

DAYANIKLI PID KONTROLÖR TASARIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Özgür Cemil ÖZKAN
(504031123)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Haziran 2005

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Leyla GÖREN (İ.T.Ü.)
Doç.Dr. Külmez ÇEVİK (İ.T.Ü.)

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Son yıllarda teknolojinin gelişmesi ve ilerlemesiyle birlikte kontrol sistemlerinin önemi gittikçe artmaya başlamıştır. PID kontrolör günlük hayatta bir çok alanda en çok kullanılan kontrol sistemlerinden biridir. Analiz ve tasarımda kapalı çevrim sistem geçici cevabını aşırı etkileyen kutupları belirlemek ve bunları baskın kutuplar olarak adlandırmak önem taşır. Baskın kutupların istenilen noktalara atanması ve bunun PID kontrolör gibi kullanım alanı çok geniş ve pratik bir kontrolörle gerçekleştirilmesi durum geri beslemesi gibi pratik olmayan yöntemlere karşı oldukça iyi bir alternatiftir. Gerçek hayattaki sistemlerin çoğu, modellenememiş sistem dinamikleri, üretim toleransları, zaman gecikmeleri ve doğrusal olmayan yaklaşıklıklardan kaynaklanan belirsizlikler sebebiyle tam bir doğrulukla modellenememektedir. Bu nedenle pratik uygulamalara yakın olması açısından PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi belirsiz sistemleri de kapsayacak şekilde ele alınmalıdır. Bu tez çalışmasında PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi transfer fonksiyonunda sınırlı (interval) tipte belirsiz parametreler içeren sistemler için ele alınmış ve geliştirilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçların, hem performans hem de dayanıklılık problemine aynı anda bir çözüm sunduğundan dolayı, PID kontrolör ile yapılan uygulamalara önemli bir katkı sağlayacağına inanıyor ve dayanıklı kontrol sistemleri alanında çalışan herkes için bu tez çalışmasının önemli bir kaynak oluşturacağını düşünüyorum. Tezin hazırlanmasında değerli katkılarından ve desteğinden dolayı danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ'e ve destek, güven ve her türlü yardımlarından dolayı çok şey borçlu olduğum aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2005

Özgür Cemil ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

KISALTMALAR	iv
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. ORANSAL KONTROLÖR İLE BÖLGESEL KARARLILIĞIN GARANTİ EDİLMESİ	5
2.1. Oransal Kontrolör ve Bölgesel Kararlılık Problemi	5
2.2. Lineer Sistemlerin Hurwitz Kararlılığı	9
2.3. İki ve Üç Serbest Parametrelili Kontrolörler ile Kararlılığın Garanti Edilmesi	17
3. KARARLILIĞI SAĞLAYAN PID KATSAYILARININ HIZLI EŞKİLDE HESAPLANMASI	22
3.1. PID Kontrolörler İçin Kararlılık Bölgeleri	22
3.2. Kd-Ki Düzleminde Kararlı Bölgelerin Belirlenmesi	26
3.3. Kararlılığı Sağlayan Kp Aralığının Belirlenmesi	27
4. PID KONTROLÖR İLE BASKIN KUTUP ATAMA	30
4.1. PID Kontrolör İle Kapalı Çevrim Baskın Kutupların Atanması	33
4.2. Baskın Olmayan Kutupların Sınırlandırılması	37
5. BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN PID KONTROLÖR İLE BASKIN KUTUP ATAMA	46
5.1. Belirsiz Sistemler ve Belirsiz Sistemler İçin Kutup Atama Kavramı	46
5.2. Belirsiz Sistemler İçin Kararlılık ve Dayanıklılık Testleri	48
5.3. Belirsiz Sistemler İçin PID Kontrolör ile Baskın Olmayan Kutupların Sınırlandırılması	50
5.4. Belirsiz Sistemler İçin Baskın Kutupların Sınırlandırılması	51
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	70
KAYNAKLAR	72
EKLER	74
ÖZGEÇMİŞ	84

KISALTMALAR

P	: Proportional Control
PI	: Proportional Integral Control
PD	: Proportional Derivative Control
PID	: Proportional Integral Derivative Control

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. r_i değerlerinin hesaplanması.....	15
Tablo 2.2. u_i değerleri ve kararlılığı sağlayan aralıklar.....	15
Tablo 4.1. (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri.....	44
Tablo 5.1. Birinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	57
Tablo 5.2. İkinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	58
Tablo 5.3. Üçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	58
Tablo 5.4. Dördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	59
Tablo A.1. Birinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri	74
Tablo A.2. İkinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	75
Tablo A.3. Üçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	75
Tablo A.4. Dördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	76
Tablo A.5. Beşinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	77
Tablo A.6. Altıncı köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	77
Tablo A.7. Yedinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	78
Tablo A.8. Sekizinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	78
Tablo A.9. Dokuzuncu köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	79
Tablo A.10. Onuncu köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	79
Tablo A.11. Onbirinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	80
Tablo A.12. Onikinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	81

Tablo A.13.	Onüçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	81
Tablo A.14.	Ondördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri	82
Tablo A.15.	Onbeşinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	82
Tablo A.16.	Onaltıncı köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri.....	83

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : PID kontrolör	1
Şekil 2.1 : Oransal kontrolör ile geri besleme	5
Şekil 2.2 : Kompleks düzlemde D bölgeleri	6
Şekil 2.3 : $-0.79 < K < 2.5$ aralığı için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı ...	16
Şekil 2.4 : $-0.79 < K < 2.5$ aralığı için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı ...	16
Şekil 2.5 : PI kontrolör	17
Şekil 2.6 : α açısı ve (K_p, K_i) ilişkisi	18
Şekil 2.7 : Kararlılığı sağlayan PI katsayıları	19
Şekil 2.8 : α açısı ve (K_d, K_i) ilişkisi	20
Şekil 2.9 : Kararlılığı sağlayan PID parametreleri	21
Şekil 3.1 : K_d - K_i düzleminin bölgelere ayrılması	25
Şekil 3.2 : K_d - K_i düzlemindeki kararlılık bölgeleri için kararsız kutup sayıları	27
Şekil 3.3 : Kararlılığı sağlayan PID katsayıları	28
Şekil 4.1 : Baskın olan ve olmayan kutuplara ilişkin s-düzlemi bölgeleri ...	31
Şekil 4.2 : Baskın ve baskın olmayan kutuplar	32
Şekil 4.3 : $p(s-6.5)$ için kök-yer eğrisi	41
Şekil 4.4 : $p(s-10)$ için kök-yer eğrisi	42
Şekil 4.5 : $p(s-7)$ için kök -yer eğrisi	42
Şekil 4.6 : Sistem birim basamak yanıtı	45
Şekil 5.1 : İki belirsiz parametreye sahip bir sistemin parametre kutusu	47
Şekil 5.2 : Belirsiz sistem kapalı çevrim kontrolü	49
Şekil 5.3 : Kutuplar arasındaki uzaklığa dayalı performans ölçütü	53
Şekil 5.4 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki	60
Şekil 5.5 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki	60
Şekil 5.6 : Mümkün olan bütün bozulmalar için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı	61
Şekil 5.7 : Nominal sistem birim basamak cevabı	62
Şekil 5.8 : Mümkün olan bütün bozulmalar için birim basamak cevapları ...	62
Şekil 5.9 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki	66
Şekil 5.10 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki	67
Şekil 5.11 : Mümkün olan bütün bozulmalar kapalı çevrim sistem kutup dağılımı	67
Şekil 5.12 : Nominal sistem birim basamak cevabı	68
Şekil 5.13 : Mümkün olan bütün bozulmalar için birim basamak cevapları ...	68

SEMBOL LİSTESİ

K_P	: Oransal kazanç katsayısı
K_i	: İntegral kazanç katsayısı
K_D	: Türevsel kazanç katsayısı
ω	: Açısal frekans
ω_n	: Sistem doğal frekansı
ν	: Karesel frekans değişkeni
ζ	: Baskın kutuplara ilişkin sönüm katsayısı
$\mathbf{q}$	: Belirsiz parametre vektörü
r	: Belirsiz parametre vektörü boyutu
Q	: Belirsiz parametre kutusu
$\mathbf{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\mathbf{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$G(s)$	: Açık çevrim sistem transfer fonksiyonu
$G_c(s)$	: Kapalı çevrim transfer fonksiyonu
$G_o(s)$	: Nominal sistem transfer fonksiyonu
$p_c(s)$	: Kapalı çevrim sistem karakteristik polinomu
$p_d(s)$	: Baskın kutuplara ilişkin polinom
$p_e(s)$	: Baskın olmayan kutuplara ilişkin rezidü polinomu
σ	: Baskın olmayan kutupların sınırlandırılacağı nokta

DAYANIKLI PID KONTROLÖR TASARIMI

ÖZET

Çalışmanın temel amacı, tek girişli tek çıkışlı ve transfer fonksiyonunda sınırlı tipte belirsiz parametreler içeren belirsiz bir sistem için, tüm sistem ailesi üyelerinin kapalı çevrim baskın iki kutbunu PID kontrolör ile nominal baskın kutuplardan sapma en az olacak şekilde atayacak ve kalan tüm diğer (baskın olmayan) kutupları da sol yarı s-düzleminde belli bir noktanın solunda kalacak şekilde sınırlandıracak bir yöntem geliştirmektir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda genellikle belirli yada belirsiz sistemler için sadece kararlılığı garanti eden PID kontrolör katsayılarının hesabına yönelik yöntemler ortaya konmuştur. Bu tip yaklaşımlar genelde oldukça pratik olmakla ve uygulama aşamasında kullanılmak üzere tasarım serbestliği sağlamakla birlikte dayanıklılığı sağlayan PID kontrolör katsayı kümesinden seçilen kontrolör katsayılarının sistemin zaman tanım bölgesi davranışını ne şekilde etkileyeceği sorusuna cevap vermekte yetersiz kalmaktadırlar.

Bu çalışmada ortaya konan yöntem PID kontrolör ile baskın kutupların atanması probleminde dayanıklılık sorununa çözüm getirmektedir. Baskın kutupların atanmasıyla bir ölçüde garantilenen zaman tanım bölgesi davranışı böylece dayanıklılık kazanmaktadır. Elde edilen sonuçlar daha önce yapılan dayanıklı PID kontrolör tasarımı çalışmaları ile karşılaştırıldığında, yöntem dayanıklılık sorununa çözüm getirmekle beraber baskın kutup atama ile istenilen tasarım kriterlerinin sağlanmasına da olanak vermektedir. Özet olarak bu çalışmada hem dayanıklılık probleminde bir çözüm getirilmekte hem de sistem zaman tanım bölgesi ile ilgili performans kriterleri nominal dinamiklerden en az sapma olacak şekilde tasarım yapılarak gerçekleştirilebilmektedir.

Bölüm 2’de ortaya koyacağımız yönteme temel oluşturan oransal kazanç ile bölgesel kararlılığın sağlanması yönünde yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların 2 (PI) veya 3 (PID) serbest parametre içeren kontrolörlere genellenmesi hakkında bilgiler verilmiştir.

Bölüm-3’de kararlılığı sağlayan PID katsayılarını hızlı şekilde bulmaya yönelik olan daha önce yapılmış bir çalışma tanıtılmıştır.

Bölüm 4’te belirli parametrelili sistemler için PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi incelenmiştir.

Bölüm 5’de PID kontrolör ile baskın kutup atama problemi çalışmamızın ana hedefi doğrultusunda dayanıklılığı da içerecek şekilde genişletilmiştir ve yöntem uygulama örnekleri üzerinde tartışılmıştır.

Bölüm 6’da ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve ileride bu konuda yapılması gereken çalışmalar tartışılmıştır.

ROBUST PID CONTROLLER DESIGN

SUMMARY

The main objective of this study is to develop a method which assigns two dominant closed loop poles of a single input single output interval system with minimum deviation from the nominal dominant closed loop poles by PID controller, while locating the rest of the closed-loop system poles on the left of prescribed point in the left half s-plane. Previous studies have given methods to determine stabilizing PID parameters for certain or uncertain systems. Despite the fact that such approaches are usually very practical as they provide enough design freedom to be used in the implementation phase, they are not enough to answer the question that how the PID parameters chosen from the parameter space will effect the transient response performance of the closed-loop system.

The new method developed in this study, solves the robustness problem of the pole assignment method by PID controller. This new method not only ensures the robustness against to the uncertain parameters, but also guarantees the transient response performance of the closed-loop system by placing the closed-loop system dominant poles with minimum deviation from the nominal dominant poles. If we compare the results obtained using this new method with the previous results of robust PID controller design studies, we see that this new method not only ensures the robustness, but also guarantees the transient response performance.

In Chapter 2, a method for solving the Hurwitz and regional stabilization problem using P, PI and PID controllers, which will be used as the point of departure of our method, will be introduced.

In Chapter 3, a method for fast calculation of stabilizing PID controllers is introduced

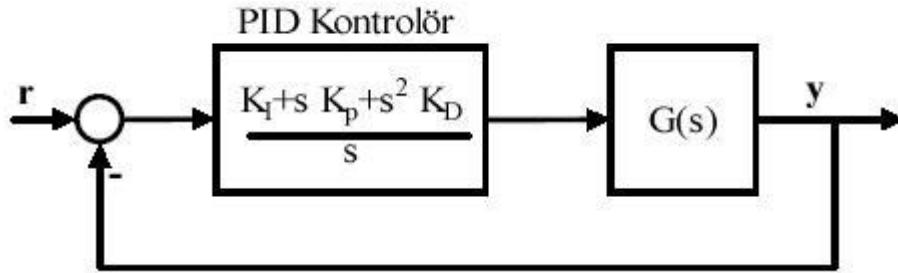
In Chapter 4, a method for dominant pole assignment by PID controller for certain systems is introduced.

In Chapter 5, in the direction of our main objective, the method of dominant pole assignment by PID controller is extended to cover the uncertain systems and robustness problem

Finally in Chapter 6, the results obtained possible and further studies are discussed.

1.GİRİŞ

Günümüzde orantı-integral-türev (PID) tipi kontrolörler pratik hayatta kullanılan kontrolörlerin büyük bir çoğunluğunu oluşturmaktadır [1]. Genel bir PID kontrolör yapısı Şekil 1.1’de görülmektedir.



Şekil 1.1 : PID tipi kontrol

Lineer, zamanla değişmeyen sürekli zaman sistemleri için PID kontrolörü transfer fonksiyonu şu eşitlikle ifade edilir:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (1.1)$$

Burada K_p, K_i ve K_d sırasıyla oransal, integral ve türevsel kazançlardır.

Literatürde bu tip kontrolör tasarımıyla ilgili pek çok kaynağa rastlamak mümkündür [2-4]. Ancak bu yöntemlerin büyük çoğunluğu belli bir başarımlı ölçütünü göz önünde bulundurarak verilen bir sistem için en iyi orantı-integral-türev katsayılarını bulmakla yetinirler.

Son yıllarda verilen bir sistemi kontrol edecek tek bir kontrolör yerine verilen kriterleri sağlayan tüm kontrolörlerin bulunması yönünde bir takım çalışmalar olmuştur[5-11].

Bu yönde yapılan çalışmalarda Shafiei ve Shenton [5] verilen bir sistemi kararlı yapan ve aynı zamanda belirli kazanç ve faz paylarını garantileyen grafik bir yöntem ileri sürmüşlerdir.

Öte yandan Ho ve arkadaşları genelleştirilmiş Hermite-Biehler teoremini kullanarak verilen ölü zamanı olmayan doğrusal bir sistemi Hurwitz anlamında kararlı yapan kazançları bulmak için cebrik bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntemi 2 ve 3 boyutlara genelleyerek PI ve PID tipi kontrolörlerin tasarımına yönelik çalışmalarda bulunmuşlardır [13].

Bu konuda yapılan son çalışmalarda Munro ve Söylemez Nyquist diyagramı ile köklerin yer eğrisi arasındaki ilişkiyi kullanarak kapalı çevrim sistemi kararlı yapan düşük dereceli kontrolör tasarımına yönelik yeni bir yöntem önermişlerdir [10]. Genelliği ve getirdiği çeşitli işlemsel kolaylıklar yüzünden bu son yöntem gelecek vaat etmektedir. Bu yöntemin ölü zamanlı sistemlerin kontrolünde de uygulanabileceği daha önce yapılmış olan çalışmalarda gösterilmiştir. Ayrıca bu yöntem daha sonra iki ve 3 boyutlara genellenerek PI ve PID tipi kontrolörlerin de tasarımında kullanılacak şekilde genelleştirilmiştir. Bu yöntemin uygulanmasıyla verilen bir sistem için kararlılığı garanti eden tüm PD, PI veya PID katsayıları, iki veya üç boyutlu diyagramlar ile kullanıcıya sunulur.

Endüstriyel proseslerin çalışma noktaları çoğu zaman değişkenlik gösterir. Bu değişimler modelleme hataları, parametrik belirsizlikler, non-lineer etkilerden kaynaklanır. Her çalışma noktası için PID parametrelerinin tekrar ayarlanması gerekir. Kendi kendine ayar yapabilen (self-tuning) kontrolörler bu tip problemlere bir çözüm olabilir ve bazı mevcut üretilen kontrolörlerde de bu opsiyon mevcuttur.

Sistem belirsizliklerinden etkilenmeyecek kontrolör tasarlamının diğer bir yolu da dayanıklı kontroldür. Dayanıklılık terimiyle anlatılmak istenen parametrik belirsizliklere rağmen kapalı çevrim sistemin sadece kararlı kalmayacağı, ayrıca önceden öngörülmüş bazı geçici davranışları da mümkün olduğunca az hata ile gerçekleştireceğidir.

Söylemez ve arkadaşları tarafından önerilen yöntemle PID katsayıları dayanıklılık problemini de içerecek şekilde hızlı olarak hesaplanabilmekte ve belirsiz sistemlere de uygulanabilmektedir. Yöntem sabit bir K_p değeri için, sonuçtaki kararlılığı sağlayan PID kontrolör katsayıları kümesinin parametre uzayında konveks çokgenler kümesi oluşturacağı gözlemine dayanır ve önceki yapılan çalışmalarla karşılaştırıldığında bu tip bölgelerin belirlenmesi bu yöntem ile oldukça basit ve daha hızlıdır [11,12].

Verilen kriterleri sağlayan tüm kontrolörler kümesinin bulunması yönündeki yaklaşımlar genelde oldukça pratik olmakla ve uygulama aşamasında kullanılmak üzere tasarım serbestliği sağlamakla birlikte dayanıklılığı sağlayan PID kontrolör katsayı kümesinden seçilen kontrolör katsayılarının sistemin zaman tanım bölgesi davranışını ne şekilde etkileyeceği sorusuna cevap vermekte yetersiz kalmaktadırlar. Bir sistemin zaman tanım bölgesi karakteristiğini belirleyen en önemli unsurlardan birisi kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarıdır. Baskın kutupların konumuna bakılarak sistemin doğal frekansı ve sönüm oranı gibi önemli karakteristikleri belirlenebilir.

Geçtiğimiz yıllarda parametreleri belirli bir sistem için PID kontrolör ile kapalı çevrim sistemin baskın iki kutbunu istenilen noktalara yerleştiren ve kalan (baskın olmayan) bütün kutupları da sol yarı s-düzleminde belli bir noktanın solunda kalacak şekilde sınırlandıran bir yöntem ortaya konmuştur [14]. Bu yöntem ile sistem baskın kutuplarının istenilen yerlerde konumlandırılması, yani sistem performansı açısından önceden öngörülen birçok tasarım kriterinin sağlanması mümkün olmaktadır.

Belirsiz sistemler için bu yöntem dayanıklılık sorununu da ele alarak genişletilmek istendiğinde kabul edilebilir bir kapalı çevrim sistem cevabı ve dayanıklı kararlılık problemini birlikte ele alarak hareket edilmelidir. Burada tasarımcı öncelikle belirsiz parametrelere karşı dayanıklılığı sağlamalı ve daha sonra nominal şartlardan sapma en az olacak şekilde kutup ataması yapmalıdır.

Bu alışmamızda Söylemez tarafından yapılan çalışmadan [14] hareketle transfer fonksiyonu sınırlı (interval) tipte belirsiz parametreler içeren bir sistem için, sistem ailesine ait tüm üyelerin baskın iki kutbunu nominal sistem baskın kutuplarından sapma en az olacak şekilde atayacak ve kalan bütün (baskın olmayan) kutupları da sol yarı s-düzleminde önceden öngörülecek belli bir noktanın solunda olacak şekilde sınırlandırılacak bir yöntem ortaya konacaktır. Yani PID kontrolör ile baskın kutup atama problemi dayanıklılığı da içerecek şekilde genişletilecektir.

Bu yöntem ile parametreleri belirsiz bir sistemin her üyesinin aynı anda nominal koşullara en yakın çalışmasını sağlayacak tek bir PID kontrolörü belirlenebilmektedir. Baskın kutup atama işleminin PID kontrolör ile yapılması ve sonuçta elde edilecek PID kontrolörünün parametrik belirsizlikleri de kompanze

edecek şekilde dayanıklı olmasından dolayı ortaya konan yöntemin pratik uygulamalarda kullanım alanı bulabileceği düşünülmektedir.

Bölüm 2’de ortaya koyacağımız yönteme temel oluşturan oransal kazanç ile bölgesel kararlılığın sağlanması yönünde Munro ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalar [10] ve bu çalışmaların 2 veya 3 serbest parametre içeren kontrolörlere genellenmesi hakkında bilgiler verilecektir.

Bölüm 3’te Söylemez ve arkadaşları tarafından ortaya konan kararlılığı sağlayan PID katsayılarını hızlı şekilde bulmaya yönelik olan yöntem tanıtılacaktır [16].

Bölüm 4’te PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi incelenecektir.

Bölüm 5’de PID kontrolör ile baskın kutup atama problemi çalışmamızın ana hedefi doğrultusunda dayanıklılığı da içerecek şekilde genişletilecek ve yöntem uygulama örnekleri üzerinde tartışılacaktır.

Bölüm 6’da bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yorumlanacak ve ileride bu konu hakkında yapılabilecekler tartışılacaktır.

2. ORANSAL KONTROLÖR İLE BÖLGESEL KARARLILIĞIN GARANTİ EDİLMESİ

Burada inceleyeceğimiz yöntem Munro ve ark. tarafından 1999 yılında tanıtılmıştır [10] ve PID ile baskın kutup atama probleminde kullanılacak olan temel yöntemdir.

2.1 Oransal Kontrolör ve Bölgesel Kararlılık Problemi

Transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilen lineer zamanla değişmeyen sistemi ele alalım.

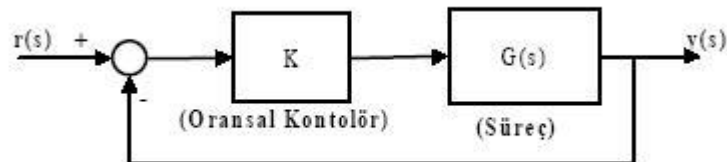
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.1)$$

Burada $N(s)$ ve $D(s)$ sistemin transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomları olup şu şekilde verilmiş olsunlar:

$$N(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \Lambda + a_1 s + a_0 \quad (2.2)$$

$$D(s) = s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \Lambda + b_1 s + b_0 \quad (2.3)$$

Notasyonda kolaylık açısından $m < n$ olduğunu varsayalım. Bu sistemin aşağıdaki şekildeki gibi bir oransal kontrolör ile kontrol edilerek kapalı çevrim sistem kutuplarından hepsinin karmaşık düzlemde verilen herhangi bir D-bölgesi içinde kalmasını garanti eden kazanç kümesini inceleyelim.

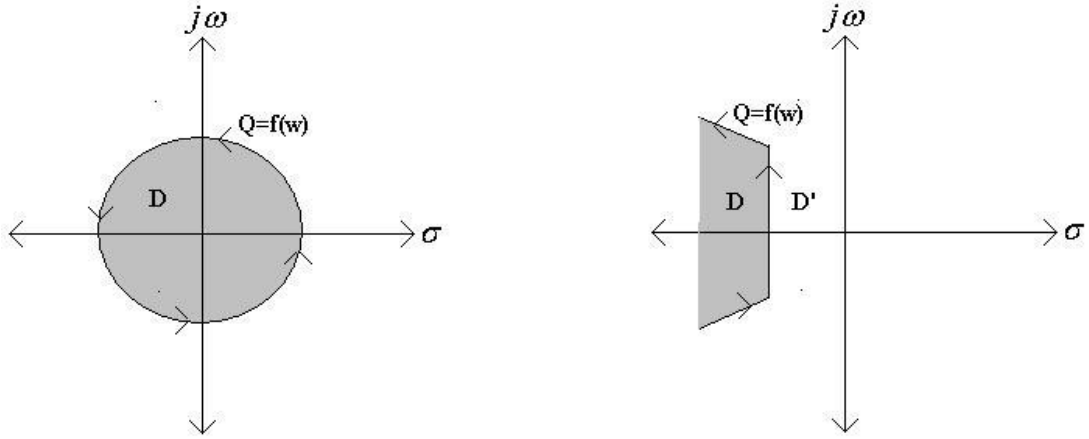


Şekil 2.1 : Oransal kontrolör ile geri besleme

D bölgesinin tümleyenini D' ile gösterelim ve D' 'ünü saat yönünde çevreleyen eğriye Q diyelim. Notasyonda kolaylık açısından Q'nun ω gerçel parametresinin şu şekilde tanımlanmasıyla elde edilen bir fonksiyon olduğunu düşünebiliriz:

$$Q = f(\omega) \quad , \quad (\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}) \quad (2.4)$$

Mümkün iki adet D-kararlılık bölgesi aşağıdaki şekilde görülmektedir:



Şekil 2.2 : Kompleks düzlemde D bölgeleri

Verilmiş herhangi bir kazanç için, kapalı çevrim kararsız kutupların sayısını belirlemek üzere $G(s)$ sisteminin Nyquist diyagramından yani Q fonksiyonu D-bölgesinin sınırlarında (saat yönünün tersi yönde) değişirken $G(f(w))$ 'nin karmaşık düzlemde aldığı değerlerden yararlanacağız. Nyquist diyagramının gerçel eksenini kestiği noktaları $x_1, x_2 \wedge x_q$ olarak adlandıralım. Bu noktaları tekrar $x_i < x_{i+1}$ olacak şekilde etiketlendirelim. $x_0 = -\infty$ ve $x_{q+1} = \infty$ olarak tanımlanırsa Nyquist diyagramının gerçel eksenini $q+1$ aralığa böldüğü görülür. Bu aralıkları I_1, I_2, K, I_{q+1} şeklinde isimlendirelim (Yani $I_i \triangleq (x_{i-1}, x_i)$ olsun). Ayrıca Nyquist diyagramının gerçel eksenini x_i noktasında kestiği frekans kümesini $W_i = \{\omega_{i,1}, \omega_{i,2} \wedge \omega_{i,p_i}\}$ ile gösterelim. Bu frekanslardan her bir $\omega_{i,j}$ için eğer Nyquist diyagramı alt yarı düzlemde üst yarı düzleme geçiyorsa geçişin yönü pozitifdir denir ve $d_{ij} = 1$ ile gösterilir, aksi takdirde geçişin yönü negatiftir denir ve $d_{ij} = -1$ ile gösterilir. Bu durumda bir x_i noktasındaki net pozitif geçişlerin sayısı (2.5) eşitliği ile verilir:

$$r_i = \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} \quad (2.5)$$

Bu gözlemlere dayanarak Munro ve arkadaşları tarafından öne sürülen aşağıdaki teorem verilebilir [10]:

Teorem 2.1: (2.1) eşitliği ile verilen bir $G(s)$ sistemi için $G(s)$ 'nin sanal kısmını sıfır yapan bir $\omega_{i,j}^*$ frekansı (yani $x_i = G(f(\omega_{i,j}^*))$) ancak ve ancak kapalı çevrim sistemin en az 1 kutbunu D bölgesi sınırları üzerine, (yani Q çizgisi üzerine) getiren $k^* = \frac{-1}{x_i}$ gerçel kazancının var olmasıyla mümkündür. Dahası bu kazancın k^* civarında artmasıyla D bölgesinin dışına çıkan net kutupların sayısı r_i ile verilir.

.Teorem 2.1 $k = \frac{-1}{x_i}$ kazancı için kapalı çevrim sistemin D-bölgesi sınırları üzerinde

p_i adet kapalı çevrim kutbu olduğunu ve kazanç $\frac{-1}{x_{i-1}} < k < \frac{-1}{x_i}$ değerleri arasındayken kapalı çevrim kararsız kutup sayısının sabit kaldığını ima etmektedir.

Şu halde parametre düzleminde $K_i = \left\{ k : \frac{-1}{x_{i-1}} < k < \frac{-1}{x_i} \right\}$ olacak şekilde

$K_1, K_2, \dots, K_{q+1}$ aralıklarını tanımlayacak olursak, her bir K_i aralığı için kapalı çevrim sistem kararsız kutuplarının sayısını u_i ile gösterirsek şu önermeyi vermek mümkün olacaktır.

Önerme 2.1: (2.1) numaralı eşitlikteki gibi tanımlanan bir $G(s)$ sistemi için K_i kazanç aralıklarındaki kapalı çevrim sistem kararsız kutuplarının sayısı şu formülle verilir:

$$u_i = u_0 + \sum_{t=0}^{i-1} r_t \quad (2.6)$$

Burada u_0 açık çevrim sistemin sağ yarı-s düzleminde bulunan kutuplarının sayısını ifade etmektedir.

İspat 2.1 Teorem 2.1'den dolayı i .aralıktaki kapalı çevrim sistem kararsız kutup sayısı şu şekilde verilir:

$$u_i = u_{i-1} + r_{i-1} \quad (2.7)$$

Ayrıca ilk aralıktaki (I_1 aralığı) kapalı çevrim sistem kararsız kutup sayısının $k^* = \frac{-1}{-\infty} = 0^+$ olduğu zamanki kararsız kutup sayısı,yani açık çevrim sistem kararsız kutup sayısı (u_0) ve Nyquist diyagramının $-\infty$ 'daki net pozitif geçişlerinin sayısının (r_0) toplamına eşit olduğunu görmek mümkündür.

$$u_1 = u_0 + r_0 \quad (2.8)$$

Bu sebeple (2.7) numaralı eşitliğin tekrarlanan formu (2.6) numaralı eşitliğe eşdeğerdir.

Önerme 2.1 göstermektedir ki, sağ yarı s-düzlemindeki açık çevrim kutupların sayısı ve $G(f(\omega))$ 'nin gerçel eksenini kestiği noktalar ve bu noktalardaki geçiş yönleri bilindiğinde bölgesel D-kararlılığını sağlayan kazanç aralıkları kolayca hesaplanabilir. Yani orantı (P) kontrolör ile bölgesel kararlılık problemi şu denklemin çözülmesine indirgenmiş olur:

$$\text{Im}(G(f(\omega))) = 0 \quad (2.9)$$

O halde kararlılığı sağlayan aralıkların bulunması için şöyle bir algoritma önerilebilir.

Algoritma 2.1

- 1) (2.9) numaralı eşitliği sağlayan $\omega_1^*, \omega_2^*, \Lambda, \omega_n^*$ frekanslarını bul.
- 2) $x_i = G(f(\omega_i^*))$ noktalarını bul.
- 3) x_i noktalarını $x_i > x_{i-1}$ olacak şekilde ve karşı düşen frekansları da $\omega_{i,1}^*, \omega_{i,2}^*, \Lambda, \omega_{i,p_i}^*$ şeklinde yeniden etiketlendir.
- 4) Nümerik veya cebrik yöntemler kullanarak her bir $\omega_{i,j}^*$ için geçiş yönü $d_{i,j}$ 'yi bul.
- 5) $r_i = \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j}$ değerlerini hesapla.

6) I_i ve K_i aralıklarına karşı düşen karasız kutup sayılarını (u_i) (2.6) eşitliğini kullanarak hesapla.

7) $u_i = 0$ olan aralıklar bölgesel kararlılığı garanti eden aralıklardır.

Birçok pratik problem için $\text{Im}(G(f(\omega))) = 0$ eşitliğinin köklerini bulmak, bir polinomun bilinen yöntemler ile köklerini bulmaya eşdeğerdir. Bu nedenle üstte verilen ve Munro ve arkadaşları tarafından önerilen algoritma [10] birçok durumda probleme tam bir çözüm getirir. Tüm pratik problemler için D-kararlılık bölgesi gerçel eksene göre simetriktir. Bu nedenle D-kararlılık bölgesinin sadece negatif olmayan yarısının gözden geçirilmesi yeterli olacaktır. Bu durumda $\omega_{i,j}^*$ frekansı için $\text{Im}(f(\omega_{i,j}^*)) > 0$ olacak şekilde bir geçiş tespit edilirse¹ geçişin yönü $d_{i,j}$, r_i değeri hesaplanırken $\text{Im}(-f(\omega_{i,j}^*))$ 'de eşlenik geçiş olduğundan iki ile çarpılmalıdır. Bundan sonraki bölümde yöntemin Hurwitz manasında kararlılığı sağlamak üzere özelleştirilmiş olan versiyonundan bahsedilecektir.

2.2 Lineer Sistemlerin Hurwitz Kararlılığı

Bir önceki bölümde bahsettiğimiz gibi verilen yöntem sabit oransal kontrolör ile kararlılığı sağlama problemine, cebrik olarak çözüm getirmektedir. Yöntemin önemli uygulama alanlarından bir tanesi de iletim gecikmesi olmayan sistemlerin, Hurwitz manasında kararlı hale getirilmesidir. Ho ve arkadaşları bu durum için Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmiş şeklini kullanarak çeşitli sonuçlar elde etmiştir [15]. Bu bölümde, bir önceki bölümde tanıttığımız genel yöntemin Hurwitz kararlılığı özel durumuna uygulanarak kapalı çevrim sistemi Hurwitz manasında kararlı hale getiren oransal kontrolörlerin hesabına yönelik Munro ve arkadaşları tarafından ortaya konulan cebrik yöntem tanıtılacaktır [10]. Tanıtılacak olan bu yöntem ve algoritma Ho ve arkadaşlarının öne sürdüğü yönteme göre birçok avantaja sahiptir.

Oransal kontrolör ile kontrol edilmek istenen (2.1) numaralı eşitlikte verdiğimiz $G(s)$ sistemini ele alalım. Pay ve payda polinomları $N(s)$ ve $D(s)$ tek ve çift kuvvetlerine karşı düşen bileşenlerine ayrılırsa şu eşitlikler elde edilir:

¹ Hurwitz kararlılık bölgesi gibi açık kararlılık bölgelerinde bu durum ancak ve ancak $\omega \neq 0$ ve $\omega \neq \infty$ için mümkündür.

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (2.10)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (2.11)$$

s yerine frekans değişkeni $j\omega$ yazarsak $D_{re} = \text{Re}(D(j\omega))$, $D_{im} = \text{Im}(D(j\omega))$ ve N_{re}, N_{im} benzer şekilde tanımlı olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri yazmak mümkündür:

$$D_{re} = D_e(-\omega^2), D_{im} = D_o(-\omega^2)\omega \quad (2.12)$$

$$N_{re} = N_e(-\omega^2), N_{im} = N_o(-\omega^2)\omega \quad (2.13)$$

$N(s)$ ve $D(s)$ polinomlarının tek ve çift kuvvetlerine karşı düşen bileşenler kullanılarak şu üç polinom elde edilir:

$$X(\omega^2) = D_e N_e + D_o N_o \omega^2 \quad (2.14)$$

$$Y(\omega^2) = D_e N_o - D_o N_e \quad (2.15)$$

$$Z(\omega^2) = D_e^2 + D_o^2 \omega^2 \quad (2.16)$$

Burada notasyonda kolaylık açısından $D_e(-\omega^2), D_o(-\omega^2), N_e(-\omega^2)$ ve $N_o(-\omega^2)$ yerine sırasıyla D_e, D_o, N_e ve N_o kullanılmıştır.

Karesel frekans değişkeni v 'yi kullanarak $v = \omega^2$ dönüşümü yaptığımızda üstteki 3 polinom aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X(v) = D_e N_e + D_o N_o v \quad (2.17)$$

$$Y(v) = D_e N_o - D_o N_e \quad (2.18)$$

$$Z(v) = D_e^2 + D_o^2 v \quad (2.19)$$

Tanımladığımız bu polinomlar ve sistem transfer fonksiyonu arasında şu ilişki bulunur:

$$\frac{X(v)}{Z(v)} = \text{Re}[G(j\omega)] ; \frac{Y(v)}{Z(v)} = \text{Im}[G(j\omega)] \quad (2.20)$$

$$G(j\omega) = \frac{X(v)}{Z(v)} + j \frac{Y(v)}{Z(v)} \quad (2.21)$$

$Y(v)$ 'nin pozitif gerçel köklerini $v_1^*, v_2^*, \Lambda v_\gamma^*$ ile gösterelim. $G(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin gerçel eksenini sadece $\omega = 0, \omega = \infty$ veya $\omega = \pm\sqrt{v_i^*}$ ($i = 1, 2, \Lambda \gamma + 2$) noktalarında keseceği açıktır. Bu sebeple $v_{\gamma+1}^* = 0$ ve $v_{\gamma+2}^* = \infty$ olarak tanımlayarak her bir v_i^* noktasına karşı düşen gerçel eksen kesim noktaları $x_i = \frac{X(v_i^*)}{Z(v_i^*)}$ ($i = 1, 2, \Lambda \gamma + 2$) olarak bulunur.

Şimdi (x_i, v_i^*) çiftlerini ($i = 1, 2, \Lambda \gamma + 2$) $x_i \leq x_{i+1}$ olacak şekilde yeniden etiketlendirecek olursak şu teoremi vermemiz mümkün olur (Munro, Söylemez ve Baki 1999) [10].

Teorem 2.2 Transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ şeklinde verilen ($N(s)$ ve $D(s)$) (2.2)

ve (2.3) numaralı eşitliklerde tanımlanan polinomlardır.) lineer, zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım ve $D(s)$ 'nin sanal eksen üzerinde kökü olmadığını kabul edelim ($D(0) = b_0 \neq 0$). $X(\omega^2)$, $Y(\omega^2)$ ve $Z(\omega^2)$ polinomları (2.14), (2.15), (2.16) eşitliklerinde tanımlandıkları gibi olsunlar ve (x_i, v_i^*) çiftleri yukarıdaki gibi tanımlanmış olsun. Buna ek olarak $Y(v)$ 'nin ilk (en büyük dereceli) teriminin katsayısını y_1 ve sıfırdan farklı son katsayısını y_0 ile gösterelim. Bu durumda $\frac{-1}{k} \in K_i = (x_{i-1}, x_i)^2$ veya $k \in K_i = (\frac{-1}{x_{i-1}}, \frac{-1}{x_i})$ şeklinde verilen bir k kazancı için kapalı çevrim sistemin kararsız kutup sayısı şu formülle bulunur.

$$u_i = u_0 + \sum_{i=1}^{i-1} r_i \quad (2.22)$$

Burada u_0 $G(s)$ 'in kararsız kutup sayısını göstermekte olup,

² $x_0 = -\infty$ ve $x_{\gamma+3} = \infty$ olarak kabul ediliyor.

$$r_i = \begin{cases} (1 - (-1)^l) \text{Sgn}(Y^{(l)}(v_i^*)) & 0 < v_i^* < \infty \text{ ise} \\ \text{Sgn}(y_0) & v_i^* = 0 \text{ ise} \\ -\text{Sgn}(y_1) & v_i^* = \infty \text{ ise} \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Son eşitlikte verilen $Y^{(l)}(v), Y(v)$ 'nin sıfırdan farklı ilk türevini göstermektedir.

Teorem 2.2 incelenirse K_i aralıklarının $Y(v)$ polinomunun köklerine bağlı olduğu görülür. Ayrıca bu teoremi sanal eksende kutupları olan sistemleri de içerecek şekilde genişletmek mümkündür. Bu durumda bir önceki bölümde bahsettiğimiz Q eğrisi sanal eksendeki kutuplar ölçülemeyecek kadar küçük yarı daireler tarafından harici bırakılacak şekilde tekrar düzenlenir. Bu Nyquist eğrisinin gerçel eksenini $-\infty$ ve/veya ∞ 'da kesebileceği anlamına gelir ve bu nedenle bu noktalara karşı düşen net geçiş sayıları sıfır değildir ve tekrar ayrı ayrı hesaplanmalıdır.

Buraya kadar lineer zamanla değişmeyen sistemler için oransal kontrolör ile bölgesel kararlılığın garanti edilmesi ve bunun Hurwitz manasında kararlılık için özelleştirilmesi konusu ele alınmıştır. Burada anlatılan yöntem oransal kontrolör ile geri beslemeli kararlılık problemine tam bir çözüm getirmekle beraber, basit ve cebrik olarak uygulanabilir. Burada tanıtilen yöntemin çıkış noktası Nyquist kararlılık kriterinin genelleştirilmesidir. Verilen sabit bir oransal kazanç için kararsız kapalı çevrim kutupların sayısı, Nyquist eğrisinin kompleks düzlemin gerçel eksenini kestiği noktalar analiz edilerek bulunabilir. İleriki bölümlerde bu yöntemi temel alarak, yöntemin 2 veya 3 değişken parametrelili kontrolörler ile örneğin PI veya PID kontrolörleri ile de kararlılığı sağlayacak şekilde nasıl genişletildiğine değinilecektir. Ayrıca yöntem tezin son aşamasında da görüleceği gibi PID ile baskın kutup atama yönteminde de kullanım alanı bulmaktadır.

Düşük dereceli kontrolörler pratik kontrol mühendisliğinde önemli bir role sahiptir. Verilen bir sistemi kararlı hale getiren tüm düşük dereceli kontrolörler kümesini karakterize ederek ve daha sonra dayanıklı kontrol tekniklerini uygulayarak düşük dereceli dayanıklı kontrolörleri bulmak mümkün olmaktadır. Bu nedenle burada ortaya konan yöntemin bu alanda getirisi oldukça fazladır.

Şimdi kararlılığı sağlayan oransal kontrolörler kümesini bulmak için verilmiş bu yöntemi bir örnek üzerinde uygulayalım.

Örnek 2.1

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 54s + 16}{s^5 + 11s^4 + 22s^3 + 60s^2 + 47s + 25} \quad (2.24)$$

şeklinde verilen, lineer zamanla değişmeyen sistemi ele alalım.

Bu sistemi Hurwitz anlamında kararlı hale getiren bütün oransal kontrolör kümesini bahsettiğimiz yöntem ile bulmaya çalışalım. Pay ve paydayı öncelikle Teorem 2.2'den yola çıkarak tek ve çift kuvvetli bileşenlerine ayıralım.

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (2.25)$$

$$N_e(s^2) = s^4 + 12s^2 + 16 \quad N_o(s^2) = 6s^2 + 54 \quad (2.26)$$

$$D_e(s^2) = 11s^4 + 60s^2 + 25 \quad D_o(s^2) = s^4 + 22s^2 + 47 \quad (2.27)$$

$s = j\omega$ yazdığımızda aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$D_e(-\omega^2) = 11\omega^4 - 60\omega^2 + 25 \quad D_o(-\omega^2) = \omega^4 - 22\omega^2 + 47 \quad (2.28)$$

$$N_e(-\omega^2) = \omega^4 - 12\omega^2 + 16 \quad N_o(-\omega^2) = -6\omega^2 + 54 \quad (2.29)$$

$v = \omega^2$ karesel frekans değişkenini kullanarak şu eşitlikleri elde ederiz:

$$D_e(-v) = 11v^2 - 60v + 25 \quad D_o(-v) = v^2 - 22v + 47 \quad (2.30)$$

$$N_e(-v) = v^2 - 12v - 16 \quad N_o(-v) = -6v + 54 \quad (2.31)$$

Bu eşitliklerden yararlanarak (2.17) - (2.19) eşitlikleriyle tanımlanan $Y(v)$, $X(v)$ ve $Z(v)$ polinomları şu şekilde elde edilir:

$$X(v) = 5v^4 - 6v^3 - 549v^2 - 1278v + 400 \quad (2.32)$$

$$Y(v) = -v^4 - 32v^3 + 627v^2 - 2474v + 598 \quad (2.33)$$

$$Z(v) = v^5 + 77v^4 - 742v^3 + 2082v^2 - 791v + 625 \quad (2.34)$$

Bir önceki bölümde $G(j\omega) = \frac{X(v)}{Z(v)} + j \frac{Y(v)}{Z(v)}$ şeklinde olduğu gösterilmişti. Şimdi burada gerçel eksen kesim noktalarını aradığımıza göre sanal kısmı sıfır yapan değerleri yani $Y(v)$ 'nin pozitif gerçel köklerini bulmalıyız. Bu kökler 0 ve sonsuzu da ekleyerek şu şekilde bulunmuştur:

$$v_1^* = 0.258413, v_2^* = 5.84359, v_3^* = 8.49808, v_4^* = 0, v_5^* = \infty \quad (2.35)$$

Görüldüğü gibi bu problem için 5 adet geçiş noktası mevcuttur. Bu frekanslara karşı düşen geçiş noktaları ise $x_i = \frac{X(v_i^*)}{Z(v_i^*)}$ formülü ile bulunur. Buna göre geçiş noktaları şu şekildedir:

$$x_1 = 1.26746, x_2 = -0.39945, x_3 = -0.04446, x_4 = 0.64, x_5 = 0 \quad (2.36)$$

Bundan sonra (2.23) numaralı eşitlikte belirtilen net geçiş sayılarının hesaplanabilmesi için $Y^{(\lambda)}(v_i^*)$, y_0 ve y_1 değerlerine ihtiyaç duyulur. $Y(v)$ polinomunun ilk türevi şu şekildedir:

$$Y' = -4v^3 - 96v^2 + 1254v - 2474 \quad (2.37)$$

Geçiş frekanslarında $Y^{(\lambda)}(v_i^*) \neq 0$ olduğu için tüm geçiş noktaları için $\lambda=1$ 'dir. (2.23) numaralı eşitlikte kullanılacak olan $Y^{(\lambda)}(v_i^*)$, y_0 ve y_1 değerleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} Y'(0.258413) &= -2156.43 \\ Y'(5.84359) &= 777.52 \\ Y'(8.498) &= -1205.11 \\ y_0 &= 598 \\ y_1 &= -1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Verilen bu değerlere göre net geçişlerin sayısı r_i değerleri bir sonraki sayfada Tablo 2.1'de sunulmuştur:

Tablo 2.1: r_i değerlerinin hesaplanması

i	v_i^*	$x_i = \frac{X(v_i^*)}{Z(v_i^*)}$	$Y^\lambda(v_i^*)$	r_i
1	5.84359	-0.399449	777.52	2
2	8.49808	-0.0444565	-1205.1	-2
3	∞	0	∞	1
4	0	0.64	-2474	1
5	0.25841	1.26746	-2156.4	-2

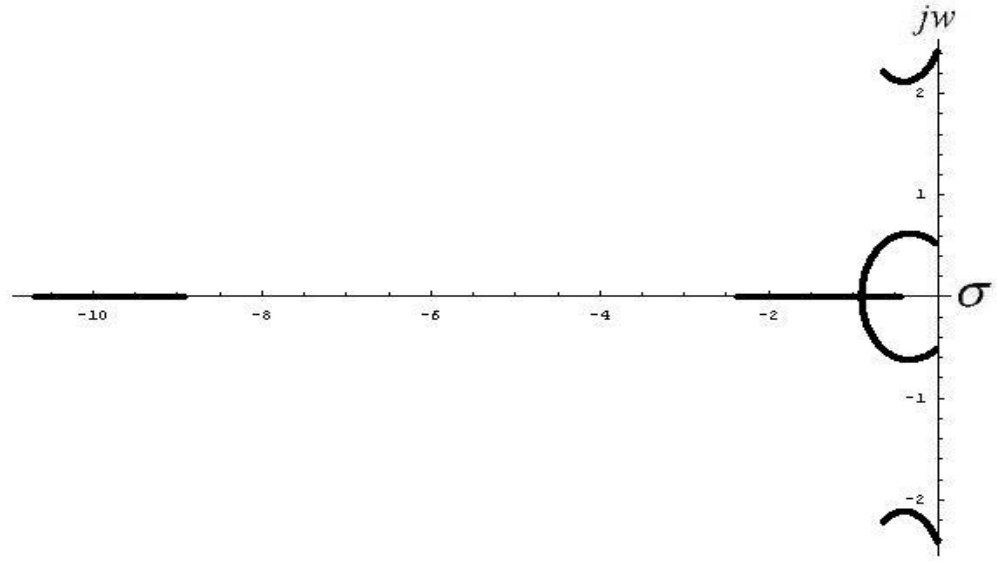
I_i ve K_i aralıklarını şekillendirerek ve açık çevrim sistem kararsız kutup sayısı $u_0 = 0$ olduğunu görerek (2.22) numaralı eşitlikte verilen her aralık için kapalı çevrim sistem kararsız kutup sayısı u_i aşağıdaki tabloda görüldüğü şekilde hesaplanır.

Tablo 2.2: u_i değerleri ve kararlılığı sağlayan aralıklar

i	I_i		K_i		u_i	Kararlılık
	x_{i-1}	x_i	$\frac{-1}{x_{i-1}}$	$\frac{-1}{x_i}$		
1	$-\infty$	-0.399449	0	2.5034	0	Kararlı
2	-0.399449	-0.0444565	2.50345	22.493	2	Kararsız
3	-0.0444565	0	22.4939	∞	0	Kararlı
4	0	0.64	$-\infty$	-1.5625	1	Kararsız
5	0.64	1.26746	-1.5625	-0.7889	2	Kararsız
6	1.26746	∞	-0.78898	0	0	Kararlı

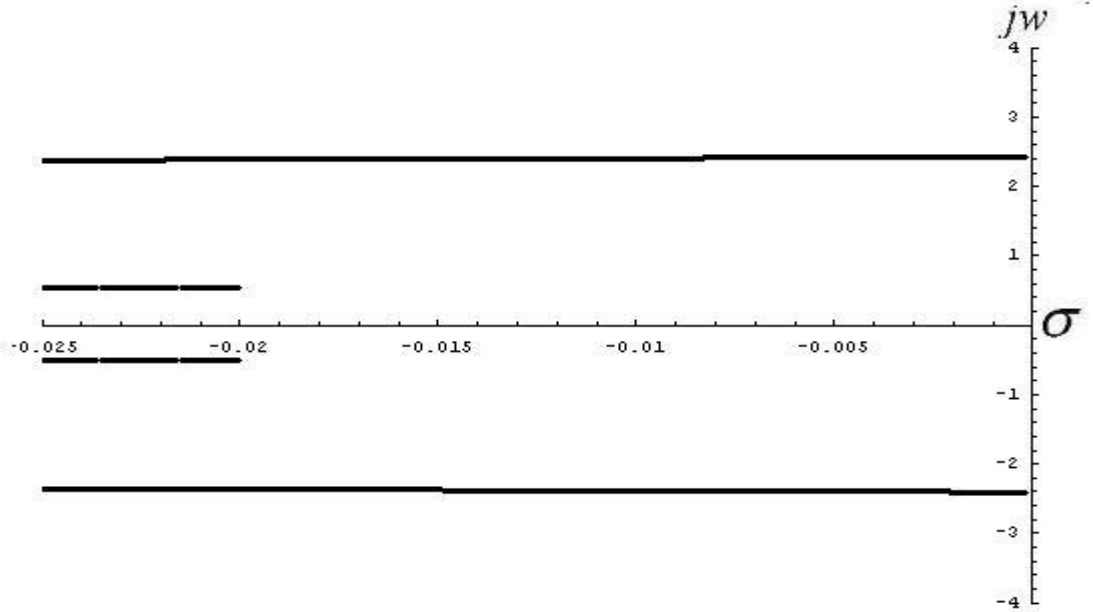
Tablo-2.2 incelendiğinde kapalı çevrim sistemin, kararsız kutup sayısının sıfıra eşit olduğu aralıklarda yani $K \in (-0.788981, 2.50345) \cup (22.4939, \infty)$ aralıkları için kararlı olduğu, yani kapalı çevrim sistemin bütün kutuplarının sol yarı s-düzleminde olacağı görülür. Bunu göstermek için örneğin $K \in (-0.788981, 2.50345)$ aralığında

yaklaşık 30.000 değer olacak şekilde ızgaralandığında kapalı çevrim sistem kutup dağılımı Şekil (2.3)'te görülmektedir.



Şekil 2.3 : $-0.79 < K < 2.5$ aralığı için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı

Tüm kutupların sol yarı s-düzleminde olduğunu daha iyi görebilmek için orjine yakın dağılımları büyülterek çizdirdiğimizde aşağıdaki şekil elde edilir:



Şekil 2.4 : $-0.79 < K < 2.5$ aralığı için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı

Şekilden de görebildiğimiz gibi sağ yarı s-düzleminde veya sanal eksen üzerinde kutup bulunmamaktadır. Yani verilen yöntemle sistem bulunan aralıklar için kararlı hale gelmektedir.

2.3 İki ve Üç Serbest Parametrelili Kontrolörler ile Kararlılığın Garanti Edilmesi

Bir önceki bölümde Hurwitz anlamında kararlılığı sağlayan oransal kontrolörler kümesinin bulunmasına yönelik yöntem tanıtılmıştı. Bu bölümde ise bu yöntemin PI ve PID kontrolör gibi 2 veya 3 serbest parametre içeren kontrolörleri de kapsayacak şekilde nasıl genişletilebileceğine değinilecektir. Bu kısımda tanıtılan yöntemler Munro ve ark. tarafından ortaya konan bir önceki bölümde açıkladığımız yöntemin 2 ve 3 boyuta genellenmesiyle elde edilir ve bu konu hakkında literatürde yapılmış çalışmalar mevcuttur [9] .

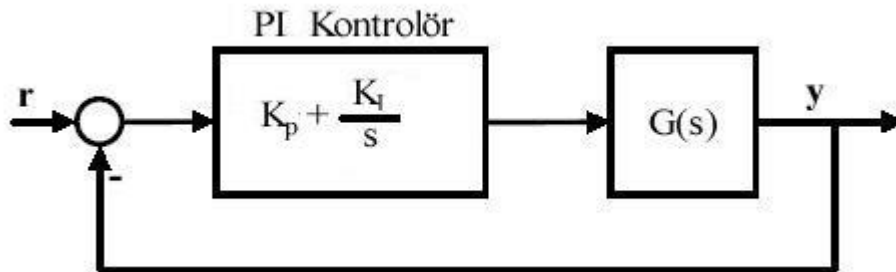
Transfer fonksiyonunda k_1 ve k_2 gibi iki adet serbest parametre içeren ve aşağıdaki gibi ifade edilen bir kontrolörü ele alalım:

$$F(s) = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s) \quad (2.39)$$

PI, PD, sabit kutup faz ilerlemeli/gerilemeli kontrolör gibi, pratik uygulamalarda kullanılan kontrolör yapıları üstteki yapıya eşdeğerdir. Biz burada PI kontrolörünü ele alacağız ve verilen sistemin kapalı çevrim kararlı olmasını sağlayan PI kontrolörleri kümesinin bir önceki bölümde verilen yöntem ile nasıl hesaplanabileceğinden bahsedeceğiz.

Bir orantı-integral (PI) kontrolörünün transfer fonksiyonu şu şekilde verilebilir:

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (2.40)$$



Şekil 2.5 : PI Kontrolör

Sabit bir (K_p, K_i) çifti $(K_p = K_p^*, K_i = K_i^*)$ parametre düzleminde bir noktayı temsil etmektedir. Aynı nokta $K_p = k \cos(\alpha)$ ve $K_i = k \sin(\alpha)$ ($0 \leq \alpha < 180$) yazılarak (k, α) çifti ile de gösterilebilir. Bu durumda transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ şeklinde verilen bir sistemin PI kontrolörü ile kontrol edildiğini düşünürsek; sistemin ileri yol transfer fonksiyonu şu şekilde olacaktır:

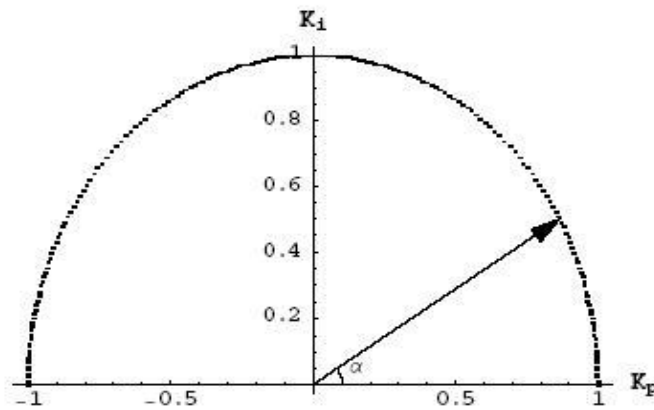
$$G_{fp}(s) = (K_p + \frac{K_i}{s}) \left(\frac{N(s)}{D(s)} \right) \quad (2.41)$$

$$G_{fp}(s) = \frac{k(s \cos(\alpha)N(s) + \sin(\alpha)N(s))}{sD(s)} \quad (2.42)$$

$$G_{fp}(s) = kH(s, \alpha) \quad (2.43)$$

Burada $H(s, \alpha) = \frac{(s \cos(\alpha)N(s) + \sin(\alpha)N(s))}{sD(s)}$ olarak tanımlanmıştır.

Öyleyse α açısı 0 ile 180 dereceler arasında değiştirilerek (Şekil 2.6) her bir α değeri için $H(s, \alpha)$ 'yı kararlı yapan k değerleri bir önceki bölümde anlattığımız yöntem ile bulunabilir. Böylece sistemi kararlı hale sokan PI kontrolörleri katsayı kümesi $K_p = k \cos(\alpha)$ ve $K_i = k \sin(\alpha)$ şeklinde hesaplanmış olur.



Şekil 2.6 : α açısı ve (K_p, K_i) ilişkisi.

Şimdi bu anlattığımızı bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 2.2

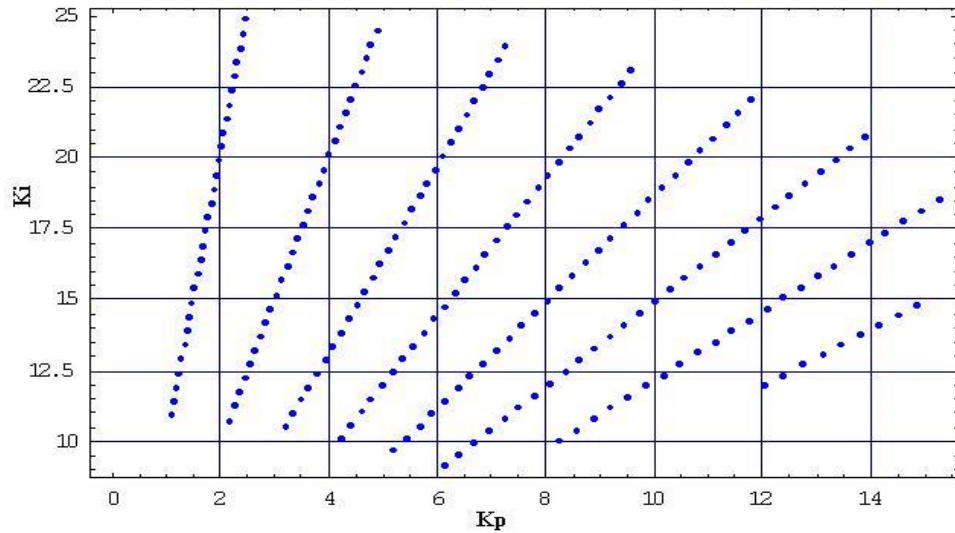
PI kontrolör kullanılarak kapalı çevrimde Hurwitz manasında kararlı hale getirilmek istenen aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 - 2s + 1}{s^5 + 3s^4 + 29s^3 + 15s^2 - 3s + 60} \quad (2.44)$$

Üstte anlattığımız yöntemle kapalı çevrim sistemi kararlı hale getiren (K_p, K_i) PI kontrolör parametre kümesini hesaplamaya çalışalım. Üstte anlattığımız yöntemle göre sistem ileri yol transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$G_{fp}(s) = \frac{k(s \cos(\alpha)(s^3 + 6s^2 - 2s + 1) + \sin(\alpha)(s^3 + 6s^2 - 2s + 1))}{s^6 + 3s^5 + 29s^4 + 15s^3 - 3s^2 + 60s} \quad (2.45)$$

α açısı 0 ile 90° arasında sekiz değer alacak şekilde değiştirildiğinde kararlılığı sağlayan aralıklar ızgaralandığında PI parametreleri kümesi bir önceki bölümde anlatılan yöntem izlenerek şu şekilde elde edilir:

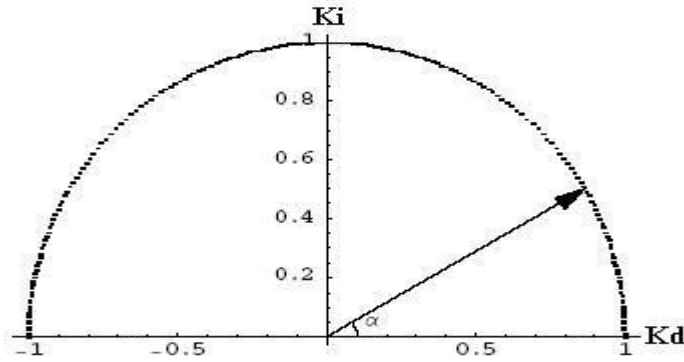


Şekil 2.7 : Kararlılığı sağlayan PI katsayıları

Yöntem benzer bakış açısıyla kararlılığı garanti eden PID katsayılarının bulunmasında da kullanılabilir. Bir PID kontrolörünün transfer fonksiyonu şu şekilde verilebilir:

$$F(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2.46)$$

Kontrol edilen sistem, $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ olmak üzere burada PID katsayılarından bir tanesi sabitlenip, diğer ikisi arasında bir önceki bölümde anlattığımız ilişki kurulabilir. Yani parametrelerden bir tanesi örneğin K_p ızgaralanarak yani bu parametreye belirli aralıklar ile sabit değerler verilerek kalan iki parametre K_I ve K_d arasında bir önceki bölümde de değindiğimiz aşağıdaki ilişkinin olduğu düşünülebilir:



Şekil 2.8 : α ve (K_d, K_i) ilişkisi

Böylece PID kontrolör ile kararlılık problemi bir parametreye sabit değerler vererek ve kalan iki parametre arasında ilişki kurularak tek k kazancı ile kararlılığı sağlama problemine indirgenebilir.

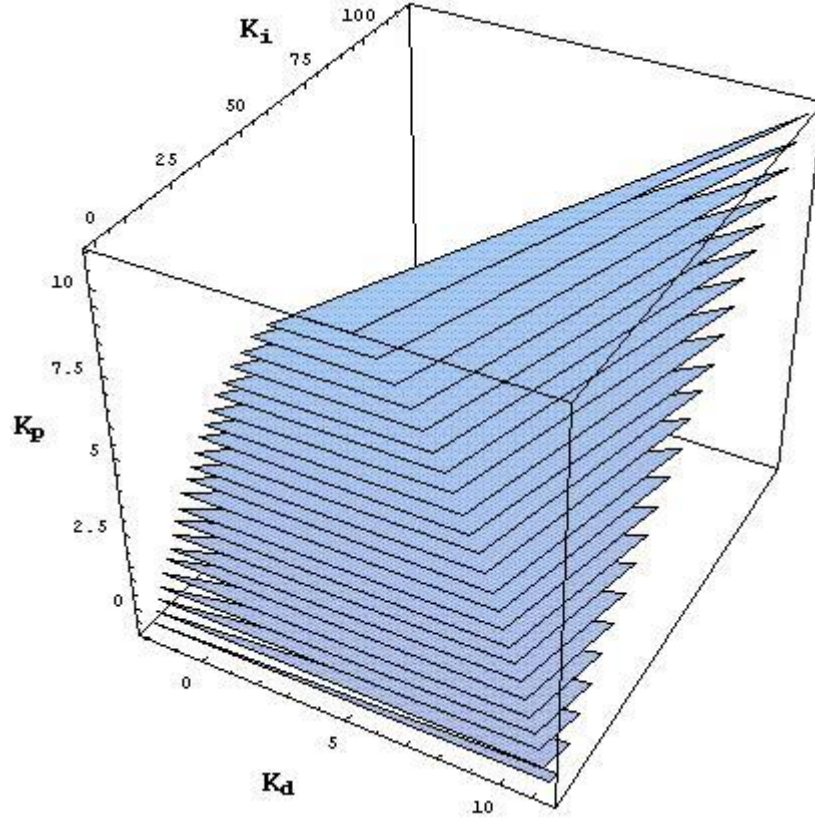
Şimdi bu anlattığımızı bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 2.2

PID kontrolör kullanılarak kapalı çevrim kararlı hale getirilmek istenen aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$G(s) = \frac{27}{s^4 + 10s^3 + 36s^2 + 54s + 27}$$

Üstte anlattığımız gibi K_p 'ye değer vererek ve diğer iki parametre arasında bahsettiğimiz ilişki kurularak elde edilen kararlılığı sağlayan PID kontrolör katsayıları aşağıdaki Şekil 2.9'da görülmektedir.



Şekil 2.9 : Kararlılığı sağlayan PID parametreleri

Tanıtığımız bu yöntem ile tek parametre ızgaralanıp diğer iki parametre arasında da α açısının belirli aralıklarla değiştirilmesiyle bir ilişki kurulmaktadır. Burada aslında 3 boyutta da bir ızgaralama söz konusudur ve bu işlem vakit kaybettiricidir. PID kontrolör ile kararlılığı sağlama probleminde bu tip 3 boyutta ızgaralamaya alternatif olabilecek ve kararlılığı sağlayan PID kontrolörlerinin çok hızlı bir şekilde bulunmasını sağlayan ve Söylemez ve arkadaşları tarafından ortaya konan bir yöntem mevcuttur [11,16]. Bir sonraki bölümde bu yöntemden bahsedilecektir.

3.KARARLILIĞI SAĞLAYAN PID KATSAYILARININ HIZLI ŞEKİLDE HESAPLANMASI

Burada tanıtacağımız Söylemez ve ark. tarafından ortaya konan yöntemle kararlılığı sağlayan PID kontrolör katsayıları hızlı şekilde hesaplanabilmektedir. Bu yöntem PID parametre uzayında kararlılığı sağlayan bütün bölgelerin bulunmasına yönelik yeni bir analitik yöntemdir. Yöntem sabit bir K_p değeri için, kapalı çevrimde kararlılığı sağlayan PID kontrolör katsayıları kümesinin parametre uzayında konveks çokgenler kümesi oluşturacağı gözlemine dayanır ve önceki yapılan çalışmalarla [13] karşılaştırıldığında bu tip bölgelerin belirlenmesi bu yöntem ile oldukça basit ve daha hızlıdır. Şimdi bu yöntemi açıklayalım

3.1 PID Kontrolörler İçin Kararlılık Bölgeleri

Lineer, zamanla değişmeyen aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

$N(s)$ ve $D(s)$ polinomları aşağıdaki gibi tanımlansınlar:

$$N(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \Lambda a_1 s + a_0 \quad (3.2)$$

$$D(s) = s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \Lambda b_1 s + b_0 \quad (3.3)$$

$m < n$ olmak üzere sistemi kontrol etmekte kullanılacak PID kontrolör transfer fonksiyonu şu şekilde verilsin:

$$F(s) = \frac{1}{s} (K_i + K_p s + K_d s^2), \quad (K_i, K_p, K_d \in \Re) \quad (3.4)$$

Parametre uzayında, kapalı çevrim kararsız kutup sayısının değişmeden kaldığı bölgeyi temsil eden katsayı bölgesi *P-bölgesi* olarak isimlendirilir ve bu bölge P_i ile gösterilir. *P-bölgesi* tarafından temsil edilen kapalı çevrim sistem kararsız kutup sayısı o bölgenin *sayısı* olarak isimlendirilir ve $c(P_i)$ ile gösterilir. *P-bölgelerinin* sınırları *kararlılık sınırı* olarak isimlendirilir ve bu sınırlar kapalı çevrim sistem karakteristik polinomunda s yerine frekans değişkeni $j\omega$ yazılarak ve bu eşitliği ω 'nin pozitif değerleri için sağlayan kontrolör parametrelerinin (K_p, K_i ve K_d) bulunmasıyla elde edilirler. Kararlılık sınırları, *tekil* ($\omega = 0, \omega \rightarrow \infty$) ve *tekil olmayan* ($0 < \omega < \infty$) kararlılık sınırları olmak üzere iki çeşittir. Bu ön-bilgiler verildikten sonra sabit bir K_p değeri için $K_D - K_I$ düzlemindeki kararlılık sınırlarının sonlu sayıda doğrulardan oluştuğunu göstermek mümkündür.

$K_D - K_I$ düzlemindeki kararlılık sınırlarını belirleyen doğruların bulunabilmesi için öncelikle aşağıdaki polinomlar tanımlanmalıdır.

İkinci bölümde anlattığımız şekilde sistem pay ve payda polinomlarını s 'nin tek ve çift kuvvetlerine karşı düşen bileşenlerine ayırdığımızı düşünelim.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_e(s^2) + sN_o(s^2)}{D_e(s^2) + sD_o(s^2)} \quad (3.5)$$

$s = j\omega$ yazarak ve $v = \omega^2$ karesel frekans değişkeni kullanılarak aşağıdaki polinomları tanımlayalım. Gösterimde kolaylık açısından $D_e(-v), D_o(-v), N_e(-v)$ ve $N_o(-v)$ yerine sırasıyla D_e, D_o, N_e ve N_o kullanılmıştır.

$$X(v) = D_o N_e - D_e N_o \quad (3.6)$$

$$Y(v) = D_o N_o u + D_e N_e \quad (3.7)$$

$$Z(v) = N_e^2 + N_o^2 v \quad (3.8)$$

$$A(v) = \frac{X(v)}{Z(v)} v, \quad B(v) = \frac{Y(v)}{Z(v)} + K_p \quad (3.9)$$

Bu eşitlikler verildikten sonra şu teoremi vermek mümkün olmaktadır [16] :

Teorem 3.1: (3.1) numaralı eşitlikteki gibi verilmiş bir sistem ve (3.4) numaralı eşitlikte tanımlanmış bir PID kontrolörü için $K_p = K_p^*$ sabit olmak üzere kararlılık sınırları aşağıdaki gibi tanımlanan sonlu sayıda doğru tarafından oluşturulur:

(1) $a_0 \neq 0$ ise $K_i = 0$ doğrusu,

(2) $m = n - 1$ ise $K_d = \frac{-1}{a_m}$ doğrusu,

(3) $\{v_1^*, v_2^*, \Lambda v_r^*\}$, $B(u) = 0$ eşitliğinin gerçel kökleri olmak üzere $K_i = v_i^* K_d + A(v_i^*)$, $(i = 1, 2, \Lambda r)$ denklemi tarafından tanımlanan doğrular.

Teorem 3.1 dikkatle incelenirse $\{v_1^*, v_2^*, \Lambda v_r^*\}$ noktalarının aşağıdaki polinomun kökleri olduğu görülür:

$$P(v) = Y(v) + K_p^* Z(v) \quad (3.10)$$

Teorem 3.1’de bahsedilen $K_i = 0$ ve $K_d = \frac{-1}{a_m}$ doğruları, $\omega = 0$ ve $\omega \rightarrow \infty$ için elde edilen kararlılık sınırlarına karşı düştüğünden *tekil doğrular* (veya *tekil sınırlar*) olarak adlandırılırlar. $K_i = v_i^* K_d + A(v_i^*)$ *tekil olmayan doğrular* (veya *tekil olmayan sınırlar*) olarak adlandırılırlar [5]. Böylece $K_D - K_I$ düzlemindeki P-bölgeleri r adet tekil olmayan ve muhtemelen iki adet tekil doğru tarafından belirlenecektir. Sonuç olarak sabit bir $K_p = K_p^*$ değeri için kararlılığı sağlayan PID kontrolörleri katsayıları 2 boyutlu uzayda sonlu sayıda çokgenler kümesi oluşturur. Şimdi bu incelediğimiz teoremi bir uygulama üzerinde görelim.

Örnek 3.1

$N(s) = s^3 - 4s^2 + s + 2$ ve $D(s) = s^5 + 8s^4 + 32s^3 + 46s^2 + 46s + 17$ olmak üzere $K_p^* = 1$ olduğu farz edilerek Teorem-3.1’den yararlanarak $K_D - K_I$ düzlemini P-bölgelerine ayıran doğruları bulalım.

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad ; \quad N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (3.11)$$

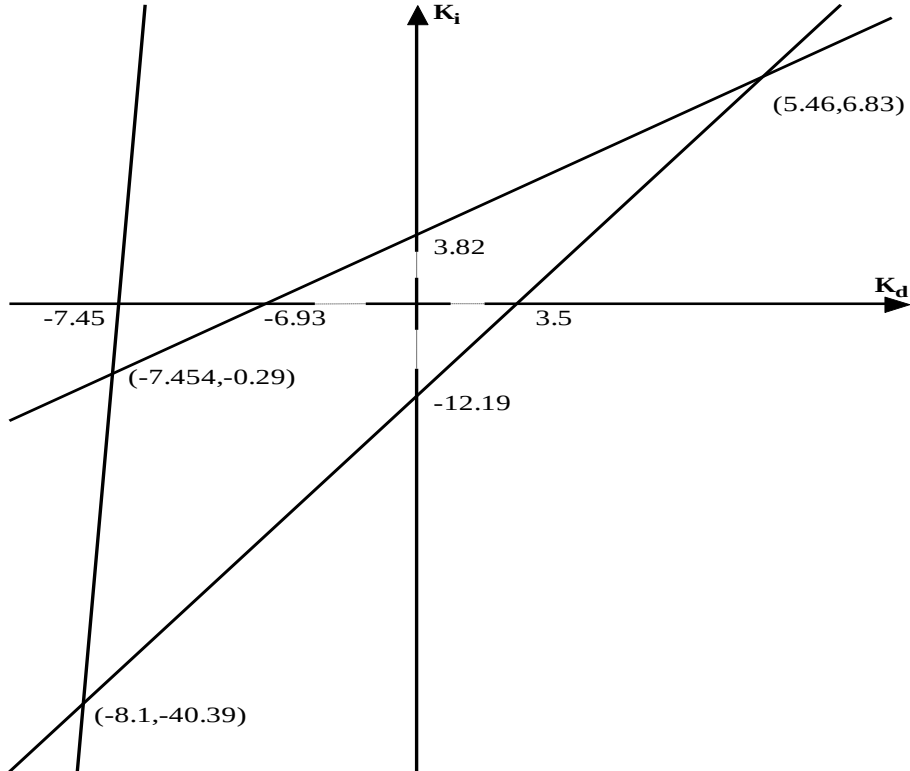
$$D_e(-\omega^2) = 8\omega^4 - 46\omega^2 + 17 \quad , \quad D_o(-\omega^2) = \omega^4 - 32\omega^2 + 46 \quad (3.12)$$

$$N_e(-\omega^2) = 4\omega^2 + 2 \quad , \quad N_o(-\omega^2) = -\omega^2 + 1 \quad (3.13)$$

$$A(v) = \frac{12v^4 - 180v^3 + 183v^2 + 75v}{v^3 + 14v^2 + 17v + 4} \quad (3.14)$$

$$P(v) = -v^4 + 66v^3 - 232v^2 + 39v + 38 \quad (3.15)$$

$P(v)$ polinomu $v_1^* = 0.55$, $v_2^* = 3.48$ ve $v_3^* = 62.29$ olmak üzere 3 gerçel köke sahiptir. Kayma değerleri ise $A(v_1^*) = 3.82$, $A(v_2^*) = -12.19$, $A(v_3^*) = 464.04$ şeklindedir. Böylece $K_D - K_I$ parametre düzleminde $K_i = v_i^* K_d + A(v_i^*)$ olmak üzere üç adet tekil olmayan kararlılık sınır doğrusu bulunur. $K_i = 0$ tekil kararlılık sınırı doğrusu ile beraber 4 adet kararlılık sınırı $K_D - K_I$ düzlemini aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi 11 adet P bölgesine ayırır.



Şekil 3.1 : $K_d - K_i$ düzleminin bölgelere ayrılması

Bundan sonraki bölümde düzlemdeki kararlılık bölgelerinin nasıl belirleneceğine değinilecektir.

3.2 Kd-Ki Düzleminde Kararlı Bölgelerin Belirlenmesi

Bu bölümde kullanılmış olan yaklaşım kararlılık sınırlarının hangi tarafının daha fazla kararlı köke sahip olduğunun bulunmasıdır. Eğer bu bilinirse P bölgelerindeki kararsız kutup sayılarına da ulaşılabilir. Kararlı bölgelerin belirlenebilmesi için yine şu teorem kullanılabilir [16]:

Teorem 3.2: Sabit bir $K_p = K_p^*$ değeri için , $p^*(s) = D(s) + K_p^*N(s)$ polinomunun sanal eksen üzerinde kökü olmadığını ve $K_p^* \neq (a_{m-1} - b_{n-1}a_m)/a_m^2$ (eğer $m = n - 1$ ise) olduğu varsayılarak, $K_d - K_i$ düzlemindeki kararlılık doğrularının belirttiği P-bölgelerindeki kutup durumları hakkında şunlar söylenebilir:

(1) $a_0 \neq 0$ olmak üzere, $K_i = 0$ doğrusu üzerindeki P-bölgeleri $K_i = 0$ doğrusu altındaki komşu P-bölgeleri ile karşılaştırıldığında $Sgn(a_0/(b_0 + a_0K_p^*))$ adet daha fazla kararlı kutba sahiptir.

(2) $m = n - 1$ olmak üzere tekil kararlılık doğrusu $K_d = -1/a_m$ 'nin sağ tarafı sol tarafı ile karşılaştırıldığında $Sgn(K_p^*a_m^2 + b_{n-1}a_m - a_{m-1})$ adet daha fazla kararlı kutba sahiptir.

(3) Tekil olmayan kararlılık doğruları $(K_i = u_i^*K_d + A(u_i^*))$ 'nın çevresindeki P-bölgelerinden orjin tarafında olanı diğer taraftaki P-bölgeleri ile karşılaştırıldığında $d(v_i^*)$ adet daha fazla kararlı kutba sahiptir. v_i^* , $P(v) = 0$ polinomunun pozitif gerçel kökleri, ve $d(v)$ aşağıdaki gibi tanımlanmış bir fonksiyondur:

$$d(v) = ((-1)^\lambda - 1)Sgn\left(\frac{P^{(\lambda)}(v)}{X(v)}\right) \quad (3.16)$$

$P^{(\lambda)}(v)$, $P(v)$ 'nin v 'deki sıfırdan farklı ilk türevini göstermektedir.

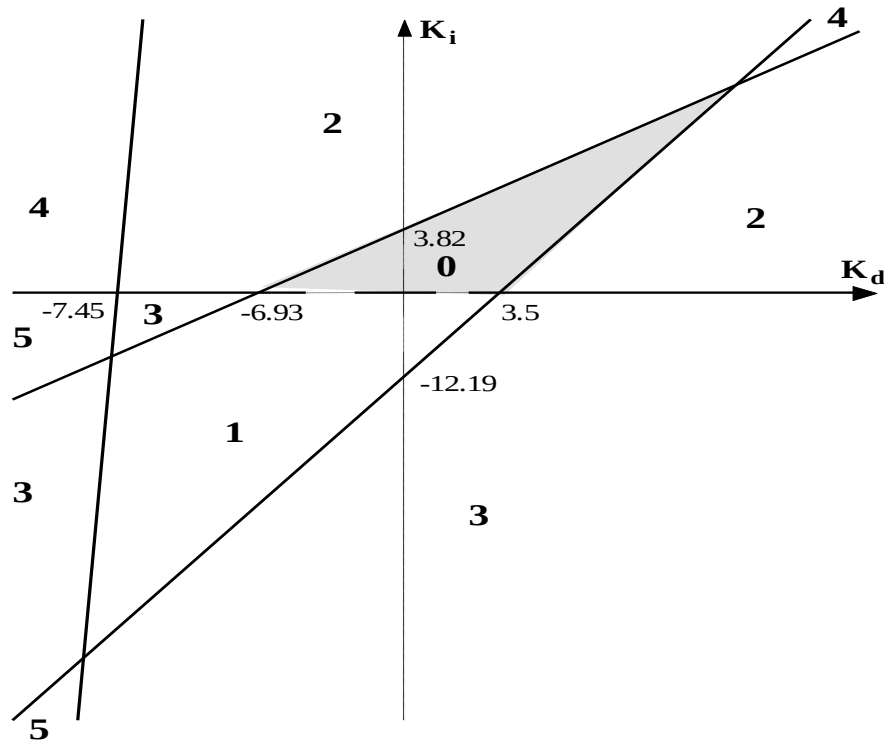
Örnek 3.2

Teorem 3.2 ışığında örnek 3.1'de ele aldığımız sistemin $K_d - K_i$ düzlemindeki kararlılık bölgeleri için kararsız kutup sayılarını belirlemeye çalışalım.

$K_i = 0$ singüler doğrusu için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\text{Sgn}\left(\frac{a_0}{b_0 + a_0 K_p^*}\right) = \text{Sgn}(0.1) = 1 \quad (3.17)$$

Bu sebepten teorem 3.1 ışığında üst yarı düzlem alt yarı düzlem ile karşılaştırıldığında 1 adet fazla kararlı kutba sahiptir. Ayrıca (3.16) numaralı eşitlikten $d(v_1^*) = d(v_2^*) = d(v_3^*) = 2$ olduğu görülür. Bu sebeple tüm tekil olmayan kararlılık doğruları için doğrunun orjin tarafı 2 adet daha fazla kararlı kutba sahiptir. Tüm bunların sonucu olarak her P-bölgesi için kararsız kutup sayıları ve kararlılığı sağlayan bölge aşağıdaki şekilde verilmiştir.

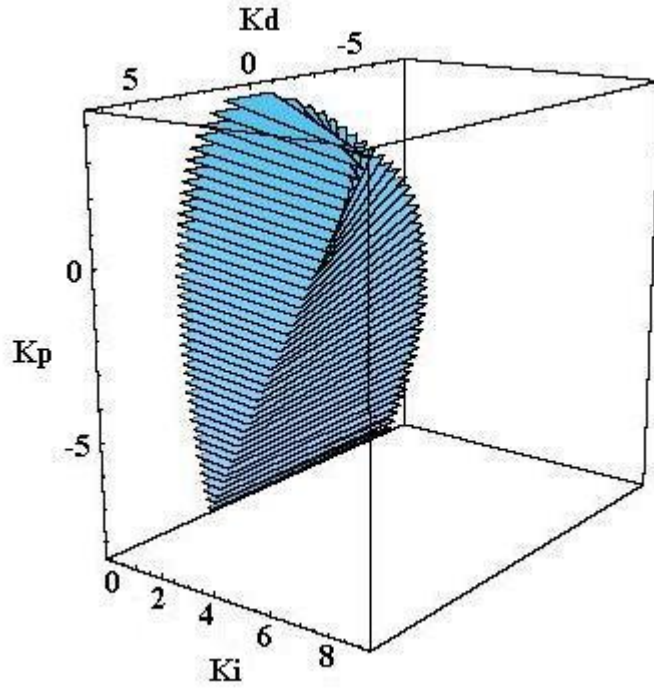


Şekil 3.2 : $K_d - K_i$ düzlemindeki kararlılık bölgeleri için kararsız kutup sayıları

3.3 Kararlılığı Sağlayan K_p Aralığının Belirlenmesi

Bir önceki bölümde oransal terim K_p sabitlendiğinde kararlılığı sağlayan PID katsayılarının kolayca bulunabileceği gösterilmişti. Tanıtılan yöntem ile 2 boyutta bir ızgaralamaya gerek duymadan kararlılığı sağlayan katsayıları bulmak mümkündür. Kararlılığı sağlayan bütün kontrolör katsayı kümesinin bulunabilmesi için 3. boyutta, yani K_p boyunca bir ızgaralama gerekmektedir. K_p 'nin ızgaralanma aralığının nasıl bulunacağı ise Söylemez ve ark. tarafından yapılan çalışmada ayrıntılı olarak

açıklanmıştır [16]. Sonuç olarak örnek 1 ve 2’de ele alınan sistem için kararlılığı sağlayan PID kontrolör katsayıları bu yöntem ışığında şu şekilde elde edilir:



Şekil 3.3 : Kararlılığı sağlayan PID katsayıları

Verilen bu yöntem ile PID kontrolör kullanarak kararlılığı sağlama problemine tamamen analitik bir çözüm getirilmiştir. Kararlılığı sağlayan bölgelerin bulunabilmesi için 2 boyutta ızgaralama yerine sadece K_p ızgaralanarak işlem yükü azaltılmaktadır. Bu son yöntem ile kararlılığı sağlayan PID katsayılarının hesaplanması hızlı ve kolay bir şekilde gerçekleşmektedir. Ayrıca bu yöntemi parametrik belirsizlikleri de içerisine alacak şekilde geliştirmek ve sonuçta bulunan katsayıların dayanıklı kararlılığı sağlaması mümkündür [12].

Şimdiye kadar oransal kontrolör, PI kontrolör ve PID kontrolör ile bölgesel kararlılığın ve Hurwitz kararlılığının sağlanmasına yönelik yapılmış olan çalışmalardan bahsettik. Bahsettiğimiz bu yöntemler, dayanıklılığı da içine alacak şekilde parametrik belirsizliklere sahip olan sistemler içinde genişletilebilir. Bu şekilde dayanıklı kontrolörler tasarlanmış olur.

Bu tip yaklaşımlar genelde oldukça pratik olmakla ve uygulama aşamasında kullanılmak üzere tasarım serbestliği sağlamakla birlikte dayanıklılığı sağlayan PID kontrolör katsayı kümesinden seçilen kontrolör katsayılarının sistemin zaman tanım

bölgesi davranışını ne şekilde etkileyeceği sorusuna cevap vermekte yetersiz kalmaktadırlar.

Bir sistemin zaman tanım bölgesi karakteristiğini belirleyen en önemli unsurlardan birisi kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarıdır. Baskın kutupların konumuna bakılarak sistemin doğal frekansı ve sönüm oranı gibi önemli karakteristikleri belirlenebilir

Biz de çalışmamızın bir sonraki bölümünde PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemini ele alıp daha sonra bunu çalışmamızın asıl hedefi doğrultusunda belirsiz parametrelili sistemler için geliştireceğiz.

4. PID KONTROLÖR İLE BASKIN KUTUP ATAMA

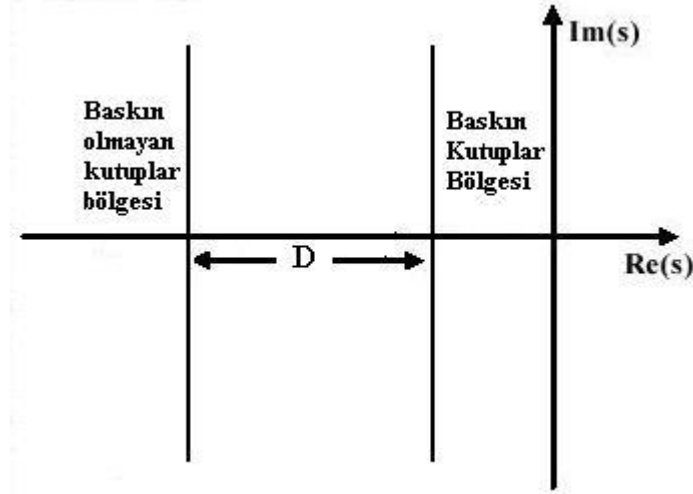
Kapalı-çevrim sistem kutupları sadece lineer sistemlerin kararlılığında değil, dinamik cevabında da oldukça kritik bir role sahiptir. Sistem kutuplarının bilinmesiyle sistemin uygulanan girişe vereceği cevap hakkında kabaca bilgi sahibi olabiliriz. Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin kontrolünde, kapalı çevrim şartlar altında sistem kutuplarını belirleyebiliyorsak kapalı çevrim sistemin kararlılığı ve dinamik cevabı ile ilgili güçlü fikirlere sahip oluruz. Kapalı çevrim sistem kutuplarının belirlenmesi işlemi yaygın olarak kutup atama ismiyle anılır.

Analiz ve tasarımda kapalı çevrim sistem geçici cevabını daha çok etkileyen kutupları belirlemek ve bunları baskın kutuplar olarak adlandırmak yaygın bir yöntemdir.

Uygulamada karşılaşılan kontrol sistemlerinin çoğu ikinci dereceden daha yüksek olduğundan yüksek dereceli sistemleri geçici cevap yönünden daha düşük dereceli sistemler cinsinden yaklaşık ifade eden yöntemler kullanılır. Tasarımda sistemin dinamik davranışını kontrol ederken, sistem geçici cevabını daha çok etkileyen baskın kutuplardan yararlanılır.

Sol yarı s-düzleminde sanal eksene yakın kutuplar görece yavaş zayıflayan geçici yanıtlara neden olurken, sanal eksene uzak kutuplar etkileri çabuk azalan zaman yanıtlarına sebep olur [17].

Baskın kutuplar ile baskın olmayan kutuplar arasındaki D mesafesi (Şekil 4.1) tartışma konusudur. Sorun geçici yanıt yönünden kutbun ne kadar geride olması gerektiğinden kaynaklanmaktadır. Uygulamada eğer bir kutbun gerçel kısmı, bir baskın kutup yada kutup çiftinin gerçel kısmından, en az 5 ile 10 katından daha fazla ise baskın olmadığı kabul edilir. Burada mutlak koordinatlar verilmemiştir ancak baskın kutuplar için tercih edilen bölgenin $\zeta = 0.707$ 'ye karşı düşen doğru üzerinde odaklandığı görülür. Ayrıca tasarımda baskın olmayan kutuplar s-düzleminde istenildiği kadar uzağa yerleştirilemez. Aksi halde kağıt üzerinde belirlenen sistemin parametreleri gerçek sistem elemanları ile gerçekleştirilemeyebilir [17].



Şekil 4.1 : Baskın olan ve olmayan kutuplara ilişkin s-düzlemi bölgeleri

Bir sistemin zaman tanım bölgesi karakteristiğini belirleyen en önemli unsurlardan birisi kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarıdır. Baskın kutupların konumuna bakılarak sistemin doğal frekansı ve sönüm oranı gibi önemli karakteristikleri belirlenebilir.

Sistem geçici yanıtı, kapalı çevrim karakteristik polinomu kutuplarının s-düzlemindeki konumuna çok fazla bağlıdır. Ancak bütün kutupların atanması yüksek dereceli kompleks yapıda kontrolörler yada durum geri beslemesi gerektirir. Durum geri beslemesi pek çok gerçek sistemde durumları ölçmek mümkün olmadığından yada pahalı olduğundan pratik değildir [14].

Günümüzde orantı-integral-türev (PID) tipi kontrolörler pratik hayatta kullanılan kontrolörlerin büyük bir çoğunluğunu oluşturmaktadır [1]. Bu nedenle baskın kutup atama işleminin PID kontrolör gibi pratik hayatta en çok kullanılan kontrolörler ile yapılabilmesinin uygulanabilirlik açısından büyük avantajlar getireceği açıktır.

Geçtiğimiz yıllarda parametreleri belirli bir sistem için PID kontrolör ile kapalı çevrim sistemin baskın iki kutbunu istenilen noktalara yerleştiren ve kalan (baskın olmayan) bütün kutupları da sol yarı s- düzleminde belli bir noktanın solunda kalacak şekilde sınırlandıran bir yöntem ortaya konmuştur [14]. Bu yöntem ile sistem baskın kutuplarının istenilen yerlerde konumlandırılması yani sistem performansı açısından önceden öngörülen birçok tasarım kriterinin sağlanması mümkün olmaktadır.

Çalışmamızın bu bölümünde Söylemez tarafından ortaya konan parametreleri belirli bir sistem için PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi incelenecektir. Sonraki bölümlerde ise bu yöntem çalışmamızın ana hedefi doğrultusunda belirsiz parametrelili sistemleri, yani dayanıklılığı da içine alacak şekilde geliştirilecektir.

Transfer fonksiyonu şu şekilde verilen lineer zamanla değişmeyen tek giriş tek çıkışlı sistemi ele alalım:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.1)$$

Burada $N(s)$ ve $D(s)$ sistem transfer fonksiyonunun sırasıyla pay ve payda polinomları olup şu şekilde verilmiş olsunlar

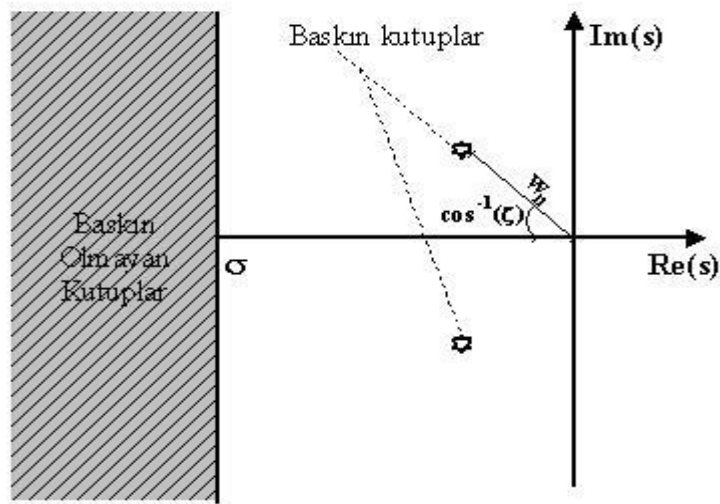
$$N(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \Lambda + b_1s + b_0 \quad (4.2)$$

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \Lambda + a_1s + a_0 \quad (4.3)$$

Çalışmamızın bu bölümünde parametreleri belirli bir sistem için transfer fonksiyonu

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \text{ şeklinde verilmiş bir PID tipi kontrolör kullanılarak kapalı}$$

çevrim sistem kutuplarından baskın olan iki tanesini istenilen noktalara yerleştiren ve kalanını da sol yarı s-düzleminde σ gibi belli bir noktanın solunda kalacak şekilde sınırlandıran (Şekil-4.2) bir yöntem üzerinde durulacaktır.



Şekil 4.2 : Baskın ve baskın olmayan kutuplar

4.1 PID Kontrolör ile Kapalı Çevrim Baskın Kutupların Atanması

PID tipi kontrolöre ilişkin transfer fonksiyonu şu şekilde verilmiş olsun:

$$G_{PID}(s) = \frac{K_i + K_p s + K_d s^2}{s} \quad (4.4)$$

Kontrol edilen sistem $G(s)$ olmak üzere kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonu şu şekilde bulunur:

$$G_c(s) = \frac{G(s)G_{PID}(s)}{1 + G(s)G_{PID}(s)} = \frac{N(s)(K_i + K_p s + K_d s^2)}{sD(s) + N(s)(K_i + K_p s + K_d s^2)} \quad (4.5)$$

Öyleyse kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomunu ($p_c(s)$) şu şekilde ifade etmek mümkündür:

$$p_c(s) = sD(s) + \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \\ K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \Lambda & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ M \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Basit matris işlemleri sonucunda şu denklem elde edilir:

$$\delta(s) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \Lambda & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & s^2 & s^3 \\ M & M & M \\ s^{n-1} & s^n & s^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \\ K_d \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Burada $\delta(s)$ fark polinomu olarak adlandırılır ve $\delta(s) \triangleq p_c(s) - sD(s)$ olarak tanımlanır.

Kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomunun katsayıları α_i ile gösterilirse;

$$p_c(s) = \alpha_{n+1}s^{n+1} + \alpha_n s^n + K + \alpha_1(s) + \alpha_0 \quad (4.8)$$

yazılıp (4.7) numaralı eşitlikte s 'nin aynı kuvvetlerine ilişkin katsayılar eşitlenerek şu matris denklemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 - a_0 \\ \alpha_2 - a_1 \\ M \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ M & M & M \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \\ K_d \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$\underset{=\delta}{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 - a_0 \\ \alpha_2 - a_1 \\ M \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{bmatrix}} = \underset{=Z}{\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ M & M & M \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & b_{n-1} \end{bmatrix}} \underset{=f}{\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \\ K_d \end{bmatrix}}$

Yukarıdaki denklemde tanımlanan Z matrisi $(n+2) \times 3$ boyutunda olup, ilk sütunu Z_1 , son iki sütunundan oluşan matris ise Z_2 ile gösterilecektir. Benzer şekilde

$k = K_i$ ve $f_2 = \begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix}$ olarak tanımlanırsa son matris denklemini;

$$\delta = [Z_1 \quad Z_2] \begin{bmatrix} k \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$= Z_1 k + Z_2 f_2 \quad (4.11)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu noktadan sonra $k = K_i$ parametresini serbest parametre olarak düşünerek f_2 vektörünü serbest parametreler cinsinden baskın kutupları atayacak şekilde bulacağız.

Baskın kutuplara ilişkin sönüm katsayısı (ζ) ve doğal frekansın (ω_n) belirlendiğini varsayalım. Bu durumda kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomu şu şekilde ifade edilebilir:

$$p_c(s) = p_d(s)p_e(s) \quad (4.12)$$

Burada $p_d(s)$ sistem baskın kutuplarına karşı düşen polinomu göstermekte olup;

$$p_d(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4.13)$$

olarak verilmiştir. $d_1 = 2\zeta\omega_n$ ve $d_0 = \omega_n^2$ olarak tanımlanırsa;

$$p_d(s) = s^2 + d_1s + d_0 \quad (4.14)$$

olacaktır. (4.12) numaralı eşitlikte gösterilen $p_e(s)$ polinomu ise sistem baskın olmayan kutuplarına karşı düşen rezidü polinomu olarak adlandırılır.

$$p_e(s) = e_{n-1}s^{n-1} + e_{n-2}s^{n-2} + \Lambda + e_1s + e_0 \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu ifadelerden yola çıkarak fark polinomu yazılacak olursa:

$$\delta(s) = p_e(s) - sD(s) \quad (4.16)$$

$$= p_d(s)p_e(s) - sD(s) \quad (4.17)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_d(s)e_i s^i \right) - sD(s) \quad (4.18)$$

Elde edilen son denklemde s 'nin aynı kuvvetlerine ilişkin katsayılar birbirine eşitlenirse;

$$\delta = \delta_0 + D_p e \quad (4.19)$$

matris denklemi elde edilir. Burada δ_0 , $-sD(s)$ 'in katsayılarından oluşan bir vektör olup

$$\delta_0 = [0 \quad -a_0 \quad \Lambda \quad -a_{n-1} \quad -1]^T \quad (4.20)$$

şeklinde verilmiştir. Eşitlik (4.19)'da verilen e bilinmeyen e_i katsayılarından oluşan bir vektör olup

$$e = [e_n \quad e_{n-1} \quad \Lambda \quad e_1 \quad e_0]^T \quad (4.21)$$

şeklindedir. D_p ise $(n+2) \times n$ boyutunda bir matris olup

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 & d_0 \\ 0 & 0 & & d_0 & d_1 \\ M & M & N & d_1 & 1 \\ 0 & d_0 & N & 1 & 0 \\ d_0 & d_1 & N & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & & M & M \\ 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

formatındadır.

(4.11) ve (4.19) numaralı denklemler eşitlenirse;

$$\delta = Z_1 k + Z_2 f_2 = \delta_0 + D_p e \quad (4.23)$$

elde edilir. Şu halde;

$$\delta - Z_2 f_2 = D_p e \quad (4.24)$$

olacaktır. Matris formatında

$$\delta = [Z_2 \quad -D_p] \begin{bmatrix} f_2 \\ e \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\delta = X f \quad (4.26)$$

elde edilir. Bu son denklem incelenecek olursa δ vektörü bilinenler ve serbest $k (= K_i)$ parametresini içermektedir. X $(n+2) \times (n+2)$ boyutunda kare bir matris olup gene bilinenlerden oluşmaktadır. f ise baskın kutupları istenildiği şekilde konumlandırmak için kullanılacak olan iki serbest parametreden oluşan f_2 vektörü ve bilinmeyen e_i katsayılarından oluşmaktadır. Böylece baskın kutup atama probleminde bilinmeyenler bilinenler cinsinden şu şekilde yazılırlar:

$$f = X^{-1} \delta \quad (4.27)$$

Bu durumda baskın kutupların atanması için

$$f_2 = \begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} f \quad (4.28)$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} \hat{\delta} \quad (4.29)$$

şeklinde seçilmelidir. Burada I_2 2×2 boyutunda birim matrisi temsil etmektedir.

4.2 Baskın Olmayan Kutupların Sınırlandırılması

Baskın kutupların atanması sırasında PID kontrolörünün 3 serbest parametresinden iki tanesi (genelde K_p ve K_d) kullanılmaktadır. Geriye kalan 3. parametre ise baskın olmayan kutupların belirli bir sol yarı s-düzleminde kalmalarını sağlamak için kullanılabilir. (4.27) numaralı denkleme bakılacak olursa rezidü polinomunun katsayıları ;

$$e = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} \hat{\delta} \quad (4.30)$$

şeklinde olacaktır. Öyleyse rezidü polinomu katsayıları;

$$e = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} (\delta_0 - Z_1 k) \quad (4.31)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} \delta_0 - \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} Z_1 k \quad (4.32)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Bu eşitlikler yazıldıktan sonra baskın olmayan kutupları içeren rezidü polinomunu aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$p_e(s) = A'(s) + kB'(s) \quad (4.33)$$

$$A'(s) \text{ polinomu katsayıları} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} \delta_0 \quad (4.34)$$

$$B'(s) \text{ polinomu katsayıları} = -\begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} Z_1 \quad (4.35)$$

Katsayı vektörlerinde görebileceğimiz gibi bu polinomların katsayıları tamamen bilinenlerden oluşmaktadır. $p_e(s)$ polinomunun reel kısımlarının σ 'dan küçük

olması için $p_e(s+\sigma)$ polinomu kararlı olmalıdır. Yani $p_e(s+\sigma)$ polinomunun kararlılığını sağlamakla aslında baskın olmayan kutupların sol yarı s-düzleminde σ noktasının solunda kalmasını sağlıyoruz.

$$p_e(s+\sigma) = A'(s+\sigma) + kB'(s+\sigma) \quad (4.36)$$

$$= A(s) + kB(s) \quad (4.37)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece kutup sınırlandırma problemi transfer fonksiyonu $G_p(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ şeklinde verilmiş bir sistemi bir $k = K_i$ kazancı ile kararlı hale getirme problemine indirgenmiştir. Bu problemin çözümü cebrik olarak çeşitli yerlerde verilmiştir [10,15].

Biz burada ikinci bölümde anlattığımız (Teorem 2.2) yöntemi kullanacağız.

Böylece baskın olmayan kutuplar K_i parametresi kullanılarak sınırlandırılırken, baskın kutuplar da K_p , K_d parametreleri kullanılarak atanmış olur. Şimdi bu yöntemi bir uygulama üzerinde görerek anlamaya çalışalım.

Örnek 4.1

Transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2388s + 5616}{s^5 + 13.5s^4 + 72.5s^3 + 145s^2 - 136s - 96} \quad (4.38)$$

ve açık çevrim sistem kutupları; $s_{1,2} = -4 \pm j4$, $s_3 = -6$, $s_4 = -0.5$, $s_5 = 1$ şeklinde olan bir sistemi ele alalım. PID kontrolör kullanarak, kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarını $-1 \pm j$ 'de ve baskın olmayan diğer bütün kutuplarını gerçel kısımları $\sigma = -6.5$ 'tan küçük olacak şekilde konumlandırmak isteyelim.

Bu durumda baskın kutuplara ait polinom şu şekilde olacaktır:

$$p_d(s) = (s+1+j)(s+1-j) = s^2 + 2s + 2 \quad (4.39)$$

Tanımlardan yola çıkarak;

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_1 = \begin{bmatrix} 5616 \\ 2388 \\ 412 \\ 33 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5616 & 0 \\ 2388 & 5616 \\ 412 & 2388 \\ 33 & 412 \\ 1 & 33 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 96 \\ 136 \\ -145 \\ -72.5 \\ -13.5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

olduğu görülebilir.

Buradan;

$$\hat{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0002 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0007 & 0.0010 & -0.0005 & -0.0010 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0005 & 0.0002 & 0.0005 & -0.0015 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0005 & 0.0002 & 0.0005 & -1.0015 \\ -0.0022 & -0.0036 & 0.0116 & -0.0159 & 0.0086 & -0.9855 & 1.9538 \\ -0.0290 & -0.0383 & 0.1345 & -0.1925 & -0.8840 & 2.1530 & -2.5380 \\ -0.1853 & -0.1542 & 0.6790 & -2.0496 & 2.7411 & -1.3831 & -2.7161 \\ -0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Buradan baskın olmayan kutuplara ait olan polinom (rezidü polinomu) katsayıları;

$A'(s)$ polinomu katsayıları =

$$= [0 \quad I_5] \hat{X}^{-1} \delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} \delta_0 = \begin{bmatrix} 1.086 \\ 14.25 \\ 80.094 \\ 197.39 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$B'(s)$ polinomu katsayıları =

$$= -[0 \quad I_n] \hat{X}^{-1} Z_1 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{X}^{-1} Z_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 16.5 \\ 206 \\ 1194 \\ 2808 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

olduğu düşünülürse $A'(s)$ ve $B'(s)$ polinomları şu şekilde elde edilir:

$$A'(s) = 1.086s^4 + 14.25s^3 + 80.094s^2 + 197.39s \quad (4.44)$$

$$B'(s) = 0.5s^4 + 16.5s^3 + 206s^2 + 1194s + 2808 \quad (4.45)$$

$A(s) = A'(s - 6.5)$ ve $B(s) = B'(s - 6.5)$ polinomları ise aşağıdaki gibi elde edilir:

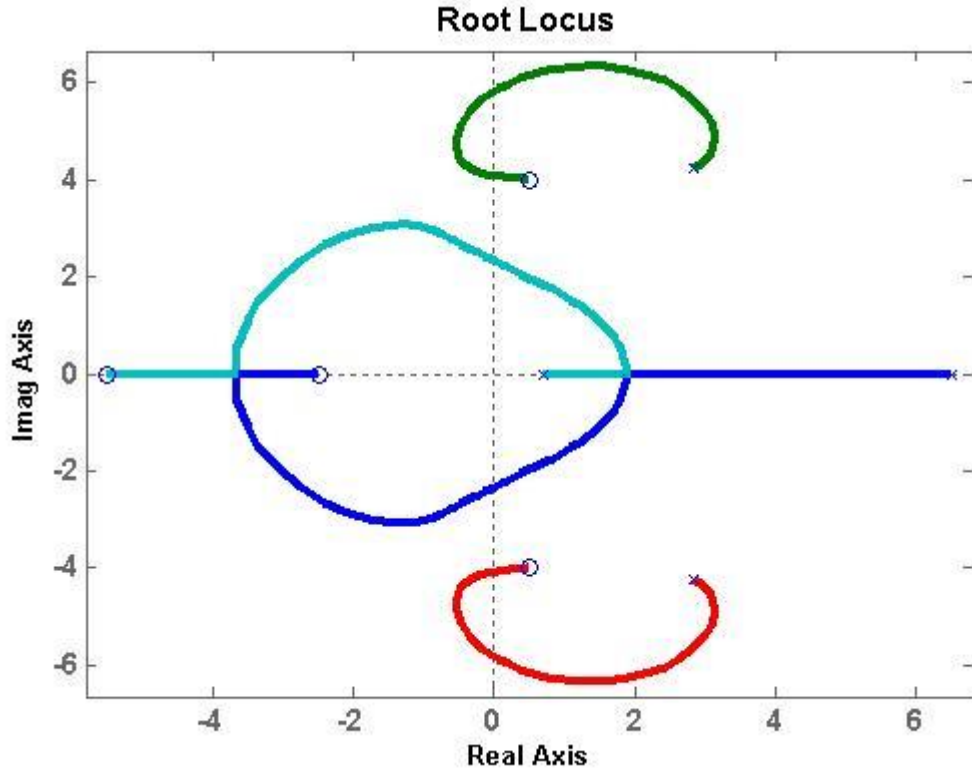
$$A(s) = 1.0859s^4 - 13.9832s^3 + 77.4974s^2 - 230.5365s + 126.0108 \quad (4.46)$$

$$B(s) = 0.5s^4 + 3.5s^3 + 11s^2 + 58.1250s + 111.7188 \quad (4.47)$$

Öyleyse problem $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 6.5) = A(s) + kB(s)$ polinomunu kararlı yapan $k = K_i$ kazançlarının bulunmasına indirgenmiştir. $p_e(s)$ polinomunun reel kısımlarının $\sigma = -6.5$ 'tan küçük olması için $p_e(s + \sigma)$ polinomu kararlı olmalıdır. Yani $p_e(s + \sigma)$ polinomunun kararlılığını sağlamakla aslında baskın olmayan kutupların sol yarı s-düzleminde $\sigma = -6.5$ noktasının solunda kalmasını sağlayacağız.

Burada kararlılığı kontrol etmek üzere ve kararlılığı sağlayan kazanç aralıklarını bulmak üzere 2. Bölümde tanıttığımız Teorem 2.2 ile öne sürülen yöntem kullanılacaktır. Ancak öncelikle sistemin kapalı çevrim baskın olmayan kutuplarının gerçel kısımlarını -6.5 noktasının solunda olacak şekilde konumlandırıp konumlandırılamayacağı sorusu cevap bulmalıdır. Bu sorunun cevabı $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 6.5) = A(s) + kB(s)$ polinomunun kök yer eğrisinin incelenmesiyle açığa çıkar.

Şimdi bu polinoma ilişkin kök-yer eğrisini inceleyelim

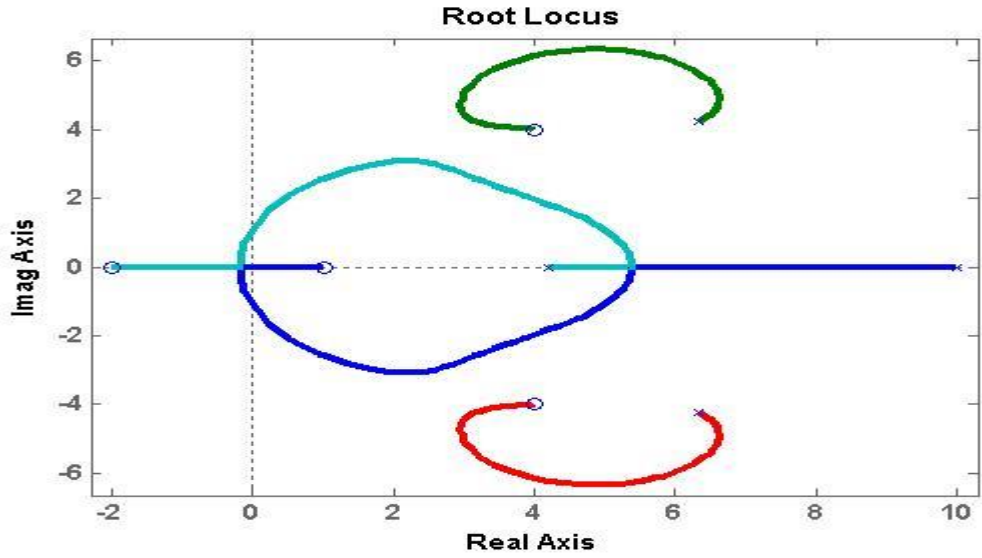


Şekil 4.3 : $p_e(s - 6.5)$ için kök-yer eğrisi

Kök-yer eğrisinden de gördüğümüz üzere $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 6.5) = A(s) + kB(s)$ polinomunu kararlı yapan $k = K_i$ kazançları mevcut olabilir. Bu kazançların mevcut olması baskın olmayan kutupların hepsini -6.5 noktasının solunda olacak şekilde sınırlandırabileceğimiz anlamına gelir. Aslında burada PID ile baskın kutup atama yöntemini uygulanabilir kılan da bu noktadır. Yani baskın olmayan kutupları istediğimiz noktanın solunda olacak şekilde sınırlandırabilecek kazançların varlığıdır. Eğer kök yer eğrisinden baskın olmayan kutupları sınırlandırmak için, yani $p_e(s + \sigma)$ polinomunu kararlı hale sokmak için gerekli kazancın mevcut olmadığını görüyorsak, bu yöntemi uygulayamayız veya σ değerini, kararlı hale sokan kazançların var olduğunu görene kadar arttırmalıyız. σ değerini çok büyük seçersek de baskın ve baskın olmayan kutuplar arasındaki mesafe çok az olacaktır. σ yöntemi uygulanabilir kılacak şekilde ve baskın kutuplar ile baskın olmayan kutuplar arasındaki mesafe 5-10 kat olacak şekilde seçilmelidir.

Örneğin yaptığımız uygulamada baskın olmayan kutupları -6.5 noktasının solunda değil de, -10 noktasının solunda konumlandırmak istediğimizi düşünelim. Bu

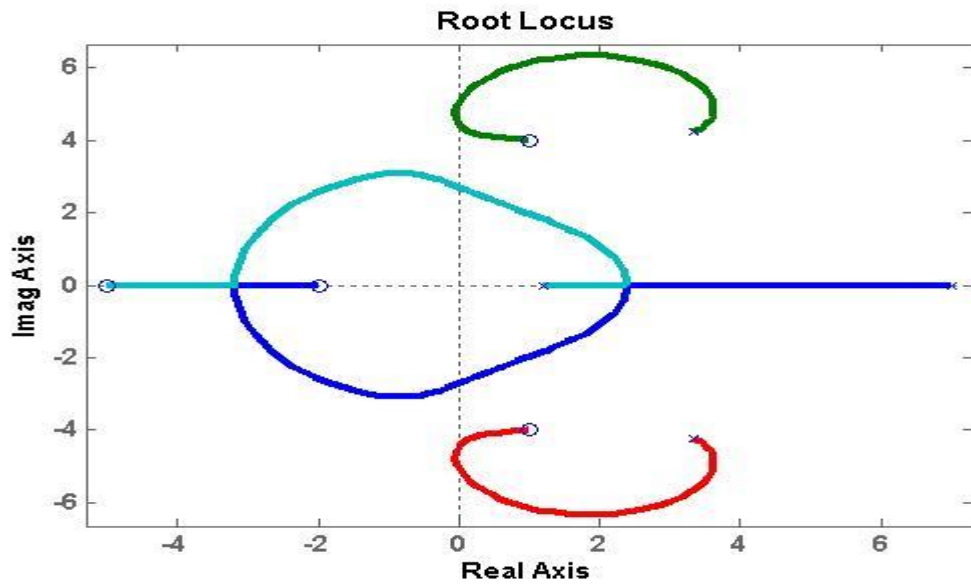
durumda $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 10) = A(s) + kB(s)$ polinomunun kök-yer eğrisini inceleyelim.



Şekil 4.4 : $p_e(s - 10)$ için kök-yer eğrisi

Kök-yer eğrisinden de görmekteyiz ki $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 10) = A(s) + kB(s)$ polinomunu tamamen kararlı yapan $k = K_i$ kazançları mevcut değildir. Bu kazançların mevcut olmaması baskın kutupların tamamen sınırlandırılmayacağını yani σ değerinin -10 'dan daha büyük bir değer seçilmesi gerektiğini ifade eder.

$\sigma = -7$ seçelim. Bu durumda $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 7) = A(s) + kB(s)$ polinomunun kök-yer eğrisini inceleyelim.



Şekil 4.5 : $p_e(s - 7)$ için kök-yer eğrisi

Kök-yer eğrisinden de gördüğümüz üzere $p_e(s + \sigma) = p_e(s - 7) = A(s) + kB(s)$ polinomunu kararlı yapan $k = K_i$ kazançları mevcut olabilir. Bu kazançların tam sınır koşullarında mevcut olması baskın olmayan kutupların hepsini en küçük $\sigma = -7$ civarında bir noktanın solunda olacak şekilde sınırlandırabileceğimiz anlamına gelir. Zaten uygulamamızda da σ değeri -6.5 noktasında seçilmişti.

Şimdi σ değerinin nasıl seçilebileceğine dair analizlerden sonra örneğimize devam edelim.

$p_e(s + \sigma) = p_e(s - 6.5) = A(s) + kB(s)$ polinomunu kararlı kılan $k = K_i$ kazançlarının bulunması için ikinci bölümde anlattığımız (Munro, Söylemez ve Baki 1999 tarafından izlenen yöntem) yöntem ile hesaplamaya çalışalım.

$A(s)$ ve $B(s)$ polinomları s 'nin tek ve çift kuvvetlerine karşı düşen bileşenlerine ayrılıp, karesel frekans değişkeni v kullanıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$A_e(-v) = 1.0859v^2 - 77.4974v + 126.011, \quad A_o(-v) = 13.9832v - 230.5365 \quad (4.48)$$

$$B_e(-v) = 0.5v^2 - 11v + 111.7188, \quad B_o(-v) = -3.5v + 58.1250 \quad (4.49)$$

Yine aynı teoremden yola çıkarak; ((2.17) - (2.19)) eşitlikleri uyarınca

$$X(v) = v^4 - 100v^3 + 2656v^2 - 23444v + 14078 \quad (4.50)$$

$$Y(v) = -11v^3 + 603v^2 - 9044v + 33080 \quad (4.51)$$

$$Z(v) = v^4 + 27v^3 - 168v^2 + 33616v + 15879 \quad (4.52)$$

olacaktır. $\frac{X(0)}{Z(0)} = 0.8866$ ve $\frac{X(\infty)}{Z(\infty)} = 0.4605$ olduğu görülecektir. $Y(v)$ 'nin pozitif

gerçek köklerinin 5.4408, 16.6615 ve 33.8123 olduğu ve bu kökler için $\frac{X(v)}{Z(v)}$

rasyonel fonksiyonun aldığı değerler sırasıyla -0.2530, -0.0779 ve -0.2486 olduğu göz önüne alınırsa (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri bir sonraki sayfada Tablo 4.1'deki gibi bulunur:

Tablo 4.1: (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	Kazanç Aralığı
1	5.4408	-0.2530	-3.4357	-2	4	$0 < k < 3.9526$
2	33.8123	-0.2486	-5.2514	-2	2	$3.9526 < k < 4.0225$
3	16.6615	-0.0779	2.0769	2	0	$4.0225 < k < 12.8370$
4	∞	0.4605	$-\infty$	1	2	$k > 12.83 \cup k < -2.17$
5	0	0.8866	-9.0437	1	3	$-2.17 < k < -1.13$
6	-	-	-	-	4	$-1.13 < k < 0$

İkinci bölümde geniş şekilde ele alınan Teorem 2.2 uyarınca

$G_p(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, yi kararlı yapan kazançlar, yani baskın olmayan bütün kutupların

$\sigma = -6.5$ doğrusunun sol tarafında kalmasını sağlayan aralık;

$$4.0225 < k = K_i < 12.8370 \quad (4.53)$$

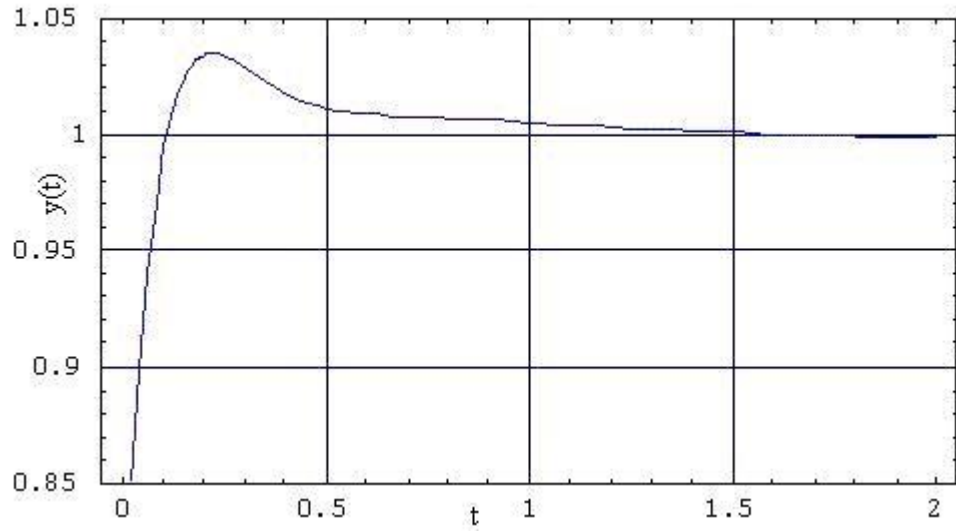
şeklinde olmalıdır. Örnek olarak $k = K_i = 7$ seçelim. (4.29) numaralı eşitlik uyarınca;

$$f_2 = \begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix} = [I_2 \quad 0] X^{-1} (\delta_0 - Z_1 K_i) = \begin{bmatrix} 7.0874 \\ 3.5859 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

olarak bulunur. Gerçekten de $K_p = 7.0874, K_d = 3.5859$ ve $K_i = 7$ için kapalı çevrim sistem karakteristik polinomunun kökleri şu şekilde elde edilir:

$$s_{1,2} = -1 \pm j, \quad s_{3,4} = -7.1146 \pm 2.79368j, \quad s_{5,6} = -7.03206 \pm 4.89042j \quad (4.55)$$

Böylece verilen yöntem ile sistemin kapalı çevrim sistem baskın kutupları $-1 \pm j$ noktalarına atanmış, baskın olmayan kutupların gerçel kısımları -6.5'ten küçük olacak şekilde sınırlandırılmıştır. Üstteki bu yöntem ile bulunan PID parametreleri için sistemin birim basamak cevabı şu şekildedir:



Şekil 4.6 : Sistem birim basamak yanıtı

PID kontrolörünün eklediği sıfırlar neticesinde sistem kısa sayılabilecek bir sürede yerine oturmaktadır. Ancak çalışmamızda sıfırların etkisi göz önüne alınmamış, sadece kutupların konumlarıyla ilgilenilmiştir.

Çalışmamızın bu bölümünde PID kontrolör ile baskın kutup atama problemini ele aldık. Bu yöntem ile yüksek dereceli kontrolöre gerek duymadan ve pratik hayatta en çok kullanılan kontrolörlerden biri olan PID kontrolör ile baskın kutup ataması yapılabilmektedir. Baskın kutup atamanın PID kontrolör ile yapılması yöntemin pratik olarak da uygulanabilir olduğunu göstermektedir. Böylece hem kararlılık hem de sistem dinamik performans kriterleri aynı anda sağlanmaktadır.

Çalışmamızın bundan sonraki bölümünde PID kontrolör ile baskın kutup atama problemini, çalışmamızın ana hedefi doğrultusunda, dayanıklılığı da kapsayacak şekilde geliştireceğiz. Böylece elde edilecek olan kontrolör sistemdeki belirsiz parametre değişimlerini de kompanze edecek şekilde dayanıklı bir PID kontrolörü olacaktır.

5. BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN PID KONTROLÖR İLE BASKIN KUTUP ATAMA

Çalışmamızın bu bölümünde Söylemez tarafından yapılan çalışmadan [14] hareketle transfer fonksiyonu sınırlı (interval) tipte belirsiz parametreler içeren bir sistem için, sistem ailesine ait tüm üyelerin baskın iki kutbunu nominal sistem baskın kutuplarından sapma en az olacak şekilde atayacak ve kalan bütün (baskın olmayan) kutupları da sol yarı s-düzleminde önceden öngörülecek belli bir noktanın solunda olacak şekilde sınırlandıracak bir yöntem ortaya konacaktır.

Bu yöntem ile parametreleri belirsiz bir sistemin her üyesinin aynı anda nominal koşullara en yakın çalışmasını sağlayacak tek bir PID kontrolörü belirlenebilmektedir. Dolayısıyla elde edilen PID kontrolörü hem dayanıklı olarak kararlılığı sağlayacak hem de baskın kutup atama işlemini gerçekleştirerek öngörülen performans kriterlerinin gerçekleşmesini sağlayacaktır. Yöntemin ayrıntıları açıklanmadan önce belirsiz sistemler hakkında bazı ön bilgiler verilecektir.

5.1 Belirsiz Sistemler ve Belirsiz Sistemler İçin Kutup Atama Kavramı

Gerçek hayattaki sistemlerin çoğu belirsizlikler dolayısıyla tam bir doğrulukla modellenememektedir. Çoğu zaman modellenememiş sistem dinamikleri, üretim toleransları, zaman gecikmeleri ve doğrusal olmayan yaklaşıklıklardan kaynaklanan belirsizlikler söz konusu olmaktadır [19]. Bu sebeplerden dolayı ele alınan sistemleri genellikle değeri tam olarak bilinmeyen fakat alt ve üst sınırları bilinen belirsiz parametreler ile modellemek daha gerçekçi bir yaklaşımdır. Bu şekilde modellenmiş sistemlere parametrik belirsiz sistemler veya kısaca belirsiz sistemler adı verilir.

Sistemdeki belirsiz parametreleri temsil etmek üzere q vektörü kullanılır :

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \Lambda \quad q_r]^T \quad (5.1)$$

Eğer q vektörü elemanları sınırlı (interval) belirsiz parametrelerden oluşuyorsa şu şekilde ifade edilirler:

$$q_i \in [q_i^-, q_i^+] \text{ veya } q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, (i = 1, 2, \Lambda r) \quad (5.2)$$

q vektörünün nominal çalışma koşulları altındaki değerleri şu şekilde gösterilir:

$$q_n = [q_{1n} \quad q_{2n} \quad \Lambda \quad q_{rn}]^T \quad (5.3)$$

Belirsiz sistem transfer fonksiyonunun belirsiz parametrelerden oluşan q vektörüne bağımlılığını ifade etmek üzere $G(s)$ notasyonu yerine $G(s, q)$ notasyonu kullanılır.

$$G(s, q) = \frac{N(s, q)}{D(s, q)} \quad (5.4)$$

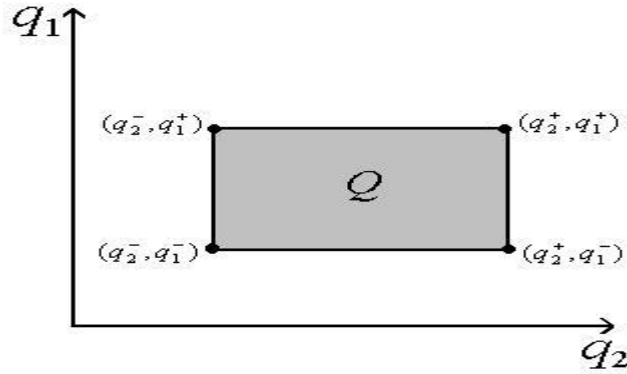
$$N(s, q) = n_0(q) + n_1(q)s + \Lambda + n_m(q)s^m \quad (5.5)$$

$$D(s, q) = d_0(q) + d_1(q)s + \Lambda d_n(q)s^n \quad (5.6)$$

Sistemdeki toplam belirsiz parametre sayısı r olmak üzere sistemdeki belirsizlikleri gösteren r boyutlu yapı *parametre kutusu* ismiyle anılır ve Q ile tanımlanır.

$$Q = \{q : q \in R^r, q_i^- \leq q_i \leq q_i^+\} \quad (5.7)$$

Örneğin 2 belirsiz parametreye sahip bir sistemin parametre kutusu aşağıdaki şekilde görülmektedir:



Şekil 5.1 : İki belirsiz parametreye sahip bir sistemin parametre kutusu

Parametrik belirsiz bir sistemin kutupları genel olarak tek bir kompleks sayılar kümesi değildir, ancak kompleks düzlemde örneğin n bölgeye dağılmış gibi düşünülebilir. Bu bölgeler belirsiz sistem karakteristik polinomunun kök uzayında parametre kutusunun bir yansıması gibi düşünülebilir ve belirsiz sistemin kutup dağılımı olarak adlandırılır.

$$G(s, q) = \frac{N(s, q)}{D(s, q)} \text{ şeklinde tanımlanmış belirsiz bir sistem için kutup atama}$$

kontrolörü tasarlanmak istendiğinde klasik yaklaşım, kapalı çevrim nominal sistem $(q \rightarrow q_n)$ kutuplarını istenilen noktalara atayacak bir kontrolör tasarlamaktır. Bu kontrolör belirsiz sisteme uygulandığında kapalı çevrim sistem kutupları nominal çalışma koşulları altında önceden öngörülmüş noktalarda olacaktır. Sistem belirsiz parametrelerden dolayı bozulmaya uğradığında, yani nominal çalışma koşullarından uzaklaştığında, kapalı çevrim kutuplar da istenilen noktalardan, muhtemelen arzu edilmeyen dinamik cevaplara ve kararsızlığa sebep olacak şekilde uzaklaşacaktır. Belirsiz sistemler için kutup atamak istiyorsak öncelikli amacımız bu uzaklaşmayı minimize etmek, ve tüm bozulmaları kompanze edilecek şekilde belirsiz sistem kutuplarını minimum bozulmayla atayacak bir kontrolör seçmek yani dayanıklı kontrolör tasarlamak olmalıdır.

5.2 Belirsiz Sistemler İçin Kararlılık ve Dayanıklılık Testleri

$p(s, q)$ polinomu, belirsiz parametre vektörü $q = [q_0 \quad q_1 \quad \Lambda \quad q_n]^T$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$p(s, q) = q_0 + q_1 s + \Lambda + q_n s^n \quad (5.8)$$

Her bir belirsiz parametre q parametre kutusu boyunca şu şekilde değişsin;

$$Q = \{q \mid q_i \in [q_i^-; q_i^+], \quad i = 0, 1, 2 \Lambda n\} \quad (5.9)$$

Bu durumda görüldüğü üzere sınırlı tipte belirsiz parametrelerden meydana gelen $p(s, q)$ polinomuna sınırlı (interval) tip polinom adı verilir [18]. Sınırlı tipte bir polinom için katsayılar birbirinden bağımsızdır ve sınırlı tipte belirsiz bir polinom aşağıdaki gibi tanımlanan bir sınırlı tipte belirsiz polinom ailesi üretir:

$$P(s, Q) = \{p(s, q) \mid q \in Q\} \quad (5.10)$$

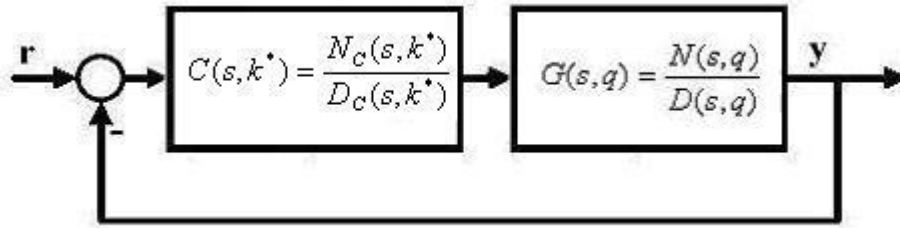
$p(s, q)$ belirsiz polinomunun aşağıdaki gibi tanımlandığını düşünelim:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \quad (5.11)$$

Eğer belirsiz polinom katsayıları aşağıdaki eşitlikte ifade edildiği gibi sabit bir terim ve belirsiz parametre vektörü q ile doğrusal olan bir terimden oluşuyorsa kaymış doğrusal (affine linear) katsayı olarak isimlendirilir.

$$a_i(q) = c_i^T q + b^i \quad (5.12)$$

Pay ve paydası sınırlı tipte polinomlardan meydana gelen bir belirsiz sistemin, sabit serbest parametreler k^* kümesine sahip bir kontrolör ile kontrol edildiğini düşünelim.



Şekil 5.2 : Belirsiz sistem kapalı çevrim kontrolü

Sistem kapalı çevrim transfer fonksiyonu paydası, yani karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$p(s, q) = p_c(s, q, k^*) = N_c(s, k^*)N(s, q) + D_c(s, k^*)D(s, q) \quad (5.13)$$

Görüldüğü gibi pay ve payda polinomları sınırlı tipte belirsiz parametre içeren sistemleri kontrol ettiğimizi düşünürsek, belirli bir kontrol altında sistem kapalı çevrim karakteristik polinomu kaymış doğrusal yapıda olmaktadır. Böylece daha sonra açıklayacağımız kenar polinomları testi gibi kaymış doğrusal tipte belirsiz polinomlara uygulanan kararlılık testlerinin pay ve paydasında sınırlı tipte belirsiz parametre içeren sistemlere, sabit serbest parametreler k^* kümesine sahip bir kontrolör ile kontrol edildiğinde, uygulanabileceğini görmekteyiz.

Buradaki kararlılık testi sabit serbest parametreler kümesi k^* için kapalı çevrim sistem karakteristik polinomunun ($p(s, q) = p_c(s, q, k^*)$) tüm bozulmalara karşı kararlılığının test edilmesi, yani belirsiz parametreleri de içerecek şekilde kararlılığın testi şeklindedir. Burada kararlılık sağlanırsa sistem dayanıklı olarak kararlı olmaktadır.

Öncelikle sınırlı tipte belirsiz sistemlere kararlılık testi uygularken bize temel teşkil edecek ve PID kontrolör ile belirsiz sistemlerin kutuplarını sınırlandırırken de kullanacağımız şu teoremi vermemiz gerekmektedir: (Kharitonov 1978):

Teorem 5.1: Sınırlı (interval) yapıda parametrik belirsizlikler içeren bir polinom ailesi;

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanırsa bu aile ancak ve ancak aşağıdaki 4 adet Kharitonov polinomu kararlı ise kararlıdır:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \Lambda \\ p_2(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \Lambda \\ p_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \Lambda \\ p_4(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \Lambda \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pay veya paydasında sınırlı tipte belirsiz parametreler içeren sistemlerin karakteristik polinomunun da sınırlı yapıda olmaktadır. Böylece Kharitonov teoremini bu tip sistemler için de kullanabileceğimizi görmekteyiz.

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \text{ şeklinde tanımlanmış sınırlı yapıda bir belirsiz polinom için}$$

belirsiz parametre değerlerinin tam olarak minimum yada maksimum değerlerini aldığı polinomlara köşe polinomları adı verilir [18].

Kharitonov teoremi sonsuz sayıda polinomun kararlılığını kontrol etme zorunluluğunu sonlu sayıda polinomun, yani sistem derecesinden bağımsız olarak sadece kritik köşe polinomlarının kararlılığını kontrol etme zorunluluğuna indirgediği için, getirdiği işlemsel kolaylık yönünden oldukça önemlidir.

5.3 Belirsiz Sistemler İçin PID Kontrolör ile Baskın Olmayan Kutupların Sınırlandırılması

Dördüncü bölümde baskın olmayan kutupların sınırlandırılması işlemi için $k = K_i$ parametresi aralığının nasıl bulunacağı ayrıntılı olarak incelenmişti. Bu işlemi paydasında ve payında sınırlı tipte parametrik belirsizlikleri olan sistemler için ele aldığımızda PID kontrolör ile kontrol edilen, bir önceki bölümde verilmiş olan kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$p_c(s, q, k) = sD(s, q) + (s^2 K_d + sK_p + K_i)N(s, q) \quad (5.16)$$

Burada şöyle bir analiz yapmak mümkündür:

- (1) $D(s, q)$ sınırlı yapıda, $N(s, q)$ sabit ise $p_c(s, q, k)$ sınırlı yapıda olacaktır.
- (2) $D(s, q)$ sabit, $N(s, q)$ sınırlı yapıda ise $p_c(s, q, k)$ kaymış doğrusal yapıda olacaktır.
- (3) $D(s, q)$ ve $N(s, q)$ her ikisi de sınırlı yapıda ise $p_c(s, q, k)$ kaymış doğrusal yapıda olacaktır.

Böylece tüm sistem ailesi için baskın olmayan kutupların sınırlandırılması işlemini aynı anda gerçekleştirecek olan aralık, karakteristik polinomları Kharitonov polinomlarından oluşan köşe sistemleri için bulunan K_i aralıklarının kesişimi olacaktır. Burada tasarım aşamasında köşeleri kullanmış oluyoruz. Sadece köşelerin test edilmesi bazı durumlarda yeterli olmamaktadır. Bu nedenlerden dolayı tasarımdan sonra analiz kısmında uzaydaki parametre politopuna ait köşeler dışında kenarlarında kontrolü yapılmalıdır.

K_i parametresi bulunan ortak aralıkta seçildiğinde bir önceki bölümde yapılan hesaplamalar kullanılarak nominal sistemin baskın kutuplarını istenilen noktalara atayacak K_p ve K_d değerlerini bulabiliriz. Üstelik bulunan parametreler için baskın olmayan kutupların gerçel kısımları gerek nominal sistem gerekse belirsiz parametre değişimlerinden dolayı bozulmuş (pertürbe edilmiş) tüm sistemler için sol yarı s-düzleminde belirlenmiş bir noktanın solunda kalacaktır. Burada haliyle tasarımın

büyük bir kısmı halledilmiş bulunmaktadır. Şimdi tasarımda kalan nokta belirsiz sistem ailesi için baskın kutupların nominal sistem baskın kutuplarından sapma en az olacak şekilde sınırlandırılmasıdır.

5.4 Belirsiz Sistemler İçin Baskın Kutupların Sınırlandırılması

Baskın olmayan kutupları sınırlandırdığımıza göre burada dayanıklılık açısından şu soru akla gelmektedir. Bulunan ortak aralıkta seçilecek hangi K_i değeri için baskın kutupların bozulmalardan (pertürbasyonlardan) etkilenmesi minimumdur. Burada K_i bulduğumuz aralıkta belirli aralıklarla değiştirilerek ızgaralanacaktır. Her bulunan $K_i = K_i^*$ değeri için nominal sistemin kutuplarını atayan K_p^* ve K_d^* değerleri bulunacaktır. Bu bulunan değerler nominal sistemin baskın kutuplarını istenilen noktalara atayacak, diğer kutuplar ise sol yarı s-düzleminde önceden belirlenmiş bir noktanın solunda olacak şekilde sınırlandırılacaktır. Üstelik baskın olmayan kutuplar olası tüm bozulmalar için yani belirsizlikler için sınırlandırılmış olacaktır.

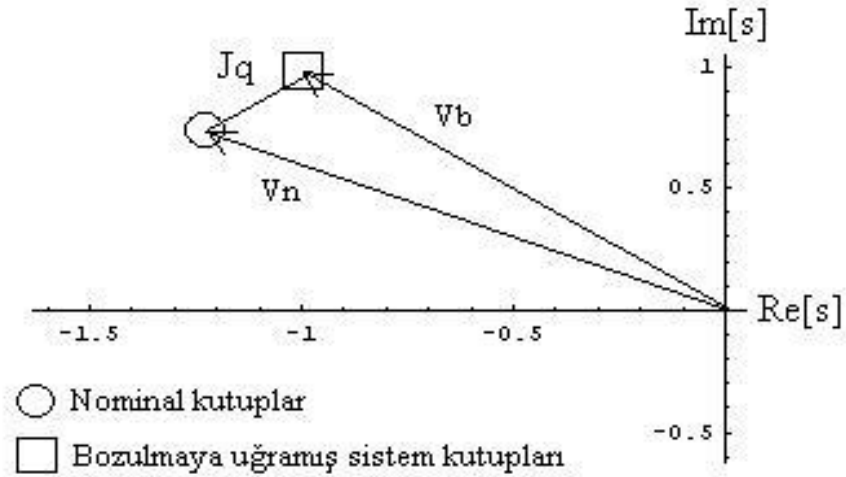
Baskın olan kutupların ise ne kadar bozulduğunu görebilmek için bir performans ölçütü tanımlamamız gerekmektedir. Burada tanımlanması mümkün performans ölçütlerinden birisi de nominal baskın ve bozulmaya uğramış baskın kutuplar arasındaki uzaklıktır.

Kullanacağımız performans ölçütüne J_q diyelim. J_q değeri nominal baskın kutuplar ve belirsiz parametrelerin değişimi ile elde edilmiş yani bozulmaya uğramış baskın kutuplar arasındaki uzaklık olarak tanımlanabilir. Bu durumda

$$J_k = \max(J_q) \quad (5.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada eğer J_k değerini minimize edersek nominal kutuplardan mümkün olabilecek en az sapmayı elde etmiş oluruz. Nominal kutuplar için pozisyon vektörünü V_n , bozulmuş kutuplar için ise V_b ile ifade edersek, nominal ve bozulmuş kutuplar arasındaki uzaklık (Şekil-5.3) olan performans ölçütünü şöyle ifade edilebilir:

$$J_q = \|V_n - V_b\| \quad (5.18)$$



Şekil 5.3 : Kutuplar arasındaki uzaklığa dayalı performans ölçütü

Burada seçilebilecek performans ölçütleri kutuplar arasındaki uzaklıktan başka, baskın kutupların gerçel kısımları ile ters orantılı olarak yerleşme zamanına dayalı performans ölçütü, baskın kutupların sanal kısımlarıyla ters orantılı olarak yükselme zamanına dayalı performans ölçütü, kutupların konum vektörlerinin negatif gerçel eksenle yaptığı açığı temel alarak sönüm oranına dayalı performans ölçütü olabilir [19].

Dolayısıyla daha önce anlattığımız gibi bulunan ortak K_i aralığını ızgaralayıp her bir $K_i = K_i^*$ değeri ve nominal sistem için bulduğumuz K_p^* ve K_d^* değerleri için PID kontrolörleri belirsiz sisteme uyguladığımızda nominal kutuplardan sapma miktarlarını bulabilmek için aşağıdaki eşitlikte görülen kapalı çevrim karakteristik polinomunu kenar polinomları üzerinden ızgaralarız. Burada kenar polinomunu tanımlamamız gerekmektedir.

$$p_c(s, q, k^*) = sD(s, q) + K_d^* s^2 N(s, q) + (K_p^* s + K_i^*) N(s, q) \quad (5.19)$$

$p(s, q)$ sabit dereceli, r adet belirsiz parametre içeren bir polinom olsun. Eğer r adet belirsiz parametreden bir tanesi minimum ve maksimum değerleri arasında değiştirilirken, diğer $(r-1)$ tanesi tam olarak minimum yada maksimum değerini alıyorsa bu polinom ailesi kenar polinom ailesi olarak adlandırılır [18].

Eğer bir polinom r adet belirsiz parametre içeriyorsa $r2^{r-1}$ adet kenar polinomuna sahip olacaktır. Göstermek mümkündür ki bizim ele aldığımız tipte (sınırlandırılmış)

belirsizlikler içeren sistemlerin PID kontrol altında kapalı çevrim sistem karakteristik polinomu kenar polinomlarının kökleri tüm polinom ailesinin köklerini kapsar [18,20-22]. Haliyle baskın kutuplar sınırlandırılırken sadece kenar polinomlarının test edilmesi yeterlidir. Kenar polinomlarının testinde parametre uzayındaki parametre politopunun tüm kenarları kullanılır. Yani performans testi yaparken kenar polinomları kullanılır.

Baskın olmayan kutupların sınırlandırılması için bulunan ortak K_i aralığında her $K_i = K_i^*$ için kenar polinomları üzerindeki ızgaralamadan sonra bulunan performans ölçütlerinin maksimumları grafik üzerinde çizdirilecek olursa, grafikte ölçütün minimum değerini aldığı $K_i = K_i^*$ değeri bizim tasarım noktamız olacaktır. Bu değer için nominal sistem kullanılarak bulunmuş K_p^* ve K_d^* değerleri bizim için optimum parametrelerdir.

Böylece parametreleri belirsiz bir sistemin her üyesinin aynı anda nominal koşullara en yakın çalışmasını sağlayacak tek bir PID kontrolörü belirlenmiş olacaktır.

Burada dayanıklı kontrol teknikleri açısından iki önemli aile olan köşe ve kenar polinom ailelerini etkin şekilde kullanmış oluyoruz. Baskın olmayan kutupların sınırlandırılmasında köşe polinomları, baskın kutupların sınırlandırılmasında ise kenar polinomları kullanılmaktadır. Tasarım aşamasında köşe polinomları, daha sonra tüm kriterlerin sağlanıp sağlanmadığının kontrolü için ise kenar polinomlarından yararlanılmaktadır.

Eğer bir polinom r adet belirsiz parametre içeriyorsa $r2^{r-1}$ adet kenar polinomuna sahip olacağını söylemiştik. Bizim vereceğimiz örneklerde belirsiz parametre sayısı dördü geçmediğinden biz analizde kenar polinomlarını kullandık. Ancak belirsiz parametre sayısı çok fazla olduğunda kenar polinomları sayısı da buna bağlı olarak üstel olarak artmaktadır. Dolayısıyla yöntem çok fazla belirsiz parametreye sahip sistemlere uygulanırken, analiz kısmında kenar teoremi yerine, sabit sayıda kenarın analizine dayanarak kararlılığı araştıran *Kutu teoremi (Box Theorem)* [18] kullanılabilir.

Tüm bu anlattıklarımızı bir örnek üzerinde görmeden önce belirsiz sistemler için PID kontrolör ile baskın kutup atama problemini çözmek için şu algoritmayı verebiliriz:

Algoritma 5.1

1. Belirsiz parametre minimum ve maksimum değerlerinden faydalanarak baskın olmayan kutupları sınırlandırmak üzere bütün köşe sistemlerini belirle.

2. Her köşe sistemi için ;

a) Problemden verilenlerden yola çıkarak $D_p, Z_1, Z_2, \dot{X}^{-1}$ ve δ_0 'ı belirle.

b) $[0 \ I_n] \dot{X}^{-1} \delta_0$ ve $-[0 \ I_n] \dot{X}^{-1} Z_1$ matrislerinden $A'(s)$ ve $B'(s)$ 'yi belirle

c) Buradan $A(s)$ ve $B(s)$ polinomlarını bul.

d) $X(v), Y(v)$ ve $Z(v)$ polinomlarını belirle.

e) $A(s)$ ve $Y(v)$ 'nin köklerini bul.

f) Teorem 2.2 yardımıyla $A(s) + kB(s)$ polinomunu kararlı yapan k kazançlarını her köşe sistemi için bul.

3. Her Kharitonov sistemi için bulunan $k = K_i$ kazancı aralıklarının kesişimini al.

Bu K_i parametresinin bulunması gereken aralıktır.

4. K_i parametresini bulunan aralıkta ızgarala. Her $K_i = K_i^*$ değeri için nominal

sistemi kullanarak $\begin{bmatrix} K_p \\ K_d \end{bmatrix} = [I_2 \ 0] \dot{X}^{-1} (\delta_0 - Z_1 K_i^*)$ formülü yardımıyla K_p^* ve K_d^* değerlerini belirle.

5. K_i^* parametresinin ızgaralanması ile bulunan tüm PID katsayılarını kenar polinomları üzerinden ızgaralanmış olan aileye uygula.

6. Daha önce belirlenmiş performans ölçütüne göre her uygulama sonunda ölçütün maksimum değerini al.

7. $K_i = K_i^*$ parametreleri ve maksimum ölçüt değerlerini bir grafik olarak çizdir. Ölçütün minimum olduğu $K_i = K_i^*$ değeri tasarımda kullanılacak olan değerdir. K_p^* ve K_d^* parametreleri de K_i^* 'a karşı düşen nominal sistem için bulunmuş değerlerdir.

8. Bütün kriterlerin sağlanıp sağlanmadığını bulunan optimum parametreleri kenar polinomları üzerinden ızgaralanan aileye uygulayarak kontrol et. Eğer baskın

olmayan kutuplardan sınırlandırılmış noktanın sağına geçen varsa en fazla sapmaya neden olan kenar noktasını gözönüne alarak tasarıma tekrar başla.

Şimdi PID kontrolör ile belirsiz sistemler için baskın kutup atama yöntemini örnekler üzerinde uygulamaya çalışalım.

Örnek 5.1

Transfer fonksiyonu paydası sınırlı tipte belirsiz parametreler içeren polinom olan aşağıdaki sistemi ele alalım

$$G(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0} \quad (5.20)$$

Bu sistem ailesinin PID kontrolör ile kapalı çevrim baskın kutuplarının nominal baskın kutuplar olan $s_{1,2} = -1 \pm j$ noktalarından en az sapma olacak şekilde atanmak istendiğini ve kalan baskın olmayan bütün kutupların gerçel kısımlarının $\sigma = -5.5$ noktasının solunda kalacak şekilde konumlandırılmak istendiğini düşünelim.

Belirsiz parametre (pertürbasyon) aralıkları şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} q_0 &\in [-50, -35] & q_1 &\in [-69.5, -68.5] \\ q_2 &\in [45, 65] & q_3 &\in [41.5, 43] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nominal parametre vektörü;

$$q_n = [q_{0n} \quad q_{1n} \quad q_{2n} \quad q_{3n}]^T \quad (5.22)$$

$$q_n = [-45 \quad -69 \quad 60.5 \quad 42]^T \quad (5.23)$$

olarak verilmiştir ve buna göre nominal sistem aşağıdaki eşitlikteki gibi olacaktır:

$$G_o(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + 42s^3 + 60.5s^2 - 69s - 45} \quad (5.24)$$

Buna göre nominal sistem açık çevrim kutupları şu şekildedir:

$$s_{1,2} = -2.78184 \pm 2.73312j \quad s_3 = -5.93442 \quad s_4 = -0.5 \quad s_5 = 1 \quad (5.25)$$

Sadece paydada belirsiz parametre olduğundan 4 adet köşe sistemi kullanılarak tasarım yapılabilir ve bu sistemler şu şekildedir:

$$G_1(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + 43s^3 + 65s^2 - 69.5s - 50} \quad (5.26)$$

$$G_2(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + 41.5s^3 + 65s^2 - 68.5s - 50} \quad (5.27)$$

$$G_3(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + 43s^3 + 45s^2 - 69.5s - 35} \quad (5.28)$$

$$G_4(s) = \frac{s^4 + 27s^3 + 274s^2 + 1278s + 2380}{s^5 + 11s^4 + 41.5s^3 + 45s^2 - 68.5s - 35} \quad (5.29)$$

Dört adet köşe sistemi için sırasıyla, verilen algoritma 5.1'in 1 ve 2. maddeleri uygulandığında $A(s)$, $B(s)$ sistemleri ve teorem 2.2 gereği 4 sistem için de (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri bulunur. Aşağıdaki tablolarda 4 köşe sistemi için de bu değerler sunulmuştur

$$A_1(s) = 1.01s^4 - 12.61s^3 + 56.52s^2 - 108.60s - 17.48$$

$$B_1(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 5s^2 + 24.38s + 31.22$$

$p_{el}(s + \sigma) = p_{el}(s - 5.5) = A_1(s) + K_{i1}B_1(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık için Tablo 5.1'e bakılacak olursa

Tablo 5.1: Birinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i1}} < x_i$
1	0	-0.8002	-2.17	1	3	
2	1.2215	-0.2460	-1.5313	-2	4	
3	19.2385	-0.1689	-1.40	-2	2	
4	10.6039	-0.0675	733	2	0	$-0.1689 < \frac{-1}{K_{i1}} < -0.0673$
5	∞	-	-	-	-	

Birinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_1 = 5.9207 < K_{i1} < 14.8148$ olarak bulunur.

$$A_2(s) = 1.01s^4 - 12.61s^3 + 54.55s^2 - 82.43s - 102.27$$

$$B_2(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 5s^2 + 24.38s + 31.22$$

$p_{e2}(s + \sigma) = p_{e2}(s - 5.5) = A_2(s) + K_{i2}B_2(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık için Tablo 5.2'ye bakılacak olursa

Tablo 5.2: İkinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i2}} < x_i$
1	0	-0.3053	-1.8797	1	3	
2	0.0432	-0.2963	-1.1856	-2	4	
3	18.1197	-0.1433	-1.0979	-2	2	
4	11.4027	-0.0674	689.92	2	0	$-0.1433 < \frac{-1}{K_{i2}} < -0.0674$
5	∞	-	-	-	-	

İkinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_2 = 6.9784 < K_{i2} < 14.8368$ olarak bulunur.

$$A_3(s) = 1.08s^4 - 12.70s^3 + 55.82s^2 - 122.71s + 112.81$$

$$B_3(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 5s^2 + 24.38s + 31.22$$

$p_{e3}(s + \sigma) = p_3(s - 5.5) = A_3(s) + K_{i3}B_3(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık için Tablo 5.3'e bakılacak olursa

Tablo 5.3: Üçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i3}} < x_i$
1	4.0556	-0.2	-741	-2	4	
2	18.2472	-0.1947	-1.018	-2	2	
3	9.8284	-0.0916	439	2	0	$-0.1947 < \frac{-1}{K_{i3}} < -0.0916$
4	0	0.2767	-2.6527	1	2	
5	∞	-	-	-	-	

Üçüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_3 = 5.1361 < K_{i3} < 10.9170$ olarak bulunur.

$$A_4(s) = 1.08s^4 - 12.70s^3 + 54.35s^2 - 103.08s + 49.56$$

$$B_4(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 5s^2 + 24.38s + 31.22$$

$p_{e4}(s + \sigma) = p_{e4}(s - 5.5) = A_4(s) + K_{i4}B_4(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık için Tablo 5.4'e bakılacak olursa

Tablo 5.4: Dördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i4}} < x_i$
1	2.6031	-0.2552	-1.013	-2	4	
2	16.9533	-0.1604	-761.455	-2	2	
3	11.0872	-0.0886	450.18	2	0	$-0.1604 < \frac{-1}{K_{i4}} < -0.0886$
4	0	0.6299	-2.9	1	2	
5	∞	-	-	-	-	

Dördüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_4 = 6.2344 < K_{i4} < 11.2867$ olarak bulunur.

Belirsiz sistem ve nominal sistemin baskın olmayan kutuplarının gerçel kısımlarını $\sigma = -5.5$ noktasının solunda bırakacak ortak K_i aralığı bulduğumuz dört adet aralığın kesişimidir:

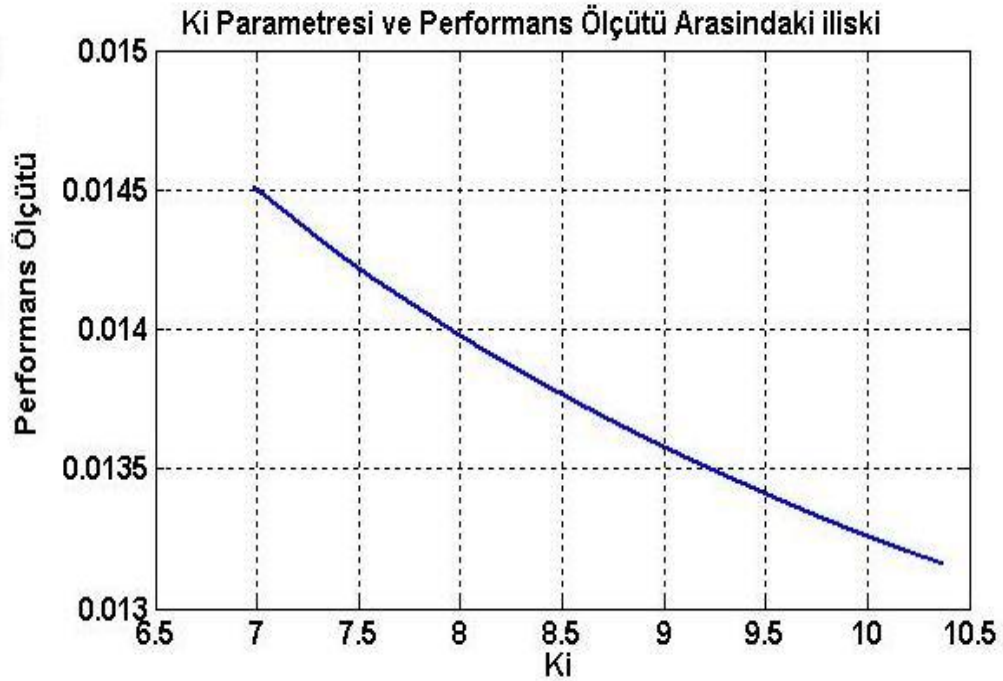
$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = 6.9784 < K_i < 10.917 \quad (5.30)$$

K_i değeri 6.9784 ile 10.917 arasında 20 değer alacak şekilde ızgaralanırsa bir önceki bölümde anlattığımız gibi nominal sistem için 20 adet K_p ve 20 adet K_d değeri bulunacaktır. Dört belirsiz parametre olduğundan 32 adet kenar polinomu mevcuttur. 20 adet PID kontrolörü her kenardan 100 nokta alacak şekilde toplam 3200 üyeden oluşan belirsiz sistem ailesi kenar polinomlarına uygulandığında K_i parametreleri ve nominal baskın kutuplara olan uzaklık olarak seçilen performans ölçütü arasındaki ilişki Şekil 5.4'te verildiği gibi bulunur.



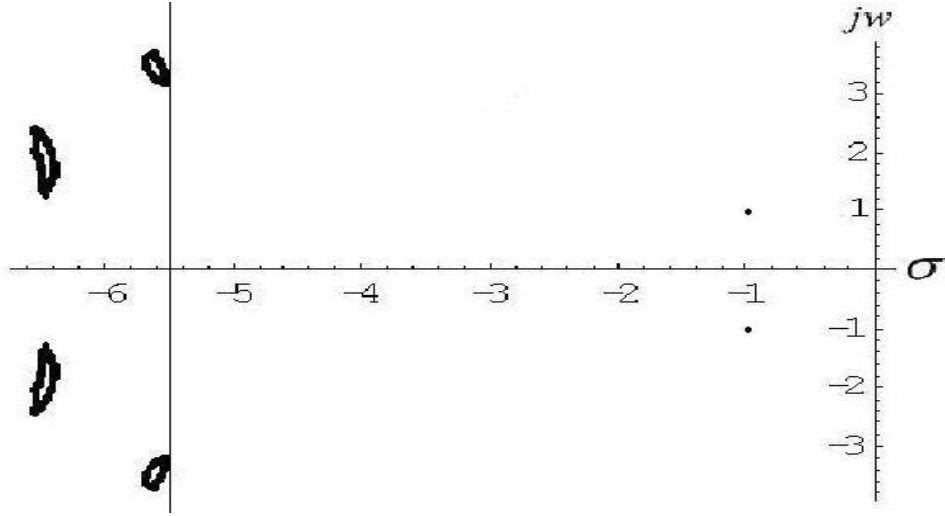
Şekil 5.4 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki

Şekilden de görüldüğü üzere K_i değeri 10.5 civarında seçilirse performans ölçütü birden artmaktadır. Tam kırılma noktasının olduğu yere kadar performans ölçütünü tekrar çizdirirsek aşağıdaki grafik elde edilir:



Şekil 5.5 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki

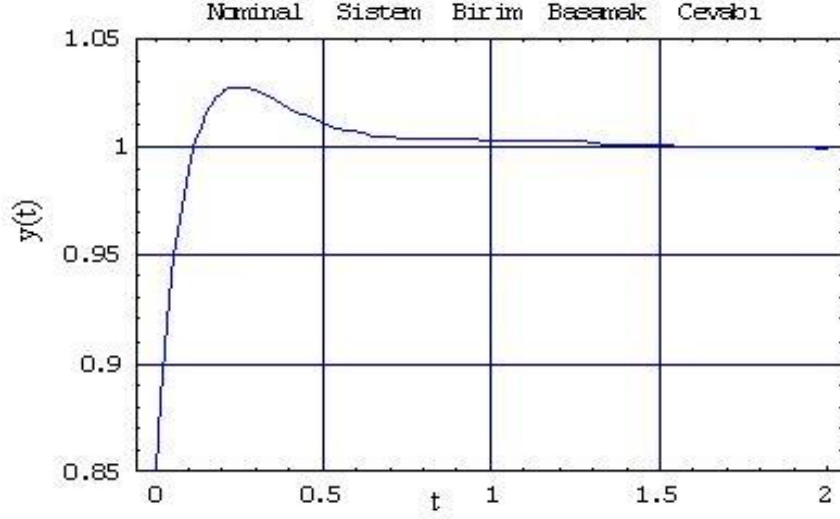
Grafikten de görüldüğü gibi performans ölçütü minimum değerini (0.0131594) $K_i^* = 10.3784$ için almaktadır. Bu değerler için ise $K_p^* = 10.5246$, $K_d^* = 5.35712$ değerlerini almaktadır. Bu değerler belirsiz sisteme uygulandığında, kapalı çevrim kenar polinomları üzerinden ızgaralanmış olan ailenin tüm tasarım kriterlerini sağladığı görülür. Yani $\sigma = -5.5$ noktası sağına baskın olmayan kutuplardan taşma olmamaktadır. Ayrıca baskın olan kutuplardan sapma da minimumdur. Bulunmuş bu optimum PID parametreleri ile mümkün olan bütün bozulmalar için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 5.6 : Mümkün olan bütün bozulmalar için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı

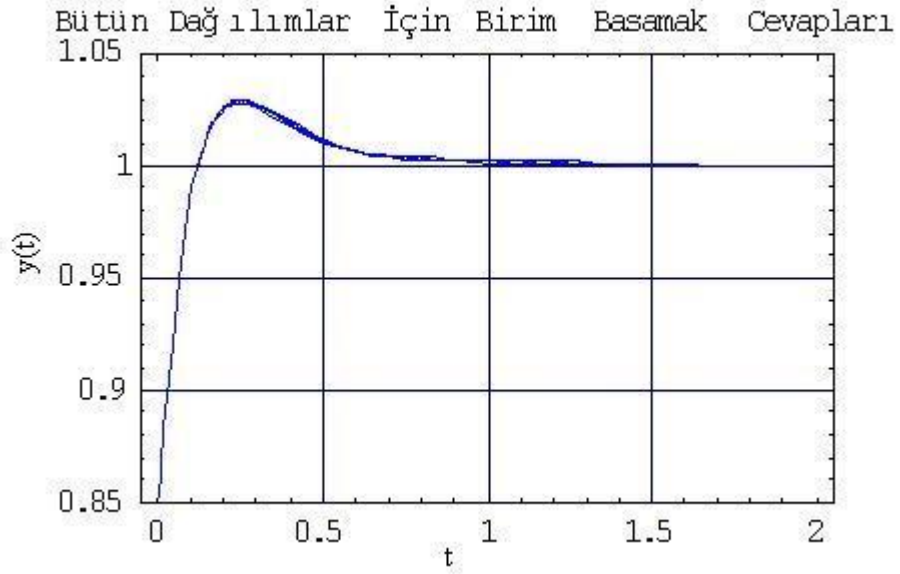
Şekilden de görüldüğü gibi ailenin tüm baskın olmayan kutuplarının gerçel kısımları $\sigma = -5.5$ noktasının solunda, baskın olan kutupları ise nominal baskın kutuplar olan $-1 \pm j$ noktasından en az sapma olacak şekilde kümelenmiştir.

Bulunan bu optimum PID parametreleri için nominal sistemin birim basamak cevabı bir sonraki sayfada Şekil 5.7’de görüldüğü gibidir.



Şekil 5.7 : Nominal sistem birim basamak cevabı

Mümkün olan bütün bozulmalar için ise sistem cevabı şu şekildedir:



Şekil 5.8 : Mümkün olan bütün bozulmalar için birim basamak cevapları

Bu örneğimizde sınırlı tipte parametrik belirsizlikler olan bir sistem için sistem ailesini nominal baskın kutuplardan en az sapma olacak şekilde atayacak PID parametrelerini bulduk. Bundan sonraki örneğimizde yöntemi hem payında hem de paydasında belirsiz parametreler içeren bir sisteme uygulayacağız.

Örnek 5.2

Transfer fonksiyonu pay ve paydası sınırlı tipte belirsiz parametreler içeren polinom olan aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$G(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + q_1s + q_0}{s^5 + 13.5s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 - 136s - 96} \quad (5.31)$$

Bu sistem ailesinin PID kontrolör ile kapalı çevrim baskın kutuplarının nominal baskın kutuplar olan $s_{1,2} = -1 \pm j$ noktalarından en az sapma olacak şekilde atanmak istendiğini ve kalan baskın olmayan bütün kutupların gerçel kısımlarının $\sigma = -6.5$ noktasının solunda kalacak şekilde konumlandırılmak istendiğini düşünelim.

Belirsiz parametre (pertürbasyon) aralıkları şu şekilde verilsin:

$$\begin{aligned} q_0 &\in [5550, 5620] & q_1 &\in [2385, 2389] \\ q_2 &\in [135, 150] & q_3 &\in [72, 73] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nominal parametre vektörü;

$$q_n = [q_{0n} \quad q_{1n} \quad q_{2n} \quad q_{3n}]^T \quad (5.33)$$

$$q_n = [5616 \quad 2388 \quad 145 \quad 72.5]^T \quad (5.34)$$

olarak verilsin. Buna göre nominal sistem aşağıdaki eşitlikteki gibi olacaktır:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2388s + 5616}{s^5 + 13.5s^4 + 72.5s^3 + 145s^2 - 136s - 96} \quad (5.35)$$

Buna göre nominal sistem açık çevrim kutupları şu şekildedir:

$$s_{1,2} = -4 \pm j4, s_3 = -6, s_4 = -0.5, s_5 = 1 \quad (5.36)$$

Pay ve paydanın her ikisinde de belirsiz parametre olduğundan 16 adet köşe sistemi olacaktır. Bu 16 adet köşe sistemi ve bu sistemler için için sırasıyla, verilen algoritmanın 1 ve 2. maddeleri uygulandığında $A(s)$, $B(s)$ sistemleri ve Teorem 2.2 gereği 16 sistem için de (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri EK-A' da

sunulmuştur. Aşağıda 16 adet köşe sistemi için kararlılığı sağlayan K_i değerleri sunulmuştur

Buna göre birinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_1 = 4.1649 < K_{i1} < 21.2314 \quad (5.37)$$

İkinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_2 = 4.0032 < K_{i2} < 28.4091 \quad (5.38)$$

Üçüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_3 = 4.1946 < K_{i3} < 11.36 \quad (5.39)$$

Dördüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_4 = 4.0096 < K_{i4} < 13.369 \quad (5.40)$$

Beşinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_5 = 4.1034 < K_{i5} < 21.8341 \quad (5.41)$$

Altıncı köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_6 = 4.2337 < K_{i6} < 28.9855 \quad (5.42)$$

Yedinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_7 = 4.1186 < K_{i7} < 11.7647 \quad (5.43)$$

Sekizinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_8 = 4.2626 < K_{i8} < 13.6986 \quad (5.44)$$

Dokuzuncu köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_9 = 4.6125 < K_{i9} < 18.3824 \quad (5.45)$$

Onuncu köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{10} = 4.3346 < K_{i10} < 24.9377 \quad (5.46)$$

Onbirinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{11} = 4.7801 < K_{i11} < 9.6154 \quad (5.47)$$

Onikinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{12} = 4.3995 < K_{i12} < 11.6009 \quad (5.48)$$

Onüçüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{13} = 4.1789 < K_{i13} < 19.0476 \quad (5.49)$$

Ondördüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık

$$: S_{14} = 4.0258 < K_{i14} < 25.5754 \quad (5.50)$$

Onbeşinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{15} = 4.2141 < K_{i15} < 10.1833 \quad (5.51)$$

Onaltıncı köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık:

$$S_{16} = 4.0323 < K_{i16} < 11.7371 \quad (5.52)$$

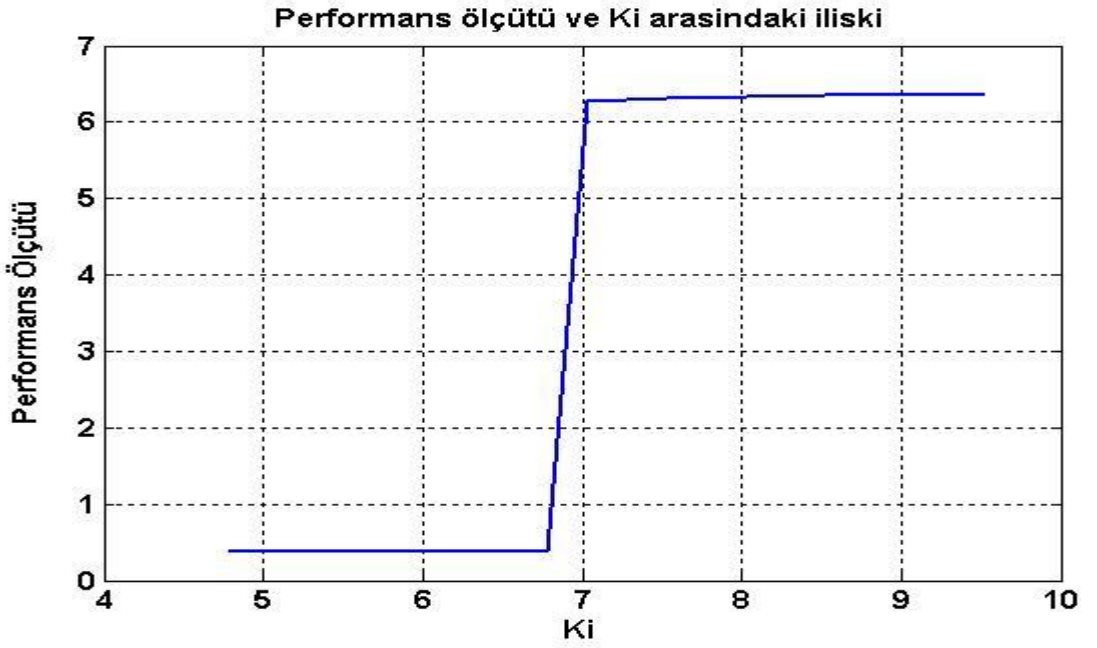
olarak verilmiştir.

Belirsiz sistem ve nominal sistemin baskın olmayan kutuplarının gerçel kısımlarını $\sigma = -6.5$ noktasının solunda bırakacak ortak K_i aralığı bulduğumuz onaltı adet aralığın kesişimidir:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap S_6 \cap S_7 \cap S_8 \cap S_9 \cap S_{10} \cap S_{11} \cap S_{12} \cap S_{13} \cap S_{14} \cap S_{15} \cap S_{16}$$

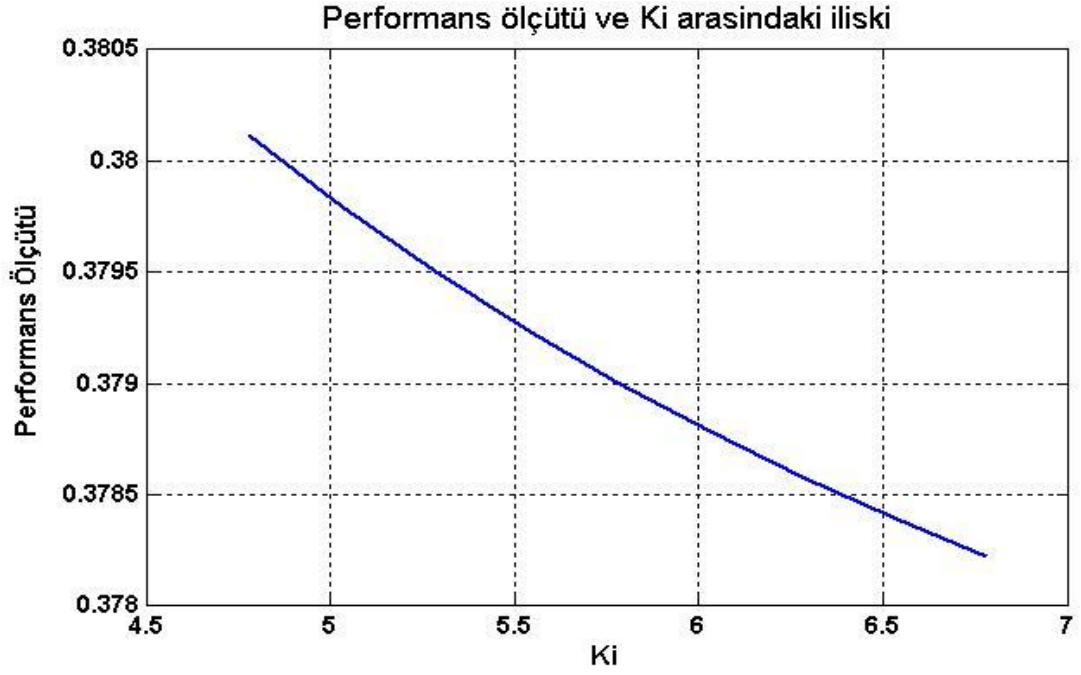
$$S = 4.7801 < K_i < 9.6154 \quad (5.53)$$

K_i değeri 4.7801 ile 9.6154 arasında ızgaralanıp bu değerler kullanılarak nominal sistem için K_p ve K_d değerleri bulunur. Dört belirsiz parametre olduğundan 32 adet kenar polinomu mevcuttur. Bulunan PID kontrolörü her kenardan 100 nokta alacak şekilde toplam 3200 üyeden oluşan belirsiz sistem ailesi kenar polinomlarına uygulandığında K_i parametreleri ve nominal baskın kutuplara olan uzaklık olarak seçilen performans ölçütü arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi elde edilmiştir.



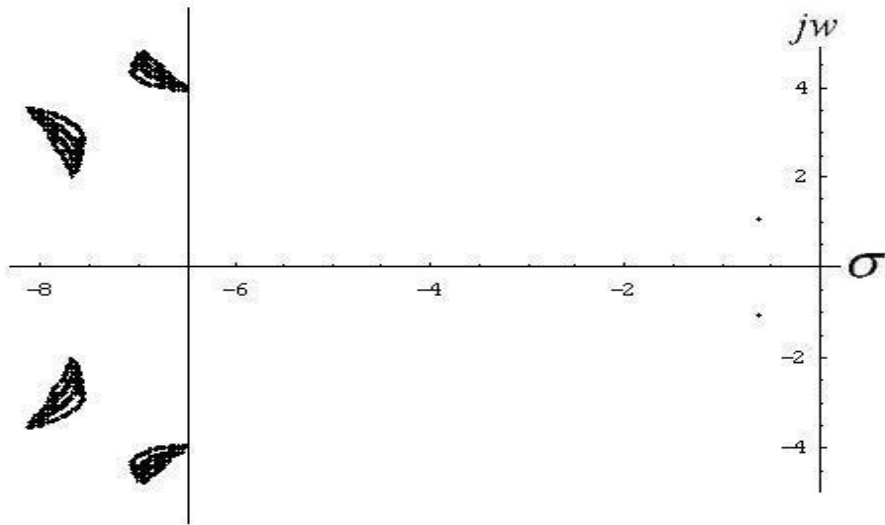
Şekil 5.9 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki

Şekilden de görüldüğü üzere K_i değeri 7'ye yakın civarda seçilirse performans ölçütü birden artmaktadır. Tam kırılma noktasının olduğu yere kadar ilişkiyi tekrar çizdirirsek bir sonraki sayfada Şekil 5.10'da görülen grafik elde edilir:



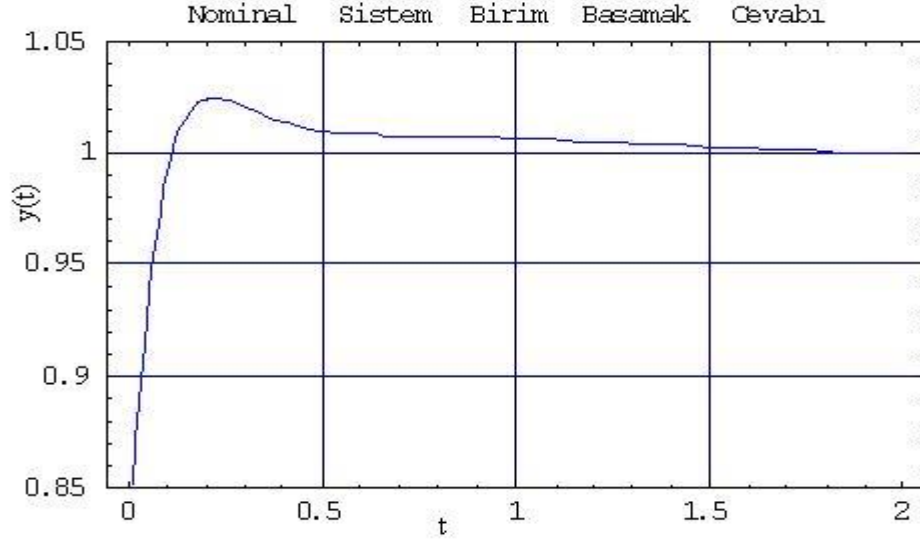
Şekil 5.10 : K_i ve performans ölçütü arasındaki ilişki

Grafikten de görüldüğü gibi performans ölçütü minimum değerini $K_i^* = 6.7801$ için almaktadır. Bu değerler için ise $K_p^* = 5.66103$, $K_d^* = 4.5175$ değerlerini almaktadır. Bu değerler belirsiz sisteme uygulandığında kapalı çevrim kenar polinomları üzerinden ızgaralanmış olan ailenin tüm tasarım kriterlerini sağladığı görülür. Yani $\sigma = -6.5$ noktası sağına baskın olmayan kutuplardan taşma olmamaktadır. Ayrıca baskın olan kutuplardan sapma da minimumdur. Bulunmuş bu optimum PID parametreleri ile mümkün olan bütün bozulmalar için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı aşağıdaki şekilde gibidir.



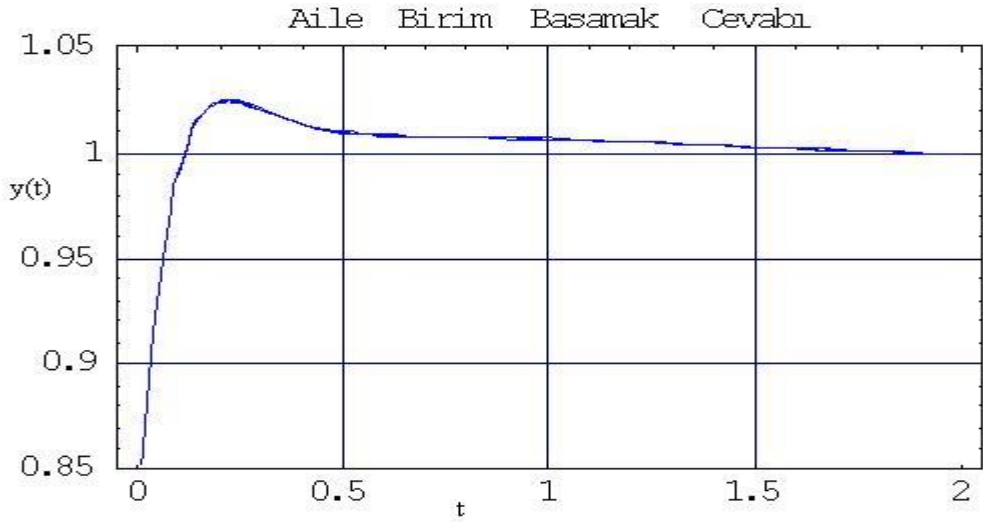
Şekil 5.11: Mümkün olan bütün bozulmalar için kapalı çevrim sistem kutup dağılımı

Şekilden de görüldüğü gibi ailenin tüm baskın olmayan kutuplarının gerçel kısımları $\sigma = -6.6$ noktasının solunda, baskın olan kutupları ise nominal baskın kutuplar olan $-1 \pm j$ noktasından en az sapma olacak şekilde kümelenmiştir. Bulunan bu optimum PID parametreleri için nominal sistemin birim basamak cevabı aşağıdaki şekilde gibidir



Şekil 5.12 : Nominal sistem birim basamak cevabı

Mümkün olan bütün bozulmalar için sistem cevabı ise şu şekildedir:



Şekil 5.13 : Mümkün olan tüm bozulmalar için birim basamak cevapları

Sistem cevapları 2 saniye gibi hızlı sayılabilecek bir sürede oturmaktadır. Bunun sebebi ise PID kontrolörünün getirdiği sıfırların etkisinden dolayıdır. Bu çalışmada

sıfırların etkisi göz önüne alınmamış olup, çalışmanın sıfırları kapsayacak şekilde genişletilmesi ayrı bir tez konusudur.

6.SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Günümüzde pratik hayatta kullanılan kontrolörlerin büyük bir çoğunluğu orantı-integral-türev (PID) tipi kontrolörlerdir. Bunun sebebi PID kontrolörünün yapısal olarak basitliği ve çalışma prensibinin kolayca anlaşılabilmesidir. Diğer yandan PID kontrolörünün genel performansı bir çok uygulamada tatmin edicidir. Bu nedenlerden dolayı günümüzde bu kontrolörler geniş kullanım alanlarına sahiptir.

PID kontrolörlerin kullanım alanları arasında hareket kontrolü, endüstriyel prosesler, üretim, robotlar, disket sürücüler, pnömatik, hidrolik, elektriksel ve mekanik sistemler sayılabilir. Mevcut PID kontrolör katsayı belirleme yöntemleri çoğunlukla anlık olarak gerçekleştirilir. Bu yöntemler yıllar boyunca deneme-yanılma, gözlem ve endüstriyel tecrübeye dayanarak geliştirilmiştir.

Gerçek hayattaki sistemlerin çoğu belirsizlikler dolayısıyla tam bir doğrulukla modellenememektedir. Bu tip sistemleri alt ve üst sınırları bilinen belirsiz parametreler ile modellemek daha gerçekçi bir yaklaşımdır.

Son yıllarda bu tip belirsiz sistemler için verilen bir sistemi kontrol edecek tek bir PID kontrolör yerine, kararlılığı sağlayan tüm PID kontrolörler kümesinin bulunması yönünde bir takım çalışmalar ortaya konmuştur. Ancak bu kümeden seçilen bir kontrolörün sistem performansını ve geçici zaman cevabını nasıl etkileyeceği tam olarak bilinemez.

Verilmiş bir sistem için, uygun kontrolör ve ilgili kontrolör parametrelerinin seçiminde, tasarımcı kabul edilebilir bir kapalı çevrim sistem cevabı ve kararlılık problemini ele alarak hareket etmelidir. Eğer sistemde parametrik belirsizlikler mevcutsa, tasarımcı kapalı çevrim sistemin her zaman kararlı kalıp kalmayacağı problemi ile karşılaşacaktır ve eğer kapalı çevrim sistem kararlı kalıyorsa diğer bir problem de bozulan kapalı çevrim dinamiklerinin nominal dinamiklerine benzeyip benzemeyeceğidir.

Dayanıklı performans söz konusu olduğunda kapalı çevrim karakteristik denklem kutuplarının bütün belirsizlikler için nominal kutuplara en yakın olması istenir.

Bu tez çalışmasında da bu hedef doğrultusunda PID kontrolör ile hem dayanıklılık hem de performans problemlerine çözüm getirebilecek bir yöntem ortaya konmuştur. Bu çalışmada transfer fonksiyonu sınırlı tipte belirsiz parametreler içeren bir sistemin PID kontrolör ile mümkün olan bütün bozulmalar için baskın iki kutbunu nominal baskın kutuplardan sapma en az olacak şekilde atayacak, dolayısıyla sistem dinamiklerinin belirsizliklerden etkilenmesini en aza indirecek ve kalan bütün baskın olmayan kutupları da belli bir sol yarı s-düzleminde sınırlandıracak bir yöntem ortaya konmuştur. Böylece PID kontrolör ile baskın kutup atama yöntemi dayanıklılığı da içine alacak şekilde geliştirilmiştir.

Bu yöntem ile parametreleri belirsiz bir sistemin her üyesinin aynı anda nominal koşullara en yakın çalışmasını sağlayacak tek bir PID kontrolörü belirlenebilmektedir. Böylece hem dayanıklılık hem de istenilen sistem performansının elde edilmesi problemlerine bir çözüm getirilmektedir.

Ayrıca ortaya konulan yöntemde kullanılan kontrolör tipinin PID kontrolör olması, yöntemin birçok gerçek zamanlı ve pratik uygulamada da kullanılabileceğini göstermektedir.

Gelecekteki çalışmalar çok girişli çok çıkışlı sistemleri ve sistem sıfırlarını da içine alacak şekilde yürütülmelidir.

KAYNAKLAR

- [1] **Åström, K.J. and Hägglund, T.**, 1995. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2nd Ed., Instrument Society of America, NC, USA.
- [2] **Åström, K.J. and Hägglund, T.**, 1988. Automatic Tuning of PID Controllers, Instrument Society of America.
- [3] **Åström, K.J., Hägglund, T., Hang , C. C. and Ho., W., K.**, 1993. Automatic tuning and adaptation for PID controllers - a survey, *Control Eng. Prac.*, vol1, no.4, pp.699-714.
- [4] **Franklin, G.F., Powell, J.D. and Emaminaenini, A.**, 1994. Feedback Control of Dynamic Systems, New York:Addison-Wesley, 3 ed.
- [5] **Shafiei, Z. and Shenton, A.T.**, 1994. Tuning of PID type controllers for stable and unstable systems with time delay, *Automatica*, vol. 30, no.10, pp.1609-1615.
- [6] **Shafiei, Z. and Shenton, A.T.**, 1997. Frequency domain design of PID controllers for stable and unstable systems with time delay, *Automatica*, vol. 33, pp. 2223-2232.
- [7] **Ho M.T., Datta A. and Bhattacharrya S.P.**, 1997. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, (Albuquerque, NM), pp. 3922-3928, IEEE.
- [8] **Ho M.T., Datta A. and Bhattacharrya S.P.**, 1997. Control system design using low order controllers: Constant gain, PI and PID, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, (Albuquerque, NM), pp. 571-578, IEEE.
- [9] **Munro, N.**, 1999. The systematic design of PID controllers. In *IEE Colloquium*, Austin Court, Birmingham.IEE: Professional Group B1, Digest No:99/088.
- [10] **Munro, N., Söylemez, M.T. and Baki, H.**, 1999. Computation of D-stabilizing low order compensators, Control Systems Centre Report 882, UMIST, Manchester.
- [11] **Munro, N., Söylemez, M.T. and Baki, H.**, 2003. Fast Calculation of Stabilizing PID controllers, *Automatica* **39**, pp121-126.

- [12] **Munro, N. and Söylemez, M.T.**, 2000. Fast Calculation of stabilizing PID controllers for uncertain parameter systems, *Proceedings of ROCOND'2000*, (Prague), IFAC.
- [13] **Ho M.T., Datta A. and Bhattacharrya S.P.**, 2000. Structure and Synthesis of PID Controllers. Springer-Verlag, London.
- [14] **Söylemez, M.T.**, 2002. PID Kontrolör ile Baskın Kutup Atama. *TOK'2002 Toplantısı*, Ankara, 219-228.
- [15] **Ho M.T., Datta A. and Bhattacharrya S.P.**, 1996. A new approach to feedback stabilization, In *Conf. Decision Contr.*, pages 4643-4648, Kobe, Japan,. IEEE.
- [16] **Söylemez, M.T. , Munro, N., and Baki, H.**, 1999. Fast calculation of stabilizing PID controllers. Control Systems Centre Report 883, UMIST, Manchester.
- [17] **Kuo, B.C.**, 1991. Automatic Control Systems, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- [18] **Ackermann, J.**, 1993. Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters, Springer-Verlag.
- [19] **Söylemez, M.T.**, 1999. Pole Assignment for Uncertain Systems, *RSP Pres.* UMIST Control System Centre Series.London. ISBN:0-86380-246-X.
- [20] **Barmish, B. R.**, 1994. New Tools for Robustness of Linear Systems, MacMillan Publishing Co., New York, Ny.
- [21] **Bhattacharrya S.P., Chapellat H. and Keel L.H.**, 1995. Robust Control, the parametric approach. Prentice Hall.
- [22] **Barmish, B.R. and Kang., H.I.**, . 1993. A Survey of Extreme Point Results for Robustness of Control Systems. *Automatica* **29**, pp 13-35.

EKLER

EK-A

Uygulama 5.2’de verilen belirsiz sistem için 16 adet köşe sistemi ve 16 sistem için de (v_i^*, x_i) çiftlerine karşı düşen r_i ve u_i değerleri ve 16 adet köşe sistemi için kararlılığı sağlayan K_i değerleri aşağıda sunulmuştur.

Birinci köşe sistemi:

$$G_1(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.1)$$

$$A_1(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 100.62s^2 - 322.23s + 244.68$$

$$B_1(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 62.5$$

$p_{el}(s + \sigma) = p_{el}(s - 6.5) = A_1(s) + K_{i1}B_1(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

TabloA.1: Birinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i1}} < x_i$
1	35.62	-0.2537	-6.64	-2	4	
2	4.31	-0.2401	-3.98	-2	2	
3	16.0573	-0.0471	2.49	2	0	$-0.2401 < \frac{-1}{K_{i1}} < -0.0471$
4	0	0.8286	-8.59	1	2	
5	∞	-	-	1	3	

Birinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_1 = 4.1649 < K_{i1} < 21.2314$ olarak bulunur.

İkinci köşe sistemi:

$$G_2(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.2)$$

$$A_2(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 100.62s^2 - 321.86s + 241.86$$

$$B_2(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 48.5$$

$p_{e2}(s + \sigma) = p_{e2}(s - 6.5) = A_2(s) + K_{i2}B_2(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.2 İkinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i2}} < x_i$
1	3.65	-0.2521	-4.55	-2	4	
2	35.82	-0.2498	-6.62	-2	2	
3	16.76	-0.0352	2.70	2	0	$-0.2498 < \frac{-1}{K_{i2}} < -0.0352$
4	0	0.7248	-8.55	1	2	
5	∞	-	-	1	3	

İkinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_2 = 4.0032 < K_{i2} < 28.4091$ olarak bulunur.

Üçüncü köşe sistemi:

$$G_3(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.3)$$

$$A_3(s) = 1.09s^4 - 16.15s^3 + 100.61s^2 - 322.28s + 251.46$$

$$B_3(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 97.5$$

$p_{e3}(s + \sigma) = p_{e3}(s - 6.5) = A_3(s) + K_{i3}B_3(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.3 : Üçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i3}} < x_i$
1	34.14	-0.2580	-5.54	-2	4	
2	6.01	-0.2384	-3	-2	2	
3	15.9	-0.0880	1.95	2	0	$-0.2384 < \frac{-1}{K_{i3}} < -0.088$
4	0	1.0876	-9.2	1	2	
5	∞	-	-	1	3	

Üçüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_3 = 4.1946 < K_{i3} < 11.36$ olarak bulunur.

Dördüncü köşe sistemi:

$$G_4(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.4})$$

$$A_4(s) = 1.09s^4 - 16.15s^3 + 100.61s^2 - 321.91s + 248.67$$

$$B_4(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 83.5$$

$p_{e4}(s + \sigma) = p_{e4}(s - 6.5) = A_4(s) + K_{i4}B_4(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.4: Dördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i4}} < x_i$
1	5.19	-0.2524	-3.64	-2	4	
2	34.26	-0.2494	-5.48	-2	2	
3	16.78	-0.0748	2.19	2	0	$-0.2494 < \frac{-1}{K_{i4}} < -0.0748$
4	0	0.996	-9.06	1	2	
5	∞	-	-	1	3	

Dördüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_4 = 4.0096 < K_{i4} < 13.369$ olarak bulunur.

Beşinci köşe sistemi:

$$G_5(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.5})$$

$$A_5(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 99.63s^2 - 306.18s + 179.81$$

$$B_5(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 62.5$$

$p_{e5}(s + \sigma) = p_{e5}(s - 6.5) = A_5(s) + K_{i5}B_5(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.5: Beşinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i5}} < x_i$
1	3.57	-0.2622	-4.34	-2	4	
2	35.16	-0.2437	-6.42	-2	2	
3	16.3	-0.0438	2.59	2	0	$-0.2437 < \frac{-1}{K_{i5}} < -0.0458$
4	0	1.7810	-8.17	1	2	
5	∞	-	-	1	3	

Beşinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_5 = 4.1034 < K_{i5} < 21.8341$ olarak bulunur.

Altıncı köşe sistemi:

$$G_6(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.6)$$

$$A_6(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 99.63s^2 - 305.81s + 176.97$$

$$B_6(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 48.5$$

$p_{e6}(s + \sigma) = p_{e6}(s - 6.5) = A_6(s) + K_{i6}B_6(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.6: Altıncı köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i6}} < x_i$
1	2.97	-0.2736	-4.92	-2	4	
2	35.31	-0.2362	-6.59	-2	2	
3	16.93	-0.0345	2.66	2	0	$-0.2362 < \frac{-1}{K_{i6}} < -0.0345$
4	0	1.6049	-8.17	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Altıncı köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_6 = 4.2337 < K_{i6} < 28.9855$ olarak bulunur.

Yedinci köşe sistemi:

$$G_7(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.7)$$

$$A_7(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 99.62s^2 - 306.23s + 186.59$$

$$B_7(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 97.5$$

$p_{e7}(s + \sigma) = p_{e7}(s - 6.5) = A_7(s) + K_{i7}B_7(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.7: Yedinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i7}} < x_i$
1	5.06	-0.2638	-3.5	-2	4	
2	33.51	-0.2428	-5.23	-2	2	
3	16.46	-0.0850	2.097	2	0	$-0.2428 < \frac{-1}{K_{i7}} < -0.0850$
4	0	2.1880	-8.68	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Yedinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_7 = 4.1186 < K_{i7} < 11.7647$ olarak bulunur.

Sekizinci köşe sistemi:

$$G_8(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 150s^2 - 136s - 96} \quad (A.8)$$

$$A_8(s) = 1.09s^4 - 16.14s^3 + 99.62s^2 - 305.87s + 183.8$$

$$B_8(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 83.5$$

$p_{e8}(s + \sigma) = p_{e8}(s - 6.5) = A_8(s) + K_{i8}B_8(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.8: Sekizinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i8}} < x_i$
1	4.35	-0.2763	-4.01	-2	4	
2	33.64	-0.2346	-5.19	-2	2	
3	17.22	-0.0730	2.28	2	0	$-0.2346 < \frac{-1}{K_{i8}} < -0.0730$
4	0	2.0525	-8.64	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Sekizinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_8 = 4.2626 < K_{i8} < 13.6986$ olarak bulunur.

Dokuzuncu köşe sistemi:

$$G_9(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.9})$$

$$A_9(s) = 1.08s^4 - 16.17s^3 + 100.58s^2 - 337.46s + 382.77$$

$$B_9(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 62.5$$

$p_{e9}(s + \sigma) = p_{e9}(s - 6.5) = A_9(s) + K_{i9}B_9(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.9: Dokuzuncu köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i9}} < x_i$
1	35.05	-0.2724	-6.06	-2	4	
2	5.95	-0.2168	-3.08	-2	2	
3	15.74	-0.0544	2.04	2	0	$-0.2168 < \frac{-1}{K_{i9}} < -0.0544$
4	0	0.3729	-9.22	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Dokuzuncu köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_9 = 4.6125 < K_{i9} < 18.3824$ olarak bulunur.

Onuncu köşe sistemi:

$$G_{10}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.10})$$

$$A_{10}(s) = 1.08s^4 - 16.17s^3 + 100.58s^2 - 337.12s + 380.16$$

$$B_{10}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 48.5$$

$p_{e10}(s + \sigma) = p_{e10}(s - 6.5) = A_{10}(s) + K_{i10}B_{10}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.10: Onuncu köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i10}} < x_i$
1	35.21	-0.2637	-6.04	-2	4	
2	5.16	-0.2307	-3.7	-2	2	
3	16.57	-0.0401	2.29	2	0	$-0.2307 < \frac{-1}{K_{i10}} < -0.0401$
4	0	0.3214	-9.18	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onuncu köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_{10} = 4.3346 < K_{i10} < 24.9377$ olarak bulunur.

Onbirinci köşe sistemi:

$$G_{11}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.11})$$

$$A_{11}(s) = 1.081s^4 - 16.18s^3 + 100.57s^2 - 337.50s + 389.02$$

$$B_{11}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 97.5$$

$p_{e11}(s + \sigma) = p_{e11}(s - 6.5) = A_{11}(s) + K_{i11}B_{11}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.11: Onbirinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i11}} < x_i$
1	35.52	-0.2873	-7.06	-2	4	
2	8.16	-0.2092	-1.89	-2	2	
3	15.07	-0.1040	1.376	2	0	$-0.2092 < \frac{-1}{K_{i11}} < -0.1040$
4	0	0.5071	-9.73	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onbirinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_{11} = 4.7801 < K_{i11} < 9.6154$ olarak bulunur.

Onikinci köşe sistemi:

$$G_{12}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.12})$$

$$A_{12}(s) = 1.081s^4 - 16.19s^3 + 100.57s^2 - 337.17s + 386.45$$

$$B_{12}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 83.5$$

$p_{e12}(s + \sigma) = p_{e12}(s - 6.5) = A_{12}(s) + K_{i12}B_{12}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.12: Onikinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i12}} < x_i$
1	33.64	-0.2647	-4.99	-2	4	
2	7.04	-0.2273	-2.64	-2	2	
3	16.25	-0.0862	1.72	2	0	$-0.2273 < \frac{-1}{K_{i12}} < -0.0862$
4	0	0.4583	-9.69	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onikinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_{12} = 4.3995 < K_{i12} < 11.6009$ olarak bulunur.

Onüçüncü köşe sistemi

$$G_{13}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (A.13)$$

$$A_{13}(s) = 1.082s^4 - 16.17s^3 + 99.58s^2 - 321.42s + 317.9$$

$$B_{13}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 62.5$$

$p_{e13}(s + \sigma) = p_{e13}(s - 6.5) = A_{13}(s) + K_{i13}B_{13}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.13: Onüçüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i13}} < x_i$
1	34.52	-0.2567	-5.85	-2	4	
2	5.16	-0.2393	-2.64	-2	2	
3	16.05	-0.0525	2.17	2	0	$-0.2393 < \frac{-1}{K_{i13}} < -0.0525$
4	0	0.4911	-8.79	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onüçüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_{13} = 4.1789 < K_{i13} < 19.0476$ olarak bulunur.

Ondördüncü köşe sistemi:

$$G_{14}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5550}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.14})$$

$$A_{14}(s) = 1.083s^4 - 16.17s^3 + 99.58s^2 - 321.08s + 315.28$$

$$B_{14}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 48.5$$

$p_{e14}(s + \sigma) = p_{e14}(s - 6.5) = A_{14}(s) + K_{i14}B_{14}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.14: Ondördüncü köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i14}} < x_i$
1	4.46	-0.2521	-4.01	-2	4	
2	34.68	-0.2484	-5.84	-2	2	
3	16.77	-0.0391	2.37	2	0	$-0.2484 < \frac{-1}{K_{i14}} < -0.0391$
4	0	0.4247	-8.79	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Ondördüncü köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık: $S_{14} = 4.0258 < K_{i14} < 25.575$ olarak bulunur.

Onbeşinci köşe sistemi:

$$G_{15}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2385s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 72s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.15})$$

$$A_{15}(s) = 1.081s^4 - 16.18s^3 + 99.57s^2 - 321.46s + 324.16$$

$$B_{15}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 48s + 97.5$$

$p_{e15}(s + \sigma) = p_{e15}(s - 6.5) = A_{15}(s) + K_{i15}B_{15}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.15: Onbeşinci köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i15}} < x_i$
1	32.86	-0.2572	-4.74	-2	4	
2	7	-0.2373	-2.48	-2	2	
3	15.87	-0.0982	1.63	2	0	$-0.2373 < \frac{-1}{K_{i15}} < -0.0982$
4	0	0.6625	-9.31	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onbeşinci köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_{15} = 4.2141 < K_{i15} < 10.1833$ olarak bulunur.

Onaltıncı köşe sistemi:

$$G_{16}(s) = \frac{s^4 + 33s^3 + 412s^2 + 2389s + 5620}{s^5 + 13.5s^4 + 73s^3 + 135s^2 - 136s - 96} \quad (\text{A.16})$$

$$A_{16}(s) = 1.081s^4 - 16.18s^3 + 99.58s^2 - 321.13s + 321.58$$

$$B_{16}(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 6.5s^2 + 50s + 83.5$$

$p_{e16}(s + \sigma) = p_{e16}(s - 6.5) = A_{16}(s) + K_{i16}B_{16}(s)$ karakteristik polinomunu kararlı yapan aralık:

Tablo A.16 Onaltıncı köşe sistemi için (v_i^*, x_i) değerlerine karşı düşen r_i, u_i değerleri

i	v_i^*	x_i	$\frac{\partial Y}{\partial v}(v_i^*)$	r_i	u_i	$x_{i-1} < \frac{-1}{K_{i16}} < x_i$
1	6.1	-0.2524	-3.7	-2	4	
2	33	-0.2480	-4.7	-2	2	
3	16.81	-0.0832	1.87	2	0	$-0.2480 < \frac{-1}{K_{i16}} < -0.0832$
4	0	0.6005	-9.26	1	2	
5	∞	-	1	1	3	

Onaltıncı köşe sistemi için kararlılığı sağlayan aralık $S_{16} = 4.0323 < K_{i16} < 11.7371$ olarak bulunur.

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap S_6 \cap S_7 \cap S_8 \cap S_9 \cap S_{10} \cap S_{11} \cap S_{12} \cap S_{13} \cap S_{14} \cap S_{15} \cap S_{16}$$

$$S = 4.7801 < K_i < 9.6154$$

ÖZGEÇMİŞ

Özgür Cemil ÖZKAN, 1979 yılında Tekirdağ'da doğdu. 2003 yılında Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektronik Mühendisliği bölümünden mezun oldu ve ardından aynı yıl içerisinde İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Mühendisliği Anabilim dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen aynı bölümde eğitimine devam etmektedir.