambridge Univ. Press.
- [12] **Ewing, W.M., Jardetsky, W.S. ve Press, F.** (1957). *Elastic Waves in Layered Media*. New York: McGraw Hill.
- [13] **Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S.** (1975). *Elastodynamics, Linear Theory*, Vol. 2. New York: Academic Press.
- [14] **Achenbach, J.D.** (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Co.
- [15] **Whitham, G.B.** (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons.
- [16] **Graff, K.F.** (1975). *Motion in Elastic Solids*. New York: Dover Publications Inc.

- [17] **Ahmetolan, S.** (2004). *Tabakalı elastic bir yarım uzayda nonlinear Rayleigh dalgalarının yayılması* (Doktora tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [18] **Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S.** (1974). *Elastodynamics, Finite Motions, Vol.1*. New York: Academic Press.
- [19] **Ljamov, V.E., Hsu, T.A. ve White, R.M.** (1972). Surface elastic wave velocity and second harmonic generation in an elastically non-linear medium, *J. App. Phys.*, 43(3), 800-804.
- [20] **Tierstsen, H.F. ve Baumhauer, J.C.** (1974). Second harmonic generation and parametric excitation of surface waves in elastic and piezoelectric solids, *J. App. Pyhs.*, 45(10), 4272-4287.
- [21] **Kalyanasundaram, N.** (1981). Nonlinear surface acoustic waves on isotropic solid, *Int. J. Eng. Sci.* 19(2), 279-286.
- [22] **Lardner, R.W.** (1983). Nonlinear surface waves on an elastic solid, *Int. J. Eng. Sci.*, 21(11), 1331-1342.
- [23] **David, E.A.** (1985). A uniform asymptotic solution for nonlinear surface acoustic waves, *Int. J. Eng. Sci.*, 23, 699-708.
- [24] **Kalyanasundaram, N.** (1981). Finite amplitude Love waves on an isotropic layered half space, *Int. J. Eng. Sci.*, 19, 287-293.
- [25] **Bataille, K. ve Fund, F.** (1982). Nonlinear waves in elastic media, *Pysica D*, 6(1), 95-104.
- [26] **Maugin, G.A. ve Hadouaj, H.** (1991). Solitary surface transverse waves on an elastic substrate coated with a thin film, *Phys. Rev. B*, 44(3), 1266-1280.
- [27] **Demirci, A.** (2008). *Nonlinear ince bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda yüzey SH dalgaların yayılması* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [28] **Maugin, G.A. ve Hadouaj, H. ve Malomed, B.A.** (1992). Nonlinear coupling between shear horizontal surface solitons and Rayleigh modes on elastic structures, *Phys. Rev. B*, 45(17), 9688-9694.
- [29] **Benjamin, T.B.** (1966). Internal waves of finite amplitude and permanent form, *J. Fluid Mechs.*, 25(2), 241-270.
- [30] **Ono, H.** (1975). Algebraic solitary waves in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 39(4), 1082-1091.
- [31] **Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. ve Morris, H.C.** (1982). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press.
- [32] **Ablowitz, M.J. ve Clarckson, P.A.** (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [33] **Tolstoy, I. ve Usdin, E.** (1953). Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: A ray theory, *Geophysics*, 18, 844-870.

- [34] **Truesdell, C. ve Noll, W.** (1965). *Nonlinear Field Theories of Mechanics*, in *Encyclopedia of Physics Acoustic waves*, Ed. by Flügge, S., Vol.3. Berlin: Springer-Verlag.
- [35] **Hughes, D.S. ve Kelly, J.L.** (1953). Second order elastic deformations and solids, *Physical Review*, 92(5), 1145-1149.
- [36] **Samsonov, A.M.** (2001). *Strain Solitons in Solids*. USA: Chapman&Hall/CRC.
- [37] **Jeffrey, A. ve Kakutani, T.** (1972). Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, *SIAM Rev.*, 14, 582-643.
- [38] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. ve Miura, R.M.** (1967). Method for solving the K-dV equation, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095-1097.
- [39] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. ve Miura, R.M.** (1974). Korteweg-de Vries equation and generalizations VI. Methods for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27, 97-103.
- [40] **Ablowitz, M.J. ve Segur, H.** (1981). *Solitons and Inverse Scattering Transform*, *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Philadelphia: SIAM.
- [41] **Drazin, P.G. ve Johnson, R.S.** (1989). *Solitons: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [42] **Achenbach, J.D. ve Epstein, H.** (1967). Dynamic interaction of a layer and a half space, *ASCE Journ. of Engn. Mech. Div.*, 5, 27-42.
- [43] **Teymur, M.** (1988). Finite Amplitude Love Waves in an Incompressible Elastic Layered Half Space. In D.F. Parker, G.A. Maugin (Eds.), *Recent Developments in Surface Acoustic Waves* (pp.54-62). Berlin: Springer-Verlag.
- [44] **Hasimoto, H. ve Ono, H.** (1972). Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 33, 805-811.
- [45] **Ramoissenet, M.** (1999). *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. Berlin: Springer-Verlag.
- [46] **Zakharov, V.E. ve Shabat, A.B.** (1973). Interaction between solitons in a stable medium, *Sov. Phys. JETP*, 37, 823-828.
- [47] **Zakharov, V.E. ve Shabat, A.B.** (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP*, 34(1), 62-69.
- [48] **Kakutani, T. ve Michihiro, K.** (1983). Marginal state of modulational instability, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 52(12), 4129-4137.
- [49] **Parkes, E.J.** (1987). The modulation of weakly nonlinear waves near the marginal state of instability, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20, 2025-2036.

EKLER

EK A : İkinci Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar

EK B : Üçüncü Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar

EK C : Şekiller

EK A: İkinci Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar

Birinci eşitsizlik için ikinci mertebe problemde, (4.40) ile verilen $\alpha_2^{(2)}, \gamma_i^{(2)}$ katsayı fonksiyonları içerisinde tanımlı $H_i^{(2)}, X_{ij}^{(2)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} H_1^{(2)} &= R_{11} p_L (\eta_3 + 2\eta_4) (p_T^2 + 2p_L^2 - 1), \\ H_2^{(2)} &= 2R_{12} [\eta_4 - 2(\eta_3 + \eta_4)p_T^2 + \eta_4 p_T^4], \\ H_3^{(2)} &= -R_{11} [\eta_2 + (2\eta_2 - \eta_3 + 2\eta_4)p_L^2 + \eta_1 p_L^4], \\ H_4^{(2)} &= R_{12} p_L (\eta_3 + 2\eta_4) (3p_T^2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} X_{10}^{(2)} &= [\eta_1 + p_L^2 (\eta_2 (2 + p_L^2) - \eta_3 - 2\eta_4)] R_{11}^2 - [\eta_4 - 2(\eta_3 + \eta_4)p_T^2 + \eta_4 p_T^4] R_{12}^2, \\ X_{11}^{(2)} &= \eta_4 (1 + p_T^2)^2 R_{12}^2, \quad X_{12}^{(2)} = \eta_1 (1 + p_L^2)^2 R_{11}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} X_{13}^{(2)} &= R_{11} R_{12} p_T [3\eta_3 + 8\eta_4 - \eta_3 p_L^2 + 2\eta_4 (1 + p_L^2) p_T^2], \\ X_{14}^{(2)} &= R_{11} R_{12} p_L [4\eta_4 + \eta_3 (3 + p_L^2) - 2(\eta_3 + \eta_4 (3 + p_L^2)) p_T^2], \\ X_{21}^{(2)} &= \eta_4 p_T (1 + p_T^2)^2 R_{12}^2, \quad X_{22}^{(2)} = \eta_1 p_L (1 + p_L^2)^2 R_{11}^2, \\ X_{23}^{(2)} &= -R_{11} R_{12} p_T p_L (\eta_3 + 2\eta_4) (1 + 2p_L^2 - p_T^2), \\ X_{24}^{(2)} &= -R_{11} R_{12} p_T p_L [\eta_3 (p_L^2 - (2 + p_L^2) p_T^2) + \eta_4 (4 + 2p_L^2 (3 + p_T^2))]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Birinci eşitsizlik için ikinci mertebe pertürbasyon probleminde (4.47) sınır koşullarında tanımlanan $K_i^{(2)}$ katsayılarının açık halleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} K_1^{(2)} &= ic_T^2 [p_L R_{11} \sin(khp_L) - R_{12} \sin(khp_T)], \\ K_2^{(2)} &= iR_{11} k^2 (1 + p_L^2) \{ [(n_3 - 2n_4 p_T^2) R_{12} \sin(khp_T) \\ &\quad - p_L R_{11} (n_3 + 2n_4) \sin(kkp_L)] \cos(khp_L) \}, \\ K_3^{(2)} &= (c_L^2 - 2c_T^2) [R_{11} \cos(khp_L) + R_{12} p_T \cos(khp_T)], \\ K_4^{(2)} &= \frac{k^2}{2} \left\{ [\eta_4 (p_T^2 - 1)^2 - 2\eta_3 p_T^2] R_{12}^2 - [\eta_2 + (2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4) p_L^2 + \eta_1 p_L^4] R_{11}^2 \right. \\ &\quad - [\eta_2 + (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) p_L^2 + \eta_1 p_L^4] R_{11}^2 \cos(2khp_L) \\ &\quad - \eta_4 (1 + p_T^2)^2 R_{12}^2 \cos(2khp_T) \\ &\quad + (n_3 + 2n_4) p_L R_{11} R_{12} [4p_L p_T \cos(khp_L) \sin(khp_T) \\ &\quad \left. + 2(p_T^2 - 1)^2 \cos(khp_T) \sin(khp_L)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Birinci eşitsizlik için ikinci mertebe pertürbasyon probleminde (4.51a,b) özel çözümlerinde tanımlanan $C_i^{(2)}$ katsayılarının açık halleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
C_1^{(2)} &= C_4^{(2)} = C_5^{(2)} = C_8^{(2)} = C_{10}^{(2)} = C_{13}^{(2)} = C_{14}^{(2)} = C_{15}^{(2)} = 0, \\
C_{17}^{(2)} &= C_{19}^{(2)} = C_{21}^{(2)} = C_{22}^{(2)} = C_{24}^{(2)} = 0, \\
C_2^{(2)} &= -\frac{R_{11}}{k p_L c_L^2} \left[\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + k c_L^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right], \quad C_3^{(2)} = \frac{i \omega R_{11}}{p_L c_L^2 k^3} \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right] \\
C_6^{(2)} &= -\frac{R_{12}}{k p_T c_T^2} \left[\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + k c_T^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right], \quad C_7^{(2)} = \frac{i \omega R_{12}}{p_T c_T^2 k^3} \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right] \\
C_9^{(2)} &= -\frac{i k^3 X_{10}^{(2)}}{4(c_L^2 k^2 - \omega^2)}, \quad C_{11}^{(2)} = -\frac{\eta_1 \omega^4 R_{11}^2}{4 p_L k^2 c_L^6}, \quad C_{12}^{(2)} = -\frac{i \eta_1 \omega^4 R_{11}^2}{8 p_L k^3 c_L^6}, \tag{A.5} \\
C_{16}^{(2)} &= \frac{i \eta_4 \omega^4 R_{12}^2}{4 k^3 c_T^4 (c_T^2 - c_L^2)}, \\
C_{18}^{(2)} &= \frac{i R_{11} R_{12}}{2 c_L^2 c_T^2 k S_1^{(2)}} \left\{ c_L^4 \left[16 c_T^6 k^6 (\eta_3 + 2 \eta_4) (p_L - p_T) + c_T^4 k^4 (\eta_3 + 2 \eta_4) (16 p_T \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 23 p_L + p_L^3) \omega^2 + c_T^2 k^2 (\eta_3 (5 p_L + p_T) + 2 \eta_4 (4 p_L - p_L^3 + p_T)) \omega^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \eta_4 (3 p_L + p_T) \omega^6 \right] + c_T^2 \omega^2 \left[4 c_T^4 k^2 \omega^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) p_T + c_L^2 (4 c_T^4 k^4 (\eta_3 + 2 \eta_4) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. * (p_L + p_T) - c_T^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (2 p_L + 9 p_T) \omega^2 + 2 \eta_4 (4 p_L + p_T) \omega^4) \right] \right\} \\
C_{20}^{(2)} &= \frac{i R_{11} R_{12}}{2 k S_2^{(2)}} \left\{ 2 k^2 \omega^2 (c_L^2 - c_T^2) (p_L - p_T) [c_L^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (p_L p_T - 1) \right. \\
&\quad \left. - c_T^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (p_L p_T - 1) - (\eta_3 + 2 \eta_4) \omega^4] \right. \\
&\quad \left. - \left(4 c_T^2 k^2 + c_L^2 k^2 (p_L - p_T)^2 - 4 \omega^2 \right) [(p_L - p_T) \omega^2 (c_T^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) - 2 \eta_4 \omega^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 c_L^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (2 c_T^2 k^2 (p_L + p_T) - p_L \omega^2) \right] \right\} \\
C_{23}^{(2)} &= \frac{R_{11} R_{12}}{2 k S_3^{(2)}} \left\{ \omega^2 \left(k^2 \left(4 c_L^2 + c_T^2 (p_L + p_T)^2 - 4 \omega^2 \right) \right) [k^2 (c_L^2 - 2 c_T^2) (\eta_3 + 2 \eta_4) \right. \\
&\quad \left. (p_L p_T + 1) (\eta_3 - 2 \eta_4) \omega^2] + 2 k^2 (c_L^2 - c_T^2) (p_L + p_T) [\omega^2 (p_L + p_T) \right. \\
&\quad \left. (c_T^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) - 2 \eta_4 \omega^2) + 2 c_L^2 k^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (2 c_T^2 k^2 (p_L - p_T) - p_L \omega^2) \right] \right\} \\
C_{25}^{(2)} &= \frac{-R_{11} R_{12}}{2 k c_T^4 c_L^4 S_4^{(2)}} \left\{ 8 k^6 c_L^4 c_T^4 (c_L^2 - c_T^2) (\eta_3 + 2 \eta_4) (p_L^2 - p_T^2) + k^4 c_L^2 c_T^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) \right. \\
&\quad \left(8 c_L^4 + 2 c_T^4 (p_L - p_T)^2 (p_L p_T - 2) - c_L^2 c_T^2 (16 + p_L p_T + p_L^3 p_T) \right) \omega^2 \\
&\quad \left. - k^2 c_L^2 c_T^2 (c_T^2 (\eta_3 + 2 \eta_4) (10 p_L p_T - 11) - 2 c_L^2 (3 \eta_3 + 14 \eta_4) (p_L p_T - 1)) \omega^4 \right. \\
&\quad \left. - (c_L^2 c_T^2 (\eta_3 - 10 \eta_4) + 4 c_L^4 \eta_4 - c_T^4 (\eta_3 + 2 \eta_4)) \omega^6 \right\}
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
S_1^{(2)} &= (c_T^2 \omega^2 + c_L^2 (2 c_T^2 k^2 (1 + p_L p_T) - 3 \omega^2)) (c_L^2 (2 c_T^2 k^2 (p_L p_T - 1) + 3 \omega^2) - 3 c_T^2 \omega^2) \\
S_2^{(2)} &= (3 c_T^2 \omega^2 + c_L^2 (2 c_T^2 k^2 (p_L p_T - 1) - \omega^2)) (c_L^2 (2 c_T^2 k^2 (p_L p_T - 1) + 3 \omega^2) - c_T^2 \omega^2) \\
S_3^{(2)} &= (2 c_L^2 c_T^2 k^2 (p_L p_T + 1) + (c_T^2 - 3 c_L^2) \omega^2) (c_L^2 (2 c_T^2 k^2 (p_L p_T + 1) + \omega^2) - 3 c_T^2 \omega^2) \\
S_4^{(2)} &= \left(c_L^2 k^2 \left(4 + (p_L - p_T)^2 \right) - 4 \omega^2 \right) \left(c_T^2 k^2 \left(4 + (p_L - p_T)^2 \right) - 4 \omega^2 \right) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Birinci eşitsizlik için ikinci mertebe pertürbasyon probleminde (4.67)'de görülen $\mathbf{h}$ vektörünün açık ifadesi aşağıda verilmektedir:

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{t}. \quad (\text{A.7})$$

Burada $\mathbf{W}_2^{-1}$ matrisi, $m = 2$ için (4.28)'de tanımlanan matrisin tersi, $\mathbf{t}$ vektörü ise bileşenleri aşağıda tanımlanan sabit vektördür:

$$\begin{aligned} t_1 = & iR_{11} \cos(khp_L) (k/c_T)^2 (1 + p_L^2) [R_{11}p_L(\eta_3 + 2\eta_4) \sin(khp_L) \\ & - R_{12}(\eta_3 - 2\eta_4p_T^2) \sin(khp_T)] - iC_{11}^{(2)} (khp_L \cos(2khp_L) - \sin(2khp_L)) \\ & + 2kC_{12}^{(2)} \sin(2khp_L) + 2kp_TC_{16}^{(2)} \sin(2khp_T) + k(p_L + p_T)C_{18}^{(2)} \sin(kh(p_L + p_T)) \\ & + k(p_L - p_T)C_{20}^{(2)} \sin(kh(p_L - p_T)) - 2ik [C_{23}^{(2)} \sin(kh(p_L + p_T)) \\ & + C_{25}^{(2)} \sin(kh(p_L - p_T))] , \\ t_2 = & \frac{k^2}{2} \{ R_{11}^2 [\eta_2 + (2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)p_L^2 + \eta_1p_L^4 + (\eta_2 \\ & + (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)p_L^2 + \eta_1p_L^4) \cos(2khp_L)] + R_{12}^2 [2(\eta_3 + 2\eta_4)p_T^2 - \eta_4(1 + p_T^4) \\ & + \eta_4(1 + p_T^2)^2 \cos(2khp_T)] + R_{11}R_{12} [p_L(\eta_3 + 2\eta_4)(1 - p_T^2) \cos(kh(p_L - p_T)) \\ & + (\eta_3 + 2\eta_4)(p_L(p_T^2 - 1) \cos(kh(p_L + p_T)) - 4p_Tp_L^2 \cos(khp_L) \cos(khp_T))] \} \\ & + C_{11}^{(2)} [2kh(c_L^2(1 + p_L^2) - 2c_T^2) \sin(2khp_L) - p_Lc_L^2 \cos(2khp_L)] \\ & - 2ik [(c_L^2 - 2c_T^2)C_9^{(2)} + p_Lc_L^2C_{12}^{(2)} \cos(2khp_L) + (c_L^2 - 2c_T^2)C_{16}^{(2)} \cos(2khp_T)] \\ & - k [2i(c_L^2 - 2c_T^2)C_{18}^{(2)} + c_L^2(p_L + p_T)C_{23}^{(2)}] \cos(kh(p_L + p_T)) \\ & - k [2i(c_L^2 - 2c_T^2)C_{20}^{(2)} - c_L^2(p_L - p_T)C_{25}^{(2)}] \cos(kh(p_L - p_T)). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Üçüncü eşitsizlik için ikinci mertebe problemde, (4.120) ile verilen $\rho_2^{(2)}, \lambda_i^{(2)}$ katsayı fonksiyonları içerisinde tanımlı $J_i^{(2)}, M_{ij}^{(2)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} J_1^{(2)} &= -ir_L(1 + 2r_L^2 + r_T^2)R_{11}(\eta_3 + 2\eta_4), \\ J_2^{(2)} &= 2R_{12}(\eta_4 + r_T^2\eta_4 + 2r_T^2(\eta_3 + \eta_4)), \\ J_3^{(2)} &= -2R_{11}(\eta_2 - 2r_L^2\eta_2 + r_L^2(r_L^2\eta_1 + \eta_3 + 2\eta_4)), \\ J_4^{(2)} &= -ir_L(1 + 3r_T^2)R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4). \\ M_{10}^{(2)} &= R_{12}^2(2r_T^2\eta_3 + (1 + r_T^2)^2\eta_4) - R_{11}^2(\eta_1 + r_L^2((r_L^2 - 2)\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)), \\ M_{11}^{(2)} &= -R_{12}\eta_4(r_T^2 - 1)^2, \quad M_{12}^{(2)} = -R_{11}^2\eta_1(r_L^2 - 1)^2, \\ M_{13}^{(2)} &= -ir_TR_{11}R_{12}((3 + r_L^2)\eta_3 + 2(4 + (r_L^2 - 1)r_T^2)\eta_4), \\ M_{14}^{(2)} &= -ir_LR_{11}R_{12}((r_L^2 - 2r_T^2 - 3)\eta_3 - 4\eta_4 + 2(r_L^2 - 3)r_T^2\eta_4), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
M_{21}^{(2)} &= -r_T R_{12}^2 \eta_4 (r_T^2 - 1)^2, & M_{22}^{(2)} &= -r_L R_{11}^2 \eta_1 (r_L^2 - 1)^2, \\
M_{23}^{(2)} &= -ir_L r_T R_{11} R_{12} (2r_L^2 - r_T^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4), \\
M_{24}^{(2)} &= iR_{11} R_{12} ((r_L^2 + (r_L^2 - 2)r_T^2)\eta_3 - (4 + 2r_L^2(r_T^2 - 3))\eta_4).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Üçüncü eşitsizlik için ikinci merteye pertürbasyon probleminde (4.127) sınır koşullarında tanımlanan $N_i^{(2)}$ katsayılarının açık halleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
N_1^{(2)} &= c_T^2 [R_{12} \sinh(khr_T) - ir_L R_{12} \sinh(khr_L)], \\
N_2^{(2)} &= k^2 (r_L^2 - 1) R_{11} \cosh(khr_L) [R_{12} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4) \sinh(khr_T), \\
&\quad - ir_L R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4) \sinh(khr_L)], \\
N_3^{(2)} &= i (c_L^2 - 2c_T^2) [r_T R_{12} \cosh(khr_T) - iR_{11} \cosh(khr_L)], \\
N_4^{(2)} &= \frac{k^2}{2} \{ R_{12}^2 (\eta_4 + r_T^4 \eta_4 + 2r_T^2 (\eta_3 + \eta_4)) - R_{11}^2 (r_L^4 \eta_1 + \eta_2 + r_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4 - 2\eta_2)) \\
&\quad - R_{11}^2 (r_L^4 \eta_1 + \eta_2 - r_L^2 (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)) \cosh(2khr_L) \\
&\quad - (r_T^2 - 1)^2 R_{12}^2 \eta_4 \cosh(2khr_T) - iR_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) [4r_L^2 r_T \cosh(khr_T) \\
&\quad * \cosh(khr_L) - 2r_L (1 + r_T^2) \sinh(khr_T) \sinh(khr_L)] \}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Üçüncü eşitsizlik için ikinci merteye pertürbasyon probleminde (4.131a,b) özel çözümlerinde tanımlanan $C_i^{(2)}$ katsayılarının açık halleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
C_1^{(2)} &= C_4^{(2)} = C_5^{(2)} = C_8^{(2)} = C_{10}^{(2)} = C_{13}^{(2)} = C_{14}^{(2)} = C_{15}^{(2)} = 0, \\
C_{17}^{(2)} &= C_{20}^{(2)} = C_{21}^{(2)} = C_{22}^{(2)} = C_{23}^{(2)} = 0, \\
C_2^{(2)} &= \frac{iR_{11}}{kr_L c_L^2} \left[\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + kc_L^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right], \quad C_3^{(2)} = \frac{\omega R_{11}}{r_L c_L^2 k^3} \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right] \\
C_6^{(2)} &= \frac{iR_{12}}{kr_T c_T^2} \left[\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + kc_T^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right], \quad C_7^{(2)} = \frac{\omega R_{12}}{r_T c_T^2 k^3} \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right] \\
C_9^{(2)} &= \frac{ik^3 M_{10}^{(2)}}{4(c_L^2 k^2 - \omega^2)}, \quad C_{11}^{(2)} = -\frac{i\eta_1 \omega^4 R_{11}^2}{4r_L k^2 c_L^6}, \quad C_{12}^{(2)} = -\frac{\eta_1 \omega^4 R_{11}^2}{8r_L k^3 c_L^6}, \\
C_{16}^{(2)} &= \frac{i\eta_4 \omega^4 R_{12}^2}{4k^3 c_T^4 (c_T^2 - c_L^2)}, \\
C_{18}^{(2)} &= \frac{r_T R_{11} R_{12}}{c_L^2 S_1^{(2)}} [12k^2 \omega^4 c_T^8 (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^2 c_L^2 c_T^4 (28k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&\quad - 18\omega^4 \eta_4 - 67k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^6 (6\omega^6 \eta_4 + 64k^6 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&\quad + k^2 \omega^4 c_T^2 (34\eta_4 - 3\eta_3) - 4k^4 \omega^2 c_T^4 (19\eta_3 + 54\eta_4) - c_L^4 (52\omega^6 c_T^2 \eta_4 \\
&\quad - 48k^4 \omega^2 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4) + 64k^6 c_T^8 (\eta_3 + 2\eta_4) - 2k^2 \omega^4 c_T^4 (29\eta_3 + 102\eta_4))] , \\
C_{19}^{(2)} &= \frac{r_T R_{11} R_{12}}{S_1^{(2)}} [\omega^2 c_T^4 (18\omega^4 \eta_4 - 19k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + 28k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&\quad + c_L^4 (10\omega^6 \eta_4 - 64k^6 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4) + 4k^4 \omega^2 c_T^4 (21\eta_3 + 26\eta_4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 \omega^4 c_T^2 (50\eta_4 - 11\eta_3)) - 2c_L^2 (46\omega^6 c_T^2 \eta_4 + 56k^4 \omega^2 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 32k^6 c_T^8 (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^4 c_T^4 (15\eta_3 + 58\eta_4)) \Big], \\
C_{24}^{(2)} &= \frac{ir_T R_{11} R_{12} \omega^2}{c_L^2 S_1^{(2)}} \Big[\omega^2 c_T^6 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2 c_T^4 (4k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 21k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^4 (5\eta_3 + 28\eta_4)) + c_L^4 c_T^2 (2k^2 \omega^2 c_T^2 (17\eta_3 + 14\eta_4) \\
& - 16k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^4 (9\eta_3 + 130\eta_4)) - c_L^6 (12\omega^4 \eta_4 \\
& - 4k^4 c_T^4 (3\eta_3 + 22\eta_4) + k^2 \omega^2 c_T^2 (21\eta_3 + 130\eta_4)) \Big], \\
C_{25}^{(2)} &= -\frac{i\omega^2 (\omega^2 - k^2 c_L^2) (\omega^2 - k^2 c_T^2) R_{11} R_{12}}{k^2 c_L^4 r_L r_T S_1^{(2)}} \Big[6\omega^2 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + c_L^2 c_T^4 (28k^2 c_T^2 - 61\omega^2) (\eta_3 + 2\eta_4) - 8c_L^4 c_T^2 (2k^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + c_L^6 (4k^2 c_T^2 (3\eta_3 + 22\eta_4) + \omega^2 (9\eta_3 + 26\eta_4))) \Big]. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
S_1^{(2)} &= kc_T^2 (c_L^2 - c_T^2) \Big[c_L^4 (64k^4 c_T^4 - 9\omega^4 - 64k^2 \omega^2 c_T^2) - 9\omega^4 c_T^4 \\
& + c_L^2 (82\omega^4 c_T^2 - 64k^2 \omega^2 c_T^4) \Big] \tag{A.13}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Üçüncü eşitsizlik için ikinci mertebe pertürbasyon probleminde (4.137)'de görülen $\mathbf{w}$ vektörünün açık ifadesi aşağıda verilmektedir:

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{l}. \tag{A.14}$$

Burada $\mathbf{W}_2^{-1}$ matrisi, $m = 2$ için (4.116)'da tanımlanan matrisin tersi, $\mathbf{l}$ vektörü ise bileşenleri aşağıda tanımlanan sabit vektördür:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1}{c_T^2} \Big\{ 4hkr_L c_T^2 C_{11}^{(2)} \cosh(2khr_L) - \frac{1}{2}i \Big[-2ikc_T^2 (2C_{16}^{(2)} r_T \sinh(2khr_T) \\
& + (2iC_{25}^{(2)} + C_{18}^{(2)} r_L + C_{19}^{(2)} r_T) \cosh(khr_T) \sinh(khr_L) \Big) \\
& + 2k \cosh(khr_L) \sinh(khr_T) (2C_{24}^{(2)} c_T^2 - ic_T^2 (C_{19}^{(2)} r_L + C_{18}^{(2)} r_T) \\
& - ik(r_L^2 - 1) R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4)) + \Big(2ic_T^2 (C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)}) \\
& - k^2 r_L (r_L^2 - 1) R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \sinh(2khr_L) \Big] \Big\}, \\
l_2 &= \frac{1}{2} \Big\{ k(kR_{11}^2 (\eta_2 - 2r_L^2 \eta_2 + r_L^2 (r_L^2 \eta_1 + \eta_3 + 2\eta_4)) - 4i(c_L^2 - 2c_T^2) C_9^{(2)}) \\
& - k^2 R_{12}^2 (\eta_4 (1 + r_T^4) + 2r_T^2 (\eta_3 + \eta_4)) + \Big[2c_L^2 (2kC_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)}) r_L \\
& + k^2 R_{11}^2 (r_L^4 \eta_1 + \eta_2 - r_L^2 (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)) \Big] \cosh(2khr_L) \\
& + 2k \Big[2ikr_L^2 r_T R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) - 2i(c_L^2 - 2c_T^2) C_{18}^{(2)} \\
& - c_L^2 (C_{25}^{(2)} r_L + C_{24}^{(2)} r_T) \Big] \cosh(khr_T) \sinh(khr_L) + k \Big[k(r_T^2 - 1)^2 R_{12}^2 \eta_4 \\
& - 4i(c_L^2 - 2c_T^2) C_{16}^{(2)} \Big] \cosh(2khr_T) - 4ihkC_{11}^{(2)} (2c_T^2 + c_L^2 (r_L^2 - 1)) \sinh(2khr_L) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2k \left[i(4C_{19}^{(2)} c_T^2 - kr_L(1 + r_T^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)) \right. \\
& \left. - c_L^2(2iC_{19}^{(2)} + C_{24}^{(2)}r_L + C_{25}^{(2)}r_T) \right] \sinh(khr_T) \sinh(khr_L) \Big\}. \quad (\mathbf{A.15})
\end{aligned}$$

EK B: Üçüncü Mertebe Pertürbasyon Probleminde Tanımlanan Katsayılar

Birinci eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.71) ile verilen $\alpha_i^{(3)}, \beta_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonları içerisinde tanımlı $T_i^{(3)}, X_{ij}^{(3)}$ ve $Y_{ij}^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
 T_1^{(3)} &= -\frac{k\omega R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (1 + p_L^2)}{c_L^2} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} - k^2 [(\eta_3 + 2\eta_4) (1 + p_L^2) p_L^2 R_{11}^2 \\
 &\quad + m^2 \left((\eta_2 + (2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) p_L^2 + \eta_1 p_L^4) R_{11}^2 + \eta_4 (1 + p_T^2)^2 R_{12}^2 \right)] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1}, \\
 T_2^{(3)} &= -2ik^3 p_L^2 R_{11}^2 (\eta_3 - 2\eta_4 p_L^2) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2} + \frac{kR_{11}^2}{c_L^2} \left[(\eta_3 + 2\eta_4) (p_L^2 - 1) \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \right. \\
 &\quad + (k(c_L^2 - c_T^2) (\eta_2 + (2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4) p_L^2 + \eta_1 p_L^4) - \omega^2 (\eta_3 - 2\eta_4 p_L^2) \\
 &\quad \left. + kc_L^2 (\eta_1 - 2\eta_4 + 2(\eta_2 - 2\eta_4) p_L^2 + (\eta_3 - 2\eta_4) p_L^4)) \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \right] \\
 &\quad + \frac{2kR_{11}R_{21}p_L^2 (\eta_3 - 2\eta_4 p_L^2)}{c_L^2} \mathcal{A}_1 (\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1}, \\
 T_3^{(3)} &= 2ik^3 p_T^2 R_{12}^2 (\eta_3 - 2\eta_4 p_T^2) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2} + \frac{kR_{12}^2}{c_T^2} [kc_T^2 (\eta_3 + 3\eta_3 p_T^2 - \eta_4 (1 + 3p_T^4)) \\
 &\quad + (\eta_3 - 2\eta_4 p_T^2) \omega^2 + m^2 k(c_L^2 - c_T^2) (\eta_4 - 2(\eta_3 + \eta_4) p_T^2 + \eta_4 p_T^4)] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
 &\quad + \frac{2kR_{12}R_{22}p_T^2 (\eta_3 - 2\eta_4 p_T^2)}{c_T^2} \mathcal{A}_1 (\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1}, \\
 T_4^{(3)} &= iR_{11}R_{12}k^3 (p_L (p_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4 (1 - p_L^2) - \eta_3)) \\
 &\quad + p_T (\eta_3 + p_L^2 (2\eta_4 (p_T^2 - 1) - \eta_3))) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2} + \frac{\omega k R_{11} R_{12}}{2c_T^2 c_L^2 p_L p_T} [c_L^2 p_L (1 + p_L^2) \\
 &\quad (\eta_3 + 2\eta_4 (2p_L - 3p_T) p_T) + c_L^2 p_T (1 + 3p_L^2 - 2p_L p_T) (\eta_3 - 2\eta_4 p_T^2)] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \\
 &\quad + \frac{R_{11}R_{12}}{2c_T^2 c_L^2 p_L p_T} [c_T^2 p_L p_T ((p_L - p_T) (\eta_3 - 2\eta_4 p_T^2) \omega^2 - 2c_T^2 k^2 (\eta_3 + 2\eta_4) p_L \\
 &\quad (1 + 2p_L p_T - p_T^2)) + c_L^2 p_L (p_L - p_T) (\eta_3 p_L + 2\eta_4 (p_L + p_T + p_L^2 p_T)) \omega^2 \\
 &\quad + k^2 c_L^2 c_T^2 ((p_T + p_L (1 + p_T (-p_T + p_L (3 + (p_L + p_T)^2)))) \eta_3 - 2p_L^3 \eta_4 \\
 &\quad + 2p_L^2 (2 + p_L^2) p_T \eta_4 - 2p_T^3 \eta_4 + 2p_L p_T^2 (2\eta_1 + p_L^2 \eta_4 - 2(\eta_2 + \eta_4)))] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
 &\quad + [(k^3/2) (p_L - p_T) ((1 - p_L^2) R_{12} R_{21} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) + R_{11} R_{22} ((1 + p_L^2 + 2p_L p_T) \\
 &\quad * \eta_3 + 2p_T (p_T + p_L (2 + p_L p_T)) \eta_4))] \mathcal{A}_1 (\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1} - \frac{k^3}{2} (1 + p_L^2) (p_L - p_T) \\
 &\quad (R_{12} R_{21} - R_{11} R_{22}) (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \overline{\mathcal{A}_1} (\mathcal{A}_1)_{x_1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5^{(3)} &= iR_{11}R_{12}k^3(p_L + p_T)(p_L p_T - 1)(2p_L p_T \eta_4 - \eta_3) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2} \\
&+ \frac{k\omega R_{11}R_{12}}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} [c_T^2 p_T (1 + 3p_L^2 + 2p_L p_T)(-\eta_3 + 2p_T^2 \eta_4) + c_L^2 p_L (1 + p_L^2) \\
&(\eta_3 - 2p_T(2p_L + 3p_T)\eta_4)] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} - \frac{R_{11}R_{12}}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} [c_T^2 p_L p_T \\
&(2k^2 c_T^2 p_L (2p_L p_T + p_T^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^2(p_L + p_T)(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4)) \\
&+ c_L^2(\omega^2 p_L(p_L + p_T)(2(p_T + p_L(p_L p_T - 1))\eta_4 - p_L \eta_3) + 2p_L^3 \eta_4 + 2p_L^2(2 + p_L^2)p_T \eta_4 \\
&+ k^2 c_T^2((p_T + p_L(p_T(p_L(3 + (p_L - p_T)^2) + p_T)) - 1)\eta_3 - 2p_T^3 \eta_4 - 2p_L p_T^2(2\eta_1 \\
&+ p_L^2 \eta_4 - 2(\eta_2 + \eta_4))))] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} + \frac{k^3}{2}(1 + p_L^2)(p_L + p_T)(R_{12}R_{21} - R_{11}R_{22}) \\
&(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \overline{\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_1)_{x_1} - \frac{1}{2}k^3 [(p_L + p_T)((1 - p_L^2)R_{12}R_{21}(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \\
&+ R_{11}R_{22}((1 + p_L^2 - 2p_L p_T)\eta_3 + 2p_T(p_T + p_L(-2 + p_L p_T))\eta_4))] \mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1}, \\
T_6^{(3)} &= \frac{k^3(1 + p_L^2)(p_T^2 - p_L^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4)}{2p_L p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
&+ \frac{k^2 \omega(1 + p_L^2)(p_L - p_T)(c_L^2 p_L + c_T^2 p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2 \eta_4 - \eta_3)}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1}, \\
T_7^{(3)} &= \frac{k^3(1 + p_L^2)(p_T^2 - p_L^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4)}{2p_L p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
&+ \frac{k^2 \omega(1 + p_L^2)(p_L + p_T)(c_L^2 p_L + c_T^2 p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2 \eta_4 - \eta_3)}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left(|A_1|^2 \right)_{t_1}, \\
T_8^{(3)} &= -\frac{ik\omega R_{11}^2(5p_L^4 \eta_1 + \eta_2(1 + 6p_L^2) - 3p_L^2(\eta_3 + 2\eta_4))}{c_L^2 p_L} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \\
&- 2k^3 p_L R_{11}^2(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}_1} - 2k^3 p_L R_{11}^2(p_L^4 \eta_1 - \eta_2) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2} \\
&- \frac{iR_{11}^2}{c_L^2 p_L} [\omega^2 p_L^2(2(1 + p_L^2)\eta_2 + (2p_L^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&+ k^2 c_L^2((1 + p_L^2)^2 \eta_2 + 2p_L^2(2p_L^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4))] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
&+ 2ik^3 p_L R_{11}R_{21} \left[(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \overline{\mathcal{A}_1} \mathcal{A}_{1x_1} + (\eta_2 - p_L^4 \eta_1) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_{1x_1}} \right], \\
T_9^{(3)} &= \frac{ik\omega R_{12}^2(\eta_4 + 5p_T^4 \eta_4 - 6p_T^2(\eta_3 + \eta_4))}{c_T^2 p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \\
&+ 2k^3 p_T R_{12}^2 [((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}_1} \\
&+ (p_T^2(\eta_2 - \eta_1) + (1 - p_T^4)\eta_4) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2}] \\
&+ \frac{iR_{12}^2(\omega^2 p_T^2(2p_T^2 \eta_4 - \eta_3) + k^2 c_T^2(\eta_4 + p_T^4(\eta_3 + 3\eta_4) - p_T^2(5\eta_3 + 8\eta_4)))}{c_T^2 p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
&- 2ik^3 p_T R_{12}R_{22} \left[((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \overline{\mathcal{A}_1} \mathcal{A}_{1x_1} \right. \\
&\left. + (p_T^2(\eta_1 - \eta_2) + (-1 + p_T^4)\eta_4) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_{1x_1}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{10}^{(3)} &= -\frac{2ik^2\omega R_{11}^2(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4))}{c_L^2} \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
&\quad - 2ik^3R_{11}^2(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1}, \\
T_{11}^{(3)} &= \frac{2ik^2\omega R_{12}^2(\eta_4 + p_T^4\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4))}{c_T^2} \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
&\quad + 2ik^3R_{12}^2((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1}, \\
T_{12}^{(3)} &= \frac{ikR_{11}\omega R_{12}}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T} [(\eta_3 + 2\eta_4)(c_T^2p_T(-p_T + 6p_L^2p_T + p_T^3 + p_L(2 - 6p_T^2)) \\
&\quad + c_L^2p_L^2(-1 + 2p_L^2 - 6p_Lp_T + 3p_T^2))] \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
&\quad + k^3(p_L - p_T)R_{11}R_{12} [p_L(1 + 2p_Lp_T - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4) \mathcal{A}_2\overline{\mathcal{A}}_1 \\
&\quad + 2(p_T\eta_2 + p_L(p_Lp_T\eta_1 + (1 + p_T^2)\eta_4))\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2] + \frac{i(p_L - p_T)R_{11}R_{12}}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1} \\
&\quad * [\omega^2c_T^2p_T((2p_L - p_T)p_T\eta_3 + (2 + 4p_Lp_T)\eta_4) + c_L^2(3p_Lp_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad - \omega^2p_L(2(1 + p_L^2)\eta_2 + p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4)) + k^2c_T^2(2p_L(1 + p_L^2)(1 + p_T^2)\eta_2 \\
&\quad + p_T^3(p_L^2\eta_3 - 2\eta_4) + p_L(-1 + 2p_L^2)(\eta_3 + 2\eta_4) + p_T(\eta_3 - 2p_L^2(2\eta_3 + 5\eta_4))))] \\
&\quad + \frac{1}{2}ik^3\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_{1_{x_1}} [(p_L - p_T)(4(1 + p_L^2)p_TR_{11}R_{22}\eta_2 + p_L((-1 + 2p_Lp_T - p_T^2)R_{12}R_{21} \\
&\quad + (1 + 2p_Lp_T + p_T^2)R_{11}R_{22})\eta_3 + 2p_L(1 + 2p_Lp_T + p_T^2)(R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22})\eta_4)] \\
&\quad - \frac{1}{2}ik^3p_L(p_L - p_T)(R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22}) \\
&\quad * (2p_Lp_T(\eta_1 - \eta_2) + \eta_3 + 2\eta_4 - p_T^2(\eta_3 + 2\eta_4))\overline{\mathcal{A}}_1\mathcal{A}_{1_{x_1}}, \\
T_{13}^{(3)} &= \frac{iR_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)k\omega}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T} [c_L^2p_L^2(-1 + 2p_L^2 + 6p_Lp_T + 3p_T^2) \\
&\quad + c_T^2p_T(-p_T + 6p_L^2p_T + p_T^3 + p_L(-2 + 6p_T^2))] \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
&\quad + k^3(p_L + p_T)R_{11}R_{12} [(p_L(2p_Lp_T(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_3 + 2\eta_4)(p_T^2 - 1))) \mathcal{A}_2\overline{\mathcal{A}}_1 \\
&\quad + 2(p_T(p_L^2\eta_1 + \eta_2) - p_L(1 + p_T^2)\eta_4)\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2] + \frac{i(p_L + p_T)R_{11}R_{12}}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1} \\
&\quad * [\omega^2c_T^2p_T(p_T(2p_L + p_T)\eta_3 + 2(2p_Lp_T + 1)\eta_4) + c_L^2(3p_Lp_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad + \omega^2p_L(p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4) - 2(1 + p_L^2)\eta_2) + k^2c_T^2(2p_L(1 + p_L^2)(1 + p_T^2)\eta_2 \\
&\quad + p_L(2p_L^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) + p_T^3(-p_L^2\eta_3 + 2\eta_4) + p_T(-\eta_3 + 2p_L^2(2\eta_3 + 5\eta_4))))] \\
&\quad - \frac{1}{2}ik^3\overline{\mathcal{A}}_1\mathcal{A}_{1_{x_1}} [p_L(p_L + p_T)(2p_Lp_T + p_T^2 - 1)(R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22})(\eta_3 + 2\eta_4)] \\
&\quad + \frac{1}{2}ik^3(p_L + p_T) [4(1 + p_L^2)p_TR_{11}R_{22}\eta_2 + p_L((1 + 2p_Lp_T + p_T^2)R_{12}R_{21} \\
&\quad + (4(1 + p_L^2)p_TR_{11}R_{22}\eta_2 + p_L((1 + 2p_Lp_T + p_T^2)R_{12}R_{21}))\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_{1_{x_1}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{14}^{(3)} &= -\frac{ik^2\omega(p_L - p_T)}{2c_L^2c_T^2p_T} [(c_L^2p_L - c_T^2p_T)(1 + 2p_Lp_T - p_T^2) \\
&\quad R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)] (\overline{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_{1_{l_1}} - \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_{1_{l_1}}}) \\
&\quad - \frac{ik^3(p_L - p_T)^2(1 + 2p_Lp_T - p_T^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2p_T} (\overline{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_{1_{x_1}} - \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_{1_{x_1}}}), \\
T_{15}^{(3)} &= \frac{ik^3(p_L + p_T)^2(-1 + 2p_Lp_T + p_T^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2p_T} (\overline{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_{1_{x_1}} - \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_{1_{x_1}}}) \\
&\quad + \frac{ik^2\omega(p_L + p_T)}{2c_L^2c_T^2p_T} [(c_L^2p_L + c_T^2p_T)(2p_Lp_T + p_T^2 - 1) \\
&\quad R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)] (\overline{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_{1_{l_1}} - \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_{1_{l_1}}}) \tag{B.1} \\
X_{11}^{(3)} &= -R_{11}, \quad X_{12}^{(3)} = -\frac{(2\omega^2 + k^2c_T^2p_T^2)R_{12}}{k^2c_T^2p_T}, \quad X_{13}^{(3)} = \frac{2\omega^2R_{11}}{kc_L^2p_L}, \quad X_{14}^{(3)} = \frac{2\omega^2R_{12}}{kc_T^2}, \\
X_{21}^{(3)} &= \frac{\omega^2(c_T^2 - c_L^2)R_{11} + k^2c_L^2(kc_L^2(2 + p_L^2)R_{21} + c_T^2(R_{11} - kp_L^2R_{21}))}{k^2c_L^2}, \\
X_{22}^{(3)} &= \left[\frac{(-2\omega^2c_L^2R_{12} + k^2c_T^2((-c_T^2 + c_L^2(1 + p_T^2))R_{12} + k(c_L^2 + c_T^2)p_T^2R_{22}))}{k^2c_T^2p_T} \right], \\
X_{23}^{(3)} &= \frac{k(2c_L^2 + (c_L^2 - c_T^2)p_L^2)R_{11}}{p_L}, \quad X_{24}^{(3)} = k(c_L^2 + c_T^2)R_{12} \\
X_{31}^{(3)} &= \frac{2\omega(c_T^2R_{11} + c_L^2(kR_{21} - R_{11}))}{kc_L^2}, \\
X_{32}^{(3)} &= \left[2\omega p_T R_{22} - \frac{\omega(2\omega^2 + k^2c_L^2 + k^2c_T^2)R_{12}}{k^3c_T^2p_T} \right], \\
X_{33}^{(3)} &= \frac{\omega R_{11}(4c_L^2 + (c_L^2 - c_T^2)p_L^2)}{c_L^2p_L}, \quad X_{34}^{(3)} = \frac{\omega R_{12}(c_L^2 + 3c_T^2)}{c_T^2}, \\
X_{41}^{(3)} &= 2i\omega R_{11}, \quad X_{42}^{(3)} = 2i\omega R_{12}p_T, \\
X_{51}^{(3)} &= ik(2c_L^2 + p_L^2(c_L^2 - c_T^2))R_{11}, \quad X_{52}^{(3)} = ik(c_L^2 + c_T^2)p_T R_{12}, \\
X_{61}^{(3)} &= X_1^{(a)}, \quad X_{62}^{(3)} = X_2^{(a)}, \quad X_{63}^{(3)} = -\frac{2\omega^4 C_{11}^{(2)} R_{11} \eta_1}{kc_L^4}, \\
X_{64}^{(3)} &= \left\{ \frac{R_{11}^2 R_{12}}{2k^4 c_L^8 c_T^4 (p_L^2 - p_T^2)} \left[4\omega^8 (c_L^2 - c_T^2) p_L \eta_2 \eta_4 + 8k^8 c_L^6 c_T^4 p_T (p_T^2 - p_L^2) (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \right. \right. \\
&\quad - 2k^2 \omega^6 (c_L^2 c_T^2 \eta_1 \eta_4 (p_T^3 - p_L^2 p_T) + (c_L^2 - c_T^2) p_L (\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad (c_T^2 \eta_2 + c_L^2 (\eta_2 + 2\eta_3 + \eta_4 (4 - 2p_L^2)))) + p_L^2 p_T (c_L^2 (\eta_3 + 6\eta_4) + c_T^2 (4\eta_2 + 13(\eta_3 + 2\eta_4))) \\
&\quad + k^6 \omega^2 c_L^4 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (2(c_L^2 - c_T^2) p_L (-3 + 2p_L^2) (\eta_3 + 2\eta_4) - p_T^3 (c_L^2 (\eta_3 + 6\eta_4) \\
&\quad + c_T^2 (4\eta_2 + 13(\eta_3 + 2\eta_4)))) + k^4 \omega^4 c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (-c_T^2 p_L^2 p_T (5c_T^2 \eta_1 + c_L^2 (\eta_3 + 8\eta_4)) \\
&\quad + c_T^2 p_T^3 (5c_T^2 \eta_1 + c_L^2 (\eta_3 + 8\eta_4)) + 2(c_L^2 - c_T^2) p_L (2c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4 - 2p_L^2 \eta_4) \\
&\quad \left. \left. + c_T^2 (2\eta_2 - (p_L^2 - 3)(\eta_3 + 2\eta_4)))) \right] + \frac{1}{2kc_L^4 c_T^2} R_{11} \left[k^4 c_L^4 c_T^2 C_{25}^{(2)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (p_L(2\eta_2 + 3\eta_3 + 2p_L^2(\eta_2 + \eta_3 - 2\eta_4) - 2\eta_4) - 3p_T(\eta_3 + 2\eta_4)) + k^2\omega^2 c_L^2 C_{25}^{(2)} \\
& (c_T^2 p_T(-2\eta_2 + \eta_3 + 6\eta_4) - c_L^2 p_L(\eta_3 + 2\eta_4)) + iC_{20}^{(2)}(k^2\omega^2 c_L^2 c_T^2(4\eta_2 - 5\eta_3 - 16\eta_4) \\
& + 2\omega^4(c_L^2 + 2c_T^2)\eta_4 + 3k^4 c_L^4 c_T^2(\eta_3(3 + p_L p_T) + \eta_4(6 - 2p_L^3 p_T))) \\
& + \frac{R_{12}}{2c_L^2} \left[\frac{2ikc_L^2 h_1 p_T(-p_L^2 + p_T^2)(-2\omega^2 \eta_4 + k^2 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4))}{c_L^2 - c_T^2} \right. \\
& + \frac{(k^2 c_L^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} + 2ik(C_{12}^{(2)} - 2h_1 p_L)) - 2\omega^2(2c_T^2 C_{11}^{(2)} - ik(c_L^2 - 2c_T^2)(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)))\eta_3}{c_T^2} \\
& + \frac{1}{\omega^2(c_L^2 - c_T^2)} \left(k^2 c_L^4(-p_L^2 p_T + p_T^3)(-2\omega^2(C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)})p_L \eta_4 \right. \\
& + k^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} p_L + 2ik(2h_1 + C_{12}^{(2)} p_L))(\eta_3 + 2\eta_4)) + \frac{2\eta_4}{k^2 c_T^2} \left(k^4 c_L^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} + 2ik \right. \\
& (C_{12}^{(2)} - 2h_1 p_L)) + 4\omega^4(C_{11}^{(2)} + ik(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)) - k^2\omega^2((c_L^2 + 4c_T^2)C_{11}^{(2)} \\
& + 2ik(2(c_L^2 + c_T^2)C_{12}^{(2)} - (c_L^2 - 2c_T^2)h_1 p_L)) \left. \right) \left. \right] \Big\}, \\
X_{65}^{(3)} = & \left\{ \frac{R_{11}^2 R_{12}}{2k^2 c_L^6 c_T^2 (c_T^2 - c_L^2)} \left[\omega^4 c_T^2 \eta_1(2\omega^2(2p_L + p_T)\eta_4 - k^2 c_T^2(2p_L + 5p_T)(\eta_3 + 2\eta_4)) \right. \right. \\
& + k^4 c_L^6(\eta_3 + 2\eta_4)(k^2 c_T^2(10p_L(\eta_3 + 2\eta_4) - p_T^3(\eta_3 + 6\eta_4) + p_T(7\eta_3 + 10\eta_4))) \\
& - 4\omega^2 p_L(\eta_3 + 4\eta_4) + k^2 c_L^4(\eta_3 + 2\eta_4)(2\omega^4 p_L(\eta_2 + 2\eta_3 + 10\eta_4) - k^4 c_T^4(4p_T \eta_2 \\
& + 10p_L(\eta_3 + 2\eta_4) + 21p_T(\eta_3 + 2\eta_4) + p_T^3(4\eta_2 + 13\eta_3 + 26\eta_4)) + k^2\omega^2 c_T^2(2p_T(\eta_3 \\
& + 7\eta_4) + p_T^3(\eta_3 + 8\eta_4) - 4p_L(\eta_2 + 2(\eta_3 + \eta_4)))) + \omega^2 c_L^2(-4\omega^4 p_L \eta_1 \eta_4 + k^4 c_T^4(\eta_3 \\
& + 2\eta_4)(5p_T^3 \eta_1 + 9p_T(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) + 4p_L(\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4)) - k^2\omega^2 c_T^2(2p_T^3 \eta_1 \eta_4 \\
& + 2p_L(\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_3 + 8\eta_4) + p_T(2\eta_2 \eta_4 + (\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_3 + 10\eta_4)))) \left. \right] \\
& + \frac{R_{11}}{2kc_L^4 c_T^2} \left[k^4 c_L^4 c_T^2 C_{23}^{(2)}(2(p_L + p_L^3)\eta_2 + (3p_L + 2p_L^3 + 3p_T)\eta_3 - 2(p_L + 2p_L^3 - 3p_T)\eta_4) \right. \\
& - k^2\omega^2 c_L^2 C_{23}^{(2)}(c_L^2 p_L(\eta_3 + 2\eta_4) + c_T^2 p_T(\eta_3 + 6\eta_4 - 2\eta_2)) - iC_{18}^{(2)}(-2\omega^4(c_L^2 + 2c_T^2)\eta_4 \\
& + k^2\omega^2 c_L^2 c_T^2(5\eta_3 + 16\eta_4 - 4\eta_2) + 3k^4 c_L^4 c_T^2((p_L p_T - 3)\eta_3 - 2(3 + p_L^3 p_T)\eta_4)) \left. \right] \\
& + \frac{R_{12}}{2c_L^2} \left[\frac{2ikc_L^2 h_1 p_T(p_T^2 - p_L^2)(k^2 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 \eta_4)}{c_L^2 - c_T^2} \right. \\
& - \frac{(k^2 c_L^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} + 2ik(C_{12}^{(2)} - 2h_1 p_L)) - 2\omega^2(2c_T^2 C_{11}^{(2)} - ik(c_L^2 - 2c_T^2)(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)))\eta_3}{c_T^2} \\
& + \frac{k^2 c_L^4(p_T^3 - p_L^2 p_T)}{\omega^2(c_L^2 - c_T^2)} \left(k^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} p_L + 2ik(2h_1 + C_{12}^{(2)} p_L))(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - 2\omega^2(C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)})p_L \eta_4 \Big) - \frac{2\eta_4}{k^2 c_T^2} \left(k^4 c_L^2 c_T^2(C_{11}^{(2)} + 2ik(C_{12}^{(2)} - 2h_1 p_L)) \right. \\
& 4\omega^4(C_{11}^{(2)} + ik(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)) - k^2\omega^2((c_L^2 + 4c_T^2)C_{11}^{(2)} + 2ik(2(c_L^2 + c_T^2)C_{12}^{(2)} \\
& - (c_L^2 - 2c_T^2)h_1 p_L)) \left. \right) \left. \right] \Big\}, \\
X_{66}^{(3)} = & \left\{ \frac{R_{11} R_{12}^2}{2k^4 c_L^6 c_T^6 (p_L^2 - p_T^2)} \left[10k^8 c_L^4 c_T^6 p_T(p_L p_T^2 - p_L^3)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 + \omega^8(c_L^2 - c_T^2) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta_4(2\eta_2 + 11(\eta_3 + 2\eta_4)) - k^2\omega^6(c_L^2 - c_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)(11c_L^2\eta_4 + c_T^2(4\eta_2 + 7\eta_3 + 26\eta_4)) \\
& + k^4\omega^4c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(c_L^2c_T^2(4\eta_2 + \eta_3 - 2(5 + 2p_L^3p_T - 2p_Lp_T^3)\eta_4) - 4c_T^4(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) \\
& + c_L^4(7\eta_3 + 2(13 - 3p_L^3p_T + 3p_Lp_T^3)\eta_4)) + 2k^6\omega^2c_L^2c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)(c_T^2(4 + p_L^3p_T - p_Lp_T^3) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2(-4(\eta_3 + 2\eta_4) + 3p_L^3p_T(\eta_3 + 4\eta_4) - 3p_Lp_T^3(\eta_3 + 4\eta_4))) \\
& - \frac{iR_{11}}{kc_L^2c_T^2} \left[k^4c_L^2c_T^2(-2h_2(p_L + p_T) + 3C_{16}^{(2)}(-1 + p_Lp_T))(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^4(2C_{16}^{(2)} + h_2p_L)\eta_4 \right. \\
& \quad k^2\omega^2(c_T^2C_{16}^{(2)}(\eta_3 + \eta_4(6 - 2p_Lp_T) - 2\eta_2) \\
& \quad \left. + h_2(2c_T^2p_T(\eta_3 - 2p_T^2\eta_4) + (c_L^2 + c_T^2)p_L(\eta_3 + 2\eta_4))) \right] \\
& + \frac{R_{12}}{2kc_L^2c_T^4} \left[-2\omega^4(2c_L^2 + c_T^2)C_{23}^{(2)}\eta_4 + k^2\omega^2c_T^2(c_T^2C_{23}^{(2)}\eta_3 + 2(5c_L^2 + c_T^2)C_{23}^{(2)}\eta_4 \right. \\
& \quad - 2ic_L^2C_{18}^{(2)}(3p_L + 2p_T)\eta_4) + k^4c_L^2c_T^4(3iC_{18}^{(2)}((p_L + 3p_T)\eta_3 + 2(p_L + 2p_T - p_T^3)\eta_4) \\
& \quad \left. C_{23}^{(2)}((-1 + 3p_Lp_T)\eta_3 - 2(\eta_4 + 3p_Lp_T^3\eta_4))) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{67}^{(3)} = & \left\{ \frac{R_{11}R_{12}^2}{2k^4c_L^6c_T^6(p_L^2 - p_T^2)} \left[10k^8c_L^4c_T^6p_T(p_Lp_T^2 - p_L^3)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 + \omega^8(c_L^2 - c_T^2) \right. \right. \\
& \eta_4(2\eta_2 + 11(\eta_3 + 2\eta_4)) - k^2\omega^6(c_L^2 - c_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)(11c_L^2\eta_4 + c_T^2(4\eta_2 + 7\eta_3 + 26\eta_4)) \\
& + k^4\omega^4c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(c_L^2c_T^2(4\eta_2 + \eta_3 - 2(5 + 2p_L^3p_T - 2p_Lp_T^3)\eta_4) - 4c_T^4(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) \\
& + c_L^4(7\eta_3 + 2(13 + 3p_L^3p_T - 3p_Lp_T^3)\eta_4)) - 2k^6\omega^2c_L^2c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)(c_T^2(p_L^3p_T - p_Lp_T^3 - 4) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2(4(\eta_3 + 2\eta_4) + 3p_L^3p_T(\eta_3 + 4\eta_4) - 3p_Lp_T^3(\eta_3 + 4\eta_4))) \\
& \left. + \frac{iR_{11}}{kc_L^2c_T^2} \left[k^4c_L^2c_T^2(2h_2(p_T - p_L) + 3C_{16}^{(2)}(1 + p_Lp_T))(\eta_3 + 2\eta_4) + 2\omega^4(2C_{16}^{(2)} - h_2p_L)\eta_4 \right. \right. \\
& k^2\omega^2(c_T^2C_{16}^{(2)}(2\eta_2 - \eta_4(6 + 2p_Lp_T) - \eta_3) \\
& \left. + h_2(2c_T^2p_T(2p_T^2\eta_4 - \eta_3) + (c_L^2 + c_T^2)p_L(\eta_3 + 2\eta_4))) \right] \\
& + \frac{R_{12}}{2kc_L^2c_T^4} \left[2\omega^4(2c_L^2 + c_T^2)C_{25}^{(2)}\eta_4 - k^4c_L^2c_T^4(2(3iC_{20}^{(2)} + C_{25}^{(2)}p_L)p_T^3\eta_4 - (C_{25}^{(2)} - 3iC_{20}^{(2)}p_L) \right. \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) - (3iC_{20}^{(2)} + C_{25}^{(2)}p_L)p_T(3\eta_3 + 4\eta_4)) + k^2\omega^2c_T^2(-2ic_L^2C_{20}^{(2)}(3p_L - 2p_T)\eta_4 \\
& \left. - C_{25}^{(2)}(2c_L^2(5 + 2p_Lp_T)\eta_4 + c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4))) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{68}^{(3)} = & \frac{C_{11}^{(2)}R_{12}}{kc_L^2c_T^2} \left[k^2c_L^2(2k^2c_T^2(p_L - p_T) - \omega^2p_L)(\eta_3 + 2\eta_4) - 4\omega^4p_L\eta_4 \right. \\
& \left. + k^2\omega^2c_T^2(\eta_3(2p_L - p_T) + \eta_4(4p_L + 2p_T^3)) \right] |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{69}^{(3)} = & -\frac{C_{11}^{(2)}R_{12}}{kc_L^2c_T^2} \left[k^2c_L^2(2k^2c_T^2(p_L + p_T) - \omega^2p_L)(\eta_3 + 2\eta_4) - 4\omega^4p_L\eta_4 \right. \\
& \left. + k^2\omega^2c_T^2(\eta_3(2p_L + p_T) + \eta_4(4p_L - 2p_T^3)) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{610}^{(3)} = & \frac{R_{11}}{2k^4c_L^{10}c_T^2(p_L^2 - p_T^2)} \left[2k^6c_L^{10}c_T^2(C_{11}^{(2)}p_L + 2ik(2h_1 + C_{12}^{(2)}p_L))(p_L^2 - p_T^2) \right. \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^8c_T^2R_{11}^2\eta_1(2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) + \omega^6c_L^2R_{11}^2(-\omega^2\eta_1(2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) \\
& \left. - 3k^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(3\eta_2 + 4\eta_3 + 8\eta_4))k^2\omega^4c_L^4R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(3\omega^2(3\eta_2 + 4\eta_3 + 8\eta_4) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 c_T^2 (4\eta_2 + 15\eta_3 + 30\eta_4)) + k^4 \omega^2 c_L^8 (6k^2 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)^2 - i c_T^2 (p_L^2 - p_T^2)) \\
& (p_L (i C_{11}^{(2)} (2\eta_2 - 3\eta_3) - 4k C_{12}^{(2)} (\eta_2 - 3\eta_4)) + 4k h_1 (\eta_3 + 2\eta_4))) \\
& + k^3 \omega^2 c_L^6 (-k \omega^2 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (4\eta_2 + 15\eta_3 + 30\eta_4) \\
& + 2c_T^2 (2i \omega^2 h_1 (p_L^2 - p_T^2) \eta_2 - 3k^3 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)^2)) \Big], \\
X_{611}^{(3)} &= \frac{R_{12}}{2k^2 c_L^2 c_T^6} \left[3p_T R_{12}^2 (5k^2 \omega^4 c_T^2 \eta_4 (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - 2\omega^6 \eta_4^2 + 2k^6 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4)^2 - 2k^4 \omega^2 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (\eta_3 + 4\eta_4)) \\
& - 4ik c_L^2 c_T^2 (\omega^4 h_2 \eta_4 + k^2 \omega^2 c_T^2 (C_{16}^{(2)} p_T \eta_4 - 2h_2 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& \left. + k^4 c_T^4 (3C_{16}^{(2)} p_T^3 \eta_4 - 3C_{16}^{(2)} p_T (\eta_3 + \eta_4) + 2h_2 (\eta_3 + 2\eta_4))) \right], \\
X_{612}^{(3)} &= -\frac{2C_{11}^{(2)} R_{11} (\omega^4 \eta_2 + k^2 c_L^2 (2k^2 c_L^2 - \omega^2) (\eta_3 + 2\eta_4))}{k c_L^4}. \tag{B.2} \\
Y_{11}^{(3)} &= -\frac{2i \omega^2 R_{11}}{k c_L^2}, \quad Y_{12}^{(3)} = \frac{2i \omega^2 R_{12}}{k c_T^2 p_T}, \\
Y_{13}^{(3)} &= -\frac{i (2\omega^2 + k^2 c_L^2 p_L^2) R_{11}}{k^2 c_L^2 p_L}, \quad Y_{14}^{(3)} = i R_{12}, \\
Y_{21}^{(3)} &= -ik (c_L^2 + c_T^2) R_{11}, \quad Y_{22}^{(3)} = \frac{ik (c_L^2 p_T^2 - c_T^2 (2 + p_T^2)) R_{12}}{p_T}, \\
Y_{23}^{(3)} &= \frac{i (k^2 c_L^2 ((c_T^2 (1 + p_L^2) - c_L^2) R_{11} + k (c_L^2 + c_T^2) p_L^2 R_{21}) - 2\omega^2 c_T^2 R_{11})}{k^2 c_L^2 p_L}, \\
Y_{24}^{(3)} &= -\frac{i (\omega^2 (c_L^2 - c_T^2) R_{12} + k^2 c_T^2 (k c_T^2 (2 + p_T^2) R_{22} + c_L^2 (R_{12} - k p_T^2 R_{22})))}{k^2 c_T^2}, \\
Y_{31}^{(3)} &= -\frac{i \omega (3c_L^2 + c_T^2) R_{11}}{c_L^2}, \quad Y_{32}^{(3)} = \frac{i \omega (4c_T^2 + (c_T^2 - c_L^2) p_T^2) R_{12}}{c_T^2 p_T}, \\
Y_{33}^{(3)} &= -\frac{i \omega ((2\omega^2 + k^2 c_T^2) R_{11} + k^2 c_L^2 (R_{11} - 2k p_L^2 R_{21}))}{k^3 c_L^2 p_L}, \\
Y_{34}^{(3)} &= -2i \omega \left(\frac{(c_L^2 - c_T^2) R_{12}}{k c_T^2} + R_{22} \right), \\
Y_{41}^{(3)} &= -2\omega p_L R_{11}, \quad Y_{42}^{(3)} = 2\omega R_{12}, \\
Y_{51}^{(3)} &= -k (c_L^2 + c_T^2) p_L R_{11}, \quad Y_{52}^{(3)} = k (c_T^2 (2 + p_T^2) - c_L^2 p_T^2) R_{12}, \\
Y_{61}^{(3)} &= \frac{2i p_L R_{11} \eta_1 \omega^4 C_{11}^{(2)}}{k c_L^4}, \\
Y_{62}^{(3)} &= Y_2^{(a)}, \quad Y_{63}^{(3)} = Y_3^{(a)}, \\
Y_{64}^{(3)} &= \left\{ \frac{i R_{11}^2 R_{12}}{2k^4 c_L^8 c_T^4 (p_L^2 - p_T^2)} \left[-k^2 \omega^6 c_T^4 \eta_1 (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^8 c_T^2 \eta_1 (\eta_3 + 4\eta_4) \right. \right. \\
& + k^4 c_L^6 (\eta_3 + 2\eta_4) (-2k^4 c_T^4 (5 + 9p_L p_T) (p_L^2 - p_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& \left. \left. + k^2 \omega^2 c_T^2 (2 + (7 + 2p_L p_T) (p_L^2 - p_T^2)) (\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^4 (\eta_3 + 4\eta_4) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega^4 c_L^2 (-\omega^4 \eta_1 (\eta_3 + 4\eta_4) + 3k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (\eta_3 + 2(2(1 + p_L p_T)(p_T^2 - p_L^2) \eta_1 \\
& - \eta_4)) + k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) ((1 + 8p_L^2 - 8p_T^2) \eta_1 - 3(\eta_3 + 4\eta_4))) \\
& + k^2 \omega^2 c_L^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (3\omega^4 (\eta_3 + 4\eta_4) - k^2 \omega^2 c_T^2 ((1 + 7(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 \\
& + 2((4 + p_L p_T)(p_L^2 - p_T^2) \eta_1 + (7(p_L^2 - p_T^2) - 1) \eta_4)) \\
& + 2k^4 c_T^4 ((-1 + 5(1 + 3p_L p_T)(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 \\
& + 2(3(p_L^2 - p_T^2)(\eta_1 + p_L p_T \eta_2) + (5(1 + 3p_L p_T)(p_L^2 - p_T^2) \eta_4 - 1)))] \\
& + \frac{R_{12}}{2c_L^4} \left[\frac{14\omega^4 h_1 (\eta_3 + 2\eta_4)}{k(p_L^2 - p_T^2)} + 2\omega^2 c_L^2 \left(4(k(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L) - iC_{11}^{(2)}) p_T (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\omega^2 h_1 ((7 + 5(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 + 2(7 + 4(p_L^2 - p_T^2)) \eta_4)}{kc_T^2 (p_L^2 - p_T^2)} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{c_T^2} \left(k^2 c_T^2 (i(9C_{11}^{(2)} + 10ikC_{12}^{(2)})(p_L - p_T) + 12h_1 k(1 + p_L p_T)) (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega^2 (2kh_1 (4 + p_L p_T) (\eta_3 + 2\eta_4) + 2kC_{12}^{(2)} (p_T \eta_3 - p_L (5\eta_3 + 4\eta_4)) \right. \right. \\
& \left. \left. + iC_{11}^{(2)} (p_L (5\eta_3 + 12\eta_4) - 2p_T \eta_4) \right) \right] + \frac{R_{11}}{2kc_L^4 c_T^2} \left[k^4 c_L^4 c_T^2 C_{20}^2 ((p_L^3 + 3p_T) \eta_3 \right. \\
& - 8(p_L + p_L^3) \eta_2 + 2(p_L + 2p_L^3 + 3p_T) \eta_4) + k^2 \omega^2 c_L^2 C_{20}^2 (c_L^2 p_L (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 2c_T^2 p_T (\eta_3 + 3\eta_4 - 2\eta_2)) + iC_{25}^2 (2\omega^4 (c_L^2 + 2c_T^2) \eta_1 \\
& + k^4 c_L^4 c_T^2 (11 + 9p_L p_T) (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^2 c_L^2 (2c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + c_T^2 ((2 + 6p_L p_T) \eta_1 + 4\eta_2 + 13\eta_3 + 22\eta_4))) \left. \right] \}, \\
Y_{65}^{(3)} = & \left\{ -\frac{iR_{11}^2 R_{12}}{2k^4 c_L^8 c_T^4 (p_L^2 - p_T^2)} \left[\omega^8 c_T^2 \eta_1 (\eta_3 + 4\eta_4) - k^2 \omega^6 c_T^4 \eta_1 (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \right. \\
& + k^4 c_L^6 (\eta_3 + 2\eta_4) (2k^4 c_T^4 (9p_L p_T - 5)(p_L^2 - p_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 (2 + (7 - 2p_L p_T)(p_L^2 - p_T^2)) (\eta_3 + 2\eta_4) + 2\omega^4 (\eta_3 + 4\eta_4)) \\
& \omega^4 c_L^2 (-\omega^4 \eta_1 (\eta_3 + 4\eta_4) + 3k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (\eta_3 + 2(2(p_L p_T - 1) \\
& (p_L^2 - p_T^2) \eta_1 + \eta_4)) + k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) ((1 + 8(p_L^2 - p_T^2)) \eta_1 \\
& - 3(\eta_3 + 4\eta_4))) - k^2 \omega^2 c_L^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (-3\omega^4 (\eta_3 + 4\eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 ((1 + 7(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 - 2((p_L p_T - 4)(p_L^2 - p_T^2) \eta_1 \\
& + (1 - 7(p_L^2 - p_T^2)) \eta_4)) + 2k^4 c_T^4 ((1 + 5(3p_L p_T - 1)(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 \\
& + 2(3(p_L^2 - p_T^2)(-\eta_1 + p_L p_T \eta_2) + (1 + 5(-1 + 3p_L p_T)(p_L^2 - p_T^2)) \eta_4))) \left. \right] \\
& + \frac{R_{12}}{2c_L^4} \left[2\omega^2 c_L^2 (4(-iC_{11}^{(2)} + k(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)) p_T (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& \left. + \frac{\omega^2 h_1 ((7 + 5(p_L^2 - p_T^2)) \eta_3 + 2(7 + 4(p_L^2 - p_T^2)) \eta_4)}{kc_T^2 (p_L^2 - p_T^2)} \right) \\
& - \frac{14\omega^4 h_1 (\eta_3 + 2\eta_4)}{k(p_L^2 - p_T^2)} - \frac{c_L^4}{c_T^2} \left(k^2 c_T^2 ((-9iC_{11}^{(2)} + 10kC_{12}^{(2)})(p_L + p_T) \right. \\
& + 12kh_1 (-1 + p_L p_T)) (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^2 (-2kh_1 (-4 + p_L p_T) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& \left. \left. - 2kC_{12}^{(2)} ((5p_L + p_T) \eta_3 + 4p_L \eta_4) + iC_{11}^{(2)} (5p_L \eta_3 + 2(6p_L + p_T) \eta_4)) \right) \right] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{iR_{11}}{2kc_L^4c_T^2} [\omega^2(c_L^2p_L(\eta_3 + 2\eta_4) + 2c_T^2p_T(\eta_3 + 3\eta_4 - 2\eta_2))] \\
& + ik^2c_L^2C_{18}^{(2)}(k^2c_L^2c_T^2(8(p_L + p_L^3)\eta_2 - p_L^3\eta_3 + 3p_T\eta_3 - 2p_L\eta_4 - 4p_L^3\eta_4 \\
& + 6p_T\eta_4) - C_{23}^{(2)}(k^2c_L^4(2\omega^2 + k^2c_T^2(9p_Lp_T - 11))(\eta_3 + 2\eta_4) - 4\omega^4c_T^2\eta_1 \\
& + \omega^2c_L^2(k^2c_T^2(6\eta_2 + 15\eta_3 + 26\eta_4 - 6p_Lp_T\eta_1) - 2\omega^2\eta_1)))], \\
Y_{66}^{(3)} = & \left\{ \frac{iR_{11}R_{12}^2}{2k^4c_L^6c_T^6(p_L^2 - p_T^2)} [2\omega^8(c_L^2p_L - c_T^2(p_L + 2p_T))\eta_1\eta_4 \right. \\
& + 18k^8c_L^4c_T^6p_T(p_L^2 - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 + k^2\omega^6(4c_L^2c_T^2p_T^3\eta_1\eta_4 \\
& + (c_T^2 - c_L^2)p_L(\eta_3 + 2\eta_4)(3c_L^2(\eta_3 + 3\eta_4) + 4c_T^2(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4)) \\
& + 4c_T^2p_T(c_L^2\eta_4(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) + c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(2\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4))) \\
& - k^4\omega^4c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(c_L^4((4(p_T + p_T^3) - 34p_L)\eta_4 - 15p_L\eta_3) \\
& + 2c_T^4(2(p_L + 2p_T)\eta_2 + (4p_L + 9p_T)(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& + c_L^2c_T^2(8p_T(\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4) + 4p_T^3(2\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4) \\
& + p_L(7\eta_3 + 18\eta_4 - 4\eta_2))) - 2k^6\omega^2c_L^2c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (2c_L^2((3p_L - 4(p_T + p_T^3))\eta_3 + 3(2p_L - 3(p_T + p_T^3))\eta_4) \\
& - c_T^2(4p_T\eta_2 + 6p_L(\eta_3 + 2\eta_4) + 9p_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + p_T^3(4\eta_2 + 9(\eta_3 + 2\eta_4))))] - \frac{R_{11}}{kc_L^2c_T^2} [-2\omega^4h_2(2\eta_3 + 5\eta_4) \\
& + k^2c_L^2(\omega^2(h_2(5 - 2p_Lp_T) - 2C_{16}^{(2)}p_L) + k^2c_T^2(C_{16}^{(2)}(p_L + p_T) \\
& + 6h_2(p_Lp_T - 1)))(\eta_3 + 2\eta_4) + k^2\omega^2c_T^2(2C_{16}^{(2)}(p_L + 2p_T)\eta_2 \\
& - 2C_{16}^{(2)}p_T\eta_4 - h_2(2p_Lp_T - 5)(\eta_3 + 2\eta_4))] \\
& + \frac{R_{12}}{2kc_L^2c_T^4} [2\omega^4(2c_L^2 + c_T^2)C_{18}^{(2)}\eta_4 - k^2\omega^2c_T^2(C_{18}^{(2)}(2c_L^2(5 - 3p_Lp_T)\eta_4 \\
& + c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)) + iC_{23}^{(2)}(2c_T^2p_T(\eta_3 + 2\eta_4) + 3c_L^2p_L(3\eta_3 + 4\eta_4))) \\
& + k^4c_L^2c_T^4(C_{18}^{(2)}(1 - 3p_Lp_T)(\eta_3 + 2\eta_4) + iC_{23}^{(2)}(9p_L(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 2p_T(\eta_3 + 7\eta_4) - p_T^3(9\eta_3 + 8\eta_4)))] \}, \\
Y_{67}^{(3)} = & \left\{ -\frac{iR_{11}R_{12}^2}{2k^4c_L^6c_T^6(p_L^2 - p_T^2)} [18k^8c_L^4c_T^6p_T(p_L^2 - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 \right. \\
& - 2\omega^8(c_L^2p_L - c_T^2(p_L - 2p_T))\eta_1\eta_4 + k^2\omega^6(4c_L^2c_T^2p_T^3\eta_1\eta_4 \\
& + (c_L^2 - c_T^2)p_L(\eta_3 + 2\eta_4)(3c_L^2(\eta_3 + 3\eta_4) + 4c_T^2(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4)) \\
& + 4c_T^2p_T(c_L^2\eta_4(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) + c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(2\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4))) \\
& - k^4\omega^4c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(c_L^4(15p_L\eta_3 + 2(17p_L + 2(p_T + p_T^3))\eta_4) \\
& + c_L^2c_T^2(p_L(4\eta_2 - 7\eta_3 - 18\eta_4) + 8p_T(\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4) \\
& + 4p_T^3(2\eta_2 + 4\eta_3 + 9\eta_4)) + 2c_T^4(+p_T(4\eta_2 + 9(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& - 2p_L(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4))) + 2k^6\omega^2c_L^2c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (2c_L^2((3p_L + 4(p_T + p_T^3))\eta_3 + 3(2p_L + 3(p_T + p_T^3))\eta_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_T^2(4p_T\eta_2 - 6p_L(\eta_3 + 2\eta_4) + 9p_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + p_T^3(4\eta_2 + 9(\eta_3 + 2\eta_4))))] - \frac{R_{11}}{kc_L^2c_T^2} [2\omega^4h_2(2\eta_3 + 5\eta_4) \\
& - k^2\omega^2c_T^2(h_2(5 + 2p_Lp_T)(\eta_3 + 2\eta_4) - 2C_{16}^{(2)}((p_L - 2p_T)\eta_2 + p_T\eta_4)) \\
& + k^2c_L^2(\omega^2(2C_{16}^{(2)}p_L + h_2(5 + 2p_Lp_T)) \\
& - k^2c_T^2(C_{16}^{(2)}(p_L - p_T) + 6h_2(1 + p_Lp_T)))(\eta_3 + 2\eta_4)] \\
& + \frac{R_{12}}{2kc_L^2c_T^4} [C_{20}^{(2)}(-2\omega^4(2c_L^2 + c_T^2)\eta_4 - k^4c_L^2c_T^4((1 + 3p_Lp_T)\eta_3 \\
& + 2\eta_4 - 2p_Lp_T(p_T^2 - 2)\eta_4) + k^2\omega^2c_T^2(2c_L^2(5 + 2p_Lp_T)\eta_4 \\
& + c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)))ik^2c_T^2C_{25}^{(2)}(2\omega^2c_T^2p_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + c_L^2(-3\omega^2p_L(3\eta_3 + 4\eta_4) + k^2c_T^2(9p_L(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 2p_T(\eta_3 + 7\eta_4) + p_T^3(9\eta_3 + 8\eta_4)))))] \}, \\
Y_{68}^{(3)} &= \frac{iC_{11}^{(2)}R_{12}}{kc_L^2c_T^2} [6k^4c_L^2c_T^2(p_Lp_T - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) - k^2\omega^2(c_L^2(p_Lp_T - 4) \\
& + c_T^2(4p_Lp_T - 7))(\eta_3 + 2\eta_4) - \omega^4(5\eta_3 + 8\eta_4)] , \\
Y_{69}^{(3)} &= \frac{iC_{11}^{(2)}R_{12}}{kc_L^2c_T^2} [6k^4c_L^2c_T^2(p_Lp_T + 1)(\eta_3 + 2\eta_4) - k^2\omega^2(c_L^2(p_Lp_T + 4) \\
& + c_T^2(4p_Lp_T + 7))(\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^4(5\eta_3 + 8\eta_4)] , \\
Y_{610}^{(3)} &= \frac{R_{11}}{2k^2c_L^4c_T^2(p_L^2 - p_T^2)} \left[ic_T^2C_{11}^{(2)}(p_L^2 - p_T^2)(10\omega^4\eta_1 + 18k^4c_L^4(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - k^2\omega^2c_L^2(6\eta_2 + 27\eta_3 + 56\eta_4)) + \frac{1}{k^2c_L^6}(p_L(\omega^4\eta_1 - 3k^2\omega^2c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 2k^4c_L^4(\eta_3 + 2\eta_4))(12k^3c_L^6c_T^2h_1(p_T^2 - p_L^2) - 6i\omega^4(c_L^2 - c_T^2)R_{11}^2\eta_1 \\
& + 5ik^2\omega^2c_L^2(c_L^2 - c_T^2)R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)) + 4k^3c_L^6c_T^2C_{12}^{(2)}(p_L^2 - p_T^2) \\
& \left. (k^2\omega^2c_L^2(3\eta_2 + 8\eta_3 + 15\eta_4) - 3\omega^4\eta_1 - 5k^4c_L^4(\eta_3 + 2\eta_4))) \right] , \\
Y_{611}^{(3)} &= \frac{R_{12}}{2k^4c_L^4c_T^8(p_L^2 - p_T^2)} \left[4k^3c_L^4c_T^4C_{16}^{(2)}(p_L^2 - p_T^2)(3\omega^4\eta_4 + k^4c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - k^2\omega^2c_T^2(\eta_3 + 6\eta_4)) - 12k^3c_L^4c_T^4h_2p_T(p_L^2 - p_T^2)(2k^4c_T^4p_T^2\eta_3 \\
& - (\omega^2 - 2k^2c_T^2)^2\eta_4) + i\omega^2c_L^2R_{12}^2(\omega^4\eta_4 - 2k^2\omega^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 2k^4c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4))(5k^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) - \omega^2(5\eta_3 + 12\eta_4)) \\
& - i\omega^2c_T^2R_{12}^2(\omega^4\eta_4 - 2k^2\omega^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^4c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& \left. (5k^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) - \omega^2(5\eta_3 + 12\eta_4)) \right] , \\
Y_{612}^{(3)} &= \frac{6iC_{11}^{(2)}p_LR_{11}(\omega^4\eta_1 - 3k^2\omega^2c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^4c_L^4(\eta_3 + 2\eta_4))}{kc_L^4}. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Burada R_{2i} , ($i = 1, 2$)'ler;

$$R_{2i} = \frac{\partial R_{1i}}{\partial k} + V_g \frac{\partial R_{1i}}{\partial \omega} \tag{B.4}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Yukarıdaki katsayılarda görülen $X_i^{(a)}$, ($i = 1, 2$) ve $Y_j^{(a)}$, ($j = 3, 4$) katsayıları lineer ve nonlinear malzeme sabitleri ile dalga sayısına ve açılmal frekansa bağlı ifadeler içermektedirler ve açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
X_1^{(a)} = & \frac{R_{12}}{2kc_L^2c_T^2} \left[C_{23}^{(2)}(2\omega^4\eta_4 - k^4c_L^2c_T^2((1 + p_Lp_T)\eta_3 + 2(1 - p_Lp_T^3)\eta_4) \right. \\
& + k^2\omega^2(2c_L^2(\eta_3 - \eta_4) - c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4))) - ik^2c_L^2(2\omega^2(3(C_{20}^{(2)} - C_{18}^{(2)})p_L \\
& + 2(C_{18}^{(2)} + C_{20}^{(2)})p_T)\eta_4 + 3k^2c_T^2((C_{18}^{(2)} - C_{20}^{(2)})p_L - 2(C_{18}^{(2)} + C_{20}^{(2)})p_T^3\eta_4 \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) - (C_{18}^{(2)} + C_{20}^{(2)})p_T(\eta_3 + 4\eta_4))) \\
& + C_{25}^{(2)}(-2\omega^4\eta_4 - k^4c_L^2c_T^2(p_Lp_T - 1)(\eta_3 + 2\eta_4)k^2\omega^2(c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 2c_L^2((1 + p_Lp_T)\eta_4 - \eta_3))) \left. \right] \\
& + \frac{R_{11}}{2k^4c_L^6c_T^6(p_L^2 - p_T^2)} \left[12ik^7c_L^6c_T^6C_9^{(2)}(p_L^2 - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - 6\omega^8(c_L^2 - c_T^2)R_{12}^2\eta_4(\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^2\omega^6R_{12}^2(3c_L^4\eta_4(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_3 + 6\eta_4) + c_L^2c_T^2(\eta_3^2 + 5\eta_3\eta_4 + 2\eta_4((p_L^2 - p_T^2)\eta_2 + 3\eta_4))) \\
& - 2k^3\omega^4c_T^2(k(c_L^2 - c_T^2)R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4) - 2ic_L^2c_T^4h_1(p_L^2 - p_T^2)\eta_1 \\
& (2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2(\eta_3 + 6\eta_4))) + k^4\omega^2c_L^2c_T^4(4ikc_L^2c_T^2C_9^{(2)}(p_L^2 - p_T^2) \\
& (2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4) + 4k^2(c_L^2 - c_T^2)R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& + c_L^2c_T^2p_L(p_L^2 - p_T^2)(4ikC_{12}^{(2)}\eta_1 + C_{11}^{(2)}(2\eta_2 + 5\eta_3 + 12\eta_4))) \left. \right] \\
& - \frac{\omega^2R_{11}^3}{2k^4c_L^{10}c_T^2(p_L^2 - p_T^2)} \left[\omega^6(c_L^2 - c_T^2)(2\eta_2^2 + 7\eta_2(\eta_3 + 2\eta_4) + (\eta_3 + 2\eta_4)^2) \right. \\
& + 2k^6c_L^6(c_L^2 - c_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 + k^4\omega^2c_L^4(c_L^2 - c_T^2)(4\eta_2 - 3(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + k^2\omega^4c_L^2\eta_2(c_T^2(11\eta_3 + 22\eta_4 - 4(p_L^2 - p_T^2)\eta_2) - 11c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)) \left. \right], \\
X_2^{(a)} = & \frac{2iR_{12}(\omega^4h_2\eta_4 + 2k^2\omega^2c_T^2(C_{16}^{(2)} - C_9^{(2)})p_T\eta_4 + 3k^4c_T^4C_9^{(2)}p_T(\eta_3 + 2\eta_4))}{kc_T^4} \\
& + \frac{R_{11}}{2kc_L^2c_T^2} \left[k^4c_L^2c_T^2(C_{23}^{(2)}(p_L - p_T) + C_{25}^{(2)}(p_L + p_T))(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& - iC_{20}^{(2)}(3k^4c_L^2c_T^2(p_Lp_T - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^4\eta_4 - k^2\omega^2c_T^2(4\eta_2 + \eta_3 \\
& - 2p_Lp_T\eta_4)) + iC_{18}^{(2)}(2\omega^4\eta_4 + 3k^4c_L^2c_T^2(1 + p_Lp_T)(\eta_3 + 2\eta_4) + k^2\omega^2c_T^2(4\eta_2 \\
& + \eta_3 + 2p_Lp_T\eta_4)) + k^2\omega^2(c_T^2(C_{23}^{(2)} - C_{25}^{(2)})p_T(2\eta_2 + 3\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + (C_{23}^{(2)} + C_{25}^{(2)})p_L(2c_T^2\eta_2 + c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4))) \left. \right] + \frac{p_TR_{11}^2R_{12}}{k^2c_L^6c_T^2} \left[2\omega^6\eta_1\eta_4 \right. \\
& + 2k^6c_L^4c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)^2 - k^4\omega^2c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)(c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4) + c_T^2(\eta_3 \\
& + 2\eta_4 - 4\eta_2)) - k^2\omega^4(\eta_3 + 2\eta_4)(c_T^2(5\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) - c_L^2\eta_3) \left. \right] \\
& + \frac{\omega^4p_TR_{12}^3\eta_4(2\omega^2\eta_4 - k^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4))}{k^2c_L^2c_T^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2^{(a)} = & \frac{i\omega^2 p_L R_{11}^3}{2k^4 c_L^{10} c_T^2 (p_L^2 - p_T^2)} \left[6k^6 c_L^6 (c_L^2 - c_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \right. \\
& - k^4 \omega^2 c_L^4 (c_L^2 - c_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) (4\eta_2 + 15(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& - 2\omega^6 (c_L^2 - c_T^2) (\eta_2^2 + 6\eta_2 (\eta_3 + 2\eta_4) + 3(\eta_3 + 2\eta_4)^2) \\
& + k^2 \omega^4 c_L^2 (15c_L^2 \eta_1 (\eta_3 + 2\eta_4) + c_T^2 (4(p_L^2 - p_T^2) \eta_2^2 - 15\eta_2 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 15(\eta_3 + 2\eta_4)^2)) \left. \right] + \frac{R_{12}}{2kc_L^2 c_T^2} \left[ik^2 \omega^2 (c_L^2 (C_{23}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) p_L (\eta_3 - 4\eta_4) \right. \\
& - 2c_T^2 (C_{23}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) p_T (\eta_3 + 2\eta_4)) - ik^4 c_L^2 c_T^2 ((C_{23}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) p_L (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - (C_{23}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) p_T ((2 + p_T^2) \eta_3 + 2\eta_4)) \\
& + C_{20}^{(2)} (2\omega^4 \eta_4 + k^4 c_L^2 c_T^2 ((p_L p_T - 1) \eta_3 + 2(p_L p_T (2 + p_T^2) - 1) \eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 (2c_L^2 (\eta_3 - \eta_4 - 2p_L p_T) - c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4))) \\
& + C_{18}^{(2)} (-2\omega^4 \eta_4 + k^4 c_L^2 c_T^2 (\eta_3 + p_L p_T \eta_3 + 2(1 + p_L p_T (2 + p_T^2)) \eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 (2c_L^2 (\eta_4 - 2p_L p_T - \eta_3) + c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4))) \left. \right] \\
& - \frac{iR_{11}}{2k^4 c_L^6 c_T^6 (p_L^2 - p_T^2)} \left[4\omega^8 (c_L^2 - c_T^2) p_L R_{12}^2 \eta_1 \eta_4 + 4ik^7 c_L^6 c_T^6 C_9^{(2)} p_L (p_L^2 - p_T^2) \right. \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^2 \omega^6 (c_L^2 - c_T^2) p_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (c_L^2 (\eta_3 - \eta_4) + 4c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& + k^4 \omega^2 c_L^4 c_T^4 (c_L^2 c_T^2 C_{11}^{(2)} (p_L^2 - p_T^2) (2\eta_2 + 5\eta_3 + 12\eta_4) + 4k(ic_L^2 c_T^2 (p_L^2 - p_T^2) \\
& (C_{12}^{(2)} \eta_1 - 2C_9^{(2)} p_L \eta_2) + 3k(c_L^2 - c_T^2) p_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)^2)) \\
& - 2k^2 \omega^4 c_T^2 (c_L^2 c_T^4 (3C_{11}^{(2)} + 2ik(C_{12}^{(2)} + h_1 p_L)) (p_L^2 - p_T^2) \eta_1 \\
& + k^2 (c_L^2 - c_T^2) p_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (4c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2 (7\eta_3 + 10\eta_4))) \left. \right], \\
Y_3^{(a)} = & \frac{iR_{11}^2 R_{12}}{k^2 c_L^6 c_T^2} \left[6k^6 c_L^4 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)^2 - \omega^6 \eta_1 (5\eta_3 + 12\eta_4) + k^2 \omega^4 (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
& (5c_T^2 \eta_1 + 2c_L^2 (2\eta_1 + 3\eta_3 + 7\eta_4)) - k^4 \omega^2 c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (5c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + c_T^2 (4\eta_1 + 7(\eta_3 + 2\eta_4))) \left. \right] \\
& + R_{12} \left[\frac{2k\omega^2 (C_9^{(2)} \eta_3 + 2C_{16}^{(2)} \eta_4)}{c_T^2} - \frac{2\omega^4 (C_{16}^{(2)} + h_2 p_T) \eta_4}{kc_T^4} - 2k^3 C_9^{(2)} (\eta_3 + 2\eta_4) \right] \\
& - \frac{iR_{12}^2}{4k^4 c_L^4 c_T^8 (p_L^2 - p_T^2)} \left[18k^8 c_L^2 c_T^8 (p_L^2 - p_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \right. \\
& - 3\omega^8 (c_L^2 - c_T^2) \eta_4 (\eta_3 + 4\eta_4) + 3k^4 \omega^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (4c_T^2 (\eta_3 + 3\eta_4) \\
& + c_L^2 ((6(p_L^2 - p_T^2) - 4) \eta_3 + 3(5(p_L^2 - p_T^2) - 4) \eta_4)) \\
& - 2k^6 \omega^2 c_T^6 (\eta_3 + 2\eta_4) (3c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2 (3(6(p_L^2 - p_T^2) - 1) \eta_3 \\
& - 6\eta_4 + 38(p_L^2 - p_T^2) \eta_4)) + k^2 \omega^6 c_T^2 (-3c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (2\eta_3 + 9\eta_4) \\
& + c_L^2 (6\eta_3^2 + (39 - 5p_L^2 + 5p_T^2) \eta_3 \eta_4 + 2(27 - 2p_L^2 + 2p_T^2) \eta_4^2)) \left. \right] \\
& + \frac{iR_{11}}{2kc_L^2 c_T^2} \left[C_{23}^{(2)} (2\omega^4 \eta_1 + k^2 \omega^2 c_T^2 (2\eta_1 (1 + p_L p_T) - 4\eta_2 - 3\eta_3 - 2\eta_4) \right. \\
& + k^2 c_L^2 (k^2 c_T^2 (1 + p_L p_T) - 2\omega^2) (\eta_3 + 2\eta_4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{25}^{(2)} (-2\omega^4 \eta_1 + k^2 c_L^2 (2\omega^2 + k^2 c_T^2 (p_L p_T - 1)) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 (4\eta_2 + 3\eta_3 + 2\eta_4 - 2(\eta_1 - p_L p_T))) \\
& + ik^2 (\omega^2 (2c_T^2 (C_{18}^{(2)} + C_{20}^{(2)}) p_T (2\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + c_L^2 (C_{18}^{(2)} - C_{20}^{(2)}) \\
& p_L (\eta_3 + 2\eta_4)) + k^2 c_L^2 c_T^2 ((C_{18}^{(2)} - C_{20}^{(2)}) p_L ((2 + p_L^2) \eta_3 + 2\eta_4) \\
& - (C_{18}^{(2)} + C_{20}^{(2)}) p_T (\eta_3 + 2\eta_4))) \Big]. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik için üçüncü merteye problemde, (4.74) ile verilen $B_{0i}^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
B_{01}^{(3)} &= b_{01}^{(3)} h + b_{02}^{(3)} \sin(2kh p_L) + b_{03}^{(3)} \sin(2kh p_T) + b_{04}^{(3)} \sin(kh(p_L - p_T)) \\
&+ b_{05}^{(3)} \sin(kh(p_L + p_T)) + h \left[b_{06}^{(3)} \cos(kh(p_L - p_T)) + b_{07}^{(3)} \cos(kh(p_L + p_T)) \right], \\
B_{02}^{(3)} &= b_{08}^{(3)} + b_{09}^{(3)} \cos(2kh p_L) + b_{010}^{(3)} \cos(2kh p_T) + h \left[b_{011}^{(3)} \sin(2kh p_L) \right. \\
&+ b_{012}^{(3)} \sin(2kh p_T) \Big] + b_{013}^{(3)} \cos(kh(p_L - p_T)) + b_{014}^{(3)} \cos(kh(p_L + p_T)) \\
&+ h \left[b_{015}^{(3)} \sin(kh(p_L - p_T)) + b_{016}^{(3)} \sin(kh(p_L + p_T)) \right] \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerdeki $b_{0i}^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
b_{01}^{(3)} &= \frac{k\omega(1 + p_L^2)R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)}{c_L^2} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} - \frac{k^2}{c_L^2} \left[c_L^2(1 + p_L^2)R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
&+ c_T^2((1 + p_T^2)^2 R_{12}^2 \eta_4 + R_{11}^2(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4))) \Big] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1}, \\
b_{02}^{(3)} &= \frac{\omega(1 - p_L^2)R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)}{2c_L^2 p_L} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} + \frac{R_{11}^2}{2kc_L^2 p_L} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \left[\omega^2(\eta_3 - 2p_L^2 \eta_4) \right. \\
&+ k^2(c_T^2(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) + c_L^2(1 + p_L^2)(2\eta_4 - p_L^2 \eta_3)) \Big] \\
&- k^2 p_L R_{11} R_{21} (\eta_3 - 2p_L^2 \eta_4) \mathcal{A}_1 (\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1} + ik^2 p_L R_{11}^2 (\eta_3 - 2p_L^2 \eta_4) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2}, \\
b_{03}^{(3)} &= - \frac{R_{12}^2(k^2 c_T^4(\eta_4 + p_T^4 \eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)))}{2kc_L^2 c_T^2 p_T} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} \\
&+ k^2 p_T R_{12} R_{22} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \mathcal{A}_1 (\overline{\mathcal{A}_1})_{x_1} - ik^2 p_T R_{12}^2 (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}_2}, \\
b_{04}^{(3)} &= - \frac{\omega R_{11} R_{12} (2c_L^2(1 + p_L^2) \eta_4 + c_T^2(\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4))}{c_L^2 c_T^2} \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{t_1} \\
&- \frac{R_{11} R_{12}}{2kc_L^2 c_T^2 p_T (p_T - p_L)} \left[2k^2 c_T^4 p_L p_T (1 + 2p_L p_T - p_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) \right. \\
&+ \omega^2 c_T^2 (p_L - p_T) p_T (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) + c_L^2 (p_L - p_T) (k^2 c_T^2 (p_L - p_T) (p_L p_T - 1) \\
&(\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^2 (p_L \eta_3 + 2(p_L + p_T(1 + p_L^2)) \eta_4)) \Big] \left(|\mathcal{A}_1|^2 \right)_{x_1} + (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \\
&(R_{12} R_{21} - R_{11} R_{22}) \overline{\mathcal{A}_1} (\mathcal{A}_1)_{x_1} + \left[\frac{1}{2} k^2 ((p_L^2 - 1) R_{12} R_{21} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R_{11}R_{22}((1+p_L^2+2p_Lp_T)\eta_3+2p_T(p_T+p_L(2+p_Lp_T))\eta_4)]\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \\
& +ik^2(1+p_Lp_T)R_{11}R_{12}(\eta_3+2p_Lp_T\eta_4)\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2, \\
b_{05}^{(3)} &= \frac{\omega R_{11}R_{12}(2c_L^2(1+p_L^2)\eta_4+c_T^2(\eta_3-2p_T^2\eta_4))}{c_L^2c_T^2}\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
& + \frac{R_{11}R_{12}}{2kc_L^2c_T^2p_T(p_T+p_L)}\left[2k^2c_T^4p_Lp_T(1-2p_Lp_T-p_T^2)(\eta_3+2\eta_4)\right. \\
& \left.\omega^2c_T^2p_T(p_L+p_T)(\eta_3-2p_T^2\eta_4)+c_L^2(p_L+p_T)(k^2c_T^2(p_L+p_T)(1+p_Lp_T)\right. \\
& \left.(\eta_3+2\eta_4)+\omega^2(p_L(-\eta_3-2\eta_4)+2(1+p_L^2)p_T\eta_4))\right]\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1}-\frac{1}{2}k^2(1+p_L^2) \\
& (R_{12}R_{21}-R_{11}R_{22})(\eta_3-2p_T^2\eta_4)\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1}+\left[\frac{1}{2}k^2((1-p_L^2)R_{12}R_{21}(\eta_3-2p_T^2\eta_4)\right. \\
& \left.+R_{11}R_{22}((1+p_L^2-2p_Lp_T)\eta_3+2p_T(p_T+p_L(p_Lp_T-2))\eta_4))\right]\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \\
& +ik^2(p_Lp_T-1)R_{11}R_{12}(\eta_3-2p_Lp_T\eta_4)\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2, \\
b_{06}^{(3)} &= \frac{k\omega(1+p_L^2)(c_L^2p_L+c_T^2p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2\eta_4-\eta_3)}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T}\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
& + \frac{k^2(1+p_L^2)(p_L+p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2\eta_4-\eta_3)}{2p_Lp_T}\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1}, \\
b_{07}^{(3)} &= \frac{k\omega(1+p_L^2)(c_L^2p_L-c_T^2p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2\eta_4-\eta_3)}{2c_L^2c_T^2p_Lp_T}\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{t_1} \\
& + \frac{k^2(1+p_L^2)(p_L-p_T)R_{11}R_{12}(2p_T^2\eta_4-\eta_3)}{2p_Lp_T}\left(|\mathcal{A}_1|^2\right)_{x_1}, \\
b_{08}^{(3)} &= \frac{i\omega(c_T^2R_{11}^2((1+2p_L^2)\eta_1+\eta_2)+c_L^2(1+2p_T^2)R_{12}^2\eta_4)}{c_L^2c_T^2}\left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1}-\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1}\right] \\
& + \frac{i}{2kc_L^2c_T^2}\left[\omega^2c_T^2R_{11}^2((1+2p_L^2)\eta_1+\eta_2)+c_L^2(k^2c_T^2((1+p_L^2)R_{11}^2\right. \\
& \left.+(1+p_T^2)R_{12}^2)(\eta_3+2\eta_4)-\omega^2R_{12}^2(\eta_3-2p_T^2\eta_4))\right]\left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1}-\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1}\right] \\
& +ik^2((1+p_L^2)R_{11}R_{21}(p_L^2\eta_1+\eta_2)+(1+p_T^2)^2R_{12}R_{22}\eta_4)\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \\
& +ik^2(R_{11}R_{21}(\eta_2-p_L^4\eta_1)+R_{12}R_{22}(p_T^2(\eta_2-\eta_1)+(p_T^4-1)\eta_4))\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \\
& -k^2((1+p_L^2)R_{11}^2(p_L^2\eta_1+\eta_2)+(1+p_T^2)^2R_{12}^2\eta_4)\mathcal{A}_2\overline{\mathcal{A}}_1 \\
& -k^2(R_{11}^2(\eta_2-p_L^4\eta_1)+R_{12}^2(p_T^2(\eta_2-\eta_1)+(p_T^4-1)\eta_4))\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2, \\
b_{09}^{(3)} &= \frac{i\omega R_{11}^2(\eta_3+2\eta_4-2\eta_2-2p_L^2\eta_1)}{c_L^2}\left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1}-\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1}\right] \\
& + \frac{iR_{11}^2}{2kc_L^2}\left[k^2c_L^2(3p_L^2-1)(\eta_3+2\eta_4)+\omega^2(2(1+p_L^2)\eta_2\right. \\
& \left.+(2p_L^2-1)(\eta_3+2\eta_4))\right]\left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1}-\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1}\right] \\
& +ik^2R_{11}R_{21}\left[(p_L^4\eta_1+\eta_2+p_L^2(2\eta_2-\eta_3-2\eta_4))\overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1}\right. \\
& \left.+(\eta_2-p_L^4\eta_1)\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1}\right]-k^2R_{11}^2\left[(p_L^4\eta_1-\eta_2)\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}}_1, \\
b_{010}^{(3)} = & - \frac{2i\omega R_{12}^2(\eta_3 + (1 - p_T^2)\eta_4)}{c_T^2} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \right] \\
& - \frac{iR_{12}^2(k^2 c_T^2(p_T^2 - 3)(\eta_3 + 2\eta_4) - \omega^2(\eta_3 - 2p_T^2\eta_4))}{2kc_T^2} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right] \\
& + (2p_L^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4)) - ik^2 R_{12} R_{22} \left[(\eta_4(1 + p_T^4) - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right. \\
& + (p_T^2 \eta_3 + (2p_T^2 + p_T^4)\eta_4 - 1) \mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \left. \right] + k^2 R_{11}^2 \left[(p_T^2(\eta_2 - \eta_1) + (1 - p_T^4)\eta_4) \right. \\
& \left. \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}}_2 + ((1 - p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}}_1 \right], \\
b_{011}^{(3)} = & - \frac{ik\omega R_{11}^2(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4))}{c_L^2 p_L} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \right] \\
& - \frac{ik^2 R_{11}^2(p_L^4 \eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4))}{p_L} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right], \\
b_{012}^{(3)} = & \frac{ik\omega R_{12}^2(\eta_4 + p_T^4 \eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4))}{c_T^2 p_T} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \right] \\
& + \frac{ik^2 R_{11}^2(p_T^4 \eta_4 + \eta_4 - 2p_T^2(\eta_2 + 2))}{p_L} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right], \\
b_{013}^{(3)} = & \frac{i\omega R_{11} R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left[2c_L^2 p_L^2(p_L - p_T) \right. \\
& + c_T^2 p_T(1 + 4p_L p_T - p_T^2) \left. \right] \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \right] \\
& - \frac{iR_{11} R_{12}}{2kc_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left[\omega^2 c_T^2 p_T((2p_L - p_T)p_T \eta_3 + (2 + 4p_L p_T)\eta_4) \right. \\
& + c_L^2(k^2 c_T^2(2(p_L + p_L^3)(1 + p_T^2)\eta_2 + (2p_L^3 + p_T + 2p_L p_T^2 + p_L^2 p_T(-2 + p_T^2))\eta_3 \\
& + 2(p_L - p_T)(2p_L^2 - p_L p_T + p_T^2)\eta_4) - \omega^2 p_L(2(1 + p_L^2)\eta_2 \\
& + p_L p_T(\eta_3 + 2\eta_4))) \left. \right] \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right] \\
& - \frac{ik^2}{2} \left\{ [p_L(1 + 2p_L p_T - p_T^2)(R_{12} R_{21} + R_{11} R_{22})(\eta_3 + 2\eta_4)] \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right. \\
& + [4(1 + p_L^2)p_T R_{11} R_{22} \eta_2 + p_L((2p_L p_T - p_T^2 - 1)R_{12} R_{21} + \\
& (2p_L p_T + p_T^2 + 1)R_{11} R_{22})\eta_3 + 2p_L(2p_L p_T + p_T^2 + 1) \\
& (R_{12} R_{21} + R_{11} R_{22})\eta_4] \mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \left. \right\} \\
& + k^2 R_{11} R_{12} \left[(2(p_T \eta_2 + p_L(p_L p_T \eta_1 + (1 + p_T^2)\eta_4))) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}}_1 \right. \\
& + \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}}_2 + ((1 - p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}}_1 \left. \right], \\
b_{014}^{(3)} = & - \frac{i\omega R_{11} R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2c_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left[2c_L^2 p_L^2(p_L + p_T) \right. \\
& + c_T^2 p_T(4p_L p_T + p_T^2 - 1) \left. \right] \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \right] \\
& - \frac{iR_{11} R_{12}}{2kc_L^2 c_T^2 p_L p_T} \left[\omega^2 c_T^2 p_T((2p_L + p_T)p_T \eta_3 + (4p_L p_T - 2)\eta_4) \right. \\
& + c_L^2(k^2 c_T^2(2(p_L + p_L^3)(1 + p_T^2)\eta_2 + (2p_L^3 - p_T + 2p_L p_T^2 + p_L^2 p_T(2 - p_T^2))\eta_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(p_L + p_T)(2p_L^2 + p_L p_T + p_T^2)\eta_4 - \omega^2 p_L(2(1 + p_L^2)\eta_2 \\
& - p_L p_T(\eta_3 + 2\eta_4))) \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right] \\
& - \frac{ik^2}{2} \left\{ [p_L(2p_L p_T + p_T^2 - 1)(R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22})(\eta_3 + 2\eta_4)] \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \right. \\
& + [4(1 + p_L^2)p_T R_{11}R_{22}\eta_2 + p_L((1 + 2p_L p_T + p_T^2)R_{12}R_{21} + \\
& (2p_L p_T - p_T^2 - 1)R_{11}R_{22})\eta_3 + 2p_L(2p_L p_T - p_T^2 - 1) \\
& (R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22})\eta_4] \mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \left. \right\} \\
& + k^2 R_{11}R_{12} \left[(2(p_T \eta_2 + p_L(p_L p_T \eta_1 - (1 + p_T^2)\eta_4))) \mathcal{A}_1 \overline{\mathcal{A}}_2 \right. \\
& + p_L(2p_L p_T + p_T^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) \mathcal{A}_2 \overline{\mathcal{A}}_1 \left. \right], \\
b_{015}^{(3)} &= \frac{ik\omega(c_L^2 p_L - c_T^2 p_T)(p_T^2 - 1 - 2p_L p_T)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2c_L^2 c_T^2 p_T} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} \right. \\
& - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \left. \right] - \frac{ik^2(p_L - p_T)(1 + 2p_L p_T - p_T^2)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2p_T} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \right. \\
& - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \left. \right], \\
b_{016}^{(3)} &= \frac{ik\omega(c_L^2 p_L + c_T^2 p_T)(p_T^2 - 1 + 2p_L p_T)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2c_L^2 c_T^2 p_T} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{t_1} \right. \\
& - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{t_1} \left. \right] - \frac{ik^2(p_L + p_T)(2p_L p_T + p_T^2 - 1)R_{11}R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)}{2p_T} \left[\mathcal{A}_1(\overline{\mathcal{A}}_1)_{x_1} \right. \\
& - \overline{\mathcal{A}}_1(\mathcal{A}_1)_{x_1} \left. \right]. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.76-77)'de görülen $K_i^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
K_1^{(3)} &= -T_1^{(3)}h - T_2^{(3)}\frac{\sin(2khp_L)}{2kp_L} - T_3^{(3)}\frac{\sin(2khp_T)}{2kp_T} + T_4^{(3)}\frac{\sin(kh(p_L - p_T))}{k(p_L - p_T)} \\
& - T_5^{(3)}\frac{\sin(kh(p_L + p_T))}{k(p_L + p_T)} + T_6^{(3)}\left[\frac{h\cos(kh(p_L - p_T))}{k(p_L - p_T)} - \frac{\sin(kh(p_L - p_T))}{k^2(p_L - p_T)^2} \right] \\
& + T_7^{(3)}\left[\frac{h\cos(kh(p_L + p_T))}{k(p_L + p_T)} - \frac{\sin(kh(p_L + p_T))}{k^2(p_L + p_T)^2} \right], \\
K_2^{(3)} &= -\frac{1}{4c_L^2 k^2} \left\{ [T_{10}^{(3)} - 2kp_L T_8^{(3)}] \frac{\cos(2khp_L)}{p_L^2} + [T_{11}^{(3)} - 2kp_T T_9^{(3)}] \frac{\cos(2khp_T)}{p_T^2} \right. \\
& + 2khT_{10}^{(3)}\frac{\sin(2khp_L)}{p_L} + 2khT_{11}^{(3)}\frac{\sin(2khp_T)}{p_T} - 4kT_{13}^{(3)}\frac{\cos(kh(p_L + p_T))}{(p_L + p_T)} \\
& - \frac{4\left[k(p_L - p_T)T_{12}^{(3)} - T_{14}^{(3)} \right] \cos(kh(p_L - p_T))}{k(p_L - p_T)^2} + 4T_{15}^{(3)}\frac{\cos(kh(p_L + p_T))}{(p_L + p_T)^2} \\
& \left. + 4khT_{14}^{(3)}\frac{\sin(kh(p_L - p_T))}{(p_L - p_T)} + 4khT_{15}^{(3)}\frac{\sin(kh(p_L + p_T))}{(p_L + p_T)} \right\}. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.79) sınır koşullarında ortaya çıkan $Z_{ij}^{(3)}$ ifadelerinin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
Z_{11}^{(3)} &= c_T^2 [R_{22} \sin(khp_T) - p_L R_{21} \sin(khp_L)], \\
Z_{12}^{(3)} &= c_T^2 [iR_{12} \sin(khp_T) - ip_L R_{11} \sin(khp_L)], \\
Z_{13}^{(3)} &= \frac{k^2}{2c_L^2} \left\{ z_1^{(3)} \sin(khp_T) + z_2^{(3)} \sin(khp_L) + z_3^{(3)} \sin(3khp_T) \right. \\
&\quad + z_4^{(3)} \sin(3khp_L) + z_5^{(3)} h \cos(khp_L) + z_6^{(3)} \sin(kh(2p_L - p_T)) \\
&\quad + z_7^{(3)} \sin(kh(2p_L + p_T)) + z_8^{(3)} \sin(kh(p_L - 2p_T)) + z_9^{(3)} \sin(kh(p_L + 2p_T)) \\
&\quad \left. + z_{10}^{(3)} h \cos(kh(2p_L - p_T)) + z_{11}^{(3)} h \cos(kh(2p_L + p_T)) \right\}. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{21}^{(3)} &= (c_L^2 - 2c_T^2) [ip_T R_{22} \cos(khp_T) + iR_{21} \cos(khp_L)], \\
Z_{22}^{(3)} &= -(c_L^2 - 2c_T^2) [p_T R_{12} \cos(khp_T) + R_{11} \cos(khp_L)], \\
Z_{23}^{(3)} &= \frac{k^2}{2c_L^2} \left\{ z_{12}^{(3)} \cos(khp_T) + z_{13}^{(3)} \cos(khp_L) + z_{14}^{(3)} \cos(3khp_T) \right. \\
&\quad + z_{15}^{(3)} \cos(3khp_L) + z_{16}^{(3)} h \sin(khp_L) + z_{17}^{(3)} h \sin(3khp_L) \\
&\quad + z_{18}^{(3)} \cos(kh(2p_L - p_T)) + z_{19}^{(3)} \cos(kh(2p_L + p_T)) + z_{20}^{(3)} \cos(kh(p_L - 2p_T)) \\
&\quad \left. + z_{21}^{(3)} \cos(kh(p_L + 2p_T)) + z_{22}^{(3)} h \sin(kh(2p_L - p_T)) + z_{23}^{(3)} h \sin(kh(2p_L + p_T)) \right\}. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Burada $z_i^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
z_1^{(3)} &= k \left\{ kR_{12}(4p_L^2(3 + p_L^2)(1 - p_T^2)R_{11}^2 + (3 + 2p_T^2 + 7p_T^4)R_{12}^2)\eta_3\eta_4 \right. \\
&\quad - 2kR_{12}(4p_L^2((2 + p_L^2)p_T^2 - 1)R_{11}^2 + p_T^2(3 + 2p_T^2 + 3p_T^4)R_{12}^2)\eta_4^2 \\
&\quad - 4k(1 + p_L^2)^2 p_T^2 R_{11}^2 R_{12} \eta_2 \eta_4 - c_L^2 (C_{25}^{(2)}(p_L(+p_T - 3p_L) - 2)R_{11} \\
&\quad + C_{23}^{(2)}(2 + p_L(3p_L + p_T))R_{11} - 2i((C_{20}^{(2)} - C_{18}^{(2)})p_L R_{11} + (C_{16}^{(2)} - 2C_9^{(2)})R_{12}))\eta_3 \\
&\quad + 2k(1 + p_L^2)^2 R_{11}^2 R_{12} \eta_2 \eta_3 - 2kR_{12}(p_L^2(p_T^2 - 2 - p_L^2)R_{11}^2 + p_T^2 R_{12}^2)\eta_3^2 \\
&\quad - 2ic_L^2 (ip_L((C_{25}^{(2)} - C_{23}^{(2)})p_L - (C_{23}^{(2)} + C_{25}^{(2)})p_T)R_{11} \\
&\quad + C_{20}^{(2)}(p_T - p_L(3 + p_L^2 - p_L p_T))R_{11} + C_{18}^{(2)}(p_T + p_L(3 + p_L(p_L + p_T)))R_{11} \\
&\quad \left. + 2(C_{16}^{(2)} - 2C_9^{(2)})p_T^2 R_{12})\eta_4 \right\}, \\
z_2^{(3)} &= -k \left\{ kp_L R_{11}(\eta_3 + 2\eta_4)(2R_{12}^2((1 - p_T^2)\eta_3 + (1 + 3p_T^4)\eta_4) + R_{11}^2((1 + p_L^2)^2 \eta_2 \right. \\
&\quad + p_L^2(3 + p_L^2)(\eta_3 + 2\eta_4))) - 4ic_L^2 C_9^{(2)} p_L R_{11}(\eta_3 + 2\eta_4) + c_L^2 (4ih_1 p_L(1 + p_L^2)R_{11} \\
&\quad (\eta_3 + 2\eta_4) + (2i(C_{18}^{(2)} - C_{20}^{(2)}) + (C_{23}^{(2)} - C_{25}^{(2)})p_L \\
&\quad + (C_{23}^{(2)} + C_{25}^{(2)})p_T)R_{12}(2p_T^2 \eta_4 - \eta_3)) \left. \right\} - 2ikc_L^2 C_{12}^{(2)} R_{11}(\eta_3 + 2p_L^2(\eta_3 + \eta_4)) \\
&\quad - c_L^2 C_{11}^{(2)} R_{11}(2\eta_4 + p_L^2(\eta_3 + 4\eta_4)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3^{(3)} &= -kR_{12}(\eta_3 - 2p_T^2\eta_4)(2ic_L^2C_{16}^{(2)} + kR_{12}^2((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4))) \\
z_4^{(3)} &= -R_{11} \left\{ k^2 p_L R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \left[(1 + p_L^2)^2 \eta_2 + p_L^2 (p_L^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4) \right] \right. \\
&\quad \left. + c_L^2 \left[C_{11}^{(2)} (2\eta_4 - p_L^2 \eta_3) + 2ikC_{12}^{(2)} (\eta_3 - 2p_L^2 \eta_4) \right] \right\}, \\
z_5^{(3)} &= -4kc_L^2 C_{11}^{(2)} p_L (1 + p_L^2) R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4), \\
z_6^{(3)} &= R_{12} \left\{ c_L^2 (C_{11}^{(2)} p_L + 2ik(h_1 (1 + p_L^2) + C_{12}^{(2)} p_L)) (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \right. \\
&\quad - k^2 R_{11}^2 ((1 + p_L^2)^2 \eta_2 (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) + p_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (((p_L - p_T)^2 - 2)\eta_3 \\
&\quad - 2(1 + 2p_L p_T + (p_L^2 - 2)p_T^2) \eta_4)) \} - kc_L^2 R_{11} \left\{ C_{25}^{(2)} ((2 + p_L(p_L + p_T))\eta_3 \right. \\
&\quad \left. + 2p_L(p_T - p_L)\eta_4) - 2iC_{20}^{(2)} (p_L \eta_3 + (p_L - p_L^3 + p_T + p_L^2 p_T)\eta_4) \right\}, \\
z_7^{(3)} &= R_{12} \left\{ -ic_L^2 (2k(h_1 + C_{12}^{(2)} p_L + h_1 p_L^2) - iC_{11}^{(2)} p_L) (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \right. \\
&\quad + k^2 R_{11}^2 ((1 + p_L^2)^2 \eta_2 (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) + p_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (((p_L + p_T)^2 - 2)\eta_3 \\
&\quad + (4p_L p_T - 2(p_L^2 - 2)p_T^2 - 2)\eta_4)) \} - kc_L^2 R_{11} \left\{ C_{23}^{(2)} ((2 + p_L^2 - p_L p_T)\eta_3 \right. \\
&\quad \left. - 2p_L(p_L + p_T)\eta_4) - 2iC_{18}^{(2)} (p_L \eta_3 - (p_T + p_L(p_L(p_L + p_T) - 1))\eta_4) \right\}, \\
z_8^{(3)} &= kc_L^2 (2iC_{20}^{(2)} + C_{25}^{(2)} (p_L - p_T)) R_{12} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \\
&\quad + kR_{11} \left\{ kp_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) ((1 + (2p_L - 3p_T)p_T)\eta_3 + \eta_4 \right. \\
&\quad + p_T^2 (3p_T^2 - 4(1 + p_L p_T))\eta_4) + 2ic_L^2 (h_2 (1 + p_L^2) (2p_T^2 \eta_4 - \eta_3) \\
&\quad \left. + C_{16}^{(2)} (p_L \eta_3 + 2(p_L + (1 + p_L^2)p_T)\eta_4)) \right\}, \\
z_9^{(3)} &= kc_L^2 (2iC_{18}^{(2)} + C_{23}^{(2)} (p_L + p_T)) R_{12} (2p_T^2 \eta_4 - \eta_3) \\
&\quad + kR_{11} \left\{ kp_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) ((1 - (2p_L + 3p_T)p_T)\eta_3 - \eta_4 \right. \\
&\quad + p_T^2 (4(1 - p_L p_T))\eta_4 - 3p_T^2) + 2ic_L^2 (h_2 (1 + p_L^2) (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) \\
&\quad \left. + C_{16}^{(2)} (p_L \eta_3 + 2(p_L - (1 + p_L^2)p_T)\eta_4)) \right\}, \\
z_{10}^{(3)} &= 2kc_L^2 C_{11}^{(2)} (1 + p_L^2) R_{12} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4), \\
z_{11}^{(3)} &= -2kc_L^2 C_{11}^{(2)} (1 + p_L^2) R_{12} (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4), \\
z_{12}^{(3)} &= k \left\{ c_L^2 R_{11} (2iC_{25}^{(2)} ((p_L + p_L^3)\eta_1 - p_T(p_L^2 \eta_1 + \eta_2)) - C_{20}^{(2)} (4(1 + p_L^2)\eta_2 \right. \\
&\quad + p_L(p_L - p_T)(\eta_3 + 2\eta_4))) - c_L^2 R_{11} (C_{18}^{(2)} (4(1 + p_L^2)\eta_2 + p_L(p_L + p_T)(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&\quad - 2iC_{23}^{(2)} ((p_L + p_T)\eta_2 + p_L(p_L(p_L + p_T)\eta_1 + \eta_3 + 2\eta_4))) \\
&\quad - 2R_{12} (c_L^2 (2(C_{16}^{(2)} p_T^3 + h_2(1 + p_T^2)^2)\eta_4 - C_{16}^{(2)} p_T \eta_3) + ikp_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad (2(1 + 3p_L^2)R_{11}^2 (p_L^2 \eta_1 + \eta_2) + R_{12}^2 (\eta_4 (1 + p_T^4) + 2p_T^2 (\eta_3 + 3\eta_4)))) \} , \\
z_{13}^{(3)} &= kc_L^2 R_{12} \left\{ C_{18}^{(2)} (p_L + p_T) (\eta_3 - 2p_T^2 \eta_4) + C_{20}^{(2)} (p_L - p_T) (2p_T^2 \eta_4 - \eta_3) \right. \\
&\quad - 2i(C_{25}^{(2)} (p_L p_T (\eta_3 + 2\eta_4) - 2(1 + p_T^2)\eta_4) + C_{23}^{(2)} (2(1 + p_T^2)\eta_4 \\
&\quad + p_L p_T (\eta_3 + 2\eta_4))) \} + iR_{11} \left\{ 8ikc_L^2 C_9^{(2)} (1 + p_L^2)\eta_2 + c_L^2 ((C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)})p_L \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2\eta_2 + \eta_3 + 2(p_L^2\eta_1 + \eta_4)) + 4ikh_1(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4))) \\
& + 2k^2(R_{11}^2(p_L^2\eta_1 + \eta_2)(3p_L^4\eta_1 + 3\eta_2 + p_L^2(6\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)) + 2R_{12}^2((1 + p_L^2) \\
& (1 + p_T^2)^2\eta_2\eta_4 + p_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)((1 + p_T^4)\eta_4 + 2p_T^2(\eta_3 + 3\eta_4)))) \Big\}, \\
z_{14}^{(3)} &= 2kR_{12} \Big\{ ikp_TR_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4)) \\
& + c_L^2(2(C_{16}^2)p_T^3 + h_2(p_T^2 - 1)^2)\eta_4 - p_T(C_{16}^2 + 4h_2p_T)\eta_3 \Big\}, \\
z_{15}^{(3)} &= iR_{11} \Big\{ 2k^2R_{11}^2(p_L^2\eta_1 + \eta_2)(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \\
& + (p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) + (C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)})p_L \\
& (2p_L^2\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)) \Big\}, \\
z_{16}^{(3)} &= -4ikc_L^2C_{11}^{(2)}R_{11}(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)), \\
z_{17}^{(3)} &= -4ikc_L^2C_{11}^2R_{11}(p_L^4\eta_1 + \eta_2 + p_L^2(2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4)), \\
z_{18}^{(3)} &= -kc_L^2R_{11} \Big\{ C_{20}^{(2)}(4(1 + p_L^2)\eta_2 - p_L(p_L - p_T)(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& - 2iC_{25}^{(2)}(p_L(p_L^2\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4) - p_T(p_L^2\eta_1 + \eta_2)) \Big\} \\
& - iR_{12} \Big\{ c_L^2C_{11}^{(2)}(\eta_3 + 2p_T(-p_T\eta_4 + p_L(\eta_3 + 2\eta_4))) + 2k(kR_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& ((1 + p_L^2)((1 + 3p_L^2)p_T + p_L(1 - p_T^2))\eta_2 + p_L^2(p_L(1 - p_T^2) - (1 - 3p_L^2)p_T) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4)) + ic_L^2(h_1p_L(1 + 2p_Lp_T - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4) + C_{12}^{(2)}((2p_L - p_T)p_T\eta_3 \\
& + 2(1 + 2p_Lp_T)\eta_4))) \Big\}, \\
z_{19}^{(3)} &= kc_L^2R_{11} \Big\{ 2iC_{23}^{(2)}((p_L + p_T)\eta_2 + p_L(p_L(p_L + p_T)\eta_1 - \eta_3 - 2\eta_4)) \\
& + C_{18}^{(2)}(p_L(p_L + p_T)(\eta_3 + 2\eta_4) - 4(1 + p_L^2)\eta_2) \Big\} \\
& - iR_{12} \Big\{ c_L^2C_{11}^{(2)}((2p_Lp_T - 1)\eta_3 + 2p_T(2p_L + p_T)\eta_4) + 2k(ic_L^2C_{12}^{(2)} \\
& (p_T(2p_L + p_T)\eta_3 + 2(4p_Lp_T - 1)\eta_4) + (\eta_3 + 2\eta_4)(ic_L^2h_1p_L(p_T(2p_L + p_T) - 1) \\
& + kR_{11}^2((1 + p_L^2)(p_T + p_L(p_T(3p_L + p_T) - 1))\eta_2 \\
& + p_L^2(p_L(p_T(3p_L + p_T) - 1) - p_T)(\eta_3 + 2\eta_4)))) \Big\}, \\
z_{20}^{(3)} &= kc_L^2R_{12}(C_{20}^{(2)}(p_L - p_T)(\eta_3 - 2p_T^2\eta_4) - 2iC_{25}^{(2)}(2\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4) \\
& + p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4))) - 2kR_{11} \Big\{ c_L^2(2C_{16}^{(2)}(1 + p_L^2)\eta_2 + C_{16}^{(2)}p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - h_2p_L(1 + 2p_Lp_T - p_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4)) + ikR_{12}^2(p_L(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (p_T(p_T(4p_L - p_T) - 1)\eta_3 + (2p_T(2p_T^2 - 1) + p_L(1 - 6p_T^2 + p_T^4))\eta_4) \\
& + (1 + p_L^2)\eta_2((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4))) \Big\}, \\
z_{21}^{(3)} &= kc_L^2R_{12}(C_{18}^{(2)}(p_L + p_T)(2p_T^2\eta_4 - \eta_3) - 2iC_{23}^{(2)}(2p_T^2(\eta_3 + \eta_4) - 2\eta_4 \\
& + p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4))) + 2kR_{11} \Big\{ c_L^2(-2C_{16}^{(2)}(1 + p_L^2)\eta_2 + C_{16}^{(2)}p_Lp_T(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + h_2p_L(2p_Lp_T + p_T^2 - 1)(\eta_3 + 2\eta_4)) + ikR_{12}^2(p_L(\eta_3 + 2\eta_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (p_T(p_T(4p_L + p_T) - 1)\eta_3 - (2p_T(1 - 2p_T^2) + p_L(1 - 6p_T^2 + p_T^4))\eta_4) \\
& - (1 + p_L^2)\eta_2((1 + p_T^4)\eta_4 - 2p_T^2(\eta_3 + \eta_4))) \}, \\
z_{22}^{(3)} &= 2ikc_L^2 C_{11}^{(2)} p_L(1 + (2p_L - p_T)p_T)R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4), \\
z_{23}^{(3)} &= 2ikc_L^2 C_{11}^{(2)} p_L((2p_L + p_T)p_T - 1)R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4). \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.84a,b) ifadelerindeki $C_i^{(3)}$ ifadelerinin açık yapıları aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} &= C_4^{(3)} = C_5^{(3)} = C_8^{(3)} = C_9^{(3)} = C_{12}^{(3)} = C_{14}^{(3)} = C_{15}^{(3)} = C_{18}^{(3)} = C_{20}^{(3)} = C_{22}^{(3)} = 0, \\
C_{23}^{(3)} &= C_{26}^{(3)} = C_{27}^{(3)} = C_{30}^{(3)} = C_{31}^{(3)} = C_{34}^{(3)} = C_{35}^{(3)} = C_{36}^{(3)} = C_{37}^{(3)} = C_{39}^{(3)} = C_{41}^{(3)} = 0, \\
C_{44}^{(3)} &= C_{45}^{(3)} = C_{48}^{(3)} = C_{49}^{(3)} = C_{52}^{(3)} = C_{53}^{(3)} = C_{54}^{(3)} = C_{56}^{(3)} = 0, \\
C_2^{(3)} &= g_2^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_2^{(a)}, & C_3^{(3)} &= g_3^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_3^{(a)}, \\
C_6^{(3)} &= g_6^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_6^{(a)}, & C_7^{(3)} &= g_7^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_7^{(a)}, \\
C_{10}^{(3)} &= g_{10}^{(a)}, & C_{11}^{(3)} &= g_{11}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_{11}^{(a)}, \\
C_{13}^{(3)} &= g_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_{13}^{(a)}, & C_{16}^{(3)} &= g_{16}^{(a)}, \\
C_{17}^{(3)} &= g_{17}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{19}^{(3)} &= g_{19}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{21}^{(3)} &= g_{21}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{24}^{(3)} &= g_{24}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{25}^{(3)} &= g_{25}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{28}^{(3)} &= g_{28}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{29}^{(3)} &= g_{29}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{32}^{(3)} &= g_{32}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{33}^{(3)} &= g_{33}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{38}^{(3)} &= g_{38}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{40}^{(3)} &= g_{40}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{42}^{(3)} &= g_{42}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{43}^{(3)} &= g_{43}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{46}^{(3)} &= g_{46}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{47}^{(3)} &= g_{47}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{50}^{(3)} &= g_{50}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{51}^{(3)} &= g_{51}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{55}^{(3)} &= g_{55}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki $g_i^{(3)}$ ve $g_j^{(a)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
g_2^{(3)} &= \frac{\omega^4 C_{11}^{(2)} (1 - p_L^2) R_{11} \eta_1}{2k^2 c_L^6 (p_L + p_L^3)}, \\
g_2^{(a)} &= \frac{R_{11}}{2k^2 c_L^4 p_L^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_L^2 k \left[2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + c_L^2 k \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_3^{(3)} &= \frac{i}{2kc_L^4 (c_L^2 - c_T^2) p_L^2 (1 + p_L^2)} \left\{ c_L^2 (c_L^2 - c_T^2) p_L (X_1^{(a)} - i p_L Y_2^{(a)}) \right. \\
& \quad \left. + \omega^2 C_{11}^{(2)} (c_T^2 (3p_L^2 (p_L^2 - 2) - 1) + c_L^2 (1 + 6p_L^2 + 5p_L^4)) R_{11} \eta_1 \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3^{(a)} &= -\frac{R_{11}\omega^2}{k^4 c_L^4 p_L^3 (1+p_L^2)} \left\{ k\omega p_L^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + (\omega^2 - k^2 c_L^2) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right\} \\
&\quad - \frac{R_{11}\omega^2}{k^4 c_L^4 p_L^3 (1+p_L^2)} \left\{ k\omega p_L^2 \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + (\omega^2 - k^2 c_L^2) \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right\} \\
&\quad + \frac{i\omega^2}{2k^4 c_L^4 p_L^3 (1+p_L^2)} \left\{ kR_{11} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + 2\omega(R_{11} + kp_L^2 R_{21}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\
&\quad \left. + (2\omega^2 R_{21} + kc_L^2(R_{11} + p_L^2 R_{11} - 2kR_{21})) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_6^{(3)} &= -\frac{i\omega^4 C_{11}^{(2)}(c_T^2(p_L^2 - 1) + c_L^2(1 + 3p_L^2))R_{11}\eta_1}{k^3 c_L^6 (c_L^2 - c_T^2)p_L(1+p_L^2)}, \\
g_6^{(a)} &= -\frac{iR_{11}}{k^3 c_L^4 p_L^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_L^2 \left[\omega(2 + p_L^2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_L^2(1 + p_L^2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_7^{(3)} &= \frac{1}{2\omega^2 c_L^2 (c_L^2 - c_T^2)^2 p_L^2} \left\{ c_L^2 (c_L^2 - c_T^2) p_L (c_T^2 (ip_L Y_2^{(a)} - X_1^{(a)}) \right. \\
&\quad \left. + c_L^2 (X_1^{(a)} (1 + 2p_L^2) + ip_L Y_2^{(a)})) \omega^2 C_{11}^{(2)} (c_L^4 (1 + p_L^2)^2 + c_T^4 (1 + 6p_L^2 - 3p_L^4) \right. \\
&\quad \left. - 2c_L^2 c_T^2 (1 + 4p_L^2 + 7p_L^4)) R_{11} \eta_1 \right\}, \\
g_7^{(a)} &= \frac{iR_{11}\omega^3}{k^5 c_L^4 p_L (1+p_L^2)} \left\{ \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right] + \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\omega^2}{2k^5 c_L^4 p_L^3 (1+p_L^2)} \left\{ kR_{11} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + 2\omega(R_{11} (1 - p_L^2) + kp_L^2 R_{21}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right. \\
&\quad \left. + (kc_L^2 (1 - p_L^2 (1 + 2p_L^2)) R_{11} + 2\omega^2 p_L^2 R_{21}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_{10}^{(a)} &= \frac{R_{12}}{2k^2 c_T^4 p_T^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_T^2 \left[2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_T^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_{11}^{(3)} &= \frac{i(p_T X_2^{(a)} + iY_3^{(a)})}{2kc_T^2 (p_T + p_T^3)}, \\
g_{11}^{(a)} &= \frac{\omega^2 R_{12}}{k^4 c_T^4 p_T^3 (1+p_T^2)} \left\{ \left[k\omega p_T^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + (\omega^2 - k^2 c_T^2) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[-k\omega p_T^2 \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + (\omega^2 - k^2 c_T^2) \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] \right\} + \frac{i\omega^2}{2k^4 c_T^4 p_T^3 (1+p_T^2)} \left\{ kR_{12} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} \right. \\
&\quad \left. + 2\omega(R_{12} + kp_T^2 R_{22}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + (2\omega^2 R_{22} + kc_T^2 (R_{12} (1 + p_T^2) - 2kR_{22})) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_{13}^{(3)} &= \frac{(c_L^2 + c_T^2) p_T X_2^{(a)} + i(c_L^2 - c_T^2 (1 + 2p_T^2)) Y_3^{(a)}}{2k^2 c_T^2 (c_L^2 - c_T^2) p_T (1+p_T^2)}, \\
g_{13}^{(a)} &= \frac{i\omega^3 R_{12}}{k^5 c_T^4 (p_T + p_T^3)} \left\{ \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right] + \left[k \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + \omega \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\omega^2}{2k^5 c_T^4 p_T^3 (1+p_T^2)} \left\{ kR_{12} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + 2\omega(R_{12} (1 - p_T^2) + kp_T^2 R_{22}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (kc_T^2(1 - p_T^2 - 2p_T^4)R_{12} + 2\omega^2 p_T^2 R_{22}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \Big\}, \\
g_{16}^{(a)} &= -\frac{iR_{12}}{k^3 c_T^4 p_T^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_T^2 \left[\omega(2 + p_T^2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_T^2(1 + p_T^2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_{17}^{(3)} &= \frac{(k^2(c_T^2 + c_L^2(p_L + 2p_T)^2) - \omega^2)X_{66}^{(3)} + ik^2(c_L^2 - c_T^2)(p_L + 2p_T)Y_{66}^{(3)}}{\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + (p_L + 2p_T)^2) + k^4 c_L^2 c_T^2 (1 + (p_L + 2p_T)^2)^2}, \\
g_{19}^{(3)} &= \frac{(k^2(c_T^2 + c_L^2(p_L - 2p_T)^2) - \omega^2)X_{67}^{(3)} + ik^2(c_L^2 - c_T^2)(p_L - 2p_T)Y_{67}^{(3)}}{\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + (p_L - 2p_T)^2) + k^4 c_L^2 c_T^2 (1 + (p_L - 2p_T)^2)^2}, \\
g_{21}^{(3)} &= \frac{(3\omega^2 + k^2(c_T^2 + c_L^2(p_T^2 + 4(p_L p_T - 1))))X_{65}^{(3)}}{4k^2 c_T^2 p_L(p_L + p_T)(3\omega^2 + k^2 c_L^2(p_T(4p_L + p_T) - 3))} \\
& - \frac{i(c_L^2 - c_T^2)(2p_L + p_T)Y_{65}^{(3)}}{4c_T^2 p_L(p_L + p_T)(3\omega^2 + k^2 c_L^2(4p_L p_T + p_T^2 - 3))} \\
& + \frac{(2p_L + p_T)X_{68}^{(3)}}{8k^3 c_T^4 p_L^2(p_L + p_T)^2(\omega^2 - k^2 c_L^2(1 + (2p_L + p_T)^2))} \left[\omega^4(22c_L^2 + 9c_T^2) \right. \\
& + 8k^4 c_L^2 c_T^2(5c_L^2 - c_T^2)(1 - p_L p_T) + k^2\omega^2(7c_T^4 + 2c_L^2 c_T^2(12p_L p_T - 23) \\
& \left. + c_L^4(8p_L p_T + p_T^2 - 24)) \right] \\
& + \frac{iY_{68}^{(3)}}{16k^3 c_T^4 p_L^2(p_L + p_T)^2(\omega^2 - k^2 c_L^2(1 + (2p_L + p_T)^2))} \left[\omega^4(c_L^2 - c_T^2) \right. \\
& + k^2\omega^2(c_L^4 - c_T^4)((2p_L + p_T)^2 - 1) + k^4 c_L^2 c_T^2(c_T^2 - c_L^2)(1 + (2p_L + p_T)^2) \\
& \left. (3(2p_L + p_T)^2 - 1) \right], \\
g_{24}^{(3)} &= \frac{(3\omega^2 + k^2(c_T^2 + c_L^2(4(p_L p_T - 1) + p_T^2)))X_{68}^{(3)} - ik^2(c_L^2 - c_T^2)(2p_L + p_T)Y_{68}^{(3)}}{4k^2 c_T^2 p_L(p_L + p_T)(3\omega^2 + k^2 c_L^2(4p_L p_T + p_T^2 - 3))}, \\
g_{25}^{(3)} &= -\frac{i(c_L^2 - c_T^2)Y_{69}^{(3)}}{8kc_T^4 \left[(p_L - p_T)p_L \left(k^2 c_L^2(1 + (p_T - 2p_L)^2) - \omega^2 \right) \right]^2} \\
& \left[\omega^2 c_T^2(22(p_L^2 - 1) + p_T(33p_T - 46p_L)) + c_L^2(56k^2 c_T^2(1 + p_L p_T) \right. \\
& \left. + \omega^2(p_T^2 - 34 - 10p_L p_T)) \right] + \frac{i(c_L^2 - c_T^2)(2p_L - p_T)Y_{64}^{(3)}}{4c_T^2 p_L(p_L - p_T)(-3\omega^2 + k^2 c_L^2(3 + 4p_L p_T - p_T^2))} \\
& + \frac{(k^2 c_L^2(3 + (4p_L - p_T)p_T) - 3\omega^2)(\omega^2 - k^2(c_T^2 + c_L^2(p_T - 2p_L)^2))X_{64}^{(3)}}{4k^2 c_T^2 p_L(p_L - p_T)(\omega^2 - k^2 c_L^2(1 + (p_T - 2p_L)^2))^2} \\
& + \frac{X_{69}^{(3)}}{16k^3 c_T^4 p_L^2(p_L - p_T)^2(\omega^2 - k^2 c_L^2(1 + (p_T - 2p_L)^2))} \left[k^2(c_L - c_T)^2(c_L + c_T)^2 \right. \\
& \left. (k^2(c_T^2 + c_L^2(p_T - 2p_L)^2) - \omega^2)(2\omega^2 c_T^2 + k^2(c_L^4 - c_T^4 - 2c_L^2 c_T^2(1 + (p_T - 2p_L)^2))) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{28}^{(3)} &= \frac{(k^2(c_T^2 + c_L^2(p_T - 2p_L)^2) - \omega^2)X_{69}^{(3)} + ik^2(c_T^2 - c_L^2)(2p_L - p_T)Y_{69}^{(3)}}{4k^2c_T^2p_L(p_L - p_T)(3\omega^2 + k^2c_L^2(p_T^2 - 3 - 4p_Lp_T))}, \\
g_{29}^{(3)} &= \frac{X_{610}^{(3)}(k^2(c_T^2 + 9c_L^2p_L^2) - \omega^2)}{\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + 9p_L^2) + k^4c_L^2c_T^2(1 + 9p_L^2)^2} \\
&\quad - \frac{ikY_{610}^{(3)}(c_L^2 - c_T^2)(k^4c_L^2c_T^2(18p_L^2 + 243p_L^4 - 1) - \omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(9p_L^2 - 1))}{(\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + 9p_L^2) + k^4c_L^2c_T^2(1 + 9p_L^2)^2)^2} \\
&\quad + \frac{3kX_{612}^{(3)}(64\omega^4c_T^2 + 16k^4c_L^2c_T^2(5c_L^2 - c_T^2) + k^2\omega^2(c_L^4 - 146c_L^2c_T^2 + 17c_T^4))p_L}{32(\omega^2 - k^2c_L^2)^2(\omega^2 - k^2c_T^2(1 + 9p_L^2))^2} \\
&\quad + \frac{Y_{612}^{(3)}3ik^2(c_L^2 - c_T^2)p_L}{(k^2c_L^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)(k^2c_T^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)}, \\
g_{32}^{(3)} &= \frac{8\omega^2X_{612}^{(3)} - 3k^2c_L^2(3X_{612}^{(3)} + ip_LY_{610}^{(3)}) + k^2c_T^2(X_{612}^{(3)} + 3ip_LY_{610}^{(3)})}{8(\omega^2 - k^2c_L^2)(k^2c_T^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)}, \\
g_{33}^{(3)} &= \frac{3k^2c_L^2p_T(3p_TX_{611}^{(3)} + iY_{611}^{(3)}) + k^2c_T^2(X_{611}^{(3)} - 3ip_TX_{611}^{(3)}) - X_{611}^{(3)}\omega^2}{8(\omega^2 - k^2c_L^2)(k^2c_T^2(1 + 9p_T^2) - \omega^2)}, \\
g_{38}^{(3)} &= \frac{(k^2(c_L^2 + c_T^2(p_L + 2p_T)^2) - \omega^2)Y_{66}^{(3)} - ik^2(c_L^2 - c_T^2)(p_L + 2p_T)X_{66}^{(3)}}{4k^2c_L^2p_T(p_L + p_T)(3\omega^2 + k^2c_T^2(p_L^2 + 4p_Lp_T - 3))}, \\
g_{40}^{(3)} &= \frac{ik^2(c_L^2 - c_T^2)(p_L - 2p_T)X_{67}^{(3)} - (3\omega^2 + k^2(c_L^2 + c_T^2(p_L^2 - 4(1 + p_Lp_T))))Y_{67}^{(3)}}{4k^2c_L^2(p_L - p_T)p_T(3\omega^2 + k^2c_T^2(p_L^2 - 4p_Lp_T - 3))}, \\
g_{42}^{(3)} &= \frac{i(c_L^2 - c_T^2)(2p_L + p_T)X_{68}^{(3)} + (c_L^2 + c_T^2(4p_L(p_L + p_T) - 1))Y_{68}^{(3)}}{4c_T^2p_L(p_L + p_T)(3\omega^2 + k^2c_L^2(4p_Lp_T + p_T^2 - 3))}, \\
g_{43}^{(3)} &= -\frac{ik^2(c_L^2 - c_T^2)(2p_L + p_T)X_{65}^{(3)}}{\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + (2p_L + p_T)^2) + k^4c_L^2c_T^2(1 + (2p_L + p_T)^2)^2} \\
&\quad + \frac{(k^2(c_L^2 + c_T^2(2p_L + p_T)^2) - \omega^2)Y_{65}^{(3)}}{\omega^4 - k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2)(1 + (2p_L + p_T)^2) + k^4c_L^2c_T^2(1 + (2p_L + p_T)^2)^2} \\
&\quad - \frac{iX_{68}^{(3)}(c_L^2 - c_T^2)}{16k^3c_T^4p_L^2(p_L + p_T)^2(3\omega^2 + k^2c_L^2(4p_Lp_T + p_T^2 - 3))^2} \left[(1 - (2p_L + p_T)^2) \right. \\
&\quad \left. k^2\omega^2(c_L^2 + c_T^2) - \omega^4 + k^4c_L^2c_T^2(1 + (2p_L + p_T)^2)(3(2p_L + p_T)^2 - 1) \right] \\
&\quad - \frac{Y_{68}^{(3)}(2p_L + p_T)}{8k^3c_T^4p_L^2(p_L + p_T)^2(3\omega^2 + k^2c_L^2(4p_Lp_T + p_T^2 - 3))^2} \left[16\omega^4c_T^2 + 8k^4c_L^2c_T^2 \right. \\
&\quad \left. (c_L^2 - 5c_T^2)(p_Lp_T - 1) + k^2\omega^2(c_L^4 - 10c_L^2c_T^2 + c_T^4(16p_L(p_L + 2p_T) - 39)) \right], \\
g_{46}^{(3)} &= \frac{(c_T^2(1 + 4p_L(p_T - p_L)) - c_L^2)Y_{69}^{(3)} - i(c_L^2 - c_T^2)(2p_L - p_T)X_{69}^{(3)}}{4c_T^2p_L(p_L - p_T)(k^2c_L^2(3 + 4p_Lp_T - p_T^2) - 3\omega^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{47}^{(3)} = & -\frac{iX_{64}^{(3)}(c_L^2 - c_T^2)(2p_L - p_T)}{4c_T^2 p_L(p_L - p_T)(3\omega^2 + k^2 c_L^2(p_T^2 - 3 - 4p_L p_T))} \\
& + \frac{Y_{64}^{(3)}(c_L^2 + c_T^2(4p_L(p_L - p_T) - 1))}{4c_T^2 p_L(p_L - p_T)(3\omega^2 + k^2 c_L^2(p_T^2 - 3 - 4p_L p_T))} \\
& - \frac{iX_{69}^{(3)}(c_L^2 - c_T^2)}{16k^3 c_T^4 p_L^2(p_L - p_T)^2(3\omega^2 + k^2 c_L^2(-3 - 4p_L p_T + p_T^2))^2} [k^4 c_L^2 c_T^2 \\
& (1 + (p_T - 2p_L)^2)(3(p_T - 2p_L)^2 - 1) - k^2 \omega^2(c_L^2 + c_T^2)((p_T - 2p_L)^2 - 1) \\
& - \omega^4] - \frac{Y_{69}^{(3)}(2p_L - p_T)}{8k^3 c_T^4 p_L^2(p_L - p_T)^2(3\omega^2 + k^2 c_L^2(p_T^2 - 3 - 4p_L p_T))^2} [16\omega^4 c_T^2 \\
& + k^2 \omega^2(c_L^4 - 10c_L^2 c_T^2 + c_T^4(16p_L(p_L - 2p_T) - 39)) \\
& - 8k^4 c_L^2 c_T^2(c_L^2 - 5c_T^2)(1 + p_L p_T)] , \\
g_{50}^{(3)} = & \frac{k^2 c_L^2(3ip_L X_{612}^{(3)} + Y_{610}^{(3)}) + 3k^2 c_T^2 p_L(3p_L Y_{610}^{(3)} - iX_{612}^{(3)}) - \omega^2 Y_{610}^{(3)}}{8(\omega^2 - k^2 c_L^2)(k^2 c_T^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)} , \\
g_{51}^{(3)} = & -\frac{3ik^2(c_L^2 - c_T^2)p_L X_{610}^{(3)}}{(k^2 c_L^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)(k^2 c_T^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)} \\
& + \frac{Y_{610}^{(3)} 3k p_L}{32(\omega^2 - k^2 c_L^2)^2(\omega^2 - k^2 c_T^2(1 + 9p_L^2))^2} [16k^4 c_L^2 c_T^2(c_L^2 - 5c_T^2) \\
& + k^2 \omega^2(c_L^4 - 34c_L^2 c_T^2 + c_T^4(80 - 81p_L^2)) - \omega^4(c_L^2 - 18c_T^2)] \\
& - \frac{ik(c_L^2 - c_T^2)(112k^4 c_L^2 c_T^2 - 5\omega^4 + k^2 \omega^2(5c_L^2 + c_T^2(117p_L^2 - 112)))X_{612}^{(3)}}{32(\omega^2 - k^2 c_L^2)^2(\omega^2 - k^2 c_T^2(1 + 9p_L^2))^2} \\
& + \frac{(k^2(c_L^2 + 9c_T^2 p_L^2) - \omega^2)Y_{612}^{(3)}}{8(\omega^2 - k^2 c_L^2)(k^2 c_T^2(1 + 9p_L^2) - \omega^2)} , \\
g_{55}^{(3)} = & \frac{8Y_{611}^{(3)}\omega^2 + k^2 c_L^2(Y_{611}^{(3)} - 3iX_{611}^{(3)}p_T) + 3ik^2 c_T^2(3iY_{611}^{(3)} + X_{611}^{(3)}p_T)}{8(\omega^2 - k^2 c_T^2)(k^2 c_L^2(1 + 9p_T^2) - \omega^2)} . \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Birinci eşitsizlik için üçüncü mertebe pertürbasyon probleminde, (4.91) ile verilen $\mathbf{b}_1^{(3)}$ vektöründe görülen $\mathbf{F}$ vektörünün bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
F_1 = & \frac{1}{c_T^2} Z_{13}^{(3)} - h \left[ik \left(g_6^{(3)} + 2p_L g_3^{(3)} \right) + 2g_2^{(3)} \right] \cos(hk p_L) \\
& + \left[k \left(2h^2 p_L g_2^{(3)} + g_7^{(3)} \right) - ig_3^{(3)} \right] \sin(hk p_L) - ihk (p_T^2 - 1) g_{11}^{(3)} \cos(hk p_T) \\
& + p_T \left(kg_{13}^{(3)} - ig_{11}^{(3)} \right) \sin(hk p_T) - g_{24}^{(3)} \sin(hk (2p_L + p_T)) \\
& - g_{28}^{(3)} \sin(hk (2p_L - p_T)) + k \left\{ \left[(2p_T + p_L) g_{17}^{(3)} - ig_{38}^{(3)} \right] \sin(hk (p_L + 2p_T)) \right. \\
& + \left[(2p_L + p_T) g_{21}^{(3)} - ig_{43}^{(3)} \right] \sin(hk (2p_L + p_T)) \\
& + \left[(2p_L - p_T) g_{25}^{(3)} - ig_{47}^{(3)} \right] \sin(hk (2p_L - p_T)) \\
& + \left. \left[(p_L - 2p_T) g_{19}^{(3)} - ig_{40}^{(3)} \right] \sin(hk (p_L - 2p_T)) \right\} \\
& + hk \left\{ \left[(p_T - 2p_L) g_{28}^{(3)} - ig_{46}^{(3)} \right] \cos(hk (2p_L - p_T)) \right. \\
& - \left. \left[(p_T + 2p_L) g_{24}^{(3)} + ig_{42}^{(3)} \right] \cos(hk (2p_L + p_T)) \right\} - hk \left[3p_L g_{32}^{(3)} + ig_{50}^{(3)} \right] \cos(3hk p_L) \\
& + \left[k \left(ig_{51}^{(3)} - 3p_L g_{29}^{(3)} \right) + g_{32}^{(3)} \right] \sin(3hk p_L) + k \left[3p_T g_{33}^{(3)} - ig_{55}^{(3)} \right] \sin(3hk p_T), \\
F_2 = & Z_{23}^{(3)} - \left[c_L^2 (g_6^{(3)} + (g_3^{(3)} + ik g_7^{(3)}) p_L) + (ih^2 k (c_L^2 (1 + p_L^2) - 2c_T^2)) g_2^{(3)} \right] \cos(hk p_L) \\
& + \left[hk (c_L^2 - 2c_T^2) g_3^{(3)} + hc_L^2 p_L (k (g_6^{(3)} + g_3^{(3)} p_L) - 2ig_2^{(3)}) \right] \sin(hk p_L) \\
& + \left[g_{11}^{(3)} c_L^2 - ig_{13}^{(3)} k (c_L^2 - 2c_T^2) \right] \cos(hk p_T) - 2g_{11}^{(3)} hkc_L^2 p_T \sin(hk p_T) \\
& - \left[ig_{17}^{(3)} k (c_L^2 - 2c_T^2) + g_{38}^{(3)} kc_L^2 (p_L + 2p_T) \right] \cos(hk (p_L + 2p_T)) \\
& - \left[ig_{19}^{(3)} k (c_L^2 - 2c_T^2) + g_{40}^{(3)} kc_L^2 (p_L - 2p_T) \right] \cos(hk (p_L - 2p_T)) \\
& + \left[k (ig_{25}^{(3)} (2c_T^2 - c_L^2) + g_{47}^{(3)} c_L^2 (p_T - 2p_L)) - g_{46}^{(3)} c_L^2 \right] \cos(hk (2p_L - p_T)) \\
& - \left[g_{42}^{(3)} c_L^2 + ig_{21}^{(3)} k (c_L^2 - 2c_T^2) + g_{43}^{(3)} kc_L^2 (2p_L + p_T) \right] \cos(hk (2p_L + p_T)) \\
& - \left[ig_{24}^{(3)} hk (c_L^2 - 2c_T^2) - g_{42}^{(3)} hkc_L^2 (2p_L + p_T) \right] \sin(hk (2p_L + p_T)) \\
& - \left[ig_{28}^{(3)} hk (c_L^2 - 2c_T^2) + g_{46}^{(3)} hkc_L^2 (-2p_L + p_T) \right] \sin(hk (2p_L - p_T)) \\
& - \left[g_{50}^{(3)} c_L^2 + ik (c_L^2 - 2c_T^2) g_{29}^{(3)} + 3g_{51}^{(3)} kc_L^2 p_L \right] \cos(3hk p_L) \\
& - \left[ig_{32}^{(3)} hk (c_L^2 - 2c_T^2) - 3g_{50}^{(3)} hkc_L^2 p_L \right] \sin(3hk p_L) \\
& - \left[ig_{33}^{(3)} k (c_L^2 - 2c_T^2) + 3g_{55}^{(3)} kc_L^2 p_T \right] \cos(3hk p_T). \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Üçüncü eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.140) ile verilen $\kappa_{ij}^{(3)}$ katsayı fonksiyonları içerisinde tanımlı $M_{ij}^{(3)}$ ve $V_{ij}^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda

verilmektedir:

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(3)} &= -R_{11}, \quad M_{12}^{(3)} = \frac{i(2\omega^2 - k^2 c_T^2 r_T^2)R_{12}}{k^2 c_T^2 r_T}, \quad M_{13}^{(3)} = \frac{2\omega^2 R_{11}}{k c_L^2 r_L}, \quad M_{14}^{(3)} = \frac{2i\omega^2 R_{12}}{k c_T^2}, \\
M_{21}^{(3)} &= \frac{((\omega^2 + k^2 c_L^2)c_T^2 - \omega^2 c_L^2)R_{11} + k^3 c_L^2(c_T^2 r_L^2 - c_L^2(r_L^2 - 2))R_{21}}{k^2 c_L^2}, \\
M_{22}^{(3)} &= \frac{i((k^2 c_T^4 + c_L^2(2\omega^2 + k^2 c_T^2(r_T^2 - 1)))R_{12} + k^3 c_T^2(c_L^2 + c_T^2)r_T^2 R_{22})}{k^2 c_T^2 r_T}, \\
M_{23}^{(3)} &= \frac{k(c_T^2 r_L^2 - c_L^2(r_L^2 - 2))R_{11}}{r_L}, \quad M_{24}^{(3)} = ik(c_L^2 + c_T^2)R_{12}, \\
M_{31}^{(3)} &= 2\omega \left[R_{21} - \frac{(c_L^2 - c_T^2)R_{11}}{k c_L^2} \right], \quad M_{32}^{(3)} = i\omega \left[\frac{(2\omega^2 + k^2(c_L^2 + c_T^2))R_{12}}{k^3 c_T^2 r_T} + 2r_T R_{22} \right] \\
M_{33}^{(3)} &= \omega \left[\frac{4R_{11}}{r_L} - \frac{(c_L^2 - c_T^2)r_L R_{11}}{c_L^2} \right], \quad M_{34}^{(3)} = \frac{i\omega(c_L^2 + 3c_T^2)R_{12}}{c_T^2}, \\
M_{41}^{(3)} &= 2i\omega R_{11}, \quad M_{42}^{(3)} = -2\omega r_T R_{12}, \\
M_{51}^{(3)} &= ik(c_T^2 r_L^2 - c_L^2(r_L^2 - 2))R_{11}, \quad M_{52}^{(3)} = -k(c_L^2 + c_T^2)r_T R_{12}, \\
M_{61}^{(3)} &= M_1^{(a)}, \quad M_{62}^{(3)} = M_2^{(a)}, \quad M_{63}^{(3)} = \frac{2iR_{11}\eta_1\omega^4 C_{11}^{(2)}}{k c_L^4}, \\
M_{64}^{(3)} &= -\frac{i}{2k^2 c_L^6 c_T^2} \left\{ k c_L^2 R_{11} \left[C_{18}^{(2)}(k^2 \omega^2 c_L^2 c_T^2(4\eta_2 - 5\eta_3 - 16\eta_4) \right. \right. \\
&\quad + 2\omega^4(c_L^2 + 2c_T^2)\eta_4 + 9k^4 c_L^4 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)) - ik^2 c_L^2 C_{25}^{(2)} r_L(c_L^2(k^2 c_T^2 - \omega^2) \\
&\quad (\eta_3 + 2\eta_4) + 2\omega^2 c_T^2(\eta_2 + \eta_3 - 2\eta_4))] + r_T [2\omega^4 R_{11}^2 R_{12} \eta_1(2\omega^2 \eta_4 \\
&\quad - 5k^2 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)) + k^2 c_L^6(4\omega^2(2k C_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)})r_L R_{12} \eta_4 \\
&\quad + k^2 c_T^2(3k(C_{19}^{(2)} r_L - iC_{24}^{(2)})R_{11} + 2R_{12}(i(C_{11}^{(2)} + 2ikC_{12}^{(2)})r_L - 4kw_1))(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
&\quad + 2k^2 \omega^2 c_L^2 R_{11}^2 R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)(k^2 c_T^2(4\eta_2 + 13\eta_3 + 26\eta_4) - \omega^2(\eta_3 + 8\eta_4)) \\
&\quad + k c_L^4(2\omega^2 R_{12}(4\omega^2 w_1 \eta_4 + k^3 R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_3 + 6\eta_4)) \\
&\quad - k^2 c_T^2(4\omega^2 R_{12} w_1(\eta_3 + 2\eta_4) + 16k^3 R_{11}^2 R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
&\quad + \omega^2 R_{11}(iC_{24}^{(2)}(2\eta_2 - \eta_3) + 6(C_{19}^{(2)} r_L - iC_{24}^{(2)})\eta_4))] \left. \right\}, \\
M_{65}^{(3)} &= \frac{i}{2k^2 c_L^4 c_T^2} \left\{ \frac{4\omega^4 r_L R_{11}^2 R_{12} \eta_1(k^2 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 \eta_4)}{c_L^2} \right. \\
&\quad + 4k\omega^2 R_{11} [kr_L R_{11} R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)((\omega^2 - 2k^2 c_T^2)\eta_2 + 2(\omega^2 - 3k^2 c_T^2)\eta_3 \\
&\quad + 2(5\omega^2 - 6k^2 c_T^2)\eta_4) - C_{19}^{(2)} \omega^2 c_T^2 \eta_4] + k^2 c_L^4 \left[\omega^2(ikr_L(4iR_{12} w_1 - C_{24}^{(2)} R_{11}) \right. \\
&\quad (\eta_3 + 2\eta_4) + 4R_{12}(kC_{12}^{(2)}(\eta_3 - 4\eta_4) + iC_{11}^{(2)} \eta_4)) - k^2 c_T^2(k(9C_{19}^{(2)} - iC_{24}^{(2)} r_L \\
&\quad + 3(C_{18}^{(2)} r_L - iC_{25}^{(2)})r_T)R_{11} + 2iR_{12}(C_{11}^{(2)} + 2ik(C_{12}^{(2)} + 2r_L w_1)))(\eta_3 + 2\eta_4) \left. \right] \\
&\quad + c_L^2 \left[k^2 c_T^2(8\omega^2 R_{12}(iC_{11}^{(2)} - kC_{12}^{(2)} + kr_L w_1)(\eta_3 + 2\eta_4) + 20k^4 r_L R_{11}^2 R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4)^2 \right. \\
&\quad + k\omega^2 R_{11}((2iC_{24}^{(2)} r_L + 2iC_{25}^{(2)} r_T - 4C_{19}^{(2)})\eta_2 + (5C_{19}^{(2)} + 2iC_{24}^{(2)} r_L - iC_{25}^{(2)} r_T)\eta_3 \\
&\quad + 2(8C_{19}^{(2)} - 3iC_{25}^{(2)} r_T + r_L(3C_{18}^{(2)} r_T - 2iC_{24}^{(2)}))\eta_4) + 2\omega^2(-\omega^2(C_{19}^{(2)} kR_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8i(C_{11}^{(2)} + ikC_{12}^{(2)})R_{12})\eta_4 - 4kr_L R_{12}(2\omega^2 w_1 \eta_4 + k^3 R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_3 + 4\eta_4))) \Big] \Big\}, \\
M_{66}^{(3)} = & -\frac{i}{2k^2 c_L^4 c_T^4} \Big\{ kc_L^2 \Big[k^2 c_T^4 (4\omega^2 C_{16}^{(2)} R_{11}(2\eta_2 - \eta_3 - 6\eta_4) - C_{24}^{(2)} \omega^2 R_{12}(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 16ik^3 R_{11} R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)^2 - 8i\omega^2 r_T R_{11} w_2(\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4)) + 2\omega^2 c_T^2 (C_{24}^{(2)} \omega^2 R_{12} \eta_4 \\
& + R_{11}(8\omega^2 C_{16}^{(2)} \eta_4 + ik^3 R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(7\eta_3 + 26\eta_4))) \\
& - 22ik\omega^4 R_{11} R_{12}^2 \eta_4(\eta_3 + 2\eta_4) \Big] + 2i\omega^2 R_{11} R_{12}^2 \Big[4k^4 c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)(\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4) \\
& - k^2 \omega^2 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(4\eta_2 + 7\eta_3 + 26\eta_4) - \omega^4 \eta_4(2\eta_2 + 11(\eta_3 + 2\eta_4)) \Big] \\
& + kc_L^4 \Big[4C_{24}^{(2)} \omega^4 R_{12} \eta_4 - 2k^2 \omega^2 c_T^2 (5C_{24}^{(2)} + 2iC_{18}^{(2)} r_T + r_L(3iC_{19}^{(2)} + C_{25}^{(2)} r_T)) R_{12} \eta_4 \\
& k^4 c_T^4 (12C_{16}^{(2)} R_{11}(\eta_3 + 2\eta_4) + 8ir_T R_{11} w_2(\eta_3 + 2\eta_4) + R_{12}((C_{24}^{(2)} + 9iC_{18}^{(2)} r_T \\
& + 3r_L(iC_{19}^{(2)} + C_{25}^{(2)} r_T))\eta_3 + 2(C_{24}^{(2)} + 3iC_{18}^{(2)} r_T(2 + r_T^2) \\
& + r_L(3iC_{19}^{(2)} + C_{25}^{(2)}(r_T + 2r_T^3)))\eta_4)) \Big] \Big\}, \\
M_{67}^{(3)} = & -\frac{i}{2kc_L^2 c_T^4} \Big\{ \frac{R_{12}}{\omega^2(c_L^2 - c_T^2)} (k^2 \omega^2 c_T^4 (c_L^2 - c_T^2)(-\omega^2 C_{25}^{(2)} + k^2 c_L^2 (C_{25}^{(2)} \\
& + 3iC_{18}^{(2)} r_L + 3(3iC_{19}^{(2)} + C_{24}^{(2)} r_L) r_T))\eta_3 - 4ik^5 c_T^4 (3k^2 c_L^2 c_T^2 - \omega^2(c_L^2 + c_T^2))r_L r_T \\
& (r_L^2 - r_T^2) R_{11} R_{12} \eta_3^2 + 2\omega^2 (c_L^2 - c_T^2)(\omega^4 (2c_L^2 + c_T^2) C_{25}^{(2)} \\
& - k^2 \omega^2 c_T^2 ((5c_L^2 + c_T^2) C_{25}^{(2)} + 3ic_L^2 C_{18}^{(2)} r_L) + k^4 c_L^2 c_T^4 (C_{25}^{(2)} + 3iC_{18}^{(2)} r_L + 4iC_{19}^{(2)} r_T \\
& + (5iC_{19}^{(2)} + 3C_{24}^{(2)} r_L) r_T^3))\eta_4 - 8ik^3 c_T^2 (2k^2 c_T^2 - \omega^2)(3k^2 c_L^2 c_T^2 \\
& - \omega^2(c_L^2 + c_T^2))r_L r_T (r_L^2 - r_T^2) R_{11} R_{12} \eta_3 \eta_4 - 16ik^5 c_T^4 (3k^2 c_L^2 c_T^2 \\
& (c_L^2 (3C_{16}^{(2)} r_T + 2iw_2) - 2ikr_T R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)) - i\omega^4 \eta_4 (kr_T R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 2c_T^2 w_2) - ik^2 \omega^2 c_T^2 ((c_L^2 + c_T^2) w_2(\eta_3 + 2\eta_4) - 2r_T (ic_T^2 C_{16}^{(2)} \eta_4 \\
& + kR_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)^2))) \Big\}, \\
M_{68}^{(3)} = & \frac{2C_{11}^{(2)} r_L R_{12} (k^2 c_L^2 (\omega^2 - 2k^2 c_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4) + 2\omega^2 (2\omega^2 \eta_4 - k^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)))}{kc_L^2 c_T^2}, \\
M_{69}^{(3)} = & -\frac{2C_{11}^{(2)} r_T R_{12} (k^2 (\omega^2 + 2k^2 c_L^2) c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^4 \eta_4)}{kc_L^2 c_T^2}, \\
M_{610}^{(3)} = & \frac{R_{11}}{2k^2 c_L^8} \Big\{ 3k^2 \omega^4 c_L^2 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (3\eta_2 + 4\eta_3 + 8\eta_4) \\
& - \omega^6 R_{11}^2 (\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) (2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) \\
& - k\omega^2 c_L^4 (k^3 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (4\eta_2 + 15(\eta_3 + 2\eta_4)) - 4\omega^2 w_1 \eta_2) \\
& + 2k^2 c_L^6 (i\omega^2 C_{11}^{(2)} r_L (2\eta_3 + 3\eta_4) - k\omega^2 C_{12}^{(2)} r_L (\eta_3 + 4\eta_4) + k(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (3k^3 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 w_1)) + k^4 c_L^8 (iC_{11}^{(2)} r_L (2(r_L^2 - 1)\eta_2 \\
& + (r_L^2 - 3)\eta_3 + 2(3r_L^2 - 5)\eta_4) + 2k(4w_1(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + C_{12}^{(2)} r_L (2(1 - r_L^2)\eta_2 - (r_L^2 - 3)\eta_3 + 2(1 + r_L^2)\eta_4))) \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{611}^{(3)} &= -\frac{iR_{12}}{2k^2c_L^2c_T^6} \left\{ 3r_T R_{12}^2 (k^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2\eta_4) (\omega^4\eta_4 \right. \\
&\quad - 2k^2\omega^2c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^4c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)) - 4kc_L^2c_T^2(\omega^4w_2\eta_4 + ik^4c_T^4 \\
&\quad \left. (3C_{16}^{(2)}r_T + 2iw_2)(\eta_3 + 2\eta_4) - 2k^2\omega^2c_T^2(w_2\eta_3 + 2(w_2 - iC_{16}^{(2)}r_T)\eta_4)) \right\}, \\
M_{612}^{(3)} &= \frac{2iC_{11}^{(2)}R_{11}(\omega^4\eta_2 + k^2c_L^2(2k^2c_L^2 - \omega^2)(\eta_3 + 2\eta_4))}{kc_L^4}. \tag{B.15} \\
V_{11}^{(3)} &= -\frac{2i\omega^2R_{11}}{kc_L^2}, \quad V_{12}^{(3)} = \frac{2\omega^2R_{12}}{kc_T^2r_T}, \quad V_{13}^{(3)} = \frac{i(k^2c_L^2r_L^2 - 2\omega^2)R_{11}}{k^2c_L^2r_L}, \quad V_{14}^{(3)} = -R_{12}, \\
V_{21}^{(3)} &= -ik(c_L^2 + c_T^2)R_{11}, \quad V_{21}^{(3)} = \frac{k(c_L^2r_T^2 - c_T^2(r_T^2 - 2))R_{12}}{r_T}, \\
V_{23}^{(3)} &= -\frac{i((2\omega^2c_T^2 + k^2c_L^2(c_L^2 + c_T^2(r_L^2 - 1))))R_{11} + k^3c_L^2(c_L^2 + c_T^2)r_L^2R_{21}}{k^2c_L^2r_L}, \\
V_{24}^{(3)} &= \frac{(c_L^2(\omega^2 + k^2c_T^2) - \omega^2c_T^2)R_{12} + k^3c_T^2(c_L^2r_T^2 - c_T^2(r_T^2 - 2))R_{22}}{k^2c_T^2}, \\
V_{31}^{(3)} &= -\frac{i\omega(3c_L^2 + c_T^2)R_{11}}{c_L^2}, \quad V_{32}^{(3)} = \omega \left[\frac{4R_{12}}{r_T} + \frac{(c_L^2 - c_T^2)r_T R_{12}}{c_T^2} \right], \\
V_{33}^{(3)} &= -i\omega \left[\frac{(2\omega^2 + k^2(c_L^2 + c_T^2))R_{11} + 2k^3c_L^2r_L^2R_{21}}{k^3c_L^2r_L} \right], \\
V_{34}^{(3)} &= 2\omega \left[\frac{(c_L^2 - c_T^2)R_{12}}{kc_T^2} + R_{22} \right], \\
V_{41}^{(3)} &= 2\omega r_L R_{11}, \quad V_{42}^{(3)} = 2i\omega R_{12}, \\
V_{51}^{(3)} &= k(c_L^2 + c_T^2)r_L R_{11}, \quad V_{52}^{(3)} = ik(c_L^2r_T^2 - c_T^2(r_T^2 - 2))R_{12}, \\
V_{61}^{(3)} &= \frac{2r_L R_{11}\eta_1\omega^4C_{11}^{(2)}}{kc_L^4}, \quad V_{62}^{(3)} = V_2^{(a)}, \quad V_{63}^{(3)} = V_3^{(a)}, \\
V_{64}^{(3)} &= \frac{R_{11}}{2kc_L^4c_T^2(c_L^2 - c_T^2)} \left\{ \omega^2c_L^4(k^2c_L^2C_{18}^{(2)}r_L(\eta_3 + 2\eta_4) - 2iC_{25}^{(2)}(\omega^2\eta_2 \right. \\
&\quad + (\omega^2 - k^2c_L^2)(\eta_3 + 2\eta_4))) + c_T^4(iC_{25}^{(2)}(4\omega^4\eta_1 + k^2c_L^2((11k^2c_L^2 - 15\omega^2)\eta_3 \\
&\quad - 6\omega^2\eta_2 + 2(11k^2c_L^2 - 13\omega^2)\eta_4)) + k^2c_L^2(C_{18}^{(2)}r_L(8\omega^2\eta_2 + (k^2c_L^2 - \omega^2)\eta_3 \\
&\quad + 2(k^2c_L^2 - 2\omega^2)\eta_4) + r_T(2\omega^2(2C_{19}^{(2)} - 3iC_{24}^{(2)}r_L)\eta_2 - (2\omega^2 - 3k^2c_L^2)(C_{19}^{(2)} \\
&\quad + 3iC_{24}^{(2)}r_L)\eta_3 + 6(k^2c_L^2(C_{19}^{(2)} + 3iC_{24}^{(2)}r_L) - \omega^2(C_{19}^{(2)} + 2iC_{24}^{(2)}r_L))\eta_4))) \\
&\quad - ic_L^2c_T^2(C_{25}^{(2)}(2(\omega^4 - 3k^2\omega^2c_L^2)\eta_2 + (2\omega^4 - 13k^2\omega^2c_L^2 + 11k^4c_L^4)\eta_3 \\
&\quad + 2(2\omega^4 - 11k^2\omega^2c_L^2 + 11k^4c_L^4)\eta_4) - ik^2c_L^2(r_T(2\omega^2(2C_{19}^{(2)} - 3iC_{24}^{(2)}r_L)\eta_2 \\
&\quad - (2\omega^2 - 3k^2c_L^2)(C_{19}^{(2)} + 3iC_{24}^{(2)}r_L)\eta_3 + 6(-\omega^2(C_{19}^{(2)} + 2iC_{24}^{(2)}r_L) + k^2c_L^2(C_{19}^{(2)} \\
&\quad + 3iC_{24}^{(2)}r_L))\eta_4) + C_{18}^{(2)}r_L(8\omega^2\eta_2 - 2\omega^2\eta_4 + k^2c_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)))) \Big\} \\
&\quad + \frac{r_T R_{12}}{\omega^2c_L^6c_T^2(c_L^2 - c_T^2)} \left\{ 2c_T^2r_L R_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(2\omega^6c_L^2\eta_1 - 2\omega^6c_T^2\eta_1 + k^4c_L^6(4\omega^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\omega^2 - 5k^2 c_T^2)(r_L^2 - r_T^2)(\eta_3 + 2\eta_4) + k^2 \omega^4 c_L^4((r_L^2 - r_T^2)\eta_1 - 6(\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& + 2k^2 \omega^4 c_L^2 c_T^2(2(r_L^2 - r_T^2)\eta_1 + 3(\eta_3 + 2\eta_4)) - k^4 \omega^2 c_L^4 c_T^2(4(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 3(r_L^2 - r_T^2)(2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4))) + 8\omega^4 c_L^4 c_T^4(\eta_3 + 2\eta_4)(iC_{11}^{(2)} - kC_{12}^{(2)} + kr_L w_1) \\
& - 2\omega^4 c_L^8(iC_{11}^{(2)}\eta_4 - kC_{12}^{(2)}\eta_3 + kr_L(\eta_3 + 2\eta_4)w_1) + \omega^2 c_L^6 c_T^2(2kC_{12}^{(2)} \\
& ((3\omega^2 + 5k^2 c_T^2)\eta_3 + 2(4\omega^2 + 5k^2 c_T^2)\eta_4) - iC_{11}^{(2)}((8\omega^2 + 9k^2 c_T^2)\eta_3 \\
& + 2(7\omega^2 + 9k^2 c_T^2)\eta_4) - 6k(\omega^2 + 2k^2 c_T^2)r_L(\eta_3 + 2\eta_4)w_1) \\
& + k^2 \omega^2 c_L^8 c_T^2(\eta_3 + 2\eta_4)(9iC_{11}^{(2)} + 2k(6r_L w_1 - 5C_{12}^{(2)}))) \Big\}, \\
V_{65}^{(3)} = & -\frac{1}{2k^2 c_L^6 c_T^2} \Big\{ 2\omega^4 R_{11}^2 R_{12} \eta_1 (\omega^2 (9\eta_3 + 20\eta_4) - 13k^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& + 2k^2 \omega^2 c_L^2 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (k^2 c_T^2 (12\eta_2 + 25(\eta_3 + 2\eta_4)) - 2\omega^2 (4\eta_2 \\
& + 9\eta_3 + 21\eta_4)) + iC_{24}^{(2)} k c_L^2 R_{11} (4\omega^4 c_T^2 \eta_1 + k^2 c_L^4 (11k^2 c_T^2 - 2\omega^2) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + \omega^2 c_L^2 (2\omega^2 \eta_1 - k^2 c_T^2 (6\eta_2 + 15\eta_3 + 26\eta_4))) + k c_L^4 (-4\omega^4 R_{12} w_1 (5\eta_3 + 8\eta_4) \\
& + 2k^3 \omega^2 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (9\eta_3 + 22\eta_4) + k^2 c_T^2 (-24k^3 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& + \omega^2 (28R_{12} w_1 (\eta_3 + 2\eta_4) - C_{19}^{(2)} r_L R_{11} (\eta_3 + 4\eta_4 - 8\eta_2) - 2ir_T R_{11} (iC_{18}^{(2)} (2\eta_2 \\
& - \eta_3 - 3\eta_4) + C_{25}^{(2)} r_L (\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)))) - k^2 c_L^6 (k^2 c_T^2 (- (r_L (C_{19}^{(2)} k R_{11} \\
& + 2(10kC_{12}^{(2)} - 9iC_{11}^{(2)}) R_{12}) + 3k(C_{18}^{(2)} r_T R_{11} - 8R_{12} w_1)) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - i k C_{25}^{(2)} r_L r_T R_{11} (4(r_L^2 \eta_1 - \eta_2) + 5\eta_3 + 10\eta_4)) + \omega^2 (-16k R_{12} w_1 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + r_L (C_{19}^{(2)} k R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4) + 2R_{12} (2kC_{12}^{(2)} (5\eta_3 + 4\eta_4) - iC_{11}^{(2)} (5\eta_3 + 12\eta_4)))) \Big\}, \\
V_{66}^{(3)} = & -\frac{1}{2k^2 c_L^4 c_T^4} \Big\{ 2ir_L R_{11} (2\omega^6 R_{12}^2 \eta_1 \eta_4 - k^2 \omega^4 R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (4c_T^2 \eta_1 + c_L^2 \eta_4) \\
& - 2k^5 c_L^2 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (ic_L^2 (C_{16}^{(2)} + 6ir_T w_2) + kR_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)) + 2k^3 \omega^2 c_T^2 \\
& (2iC_{16}^{(2)} (c_L^4 (\eta_3 + 2\eta_4) - c_L^2 c_T^2 \eta_2) + (\eta_3 + 2\eta_4) (-2c_L^2 (c_L^2 + c_T^2) r_T w_2 \\
& + kR_{12}^2 (2c_T^2 \eta_1 + c_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4)))) + k c_L^2 R_{12} (2i\omega^4 (C_{19}^{(2)} (c_L^2 + c_T^2) \eta_4 \\
& - kr_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (\eta_3 + 4\eta_4)) + k^2 \omega^2 c_T^2 (c_L^2 ((iC_{19}^{(2)} + 5C_{24}^{(2)} r_L) \eta_3 \\
& + 2(2r_L (C_{24}^{(2)} - iC_{18}^{(2)} r_T) - 3iC_{19}^{(2)}) \eta_4) + i(\eta_3 + 2\eta_4) (-C_{19}^{(2)} c_T^2 + \\
& + 2kr_L R_{11} R_{12} (3\eta_3 + 10\eta_4))) + k^4 c_T^4 (-4ikr_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& - c_L^2 (r_L (5C_{24}^{(2)} - 2iC_{18}^{(2)} r_T) (\eta_3 + 2\eta_4) + C_{25}^{(2)} r_T (6\eta_4 + r_T^2 (5\eta_3 + 4\eta_4)))) \\
& + \frac{kR_{12}}{c_L^2 - c_T^2} (iC_{19}^{(2)} c_L^4 (c_L^2 - c_T^2) (k^2 c_T^2 - \omega^2) (k^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 \eta_4) \\
& + k(4C_{24}^{(2)} k c_L^4 c_T^2 (c_L^2 - c_T^2) (\omega^2 - k^2 c_T^2) r_L (\eta_3 + 2\eta_4) + 8i\omega^2 c_T^4 (\omega^2 - k^2 c_T^2) \\
& r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 - k^3 c_L^6 c_T^4 r_T (2C_{25}^{(2)} (\eta_3 + 4\eta_4 + 2r_T^2 (\eta_3 + \eta_4)) \\
& - iC_{18}^{(2)} r_L (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4)) + 2ic_L^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (-2\omega^4 r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& - 6k^2 \omega^2 c_T^2 r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) + c_T^4 (ik\omega^2 C_{25}^{(2)} r_T + 8k^4 r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4))) \\
& + c_L^4 (-4i\omega^4 r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 + k^3 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (c_T^2 (6C_{25}^{(2)} - iC_{18}^{(2)} r_L) r_T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16ikr_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) - 2k\omega^2 c_T^2 (c_T^2 r_T (C_{25}^{(2)} \eta_3 - iC_{18}^{(2)} r_L \eta_4) \\
& - 10ikr_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2) \Big\}, \\
V_{67}^{(3)} = & \frac{1}{2k^2 c_L^4 c_T^4} \Big\{ 4i\omega^2 r_T R_{11} R_{12}^2 (2k^2 \omega^2 c_T^2 (4\eta_3^2 + 17\eta_3 \eta_4 + 8\eta_4^2 \\
& + 2\eta_2 (\eta_3 + 2\eta_4)) - 2\omega^4 \eta_1 \eta_4 - k^4 c_T^4 (9\eta_3^2 + 36\eta_3 \eta_4 \\
& + 4(4 + 5r_T^2) \eta_4^2 + 4\eta_2 (\eta_3 + 2\eta_4))) - kc_L^2 (-4ik^5 c_T^4 r_T R_{11} R_{12}^2 (9\eta_3^2 \\
& + 36\eta_3 \eta_4 + 4(4 + 5r_T^2) \eta_4^2) + k^2 \omega^2 c_T^2 (8ikr_T R_{11} R_{12}^2 (4\eta_3^2 + 17\eta_3 \eta_4 \\
& + 8\eta_4^2) + c_T^2 (8C_{16}^{(2)} r_T R_{11} (2\eta_2 - \eta_4) + ((2C_{24}^{(2)} r_T - iC_{18}^{(2)}) R_{12} \\
& - 20iR_{11} w_2) (\eta_3 + 2\eta_4))) + 2i\omega^4 (c_T^2 (C_{18}^{(2)} R_{12} \eta_4 + 4R_{11} w_2 (2\eta_3 \\
& + 5\eta_4)) - 4kr_T R_{11} R_{12}^2 \eta_4 (\eta_3 + 2\eta_4))) + kc_L^4 (-4i\omega^4 C_{18}^{(2)} R_{12} \eta_4 \\
& - k^2 \omega^2 c_T^2 (3C_{25}^{(2)} r_L R_{12} (3\eta_3 + 4\eta_4) - 10i(C_{18}^{(2)} R_{12} \eta_4 \\
& + 2R_{11} w_2 (\eta_3 + 2\eta_4))) + k^4 c_T^4 (-i((C_{18}^{(2)} + 9iC_{25}^{(2)} r_L) R_{12} + 24R_{11} w_2) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + r_T^3 R_{12} (9C_{24}^{(2)} \eta_3 + 2(4C_{24}^{(2)} - 3iC_{19}^{(2)} r_L) \eta_4) + r_T \\
& (R_{12} ((2C_{24}^{(2)} - 3iC_{19}^{(2)} r_L) \eta_3 + 14C_{24}^{(2)} \eta_4) - 4C_{16}^{(2)} R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4)))) \Big\}, \\
V_{68}^{(3)} = & -\frac{2ikC_{11}^{(2)} r_L r_T R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (4\omega^2 c_T^2 + c_L^2 (\omega^2 - 6k^2 c_T^2))}{c_L^2 c_T^2}, \\
V_{69}^{(3)} = & \frac{2iC_{11}^{(2)} R_{12}}{kc_L^2 c_T^2} [6k^4 c_L^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^2 (4c_L^2 + 7c_T^2) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + \omega^4 (5\eta_3 + 8\eta_4)], \\
V_{610}^{(3)} = & \frac{iR_{11}}{2k^2 c_L^4} \Big\{ 4kC_{12}^{(2)} (3\omega^4 \eta_1 + 5k^4 c_L^4 (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^2 c_L^2 (3\eta_2 \\
& + 8\eta_3 + 15\eta_4)) - iC_{11}^{(2)} (10\omega^4 \eta_1 + 18k^4 c_L^4 (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^2 c_L^2 \\
& (6\eta_2 + 27\eta_3 + 56\eta_4)) + \frac{r_L}{c_L^4} [\omega^4 \eta_1 + k^2 c_L^2 (2k^2 c_L^2 - 3\omega^2) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4)] (6\omega^2 R_{11}^2 \eta_1 - 12kc_L^4 w_1 - 5k^2 c_L^2 R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)) \Big\}, \\
V_{611}^{(3)} = & -\frac{R_{12}}{2k^2 c_L^2 c_T^6} \Big\{ 4ikc_L^2 c_T^2 C_{16}^{(2)} (3\omega^4 \eta_4 + k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) - k^2 \omega^2 c_T^2 \\
& (\eta_3 + 6\eta_4)) + (\omega^4 \eta_4 - 2k^2 \omega^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4) + 2k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4)) \\
& (kc_T^2 (5kR_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - 12c_L^2 r_T w_2) - \omega^2 R_{12}^2 (5\eta_3 + 12\eta_4)) \Big\}, \\
V_{612}^{(3)} = & \frac{6C_{11}^{(2)} r_L R_{11} (\omega^4 \eta_1 + k^2 c_L^2 (2k^2 c_L^2 - 3\omega^2) (\eta_3 + 2\eta_4))}{kc_L^4}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Burada R_{2i} , ($i = 1, 2$)'ler, R_{1i} , ($i = 1, 2$) bileşenleri (4.117)'de verilmek üzere, (B.4) ile tanımlanmışlardır. Yukarıdaki katsayılarda görülen $M_i^{(a)}$, ($i = 1, 2$) ve $V_j^{(a)}$, ($j = 3, 4$) katsayıları lineer ve nonlineer malzeme sabitleri ile dalga sayısına ve açılal frekansa bağlı ifadeler içermekte olup ve açık ifadeleri şu formlarda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
M_1^{(a)} = & \frac{1}{2k^2 c_L^8} \left\{ 4ik^3 c_L^6 C_9^{(2)} R_{11} ((\omega^2 - 3k^2 c_L^2)(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 \eta_2) \right. \\
& + \frac{1}{c_T^4} (11k^2 \omega^4 c_L^2 c_T^4 R_{11}^3 \eta_2 (\eta_3 + 2\eta_4) - \omega^6 c_T^4 R_{11}^3 \eta_1 (6\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) \\
& + \omega^2 c_L^4 R_{11} (-2\omega^4 R_{12}^2 \eta_4 (2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) - k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (4R_{11}^2 \eta_2 \\
& + (4R_{12}^2 - 3R_{11}^2)(\eta_3 + 2\eta_4)) + 2k\omega^2 c_T^2 (2c_T^2 w_1 \eta_1 + kR_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (\eta_3 + 6\eta_4))) + kc_L^6 (2k^5 c_T^4 R_{11} (2R_{12}^2 - R_{11}^2)(\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& + 2i\omega^4 R_{12} \eta_4 (C_{24}^{(2)} c_T^2 - 3ikR_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)) - ik\omega^2 c_T^2 (2c_T^2 r_L R_{11} \\
& (C_{11}^{(2)} (2\eta_3 + 3\eta_4) + ikC_{12}^{(2)} (\eta_3 + 4\eta_4)) + kR_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (C_{24}^{(2)} c_T^2 \\
& - 2ikR_{11} R_{12} (\eta_3 + 6\eta_4))) + k^3 c_L^8 c_T^2 (2\omega^2 R_{12} (iC_{24}^{(2)} \eta_3 + (-iC_{24}^{(2)} \\
& - 2C_{18}^{(2)} r_T + r_L (3C_{19}^{(2)} + iC_{25}^{(2)} r_T)) \eta_4) - kc_T^2 (iC_{11}^{(2)} r_L (1 - r_L^2) R_{11} \\
& (2\eta_2 + \eta_3 + 6\eta_4) + k(2C_{12}^{(2)} r_L (r_L^2 - 1) R_{11} (2\eta_2 + \eta_3 - 2\eta_4) \\
& + R_{12} ((iC_{24}^{(2)} - 3C_{18}^{(2)} r_T + r_L (3C_{19}^{(2)} - iC_{25}^{(2)} r_T)) \eta_3 + 2(iC_{24}^{(2)} \\
& + 3C_{18}^{(2)} r_T (r_T^2 - 2) + r_L (3C_{19}^{(2)} + iC_{25}^{(2)} r_T (1 - 2r_T^2))) \eta_4))))) \left. \right\}, \\
M_2^{(a)} = & \frac{i}{2k^2 c_L^6 c_T^6} \left\{ 2\omega^4 c_T^4 r_T R_{11}^2 R_{12} (k^2 c_T^2 (\eta_1 + 4\eta_2)(\eta_3 + 2\eta_4) - 2\omega^2 \eta_1 \eta_4) \right. \\
& + 2k^2 \omega^2 c_L^2 c_T^4 r_T R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (+k^2 c_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4 - 4\eta_2) - \omega^2 \eta_3) \\
& + \omega^2 c_L^4 R_{11} (-2\omega^4 R_{12}^2 \eta_4 (2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) - k^4 c_T^4 (\eta_3 + 2\eta_4) (4R_{11}^2 \eta_2 \\
& + kc_L^6 c_T^2 (-4\omega^4 R_{12} w_2 \eta_4 - k^4 c_T^4 ((3C_{18}^{(2)} - iC_{25}^{(2)} r_L + i(C_{24}^{(2)} + 3iC_{19}^{(2)} r_L) r_T) R_{11} \\
& + 12iC_9^{(2)} r_T R_{12})(\eta_3 + 2\eta_4) + ik^2 \omega^2 c_T^2 (8(C_9^{(2)} - C_{16}^{(2)}) r_T R_{12} \eta_4 \\
& + C_{25}^{(2)} r_L R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4))) + c_L^4 (7k^2 \omega^4 c_T^2 r_T R_{12}^3 \eta_4 (\eta_3 + 2\eta_4) - 6\omega^6 r_T R_{12}^3 \eta_4^2 \\
& + 2k\omega^2 c_T^4 (-\omega^2 C_{18}^{(2)} R_{11} \eta_4 + k^3 r_T R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (R_{11}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) - R_{12}^2 (\eta_3 \\
& + 4\eta_4))) + k^3 c_T^6 (2i\omega^2 C_{25}^{(2)} r_L R_{11} \eta_2 - \omega^2 C_{18}^{(2)} R_{11} (4\eta_2 + \eta_3) \\
& + r_T (-4k^3 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 + 2k^3 R_{12}^3 (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& + \omega^2 R_{11} (iC_{24}^{(2)} (2\eta_2 + 3\eta_3) + 2(iC_{24}^{(2)} + C_{19}^{(2)} r_L) \eta_4))))) \left. \right\}, \\
V_2^{(a)} = & -\frac{i}{2k^2 c_L^8 c_T^4} \left\{ 15k^2 \omega^4 c_L^2 c_T^4 r_L R_{11}^3 \eta_1 (\eta_3 + 2\eta_4) - 6\omega^6 c_T^4 r_L R_{11}^3 \eta_1^2 \right. \\
& + ik^3 c_L^8 c_T^2 (k^2 c_T^2 (4C_9^{(2)} r_L R_{11} + (C_{25}^{(2)} r_T - iC_{19}^{(2)} - r_L (C_{24}^{(2)} - iC_{18}^{(2)} r_T)) R_{12}) \\
& (\eta_3 + 2\eta_4) + \omega^2 R_{12} ((2iC_{19}^{(2)} + C_{24}^{(2)} r_L + C_{25}^{(2)} r_T) \eta_3 - 2i(C_{19}^{(2)} \\
& + r_L (C_{18}^{(2)} r_T - 2iC_{24}^{(2)})) \eta_4)) + kc_L^6 (2k\omega^4 r_L R_{11} R_{12}^2 (\eta_4 - \eta_3) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + 2\omega^2 c_T^2 R_{12} (k^3 r_L R_{11} R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (7\eta_3 + 10\eta_4) - C_{19}^{(2)} \omega^2 \eta_4) \\
& + kc_T^4 (4k\omega^2 C_{12}^{(2)} R_{11} \eta_1 - i\omega^2 C_{11}^{(2)} R_{11} (2\eta_2 + 5\eta_3 + 12\eta_4) \\
& + k(-8i\omega^2 C_9^{(2)} r_L R_{11} \eta_2 + (\eta_3 + 2\eta_4) (\omega^2 (C_{19}^{(2)} - 2iC_{25}^{(2)} r_T) R_{12} \\
& + 6k^3 r_L R_{11}^3 (\eta_3 + 2\eta_4) - 12k^3 r_L R_{11} R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)))) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 c_L^4 R_{11} (4\omega^4 r_L R_{12}^2 \eta_1 \eta_4 + 8k^2 \omega^2 c_T^2 r_L R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4)^2 \\
& + c_T^4 (-6i\omega^2 C_{11}^{(2)} \eta_1 + k(4\omega^2 C_{12}^{(2)} \eta_1 + r_L(k^3(\eta_3 + 2\eta_4) \\
& (R_{11}^2(4\eta_2 + 15\eta_3 + 30\eta_4) - 8R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4) - 4\omega^2 w_1 \eta_1))))), \\
V_3^{(a)} = & -\frac{1}{2k^2 c_L^6 c_T^6} \{ 2\omega^4 c_T^4 R_{11}^2 R_{12} \eta_1 (5(\omega^2 - k^2 c_T^2) \eta_3 + 2(6\omega^2 - 5k^2 c_T^2) \eta_4) \\
& + 2k^2 \omega^2 c_L^2 c_T^4 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) (4(k^2 c_T^2 - \omega^2) \eta_2 + (11k^2 c_T^2 - 10\omega^2) \eta_3 \\
& - 22(\omega^2 - k^2 c_T^2) \eta_4) + c_L^4 (3k^2 \omega^4 c_T^2 R_{12}^3 (\eta_3 + 2\eta_4) (2\eta_3 + 3\eta_4) \\
& + \omega^6 R_{12}^3 \eta_4 (4\eta_4 - \eta_3) + k^3 c_T^6 (-2i\omega^2 C_{25}^{(2)} r_L r_T R_{11} \eta_1 - 2iC_{24}^{(2)} \omega^2 R_{11} \eta_2 \\
& + 2\omega^2 C_{18}^{(2)} r_T R_{11} (\eta_1 + \eta_2) - iC_{24}^{(2)} \omega^2 R_{11} \eta_3 + C_{19}^{(2)} \omega^2 r_L R_{11} \eta_3 \\
& - 12k^3 R_{11}^2 R_{12} \eta_3^2 + 6k^3 R_{12}^3 \eta_3^2 + 2(iC_{24}^{(2)} \omega^2 R_{11} + 12k^3 R_{12} (R_{12}^2 - 2R_{11}^2) \eta_3) \eta_4 \\
& + 24k^3 R_{12} (R_{12}^2 - 2R_{11}^2) \eta_4^2) + 2k\omega^2 c_T^4 (iC_{24}^{(2)} \omega^2 R_{11} \eta_1 \\
& + 5k^3 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4)^2 - 2k^3 R_{12}^3 (\eta_3 + 2\eta_4) (3\eta_3 + 5\eta_4)) \\
& + kc_L^6 c_T^2 (4\omega^4 R_{12} (r_T w_2 - iC_{16}^{(2)}) \eta_4 + k^4 c_T^4 ((iC_{24}^{(2)} + C_{19}^{(2)} r_L \\
& - (C_{18}^{(2)} + iC_{25}^{(2)} r_L) r_T) R_{11} - 4iC_9^{(2)} R_{12}) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 ((C_{19}^{(2)} r_L - 2iC_{24}^{(2)}) R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4) + 4iR_{12} (C_9^{(2)} \eta_3 + 2C_{16}^{(2)} \eta_4))) \}.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Üçüncü eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.142) sınır koşullarında ortaya çıkan $N_{ij}^{(3)}$ ifadelerinin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
N_{11}^{(3)} &= ic_T^2 [R_{22} \sinh(khr_T) + r_L R_{21} \sinh(khr_L)], \\
N_{12}^{(3)} &= c_T^2 [-R_{12} \sinh(khr_T) + ir_L R_{11} \sinh(khr_L)], \\
N_{13}^{(3)} &= \frac{-k}{4c_L^2} \left\{ n_1^{(3)} \sinh(khr_T) + n_2^{(3)} \sinh(khr_L) + n_3^{(3)} \sinh(3khr_T) \right. \\
& + n_4^{(3)} \sinh(3khr_L) + n_5^{(3)} h \cosh(khr_L) + n_6^{(3)} \sinh(kh(2r_L - r_T)) \\
& + n_7^{(3)} \sinh(kh(2r_L + r_T)) + n_8^{(3)} \sinh(kh(r_L - 2r_T)) + n_9^{(3)} \sinh(kh(r_L + 2r_T)) \\
& \left. + n_{10}^{(3)} h \cosh(kh(2r_L - r_T)) + n_{11}^{(3)} h \cosh(kh(2r_L + r_T)) \right\}.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
N_{21}^{(3)} &= (c_L^2 - 2c_T^2) [-r_T R_{22} \sinh(khr_T) + iR_{21} \cosh(khr_L)], \\
N_{22}^{(3)} &= -(c_L^2 - 2c_T^2) [ir_T R_{12} \sinh(khr_T) + R_{11} \cosh(khr_L)], \\
N_{23}^{(3)} &= \frac{k}{4c_L^2} \left\{ n_{12}^{(3)} \cosh(khr_T) + n_{13}^{(3)} \cosh(khr_L) + n_{14}^{(3)} \cosh(3khr_T) \right. \\
& + n_{15}^{(3)} \cosh(3khr_L) + n_{16}^{(3)} h \sinh(khr_L) + n_{17}^{(3)} h \sinh(3khr_L) \\
& + n_{18}^{(3)} \cosh(kh(2r_L - r_T)) + n_{19}^{(3)} \cosh(kh(2r_L + r_T)) + n_{20}^{(3)} \cosh(kh(r_L - 2r_T)) \\
& \left. + n_{21}^{(3)} \cosh(kh(r_L + 2r_T)) + n_{22}^{(3)} h \sinh(kh(2r_L - r_T)) + n_{23}^{(3)} h \sinh(kh(2r_L + r_T)) \right\}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Burada $n_i^{(3)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
n_1^{(3)} &= 2ik \left\{ -ic_L^2(2(2C_9^{(2)} - C_{16}^{(2)})R_{12}(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) + R_{11}((r_L(2iC_{19}^{(2)} \right. \\
&\quad + 3C_{24}^{(2)}r_L + C_{25}^{(2)}r_T) - 2C_{24}^{(2)})\eta_3 - 2i(r_L(iC_{24}^{(2)}r_L + C_{19}^{(2)}(r_L^2 - 3)) \\
&\quad + (iC_{25}^{(2)}r_L + C_{18}^{(2)}(r_L^2 - 1))r_T)\eta_4)) + kR_{12}(R_{12}^2(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4)(2r_T^2\eta_3 \\
&\quad + (3 - 2r_T^2 + 3r_T^4)\eta_4) + 2R_{11}^2((r_L^2 - 1)^2\eta_2(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) + r_L^2(\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad ((r_L^2 - r_T^2 - 2)\eta_3 + 2((r_L^2 - 2)r_T^2 - 1)\eta_4))) \}, \\
n_2^{(3)} &= -2i \left\{ 2ikc_L^2C_{12}^{(2)}R_{11}(\eta_3 - 2r_L^2(\eta_3 + \eta_4)) + c_L^2C_{11}^{(2)}R_{11}(2\eta_4 \right. \\
&\quad - r_L^2(\eta_3 + 4\eta_4)) + k(ikr_LR_{11}(\eta_3 + 2\eta_4)(R_{11}^2(\eta_1r_L^4\eta_2) \\
&\quad - r_L^2R_{11}^2(2\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4) + 2R_{12}^2((1 + r_T^2)\eta_3 + (1 + 3r_T^4)\eta_4)) \\
&\quad + c_L^2(4C_9^{(2)}r_LR_{11}(\eta_3 + 2\eta_4) - i(4r_L(1 - r_L^2)R_{11}w_1(\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad + (2C_{19}^{(2)} - iC_{24}^{(2)}r_L - iC_{25}^{(2)}r_T)R_{12}(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4))) \}, \\
n_3^{(3)} &= 2kR_{12}(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4)(2c_L^2C_{16}^{(2)} - ikR_{12}^2(2r_T^2\eta_3 + (1 + r_T^2)^2\eta_4)), \\
n_4^{(3)} &= 2R_{11} \left\{ k^2r_LR_{11}^2(\eta_3 + 2\eta_4)(r_L^4\eta_1 + \eta_2 + r_L^2(\eta_3 + 2\eta_4 - 2\eta_2)) \right. \\
&\quad \left. + c_L^2(2kC_{12}^{(2)}(\eta_3 + 2r_L^2\eta_4) - iC_{11}^{(2)}(r_L^2\eta_3 + 2\eta_4)) \right\}, \\
n_5^{(3)} &= 8ikc_L^2R_{11}(\eta_3 + 2\eta_4)C_{11}^{(2)}r_L(r_L^2 - 1), \\
n_6^{(3)} &= -i \left\{ c_L^2(2R_{12}((2kC_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)})r_L - 2k(r_L^2 - 1)w_1)(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) \right. \\
&\quad + kR_{11}(-i(r_L(2iC_{18}^{(2)} - 2iC_{19}^{(2)} + C_{24}^{(2)}(r_L + r_T)) - 2C_{24}^{(2)} \\
&\quad - C_{25}^{(2)}(r_L(r_L + r_T) - 2))\eta_3 - 2(r_L(C_{19}^{(2)} - i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)})r_L + C_{19}^{(2)}r_L^2 \\
&\quad - C_{18}^{(2)}(1 + r_L^2)) + (C_{19}^{(2)} + i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)})r_L - C_{19}^{(2)}r_L^2 \\
&\quad + C_{18}^{(2)}(r_L^2 - 1))r_T)\eta_4)) + 2k^2R_{11}^2R_{12}((r_L^2 - 1)^2\eta_2(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) \\
&\quad + r_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)((2 + (r_L - r_T)^2)\eta_3 + 2(1 - 2r_Lr_T + (2 + r_L^2)r_T^2)\eta_4))) \}, \\
n_7^{(3)} &= i \left\{ 2k^2R_{11}^2R_{12}((r_L^2 - 1)^2\eta_2(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) + r_L^2(\eta_3 + 2\eta_4)((2 + (r_L + r_T)^2)\eta_3 \right. \\
&\quad + 2(1 + 2r_Lr_T + (2 + r_L^2)r_T^2)\eta_4)) + c_L^2(2R_{12}((2kC_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)})r_L \\
&\quad - 2k(r_L^2 - 1)w_1)(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) + kR_{11}(-i(-2C_{24}^{(2)} - 2i(C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)})r_L \\
&\quad + C_{24}^{(2)}r_L^2 + C_{25}^{(2)}(r_L^2 - 2) - (C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)})r_Lr_T)\eta_3 - 2((C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)})r_L^3 \\
&\quad - (C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)})r_T + r_L^2(-i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) + (C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)})r_T) \\
&\quad + r_L(C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)} - i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)})r_T))\eta_4)) \}, \\
n_8^{(3)} &= -ik \left\{ 2ikr_LR_{11}R_{12}^2(\eta_3 + 2\eta_4)((2r_Lr_T - 1 - 3r_T^2)\eta_3 \right. \\
&\quad - (1 + r_T^2(4 - 4r_Lr_T + 3r_T^2))\eta_4) + c_L^2(((2i(C_{19}^{(2)} - C_{18}^{(2)}) \\
&\quad + (C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)})(r_L - r_T))R_{12} - 4i(r_L^2 - 1)R_{11}w_2)(\eta_3 + 2r_T^2\eta_4) \\
&\quad \left. + 4C_{16}^{(2)}R_{11}(r_L\eta_3 + 2(r_L + r_T - r_L^2r_T)\eta_4)) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_9^{(3)} &= ik \left\{ 2ikr_L R_{11} R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) ((1 + 2r_L r_T + 3r_T^2) \eta_3 \right. \\
&\quad + (1 + r_T^2 (4 + 4r_L r_T + 3r_T^2)) \eta_4) + c_L^2 (-i((2(C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) \\
&\quad - i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)})(r_L + r_T)) R_{12} + 4(r_L^2 - 1) R_{11} w_2) (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4) \\
&\quad \left. - 4C_{16}^{(2)} R_{11} (r_L \eta_3 + 2(r_L + (r_L^2 - 1)r_T) \eta_4)) \right\}, \\
n_{10}^{(3)} &= 4kc_L^2 C_{11}^{(2)} (1 - r_L^2) R_{12} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4), \\
n_{11}^{(3)} &= 4kc_L^2 C_{11}^{(2)} (r_L^2 - 1) R_{12} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4), \\
n_{12}^{(3)} &= 2k \left\{ c_L^2 C_{18}^{(2)} R_{11} (4\eta_2 - r_L^2 (\eta_1 + 3\eta_2)) - c_L^2 (2iC_{25}^{(2)} r_L (1 - r_L^2) R_{11} \eta_1 \right. \\
&\quad - 4(r_T^2 - 1)^2 R_{12} w_2 \eta_4 - ir_T (2C_{24}^{(2)} R_{11} (r_L^2 \eta_1 - \eta_2) \\
&\quad + iC_{19}^{(2)} r_L R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4) - 2C_{16}^{(2)} R_{12} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4))) + 2kr_T R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad \left. (2(1 - 3r_L^2) R_{11}^2 (r_L^2 \eta_1 - \eta_2) - R_{12}^2 (\eta_4 + r_T^2 ((r_T^2 - 6)\eta_4 - 2\eta_3))) \right\}, \\
n_{13}^{(3)} &= 2 \left\{ 8kc_L^2 C_9^{(2)} (1 - r_L^2) R_{11} \eta_2 + c_L^2 (C_{11}^{(2)} r_L R_{11} ((1 - 2r_L^2) \eta_1 + \eta_2) \right. \\
&\quad - ik(2R_{11} (C_{12}^{(2)} r_L ((2r_L^2 - 1)\eta_1 - \eta_2) + 2(r_L^2 - 1)w_1 (\eta_2 - r_L^2 \eta_1)) \\
&\quad + (C_{18}^{(2)} r_T + r_L (C_{19}^{(2)} - 2iC_{25}^{(2)} r_T)) R_{12} \eta_3) - 2k(2C_{25}^{(2)} r_L r_T - 2C_{24}^{(2)} \\
&\quad + r_T^2 (2C_{24}^{(2)} + iC_{19}^{(2)} r_L + iC_{18}^{(2)} r_T)) R_{12} \eta_4) - 2ik^2 R_{11} (2r_T^4 R_{12}^2 (\eta_2 \\
&\quad - r_L^2 \eta_1) \eta_4 + (\eta_2 - r_L^2 \eta_1) (R_{11}^2 (3r_L^4 \eta_1 + 3\eta_2 - r_L^2 (\eta_1 + 5\eta_2)) \\
&\quad + 2R_{12}^2 \eta_4) + 4r_T^2 R_{12}^2 ((r_L^2 - 1)\eta_2 \eta_4 + r_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (\eta_3 + 3\eta_4))) \left. \right\}, \\
n_{14}^{(3)} &= 4kR_{12} \left\{ c_L^2 (iC_{16}^{(2)} r_T (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4) - 2w_2 (2r_T^2 \eta_3 + (1 + r_T^2)^2 \eta_4)) \right. \\
&\quad \left. + kr_T R_{12}^2 (\eta_3 + 2\eta_4) (2r_T^2 \eta_3 + (1 + r_T^2)^2 \eta_4) \right\}, \\
n_{15}^{(3)} &= -2iR_{11} \left\{ 2k^2 R_{11}^2 (r_L^2 \eta_1 - \eta_2) (r_L^2 (2\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4 - r_L^2 \eta_1) - \eta_2) \right. \\
&\quad + c_L^2 ((2kC_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)}) r_L (2r_L^2 \eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4) - 4kw_1 (r_L^4 \eta_1 \\
&\quad \left. + \eta_2 + r_L^2 (\eta_3 + 2\eta_4 - 2\eta_2))) \right\}, \\
n_{16}^{(3)} &= 8kc_L^2 C_{11}^{(2)} (1 - r_L^2) R_{11} (r_L^2 \eta_1 - \eta_2), \\
n_{17}^{(3)} &= -8kc_L^2 C_{11}^{(2)} R_{11} (\eta_2 + r_L^2 (r_L^2 \eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4)), \\
n_{18}^{(3)} &= -4k^2 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) \left\{ 3r_L^4 r_T \eta_1 - r_L^3 (1 + r_T^2) \eta_1 + r_T \eta_2 \right. \\
&\quad + r_L (1 + r_T^2) \eta_2 + r_L^2 r_T (\eta_3 + 2\eta_4 - 4\eta_2)) + c_L^2 (2ik(C_{25}^{(2)} - C_{24}^{(2)}) \\
&\quad r_L^3 R_{11} \eta_1 + 2k(2(C_{18}^{(2)} - C_{19}^{(2)}) - i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) r_T) R_{11} \eta_2 + 2iR_{12} \\
&\quad (2ikC_{12}^{(2)} (r_T^2 \eta_3 + 2\eta_4) + C_{11}^{(2)} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4)) + kr_L^2 ((C_{19}^{(2)} - C_{18}^{(2)}) \\
&\quad R_{11} (4\eta_2 - \eta_3 - 2\eta_4) + 2ir_T ((C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) R_{11} \eta_1 + 4iR_{12} w_1 \\
&\quad (\eta_3 + 2\eta_4))) + r_L (4iC_{11}^{(2)} r_T R_{12} (\eta_2 - \eta_1) + k(8C_{12}^{(2)} r_T R_{12} (\eta_1 - \eta_2) \\
&\quad + 4(1 + r_T^2) R_{12} w_1 (\eta_3 + 2\eta_4) + R_{11} (2i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) \eta_2 \\
&\quad \left. + (2i(C_{25}^{(2)} - C_{24}^{(2)}) + (C_{19}^{(2)} - C_{18}^{(2)}) r_T) (\eta_3 + 2\eta_4)))) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{19}^{(3)} &= -4k^2 R_{11}^2 R_{12} (\eta_3 + 2\eta_4) \{ 3r_L^4 r_T \eta_1 + r_L^3 (1 + r_T^2) \eta_1 + r_T \eta_2 \\
&\quad - r_L (1 + r_T^2) \eta_2 + r_L^2 r_T (\eta_3 + 2\eta_4 - 4\eta_2) \} + c_L^2 (2ik(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)})) \\
&\quad r_L^3 R_{11} \eta_1 + r_L (4R_{12} ((2kC_{12}^{(2)} - iC_{11}^{(2)}) r_T - k(1 + r_T^2) w_1) (\eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad + kR_{11} (-2i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) \eta_2 + (2i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) + (C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) r_T) \\
&\quad (\eta_3 + 2\eta_4))) + kr_L^2 ((C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) R_{11} (\eta_3 + 2\eta_4 - 4\eta_2) + 2ir_T \\
&\quad ((C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) R_{11} \eta_1 + 4iR_{12} w_1 (\eta_3 + 2\eta_4))) + 2(k(2(C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) \\
&\quad - i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) r_T) R_{11} \eta_2 + R_{12} (2kC_{12}^{(2)} (r_T^2 \eta_3 + 2\eta_4) \\
&\quad - iC_{11}^{(2)} (\eta_3 + 2r_T^2 \eta_4))) \} , \\
n_{20}^{(3)} &= k \{ 4ikR_{11} R_{12}^2 (r_T \eta_3 (2(1 - r_L^2) r_T \eta_2 + r_L (1 - 4r_L r_T + r_T^2) \eta_3) \\
&\quad - ((r_L^2 - 1)(1 + r_T^2)^2 \eta_2 + r_L (r_L (1 + 14r_T^2 + r_T^4) - 4(r_T + r_T^3)) \eta_3) \eta_4 \\
&\quad - 2r_L (r_L (1 + 6r_T^2 + r_T^4) - 2(r_T + r_T^3)) \eta_4^2) - c_L^2 (-i((r_L (C_{19}^{(2)} - C_{18}^{(2)}) \\
&\quad - 2i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) r_T) + r_T (C_{18}^{(2)} - C_{19}^{(2)} + 4i(C_{24}^{(2)} - C_{25}^{(2)}) r_T)) R_{12} \\
&\quad + 4r_L (2r_L r_T - r_T^2 - 1) R_{11} w_2) \eta_3 + 2((2C_{24}^{(2)} - i(r_L - r_T) r_T \\
&\quad ((C_{19}^{(2)} - C_{18}^{(2)}) r_T - 2iC_{24}^{(2)}) + 2C_{25}^{(2)} ((r_L - r_T) r_T - 1)) R_{12} + 4ir_L \\
&\quad (1 - 2r_L r_T + r_T^2) R_{11} w_2) \eta_4 + 4C_{16}^{(2)} R_{11} (2(r_L^2 - 1) \eta_2 + r_L r_T (\eta_3 + 2\eta_4))) \} , \\
n_{21}^{(3)} &= k \{ -4ikR_{11} R_{12}^2 (r_T \eta_3 (2(1 - r_L^2) r_T \eta_2 + r_L (1 + 4r_L r_T + r_T^2) \eta_3) \\
&\quad + ((r_L^2 - 1)(1 + r_T^2)^2 \eta_2 + r_L (r_L (1 + 14r_T^2 + r_T^4) + 4(r_T + r_T^3)) \eta_3) \eta_4 \\
&\quad + 2r_L (r_L (1 + 6r_T^2 + r_T^4) + 2(r_T + r_T^3)) \eta_4^2) + ic_L^2 (((r_L (C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) \\
&\quad + 2i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) r_T) + r_T (C_{18}^{(2)} + C_{19}^{(2)} + 4i(C_{24}^{(2)} + C_{25}^{(2)}) r_T)) R_{12} \\
&\quad + 4r_L (2r_L r_T + r_T^2 + 1) R_{11} w_2) \eta_3 + 2((2iC_{24}^{(2)} + (r_L + r_T) r_T \\
&\quad ((C_{19}^{(2)} + C_{18}^{(2)}) r_T + 2iC_{24}^{(2)}) + 2iC_{25}^{(2)} ((r_L + r_T) r_T + 1)) R_{12} + 4r_L \\
&\quad (1 + 2r_L r_T + r_T^2) R_{11} w_2) \eta_4 + 4iC_{16}^{(2)} R_{11} (2(r_L^2 - 1) \eta_2 - r_L r_T (\eta_3 + 2\eta_4))) \} , \\
n_{22}^{(3)} &= 4ikc_L^2 C_{11}^{(2)} r_L R_{12} (2r_L r_T (\eta_2 - \eta_1) + \eta_3 + 2\eta_4 + r_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)), \\
n_{23}^{(3)} &= -4ikc_L^2 C_{11}^{(2)} r_L R_{12} (2r_L r_T (\eta_1 - \eta_2) + \eta_3 + 2\eta_4 + r_T^2 (\eta_3 + 2\eta_4)). \quad (\mathbf{B.20})
\end{aligned}$$

Üçüncü eşitsizlik için üçüncü mertebe problemde, (4.146a,b) ifadelerindeki $C_i^{(3)}$ ifadelerinin açık yapıları aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} &= C_4^{(3)} = C_5^{(3)} = C_8^{(3)} = C_9^{(3)} = C_{12}^{(3)} = C_{14}^{(3)} = C_{15}^{(3)} = C_{19}^{(3)} = C_{20}^{(3)} = C_{22}^{(3)} = 0, \\
C_{24}^{(3)} &= C_{25}^{(3)} = C_{27}^{(3)} = C_{30}^{(3)} = C_{31}^{(3)} = C_{34}^{(3)} = C_{35}^{(3)} = C_{36}^{(3)} = C_{37}^{(3)} = C_{38}^{(3)} = C_{41}^{(3)} = 0, \\
C_{43}^{(3)} &= C_{46}^{(3)} = C_{48}^{(3)} = C_{49}^{(3)} = C_{52}^{(3)} = C_{53}^{(3)} = C_{54}^{(3)} = C_{56}^{(3)} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^{(3)} &= g_2^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_2^{(a)}, & C_3^{(3)} &= g_3^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_3^{(a)}, \\
C_6^{(3)} &= g_6^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_6^{(a)}, & C_7^{(3)} &= g_7^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_7^{(a)}, \\
C_{10}^{(3)} &= g_{10}^{(a)}, & C_{11}^{(3)} &= g_{11}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_{11}^{(a)}, \\
C_{13}^{(3)} &= g_{13}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + g_{13}^{(a)}, & C_{16}^{(3)} &= g_{16}^{(a)}, \\
C_{17}^{(3)} &= g_{17}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{18}^{(3)} &= g_{19}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{21}^{(3)} &= g_{21}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{23}^{(3)} &= g_{24}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{26}^{(3)} &= g_{25}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{28}^{(3)} &= g_{28}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{29}^{(3)} &= g_{29}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{32}^{(3)} &= g_{32}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{33}^{(3)} &= g_{33}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{39}^{(3)} &= g_{38}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{40}^{(3)} &= g_{40}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{42}^{(3)} &= g_{42}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{44}^{(3)} &= g_{43}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{45}^{(3)} &= g_{46}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{47}^{(3)} &= g_{47}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{50}^{(3)} &= g_{50}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, \\
C_{51}^{(3)} &= g_{51}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1, & C_{55}^{(3)} &= g_{55}^{(3)} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Yukarıdaki $g_i^{(3)}$ ve $g_j^{(a)}$ katsayılarının açık ifadeleri aşağıda verilmektedir;

$$\begin{aligned}
g_2^{(3)} &= \frac{M_{63}^{(3)} - i r_L V_{61}^{(3)}}{4k c_L^2 (-r_L + r_L^3)}, \\
g_2^{(a)} &= -\frac{R_{11}}{2k^2 c_L^4 r_L^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + k c_L^2 \left[2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} + k c_L^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_3^{(3)} &= \frac{c_T^2}{4\omega^2 c_T^2 r_L^2 (r_L^2 - r_T^2)} \left\{ M_{63}^3 (1 - 5r_L^2) + 2kr_L (r_L^2 - 1) (M_1^{(a)} - i r_L V_2^{(a)}) \right. \\
&\quad + i(r_L + 3r_L^3) V_{61}^{(3)} + c_L^2 (r_L^2 - 1) (M_{63}^{(3)} (1 - 4r_L^2) + i r_L (2ik M_1^{(a)} \\
&\quad + 2kr_L V_2^{(a)} + V_{61}^{(3)})) \left. \right\}, \\
g_3^{(a)} &= \frac{\omega^2}{2k^4 c_L^4 r_L^3 (r_L^2 - 1)} \left\{ -2ik\omega r_L^2 R_{11} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right] \right. \\
&\quad + 2i(\omega^2 - k^2 c_L^2) R_{11} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] + k R_{11} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} \\
&\quad + (2\omega R_{11} - 2k\omega r_L^2 R_{21}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} \\
&\quad + (k c_T^2 (1 - r_T^2) R_{11} + 2(\omega^2 - k^2 c_L^2) R_{21}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \left. \right\}, \\
g_6^{(3)} &= \frac{i M_{63}^{(3)} (c_T^2 + c_L^2 (2r_L^2 - 1)) + (c_L^2 + c_T^2) r_L V_{61}^{(3)}}{2k^2 c_L^2 (c_L^2 - c_T^2) r_L (r_L^2 - 1)}, \\
g_6^{(a)} &= \frac{i\omega R_{11}}{k^3 c_L^4 r_L^2} \left\{ \omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_L^2 \left[k(2 - r_L^2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} + \omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_7^{(3)} &= -\frac{i}{4k^3 c_L^2 (c_L^2 - c_T^2)^2 r_L^2 (r_L^2 - 1)^2} \left\{ c_L^4 (r_L^2 - 1) (M_{63}^{(3)} + r_L (2kM_1^{(a)} (2r_L^2 - 1) \right. \\
&\quad - 2ikr_L V_2^{(a)} + iV_{61}^{(3)})) + 2c_L^2 c_T^2 (M_{63}^{(3)} (1 - 3r_L^2 + 4r_L^4) + r_L (i(1 - 3r_L^2) V_{61}^{(3)} \\
&\quad - 2kM_1^{(a)} (r_L^2 - 1)^2)) + c_T^4 (M_{63}^{(3)} (5r_L^2 - 1) + r_L (2k(1 - r_L^2) (M_1^{(a)} - ir_L V_2^{(a)} \\
&\quad \left. - i(1 + 3r_L^2) V_{61}^{(3)}))) \right\}, \\
g_7^{(a)} &= \frac{\omega^2}{2k^5 c_L^4 (c_L^2 - c_T^2) r_L^3 (r_L^2 - 1)} \left\{ 2k\omega R_{11} (c_T^2 (1 + r_L^2 - r_T^2) - c_L^2) \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right] \right. \\
&\quad + 2\omega^2 (c_T^2 (1 + r_L^2 - r_T^2) - c_L^2) R_{11} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] - ik(c_L^2 - c_T^2) R_{11} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} \\
&\quad + 2i\omega [c_L^2 (kR_{21} - 2R_{11}) + c_T^2 ((2 + r_L^2 - r_T^2) R_{11} + k(r_T^2 - 1 - r_L^2) R_{21})] \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} \\
&\quad + i[kc_T^2 (r_T^2 - 1) (3c_L^2 + c_T^2 (2r_T^2 - 3 - 2r_L^2)) R_{11} \\
&\quad \left. + 2\omega^2 (c_L^2 + c_T^2 (r_T^2 - 1 - r_L^2)) R_{21}] \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_{10}^{(a)} &= -\frac{R_{12}}{2k^2 c_T^4 r_T^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_T^2 \left[2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} + kc_T^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_{11}^{(3)} &= \frac{i(M_2^{(a)} r_T - iV_3^{(a)})}{2kc_T^2 (r_T - r_T^3)}, \\
g_{11}^{(a)} &= \frac{\omega^2}{2k^4 c_T^4 r_T^3 (r_T^2 - 1)} \left\{ -2ik\omega r_T^2 R_{12} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right] \right. \\
&\quad + 2i(\omega^2 - k^2 c_T^2) R_{12} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] + kR_{12} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + 2\omega(R_{12} - kr_T^2 R_{22}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} \\
&\quad \left. + (2\omega^2 R_{22} + kc_T^2 (R_{12} - r_T^2 R_{12} - 2kR_{22})) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_{13}^{(3)} &= -\frac{(c_L^2 + c_T^2) M_2^{(a)} r_T - i(c_L^2 + c_T^2 (2r_T^2 - 1)) V_3^{(a)}}{2k^2 c_T^2 (c_L^2 - c_T^2) r_T (r_T^2 - 1)}, \\
g_{13}^{(a)} &= \frac{\omega^2}{2k^5 c_T^4 r_T^3 (r_T^2 - 1)} \left\{ -2k\omega R_{12} r_T^2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} \right] - 2\omega^2 r_T^2 R_{12} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right] \right. \\
&\quad - ikR_{12} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2i\omega (R_{12} + r_T^2 (R_{12} - kR_{22})) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} \\
&\quad \left. + i(kc_T^2 (2r_T^4 - 1 - r_T^2) R_{12} + 2\omega^2 r_T^2 R_{22}) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right\}, \\
g_{16}^{(a)} &= \frac{iR_{12}}{k^3 c_T^4 r_T^2} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - kc_T^2 \left[\omega (r_T^2 - 2) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1 \partial x_1} + kc_T^2 (r_T^2 - 1) \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right] \right\}, \\
g_{17}^{(3)} &= c_L^2 c_T^4 \left\{ (8k^6 c_L^2 c_T^2 (c_T^2 - c_L^2) (M_{66}^{(3)} - r_T (M_{67}^{(3)} r_L + iV_{66}^{(3)}) + ir_L V_{67}^{(3)}) \right. \\
&\quad \left. - 4\omega^6 M_{66}^{(3)} + k^4 \omega^2 (c_T^4 (-5M_{66}^{(3)} + r_T (M_{67}^{(3)} r_L - i(r_L^2 - 2) V_{66}^{(3)}) + 3ir_L V_{67}^{(3)})) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2c_L^2 c_T^2 (r_T (11M_{67}^{(3)} r_L + 7iV_{66}^{(3)}) - 11M_{66}^{(3)} - 11ir_L V_{67}^{(3)}) \\
& + c_L^4 (M_{66}^{(3)} (8 + 7r_T^2 + 12r_T^4) - r_T (M_{67}^{(3)} r_L (7 + 16r_T^2) + 3i(3 + 2r_T^2) V_{66}^{(3)}) \\
& + ir_L (8 + 11r_T^2) V_{67}^{(3)}) + k^2 \omega^4 (c_L^2 (2M_{66}^3 (7 + 4r_T^2) - 3ir_T V_{66}^{(3)} \\
& + 2r_L (7iV_{67}^{(3)} - 8M_{67}^{(3)} r_T)) + c_T^2 (9M_{66}^{(3)} - i(4r_T V_{66}^{(3)} + 3r_L V_{67}^{(3)}))) \} \\
& / \left[4\omega^4 (c_L - c_T)^2 (c_L + c_T)^2 (k^2 c_T^2 - \omega^2) (8k^2 c_L^2 c_T^2 + \omega^2 (c_T^2 - 9c_L^2)) \right], \\
g_{18}^{(3)} = & \left\{ 4\omega^6 c_L^2 (3c_L^2 + c_T^2) M_{67}^{(3)} - 8k^6 c_L^4 c_T^6 (M_{67}^{(3)} - M_{66}^{(3)} r_L r_T \right. \\
& + i(r_L V_{66}^{(3)} - r_T V_{67}^{(3)})) - k^4 \omega^2 c_L^2 c_T^4 (c_T^2 (M_{66}^{(3)} r_L r_T - 5M_{67}^{(3)} + 3ir_L V_{66}^{(3)} \\
& + ir_T V_{67}^{(3)}) + c_L^2 (23M_{66}^{(3)} r_L r_T - 27M_{67}^{(3)} - 19ir_L V_{66}^{(3)} + 15ir_T V_{67}^{(3)})) \\
& - k^2 \omega^4 c_T^2 (ic_T^4 r_T V_{67}^{(3)} + c_L^4 (31M_{67}^{(3)} - 16M_{66}^{(3)} r_L r_T + 11ir_L V_{66}^{(3)} \\
& - 6ir_T V_{67}^{(3)}) + 3c_L^2 c_T^2 (3M_{67}^{(3)} - i(r_L V_{66}^{(3)} + r_T V_{67}^{(3)}))) \} \\
& / \left[4\omega^4 (c_L^2 - c_T^2) (k^2 c_T^2 - \omega^2) (8k^2 c_L^2 c_T^2 + \omega^2 (c_T^2 - 9c_L^2)) \right], \\
g_{21}^{(3)} = & \frac{ik^2 V_{65}^{(3)} c_L^2 (6\omega^4 c_T^4 + 3\omega^2 c_L^2 c_T^2 (\omega^2 - 5k^2 c_T^2) - c_L^4 (\omega^4 + k^2 \omega^2 c_T^2 - 8k^4 c_T^4)) r_L}{4\omega^4 (\omega^2 - k^2 c_L^2) (c_L^2 - c_T^2) (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \\
& + \frac{k^2 M_{64}^{(3)} c_L^4 (c_L^2 (\omega^4 + 7k^2 \omega^2 c_T^2 + 8k^4 c_T^4) - 9\omega^4 c_T^2 - 7k^2 \omega^2 c_T^4) r_L r_T}{4\omega^4 (k^2 c_L^2 - \omega^2) (c_L^2 - c_T^2) (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \\
& - \frac{ik^2 V_{64}^{(3)} ac_L^2 c_T^2 (c_L^2 (3\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 11\omega^2 c_T^2) r_T}{4\omega^4 (c_L^2 - c_T^2) (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \\
& + \frac{3ik^3 V_{68}^{(3)} c_L^4 c_T^4}{4\omega^6 (c_L^2 - c_T^2)^2 (-9\omega^2 c_T^2 + c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2))^2} \{ (85\omega^4 c_T^4 + c_L^4 (5\omega^4 \\
& + 16k^2 \omega^2 c_T^2 + 64k^4 c_T^4) - 2c_L^2 (13\omega^4 c_T^2 + 72k^2 \omega^2 c_T^4)) r_L r_T \} \\
& + \frac{M_{68}^{(3)} c_L^2 (k^2 c_L^2 - \omega^2) c_T^2}{4k\omega^6 (c_L^2 - c_T^2)^2 (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)^2 r_L} \{ 192k^6 c_L^4 c_T^6 + \omega^6 (c_L^2 - 9c_T^2)^2 \\
& - 16k^4 \omega^2 c_L^2 c_T^4 (c_L^2 + 19c_T^2) + k^2 \omega^4 c_T^2 (34c_L^2 c_T^2 + 63c_T^4 - 33c_L^4) \} \\
& - \frac{M_{65}^{(3)} c_L^2 (c_L^2 (\omega^4 + 3k^2 \omega^2 c_T^2 + 8k^4 c_T^4) - 3\omega^2 c_T^2 (3\omega^2 + k^2 c_T^2))}{4\omega^4 (c_L^2 - c_T^2) (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \\
& - \left\{ ikV_{69}^{(3)} c_L^2 (198\omega^8 c_T^8 + 3\omega^2 c_L^6 c_T^2 (9\omega^6 + 67k^2 \omega^4 c_T^2 + 140k^4 \omega^2 c_T^4 \right. \\
& - 480k^6 c_T^6) - c_L^8 (\omega^8 + 23k^2 \omega^6 c_T^2 + 66k^4 \omega^4 c_T^4 + 96k^6 \omega^2 c_T^6 - 384k^8 c_T^8) \\
& - 3c_L^4 (47\omega^8 c_T^4 + 207k^2 \omega^6 c_T^6 - 650k^4 \omega^4 c_T^8) + c_L^2 (301\omega^8 c_T^6 \\
& \left. - 1093k^2 \omega^6 c_T^8) \right\} \\
& / \left\{ 16384\omega^{14} (\omega^2 - k^2 c_L^2)^6 c_T^2 (c_L^2 - c_T^2)^4 (\omega^2 - k^2 c_T^2)^2 \right. \\
& \left. (c_L^2 (\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)^4 (c_L^2 (3\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 11\omega^2 c_T^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{kr_TM_{69}^{(3)}c_L^4}{8\omega^6(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2} \left\{ -3\omega^6c_T^6(81\omega^2 \right. \\
& + 127k^2c_T^2) + c_L^6(\omega^8 + 17k^2\omega^6c_T^2 + 62k^4\omega^4c_T^4 + 160k^6\omega^2c_T^6 + 384k^8c_T^8) \\
& - c_L^4(21\omega^8c_T^2 + 191k^2\omega^6c_T^4 + 476k^4\omega^4c_T^6 + 1184k^6\omega^2c_T^8) \\
& \left. + 3c_L^2(45\omega^8c_T^4 + 185k^2\omega^6c_T^6 + 394k^4\omega^4c_T^8) \right\}, \\
g_{23}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(k^2c_L^2 - \omega^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)} \left\{ c_L^2(M_{65}^{(3)}\omega^6(c_L^2 - 9c_T^2) \right. \\
& - 8k^6c_L^4c_T^4(M_{65}^{(3)} - iV_{64}^{(3)}r_T + ir_L(V_{65}^{(3)} + iM_{64}^{(3)}r_T)) - k^2\omega^4(c_T^4(3M_{65}^{(3)} + \\
& + 6iV_{65}^{(3)}r_L - 11iV_{64}^{(3)}r_T) + c_L^4(M_{65}^{(3)} - r_L(iV_{65}^{(3)} + M_{64}^{(3)}r_T)) + 3c_L^2c_T^2(iV_{64}^{(3)}r_T \\
& - 4M_{65}^{(3)} + r_L(iV_{65}^{(3)} + 3M_{64}^{(3)}r_T))) + k^4\omega^2c_L^2c_T^2(c_T^2(11M_{65}^{(3)} - 19iV_{64}^{(3)}r_T \\
& + r_L(15iV_{65}^{(3)} - 7M_{64}^{(3)}r_T)) + c_L^2(3iV_{64}^{(3)}r_T - 3M_{65}^{(3)} + r_L(iV_{65}^{(3)} + 7M_{64}^{(3)}r_T)))) \Big\} \\
& + \frac{1}{8kr_L\omega^6(k^2c_L^2 - \omega^2)(c_L^2 - c_T^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2} \left\{ 2M_{68}^{(3)}\omega^{10}c_T^2 \right. \\
& (c_L^3 - 9c_Lc_T^2)^2 + 384k^{10}c_L^{10}c_T^8(M_{68}^{(3)} + ir_L((iM_{69}^{(3)} + V_{68}^{(3)}r_L)r_T - V_{69}^{(3)})) \\
& - k^2\omega^8c_L^2(18c_T^8(11iV_{69}^{(3)}r_L - 7M_{68}^{(3)}) + c_L^8r_L(M_{69}^{(3)}r_T - iV_{69}^{(3)}) + c_L^2c_T^6(256M_{68}^{(3)} \\
& - k^2\omega^8c_L^2(18c_T^8(11iV_{69}^{(3)}r_L - 7M_{68}^{(3)}) + c_L^8r_L(M_{69}^{(3)}r_T - iV_{69}^{(3)}) + c_L^2c_T^6(256M_{68}^{(3)} \\
& + r_L(301iV_{69}^{(3)} - 243M_{69}^{(3)}r_T)) - 3c_L^4c_T^4(2M_{68}^{(3)} + r_L(47iV_{69}^{(3)} - 45M_{69}^{(3)}r_T)) \\
& + c_L^6c_T^2(4M_{68}^{(3)} + 3r_L(9iV_{69}^{(3)} - 7M_{69}^{(3)}r_T))) - 2k^6\omega^4c_L^6c_T^4(c_L^4(33M_{68}^{(3)} \\
& + r_L((31M_{69}^{(3)} - 15iV_{68}^{(3)}r_L)r_T - 33iV_{69}^{(3)})) + c_T^4(-863M_{68}^{(3)} + 3r_L(325iV_{69}^{(3)} \\
& + (197M_{69}^{(3)} - 229iV_{68}^{(3)}r_L)r_T)) + 2c_L^2c_T^2(-33M_{68}^{(3)} + 7ir_L(15V_{69}^{(3)} + (17iM_{69}^{(3)} \\
& + 9V_{68}^{(3)}r_L)r_T))) + k^4\omega^6c_L^4c_T^2(c_L^6(2M_{68}^{(3)} + r_L(23iV_{69}^{(3)} - 17M_{69}^{(3)}r_T)) \\
& + c_L^4c_T^2(96M_{68}^{(3)} + r_L((191M_{69}^{(3)} - 30iV_{68}^{(3)}r_L)r_T - 201iV_{69}^{(3)})) + c_T^6(-860M_{68}^{(3)} \\
& + r_L(1093iV_{69}^{(3)} + (381M_{69}^{(3)} - 510iV_{68}^{(3)}r_L)r_T)) + 3c_L^2c_T^4(-2M_{68}^{(3)} + ir_L(207V_{69}^{(3)} \\
& + (185iM_{69}^{(3)} + 52V_{68}^{(3)}r_L)r_T))) - 32k^8\omega^2c_L^8c_T^6(c_T^2(43M_{68}^{(3)} + ir_L(-45V_{69}^{(3)} \\
& + (37iM_{69}^{(3)} + 39V_{68}^{(3)}r_L)r_T)) + c_L^2(M_{68}^{(3)} + r_L(5M_{69}^{(3)}r_T - 3i(V_{69}^{(3)} + V_{68}^{(3)}r_Lr_T)))) \Big\}, \\
g_{26}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)} \left\{ c_L^2(\omega^4c_T^2 \right. \\
& (9M_{69}^{(3)}\omega^2 + k^2c_T^2(3M_{69}^{(3)} - 6iV_{68}^{(3)}r_L + 11iV_{69}^{(3)}r_T)) - \omega^2c_L^2(M_{69}^{(3)}\omega^4 \\
& + k^4c_T^4(11M_{69}^{(3)} + 19iV_{69}^{(3)}r_T - r_L(15iV_{68}^{(3)} + 7M_{68}^{(3)}r_T)) + 3k^2\omega^2c_T^2(4M_{69}^{(3)} \\
& + iV_{69}^{(3)}r_T + ir_L(V_{68}^{(3)} + 3iM_{68}^{(3)}r_T))) + k^2c_L^4(8k^4c_T^4(M_{69}^{(3)} + iV_{69}^{(3)}r_T \\
& - r_L(iV_{68}^{(3)} + M_{68}^{(3)}r_T)) + \omega^4(M_{69}^{(3)} + ir_L(V_{68}^{(3)} + iM_{68}^{(3)}r_T)) \\
& \left. + k^2\omega^2c_T^2(ir_L(V_{68}^{(3)} + 7iM_{68}^{(3)}r_T) + 3(M_{69}^{(3)} + iV_{69}^{(3)}r_T))) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{28}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2 c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \left\{ c_L^2(\omega^4 c_T^2(9M_{68}^{(3)}\omega^2 \right. \\
&\quad + k^2 c_T^2(3M_{68}^{(3)} - 6iV_{69}^{(3)}r_L + 11iV_{68}^{(3)}r_T)) - \omega^2 c_L^2(M_{68}^{(3)}\omega^4 + k^4 c_T^4(11M_{68}^{(3)} \\
&\quad + 19iV_{68}^{(3)}r_T - r_L(15iV_{69}^{(3)} + 7M_{69}^{(3)}r_T)) + 3k^2 \omega^2 c_T^2(4M_{68}^{(3)} + iV_{68}^{(3)}r_T + ir_L(V_{69}^{(3)} \\
&\quad + 3iM_{69}^{(3)}r_T))) + k^2 c_L^4(8k^4 c_T^4(M_{68}^{(3)} + iV_{68}^{(3)}r_T - r_L(iV_{69}^{(3)} + M_{69}^{(3)}r_T)) + \omega^4(M_{68}^{(3)} \\
&\quad + ir_L(V_{69}^{(3)} + iM_{69}^{(3)}r_T)) + k^2 \omega^2 c_T^2(ir_L(V_{69}^{(3)} + 7iM_{69}^{(3)}r_T) + 3(M_{68}^{(3)} + iV_{68}^{(3)}r_T)))) \Big\}, \\
g_{29}^{(3)} &= \frac{c_L^2}{32(\omega^2 - k^2 c_L^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)^2} \left\{ 32M_{610}^{(3)}\omega^6(9c_T^2 - c_L^2) \right. \\
&\quad - 16k^5 c_L^4 c_T^2(c_T^2(3(M_{612}^{(3)} + 2ikV_{610}^{(3)})r_L - 2kM_{610}^{(3)} - 7iV_{612}^{(3)}) + c_L^2(7iV_{612}^{(3)} \\
&\quad + 3r_L(6kM_{610}^{(3)}r_L - 5M_{612}^{(3)} - 2ikV_{610}^{(3)}))) + k\omega^4(c_L^4(32kM_{610}^{(3)} + 5iV_{612}^{(3)} \\
&\quad - 12ikV_{610}^{(3)}r_L) - c_L^2 c_T^2(872kM_{610}^{(3)} + 122iV_{612}^{(3)} + 3(17M_{612}^{(3)} - 40ikV_{610}^{(3)})r_L) \\
&\quad + 9c_T^4(13iV_{612}^{(3)} + 4k(M_{610}^{(3)} - 3iV_{610}^{(3)}r_L))) + k^3 \omega^2 c_L^2(c_T^4(51(M_{612}^{(3)} + 4ikV_{610}^{(3)})r_L \\
&\quad - 68kM_{610}^{(3)} - 229iV_{612}^{(3)}) + c_L^4(3r_L(M_{612}^{(3)} + 4ikV_{610}^{(3)} - 12kM_{610}^{(3)}r_L) - 5iV_{612}^{(3)}) \\
&\quad + c_L^2 c_T^2(584kM_{610}^{(3)} + 234iV_{612}^{(3)} - 3r_L(65M_{612}^{(3)} + 72ikV_{610}^{(3)} + 81M_{612}^{(3)}r_L^2))) \Big\}, \\
g_{32}^{(3)} &= \frac{c_L^2(M_{612}^{(3)}\omega^2 + k^2(3c_L^2 r_L(3M_{612}^{(3)}r_L - iV_{612}^{(3)}) - c_T^2(M_{612}^{(3)} - 3iV_{612}^{(3)}r_L)))}{8(\omega^2 - k^2 c_L^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)}, \\
g_{33}^{(3)} &= -\frac{c_T^2(k^2(3c_L^2 r_T(iV_{611}^{(3)} - 3M_{611}^{(3)}r_T) + c_T^2(M_{611}^{(3)} - 3iV_{611}^{(3)}r_T)) - M_{611}^{(3)}\omega^2)}{8(\omega^2 - k^2 c_T^2)((\omega^2 + 8k^2 c_L^2)c_T^2 - 9\omega^2 c_L^2)}, \\
g_{39}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(c_L^2 - c_T^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)((\omega^2 + 8k^2 c_L^2)c_T^2 - 9\omega^2 c_L^2)} \left\{ c_T^2(\omega^6(9c_L^2 - c_T^2)V_{67}^{(3)} \right. \\
&\quad + 8k^6 c_L^4 c_T^4(ir_T(M_{67}^{(3)} + ir_L V_{66}^{(3)}) - iM_{66}^{(3)}r_L + V_{67}^{(3)}) + k^2 \omega^4(3c_L^2 c_T^2(iM_{66}^{(3)}r_L \\
&\quad + r_T(iM_{67}^{(3)} + 3r_L V_{66}^{(3)}) - 4V_{67}^{(3)}) + c_T^4(V_{67}^{(3)} - r_T(iM_{67}^{(3)} + r_L V_{66}^{(3)})) + c_L^4(6iM_{67}^{(3)}r_T \\
&\quad + 3V_{67}^{(3)} - 11iM_{66}^{(3)}r_L)) + k^4 \omega^2 c_L^2 c_T^2(c_L^2(19iM_{66}^{(3)}r_L + r_T(7r_L V_{66}^{(3)} - 15iM_{67}^{(3)}) \\
&\quad - 11V_{67}^{(3)}) + c_T^2(3V_{67}^{(3)} - 3iM_{66}^{(3)}r_L - r_T(iM_{67}^{(3)} + 7r_L V_{66}^{(3)})))) \Big\}, \\
g_{40}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(c_L^2 - c_T^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)((\omega^2 + 8k^2 c_L^2)c_T^2 - 9\omega^2 c_L^2)} \left\{ c_T^2(\omega^6(9c_L^2 - c_T^2)V_{66}^{(3)} \right. \\
&\quad + 8k^6 c_L^4 c_T^4(ir_T(M_{66}^{(3)} + ir_L V_{67}^{(3)}) - iM_{67}^{(3)}r_L + V_{66}^{(3)}) + k^2 \omega^4(3c_L^2 c_T^2(iM_{67}^{(3)}r_L \\
&\quad + r_T(iM_{66}^{(3)} + 3r_L V_{67}^{(3)}) - 4V_{66}^{(3)}) + c_T^4(V_{66}^{(3)} - r_T(iM_{66}^{(3)} + r_L V_{67}^{(3)})) + c_L^4(6iM_{66}^{(3)}r_T \\
&\quad + 3V_{66}^{(3)} - 11iM_{67}^{(3)}r_L)) + k^4 \omega^2 c_L^2 c_T^2(c_L^2(19iM_{67}^{(3)}r_L + r_T(7r_L V_{67}^{(3)} - 15iM_{67}^{(3)}) \\
&\quad - 11V_{66}^{(3)}) + c_T^2(3V_{66}^{(3)} - 3iM_{67}^{(3)}r_L - r_T(iM_{66}^{(3)} + 7r_L V_{67}^{(3)})))) \Big\}, \\
g_{42}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2 c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2 c_T^2) - 9\omega^2 c_T^2)} \left\{ 12V_{68}^{(3)}\omega^6 c_T^4 \right. \\
&\quad + k^2 \omega^2 c_L^4 c_T^2(3i\omega^2(3iV_{68}^{(3)} - M_{69}^{(3)}r_L - M_{68}^{(3)}r_T) + k^2 c_T^2(27V_{68}^{(3)} - 19iM_{68}^{(3)}r_T \\
&\quad + r_L(15iM_{69}^{(3)} - 23V_{69}^{(3)}r_T))) + ic_L^6(k^2 M_{69}^{(3)}\omega^4 r_L + 8k^6 c_T^4(iV_{68}^{(3)} + M_{68}^{(3)}r_T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_L(M_{69}^{(3)} + iV_{69}ar_T)) + k^4\omega^2c_T^2(3M_{68}^{(3)}r_T - 5V_{68}^{(3)} + r_L(M_{69}^{(3)} + iV_{69}^{(3)}r_T))) \\
& + \omega^4c_L^2c_T^2(4V_{68}^{(3)}\omega^2 + k^2c_T^2(11iM_{68}^{(3)}r_T - 31V_{68}^{(3)} + 2r_L(8V_{69}^{(3)}r_T - 3iM_{69}^{(3)}))) \Big\}, \\
g_{44}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)} \Big\{ 12V_{69}^{(3)}\omega^6c_T^4 \\
& + \omega^4c_L^2c_T^2(4V_{69}^{(3)}\omega^2 + k^2c_T^2((11iM_{69}^{(3)} + 16V_{68}^{(3)}r_L)r_T - 31V_{69}^{(3)} - 6iM_{68}^{(3)}r_L)) \\
& + k^2\omega^2c_L^4c_T^2(3i\omega^2(3iV_{69}^{(3)} - M_{68}^{(3)}r_L - M_{69}^{(3)}r_T) + k^2c_T^2(27V_{69}^{(3)} - 19iM_{69}^{(3)}r_T \\
& + r_L(15iM_{68}^{(3)} - 23V_{68}^{(3)}r_T))) + k^2c_L^6(iM_{68}^{(3)}\omega^4r_L - 8k^4c_T^4(V_{69}^{(3)} - iM_{69}^{(3)}r_T \\
& + ir_L(M_{68}^{(3)} + iV_{68}^{(3)}r_T)) + k^2\omega^2c_T^2(5V_{69}^{(3)} + 3iM_{69}^{(3)}r_T + ir_L(M_{68}^{(3)} + iV_{68}^{(3)}r_T))) \Big\}, \\
g_{45}^{(3)} &= \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)} \Big\{ -12V_{64}^{(3)}\omega^6c_T^4 \\
& + k^2c_L^6(iM_{64}^{(3)}\omega^4r_L + 8k^4c_T^4(V_{64}^{(3)} - iM_{64}^{(3)}r_L + i(M_{65}^{(3)} + iV_{65}^{(3)}r_L)r_T) \\
& + k^2\omega^2c_T^2(iM_{64}^{(3)}r_L - 5V_{64}^{(3)} + (3iM_{65}^{(3)} + V_{65}^{(3)}r_L)r_T)) + \omega^4c_L^2c_T^2(-4V_{64}^{(3)}\omega^2 \\
& + k^2c_T^2(31V_{64}^{(3)} + 11iM_{65}^{(3)}r_T - 2r_L(3iM_{64}^{(3)} + 8V_{65}^{(3)}r_T))) + k^2\omega^2c_L^4c_T^2(-3i\omega^2 \\
& (3iV_{64}^{(3)} + M_{64}^{(3)}r_L + M_{65}^{(3)}r_T) + k^2c_T^2(r_L(15iM_{64}^{(3)} + 23V_{65}^{(3)}r_T) \\
& - 27V_{64}^{(3)} - 19iM_{65}^{(3)}r_T)) \Big\} \\
& + \frac{1}{8\omega^6(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2} \Big\{ kc_L^2(6\omega^8c_T^8(33iM_{69}^{(3)} \\
& + 48V_{68}^{(3)}r_L - 104V_{69}^{(3)}r_T) + \omega^4c_L^4c_T^4(2k^4c_T^4(975iM_{69}^{(3)} + 1071V_{68}^{(3)}r_L - 1423V_{69}^{(3)}r_T) \\
& - k^2\omega^2c_T^2(621iM_{69}^{(3)} + 804V_{68}^{(3)}r_L + 185V_{69}^{(3)}r_T) + \omega^4(16V_{69}^{(3)}r_T - 141iM_{69}^{(3)} \\
& - 96V_{68}^{(3)}r_L)) + c_L^8(-iM_{69}^{(3)}\omega^8 - 32k^6\omega^2c_T^6(3iM_{69}^{(3)} + 5V_{68}^{(3)}r_L + V_{69}^{(3)}r_T) \\
& + 384k^8c_T^8(iM_{69}^{(3)} + V_{68}^{(3)}r_L - V_{69}^{(3)}r_T) + k^2\omega^6c_T^2(V_{69}^{(3)}r_T - 23iM_{69}^{(3)}) \\
& + 2k^4\omega^4c_T^4(17V_{69}^{(3)}r_T - 33iM_{69}^{(3)} - 49V_{68}^{(3)}r_L)) + \omega^2c_L^6c_T^2(27iM_{69}^{(3)}\omega^6 \\
& + k^2\omega^4c_T^2(201iM_{69}^{(3)} + 194V_{68}^{(3)}r_L - 53V_{69}^{(3)}r_T) + 4k^4\omega^2c_T^4(105iM_{69}^{(3)} + 161V_{68}^{(3)}r_L \\
& + 31V_{69}^{(3)}r_T) + 32k^6c_T^6(53V_{69}^{(3)}r_T - 45iM_{69}^{(3)} - 47V_{68}^{(3)}r_L)) + \omega^6c_L^2c_T^6(\omega^2(301iM_{69}^{(3)} \\
& + 320V_{68}^{(3)}r_L + 96V_{69}^{(3)}r_T) + k^2c_T^2(2157V_{69}^{(3)}r_T - 1093iM_{69}^{(3)} - 1310V_{68}^{(3)}r_L))) \Big\} \\
& + ikr_TM_{68}^{(3)} \Big\{ 2k^{18}\omega^4c_L^{30}c_T^8(13\omega^2 - 768k^2c_T^2) - 811008k^2\omega^{16}c_T^{22}(\omega^2 - k^2c_T^2)^2 \\
& (8\omega^2 + k^2c_T^2) + 2k^{14}\omega^4c_L^{34}(-32\omega^6 + 14k^2\omega^4c_T^2 - 37k^4\omega^2c_T^4 + 162k^6c_T^6) \\
& + 4k^{16}\omega^2c_L^{32}c_T^4(39\omega^6 - 254k^2\omega^4c_T^2 - 101k^4\omega^2c_T^4 + 640k^6c_T^6) + 4096\omega^{14} \\
& c_L^2c_T^{18}(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(6336\omega^6 - 1328k^2\omega^4c_T^2 + 14087k^4\omega^2c_T^4 + 1541k^6c_T^6) \\
& - 512\omega^{12}c_L^4c_T^{16}(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(43040\omega^8 + 428760k^2\omega^6c_T^2 - 78364k^4\omega^4c_T^4 \\
& + 443478k^6\omega^2c_T^6 + 39225k^8c_T^8) + 512k^8c_L^{24}c_T^4(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(9\omega^{12} \\
& + 149k^2\omega^{10}c_T^2 + 922k^4\omega^8c_T^4 + 6000k^6\omega^6c_T^6 + 6866k^8\omega^4c_T^8 - 24600k^{10} \\
& \omega^2c_T^{10} - 5120k^{12}c_T^{12}) + 8\omega^8c_L^8c_T^{12}(160256\omega^{16} + 6946304k^2\omega^{14}c_T^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -110654592k^4\omega^{12}c_T^4 - 50378240k^6\omega^{10}c_T^6 + 445132352k^8\omega^8c_T^8 \\
& - 421825856k^{10}\omega^6c_T^{10} + 215784512k^{12}\omega^4c_T^{12} - 80708288k^{14}\omega^2c_T^{14} \\
& - 4456529k^{16}c_T^{16}) - 1024k^2c_L^{18}c_T^4(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(24\omega^{18} - 428k^2\omega^{16}c_T^2 \\
& + 2175k^4\omega^{14}c_T^4 + 85581k^6\omega^{12}c_T^6 + 276372k^8\omega^{10}c_T^8 - 330459k^{10}\omega^8c_T^{10} \\
& - 1360314k^{12}\omega^6c_T^{12} + 16569k^{14}\omega^4c_T^{14} + 80356k^{16}\omega^2c_T^{16} - 2624k^{18}c_T^{18}) \\
& + \omega^6c_L^{10}c_T^{10}(909312\omega^{18} - 36249600k^2\omega^{16}c_T^2 - 166162432k^4\omega^{14}c_T^4 \\
& + 2463058944k^6\omega^{12}c_T^6 - 1290589184k^8\omega^{10}c_T^8 - 4536960000k^{10}\omega^8c_T^{10} \\
& + 4787403264k^{12}\omega^6c_T^{12} - 1850997248k^{14}\omega^4c_T^{14} + 607166328k^{16}\omega^2c_T^{16} \\
& + 22420211k^{18}c_T^{18}) + 2\omega^4c_L^{12}c_T^8(-114688\omega^{20} + 665600k^2\omega^{18}c_T^2 \\
& + 85307904k^4\omega^{16}c_T^4 + 24205312k^6\omega^{14}c_T^6 - 2058015232k^8\omega^{12}c_T^8 \\
& + 2263474176k^{10}\omega^{10}c_T^{10} + 1470076160k^{12}\omega^8c_T^{12} - 2327111936k^{14}\omega^6c_T^{14} \\
& + 729312444k^{16}\omega^4c_T^{16} - 183613013k^{18}\omega^2c_T^{18} - 4198247k^{20}c_T^{20}) \\
& - 1024c_L^{16}c_T^4(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(-12\omega^{20} + 108k^2\omega^{18}c_T^2 + 1339k^4\omega^{16}c_T^4 \\
& - 68894k^6\omega^{14}c_T^6 - 424098k^8\omega^{12}c_T^8 + 162321k^{10}\omega^{10}c_T^{10} + 2893073k^{12}\omega^8c_T^{12} \\
& + 459152k^{14}\omega^6c_T^{14} - 282327k^{16}\omega^4c_T^{16} + 28900k^{18}\omega^2c_T^{18} + 128k^{20}c_T^{20}) \\
& + \omega^2c_L^{14}c_T^6(-32768\omega^{22} + 1470464k^2\omega^{20}c_T^2 - 27809792k^4\omega^{18}c_T^4 \\
& - 324799488k^6\omega^{16}c_T^6 + 504815616k^8\omega^{14}c_T^8 + 4059629568k^{10}\omega^{12}c_T^{10} \\
& - 6541115392k^{12}\omega^{10}c_T^{12} + 95125504k^{14}\omega^8c_T^{14} + 2943893280k^{16}\omega^6c_T^{16} \\
& - 850921437k^{18}\omega^4c_T^{18} + 138057690k^{20}\omega^2c_T^{20} + 1710848k^{22}c_T^{22}) \\
& - 512\omega^{10}c_L^6c_T^{14}(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(7344\omega^{10} - k^2c_T^2(360616\omega^8 \\
& + 1673524k^2\omega^6c_T^2 - 272256k^4\omega^4c_T^4 + 996659k^6\omega^2c_T^6 + 67661k^8c_T^8)) \\
& + 32k^8c_L^{26}c_T^2(\omega^{16} - 16k^2c_T^2(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(12\omega^{10} + 49k^2\omega^8c_T^2 - 103k^4\omega^6c_T^4 \\
& + 246k^6\omega^4c_T^6 + 1240k^8\omega^2c_T^8 - 1664k^{10}c_T^{10})) + 32k^8c_L^{28}(\omega^{16} + 2k^2c_T^2(-\omega^{14} \\
& + 8k^2c_T^2(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(3\omega^2 + 8k^2c_T^2)(\omega^6 - k^2\omega^4c_T^2 - 9k^4\omega^2c_T^4 + 16k^6c_T^6))) \\
& - 512k^6c_L^{22}c_T^4(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(-6\omega^{14} + k^2c_T^2(-61\omega^{12} + k^2c_T^2(5279\omega^{10} \\
& + 2k^2c_T^2(18674\omega^8 + 21835k^2\omega^6c_T^2 - 73045k^4\omega^4c_T^4 - 54260k^6\omega^2c_T^6 \\
& + 8576k^8c_T^8)))) + 512k^4c_L^{20}c_T^4(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(18\omega^{16} + k^2c_T^2(-742\omega^{14} \\
& + k^2c_T^2(9021\omega^{12} + 2k^2c_T^2(55138\omega^{10} + 102382k^2\omega^8c_T^2 - 218645k^4\omega^6c_T^4 \\
& - 379846k^6\omega^4c_T^6 + 45820k^8\omega^2c_T^8 + 9792k^{10}c_T^{10})))))) \} \\
& / \left[(32768\omega^6(\omega^2 - k^2c_L^2)^5c_T^8(c_L^2 - c_T^2)^2(\omega^2 - k^2c_T^2)^3 \right. \\
& \left. (c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2(c_L^2(3\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 11\omega^2c_T^2)r_L) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{47}^{(3)} = & \frac{1}{4\omega^4(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2 - c_T^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)} \left\{ -12V_{65}^{(3)}\omega^6c_T^4 \right. \\
& + k^2c_L^6(iM_{65}^{(3)}\omega^4r_L + 8k^4c_T^4(V_{65}^{(3)} - iM_{65}^{(3)}r_L + i(M_{64}^{(3)} + iV_{64}^{(3)}r_L)r_T) \\
& \left. + k^2\omega^2c_T^2(iM_{65}^{(3)}r_L - 5V_{65}^{(3)} + (3iM_{64}^{(3)} + V_{64}^{(3)}r_L)r_T)) + \omega^4c_L^2c_T^2(-4V_{65}^{(3)}\omega^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^2 c_T^2 (31V_{65}^{(3)} + 11iM_{64}^{(3)} r_T - 2r_L(3iM_{65}^{(3)} + 8V_{64}^{(3)} r_T)) + k^2 \omega^2 c_L^4 c_T^2 (-3i\omega^2 \\
& (3iV_{65}^{(3)} + M_{65}^{(3)} r_L + M_{64}^{(3)} r_T) + k^2 c_T^2 (r_L(15iM_{65}^{(3)} + 23V_{64}^{(3)} r_T) \\
& - 27V_{65}^{(3)} - 19iM_{64}^{(3)} r_T)) \} + ikc_L^2 \left\{ 512\omega^{12} c_T^{10} (\omega^2 - k^2 c_T^2)^2 (24i\omega^2 (13r_T V_{68}^{(3)} \right. \\
& - 6r_L V_{69}^{(3)}) + k^2 c_T^2 (23M_{68}^{(3)} + 42ir_L V_{69}^{(3)}) + 8k^{10} c_L^{20} (\omega^4 - 3k^2 \omega^2 c_T^2 + 2k^4 c_T^4) \\
& (128k^4 c_T^4 (2M_{68}^{(3)} + M_{69}^{(3)} r_L r_T) + 16\omega^4 (2M_{68}^{(3)} + M_{69}^{(3)} r_L r_T - ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 (163ir_L V_{69}^{(3)} - 288M_{68}^{(3)} - 144M_{69}^{(3)} r_L r_T)) - 256\omega^{10} c_L^2 c_T^8 (\omega^2 - k^2 c_T^2)^2 \\
& (32\omega^4 (3ir_T V_{68}^{(3)} + 10ir_L V_{69}^{(3)} - 5M_{68}^{(3)}) + k^4 c_T^4 (267M_{68}^{(3)} + 21M_{69}^{(3)} r_L r_T + 530ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + k^2 \omega^2 c_T^2 (317M_{68}^{(3)} - 384M_{69}^{(3)} r_L r_T + 4029ir_T V_{68}^{(3)} - 2130ir_L V_{69}^{(3)})) \\
& + 8k^6 c_L^{16} (k^2 c_T^2 - \omega^2) (256k^{10} c_T^{10} (12M_{68}^{(3)} - 20M_{69}^{(3)} r_L r_T - 3ir_L V_{69}^{(3)}) - 56\omega^{10} (16M_{68}^{(3)} \\
& + 3M_{69}^{(3)} r_L r_T - 3ir_L V_{69}^{(3)}) - 16k^4 \omega^6 c_T^4 (1528M_{68}^{(3)} + 759M_{69}^{(3)} r_L r_T - 106ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + 32k^8 \omega^2 c_T^8 (428M_{68}^{(3)} - 14M_{69}^{(3)} r_L r_T - 143ir_L V_{69}^{(3)}) + 8k^2 \omega^8 c_T^2 (1556M_{68}^{(3)} \\
& + 371M_{69}^{(3)} r_L r_T - 263ir_L V_{69}^{(3)}) + k^6 \omega^4 c_T^6 (14912M_{69}^{(3)} r_L r_T - 3872M_{68}^{(3)} + 7513ir_L V_{69}^{(3)})) \\
& - 64c_L^{10} (\omega^3 - k^2 \omega c_T^2)^2 (28\omega^{12} M_{68}^{(3)} - 12k^2 \omega^{10} c_T^2 (71M_{68}^{(3)} + 4M_{69}^{(3)} r_L r_T - 2ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& - 4k^4 \omega^8 c_T^4 (493M_{68}^{(3)} - 185M_{69}^{(3)} r_L r_T + 3ir_T V_{68}^{(3)} - 82ir_L V_{69}^{(3)}) + 4k^{12} c_T^{12} (134M_{68}^{(3)} \\
& + 125M_{69}^{(3)} r_L r_T + 471ir_L V_{69}^{(3)}) + 4k^6 \omega^6 c_T^6 (1742M_{68}^{(3)} - 138M_{69}^{(3)} r_L r_T - 277ir_T V_{68}^{(3)} \\
& + 534ir_L V_{69}^{(3)}) + k^8 \omega^4 c_T^8 (8052M_{68}^{(3)} - 15363M_{69}^{(3)} r_L r_T + 2612ir_T V_{68}^{(3)} + 9595ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + 2k^{10} \omega^2 c_T^{10} (7396M_{68}^{(3)} - 7249M_{69}^{(3)} r_L r_T + 18172ir_T V_{68}^{(3)} - 13411ir_L V_{69}^{(3)})) \\
& - 8k^8 c_L^{18} (k^2 c_T^2 - \omega^2) (512k^8 c_T^8 (4M_{68}^{(3)} - 3M_{69}^{(3)} r_L r_T) + 2k^6 \omega^2 c_T^6 (1248M_{68}^{(3)} \\
& + 2128M_{69}^{(3)} r_L r_T + 51ir_L V_{69}^{(3)}) - 2k^4 \omega^4 c_T^4 (3936M_{68}^{(3)} + 1912M_{69}^{(3)} r_L r_T - 883ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + k^2 \omega^6 c_T^2 (3648M_{68}^{(3)} + 1192M_{69}^{(3)} r_L r_T - 1019ir_L V_{69}^{(3)}) - 8\omega^8 (40M_{68}^{(3)} + 11r_L (M_{69}^{(3)} r_T \\
& - iV_{69}^{(3)}))) - 8k^4 c_L^{14} (k^2 c_T^2 - \omega^2) (32\omega^{12} (4ir_L V_{69}^{(3)} - 37M_{68}^{(3)} - 4M_{69}^{(3)} r_L r_T) \\
& + 64k^2 \omega^{10} c_T^2 (321M_{68}^{(3)} + 53M_{69}^{(3)} r_L r_T - 32ir_L V_{69}^{(3)}) + 64k^{10} \omega^2 c_T^{10} (230M_{68}^{(3)} \\
& - 369M_{69}^{(3)} r_L r_T - 176ir_T V_{68}^{(3)} + 119ir_L V_{69}^{(3)}) - 8k^4 \omega^8 c_T^4 (4028M_{68}^{(3)} + 2289M_{69}^{(3)} r_L r_T \\
& - 4ir_T V_{68}^{(3)} + 243ir_L V_{69}^{(3)}) + 16k^8 \omega^4 c_T^8 (1996M_{68}^{(3)} + 1410M_{69}^{(3)} r_L r_T - 132ir_T V_{68}^{(3)} \\
& - 549ir_L V_{69}^{(3)}) + k^6 \omega^6 c_T^6 (22760M_{69}^{(3)} r_L r_T - 39936M_{68}^{(3)} + 1056ir_T V_{68}^{(3)} \\
& + 17419ir_L V_{69}^{(3)}) + 512k^{12} c_T^{12} (12M_{68}^{(3)} - 13M_{69}^{(3)} r_L r_T + 3i(8r_T V_{68}^{(3)} - 7r_L V_{69}^{(3)}))) \\
& + 64\omega^8 c_L^4 c_T^6 (\omega^2 - k^2 c_T^2)^2 (-4k^2 \omega^4 c_T^2 (707M_{68}^{(3)} + 321M_{69}^{(3)} r_L r_T - 473ir_T V_{68}^{(3)} \\
& - 1665ir_L V_{69}^{(3)}) + k^6 c_T^6 (2436M_{68}^{(3)} + 467M_{69}^{(3)} r_L r_T + 5365ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& + 4k^4 \omega^2 c_T^4 (1884M_{68}^{(3)} - 2056M_{69}^{(3)} r_L r_T + 11189ir_T V_{68}^{(3)} - 6535ir_L V_{69}^{(3)}) \\
& - 4\omega^6 (43M_{68}^{(3)} + 16i(r_T V_{68}^{(3)} - 6r_L V_{69}^{(3)}))) + \omega^6 c_L^6 c_T^4 (12032\omega^{12} M_{68}^{(3)} + 256k^2 \omega^{10} c_T^2 \\
& (46M_{68}^{(3)} + 16M_{69}^{(3)} r_L r_T + 101ir_T V_{68}^{(3)} - 432ir_L V_{69}^{(3)}) + 256k^4 \omega^8 c_T^4 (554M_{68}^{(3)} \\
& + 1594M_{69}^{(3)} r_L r_T - 1169ir_T V_{68}^{(3)} - 2760ir_L V_{69}^{(3)}) - 128k^{10} \omega^2 c_T^{10} (6130M_{68}^{(3)}
\end{aligned}$$

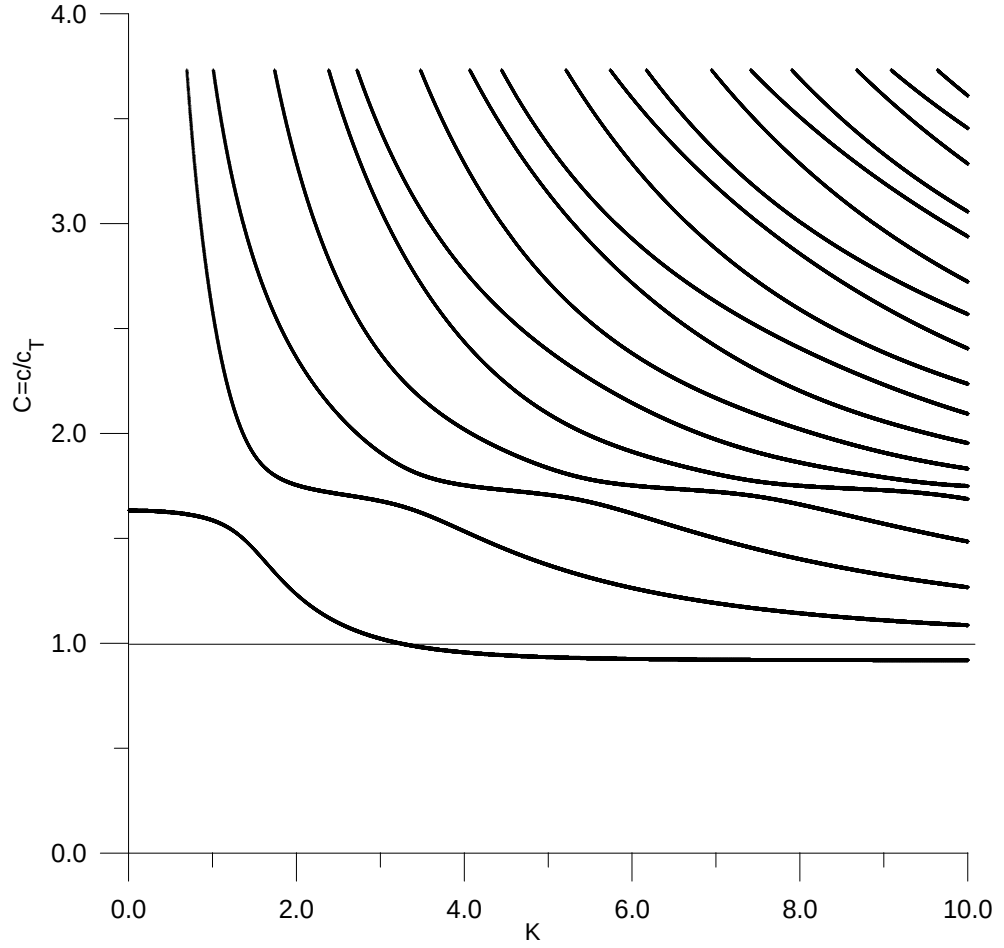
$$\begin{aligned}
& -10111M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 34658ir_TV_{68}^{(3)} - 28977ir_LV_{69}^{(3)} + 64k^8\omega^4c_T^8(36104M_{68}^{(3)} \\
& - 30967M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 134764ir_TV_{68}^{(3)} - 109341ir_LV_{69}^{(3)}) - k^{12}c_T^{12}(179941M_{68}^{(3)} \\
& + 64r_L(991M_{69}^{(3)}r_T + 7021iV_{69}^{(3)})) - 256k^6\omega^6c_T^6(5905M_{68}^{(3)} - 2(662M_{69}^{(3)}r_Lr_T \\
& - 7647ir_TV_{68}^{(3)} + 8897ir_LV_{69}^{(3)}))) + 64k^2c_L^{12}(k^2c_T^2 - \omega^2)(-4\omega^{14}(25M_{68}^{(3)} + M_{69}^{(3)}r_Lr_T \\
& - ir_LV_{69}^{(3)}) + 32k^{14}c_T^{14}(2M_{68}^{(3)} + 3M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 9ir_LV_{69}^{(3)}) + 4k^2\omega^{12}c_T^2(547M_{68}^{(3)} \\
& + 57M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 30ir_LV_{69}^{(3)}) - k^4\omega^{10}c_T^4(1612M_{68}^{(3)} + 1841M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 12ir_TV_{68}^{(3)} \\
& + 515ir_LV_{69}^{(3)}) + k^6\omega^8c_T^6(2405M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 10416M_{68}^{(3)} + 608ir_TV_{68}^{(3)} + 1051ir_LV_{69}^{(3)}) \\
& + 4k^{12}\omega^2c_T^{12}(1294M_{68}^{(3)} - 1349M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 2848ir_TV_{68}^{(3)} - 2355ir_LV_{69}^{(3)}) \\
& + 2k^{10}\omega^4c_T^{10}(818M_{68}^{(3)} - 2401M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 5256ir_TV_{68}^{(3)} + 5529ir_LV_{69}^{(3)}) \\
& + 2k^8\omega^6c_T^8(1532M_{68}^{(3)} + 4657M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 2i(375r_TV_{68}^{(3)} + 571r_LV_{69}^{(3)}))) \\
& + \omega^4c_L^8c_T^2(-7424\omega^{14}M_{68}^{(3)} + 256k^4\omega^{10}c_T^4(913M_{68}^{(3)} - 144M_{69}^{(3)}r_Lr_T \\
& - 239ir_TV_{68}^{(3)} + 722ir_LV_{69}^{(3)}) - 64k^{10}\omega^4c_T^{10}(39700M_{68}^{(3)} - 30551M_{69}^{(3)}r_Lr_T \\
& + 125116ir_TV_{68}^{(3)} - 109873ir_LV_{69}^{(3)}) + 2k^{14}c_T^{14}(55397M_{68}^{(3)} + 128r_L(253M_{69}^{(3)}r_T \\
& + 1259iV_{69}^{(3)})) + 256k^8\omega^6c_T^8(4614M_{68}^{(3)} + 1345M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 2i(6908r_TV_{68}^{(3)} \\
& - 9267r_LV_{69}^{(3)})) - 256k^2\omega^{12}c_T^2(238M_{68}^{(3)} - 36M_{69}^{(3)}r_Lr_T + i(r_TV_{68}^{(3)} - 16r_LV_{69}^{(3)})) \\
& - 64k^6\omega^8c_T^6(1544M_{68}^{(3)} + 12905M_{69}^{(3)}r_Lr_T - 3i(2048r_TV_{68}^{(3)} + 3507r_LV_{69}^{(3)})) \\
& + k^{12}\omega^2c_T^{12}(1182235M_{68}^{(3)} - 128(11803M_{69}^{(3)}r_Lr_T + 3i(9041r_LV_{69}^{(3)} \\
& - 10778r_TV_{68}^{(3)})))))) \} \\
& / \left[2048\omega^6(\omega^2 - k^2c_L^2)^4c_T^2(c_L^2 - c_T^2)^2(\omega^2 - k^2c_T^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2 \right], \\
g_{50}^{(3)} &= \frac{c_L^2(V_{612}^{(3)}\omega^2 + k^2(3c_T^2r_L(iM_{612}^{(3)} + 3V_{612}^{(3)}r_L) - c_L^2(V_{612}^{(3)} + 3iM_{612}^{(3)}r_L)))}{8(\omega^2 - k^2c_L^2)(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)}, \\
g_{51}^{(3)} &= \frac{c_L^2}{32(\omega^2 - k^2c_L^2)^2(c_L^2(\omega^2 + 8k^2c_T^2) - 9\omega^2c_T^2)^2} \left\{ V_{610}^{(3)}\omega^6(4c_L^2 - 81c_T^2) \right. \\
& + 16k^5c_L^4c_T^2(c_L^2(2kV_{610}^{(3)} - 7iM_{612}^{(3)} + 6ikM_{610}^{(3)}r_L - 3V_{612}^{(3)}r_L) + c_T^2(7iM_{612}^{(3)} \\
& - 3r_L(2ikM_{610}^{(3)} - 5V_{612}^{(3)} + 6kV_{610}^{(3)}r_L))) + k\omega^4(c_L^4(5iM_{612}^{(3)} - 8kV_{610}^{(3)} \\
& - 12ikM_{610}^{(3)}r_L + 3V_{612}^{(3)}r_L) + c_L^2c_T^2(185kV_{610}^{(3)} - 122iM_{612}^{(3)} + 120ikM_{610}^{(3)}r_L \\
& - 54V_{612}^{(3)}r_L - 9kV_{610}^{(3)}r_L^2) + 9c_T^4(13iM_{612}^{(3)} - 3r_L(4ikM_{610}^{(3)} - 9V_{612}^{(3)} \\
& + 12kV_{610}^{(3)}r_L))) + k^3\omega^2c_L^2(2c_L^2c_T^2(117iM_{612}^{(3)} - 68kV_{610}^{(3)} - 108ikM_{610}^{(3)}r_L \\
& + 51V_{612}^{(3)}r_L) + c_L^4(4k(V_{610}^{(3)} + 3iM_{610}^{(3)}r_L) - 5iM_{612}^{(3)} - 3V_{612}^{(3)}r_L) \\
& \left. + c_T^4(3r_L(68ikM_{610}^{(3)} - 161V_{612}^{(3)} + 204kV_{610}^{(3)}r_L) - 229iM_{612}^{(3)}) \right\}, \\
g_{55}^{(3)} &= \frac{c_T^2(V_{611}^{(3)}\omega^2 + k^2(3c_T^2r_T(iM_{611}^{(3)} + 3V_{611}^{(3)}r_T) - c_L^2(V_{611}^{(3)} + 3iM_{611}^{(3)}r_T)))}{8(\omega^2 - k^2c_T^2)((\omega^2 + 8k^2c_L^2)c_T^2 - 9\omega^2c_L^2)}. \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

Üçüncü eşitsizlik için üçüncü mertebe pertürbasyon probleminde, (4.151) ile verilen $\mathbf{b}_1^{(3)}$ vektöründe görülen $\mathbf{F}$ vektörünün bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıda verilmektedir:

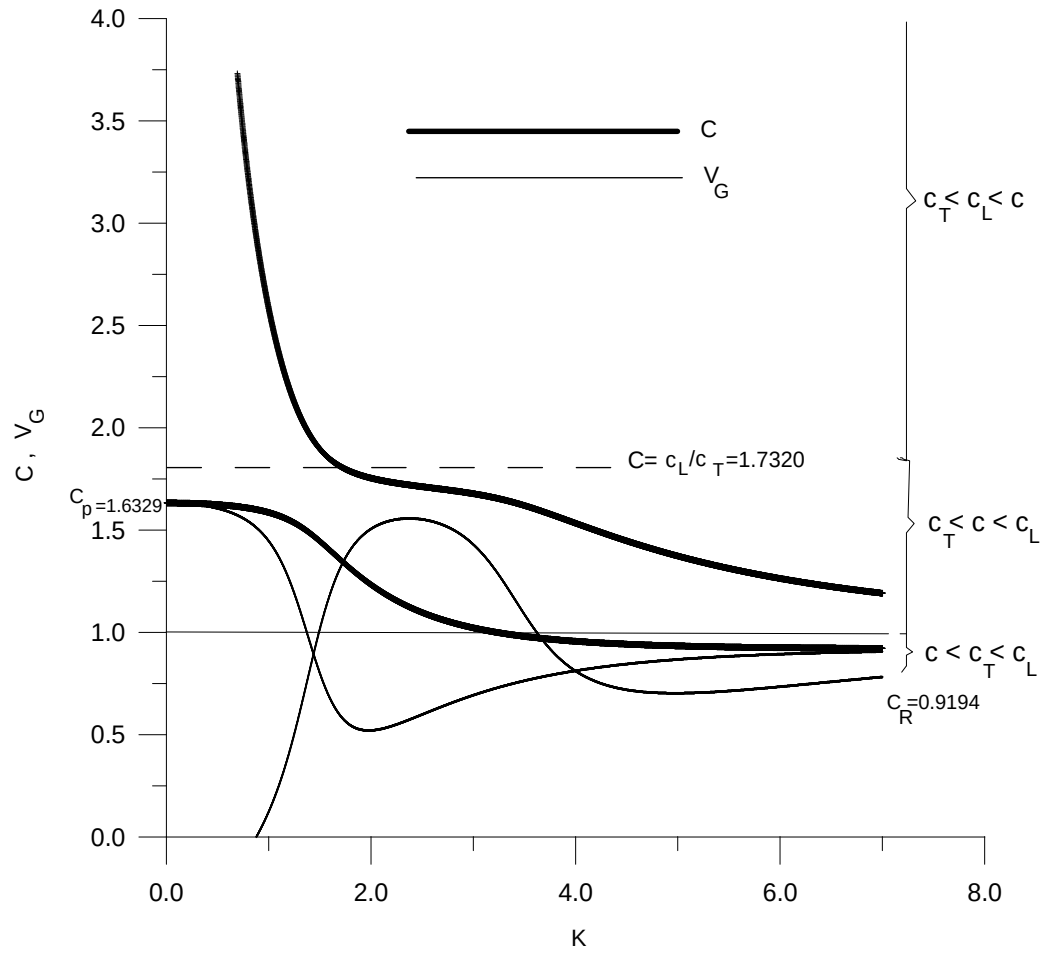
$$\begin{aligned}
F_1 = & \frac{1}{c_T^2} N_{13}^{(3)} - h \left[k \left(ig_6^{(3)} - 2r_L g_3^{(3)} \right) + 2g_2^{(3)} \right] \cosh(hkr_L) \\
& + \left[k \left(ig_7^{(3)} - 2h^2 r_L g_2^{(3)} \right) + g_3^{(3)} \right] \sinh(hkr_L) + i h k \left(r_T^2 + 1 \right) g_{11}^{(3)} \cosh(hkr_T) \\
& + r_T \left(ig_{11}^{(3)} - k g_{13}^{(3)} \right) \sinh(hkr_T) - k \left(r_L g_{17}^{(3)} + 2r_T g_{18}^{(3)} + g_{39}^{(3)} \right) \cosh(2hkr_T) \sinh(hkr_L) \\
& - k \left(r_L g_{18}^{(3)} + 2r_T g_{17}^{(3)} + ig_{40}^{(3)} \right) \cosh(hkr_L) \sinh(2hkr_T) \\
& - h k \left(r_T g_{26}^{(3)} + 2r_L g_{28}^{(3)} + ig_{44}^{(3)} \right) \sinh(2hkr_L) \sinh(hkr_T) \\
& - h k \left(r_T g_{28}^{(3)} + 2r_L g_{26}^{(3)} + ig_{42}^{(3)} \right) \cosh(2hkr_L) \cosh(hkr_T) \\
& - \left[k \left(r_T g_{23}^{(3)} + 2r_L g_{21}^{(3)} + ig_{45}^{(3)} \right) + g_{26}^{(3)} \right] \sinh(2hkr_L) \cosh(hkr_T) \\
& - \left[k \left(r_T g_{21}^{(3)} + 2r_L g_{23}^{(3)} + ig_{47}^{(3)} \right) + g_{28}^{(3)} \right] \cosh(2hkr_L) \sinh(hkr_T) \\
& - h k \left(ig_{50}^{(3)} + 3r_L g_{32}^{(3)} \right) \cosh(3hkr_L) - \left[k \left(ig_{51}^{(3)} + 3r_L g_{29}^{(3)} \right) + g_{32}^{(3)} \right] \sinh(3hkr_L) \\
& - k \left(ig_{55}^{(3)} + 3r_T g_{33}^{(3)} \right) \sinh(3hkr_T), \\
F_2 = & N_{23}^{(3)} + \left[ih^2 k (2c_T^2 + c_L^2 (r_L^2 - 1)) g_2^{(3)} - c_L^2 \left(g_6^{(3)} + r_L \left(ig_3^{(3)} - k g_7^{(3)} \right) \right) \right] \cosh(hkr_L) \\
& + i h \left[c_L^2 r_L \left(2g_2^{(3)} - i k g_6^{(3)} \right) - k (2c_T^2 + c_L^2 (r_L^2 - 1)) g_3^{(3)} \right] \sinh(hkr_L) \\
& + \left[c_L^2 g_{11}^{(3)} - i k (c_L^2 - 2c_T^2) g_{13}^{(3)} \right] \cosh(hkr_T) + 2hkr_T c_T^2 g_{11}^{(3)} \sinh(hkr_T) \\
& + \left[i (2c_T^2 - c_L^2) g_{17}^{(3)} - c_L^2 \left(2r_T g_{40}^{(3)} + r_L g_{39}^{(3)} \right) \right] \cosh(2hkr_T) \cosh(hkr_L) \\
& + \left[i (2c_T^2 - c_L^2) g_{18}^{(3)} - c_L^2 \left(2r_T g_{39}^{(3)} + r_L g_{40}^{(3)} \right) \right] \sinh(2hkr_T) \sinh(hkr_L) \\
& - \left[i k (c_L^2 - 2c_T^2) g_{21}^{(3)} + c_L^2 \left(k \left(2r_L g_{45}^{(3)} + r_T g_{47}^{(3)} \right) + g_{42}^{(3)} \right) \right] \cosh(2hkr_L) \cosh(hkr_T) \\
& - \left[i k (c_L^2 - 2c_T^2) g_{23}^{(3)} + c_L^2 \left(k \left(2r_L g_{47}^{(3)} + r_T g_{45}^{(3)} \right) + g_{44}^{(3)} \right) \right] \sinh(2hkr_L) \sinh(hkr_T) \\
& - i h k \left[(c_L^2 - 2c_T^2) g_{28}^{(3)} - i c_L^2 \left(2r_L g_{44}^{(3)} + r_T g_{42}^{(3)} \right) \right] \cosh(2hkr_L) \sinh(hkr_T) \\
& - i h k \left[(c_L^2 - 2c_T^2) g_{26}^{(3)} - i c_L^2 \left(2r_L g_{42}^{(3)} + r_T g_{44}^{(3)} \right) \right] \sinh(2hkr_L) \cosh(hkr_T) \\
& + \left[i k (2c_T^2 - c_L^2) g_{29}^{(3)} - c_L^2 \left(3r_L k g_{51}^{(3)} + g_{50}^{(3)} \right) \right] \cosh(3hkr_L) \\
& - h k \left[i (c_L^2 - 2c_T^2) g_{32}^{(3)} + 3r_L c_L^2 g_{50}^{(3)} \right] \sinh(3hkr_L) \\
& - k \left[i (c_L^2 - 2c_T^2) g_{33}^{(3)} + 3r_T c_L^2 g_{55}^{(3)} \right] \cosh(3hkr_T). \tag{B.23}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde görünen $g_i^{(3)}$ katsayı fonksiyonları (B.22)'de tanımlanan fonksiyonlardır.

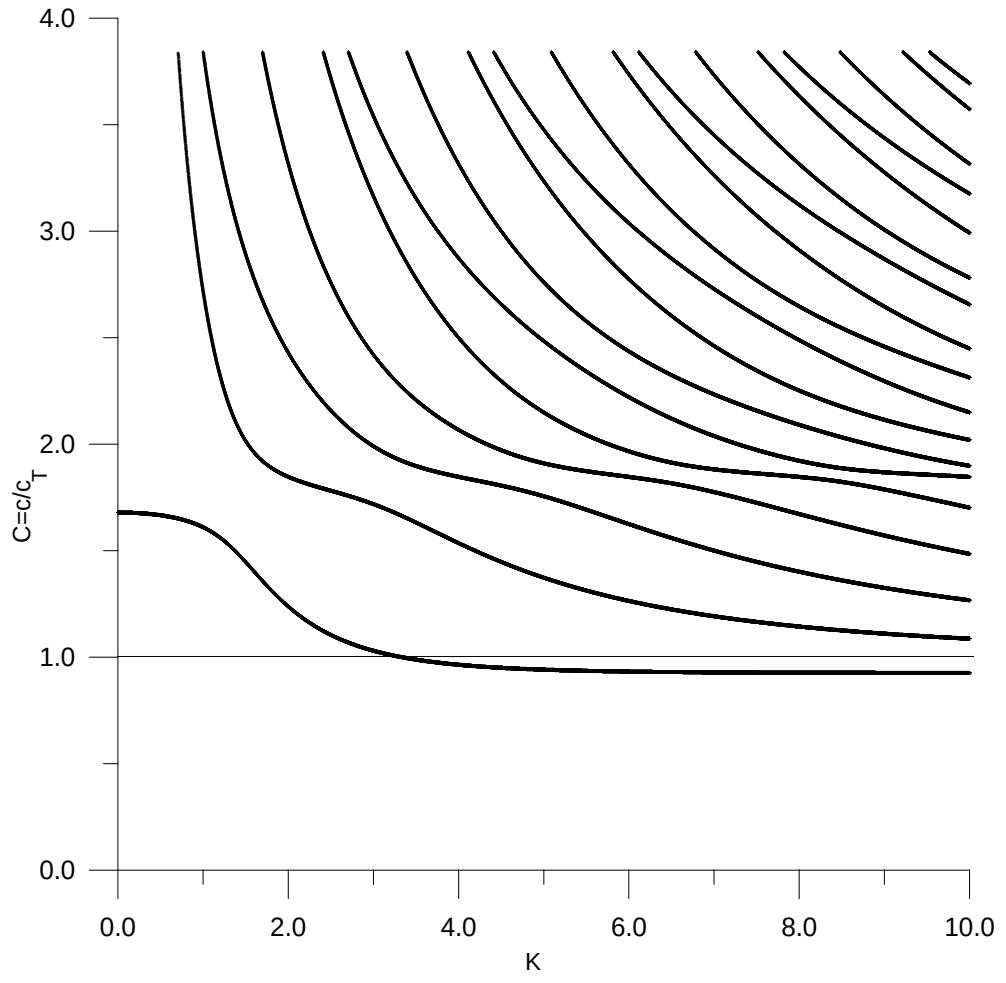
EK C: Şekiller



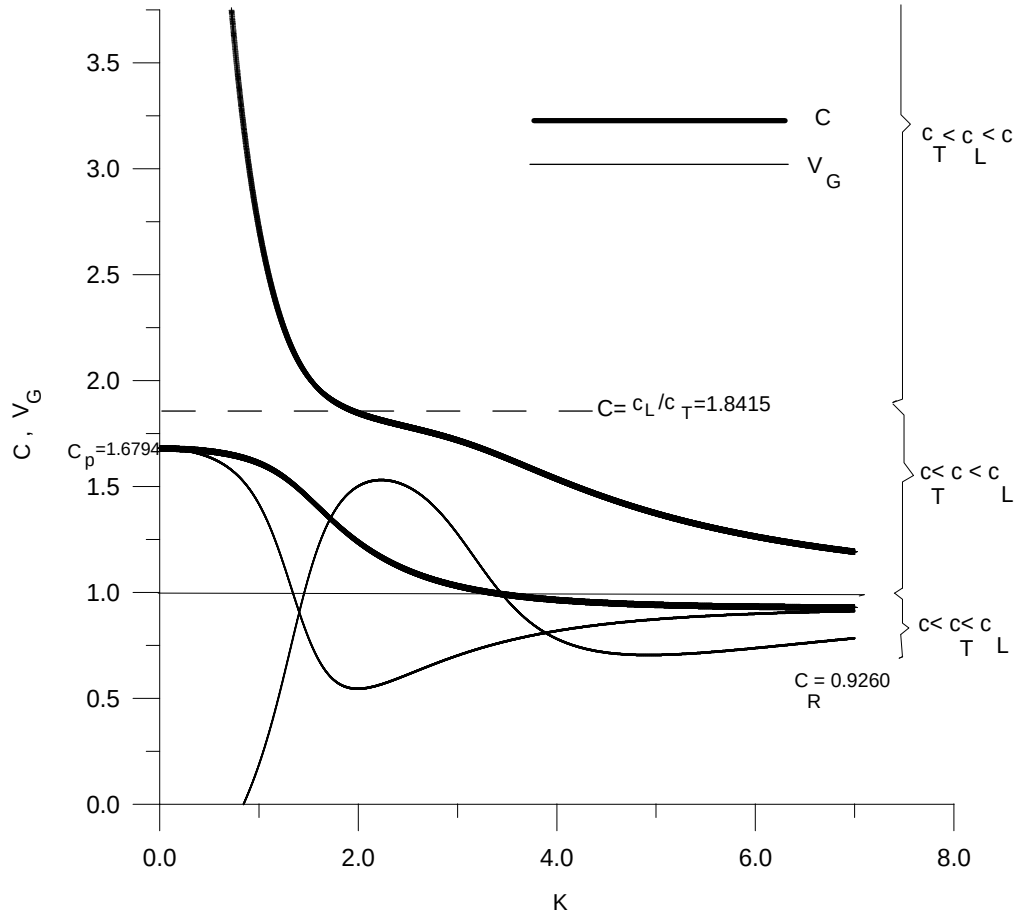
Şekil C.1: Simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinde boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



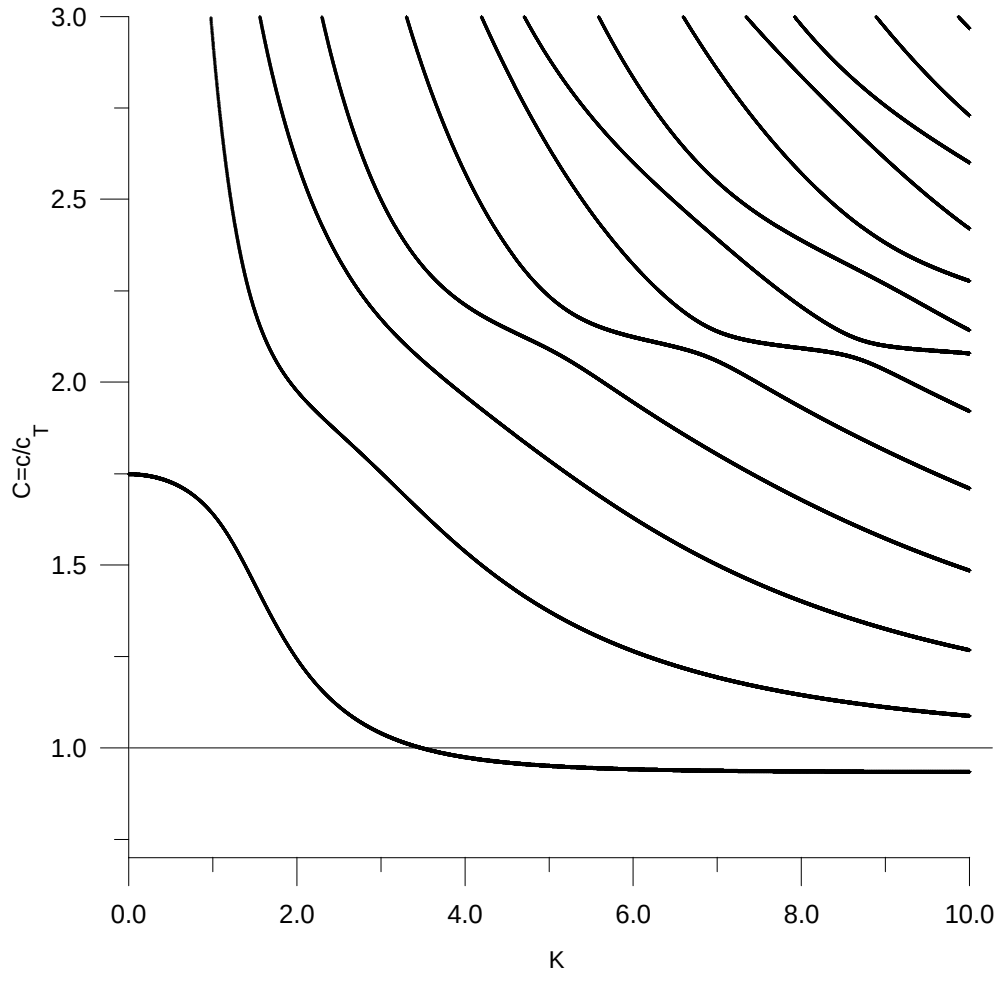
Şekil C.2: Simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



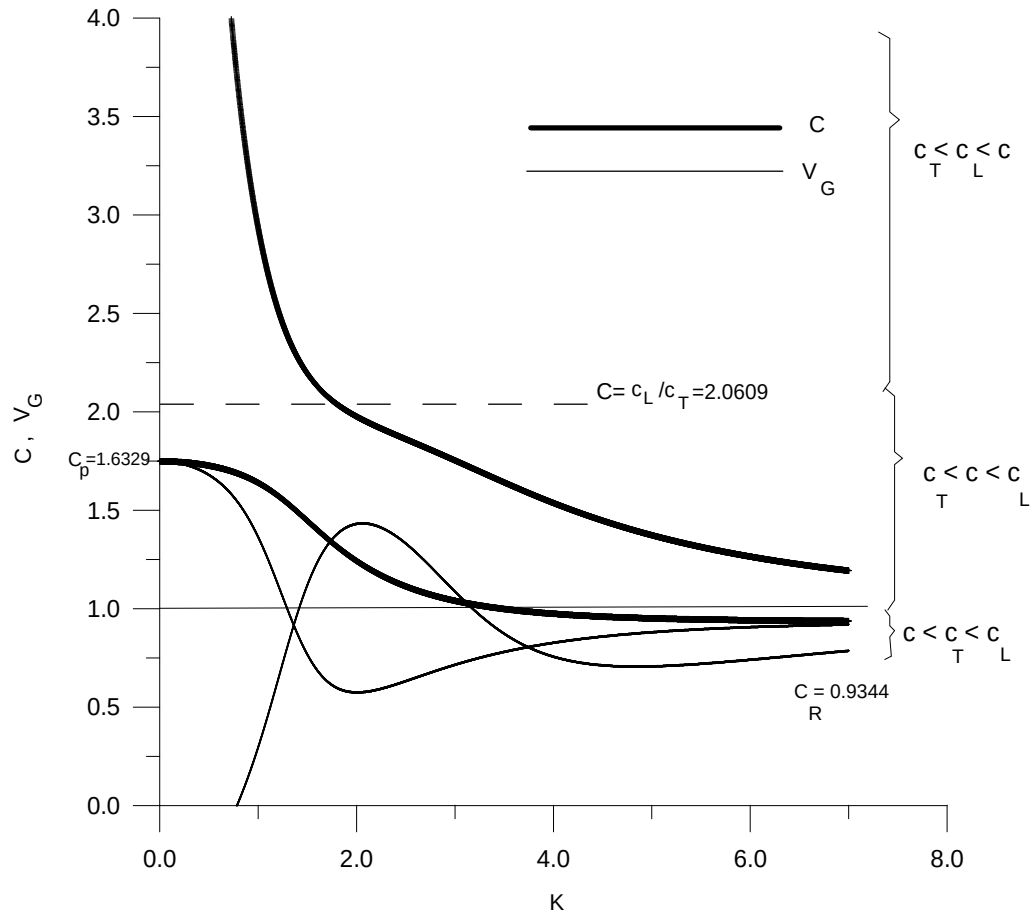
Şekil C.3: Simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



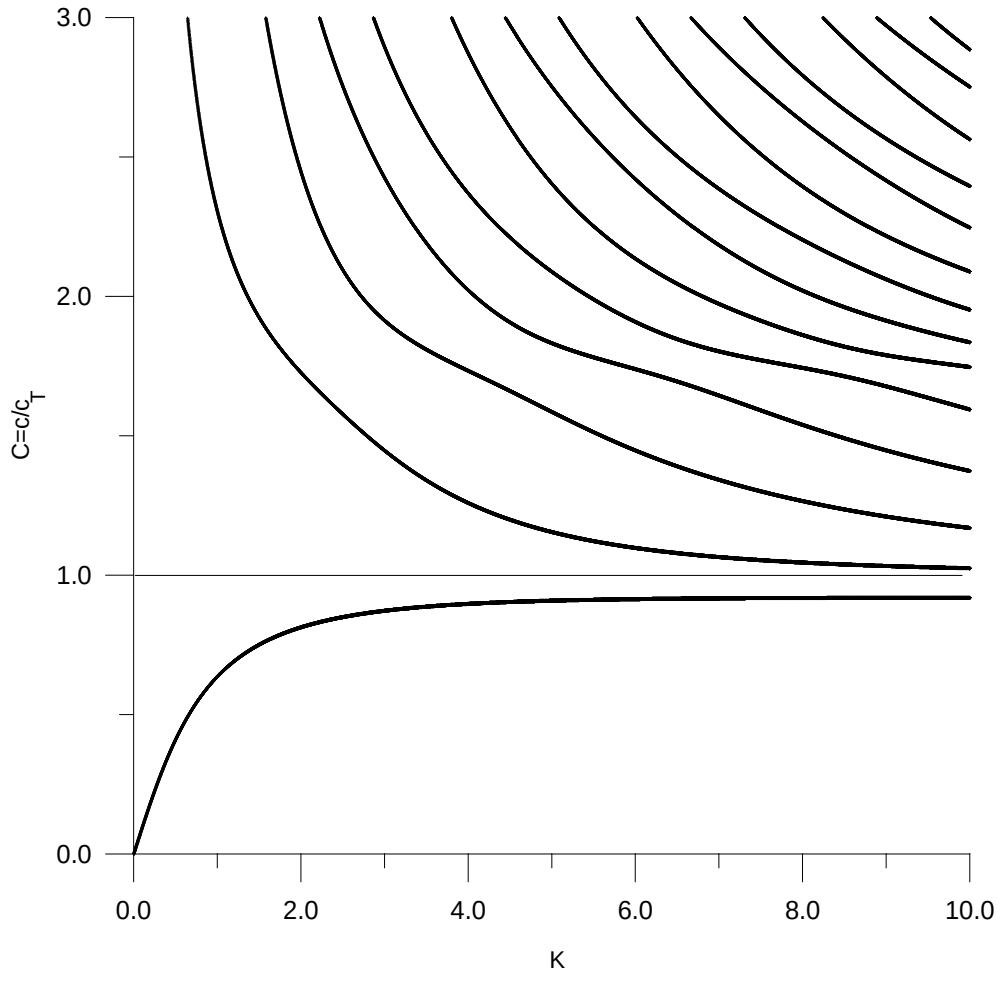
Şekil C.4: Simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



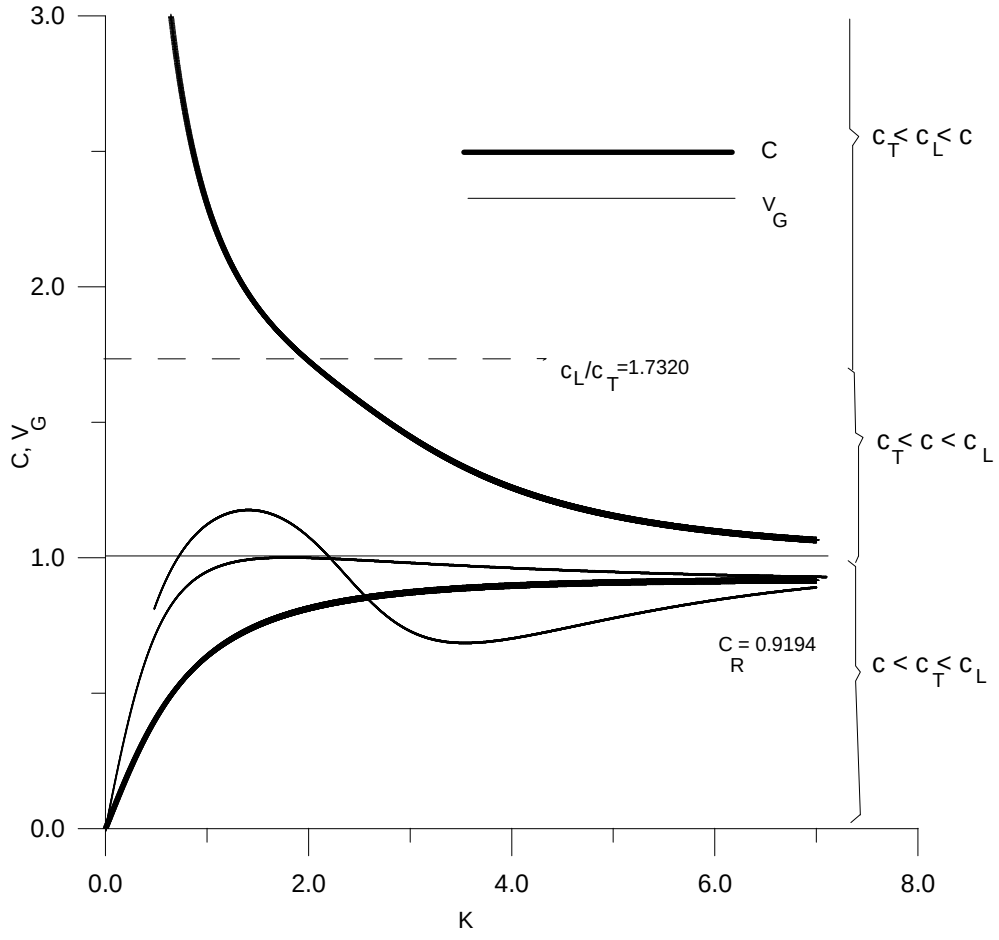
Şekil C.5: Simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



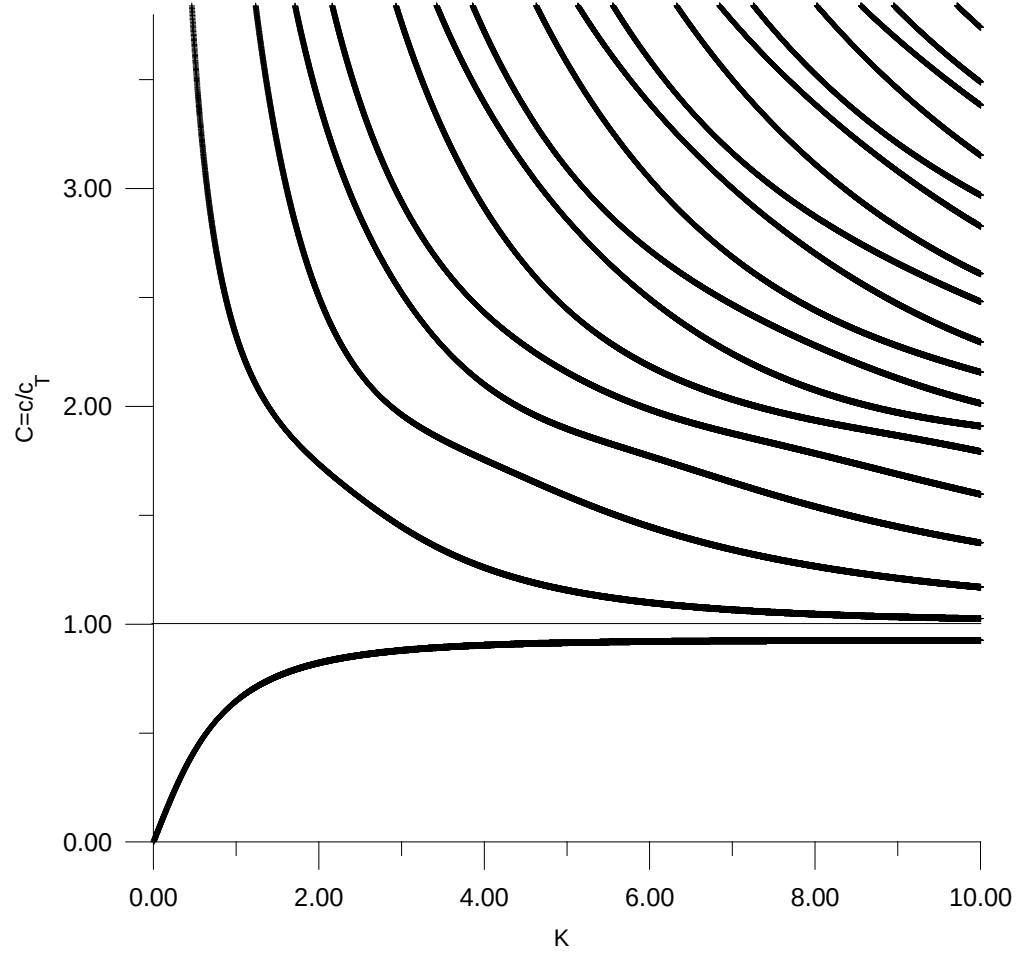
Şekil C.6: Simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



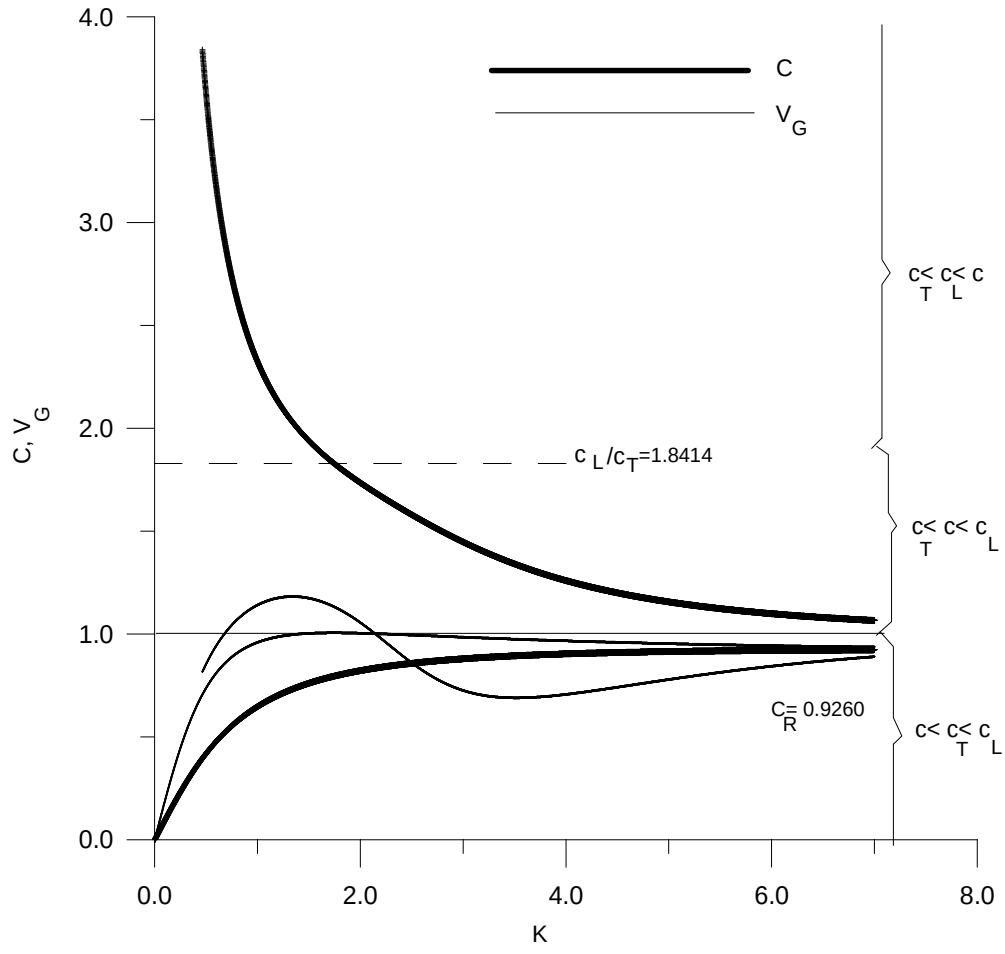
Şekil C.7: Anti-simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



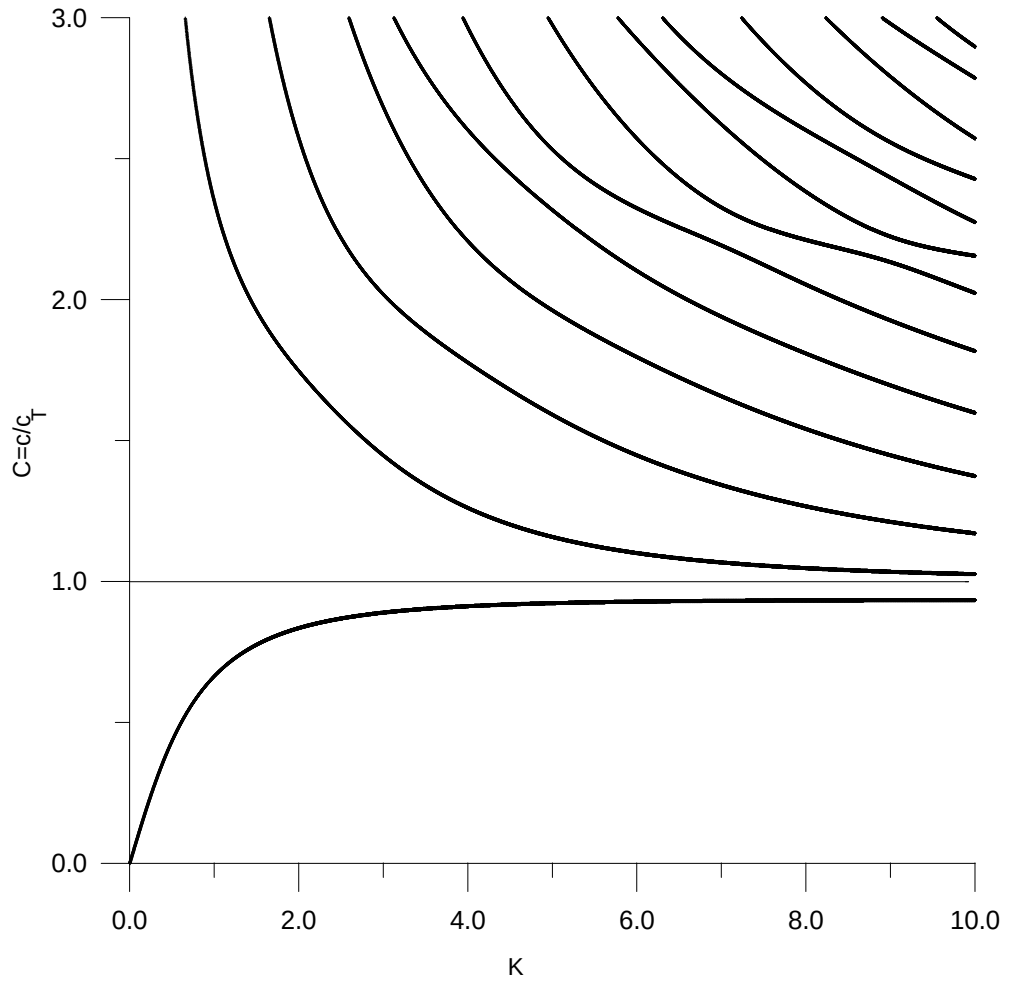
Şekil C.8: Anti-simetrik dalgalarda $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



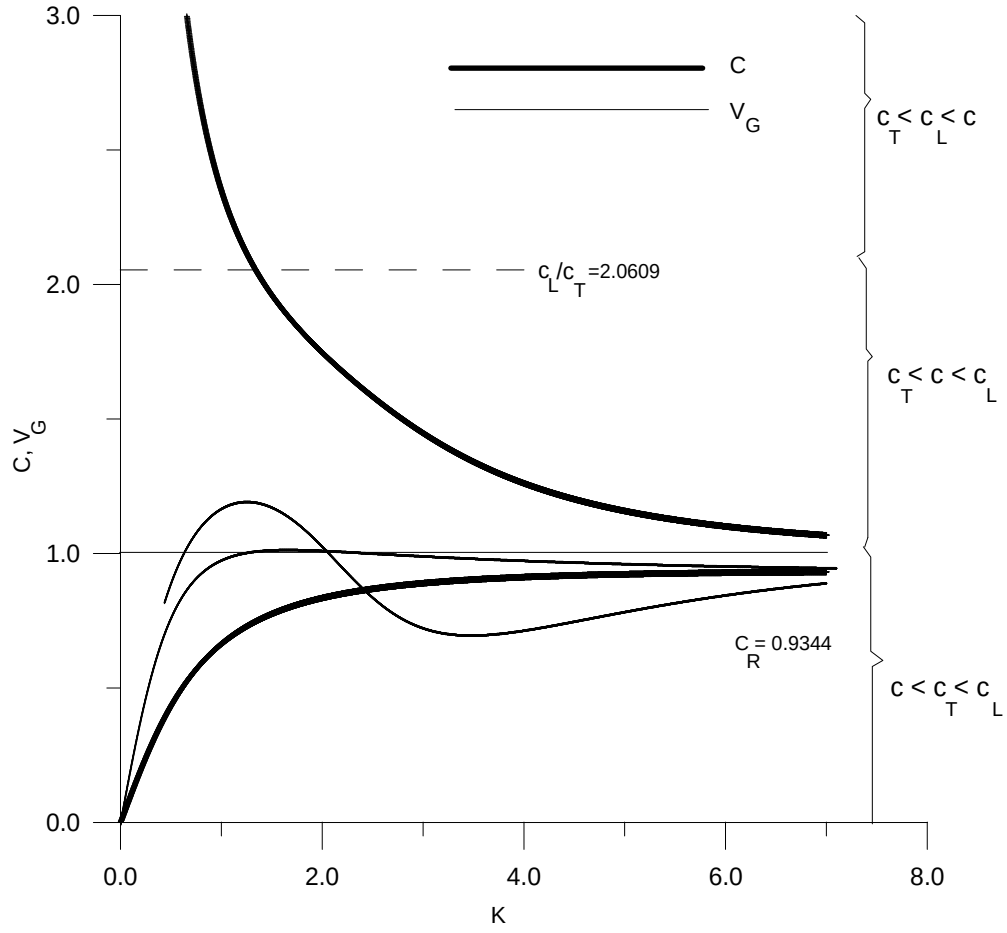
Şekil C.9: Anti-simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



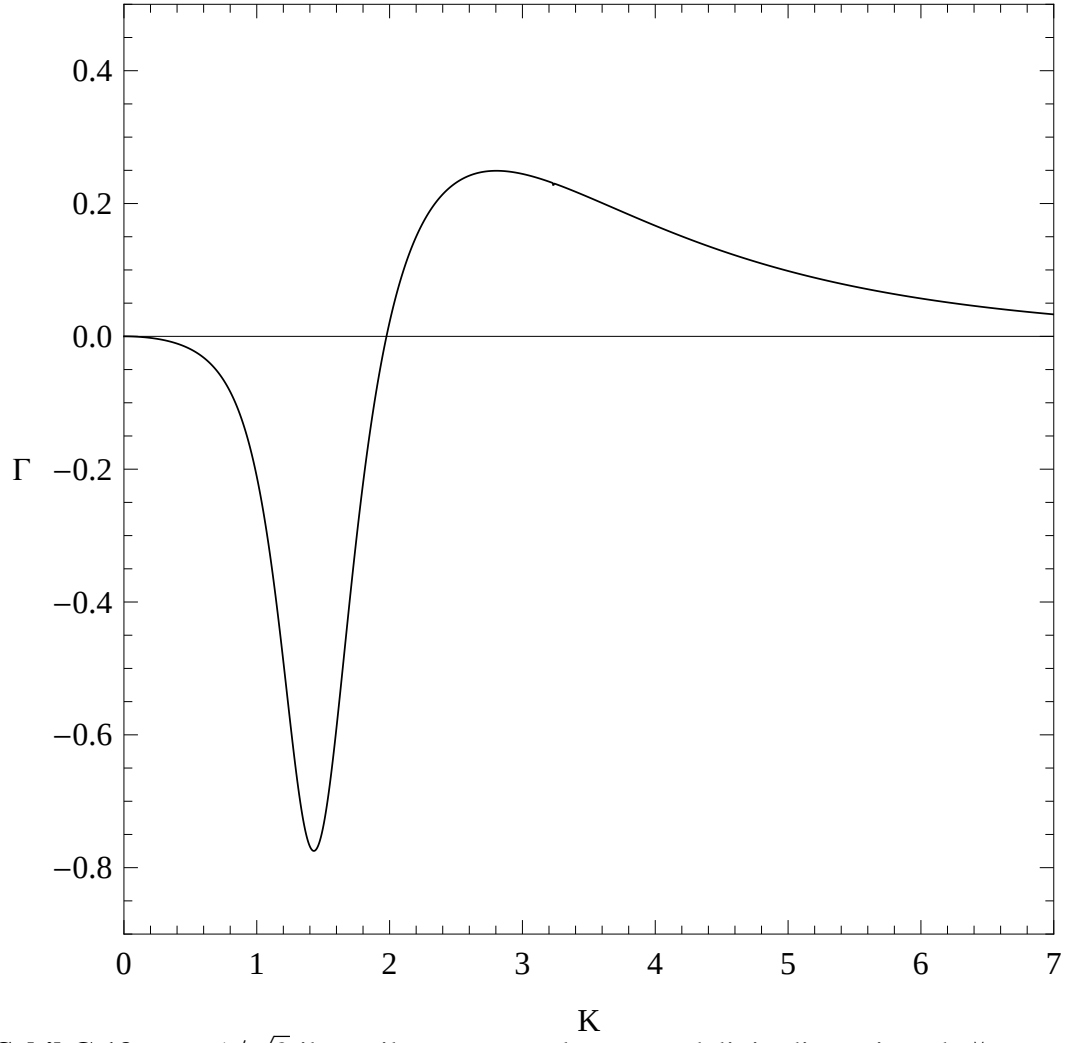
Şekil C.10: Anti-simetrik dalgalarda demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



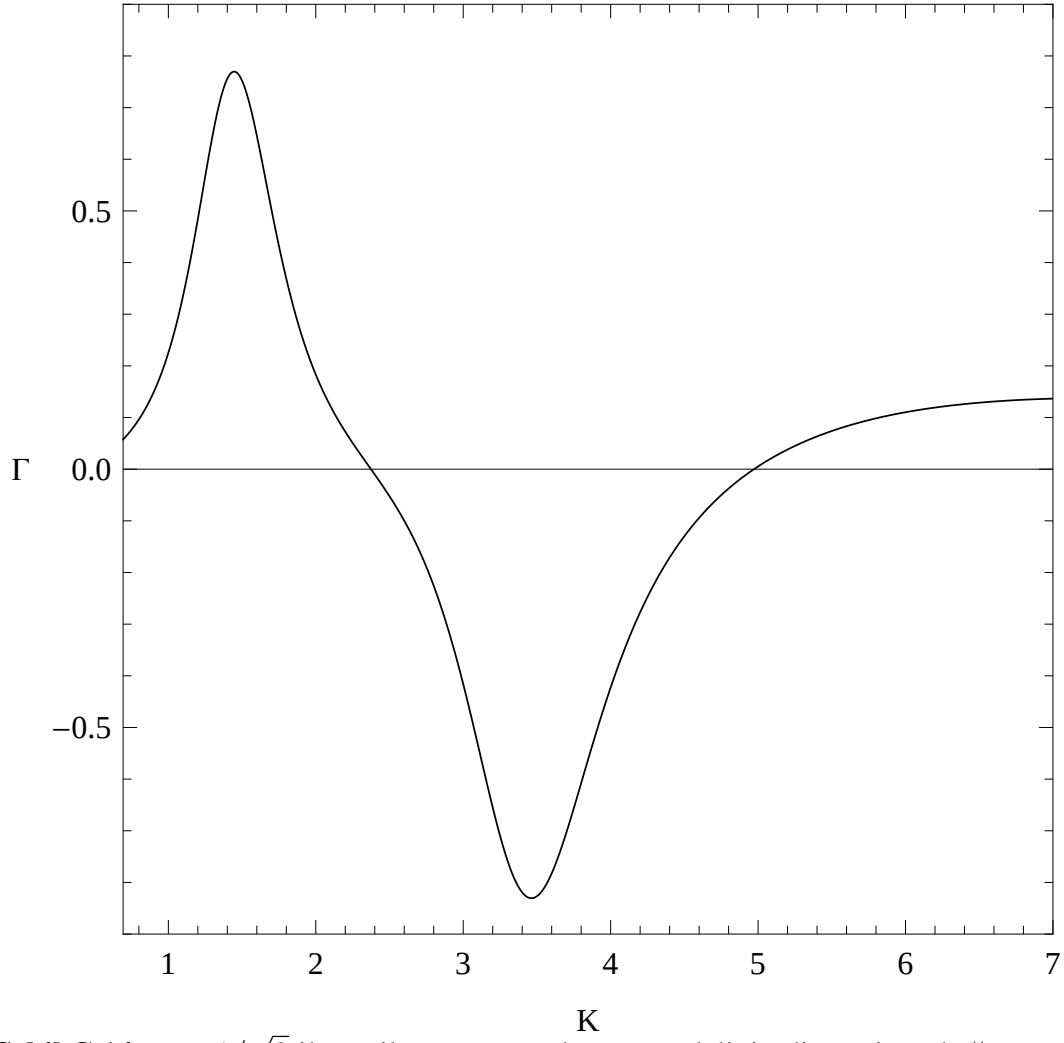
Şekil C.11: Anti-simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



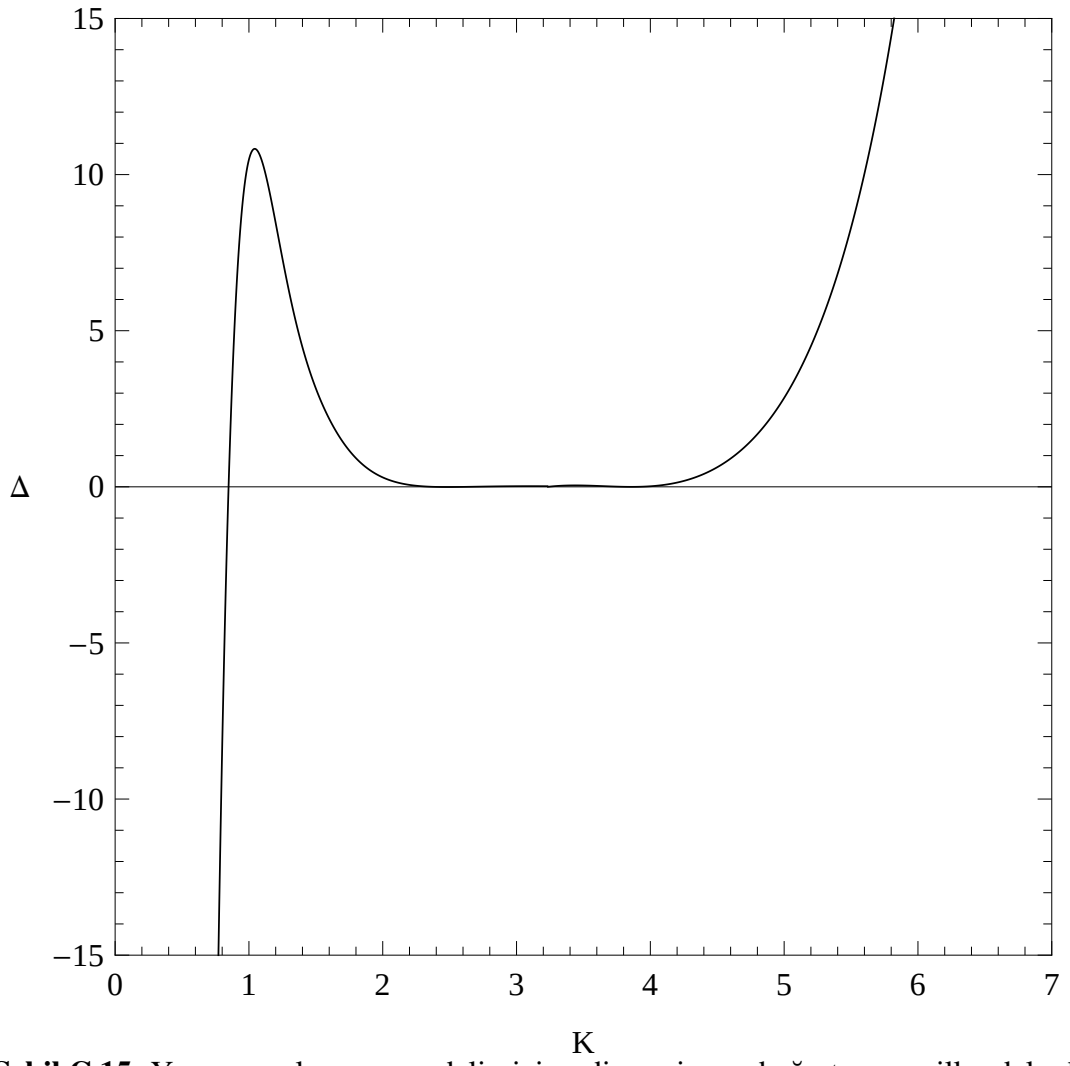
Şekil C.12: Anti-simetrik dalgalarda bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk iki dalına ait boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi



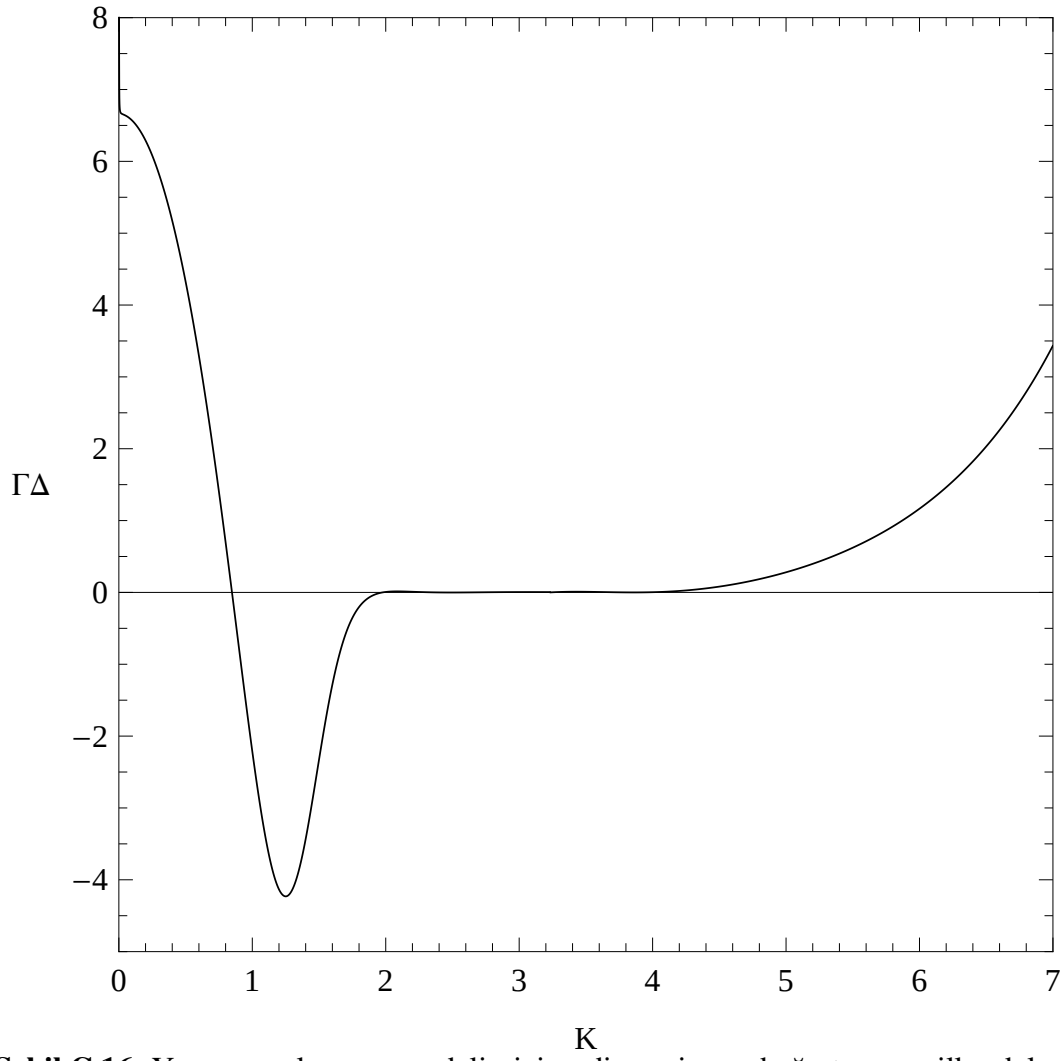
Şekil C.13: $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



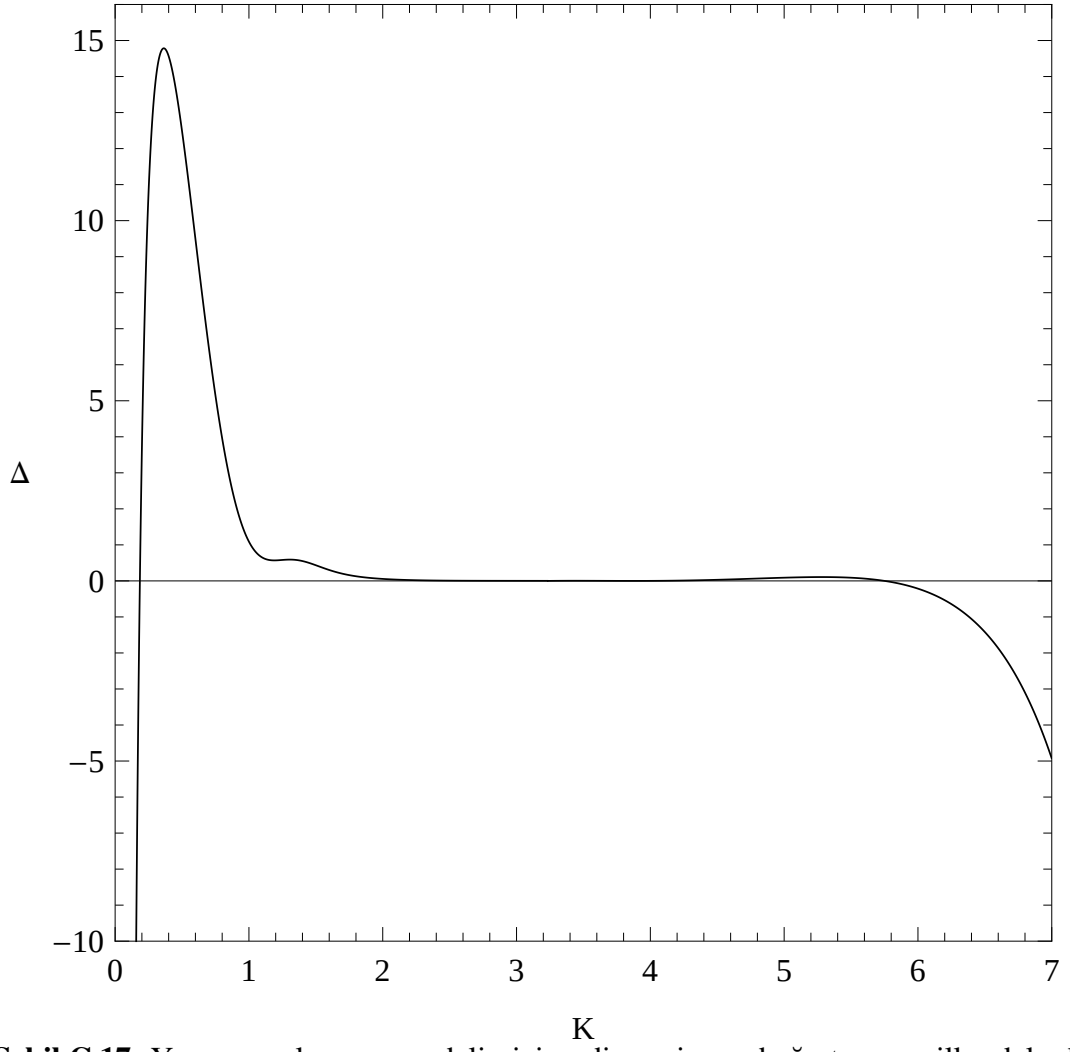
Şekil C.14: $m = 1/\sqrt{3}$ ile verilen yapay malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



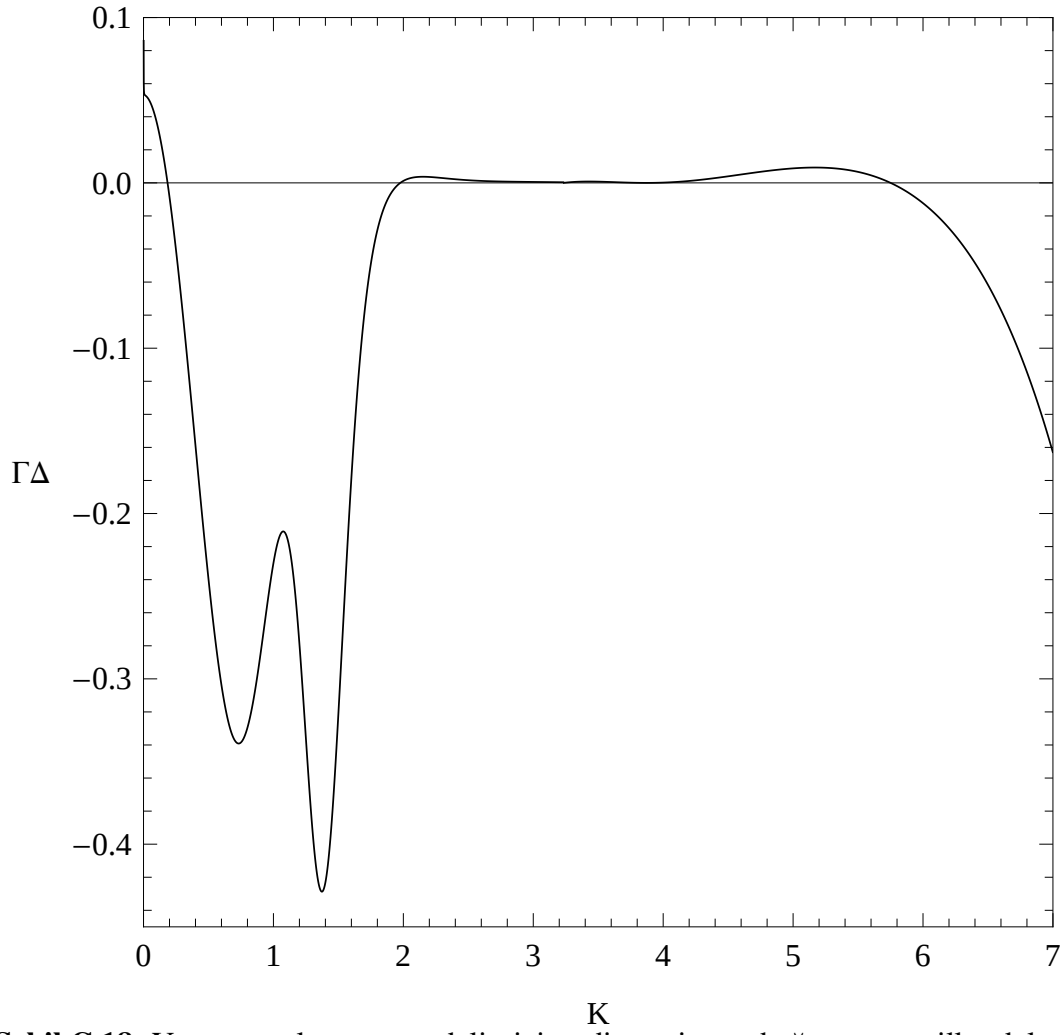
Şekil C.15: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlineer malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



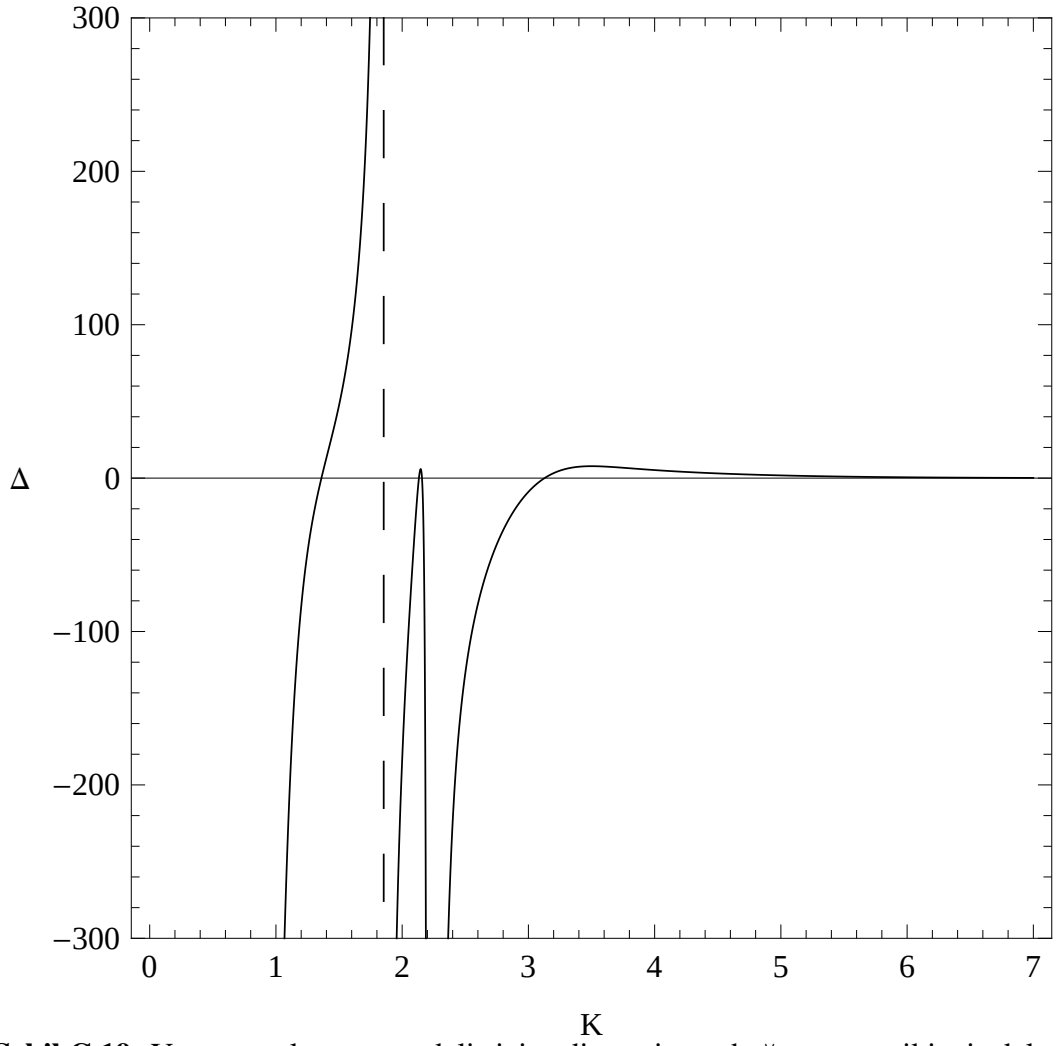
Şekil C.16: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



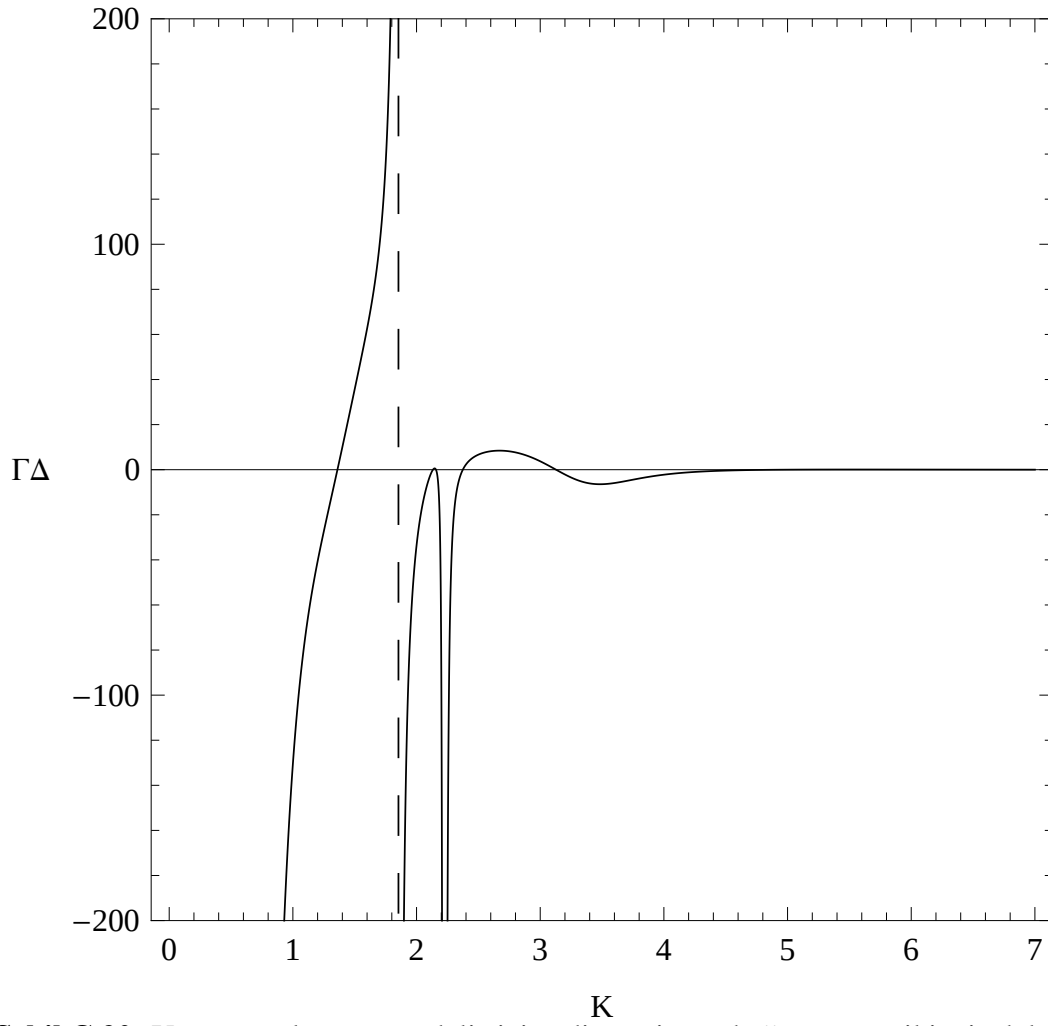
Şekil C.17: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlineer malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



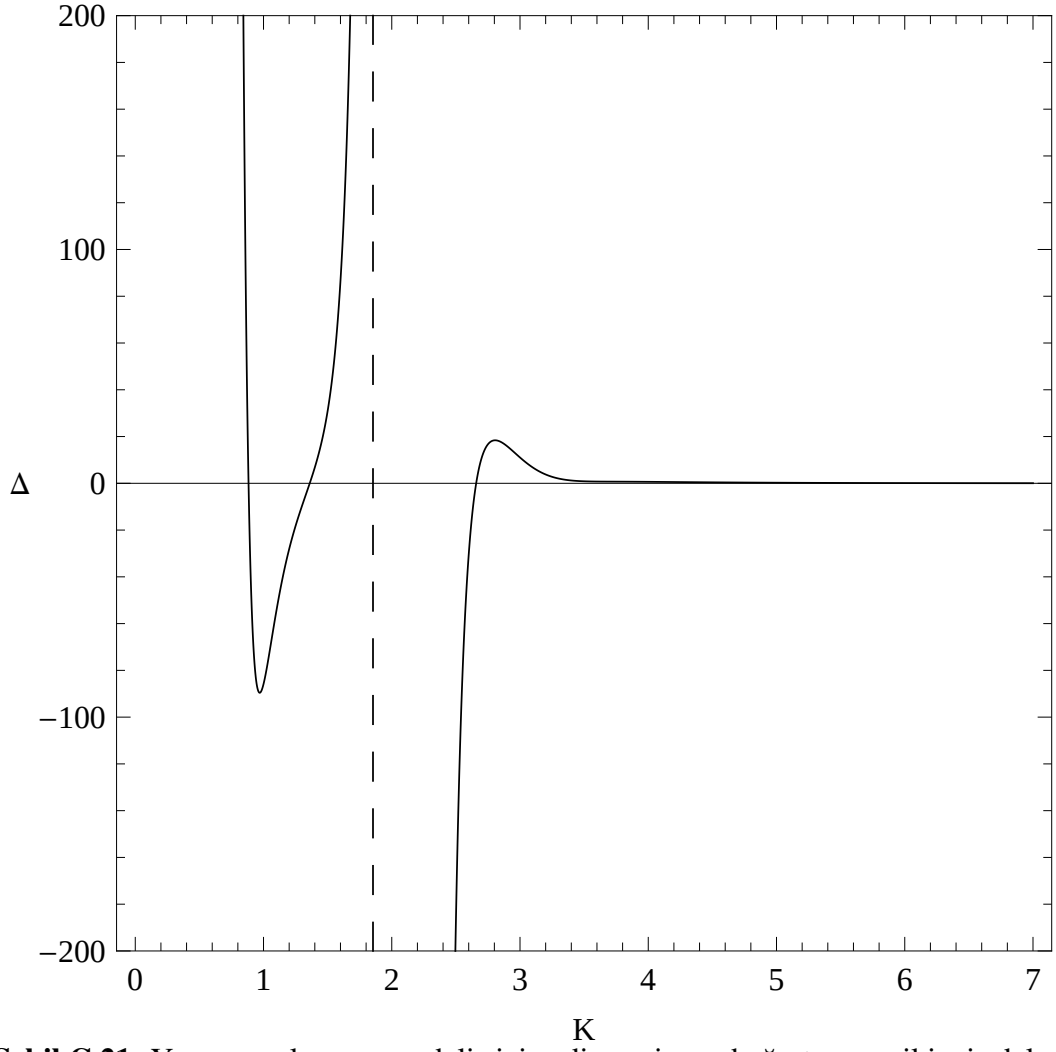
Şekil C.18: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlineer malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



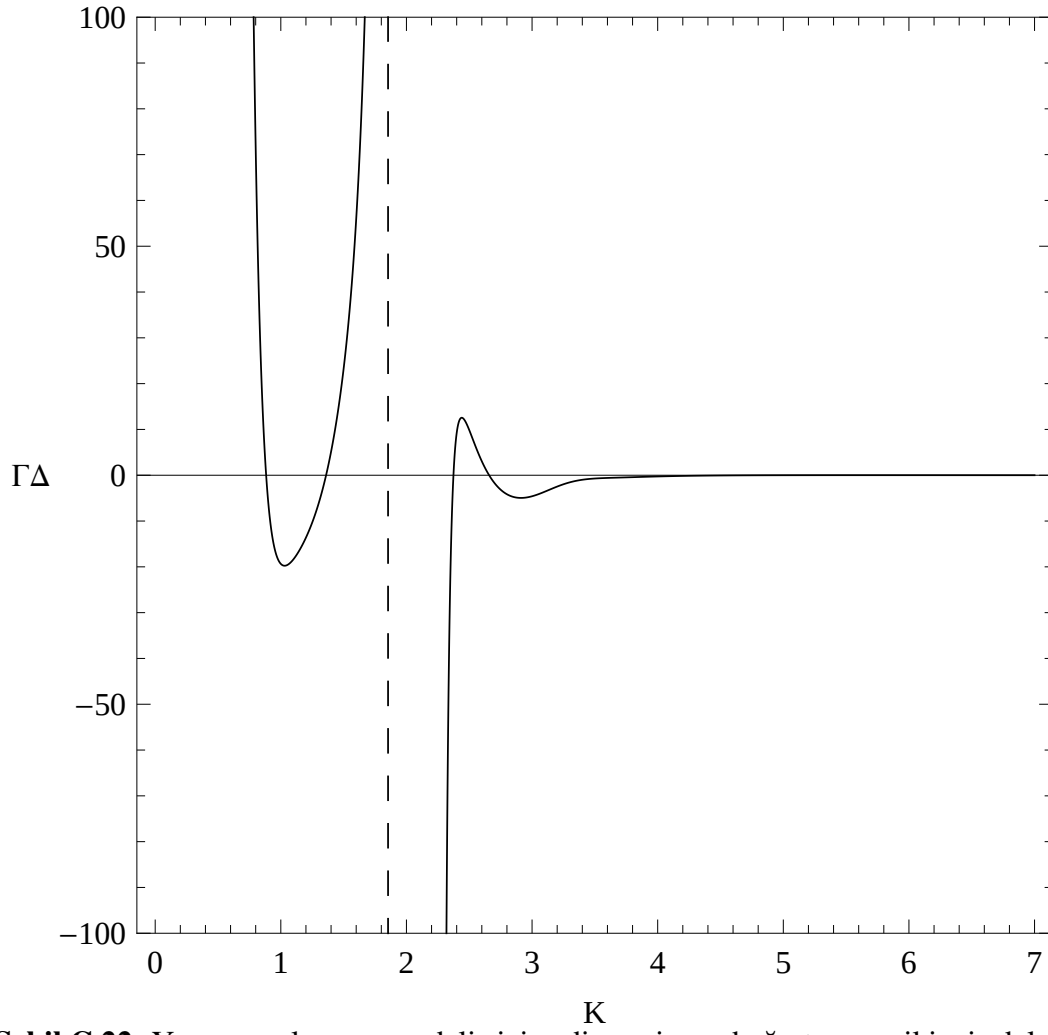
Şekil C.19: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlineer malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



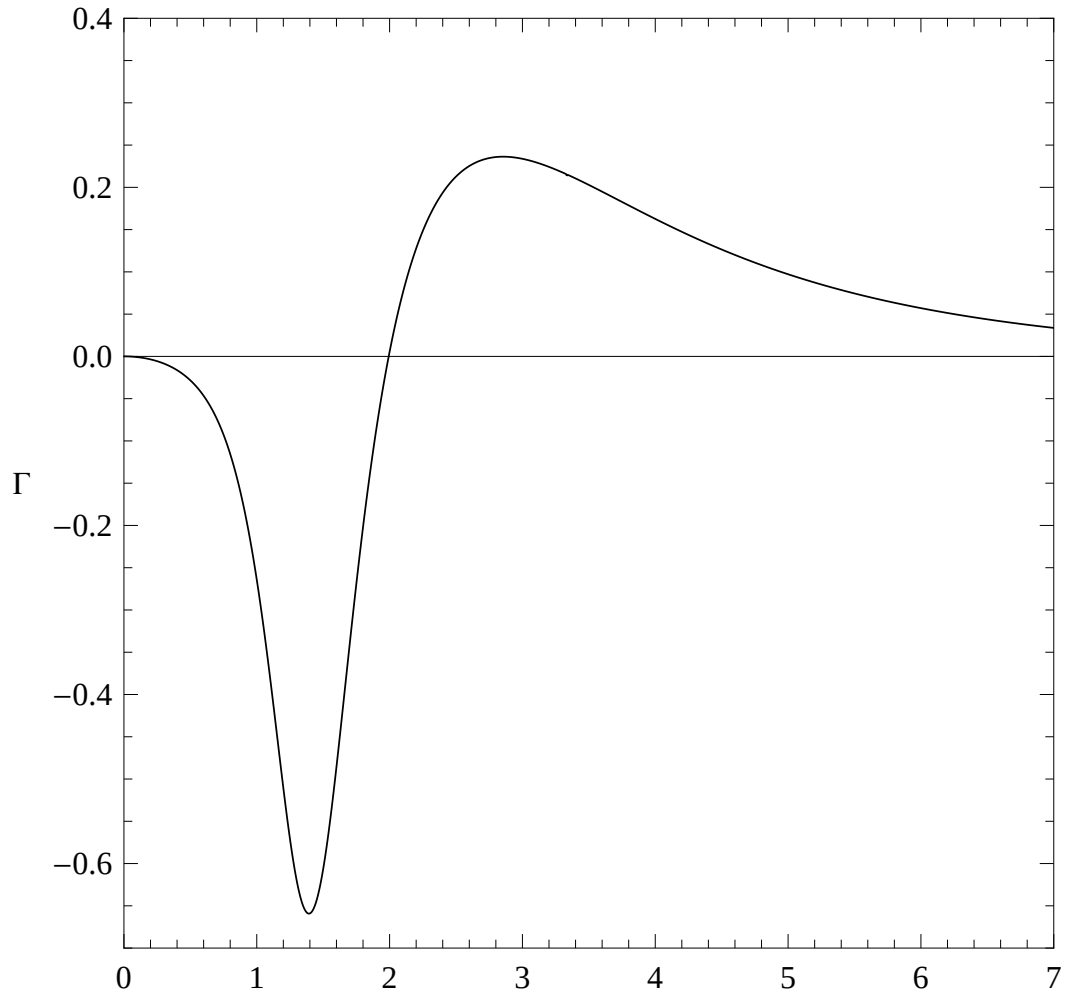
Şekil C.20: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(-1.419432, -7.269751)$ nonlineer malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



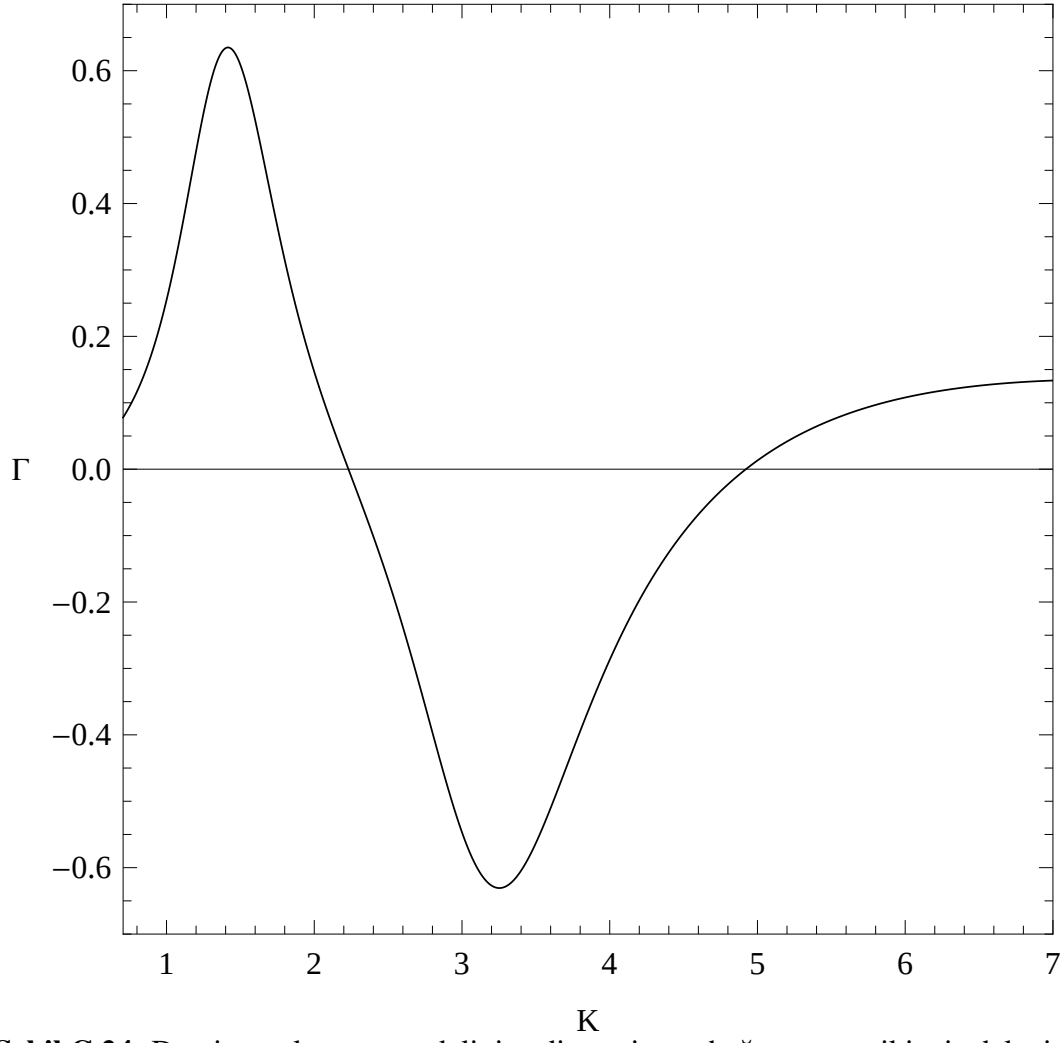
Şekil C.21: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında $(1.419432, 7.269751)$ nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan Δ 'nın $K = kh'$ ya göre değişimi



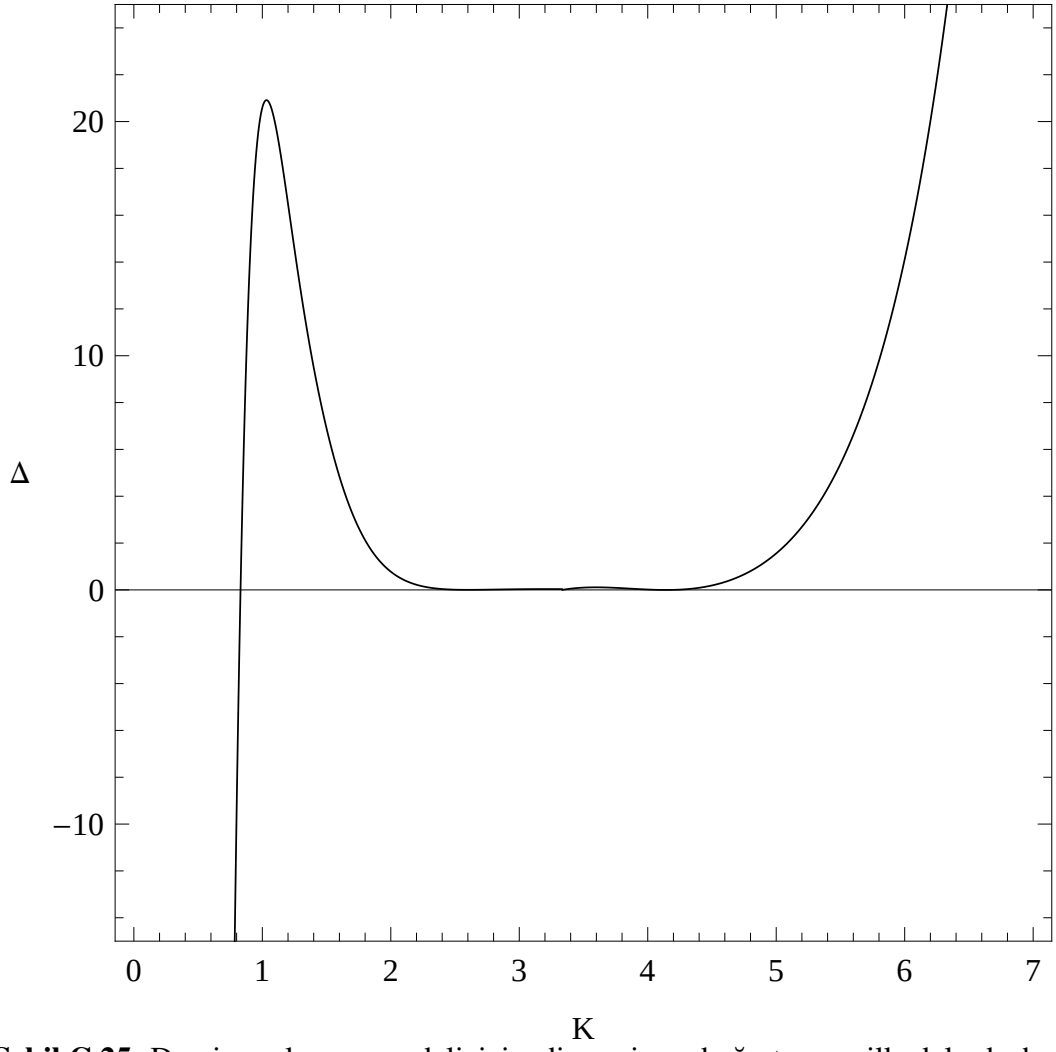
Şekil C.22: Yapay malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında (1.419432, 7.269751) nonlinear malzeme sabitleri için hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



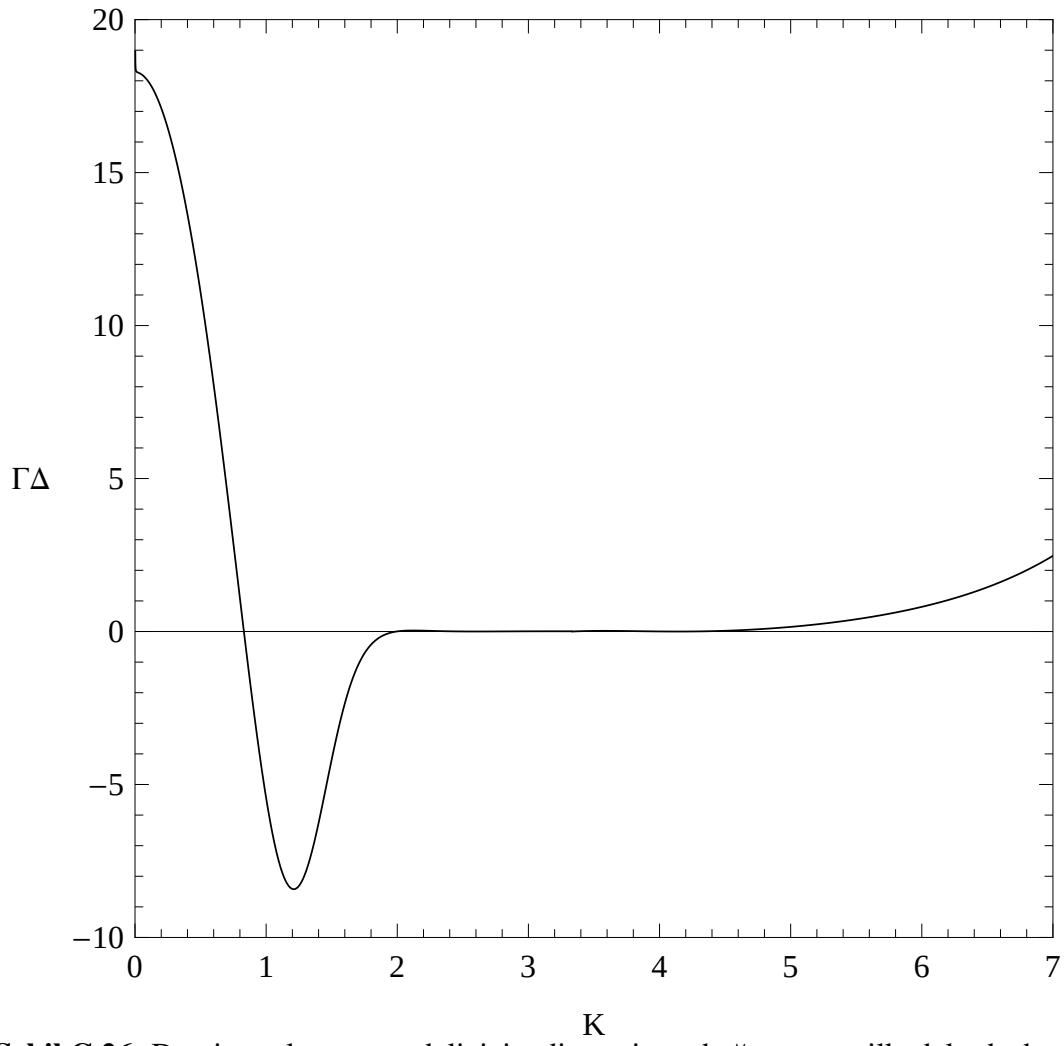
Şekil C.23: Demir malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



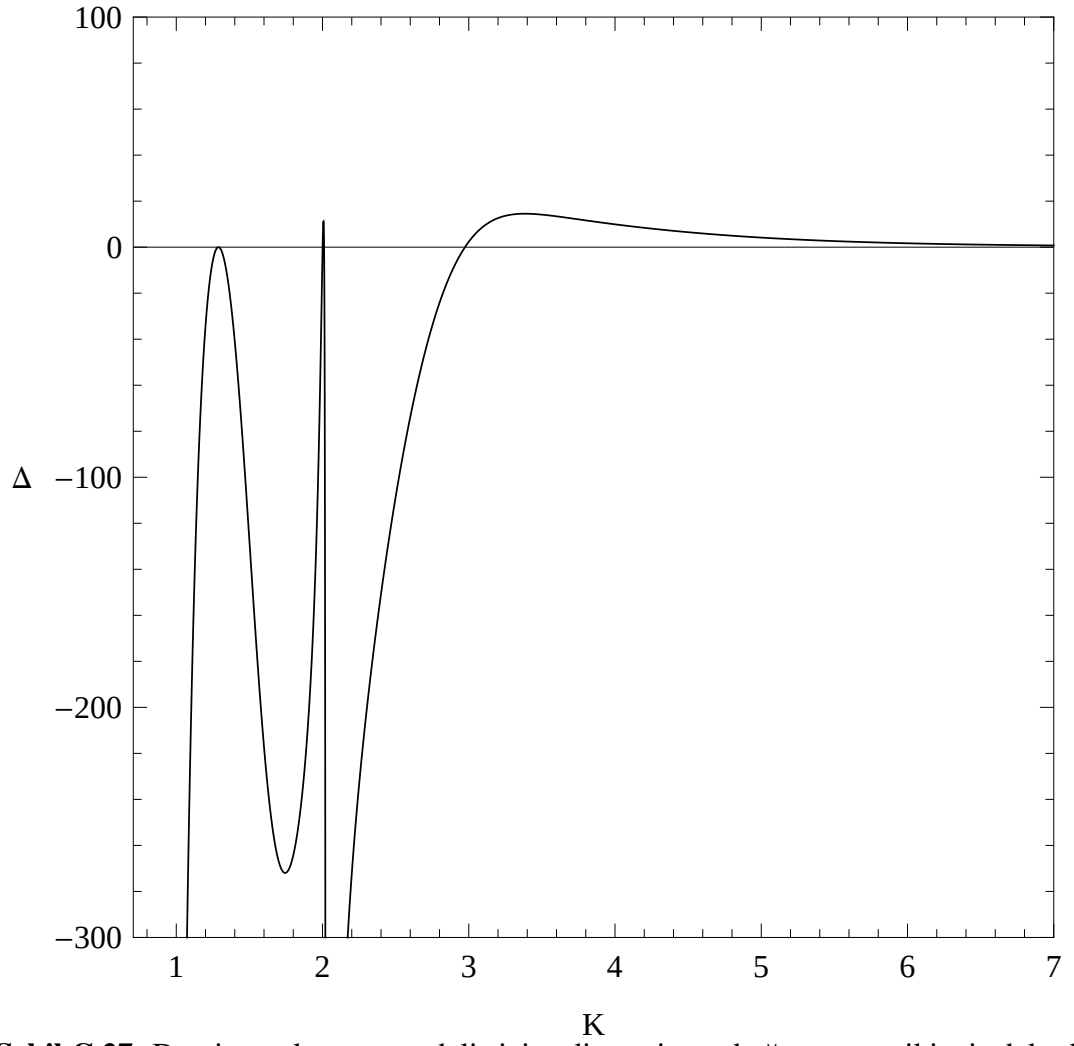
Şekil C.24: Demir malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh'$ ya göre değişimi



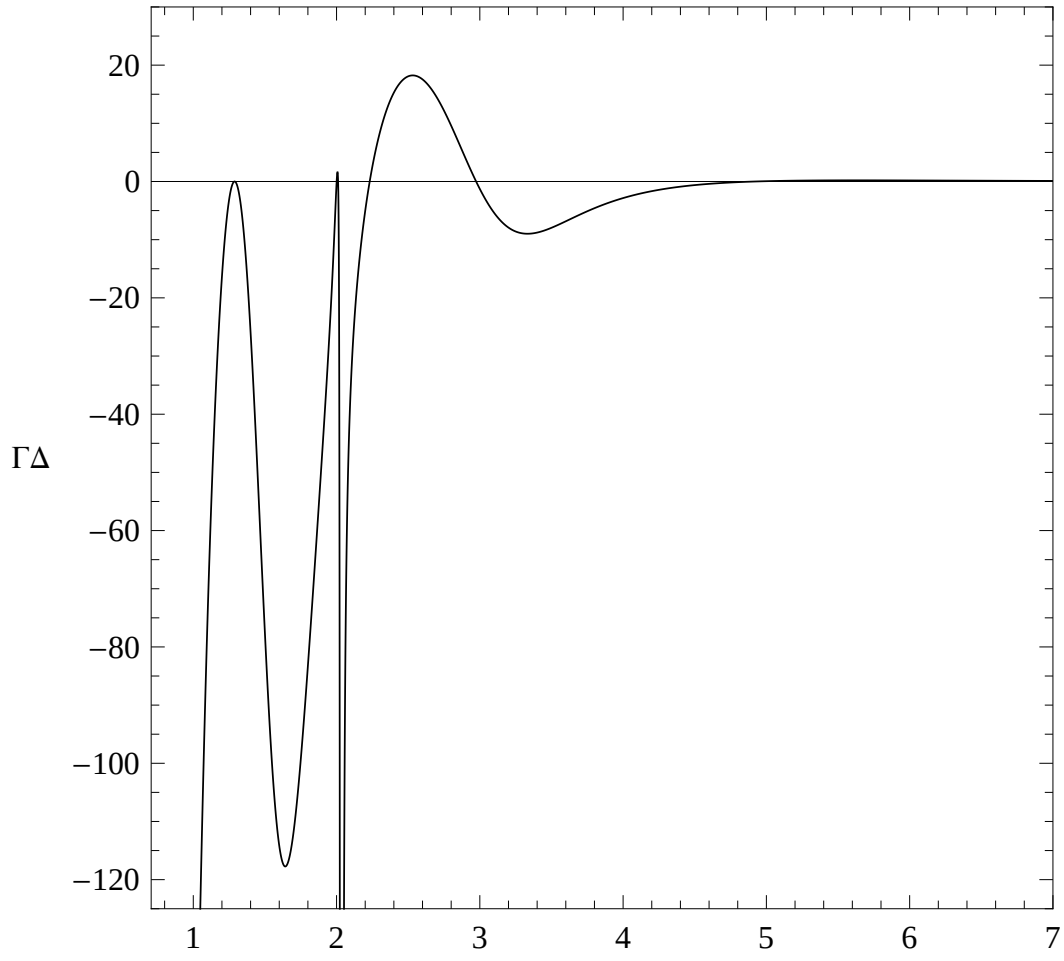
Şekil C.25: Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



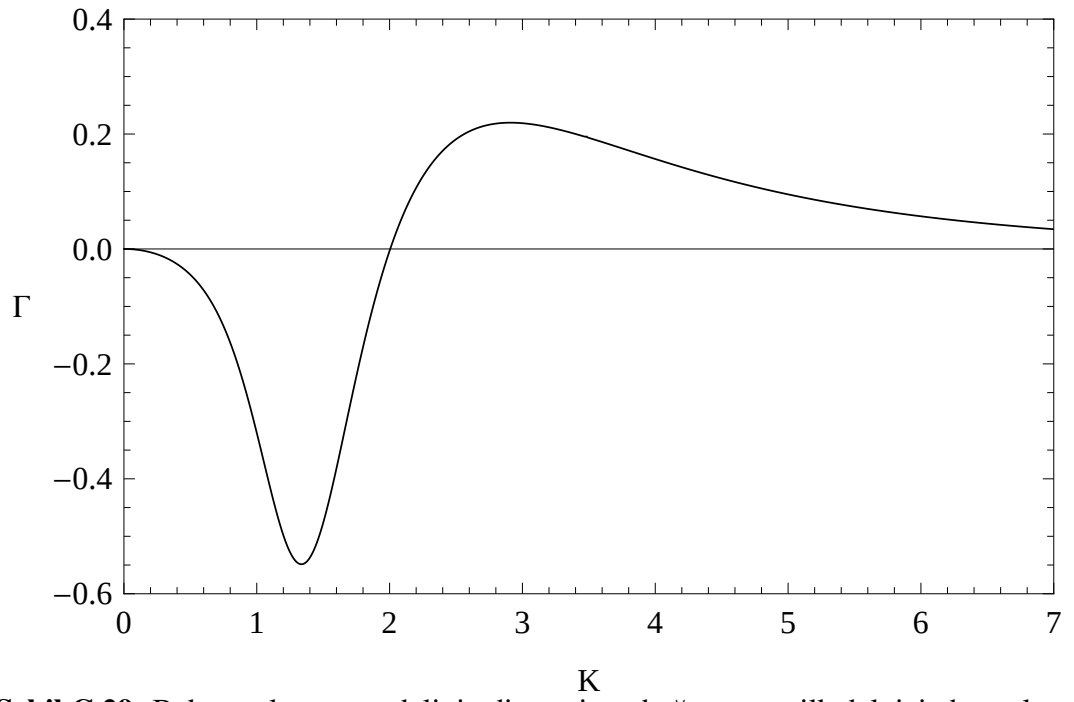
Şekil C.26: Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



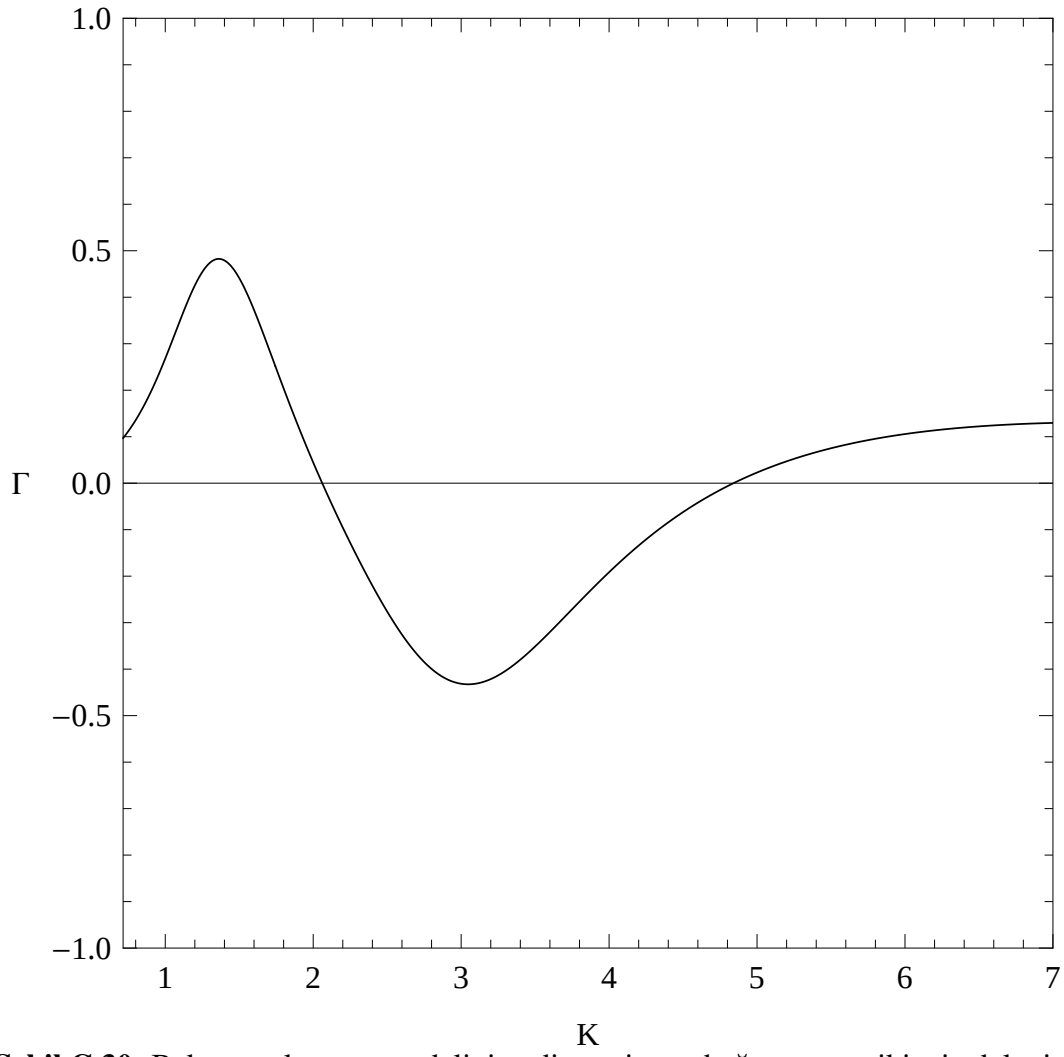
Şekil C.27: Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



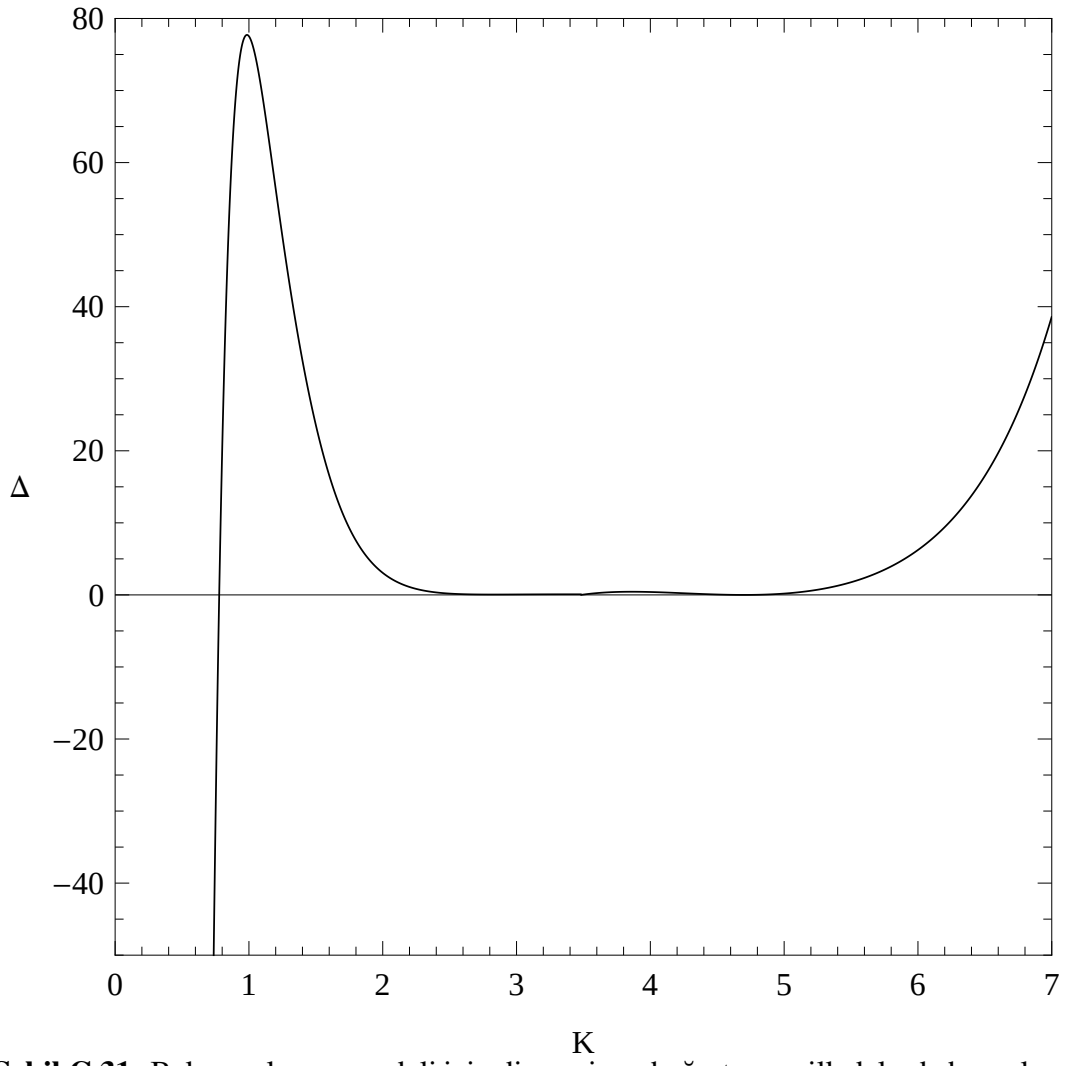
Şekil C.28: Demir malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



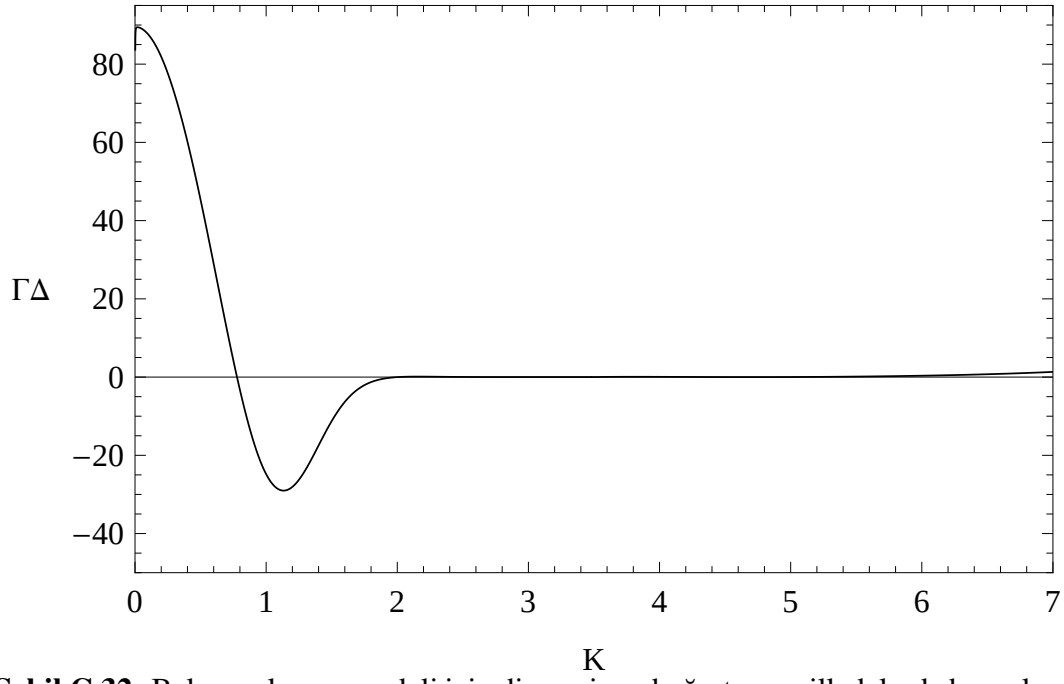
Şekil C.29: Bakır malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ilk dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh'$ ya göre değişimi



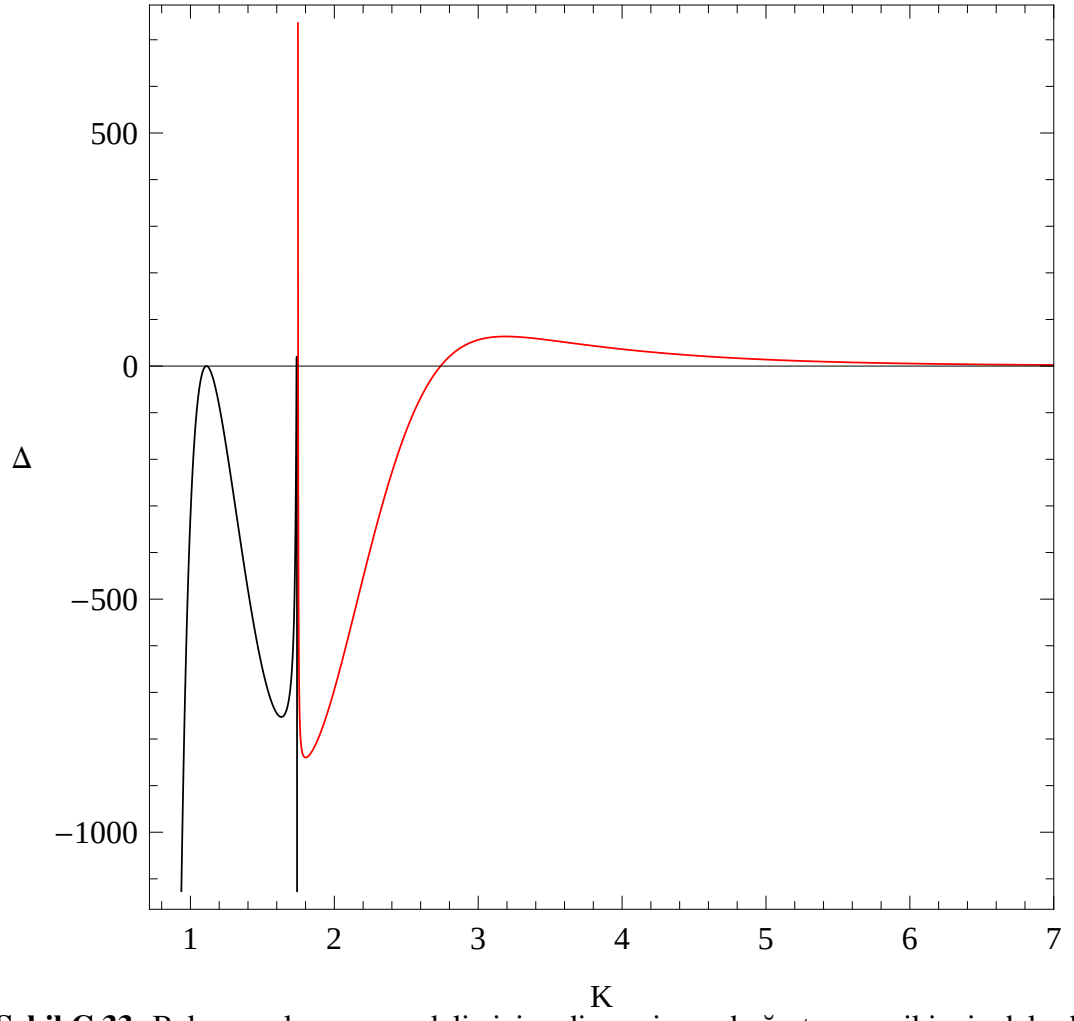
Şekil C.30: Bakır malzeme modelinin dispersiyon bağıntısının ikinci dalı için hesaplanan Γ 'nın $K = kh'$ ya göre değişimi



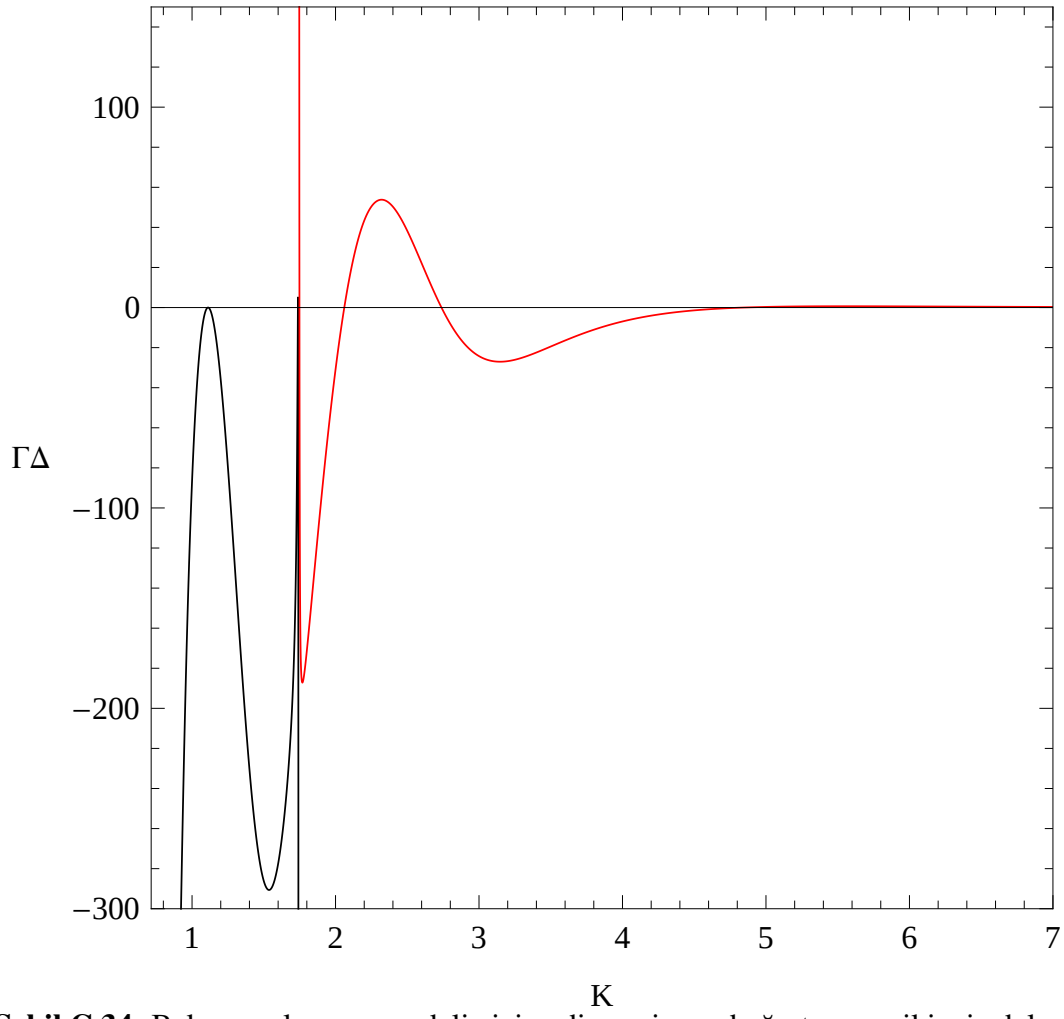
Şekil C.31: Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



Şekil C.32: Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



Şekil C.33: Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan Δ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi



Şekil C.34: Bakır malzeme modeli için dispersiyon bağıntısının ikinci dalında hesaplanan $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ 'ya göre değişimi

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ali DEMİRCİ

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul 23.04.1982

Adres: İTÜ Fen-Ed. Fak. Matematik Mühendisliği Bölümü

E-Posta: demircial@itu.edu.tr

Lisans: İTÜ Matematik Mühendisliği
İTÜ Elektronik Mühendisliği

Y. Lisans: İTÜ Matematik Mühendisliği

Mesleki Deneyim ve Ödüller: Aralık 2005-.... Araştırma Görevlisi, İTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü

Yayın ve Patent Listesi:

▪ **Demirci, A., Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2008). Propagation of Surface SH waves on a half space coated with a nonlinear thin layer, *XXII. International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Adelaide, Avustralya.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

▪ **Demirci, A. ve Teymur, M.** (2011). Nonlinear hiperelastik bir plakta düzlem içi simetrik dalgaların modülasyonu, *XVII. Ulusal Mekanik Kongresi*, 5-9 Eylül, 2011 Elazığ, Türkiye.

▪ **Teymur, M. ve Demirci, A.** (2012). Nonlinear modulation of extensional waves in an elastic layer, *VIII. European Solid Mechanics Conference*, 9-13 July, 2012 Graz, Austria.

