

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN KONTROLÖRLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İlhan MUTLU

Anabilim Dalı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

Programı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Leyla GÖREN SÜMER

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN KONTROLÖRLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İlhan MUTLU
(504081113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Leyla GÖREN SÜMER (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr.Mehmet Turan SÖYLEMEZ (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Osman Kaan EROL (İTÜ)

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Kontrol mühendisliği açısından bakıldığında yeni sayılabilecek bu araştırma alanına ilk defa ilgi duymamı sağlayan, eşsiz tavsiyeleri ve yol göstericiliği ile tezimi çok daha iyi bir seviyeye getirmemde yardımcı olan sevgili hocam Prof. Dr. Leyla Gören Sümer'e bütün önerileri, anlayışı ve yönlendirmeleri için çok teşekkür ediyorum. Birlikte yaptığımız ve bana göre çok değerli olan akademik tartışmalar bu tezin ortaya çıkmasında büyük bir rol oynamıştır.

Bu tezdeki deneysel çalışmaları gerçekleştirmemde çok yardımcı olan İstanbul Teknik Üniversitesi Mekatronik Eğitim ve Araştırma Merkezi (İTÜ MEAM)'ne ve çalışanlarına teşekkür ediyorum.

Ayrıca her zaman benimle birlikte olan ve bu tez çalışması sırasında sürekli bana destek olan çok sevgili aileme anlayışları ve gösterdikleri sabır için çok teşekkür ediyorum.

Son olarak yüksek lisans eğitimim boyunca sağladıkları maddi destek nedeniyle Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na çok teşekkür ediyorum.

Mayıs 2010

İlhan MUTLU

Kontrol Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ.....	1
2. KESİRLİ MERTEBEDEN KALKULÜS	5
2.1 Türev ve İntegral Operatörlerine İlişkin Ortak Gösterim	5
2.2 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları	9
2.2.1 Grünwald-Letnikov tanımı.....	10
2.2.2 Riemann-Liouville tanımı.....	10
2.3 Kesirli Mertebeden Türevlerin Bazı Özellikleri	12
2.3.1 Doğrusal olma	12
2.3.2 Leibniz kuralı	13
2.4 Kesirli Mertebeden Türevlerle İlgili Bazı Hesaplamalar.....	13
2.4.1 Bir sabitin kesirli mertebeden türevi	13
2.4.2 $f(t)=t^b$ gibi bir kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi.....	15
2.5 Laplace Dönüşümü	16
2.5.1 Kesirli mertebeden türevlerin laplace dönüşümleri.....	18
3. KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLER	21
3.1 Kesirli Mertebeden Sistemlerin Yaklaşıklıkları.....	26
3.2 Kesirli Mertebeden Sistemlerin Ayırık-Zamanlı Modelleri	31
3.2.1 Dolaylı ayırıklaştırma	31
3.2.2 Doğrudan ayırıklaştırma	32
4. KESİRLİ MERTEBEDEN KONTROLÖR TASARIM YÖNTEMLERİ.....	35
4.1 Kesirli Mertebeden PID Kontrolörler	35
4.1.1 Kesirli mertebeden PID ile kontrol edilen sistemlerin açık çevrim yanıtları.....	37
4.1.2 Kesirli mertebeden PID ile kontrol edilen sistemlerin kapalı çevrim yanıtları.....	38
4.1.3 Geleneksel PID ve kesirli mertebeden PID kontrolörlerinin karşılaştırılması.....	39
4.2 Frekans Tanım Bölgesinde Tasarım	41
4.3 Nümerik Optimizasyon Algoritmaları ile Kesirli Mertebeden Kontrolör Tasarımı	44
4.3.1 Birinci mertebeden ölü zamanlı sistemler için kesirli mertebeden kontrolör tasarımı	45
4.3.2 Araç süspansiyon sisteminin kesirli mertebeden PID ile kontrolü.....	48

4.3.3 Ters sarkacın kesirli mertebeden PID ile kontrolü.....	53
4.3.4 DC motorun kesirli mertebeden PD ile kontrolü	57
5. SONUÇ.....	65
6. KAYNAKLAR.....	67

KISALTMALAR

R-L	: Riemann-Liouville
G-L	: Grünwald-Letnikov
PID	: Propotional Integral Derivative
KMS	: Kesirli Mertebeden Sistem
TMS	: Tam sayılı Merteden Sistem
KMPID	: Kesirli Mertebeden PID
KMT	: Kesirli Mertebeden Türev
TMT	: Tam sayılı Mertebeden Türev
KMİ	: Kesirli Mertebeden İntegral
TMİ	: Tam sayılı Mertebeden İntegral

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Model parametreleri ve ilgili performans ölçütünün değerleri	24
Çizelge 3.2 : $s^{-0.5}$ 'in yaklaşıklık ifadeleri.	30
Çizelge 3.3 : Doğrudan ayırıştırma yöntemleri.	32
Çizelge 4.1 : Genetik algoritma ile belirlenen kontrolör katsayıları.	45
Çizelge 4.2 : IP02 deney düzeneğindeki DC motor parametre değerleri	58

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : $f(t) = c$ fonksiyonunun $c=1$ için, 0.8 inci, 0.5 inci ve 0.2 inci mertebeden türevleri	15
Şekil 2.2 : t^1 fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.2$ alınarak elde edilen kesirli mertebeden türevleri	16
Şekil 3.1 : (3.4) ve (3.5) ifadeleri ile verilen modeller için parametre uzayları.....	23
Şekil 3.2 : Sistem tanımada kullanılan Simulink diyagramı.....	24
Şekil 3.3 : Elde edilen modellerin ve kesirli mertebeden sistemin birim basamak yanıtları	25
Şekil 3.4 : Tasarlanan kontrolör için gerçek sistemin ve modelin birim basamak yanıtları	26
Şekil 3.5 : $s^{-0.25}$ sisteminin (3.8) ile verilen yaklaşıklıkının frekans cevabı	27
Şekil 3.6 : Birim basamak girişi için $s^{-0.25}$ sisteminin, (3.8) ile verilen yaklaşıklıkından elde edilen ve analitik olarak hesaplanan cevapların karşılaştırmalı olarak gösterilimi	27
Şekil 3.7 : (3.8) ve (3.10) yaklaşıklıklarının frekans cevapları.....	28
Şekil 3.8 : $s^{-0.5}$ sisteminin yaklaşıklık ifadelerinin birim basamak yanıtları	30
Şekil 3.9 : Sürekli ve ayırık yaklaşıklıkların birim basamak yanıtı	32
Şekil 4.1 : PID ile $PI^\lambda D^\mu$ 'nin mertebe düzleminde karşılaştırılması	36
Şekil 4.2 : Kesirli mertebeden PID ile kontrol edilen bir sistemin genel blok diyagramı.....	37
Şekil 4.3 : PID kontrolörü ile kontrol edilen sisteme ilişkin benzetim sonuçları	40
Şekil 4.4 : KMPID kontrolörü ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtı	41
Şekil 4.5 : KMPID ile kontrol edilen sistemin frekans cevabı	43
Şekil 4.6 : KMPID ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtı	44
Şekil 4.7 : PI ve kesirli mertebeden PI ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtları	46
Şekil 4.8 : PI ve kesirli mertebeden PI ile üretilen kontrol işaretlerinin birlikte gösterimi.....	46
Şekil 4.9 : Parametrelerin değişken olduğu durumun benzetimi için oluşturulan Simulink modeli	47
Şekil 4.10 : Sistem parametrelerinin belirsiz olduğu durum için PI ve kesirli mertebeden PI'nın karşılaştırması.....	47
Şekil 4.11 : Sistem parametrelerinin belirsiz olduğu durumda üretilen kontrol işaretleri.....	48
Şekil 4.12 : $\frac{1}{4}$ Araç süspansiyon sistemi	49
Şekil 4.13 : Araç süspansiyon kontrol sisteminin blok diyagramı.....	50
Şekil 4.14 : Araç süspansiyon kontrol sisteminin Simulink diyagramı	50
Şekil 4.15 : $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin başarımlarının karşılaştırılması	51
Şekil 4.16 : 0.1 metrelik birim basamak bozucu için kontrol işaretleri.....	52

Şekil 4.17 : Yük değişimleri altında $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin başarımının karşılaştırılması	52
Şekil 4.18 : Yük değişimleri altında $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin ürettikleri kontrol işaretleri	53
Şekil 4.19 : Bir aracın üzerine monte edilmiş ters sarkaç	54
Şekil 4.20 : Aracın ve sarkacın serbest cisim diyagramı	54
Şekil 4.21 : Darbe bozucusu altında doğrusal model kullanarak benzetimi yapılan ters sarkaç sisteminin PID ve $PI^\lambda D^\mu$ türü kontrolör ile elde edilen sistem cevapları karşılaştırılması	56
Şekil 4.22 : Ters sarkaç sisteminin doğrusal olmayan modeli kullanılarak yapılan benzetim sonucu elde edilen cevaplar	57
Şekil 4.23 : Quanser IP02 deney seti	57
Şekil 4.24 : Benzetim için oluşturulan Simulink modeli	59
Şekil 4.25 : Geleneksel PD ve kesirli mertebeden PD kontrolörler ile kontrol edilen sistemin benzetim sonuçları.....	60
Şekil 4.26 : Geleneksel PD kontrolörünün deneysel sonuçları	61
Şekil 4.27 : Kesirli mertebeden PD kontrolörünün deneysel sonuçları	61
Şekil 4.28 : 0.45kg'lık ek yük için PD kontrolörünün performansı	62
Şekil 4.29 : 0.45kg'lık ek yük için kesirli mertebeden PD kontrolörünün performansı	63

KESİRLİ MERTEBEDEN KONTROLÖRLER VE UYGULAMALARI

ÖZET

Son yıllarda, matematik literatüründe 300 yılı aşkın bir süredir var olan kesirli mertebeden türev ve integral kavramlarının, sistem modellemeye kontrolör tasarımına, kontrol mühendisliğinin bir çok alanında da kullanılabileceği görülmüştür.

Bu çalışmada öncelikle 19. yy'da ortaya atılan ve literatürde sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev ve integral tanımları verilmiştir. Ayrıca bu türevlerin lineer olma ve Leibniz kuralı gibi bazı özellikleri ele alınmış ve kesirli mertebeden türevler ile tam sayılı mertebeden türevlerin ilişkilerine değinilmiştir. Ayrıca kesirli mertebeden türevlerin Laplace dönüşümlerini elde etme yöntemleri üzerinde durulmuş ve Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımının Laplace dönüşümünde ortaya çıkan sorunlar belirlenmiş ve bu sorunları gideren literatürde önerilmiş Caputo kesirli mertebeden türev tanımı verilmiştir.

Daha sonra kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin dinamik sistemleri modellemeye çok daha etkili olduğu gösterilmiş ve tam sayılı mertebeden modelin doğruluğu kabul edilerek tasarlanan kontrolörlerin, gerçek sistem kesirli mertebeden olduğunda başarımlarının nasıl etkileneceği incelenmiştir. Ayrıca kesirli mertebeden türevlerin yaklaşıklık ifadelerinin sürekli ve ayık zamanda elde edilmesine yönelik yöntemler verilmiş ve bu yöntemlerin özellikleri incelenmiştir.

Son olarak da, bu tez çalışmasında kesirli mertebeden kontrolör tasarım yöntemlerine ve kesirli mertebeden kontrolörlerin geleneksel kontrolörler ile karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Bu kapsamda, kesirli mertebeden PID tanıtılmış ve frekans tanım bölgesinde kesirli mertebeden PID tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bir araç süspansiyon sisteminin ve ters sarkaç sisteminin kontrolü, kazanç ve mertebe katsayıları nümerik arama algoritmaları ile belirlenen kesirli mertebeden PID kontrolörleri ile gerçekleştirilmiştir. Son olarak ise bir DC motorun yörünge izleme kontrolünün, kesirli mertebeden bir PD kontrolörü ile yapıldığı deneysel bir çalışma gerçekleştirilmiştir.

FRACTIONAL ORDER CONTROLLERS AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

In recent years it is seen that fractional order derivative and integral which are involved in mathematics literature for more than 300 years can be used in various fields of control engineering from system modeling to controller design.

In this thesis firstly Riemann-Liouville and Grünwald-Letnikov fractional order derivative definitions which are frequently used in literature is given. After that fractional order derivatives' some properties which are linearity and Leibniz rule are handled and the relationship between the fractional order derivatives and integer order derivatives is discussed. Furthermore, Laplace transforms of fractional order derivatives are obtained. Problems that may be occur in obtaining the Laplace transform of the Riemann Liouville fractional order derivatives are determined and Caputo fractional order derivative definition that solves these problems is given.

After that it is shown that fractional order differential equations are more efficient than the integer order differential equations in system modelling. A performance evaluation of the controllers which are designed under the assumption that the system is integer order while the real system is fractional order is examined. In addition to this continuous and discrete time approximation methods for the fractional order derivatives are given and the properties of these methods are investigated.

Finally, in this thesis fractional order controller design techniques and a comparison between the performances of the traditional and fractional order controllers are given. Within this context, fractional order PID controllers are introduced and a fractional order PID controller is designed in frequency domain. Fractional order PID controllers; in which numerical search algorithms are used to find the gain, differentiation and integration orders coefficients are applied to control the vehicle suspension system and an inverted pendulum. Lastly, an experimental study is made by using a fractional order PD controller, in order to realize the reference tracking control of a DC motor.

1. GİRİŞ

Türev ve integral kavramları ilk defa 17. yüzyılın ikinci yarısında Leibniz ve Newton tarafından birbirlerinden habersiz olarak geliştirilmiştir. Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen tam sayılı mertebeden türev ve integral işlemlerinin bir genelleştirmesi olarak kabul edilen kesirli mertebeden türev ve integral kavramı da, aslında tam sayılı mertebeden türev ve integral kadar eskidir. Kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Bir çok kaynakta da değinildiği gibi kesirli mertebeden türev ifadesi ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'e yazdığı bir mektupta geçmektedir [1]. Bu mektubunda Leibniz L'Hospital'e "Tam sayılı mertebeden türevlerin anlamı tam sayılı olmayan türevlere genişletilebilir mi?" diye sormuştur.

Tam sayılı türev işleminde olduğu gibi, kesirli mertebeden türev için de literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir ancak kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev mertebesi tam sayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade Leibniz ve Newton tarafından önerilen tam sayılı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır. Literatürde en çok söz edilen tanımlar, daha sonraki bölümlerde ayrıntısıyla değinilecek olan Grünwald-Letnikov ve Riemann-Louville kesirli mertebeden türev tanımlarıdır. Yapılan çalışmalarda bu iki tanımın bazı durumlarda birbiriyle eşdeğer olduğu gösterilmiştir [2,6]. Yaygın kullanılan bu iki tanımın dışında literatüre birçok kesirli mertebeden türev tanımı bulmak mümkündür. Örneğin Caputo kesirli mertebeden türev tanımı, Riemann-Louville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak için 1960'lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından önerilmiştir.

Başlangıçta, pür matematiğin bir konusu olan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler ve yapılan çalışmalar sayesinde günümüzde kendisine bir çok uygulama alanı bulmuştur [3]. Bu uygulamaların önemli bir kısmının, karmaşık dinamik sistemlerin modellenmesi ve kesirli mertebeden kontrolörlerin analizi ve tasarımı olduğu söylenebilir.

Bilindiği gibi, dinamik sistemler bazı varsayımlar altında modellenir. Bu varsayımların geçerli olduğu kabulü ile sistem dinamiklerini en iyi ifade eden bir matematiksel model elde edilir. Bu varsayımların başında da, sistemi oluşturan elemanların ideal olduğu varsayımı gelir ve bu varsayım altında dinamik sistemler, tam sayılı mertebeden türev ve integraller içeren diferansiyel denklemler ile modellenir. Diğer taraftan, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin birçok dinamik sistemi modellemede yetersiz kaldığı da bilinmektedir. Bu sistemlere örnek olarak, viskoelastisite, viskoelastik sistemler; difüzyon, ısı ve nem transfer olgusu; ekonomik ve biyolojik sistemler verilebilir [3].

Kontrolör tasarımı açısından ise tam sayılı mertebeden kontrolörlerde, seçilen herhangi bir amaç ölçütünü sağlamak üzere, sadece kazanç katsayıları serbest seçilebilirken; kesirli mertebeden kontrolörlerde bunlara ek olarak -kontrolörün türüne bağlı olarak- türev veya integral mertebeleri de serbest seçilebilir. Bu nedenle, kesirli mertebeden kontrolörlerin, tasarımda büyük bir esneklik sağladığı, sistemin başarımını arttırdığı ve sistemdeki parametre değişimlerine karşı daha az duyarlı olduğu bilinmektedir. Bu olumlu özelliklerinin yanında, kesirli mertebeden sistemlerin zaman tanım bölgesindeki cevaplarının elde edilmesinin oldukça karmaşık işlemleri gerektirmesi analiz ve tasarım yöntemleri geliştirme de sorunlarla karşılaşılmasına sebep olur. Bu nedenle, literatürdeki çalışmaların büyük bir bölümünde, önerilen tasarım yöntemleri, ya frekans tanım bölgesinde ya da sayısal bir arama algoritması kullanılarak geliştirilmiştir. Ayrıca, ilgili literatürde bu sistemlerin analiz ve tasarımında kullanılabilecek çeşitli yaklaşıklık yöntemleri önerilmiştir ve bu yöntemler sayesinde kesirli mertebeden türevler ile çalışırken oluşabilecek hesaplama yükünü azaltmak mümkün olmaktadır [4].

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden sistemler ve kesirli mertebeden kontrolör tasarım yöntemleri incelenmiş, doğrusal ve doğrusal olmayan çeşitli sistemler için kontrolörler tasarlanmış ve çeşitli sayısal ve deneysel uygulamalar yapılmıştır. Tezin içeriği şöyle özetlenebilir; önce kesirli mertebeden türev ve integral tanımları ve bu tanımların özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri üzerinde durulacak, daha sonra literatürde sıklıkla kullanılan kesirli mertebeden türevlerin Laplace Dönüşümleri elde edilecek ve elde edilen dönüşümlerin mühendislik uygulamalarında ne kadar kullanılabilir olduğu üzerinde durulacaktır. Ardından kesirli mertebeden sistemler ele alınacak ve kesirli mertebeden türevin sürekli ve ayrık zamandaki yaklaşıklıkları

incelenecektir. Son olarak da kesirli mertebeden kontrolör tasarım yöntemleri üzerinde durulacak ve çeşitli sayısal ve deneysel sonuçlar verilecektir.

2. KESİRLİ MERTEBEDEN KALKULÜS

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin temelleri 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'e gönderdiği bir mektupta atılmıştır. Bu mektupta Leibniz "Tamsayılı mertebeden $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevinin anlamı tamsayı olmayan değerlere genelleştirilebilir mi?" diye sormuştur. L'Hospital ise bu soruya bir başka soru ile cevap verir: " $n = 1/2$ olursa ne olur?"

L'Hospital bu sorusuyla belki de farkında olmadan literatüre ilk defa yarı türev kavramını kazandırmıştır. $n = 1/2$ olduğu durumda operatöre yarı türev operatörü denir. Yarı türev operatörü bir fonksiyona ard arda iki defa uygulandığında o fonksiyonun 1. mertebeden türevine eşdeğer bir sonuç elde edilir.

Daha sonra [5]' e göre S.F. Lacroix, J.B.J. Fourier, N.H. Abel, J. Liouville, B. Riemann, K. Grünwald, A.V. Letnikov, J. Hadamard, G.H. Hardy vb. bir çok ünlü matematikçi bu konu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Literatürde birçok kesirli mertebeden türev ve integral tanımı bulunmaktadır ancak bunların en önemlileri Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımlarıdır.

Başlangıçta saf matematiksel bir alan olarak görülen kesirli mertebeden diferansiyel denklemler özellikle son elli yıldır mühendisliğin birçok branşında kendine kullanım alanı bulmuştur. Sistem modelleme ve kontrolünde kesirli mertebeden yapıların tamsayılı mertebeden yapılara göre daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Ayrıca viskoelastisite, ısı transferi, elektrik devreleri ve analog gerçekleştirme ile ilgili olarak literatürde birçok çalışma bulunmaktadır.

2.1 Türev ve İntegral Operatörlerine İlişkin Ortak Gösterim

Bu bölümde genellikle ayrı gösterime sahip türev ve integral operatörleri aynı gösterim altında birleştirilecektir. Bu birleştirme işlemi tamsayılar için yapılacaktır. Bu birleştirmenin nedeni ifadeleri daha sonra verilecek olan kesirli mertebeden türev

ve integral tanımlarının tek bir operatör ile gösterilmesinin yazımda ve hesaplarda kolaylık sağlamasıdır.

Önce $y = f(t)$ şeklindeki bir fonksiyonu göz önüne alalım. n in tamsayı olduğu durumda n . mertebeden türev,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^{(n)}f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\binom{n}{r}$ binom katsayısıdır,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}. \quad (2.2)$$

(2.1) ifadesini genelleştirmek için aşağıdaki yapı kullanılabilir:

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh). \quad (2.3)$$

Burada (2.3) ifadesindeki p terimi herhangi bir tamsayıyı göstermektedir aynı şekilde n de yine bir tamsayıdır. (2.3) ifadesinde $\binom{p}{p}$ den sonraki bütün terimler sıfır olduğu için $p \leq n$ için bu eşitlik p inci mertebeden türevi ifade ederken p 'nin negatif değerleri için ise integral ifadeleri elde edilir. Yazma kolaylığı için,

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r-1)}{r!} \quad (2.4)$$

gösterimi kullanılırsa,

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \quad (2.5)$$

şeklinde basit olarak ifade edilebilir. (2.3) ifadesindeki p terimi $-p$ olarak değiştirilir ve (2.5) eşitliği bu ifadede yerine konulursa:

$$f^{(-p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh), \quad (2.6)$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} f^{(-p)}_h(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.7)$$

elde edilir. $p=1$ için ise,

$$f^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t-rh) \quad (2.8)$$

yazılabilir. Ayrıca $t-nh=a$ alınır ve $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu kabul edilirse

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} f^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade genelleştirilse:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu ifadenin doğruluğu tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir. Tümevarım yöntemiyle (2.10) ifadesini elde etmek için herhangi bir p için doğru olduğu kabul edilip, $p+1$ için de doğru olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu amaçla, aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Burada $f_1(a) = 0$ olduğu görülmektedir.

$${}_a D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.12)$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h) \quad (2.13)$$

bu ifadede, (2.4)'ten yararlanarak aşağıdaki ilişki kullanılabilir.

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

(2.14) özelliği (2.13) ifadesindeki ilk toplam teriminde kullanılır ve ikinci toplamdaki r ifadesi $r-1$ ile değiştirilirse[6]'ya göre:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\
&\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p-1} f(t) = {}_a D_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t - (n+1)h) , \tag{2.16}$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p-1} f(t) = {}_a D_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) \tag{2.17}$$

elde edilir. Bu ifadede (2.11)'de yaptığımız tanım kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0 \tag{2.18}$$

yazılabilir. Gama fonksiyonunun limit gösterimi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \tag{2.19}$$

göz önünde bulundurulur ve (2.17) ve (2.19) birleştirilirse,

$${}_a D_t^{-p-1} f(t) = {}_a D_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t \llbracket -\tau \rrbracket^{p-1} f_1(\tau) d\tau , \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p-1} f(t) = - \frac{\llbracket -\tau \rrbracket^p f_1(\tau)}{p!} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t \llbracket -\tau \rrbracket^p f(\tau) d\tau , \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p-1} f(t) = \frac{1}{p!} \int_a^t \llbracket -\tau \rrbracket^p f(\tau) d\tau \tag{2.22}$$

elde edilir. Bu şekilde (2.10) ifadesinin doğruluğu ispatlanmış olur. Şimdi (2.10) eşitliğinin p-katlı bir integral ifadesi olduğunu gösterelim. İfadenin türevi alınacak olursa

$$\frac{d}{dt} \llbracket {}_a D_t^{-p} f(t) \rrbracket = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t \llbracket -\tau \rrbracket^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t) \tag{2.23}$$

yazılabilir ve bu (2.23) ifadesinin,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t ({}_a D_t^{-p+1} f(t)) dt \tag{2.24}$$

şeklinde integrali alınır ve

$${}_a D_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \quad (2.25)$$

elde edilen (2.24) ve (2.25) ifadeleri birleştirilirse,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt, \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+3} f(t)) dt, \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^{-p} f(t) = \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t f(t) dt}_{p \text{ defa}} \quad (2.28)$$

elde edilir. Bu şekilde türev ve integral operatörleri tek bir gösterilim altında birleştirilmiş olur ve en genel halde,

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.29)$$

gibi gösterilebilir. Burada m pozitif bir tamsayı olmak üzere $p=m$ olduğunda m inci mertebeden türev elde edilir. $p=-m$ olduğunda ise m katlı integral elde edilir. Tamsayı mertebeden (n tamsayı) türev ve integral (p tamsayı) (2.29) un özel birer hali olarak ortaya çıkar.

Türev ve integral işlemlerinin ortak gösterilimi olarak düşünülebilecek olan D operatörü bazı kaynaklarda türevintegral operatörü olarak geçer. Bu ifade doğal olarak türev ve integral mertebelerinin reel sayılara hatta karmaşık sayılara genelleştirilebileceği düşüncesini oluşturur. Bundan sonraki bölümlerde buraya kadar tamsayı olarak göz önüne aldığımız “ p ” mertebesi reel sayılara genelleştirilecektir ve KMT ve KMİ tanımları ortaya konacak ve bu türev ve integrallerin özellikleri üzerinde durulacaktır.

2.2 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları

Tamsayılı türevde olduğu gibi, kesirli mertebeden türev için de literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Literatürde yaygın olarak kullanılan iki tanım Grünwald-Letnikov (G-L) ve Riemann-Liouville (R-L) tanımlarıdır. Bazı özel durumlar için bu tanımların birbirine özdeş oldukları gösterilmiştir.

Bu bölümde Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımlarına yer verilmiştir. Bu iki tanım dışında, literatürde çok çeşitli tanımlar bulmak da mümkündür. Örneğin 1960’larda İtalyan matematikçi Michele Caputo tarafından ortaya atılan Caputo KMT tanımı, özellikle Laplace dönüşümü alındığında daha kullanışlı başlangıç değer ifadeleri içerdiği için uygulamalı alanlarda ve mühendislikte sıklıkla tercih edilir.

2.2.1 Grünwald-Letnikov tanımı

Bu tanım önce 1867 de Anton Karl Grünwald tarafından önerilmiş daha sonra 1868 yılında [7] eserinde Aleksey Vasilievich Letnikov tarafından geliştirilmiştir. Grünwald-Letnikov türev tanımı [8]’e göre $p > 0$ olmak üzere,

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(p-r+1)} f(t-rh) \quad (2.30)$$

ifadesiyle verilir. Bu tanımın aşağıdaki şekilde ifade edilebileceği [6]’da gösterilmiştir.

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \quad (2.31)$$

Bu ifadede “ m ”, “ $p-1$ ” den büyük bir tamsayıdır. En küçük “ m ” için $m < p < m+1$ ifadesi geçerlidir. Ayrıca (2.31) ifadesine $[a,t]$ kapalı aralığında $f^{(k)}(t)$, ($k=1,2,\dots,m+1$) türevlerinin sürekli olduğu varsayımı altında ulaşılmıştır.

İntegral tanımı ise yine $p > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh), \quad (2.32)$$

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

şeklinde verilmiştir.

2.2.2 Riemann-Liouville tanımı

Riemann-Liouville türev tanımı KMT’leri ifade etmede kullanılan en yaygın tanımdır. Bu tanım ile p sıfırdan büyük herhangi bir sayı olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun p inci metreden türevi

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (m \leq p \leq m+1) \quad (2.34)$$

ifadesi ile verilir. Riemann-Liouville tanımı ile Grünwald-Letnikov tanımı arasındaki ilişkiyi belirlemek için $f(t)$ fonksiyonunun $m+1$ defa türevinin alınabildiğini kabul edelim. Bu kabul altında ${}^{RL}_a D_t^p f(t)$, Riemann-Liouville türevini, ${}^{GL}_a D_t^p f(t)$, Grünwald-Letnikov tanımını göstermek üzere (2.34) ifadesine ard arda kısmi integrasyon uygulanırsa:

$${}^{RL}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow {}^{RL}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau = {}^{GL}_a D_t^p f(t) \quad (2.36)$$

sonucuna ulaşılır. Görüldüğü gibi $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ kez türevlenebilen bir fonksiyon ise Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov türev tanımları eşdeğer olmaktadır. Matematiksel açıdan bu özellikteki fonksiyonlar sınıfı sınırlı olsa da uygulamada karşılaşılan fonksiyonların genellikle bu özelliğe sahip olduğu söylenebilir.

Riemann-Liouville integral tanımı ise, $p > 0$ olmak üzere,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

şeklindeir. Burada $p > 0$ dır (2.34) ile verilen türev ve (2.37) ile verilen integral ifadeleri birleştirilirse,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{k-\alpha} f(t) &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \right)^k}_{\text{k.mertebeden türev (+k)}} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau}_{\text{\alpha.mertebeden integral (-\alpha)}} \\ \Rightarrow {}_a D_t^{k-\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\frac{d}{dt} \right)^k \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.38)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\alpha > 0$ ve k bir tam sayı olmak üzere $k - \alpha > 0$ koşulu sağlanır.

2.3 Kesirli Mertebeden Türevlerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde KMT'lerin özellikleri ve iki fonksiyonun çarpımının türevini almada kullanılan Leibniz kuralının mertebenin tam sayı olmadığı durumlarda nasıl ifade edilebileceği üzerinde durulacaktır.

2.3.1 Doğrusal olma

Tamsayıli mertebeden türevlerde bulunan lineerlik özelliği aynı zamanda kesirli mertebeden türev ifadelerinde de mevcuttur. ${}_aD_t^\beta$ Riemann-Liouville veya Grünwald-Letnikov türevini ifade etmek üzere bu iki türev tanımının da,

$${}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_aD_t^\beta f(t) + \mu {}_aD_t^\beta g(t) \quad (2.39)$$

doğrusal olma özelliğini sağladığı gösterilebilir.

Önce Riemann-Liouville türevi ele alınırsa. β türev mertebesi, k , $(k-1 \leq \beta < k)$ özelliğindeki bir tam sayı olmak üzere

$${}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(k-\beta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\beta-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \quad (2.40)$$

yazılabilir. İntegralin içindeki terim ayrı ayrı yazılırsa:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-\beta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(k-\beta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\beta-1} g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow {}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_aD_t^\beta f(t) + \mu {}_aD_t^\beta g(t) \quad (2.42)$$

ifadesi elde edilir ki, bu sonuç Riemann-Liouville türev operatörünün lineer olduğunu gösterir. Aynı şekilde Grünwald-Letnikov türev operatörünün de doğrusallığı gösterilebilir. Bu amaçla,

$${}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{-\beta} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\beta}{r} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \quad (2.43)$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lambda \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{-\beta} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\beta}{r} f(t-rh) \\ &+ \mu \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{-\beta} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\beta}{r} g(t-rh) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow {}_a D_t^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^\beta f(t) + \mu {}_a D_t^\beta g(t) \quad (2.45)$$

ifadesi elde edilir ki bu sonuç Grünwald-Letnikov türev operatörünün lineer olduğunu gösterir.

2.3.2 Leibniz kuralı

İki fonksiyonun çarpımının TMT'inin hesaplanması için kullanılan Leibniz kuralı; $\varphi(t)$ ve $f(t)$ iki fonksiyon, n bir tam sayı olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) f(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(t) f^{(n-k)}(t) \quad (2.46)$$

ilişkisi ile verilir. (2.46) ile verilen tanım ifadesinde “ n ” tamsayısı, sıfırdan büyük p reel sayısı ile değiştirilirse $f^{(n-k)}(t)$ tam sayılı mertebeden türev ${}_a D_t^{p-k} f(t)$ şeklinde kesirli mertebeden türeve dönüşür. Bu durumda,

$$\Omega_n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) \quad (2.47)$$

şeklinde bir tanım kullanılarak. uzun hesaplamalar sonucunda $\varphi(t) f(t)$ çarpımının p inci mertebeden türevinin

$${}_a D_t^p \varphi(t) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) \quad (2.48)$$

şeklinde elde edilebileceği [6]'da gösterilmiştir. (2.48) ifadesi literatürde kesirli mertebeden türevler için Leibniz kuralı olarak bilinir.

2.4 Kesirli Mertebeden Türevlerle İlgili Bazı Hesaplamalar

Önceki bölümlerde KMT tanımları ve bunların bazı özellikleri üzerinde duruldu. Bu bölümde ise KMT kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için bazı fonksiyonların; bir sabitin daha sonra da t^b şeklindeki bir güç fonksiyonunun kesirli mertebeden türevleri hesaplanacaktır.

2.4.1 Bir sabitin kesirli mertebeden türevi

Türevin mertebesi tamsayı olduğunda bir sabitin türevi her zaman sıfıra eşit olur ancak türev mertebesi kesirli olduğunda artık sabitin türevi sıfıra eşit olmayabilir. Bu

durumu açıklamak için, $f(t) = c$ şeklindeki bir sabit fonksiyonun kesirli mertebeden türevi **(2.38)** ifadesi kullanarak,

$${}_0D_t^{1-p}c = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} c d\tau, \quad (2.49)$$

$${}_0D_t^{1-p}c = \frac{c}{\Gamma(p)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} d\tau, \quad (2.50)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $0 \leq p < 1$ ise **(2.50)** ile verilen ifadedeki integral ve elde edilen sonucun türevi,

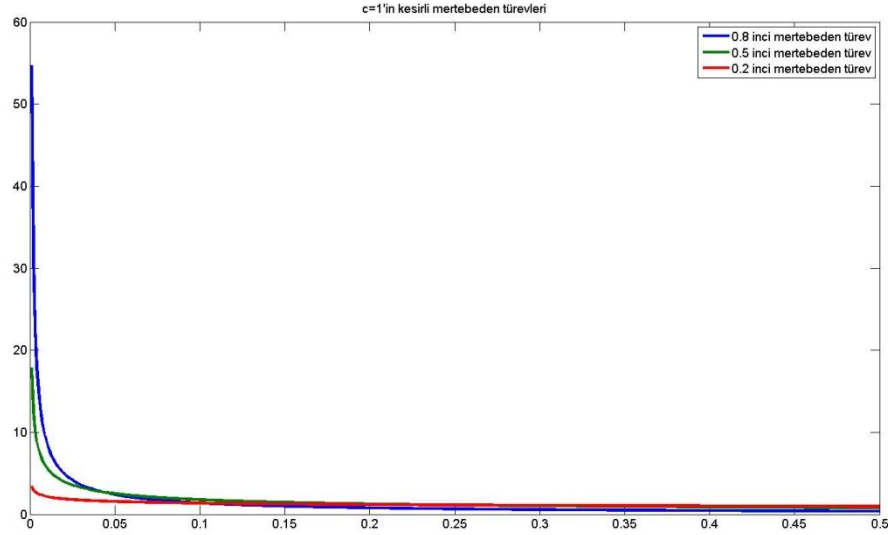
$$\int_0^t (t-\tau)^{p-1} d\tau = \left[-\frac{(t-\tau)^p}{p} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{(t-t)^p}{p} + \frac{(t-0)^p}{p} = \frac{t^p}{p} \quad (2.51)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t^p}{p} \right) = t^{p-1} \quad (2.52)$$

şeklinde hesaplanır. Bu **(2.52)** ve **(2.50)** ifadesi birleştirilirse $f(t) = c$ şeklindeki bir sabit fonksiyonun $(1-p)$ inci mertebeden türevi

$$\Rightarrow {}_0D_t^{1-p}c = \frac{c}{\Gamma(p)} t^{p-1} \quad (2.53)$$

olarak bulunur. Bu sonuçtan görüldüğü gibi, $0 \leq p < 1$ olmak üzere $f(t) = c$ sabit fonksiyonunun $(1-p)$ inci mertebeden türev ifadesi ${}_0D_t^{1-p}c$ sıfıra eşit değildir. $c=1$ için, $f(t) = c$ nin 0.8 inci, 0.5 inci ve 0.2 inci mertebeden türevlerine ilişkin çizimler Şekil 2.1’te görülmektedir.



Şekil 2.1 : $f(t) = c$ fonksiyonunun $c=1$ için, 0.8 inci, 0.5 inci ve 0.2 inci mertebeden türevleri

2.4.2 $f(t)=t^b$ gibi bir kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi

Bu bölümde $f(t) = t^b$ şeklindeki bir fonksiyonun kesirli mertebeden türevi elde edilecektir. Bu amaçla (2.38) eşitliğinden yararlanılırsa:

$${}_0D_t^\alpha t^b = \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \tau^b d\tau \right\} \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow {}_0D_t^\alpha t^b = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \tau^b d\tau \right\} \quad (2.55)$$

yazılabilir. Burada α türev mertebesi, m ise $m-\alpha > 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir tamsayıdır. (2.55) ifadesinin sağ tarafındaki integralin hesaplanabilmesi için

$v = \frac{\tau}{t}$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılsa,

$${}_0D_t^\alpha t^b = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left\{ t^{m-\alpha+b} \int_0^1 (1-v)^{m-\alpha-1} v^b dv \right\} \quad (2.56)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Burada beta fonksiyonunun özelliği kullanılacak olursa:

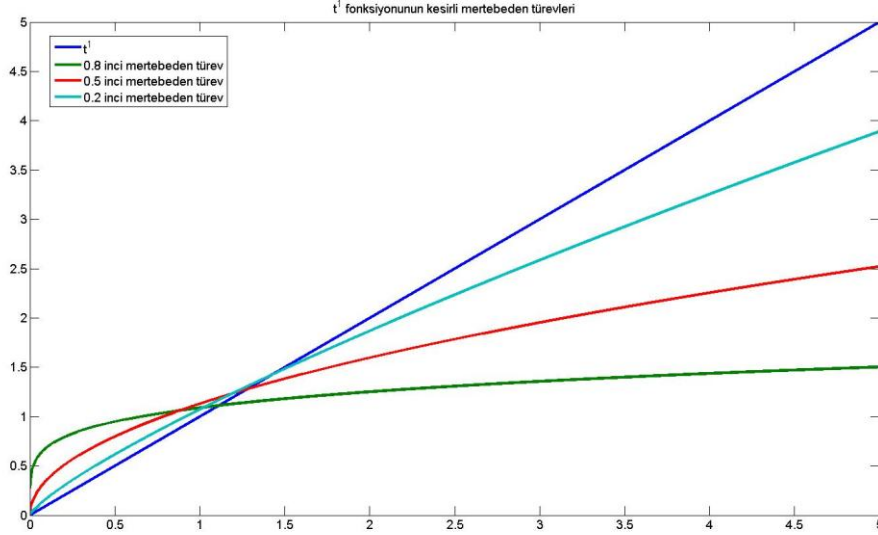
$${}_0D_t^\alpha t^b = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(b+1+m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m t^{m-\alpha+b} \quad (2.57)$$

$${}_0D_t^\alpha t^b = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1+m-\alpha)} t^{b-\alpha} \frac{\Gamma(m-\alpha+b+1)}{\Gamma(m-\alpha+b-m+1)} . \quad (2.58)$$

elde edilir, bu ifade düzenlenirse $f(t) = t^b$ fonksiyonunun α ıncı mertebeden türevi

$${}_0D_t^\alpha t^b = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-\alpha+1)} t^{b-\alpha} \quad (2.59)$$

şeklinde elde edilir. $f(t) = t^b$ fonksiyonunun $b=1$, $\alpha=0.8$, $\alpha=0.5$ ve $\alpha=0.2$ alınarak elde edilen kesirli mertebeden türevlerinin çizimleri Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.2 : t^1 fonksiyonunun $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.2$ alınarak elde edilen kesirli mertebeden türevleri

2.5 Laplace Dönüşümü

Bu bölümde kesirli mertebeden türev ve integrallerin Laplace Dönüşümleri incelenecektir. Bu amaçla önce Laplace dönüşümü ile ilgili genel bilgiler ve Laplace dönüşümünün varlık teoremi verilecek daha sonra ise kesirli mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri ile ilgili literatürde bulunan bilgiler özetlenecektir.

Bir integral dönüşümü,

$$T[f(t)] = F(s) = \int_a^b k(s,t) f(t) dt \quad (2.60)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k(s,t)$ fonksiyonuna integral dönüşümünün çekirdeği denir. Bu çekirdek ve integralin sınırları $k(s,t) = e^{-st}$, $a=0$, $b=\infty$ olarak alındığında oluşan integral dönüşümüne Laplace dönüşümü denir.

$$F(s) = L \{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.61)$$

şeklinde yazılır. Bu integralin mutlak yakınsak olabilmesi için $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parça parça sürekli ve üstel mertebeden olması gerekir [9]. Varlık teoremini ispatlamadan önce, üstel mertebe tanımının verilmesi yararlı olacaktır.

Tanım[10]: Bir $f(t)$ fonksiyonu için her $T \geq 0$ için $|f(t)| \leq Me^{t\alpha}$ veya her $t \geq T$ için $|f(t)| \leq Me^{-t\alpha}$ koşullarını sağlayan $M > 0$ ve α sabitleri varsa $f(t)$ fonksiyonuna üstel mertebededir ve üstel mertebesi de α dır denir.

Teorem: Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parça parça sürekli ve üstel mertebesi α ise, $s > \alpha$ için Laplace Dönüşümü vardır ve mutlak yakınsaktır.

İspat: $f(t)$ fonksiyonu parça parça sürekli olduğundan $[0, M)$ sonlu aralığında sınırlı olur ve

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.62)$$

yazılırsa Laplace dönüşümünün yakınsaklığını yukarıdaki ikinci integralin yakınsaklığına indirgemiş oluruz. Diğer taraftan $f(t)$ üstel mertebeden olduğu için

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left. \frac{-M}{s-\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \right|_{t_0}^{\tau} \quad (2.63)$$

yazılabilir ve integral ancak $s > \alpha$ için yakınsak olur.

Laplace dönüşümü olasılık problemlerinde, lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde ve mühendislik problemlerinin analizinde önemli bir rol oynar. Lineer sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemleri Laplace dönüşümü kullanıldığında cebirsel denklem sistemine dönüşürler. Bu cebirsel denklem takımının çözümü diferansiyel denklemlerin s-tanım bölgesinde çözümü olacağı için, zaman tanım bölgesindeki çözüme ters dönüşüm kullanılarak ulaşılır. Ters Laplace Dönüşümü,

$$f(t) = L^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (2.64)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada c integrali, $F(s)$ fonksiyonunu yakınsama bölgesinde tutacak bir reel sayıdır. $F(s)$ fonksiyonu rasyonel olmadığı zaman (2.64) eşitliğini kullanarak ters dönüşümü belirlemek her zaman kolay değildir.

2.5.1 Kesirli mertebeden türevlerin laplace dönüşümleri

Riemann-Liouville integral ifadesi konvolüsyon işleminin tanımı kullanılarak

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(p)} t^{p-1} * f(t) \quad (2.65)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada t^{p-1} teriminin Laplace dönüşümü

$$G(s) = L \{ t^{p-1} \} = \Gamma(p) s^{-p} \quad (2.66)$$

şeklinde belirlenebilir [11]. Diğer taraftan, Laplace dönüşümünün konvolüsyon özelliği,

$$L \{ f(t) * g(t) \} = F(s) G(s) \quad (2.67)$$

kullanılır ve, (2.67) ve (2.66) ifadeleri (2.65)'te yerine yazılırsa bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli mertebeden Riemann Liouville integralinin Laplace dönüşümü

$$L \{ {}_0D_t^{-p} f(t) \} = L \{ t^{p-1} * f(t) \} = L \{ t^{p-1} \} L \{ f(t) \} = s^{-p} F(s) \quad (2.68)$$

şeklinde elde edilir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli mertebeden Riemann-Liouville türevinin Laplace dönüşümünü bulabilmek için önce n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t), \quad (2.69)$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1 \leq p \leq n). \quad (2.70)$$

tanımlarını yapalım. (2.69)' un Laplace Dönüşümü alınır ve sağ taraf için tam sayı mertebeden türevlerin Laplace dönüşümü özelliği kullanılırsa,

$$L \{ {}_0D_t^p f(t) \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (2.71)$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.70) denkleminin de iki tarafının Laplace dönüşümü alınıp Riemann-Liouville integralinin Laplace dönüşüm özelliği kullanırsa

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s) \quad (2.72)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli türevinin,

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0 D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0 D_t^{p-k-1} f(t) \quad (2.73)$$

özelliliği de kullanılır ve (2.72) ve (2.73) ifadeleri (2.71)'de yerine yazılırsa, bir $f(t)$ fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin Laplace dönüşümü

$$L \{ {}_0 D_t^p f(t) \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0 D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq p \leq n) \quad (2.74)$$

şeklinde elde edilir. Bu dönüşüm ifadesi matematiksel olarak geçerli olsa da, toplam ifadesinin içinde bulunan, fonksiyonun kesirli mertebeden türevlerine ilişkin başlangıç değerlerinin hesaplanması ya da bilinmesi kolay olmadığı için kullanılması ile ilgili bazı sorunları vardır. Literatürde, bu zorluğu ortadan kaldıran Caputo kesirli türev tanımı önerilmiştir [6]. Bu tez çalışmasında, Caputo kesirli türev tanımı üzerinde ayrıntılı olarak durulmayacak sadece Riemann-Liouville tanımıyla arasındaki farkı göstermek için Caputo kesirli türev tanımının Laplace dönüşümü verilecektir. Caputo kesirli türev tanımının Laplace dönüşümü,

$$L \{ {}_0^C D_t^p f(t) \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.75)$$

şeklinde verilir [7]. Eğer $0 \leq p < 1$ ve alt sınır değeri $a=0$ ise, Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev tanımının Laplace dönüşümü için,

$${}_0 D_t^p f(t) = \frac{f(0)}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

ifadesi kullanılabilir. Bu ifadenin Laplace dönüşümü alınır ve (2.66) ile verilen güç fonksiyonunun Laplace dönüşüm özelliği kullanılırsa Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevinin Laplace Dönüşümü

$$L \{ {}_0^C D_t^p f(t) \} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} \{ F(s) - f(0) \} = s^p F(s) \quad (2.77)$$

şeklinde elde edilir.

3. KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLER

Son yıllarda araştırmacılar kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlere kıyasla dinamik sistemlerin modellenmesinde çok daha etkili olduğunu ortaya koymuştur [12]. Ayrıca, literatürde verilen yaklaşımlar ve bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler sistemlerin modelini, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler olarak elde eden sistem tanıma tekniklerinin geliştirilmesini ve kullanılmasını mümkün kılmıştır.

Bilindiği gibi, dinamik sistem modelleme yöntemleri bazı varsayımlar altında gerçekleştirilir ve bunların geçerli olduğu kabulü ile sistem dinamiklerini en iyi ifade eden matematiksel model elde edilir. Bu varsayımların başında ise sistemi oluşturan elemanların ideal olduğu gelir, bu varsayım altında dinamik sistemler TMT ve TMI içeren diferansiyel denklemler ile modellenir.

Oysa bu varsayım birçok durumda geçerli değildir. Örneğin viskoelastisitede katı malzemeler Hooke yasası ile sıvı malzemeler ise Newton yasası ile ifade edilmektedir. Oysa bu kanunlar sadece ideal katı ve ideal sıvı malzemelerin davranışının matematiksel modelleridir. İdeal katı ve sıvı malzemelerin neredeyse doğada yer almadığı düşünülürse bu yaklaşımların eksikliği anlaşılır. Bu eksikliği gidermek amacıyla, Maxwell, Kelvin ve Voigt tarafından viskoelastik malzemelerin davranışlarının daha iyi modellenmesine yönelik bazı farklı yaklaşımlar önerilmiştir. Ancak bunlar da doğadaki bazı malzemelerin modellenmesine yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, literatürde basınç ile gerilme arasındaki ilişkinin kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemle verildiği çeşitli çalışmalar vardır. Bu çalışmalar göstermektedir ki; doğadaki malzemelerin davranışını modellemede, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler çok daha başarılıdır. [6, 13, 14].

En genel halde kesirli mertebeden lineer zamanla değişmeyen bir sistem, giriş $u(t)$ ve çıkış $y(t)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^N a_n D^{\alpha_n} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{\beta_m} u(t) \quad (3.1)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem ile modellenebilir. İlk koşulların sıfır olduğu kabulü altında (3.1) ile verilen bir sistemin giriş çıkış ilişkisini veren transfer fonksiyonu s-tanım bölgesinde,

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{\beta_m}}{\sum_{n=0}^N a_n s^{\alpha_n}} = \frac{b_M s^{\beta_M} + b_{M-1} s^{\beta_{M-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_N s^{\alpha_N} + a_{N-1} s^{\alpha_{N-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}, \alpha_n > \beta_m \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde kesirli mertebeden doğrusal sabit parametrelili bir diferansiyel denklem ile temsil edilen sistemler “kesirli mertebeden dinamik sistemler (KMS) olarak adlandırılırlar. Bir dinamik sistemi modellemek için çok daha fazla parametre seçeneğine sahip olması nedeniyle bu şekilde elde edilen bir matematik model gerçeği temsil etmede daha başarılı olacaktır. Örneğin tam sayılı ve N . mertebeden bir diferansiyel denklem ile modellenen bir sistem (TMS) için serbest seçilebilen en fazla $2N-1$ parametre bulunurken, aynı sistem

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{\beta_m}}{\sum_{n=0}^N a_n s^{\alpha_n}} = \frac{b_M s^{\beta_M} + b_{M-1} s^{\beta_{M-1}} + \dots + b_0}{a_N s^{\alpha_N} + a_{N-1} s^{\alpha_{N-1}} + \dots + a_0}, 1 > \beta \times M \quad (3.3)$$

şeklinde bir kesirli mertebeden transfer fonksiyonu ile modellenirse serbest parametre sayısı $N+M+1$ 'e yükselecektir. Seçilebilecek parametre sayısı keyfi olarak arttırılabildiği için, KMS'lerin TMS'e oranla modellemeye daha fazla esneklik sağlayacağı açıkça görülmektedir.

Endüstride sıklıkla karşılaşılan sistemlerin birçoğu birinci mertebeden diferansiyel denklemler ile yaklaşık olarak modellenebilirler. Herhangi bir dinamik sistemin matematik modeli için,

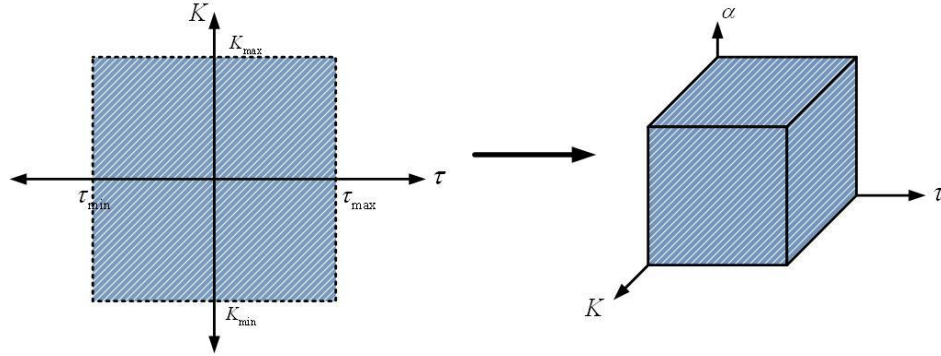
$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3.4)$$

şeklinde bir yapı seçilmiş ise, deney sonuçlarından hareketle sistem kazancı ve sistemin zaman sabiti olmak üzere iki parametre sistem tanıma teknikleri kullanılarak belirlenmeye çalışılır. Oysa sistemin modeli için,

$$H(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \quad (3.5)$$

şeklinde bir yapı seçildiğinde ise kazanç (K) ve sözde zaman sabiti (τ) ile birlikte sistem mertebesi α da serbest seçilebilen bir model parametresi olacaktır. Sonuç

olarak, (3.4) ve (3.5) ifadeleri ile verilen sistemler için parametre arama uzayları Şekil 3.1’de görülmektedir.



Şekil 3.1 : (3.4) ve (3.5) ifadeleri ile verilen modeller için parametre uzayları
Örneğin, parametreleri $K=1$, $\tau=1$ ve $\alpha=0.7$ olan bir sistemin birim basamak bir cevabı [6] çalışmasında verildiği gibi

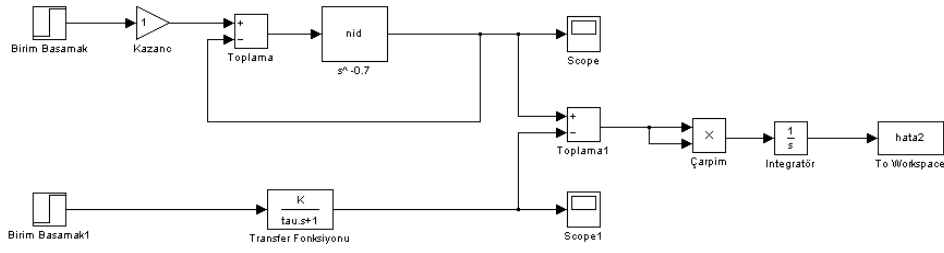
$$h(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-t^\alpha) = t^{-0.3} E_{0.7, 0.7}(-t^{0.7}) \quad (3.6)$$

şeklinde analitik olarak elde edilebilir. Burada E Agarwal tarafından klasik Mittag-Leffler fonksiyonunun bir genelleştirmesi olarak 1953’te önerilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu ifade etmektedir.

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.7)$$

Bu cevabın analitik olarak hesaplanabilmesi için öncelikle (3.7) ile verilen iki parametrelili Mittag Leffler fonksiyonun hesaplanması gerekir. Bu ifadenin kullanılması hesaplama yükünü arttıracığı için bu tez çalışmasında analitik olarak hesaplanan cevaba çok yakın sonuç veren Carlson yaklaşıklığı kullanılacaktır.

Kesirli mertebeden modellerin başarısını göstermek amacıyla, parametreleri $\tau=1$ ve $\alpha=0.7$ olan kesirli mertebeden bir sistemden elde edilen veriler kullanılarak, sistem tanıma yöntemleri ile birinci mertebeden bir model elde edilebilir. Bu çalışmada, sistem ile model çıkışı arasındaki fark üzerinden tanımlanan çeşitli amaç ölçütlerini en az yapan parametreler bulunmaya çalışılmıştır, kullanılan Simulink diyagramı Şekil 3.2’de görülmektedir.

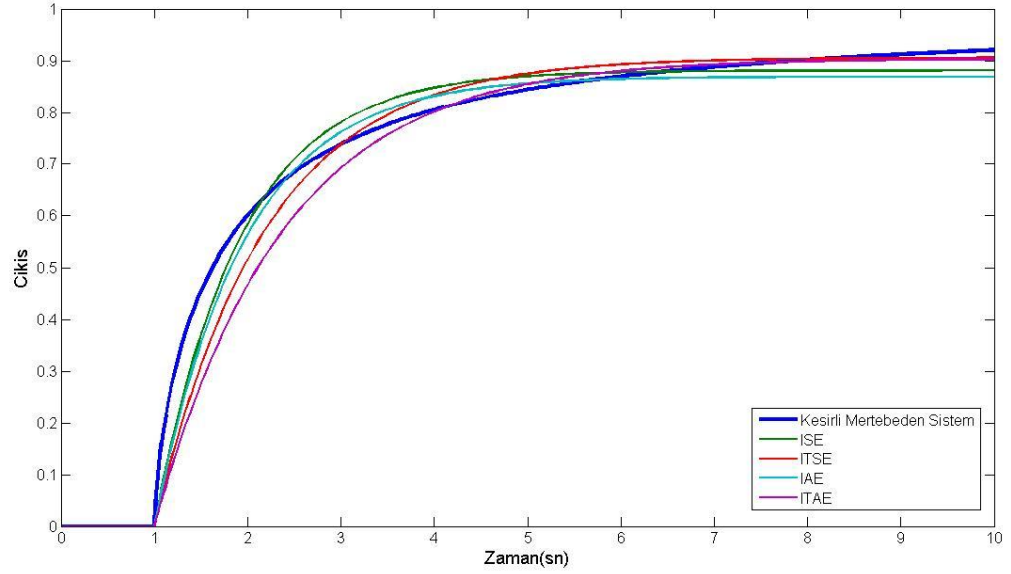


Şekil 3.2 : Sistem tanımada kullanılan Simulink diyagramı

Optimizasyon yöntemi olarak, genetik algoritma kullanılarak çeşitli performans ölçütlerini minimize eden parametreler belirlenmiştir. Çizelge 3.1’ de ilgili performans ölçütleri için hata toleransının 10^{-9} olduğu durumda genetik algoritmanın kaç nesil sonra aramayı sonlandırdığı, performans ölçütünün değeri ve bu performans ölçüt değerini veren model parametreleri görülmektedir. Şekil 3.3’te ise genetik algoritma ve farklı performans ölçütleri ile belirlenen sistemlerin ve kesirli mertebeden sistemin birim basamak yanıtı görülmektedir.

Çizelge 3.1 : Model parametreleri ve ilgili performans ölçütünün değerleri

	Performans Ölçütü	Nesil	K	τ
ISE	0.012699262	96	0.881	0.919
ITSE	0.020852300	67	0.906	1.188
IAE	0.279628205	51	0.869	0.956
ITAE	0.553510248	51	0.904	1.378

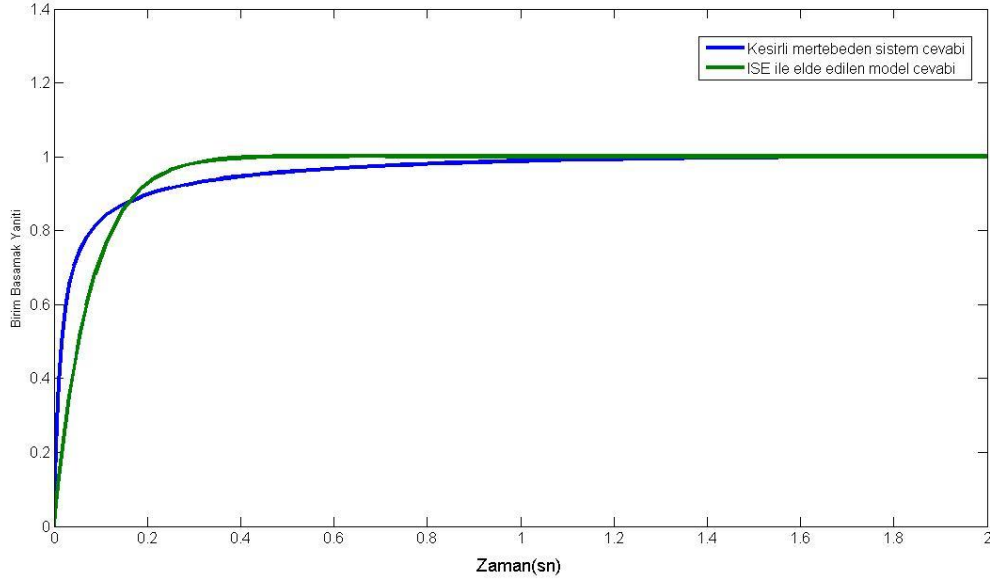


Şekil 3.3 : Elde edilen modellerin ve kesirli mertebeden sistemin birim basamak yanıtları

Tanıma işlemi sonunda elde edilen modellerin hiç birinin, zaman tanım bölgesi cevaplarının uygunluğu açısından kabul edilebilir bir yaklaşıklığa sahip olmadığı Şekil 3.3'ten görülmektedir. Elde edilen modellerin geri beslemeli kontrol altındaki davranışlarının analizi için, ISE ölçütünü minimize eden birinci mertebeden model temel alınarak basamak girişi altında sistem cevabının %2'lik bandın içerisine 0.3 saniyede girmesini ve aşım yapmamasını sağlayan bir PI kontrolörü,

$$C(s) = 13.58 + \frac{15.35}{s}$$

şeklinde olacaktır. Şekil 3.4'ten görüldüğü gibi, eğer sistem elde edilen birinci mertebeden model gibi davranmış olsaydı istenen tasarım kriterleri sağlanmış olacaktı. Ancak gerçek sistemin -KMS- kontrol altındaki cevabının yerleşme zamanı 0.79 saniye olarak gerçekleşmiştir.



Şekil 3.4 : Tasarlanan kontrolör için gerçek sistemin ve modelin birim basamak yanıtları

3.1 Kesirli Mertebeden Sistemlerin Yaklaşıklıkları

Kesirli mertebeden sistemler üzerinde çalışırken karşılaşılan en büyük sorun, zaman tanım bölgesi cevaplarının elde edilmesinin zorluğudur [15]. Genellikle kesirli mertebeden bir sistemin cevabının analitik olarak hesaplanması kolay değildir. Ancak özellikle son 20 yılda KMS'lerin tamsayılı mertebeden yaklaşık modellerinin, sürekli ve ayrık zamanda elde edilmesine yönelik birçok çalışma yapılmıştır.

KMS'lerin tamsayılı mertebeden yaklaşıklık ifadelerinin belirlenebilmesinde izlenenebilecek bir yol; önce kesirli mertebeden türev ve integralin yaklaşıklıklarının elde edilmesi, sonra bu yaklaşıklıklar kullanılarak tüm sisteme ait yaklaşıklık modelin elde edilmesi olarak özetlenebilir.

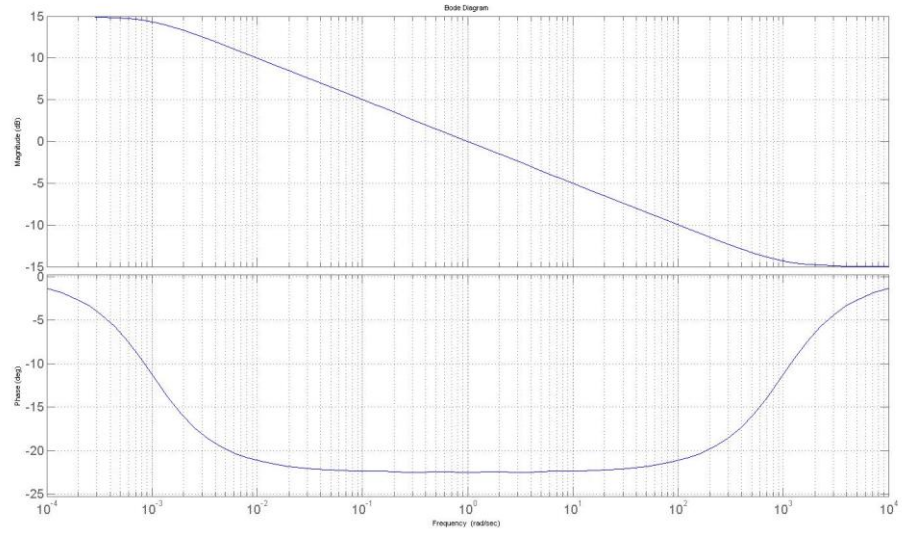
İlgili literatürde, sistem karakteristiğine ve girişin frekans spektrumuna bakılarak kesirli mertebeden sistemin davranışına sınırlı bir frekans aralığında eşit olan tam sayılı mertebeden bir sistem karşı düşürülebilir. Örneğin, s^{-n} ($0 < n < 1$) kesirli integralin [16]'de önerilen Oustaloup yaklaşıklığı,

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = C_{(n)} \left(\frac{1 + s / \omega_h}{1 + s / \omega_b} \right)^n \quad (3.8)$$

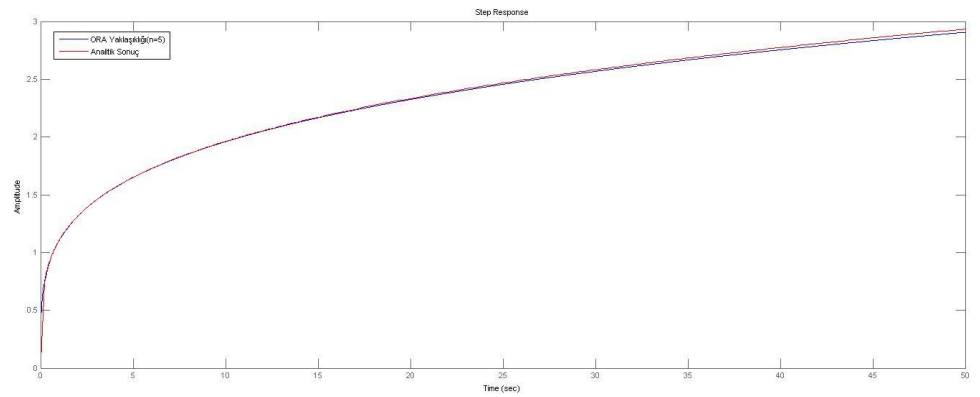
şeklindedir. Burada ω_h yaklaşıklığın geçerli olduğu frekans bandının üst sınırını, ω_b ise alt sınırını ifade etmektedir. $C_{(n)}$ ise n , ω_h ve ω_b değerlerine bağlı

$$C_{(n)} = \left| \frac{1 + j\sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_h}}}{1 + j\sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_b}}} \right|^n \quad (3.9)$$

şeklinde bir sabittir. Bu yaklaşıklık ile elde edilen ve kesirli mertebeden integral işlemine karşı düşen sistemin frekans cevabı ve birim basamak yanıtı Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da görülmektedir.



Şekil 3.5 : $s^{-0.25}$ sisteminin (3.8) ile verilen yaklaşıklığının frekans cevabı

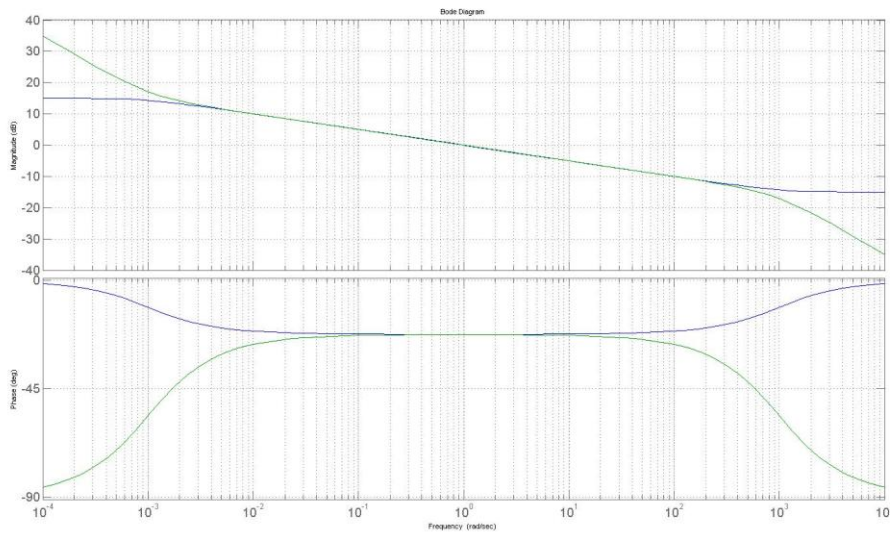


Şekil 3.6 : Birim basamak girişi için $s^{-0.25}$ sisteminin, (3.8) ile verilen yaklaşıklıktan elde edilen ve analitik olarak hesaplanan cevapların karşılaştırmalı olarak gösterilmesi

Frekans cevabı açısından (3.8) ile verilen yaklaşıklık incelendiğinde, açı değişiminin yüksek ve düşük frekanslarda sifıra yakınsadığı görülür. Bu statik hatanın azaltılması için Lin [17] yüksek ve düşük frekanslarda sistemin davranışını birinci mertebeden integrale karşı düşüren,

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{C_{(n-1)}}{s} \left(\frac{1 + s / \omega_h}{1 + s / \omega_b} \right)^{n-1} \quad (3.10)$$

şeklinde bir yaklaşıklık önermiştir. (3.8) ve (3.10) yaklaşıklıklarının birlikte çizdirilmiş frekans cevapları Şekil 3.7’de görülmektedir.



Şekil 3.7 : (3.8) ve (3.10) yaklaşıklıklarının frekans cevapları

Bir başka yaklaşıklık ise düşük frekanslarda kazanç gibi davranan yüksek frekanslarda ise birinci mertebeden integratöre yaklaşan,

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \frac{\omega_B(\omega_A + s)}{(\omega_A)^n (ns^2 + \omega_B s + (1-n)\omega_A \omega_B)} \left(\frac{1 + s / \omega_B}{1 + s / \omega_A} \right)^n \quad (3.11)$$

yaklaşıklık ifadesi [15] çalışmasında önerilmiştir. Aynı çalışmada (3.11)’e ek olarak yüksek frekanslarda kazanç gibi davranan, düşük frekanslarda ise integratör gibi davranan,

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \frac{\omega_A^{1-n}}{s} \left(\frac{(1-n)s^2 + \omega_B s + n\omega_A \omega_B}{\omega_B(\omega_A + s)} \right) \left(\frac{1 + s / \omega_B}{1 + s / \omega_A} \right)^{n-1} \quad (3.12)$$

yaklaşıklığı da önerilmiştir.

Literatürde verilen **(3.8-12)** ifadelerindeki irrasyonel kısımlar Taylor seri açılımı, sürekli kesir açılımı veya yinelemeli kutup sıfır dağıtımı yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. **(3.8-12)**'deki irrasyonel kısımlar,

$$u(s) = \frac{-s / \omega_A + s / \omega_B}{1 + s / \omega_A} \quad (3.13)$$

olmak üzere,

$$\left(\frac{1 + s / \omega_B}{1 + s / \omega_A} \right)^n = (1 + u(s))^n \quad (3.14)$$

Şeklinde yazılabilir. Açıkça görüldüğü gibi $u(s)$ ' genliği ilgili frekans aralığında 1'den küçük olduğu için seri açılımının yakınsak olduğu söylenebilir. Sürekli kesir açılımı ile **(3.14)**

$$(1 + u(s))^n = 1 + \frac{u(s)}{a_1 + \frac{u(s)}{a_2 + \frac{u(s)}{a_3 + \dots}}} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilirken, Taylor Serisi Açılımı ile ise

$$(1 + u(s))^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (u(s))^i \quad (3.16)$$

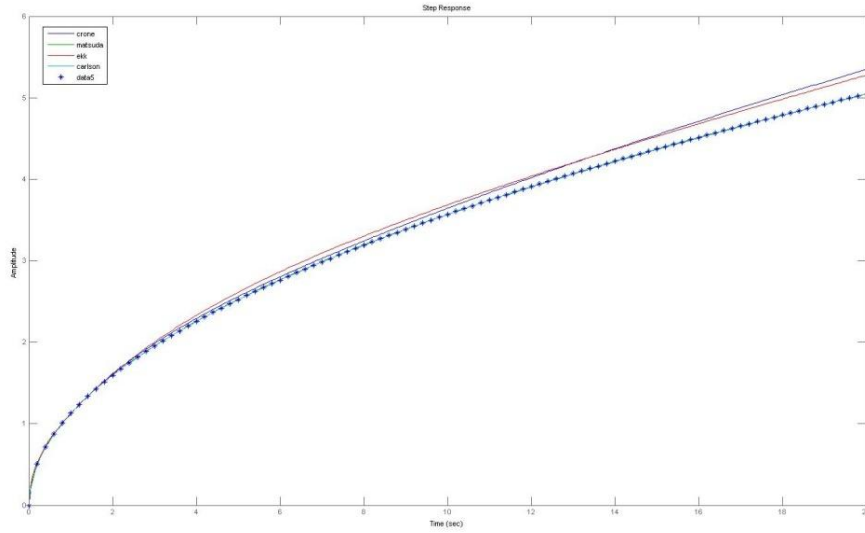
biçiminde elde edilir. **(3.15)** ve **(3.16)** ile verilen açılımlar sonsuz toplam ve sonsuz bölme işlemleri içerdiği için hesaplarda ancak sonlu sayıda işleme sahip yaklaşıklıkları kullanılabilir. Tanımları ve analizleri yukarıda verilen **(3.8)** , **(3.10-12)** yaklaşıklıklarının frekans cevapları verilmiştir.

$s^{-0.5}$ 'in yaklaşıklığı için literatürde yer alan diğer yöntemlerden bazıları ve bu yöntemler sonucunda elde edilen transfer fonksiyonları Çizelge 3.2'de görülmektedir.

Çizelge 3.2 : $s^{-0.5}$ 'in yaklaşıklık ifadeleri

Yöntem	Yaklaşıklık İfade	$[\omega_a \ \omega_b]$
ORA	$\frac{0.03162s^5 + 16.92s^4 + 537.1s^3 + 1072s^2 + 134.4s + 1}{s^5 + 134.4s^4 + 1072s^3 + 537.1s^2 + 16.92s + 0.03162}$	[0.01 100]
CRONE	$\frac{10s^4 + 197.6s^3 + 354.5s^2 + 62.48s + 1}{s^5 + 62.48s^4 + 354.4s^3 + 197.6s^2 + 10s}$	[0.01 100]
Carlson	$\frac{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}$	[0.01 100]
Matsuda	$\frac{0.08549s^4 + 4.877s^3 + 20.84s^2 + 12.995s + 1}{s^4 + 13s^3 + 20.84s^2 + 4.876s + 0.08551}$	[0.01 100]
En Küçük Kareler	$\frac{0.09593s^4 + 5.909s^3 + 40.7s^2 + 44.29s + 3.859}{s^4 + 18.07s^3 + 56.01s^2 + 17.97s + 0.2685}$	

Bu yaklaşıklıklara ilişkin karşılaştırmalı sonuçlar ise Şekil 3.8’de görülmektedir.



Şekil 3.8 : $s^{-0.5}$ sisteminin yaklaşıklık ifadelerinin birim basamak yanıtları

3.2 Kesirli Mertebeden Sistemlerin Ayırık-Zamanlı Modelleri

Kesirli mertebeden sistemleri kontrolör olarak kullanabilmek için kesirli mertebeden türev ve integrallerin ayırık-zaman karşılıklarının elde edilmesi gerekir. Burada ayırık zaman karşılıklar denildiğinde kast edilen z 'nin reel kuvvetlerini içeren ifadeler değil, s düzlemindeki kesirli mertebeden türev ve integral ifadelerinin yaklaşıklıklarının z tanım bölgesindeki karşılıklarının elde edilmesidir.

Literatürde, ayırıklaştırma yöntemleri dolaylı ayırıklaştırma ve doğrudan ayırıklaştırma olmak üzere iki sınıfta incelenir.

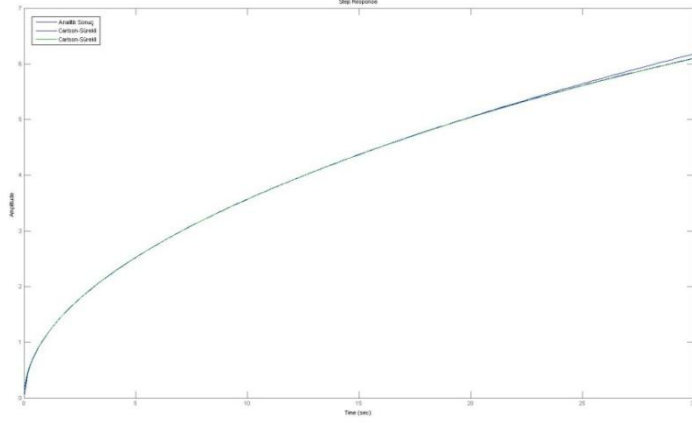
3.2.1 Dolaylı ayırıklaştırma

Dolaylı ayırıklaştırma iki adımda yapılır; önce kesirli mertebeden türev veya integralin Bölüm 4.1' de verilen yöntemler kullanılarak sürekli zamanda rasyonel fonksiyon olarak elde edilen yaklaşık ifadeleri elde edilir, sonra s -tanım bölgesinde elde edilen transfer fonksiyonundan z -tanım bölgesine geçilir.

Çizelge 3.2'de verilen yaklaşık transfer fonksiyonları kullanılarak $s^{-0.5}$ sisteminin ayırık karşılıkları elde edilebilir. Örneğin, Carlson yönteminin kullanıldığı ve örnekleme zamanının 0.001 sn olduğu durumda $s^{-0.5}$ sisteminin ayırık karşılığı,

$$\frac{0.00979z^4 - 0.03897z^3 + 0.05817z^2 + 0.03859z + 0.00959}{z^5 - 4.939z^4 + 9.757z^3 - 9.636z^2 + 4.757z - 0.9394} \quad (3.17)$$

olarak belirlenir. Analitik olarak elde edilen çıkış değerleri, Carlson sürekli zaman yaklaşıklığı ve bu yaklaşıklık kullanılarak elde edilen ayırık yaklaşıklığın birim basamak yanıtları Şekil 3.9' da verilmiştir.



Şekil 3.9 : Sürekli ve ayırık yaklaşıklıkların birim basamak yanıtı

3.2.2 Doğrudan ayırıklaştırma

Doğrudan ayırıklaştırma yöntemleri, sürekli zamanda ifade edilen kesirli mertebeden türev ve integralin doğrudan ayırık karşılıklarının elde edilmesi ilkesine dayanır.

Kesirli mertebeden ifade s^p 'nin doğrudan ayırıklaştırılması için önerilen yöntemlere [18]'da yer verilmiştir. Geriye fark alma kuralı, Tustin, Al-Alaoui ve Simpson operatörü doğrudan ayırıklaştırma yöntemlerinden en sık kullanılanlarındandır [19]. Bu operatörler ve Taylor Seri Açılımından sonra elde edilen yaklaşıklık ifadeleri Çizelge 3.3'te verilmiştir.

Çizelge 3.3 :Doğrudan ayırıklaştırma yöntemleri

	Operatör	Yaklaşıklık
Euler	$s \rightarrow \frac{1}{T} 1 - z^{-1}$	$s^\alpha \rightarrow \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right)$
Tustin	$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$s^\alpha \rightarrow \left(\frac{2}{T} \right)^\alpha 1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots$
Al-Alaoui	$s \rightarrow \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1} / 7}$	$s^\alpha \rightarrow \left(\frac{8}{7} \right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7} \alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49} \alpha + \frac{32}{49} \alpha^2 \right) z^{-2} + \dots \right)$
Simpson	$s \rightarrow \frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}$	$s^\alpha \rightarrow \left(\frac{3}{7} \right)^\alpha 1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(\alpha+3)z^{-2} + \dots$

Doğrudan ayırıklaştırmada sıklıkla kullanılan operatörlerden biri olan Al-Alaoui operatörü Euler ve Tustin operatörlerinin bir karışımı gibidir. Bu operatörün %25'i Euler operatöründen oluşurken %75'i de Tustin operatöründen oluşur. Al-Alaoui operatörünün üretici fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
D^{\pm p}(z) &= \left(\frac{8}{7T}\right)^{\pm p} TSE \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right)^{\pm p} \right\} \\
\Rightarrow D^{\pm p}(z) &= \left(\frac{8}{7T}\right)^{\pm p} \frac{M_m(z^{-1})}{N_n(z^{-1})}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde ifade edilebilir, [20]. Bu ifadede, T örnekleme periyodu, TSE (*Taylor Series Expansion*) ise Taylor Serisi Açılımı'dır.

4. KESİRLİ MERTEBEDEN KONTROLÖR TASARIM YÖNTEMLERİ

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle ifade edilen kontrolörlere kesirli mertebeden kontrolörler adı verilir. Bu kontrolörler, türev ve integral mertebeleri reel sayılar kümesinde değer alabildiği için tamsayıli mertebeden kontrolörlerin bir genelleştirilmesi olarak değerlendirilebilir. Tam sayılı mertebeden kontrolörlerde sadece kazanç katsayıları serbest seçilebilirken kesirli mertebeden kontrolörlerde buna ek olarak türev ve integral mertebeleri de seçilebilir.

Kesirli mertebeden kontrolörlerin tasarımı büyük bir esneklik sağladığı ve kontrol sisteminin başarımını arttırdığı bilinmektedir [21]. Ayrıca, yapılan birçok çalışma, kesirli mertebeden kontrolörler ile kontrol edilen sistemlerin davranışının, sistemdeki parametre değişimlerine karşı daha az duyarlı olduğunu göstermiştir [14].

Diğer taraftan kesirli mertebeden kontrolörler ile kontrol edilen sistemlerin zaman tanım bölgesindeki basamak veya impuls yanıtlarını elde etmek genellikle çok karmaşık hesaplamaları gerektirir. Bu nedenle, zaman tanım bölgesinde kesirli mertebeden kontrolörlerin tasarımı için geliştirilmiş kullanışlı ve etkili yöntemlere rastlanmamaktadır. Literatürdeki çalışmaların büyük bir bölümünde, önerilen tasarım yöntemleri, ya frekans tanım bölgesinde ya da sayısal bir arama algoritması kullanılarak geliştirilmiştir.

4.1 Kesirli Mertebeden PID Kontrolörler

Günümüzde halen *PID* kontrolörler ve türevleri (*PI*, *PD*) en sık kullanılan kontrolör yapılarındandır. Basit yapıları ile proses endüstrilerinde sıklıkla kullanılmaktadır [22]. *PID* tipi kontrolörlerin tasarlanması ile ilgili ilk yayınlar Ziegler ve Nichols tarafından yapılmışken bu konudaki araştırmalar günümüzde de devam etmektedir.

Kesirli mertebeden kontrol yapılarını dinamik sistemleri kontrol etmekte kullanma fikri ise Oustaloup'a aittir. Birinci nesil CRONE (*Commande Robuste d'Ordre Non Entier*) kontrolör tasarımı ve CRONE ile *PID*'nin karşılaştırılması [23]'te verilmiştir.

Daha sonra Podlubny $PI^\lambda D^\mu$ tipi kontrol yapısını ortaya atmıştır, [14]. *PID* ile

karşılaştırıldığında λ ve μ sırasıyla integrasyon ve türevleme işlemlerinin mertebeleri olmak üzere, $PI^\lambda D^\mu$ de fazladan 2 parametre daha bulunmaktadır. Başka bir deyişle, geleneksel PID kontrolörlerinde tasarım parametreleri sadece kazançlar iken $PI^\lambda D^\mu$ tipi kontrolörlerde bunlara ek olarak integrasyon ve türevleme mertebeleri de birer tasarım parametresi olarak kullanılabilir.

Zaman tanım bölgesinde kesirli mertebeden bir $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (4.1)$$

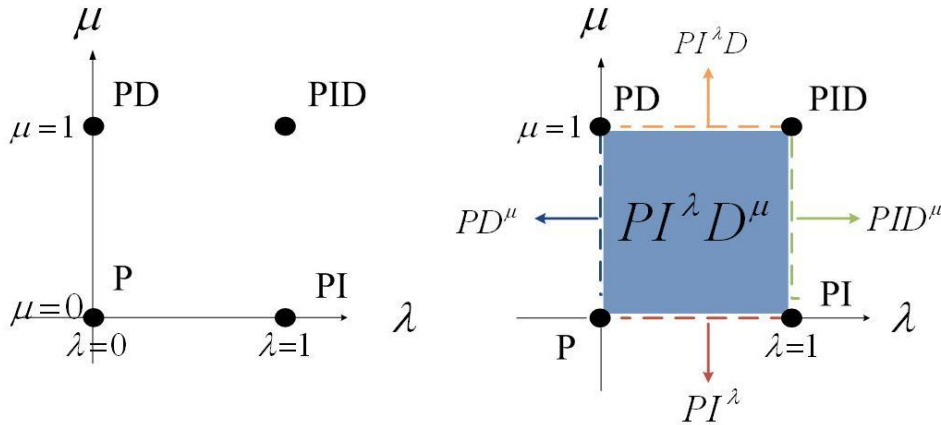
şeklinde ifade edilebilir. Açıkça görüldüğü gibi klasik PID kontrolörler (4.1) ifadesinin özel bir hali gibi düşünülebilir. Yani λ ve μ katsayıları sırasıyla $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ olarak seçilirse klasik PID elde edilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (4.2)$$

$PI^\lambda D^\mu$ tipi bir kontrolörün transfer fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

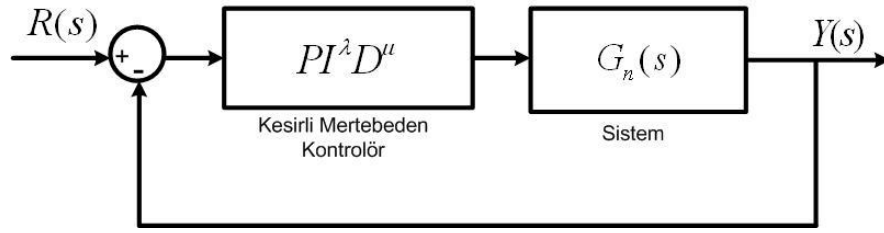
$$G_c(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\mu \quad (4.3)$$

Geleneksel PID kontrolörü mertebeler düzleminde bir nokta ile gösterilirken, $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü ise bir düzleme karşı düşmektedir. Eğer λ veya μ katsayılarından biri, 1 veya 0 olarak seçilirse bu durumda nokta doğruya genişlemiş olur. PID ile $PI^\lambda D^\mu$ 'nin mertebe düzleminde karşılaştırılması Şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1 : PID ile $PI^\lambda D^\mu$ 'nin mertebe düzleminde karşılaştırılması

Kesirli mertebeden $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü ile kontrol edilen kapalı çevrimli bir sistemin transfer fonksiyonu, kontrol edilen sistem tam sayılı mertebeden olsa bile kesirli mertebeden olacaktır. Şekil 4.2' de kesirli mertebeden bir kontrolör ile kontrol edilen bir sistemin blok diyagramı görülmektedir.



Şekil 4.2 : Kesirli mertebeden PID ile kontrol edilen bir sistemin genel blok diyagramı

Bilindiği gibi n . mertebeden lineer bir sistemin transfer fonksiyonu, n bir tam sayı olmak üzere,

$$G_n(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad n \geq m \quad (4.4)$$

şeklinde verilir. Şekil 4.2’deki kapalı çevrimli sistemin transfer fonksiyonu, (4.3) ve (4.4) ifadeleri kullanılarak,

$$G_{cl}(s) = \frac{\left(\sum_{k=0}^m a_k s^k \right) K_p s^\lambda + K_i + K_d s^{\mu+\lambda}}{\left(\sum_{l=0}^n b_l s^{l+\lambda} \right) + \left(\sum_{k=0}^m a_k s^k \right) K_p s^\lambda + K_i + K_d s^{\mu+\lambda}} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeden açıkça görüldüğü gibi kesirli mertebeden bir kontrolör ile kontrol edilen tam sayılı mertebeden bir sistemin karakteristik denklemi de kesirli mertebeden olacaktır.

4.1.1 Kesirli mertebeden PID ile kontrol edilen sistemlerin açık çevrim yanıtları

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak,

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y t^\alpha), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanabilir. Burada α ve β iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun parametrelerini, k da Mittag-Leffler fonksiyonunun türev mertebesini göstermektedir.[6]’da (4.6) ile verilen bir fonksiyonun Laplace Dönüşümü

$$\int_0^\infty e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{s^\alpha \mp y} \frac{1}{k+1}, \quad (\text{Re}(s) > |y|^{1/\alpha}) \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilmiştir. Diğer taraftan, kesirli mertebeden bir transfer fonksiyonu ile

$$G_f(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}} \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilen bir sistemin impuls cevabı, ters Laplace dönüşümü ve (4.7) eşitliği kullanılarak, $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$ multinomial katsayılar olmak üzere,

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \times \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \varepsilon_m \left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j \right) \quad (4.9)$$

şeklinde elde edilebilir [6]. Ayrıca, Laplace Dönüşümü,

$$F(s) = \sum_{i=1}^N b_i s^{\alpha_i} G_n(s) \quad (4.10)$$

şeklinde olan bir fonksiyonun Ters Laplace Dönüşümü,

$$f(t) = \sum_{i=1}^N b_i D^{\alpha_i} g_n(t) \quad (4.11)$$

olarak elde edilir, burada D^{α} kesirli mertebeden türev operatörüdür. Diğer taraftan, (4.8) ile verilen ve kesirli mertebeden bir *PID* ile kontrol edilen bir sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G_{ol}(s) = (K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^{\mu}) G_n(s) \quad (4.12)$$

olarak belirlenir. (4.10) ve (4.12) ifadeleri benzer bir yapıdadır. Bu durumda, kesirli mertebeden bir *PID* ile kontrol edilen ve transfer fonksiyonu (4.8) ile verilen bir sistemin birim impuls yanıtı,

$$g_{ol}(t) = K_p g_n(t) + K_i D^{-\lambda} g_n(t) + K_d D^{\mu} g_n(t) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir. Birim basamak yanıtını elde etmek için ise birim impuls yanıtının (4.13)'ün integrali alınmalıdır.

4.1.2 Kesirli mertebeden *PID* ile kontrol edilen sistemlerin kapalı çevrim yanıtları

Kesirli mertebeden bir *PID* ile kontrol edilen ve transfer fonksiyonu (4.8)'deki gibi olan sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise,

$$G_{kapalı}(s) = \frac{K_p s^\lambda + K_i + K_d s^{\mu+\lambda}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\beta_k+\lambda} + K_p s^\lambda + K_i + K_d s^{\mu+\lambda}} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Kapalı çevrimli sistemin impuls cevabını elde etmek için, (4.14)'ün paydasının Ters Laplace Dönüşümü (4.9) kullanılarak belirlenir ve sonra (4.11) kullanılarak (4.14)'ün Ters Laplace Dönüşümü elde edilir [6]. Kapalı çevrimli sistemin birim basamak yanıtı ise elde edilen bu ifadenin integrali alınarak bulunur.

4.1.3 Geleneksel PID ve kesirli mertebeden PID kontrolörlerinin karşılaştırılması

Bu bölümde [24]'te verilen ısı sistem ele alınacak ve geleneksel *PID* ile *KMPID* kontrolörlerin performansları bu örnek sistem üzerinden karşılaştırılacaktır. Sistem üzerinde yapılan deneyler sonucu elde edilen veriler kullanılarak sisteme ilişkin tamsayıli mertebeden bir model,

$$G_{TMS}(s) = \frac{1}{73043s^2 + 4893s + 1.93} \quad (4.15)$$

olarak elde edilmiş, aynı verilerden sistemin kesirli mertebeden modeli ise

$$G_{KMS}(s) = \frac{1}{14994s^{1.31} + 6009.5s^{0.97} + 1.69} \quad (4.16)$$

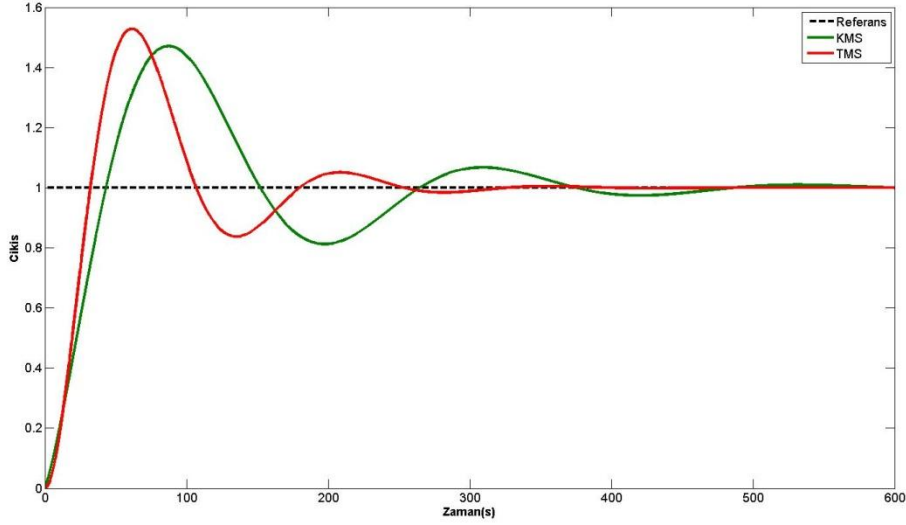
şeklinde belirlenmiştir. Model doğrulama sırasında kesirli mertebeden modelin gerçek sistemin dinamiğini çok daha iyi temsil ettiği gözlenmiştir. Kontrolör tasarımı, [25]'te önerilen yöntemi kullanabilmek için (4.15) ile verilen ikinci mertebeden model yerine birinci mertebeden ölü zamanlı yaklaşıklığı olan,

$$G_{TMS}(s) = \frac{0.51813}{2520.2609s + 1} e^{-14.97} \quad (4.17)$$

kullanılacaktır. Astrom-Hagglund tasarım yöntemi [25] kullanıldığında, elde edilen geleneksel *PID* kontrolör,

$$G_{PID}(s) = 305.38 + \frac{10.18}{s} + 2290.35s \quad (4.18)$$

şeklinde olur. Bu kontrolör ile kontrol edilen sistemin, tamsayıli mertebeden modeli (4.15) ve kesirli mertebeden modeli (4.16) kullanılarak benzetimler yapılmış elde edilen birim basamak yanıtları Şekil 4.3'te verilmiştir.

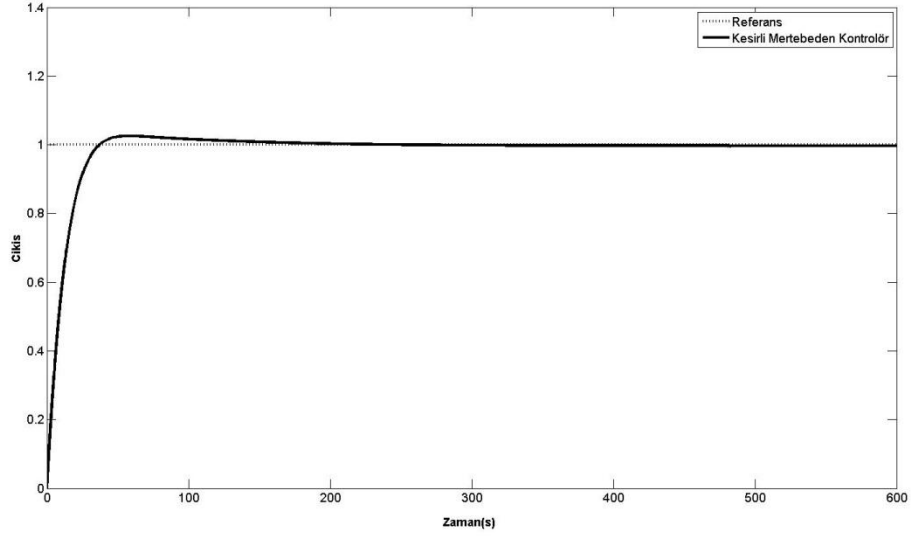


Şekil 4.3 : PID kontrolörü ile kontrol edilen sisteme ilişkin benzetim sonuçları

Şekil 4.3'ten görüldüğü gibi *PID* ile kontrol edilen tamsayıli mertebeden model ve kesirli mertebeden model kullanılarak yapılan benzetim sonuçları arasında oldukça büyük bir fark vardır. Aynı sistem için [21] çalışmasında verilen ve frekans tanım bölgesinde geliştirilmiş yöntem kullanılarak, kesirli mertebeden bir kontrolör tasarlanabilir. Faz payı ve kazanç payı sırasıyla $\phi_m = 60^\circ$ $A_m = 1.1$ olacak şekilde, ve integral ve türev mertebeleri $\lambda = 0.6$ ve $\mu = 0.35$ şeklinde seçildiğinde *KMPID* kontrolörü,

$$G_{PI^\lambda D^\mu}(s) = 736.8054 - \frac{0.5885}{s^{0.6}} - 818.4204s^{0.35} \quad (4.19)$$

olarak belirlenir. Bu kontrolör ile kontrol edilen kesirli mertebeden sistemin Şekil 4.4'te verilen birim basamak yanıtı incelendiğinde hem sistem cevabının hızlanmış olduğu hem de aşımın ve yerleşme zamanının önemli bir ölçüde azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.4 : KMPID kontrolörü ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtı

4.2 Frekans Tanım Bölgesinde Tasarım

Daha önce de söz edildiği gibi, *KMPID* kontrolörlerinde *PID* kontrolörlere kıyasla, türev ve integral mertebeleri de serbest seçilebildiğinden fazladan iki tasarım parametresi daha vardır. Bu esneklikleri nedeniyle, *KMPID* kontrolörler, geleneksel *PID* ile sağlanamayan bazı ek kriterleri de sağlayan kontrol sistemleri tasarlanabilmesine olanak verirler [22]. Frekans tanım bölgesinde tasarım için aşağıda bu tanım bölgesindeki kriterlerin tanımları verilmiştir.

- **Faz Payı ve Kazanç Geçiş Frekansı:** Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu $F(s)$ olmak üzere, faz payı ve kazanç geçiş frekansının tanımı ve sağlanması gereken koşullar,

$$\text{Arg}(F(j\omega_{cg})) = \text{Arg}(C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})) = -\pi + \phi_m \quad (4.20)$$

$$\left| F(j\omega_{cg}) \right|_{dB} = \left| C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg}) \right| = 0dB \quad (4.21)$$

şeklindedir.

- **Kazanç Payı ve Faz Geçiş Frekansı:** Kazanç payı ve faz geçiş frekansı tanımları ve sağlanması gereken koşul aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{\left| C(j\omega_{cp})G(j\omega_{cp}) \right|} = g_m \quad (4.22)$$

- **Kazanç Değişimlerine Karşı, Sistemin Dayanıklılık Ölçütü:** Kontrol edilen sistemin kazancında meydana gelebilecek olası değişimlere karşı

sistem yanıtının dayanıklılığının - aşımın yaklaşık olarak sabit kalması- ölçütü ve bu ölçütün sağlanması gereken koşul,

$$\left(\frac{d(Arg(C(j\omega)G(j\omega)))}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_{cg}} = 0 \quad (4.23)$$

şeklindedir [26]. Bu koşul sağlandığında sistemin fazının, ω_{cg} frekansı civarında yaklaşık olarak sabit kalması sağlanır.

- **Yüksek Frekans Gürültülerine Karşı Sistemin Dayanıklılık Ölçütü:** Yüksek frekanslı gürültülerin bastırılması ve sistem performansının yüksek frekanslı gürültüler altında iyileştirilebilmesinin ölçütü ve bu ölçütün sağlanması gereken koşul,

$$|T(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq A dB, \quad (4.24)$$

$$\forall \omega \geq \omega_t \text{ rad / sn} \Rightarrow |T(j\omega_t)|_{dB} = A dB$$

duyarlılık fonksiyonu üzerinden verilir. Burada A $\omega \geq \omega_t \text{ rad / s}$ frekans bölgesinde istenen gürültü bastırma seviyesidir.

- **Çıkış Bozucularına Karşı Sistemin Dayanıklılık Ölçütü:** B istenen bozucu bastırma seviyesi olmak üzere $\omega \leq \omega_s \text{ rad / sn}$ frekans bölgesindeki çıkış bozucularının etkisinin bastırılma ölçütü tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu ile tanımlanır ve istenen bastırma seviyesi sağlanması için gereken koşul,

$$|S(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq B dB, \quad (4.25)$$

$$\forall \omega \leq \omega_s \text{ rad / sn} \Rightarrow |S(j\omega_s)|_{dB} = B dB$$

ilişkisi ile verilir.

Frekans tanım bölgesinde tasarım ölçütleri (4.20-25) ile verilen toplam 6 koşuldan oluşur. Oysa kesirli mertebeden bir *PID* kontrolörde serbest seçilebilen 5 parametre olduğu için bu ölçütlerden 5'i seçilerek tasarım yapılmalıdır. Seçilen kriterleri sağlayan kontrolörün parametre kümesini belirlemek için literatürde önerilmiş analitik bir yöntem bulunmamaktadır. Kriterleri sağlayan parametrelerin belirlenmesi genellikle optimizasyon yöntemleri aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Bazı çalışmalarda örneğin, [22]'de

Eşitlik ve/veya eşitsizlik kısıtlanmalı çok değişkenli lineer olmayan bir fonksiyonun minimumunu belirlemede kullanılan MATLAB'ın "fmincon" fonksiyonu

kullanılırken, [27]'de ise genetik algoritma ve “fmincon” komutunun birlikte kullanıldığı hibrit bir yapı önerilmiştir. Parametrelerin belirlenmesinde kullanılabilecek bir başka yöntem de yine kısıtlamalı lineer olmayan fonksiyonların minimumunu belirlemede kullanılabilen kullanılabilen Matematica yazılımında bulunan “NMinimize” komutudur.

Bu bölümde kontrol edilecek sistem olarak,

$$G(s) = \frac{0.55}{62s + 1} \quad (4.26)$$

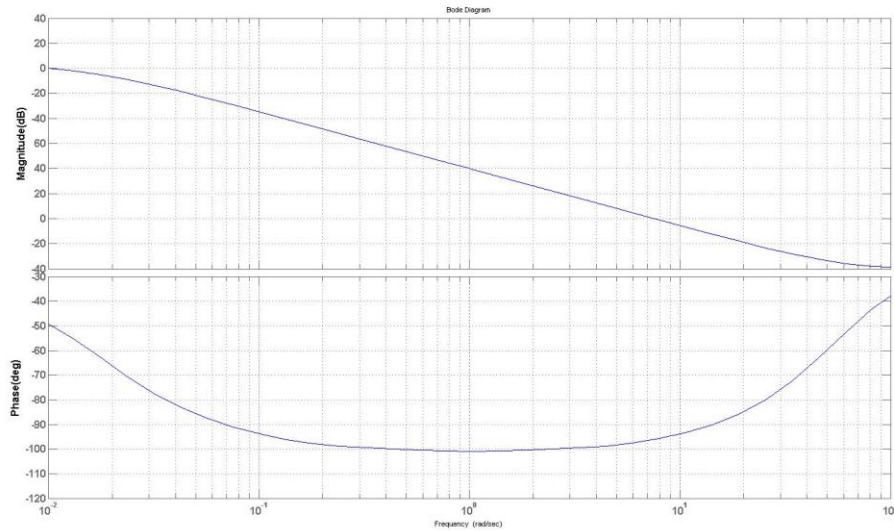
ve tasarım kriterleri olarak ise:

- Kazanç geçiş frekansı $\omega_{cg} = 1 \text{ rad} / \text{sn}$
- Faz payı $\phi_m = 0.44\pi \approx 80^\circ$ derece
- Sistem kazancında meydana gelebilecek değişimlere karşı dayanıklılık
- $|T(j\omega)|_{dB} \leq -20 \text{ dB} \quad \forall \omega \geq \omega_t = 10 \text{ rad} / \text{sn}$
- $|S(j\omega)|_{dB} \leq -20 \text{ dB} \quad \forall \omega \leq \omega_s = 0.01 \text{ rad} / \text{sn}$

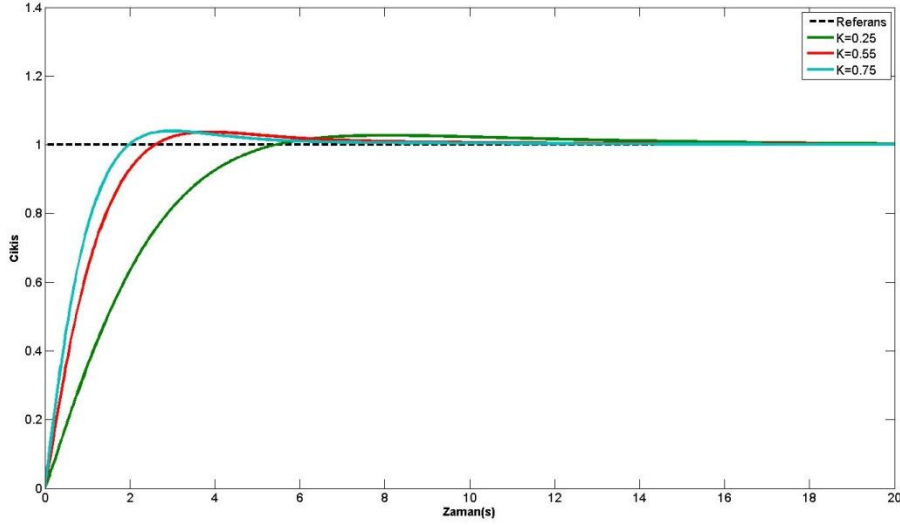
seçilmiştir. Bu kriterleri sağlayan kesirli mertebeden PID kontrolörü MATLAB’ın “fmincon” komutu kullanılarak,

$$G_{PI^\lambda D^\mu}(s) = 15.28 + \frac{98.12}{s^{0.1578}} + 1.1625s^{1.014} \quad (4.27)$$

şeklinde belirlenebilir. Bu kontrolör ile kontrol edilen sistemin açık çevrim frekans cevabı ve kapalı çevrimli sistemin birim basamak yanıtı sırasıyla Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da görülmektedir.



Şekil 4.5 : KMPID ile kontrol edilen sistemin frekans cevabı



Şekil 4.6 : KMPID ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtı

Şekil 4.5'teki frekans cevabından görüldüğü gibi istenen faz payı ve kazanç geçiş frekansı kriterleri sağlanmıştır. Ayrıca çeşitli kazanç değerleri için yapılan benzetimler sonucunda sistemin aşımının yaklaşık olarak aynı kaldığı birim basamak yanıtından da görülmektedir. Sonuç olarak, tasarlanan kontrolörün sistem kazancındaki değişimlere karşı dayanıklı olduğu söylenebilir.

4.3 Nümerik Optimizasyon Algoritmaları ile Kesirli Mertebeden Kontrolör Tasarımı

Kesirli mertebeden kontrolörlerin zaman tanım bölgesindeki analitik ifadelerinin elde edilmesinin çok karmaşık hesapları gerektirmesi ve frekans tanım bölgesindeki tasarımların analitik çözümlerinin elde edilmesindeki zorluklar nedeniyle, literatürde kesirli mertebeden kontrolör tasarımı için sayısal optimizasyon algoritmalarını kullanan bir çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda kullanılan algoritmaların başında genetik algoritma [28] ve parçacık sürü optimizasyonu [29] (Particle Swarm Optimization) gelmektedir. Bu tez çalışmasında, belirlenen performans ölçütünü minimize eden kontrolör parametrelerini belirlemek için doğal seçim ve genetik kurallara dayanan ve global bir arama algoritması olan genetik algoritma kullanılmıştır. Popülasyon, kromozom, gen, çaprazlama ve mutasyon gibi genetik kavramlara dayanan ve bu kavramları bir fonksiyonun global minimumunu belirlemede kullanan genetik algoritmalar literatürde hem kontrol uygulamalarında hem de diğer alanlarda sıklıkla yer verilmektedir. Genetik algoritmalar ile ilgili daha

ayrıntılı bilgi [30,31] kaynaklarından elde edilebilir. Tasarım işlemi için MATLAB yazılımı tercih edilmiş ve MATLAB’ın genetik algoritma araç kutusu kullanılmıştır. Ayrıca, kesirli mertebeden kontrolörlerin benzetimi için ise Duerto Valerio tarafında oluşturulan “ninteger” araç kutusundan yararlanılmıştır.

4.3.1 Birinci mertebeden ölü zamanlı sistemler için kesirli mertebeden kontrolör tasarımı

Bu bölümde kesirli mertebeden PI kontrolörü ile literatürde ve endüstride sıklıkla karşılaşılan sistemlerden biri olan birinci mertebeden ölü zamanlı örnek bir sistemin kontrolü yapılacaktır. Örnek olarak ele alınacak sistem [22] çalışmasında da kullanılan

$$G(s) = \frac{0.55}{62s+1} e^{-1s} \quad (4.28)$$

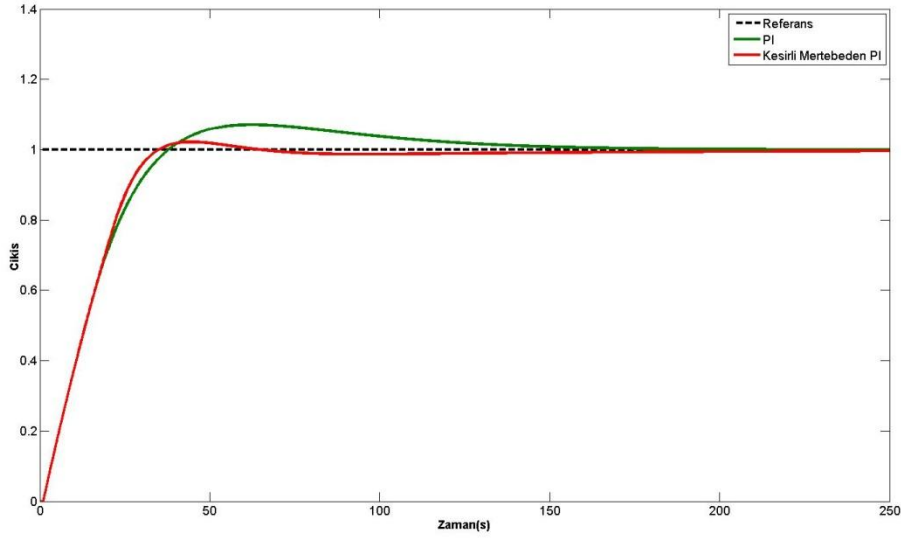
sistemidir. İlgili çalışmada (4.28) ile verilen sistemin kontrolü için frekans tanım bölgesinde tasarım yapılmıştır. Bu bölümde ise genetik algoritma kullanılarak ISE performans ölçütünü minimize kesirli mertebeden PI ve klasik PI katsayıları bulunacaktır. Ayrıca ölü zaman parametresinin ve kazanç parametresinin değişimine karşı her iki kontrolörün de performansları sınanacaktır.

Kontrol işaretinin çok yüksek değerlere ulaşmaması için benzetimlerde satırsayon elemanı kullanılmış ve kontrol işaretinin büyüklüğü +5 ile -5 arasında tutulmuştur. Genetik algoritma ile belirlenen kontrolör katsayıları ve bu katsayılar için ISE performans ölçütünün değeri Çizelge 4.1’de görülmektedir.

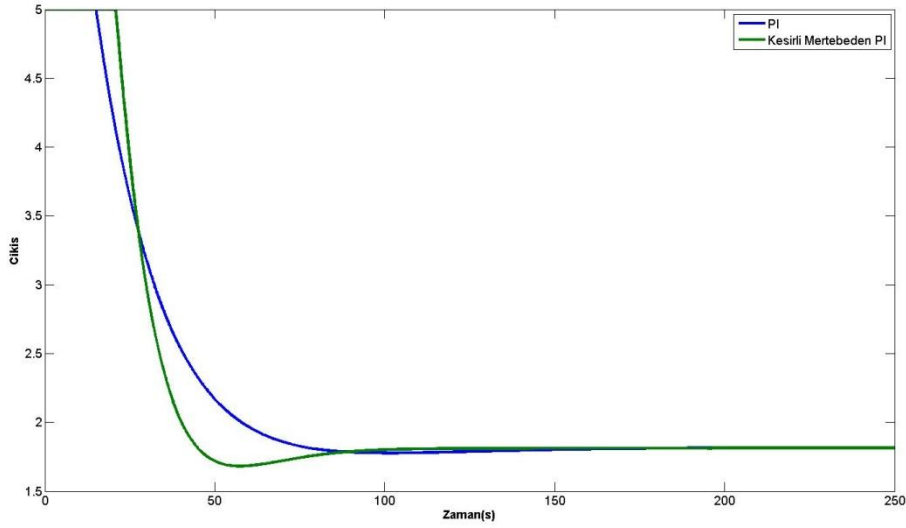
Çizelge 4.1 : Genetik algoritma ile belirlenen kontrolör katsayıları

	K_p	K_I	λ	Performans Ölçütünün Değeri
PI^λ	7.0494	1.2014	0.492	9.3552
PI	6.87	0.17	1	9.6677

Bu kontrolörler kullanıldığında elde edilen sistem cevabı ve kontrol işareti sırasıyla Şekil 4.7ve Şekil 4.8’de görülmektedir.

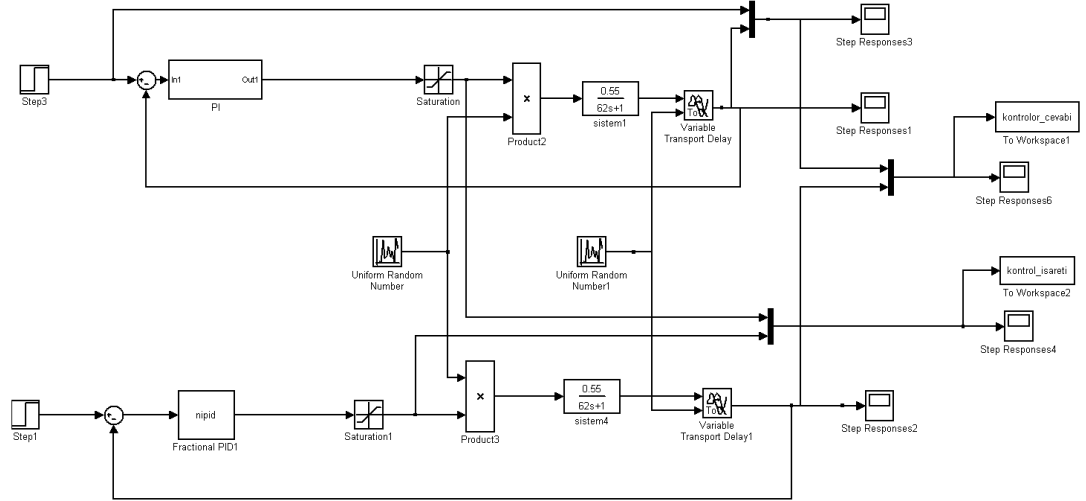


Şekil 4.7 : PI ve kesirli mertebeden PI ile kontrol edilen sistemin birim basamak yanıtları



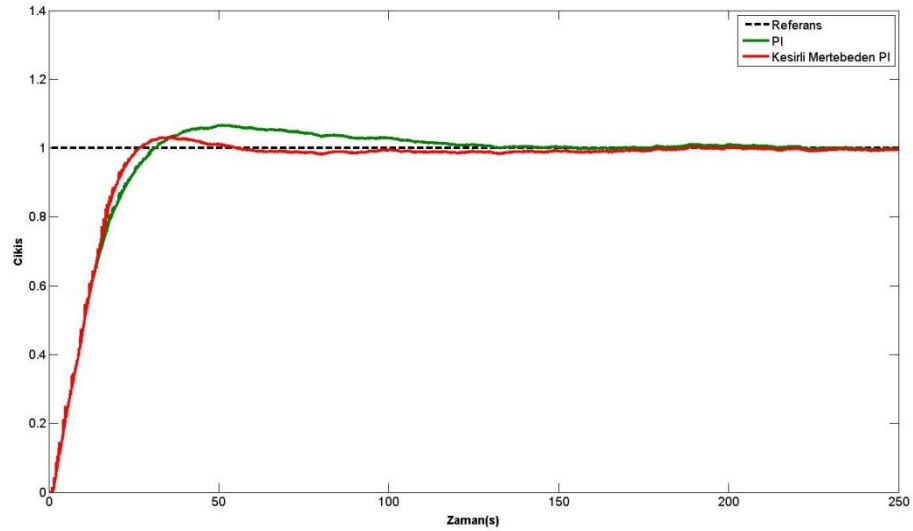
Şekil 4.8 : PI ve kesirli mertebeden PI ile üretilen kontrol işaretlerinin birlikte gösterimi

Bilindiği gibi kontrol sistemlerinin büyük bir çoğunluğu parametre belirsizliği içerirler. Tasarlanan bir kontrolörün etkinliğinin bir ölçütü de sistem cevabının parametre değişimlerinden ne ölçüde etkilendiğidir. Bu bölümde sistemin kazancının $0.25 \leq K \leq 1$ ve sistemdeki ölü zamanında $0.5 \leq T_d \leq 1.5$ aralığında değiştiği varsayılarak benzetimler tekrarlanmıştır. Bu amaçla oluşturulan Simulink modeli , Şekil 4.9'da görülmektedir.

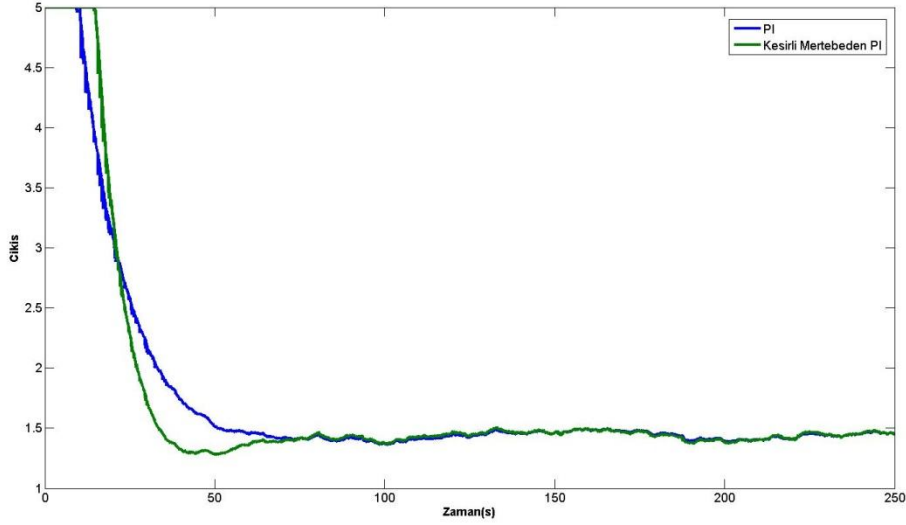


Şekil 4.9 : Parametrelerin değışken olduğu durumun benzetimi için oluşturulan Simulink modeli

Şekil 4.9'daki Simulink modeli kullanılarak benzetim esnasında kazanç ve ölü zaman sırasıyla $0.25 \leq K \leq 1$ ve $0.5 \leq T_d \leq 1.5$ aralığında değıştirilerek her iki kontrolörün de sistem parametrelerindeki bu değışimler altında nasıl bir cevap vereceği sınanmıştır. Elde edilen sistem cevabı Şekil 4.10'da görölmektedir. Kontrol işaretinin değışimi ise Şekil 4.11'dedir.



Şekil 4.10 : Sistem parametrelerinin belirsiz olduğu durum için PI ve kesirli mertebeden PI'ın karşılaştırması



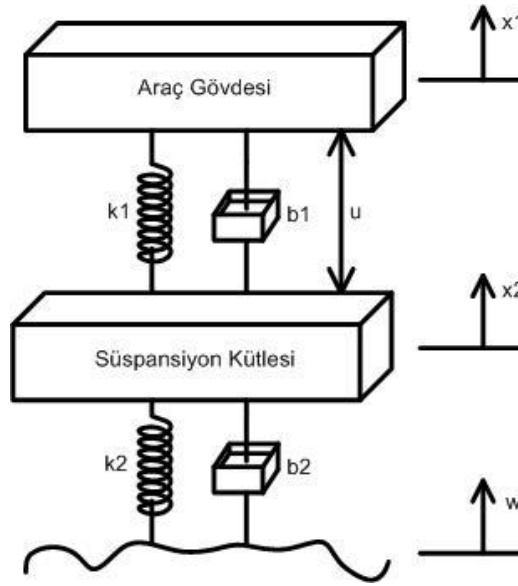
Şekil 4.11 : Sistem parametrelerinin belirsiz olduğu durumda üretilen kontrol işaretleri

Her iki şekilden de görüldüğü gibi kesirli mertebeden kontrolör sistem parametrelerinin nominal olduğu durumdan çok farklı çıkmamıştır. Bu durumda kesirli mertebeden PI kontrolörünün, sistem parametrelerinin belirsizlikler içerdiği durumlarda da klasik PI'dan daha başarılı sonuçlar vereceği söylenebilir.

4.3.2 Araç süspansiyon sisteminin kesirli mertebeden PID ile kontrolü

Araç süspansiyon sistemleri yol ile araç arasındaki yalıtımı sağlayarak engebeli yollarda araç gövdesinin mümkün olduğunca sabit tutulmasını sağlayan, böylece aracın konforunu arttıran sistemlerdir. Süspansiyon sisteminden beklenen, yük değişimlerinden ve yoldaki bozuculardan kaynaklanan salınımları hızlı bir şekilde söndürmesidir.

Aktif süspansiyon sistemleri, pasif olanlara göre salınım söndürme başarımını arttırmak amacıyla tasarlanmış bir kontrol sistemi içerirler. Bu tür süspansiyon sistemlerinde, salınımı söndürmek için gerekli enerjinin sisteme aktarılması işlemi bir eyleyici vasıtasıyla yapılır. Literatürde, aktif süspansiyon sistemlerinin kontrolü için LQG (Linear Quadratik Gaussian), durum uzayı, bulanık kontrol ve klasik *PID* kontrol gibi çok çeşitli kontrol yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar mevcuttur [32–34]. ¼ araç süspansiyon sisteminin ilkesel şeması Şekil 4.12'de görülmektedir.



Şekil 4.12 : 1/4 Araç süspansiyon sistemi

Literatürde var olan sonuçlarla sağlıklı bir karşılaştırma yapabilmek için sistemin fiziksel parametreleri olarak [35]'te verilen ve aşağıda listelenen değerler kullanılmıştır.

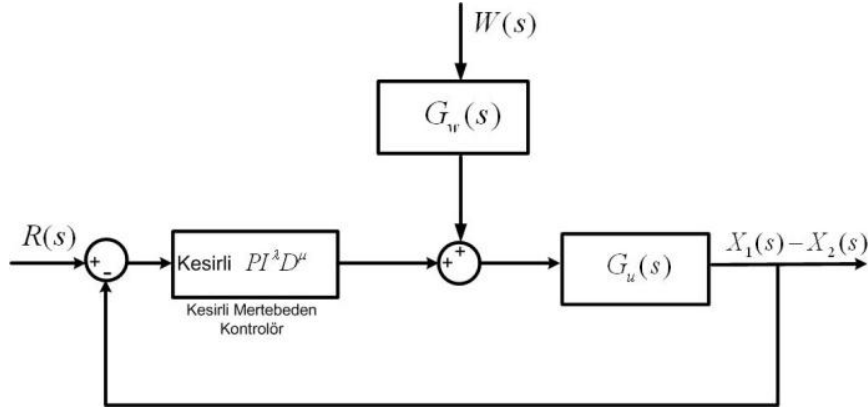
- $m_1 = 2500$ kg, araç gövdesinin kütlesi
- $k_1 = 80000$ N/m, süspansiyon sisteminin yay sabiti
- $b_1 = 350$ Ns/m, süspansiyon sisteminin sönüm sabiti
- $m_2 = 320$ kg, süspansiyon kütlesi
- $k_2 = 500000$ N/m, tekerleğin yay sabiti
- $b_2 = 15020$ Ns/m, tekerleğin sönüm sabiti
- u = Kontrol girişi, (kuvvet boyutunda)

Araç gövdesinin kütle merkezi ile yol arasındaki uzaklığın ölçülmesine göre, araç gövdesinin kütle merkezi ile süspansiyon sisteminin kütle merkezi arasındaki mesafenin ölçülmesi daha kolay olduğu için, sistem çıkışı olarak $x_1 - x_2$ 'nin alınması uygun olacaktır. Newton'un hareket yasaları kullanılarak sistemin hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) + u \\ m_2 \ddot{x}_2 &= b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{w} - \dot{x}_2) + k_2(w - x_2) - u \end{aligned} \quad (4.29)$$

şeklinde elde edilir ve bu denklemlerden yararlanarak kontrol girişi $u(t)$ den ve bozucu giriş $w(t)$ den çıkışa sistemin transfer fonksiyonları $G_u(s)$ ve $G_w(s)$

hesaplanabilir. Sonuç olarak, kapalı çevrimli sistemin blok diyagramı Şekil 4.13' teki gibi olacaktır.



Şekil 4.13 : Araç süspansiyon kontrol sisteminin blok diyagramı

$G_u(s)$ ve $G_w(s)$ transfer fonksiyonları,

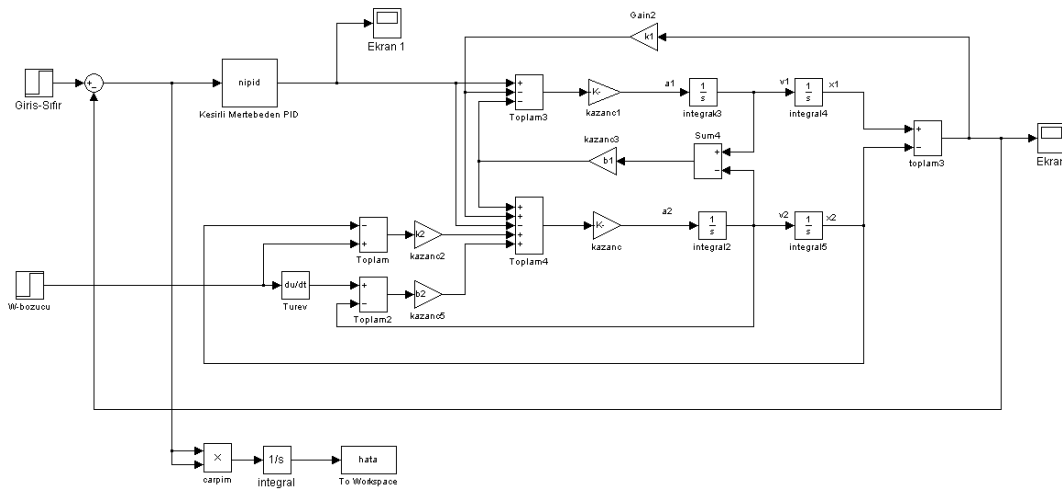
$$\begin{aligned} \Psi(s) = & m_1 m_2 s^4 + [m_1 b_1 + b_2 + b_1 m_2] s^3 \\ & + [m_1 k_1 + k_2 + b_1 b_2 + k_1 m_2] s^2 \\ & + b_1 k_2 + k_1 b_2 s + k_1 k_2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

olmak üzere,

$$G_u(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{m_1 + m_2 s^2 + b_2 s + k_2}{\Psi(s)} \quad (4.31)$$

$$G_w(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-m_1 b_2 s^3 - m_1 k_2 s^2}{\Psi(s)} \quad (4.32)$$

şeklinde elde edilir. Benzetimlerde kullanılan SIMULINK diyagramı Şekil 4.14'te verilmiştir.



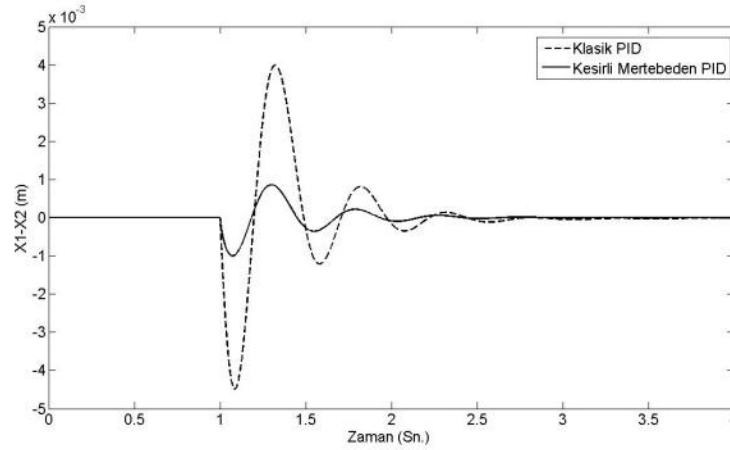
Şekil 4.14 : Araç süspansiyon kontrol sisteminin Simulink diyagramı

$PI^\lambda D^\mu$ kontrolörünün parametrelerinin seçimi için, sisteme 0.1m'lik basamak biçiminde bir bozucu uygulanmış davranış ölçütü olarak karesel hata integrali (ISE) seçilmiş ve genetik algoritma 100 nesil için çalıştırılmış sonuçta kontrolör,

$$G_{PI^\lambda D^\mu}(s) = 7520480 + \frac{100000}{s^{1.2}} + 2788090s^{0.8406} \quad (4.33)$$

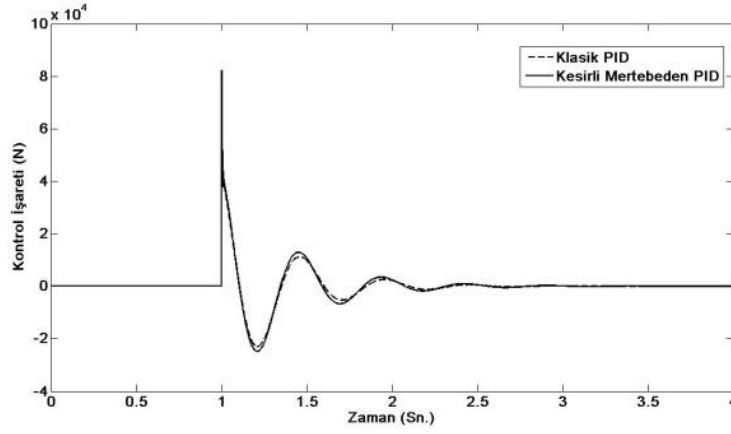
şeklinde belirlenmiştir. $KMPID$ kontrolörü ile kontrol edilen sistem için davranış ölçütünün değeri 2.14×10^{-7} olarak elde edilirken, aynı sistem [35]'te önerilen PID kontrolörü ile kontrol edildiğinde davranış ölçütünün değeri ise 4.49×10^{-6} olarak elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında tasarlanan $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü ve [35]'te verilen klasik PID kontrolörü ile kontrol edilen sistemlerin cevapları benzetim yolu ile elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırmalı olarak Şekil 4.15'te verilmiştir. Benzetimlerde, 0.1m'lik basamak bozucusu başlangıçtan 1 saniye sonra uygulanmıştır.



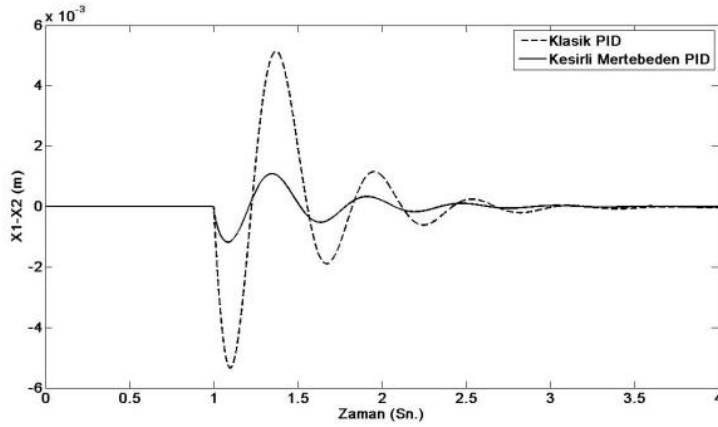
Şekil 4.15 : $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin başarımlarının karşılaştırılması

Aşım ve yerleşme zamanı açısından, iki kontrolörün başarımları karşılaştırılırsa, $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü için %1 aşım ve yaklaşık 1.38 saniyede yerleşme zamanı elde edilirken, geleneksel PID için %4.49 aşım yaklaşık 2.28 saniyede yerleşme zamanı elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, kesirli mertebeden kontrolörün başarımlarının geleneksel PID 'den çok daha iyi olduğunu göstermektedir. Her iki kontrol sistemi için kullanılan kontrol işaretleri Şekil 4.16'da görülmektedir.

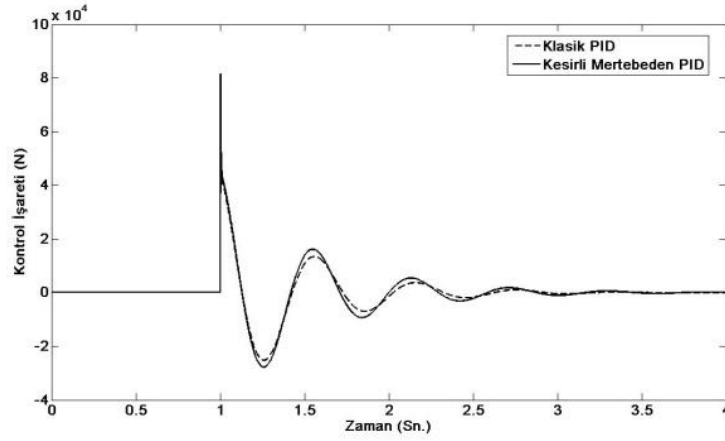


Şekil 4.16 : 0.1 metrelik birim basamak bozucu için kontrol işaretleri

Araç süspansiyon sisteminden beklenen en önemli özelliklerinden biri değişken yük altında da yoldaki bozulardan kaynaklanan salınımları söndürmektir. Bu tez çalışmasında tasarlanan kesirli mertebeden kontrolörün ve geleneksel PID 'nin başarımlarının yük değişimlerine karşı dayanıklılığını sınamak için araç gövdesinin kütlesi m_1 , 2500kg'dan 3500kg'a arttırılmış, benzetimler tekrarlanmıştır. Bozucu olarak 0,1 metrelik basamak işareti alınmış ve elde edilen sonuçlar Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de verilmiştir.



Şekil 4.17 : Yük değişimleri altında $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin başarımının karşılaştırılması



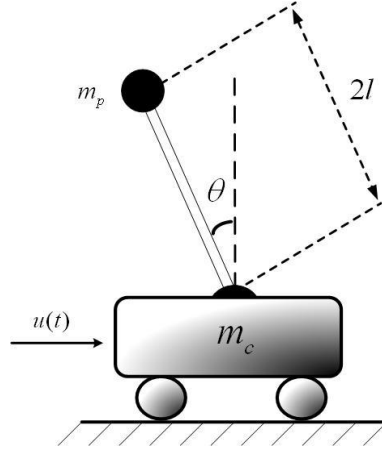
Şekil 4.18 : Yük değişimleri altında $PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin ürettikleri kontrol işaretleri

Araç gövdesinin ağırlığı 2500kg'dan 3500kg'a arttığında geleneksel PID ile kontrol edilen sistemin aşımı %5.35'e yükselirken yerleşme zamanı da 2.59 saniyeye çıkar. Oysa $PI^\lambda D^\mu$ ile kontrol edilen sistemin yerleşme zamanı ve aşımında görülen artışlar ise oldukça düşüktür. $PI^\lambda D^\mu$ ile kontrol edilen sistemin aşımı %1.15 olurken yerleşme zamanı da 1.86 saniye olur. Elde edilen bu sonuçlar, $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü ile kontrol edilen sistemin PID ile kontrol edilene göre daha dayanıklı olduğunu ortaya koymuştur.

4.3.3 Ters sarkacın kesirli mertebeden PID ile kontrolü

Bir aracın üzerine monte edilmiş ters sarkaç sistemleri, dinamik modeli birçok karmaşık sistemin dinamik modeline benzer olduğu için, tasarlanan yeni kontrol yapılarının ve algoritmaların etkinliğini sınamada sıklıkla kullanılan sistemlerdendir. Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden kontrolörlerin bir uygulaması olarak araba-sarkaç sisteminin istenen konumda kararlı kılınması sorunu da ele alınmıştır. Bu bölümde, klasik PID ve kesirli mertebeden PID kontrolörler, sistemin doğrusal modeli kullanılarak tasarlanacak ve tasarlanan bu kontrolörlerin başarımı önce sistemin doğrusal olduğu varsayımı altında karşılaştırılacak, sonra aynı kontrolörler doğrusal olmayan model kullanılarak benzetimi yapılan sistemi kontrol etmek için kullanılacak ve başarımları irdelenecektir.

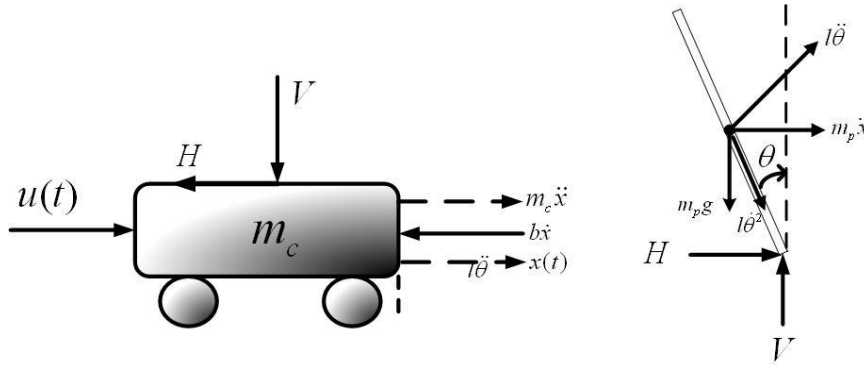
Bir aracın üzerine monte edilmiş ters sarkacın ilkesel şeması Şekil 4.19'da görülmektedir.



Şekil 4.19 : Bir aracın üzerine monte edilmiş ters sarkaç

Sarkacın kütlesi (m_p) ve aracın kütlesi (m_c) 0.5kg olarak seçilmiştir. Aracın sürtünmesi (b) ise $0.1N/m/sec$ 'dir. Sarkacın eylemsizliği (I), $0.006 kg.m^2$ olarak seçilirken uzunluğu ($2l$) $0.6m$ 'alınmıştır.

Ters sarkacın hareket denklemlerini elde edebilmek için Newton'un ikinci yasası kullanılabilir [36]. Aracın ve sarkacın serbest cisim diyagramı Şekil 4.20'de verilmiştir.



Şekil 4.20 : Aracın ve sarkacın serbest cisim diyagramı

Araca yatay doğrultuda etkiyen kuvvetler,

$$u - b\dot{x} - H = m_c\ddot{x} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir, burada H sarkaçtan gelen tepki kuvvetidir. Sarkaca yatay doğrultuda etkiyen kuvvetler,

$$H = m_p\ddot{x} + m_p l\ddot{\theta} \cos \theta + m l\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.35)$$

şeklindedir. Sarkaca dik olan etkiyen kuvvetler toplanırsa,

$$V \sin \theta + H \cos \theta - m_p g \sin \theta = m_p l \ddot{\theta} + m_p \ddot{x} \cos \theta \quad (4.36)$$

ifadesine ulaşılır. Sarkacın dönel hareketi göz önünde bulundurulur, momentler kütlenin merkezde olduğu varsayımı altında hesaplanır ve Newton'un hareket yasaları uygulanacak olursa:

$$-V l \sin \theta - N l \cos \theta = I \ddot{\theta} \quad (4.37)$$

elde edilir. Bu ifadede I kütle merkezi etrafındaki eylemsizliği ifade etmektedir. (4.34) ve (4.35) ifadeleri birleştirilecek olursa ilk hareket denklemi

$$u = m_c + m_p \ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.38)$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde (4.36) ve (4.37) ifadeleri birleştirilir ve H , V değişkenleri yok edilirse ikinci hareket denklemi

$$I + m_p l^2 \ddot{\theta} + m_p g l \sin \theta = -m_p l \ddot{x} \cos \theta \quad (4.39)$$

olarak belirlenir. Sarkacın dik konumu civarındaki küçük hareketleri için ters sarkaç sisteminin doğrusal modeli elde edilebilir. θ 'nın küçük olduğu varsayımı altında $\cos \theta \cong 1$, $\sin \theta \cong \theta$ ve $\dot{\theta}^2 = 0$ olarak alınabilir. Bu varsayımlar altında hareket denklemleri $\theta = 0$ civarında doğrusallaştırılabilir.

$$u = m_c + m_p \ddot{x} + b\dot{x} + m_p l \ddot{\theta}, \quad (4.40)$$

$$I + m_p l^2 \ddot{\theta} + m_p g l \theta + m_p l \ddot{x} = 0 \quad (4.41)$$

Sistemin transfer fonksiyonunu elde edebilmek için yukarıdaki doğrusal diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümleri kullanılırsa,

$$U(s) = m_c + m_p X(s)s^2 + bX(s)s + m_p l \theta(s)s^2, \quad (4.42)$$

$$I + m_p l^2 \theta(s)s^2 + m_p g l \theta(s) + m_p l X(s)s^2 = 0 \quad (4.43)$$

ifadeleri elde edilir. Son olarak bazı cebirsel işlemlerden sonra $U(s)$ ile $\theta(s)$ arasındaki ilişki, $\Omega = m_p l^2 - I + m_p l^2 m_c + m_p$ olmak üzere,

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m_p l}{\Omega} s}{s^3 + \frac{b}{\Omega} s^2 + \frac{m_c + m_p}{\Omega} s + \frac{b m_p l g}{\Omega}} \quad (4.44)$$

şeklinde bulunur.

Her iki türden kontrolörün tasarımı sistemin doğrusal modeli temel alınarak ve hatanın karesinin integralini (ISE) en küçük olacak şekilde yapılacaktır. Kontrolör katsayıları genetik algoritma yardımıyla belirlenecektir.

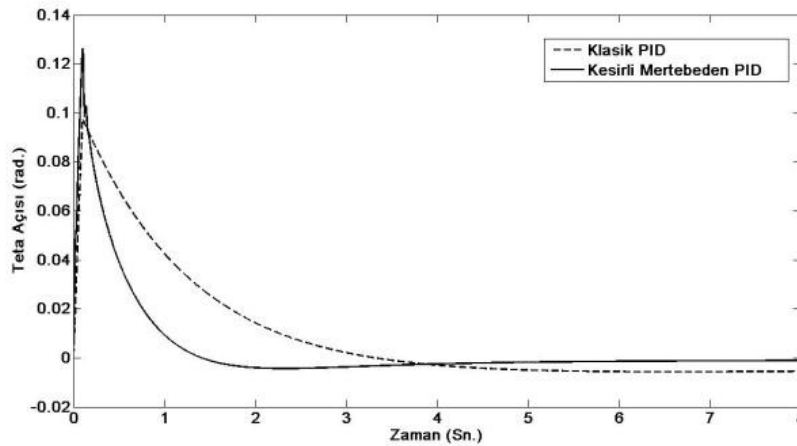
Algoritma, kontrolör katsayıları 0 ile 100 arasında sınırlandırılarak ve sistem darbe bozucusu altında iken 200 nesil için çalıştırılmıştır. Elde edilen klasik PID katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$G_{PID}(s) = 96.5 + \frac{6.71}{s} + 97.93s \quad (4.45)$$

Kesirli mertebeden PID kontrolörü ise

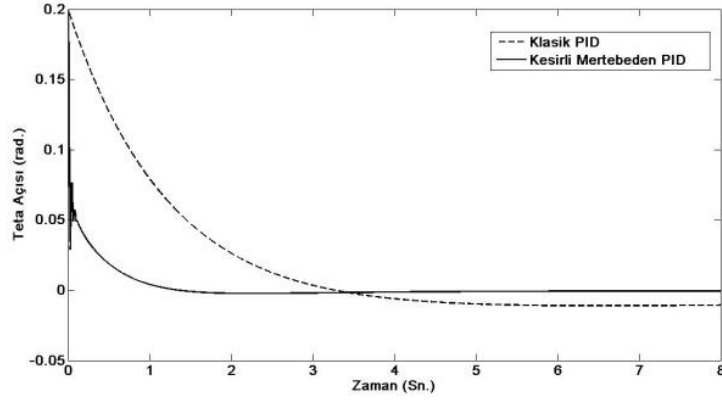
$$G_{PI^\lambda D^\mu}(s) = 99.56 + \frac{99.75}{s^{0.3}} + 99.75s^{0.9} \quad (4.46)$$

şeklinde elde edilmiştir. Klasik PID için elde edilen davranış ölçütünün en küçük değeri 5.56×10^{-3} ’iken $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü için ise bu değer 2.97×10^{-3} ’dir. Doğrusal model kullanarak benzetimi yapılan ters sarkaç sisteminin darbe bozucusu altında klasik PID ve $PI^\lambda D^\mu$ ile elde edilen sistem cevapları Şekil 4.21’de verilmiştir.



Şekil 4.21 : Darbe bozucusu altında doğrusal model kullanarak benzetimi yapılan ters sarkaç sisteminin PID ve $PI^\lambda D^\mu$ türü kontrolör ile elde edilen sistem cevapları karşılaştırılması

Şekil 4.21’den kesirli mertebeden kontrolör ile kontrol edilen sistemin aşımının klasik PID ’ye göre biraz daha fazla olduğu görülmektedir, ancak kesirli mertebeden kontrolör, sistemin cevabını çok hızlı bir şekilde istenen değere yerleşmesini sağlamıştır. Kuşkusuz daha anlamlı bir karşılaştırma, sistemlerin doğrusal olmayan modelinin kullanıldığı benzetim sonuçları üzerinde yapılabilir. Bu şekilde yapılan benzetimin sonuçları Şekil 4.22’de sunulmuştur.



Şekil 4.22 : Ters sarkaç sisteminin doğrusal olmayan modeli kullanılarak yapılan benzetim sonucu elde edilen cevaplar

Şekil 4.22’den de görüldüğü gibi doğrusal olmayan sistem için kesirli mertebeden $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörün başarımı klasik PID den çok daha iyidir.

4.3.4 DC motorun kesirli mertebeden PD ile kontrolü

Bu bölümde Şekil 4.23’te görülen Quanser firmasının üretmiş olduğu IP02 deney setinde bulunan DC motorun konumunun önceden belirlenmiş bir yörüngeyi takip etmesi için gerekli kontrol işleminin kesirli mertebeden bir PD ile yapılması sorunu ele alınmıştır. Sistemde sürücü olarak 6V nominal gerilimi olan ve 3.23W çıkış gücüne sahip Faulhaber Coreless DC Motor (2338s006) kullanılmıştır. Tasarlanan kontrolörlerin gerçekleştirilmesi ise gerçek zamanlı bir kontrol yazılımı olan Quarc-Simulink kullanılarak yapılmıştır.



Şekil 4.23 : Quanser IP02 deney seti

Motor konumunun, önceden üretilmiş konum referans yörüngesini takip etmesi için kesirli mertebeden bir PD kontrolörü tasarlanacak, performansı ve dayanıklılığı geleneksel PD ile karşılaştırılacaktır. Tasarım için kullanılan DC motorun matematik

modeline ihtiyaç vardır. Kullanılan DC motora ait veriler Çizelge 4.2’de görülmektedir [37].

Çizelge 4.2 : IP02 deney düzeneğindeki DC motor parametre değerleri

Sembol	Tanım	Değer	Birim
R_m	Motor Armatür Direnci	2.6	Ω
L_m	Motor Armatür Endüktansı	0.18	mH
K_t	Motor Tork Sabiti	0.00767	$N.m/A$
K_m	Ters EMK Sabiti	0.00767	$V.s/rad$
K_g	Dişli Kutusu Oranı	3.71	
M	IP02 Araç Kütlesi	0.57	kg
r_{mp}	Motor Dişli Yarıçapı	6.3×10^{-3}	m
J_m	Rotor Eylemsizlik Momenti	3.9×10^{-7}	$kg.m^2$
B_{eq}	Viskoz Sürtünme Katsayısı	5.4	Ns/m
η_m	Motor Verimliliği	100	%
η_g	Dişli Kutusu Verimliliği	100	%

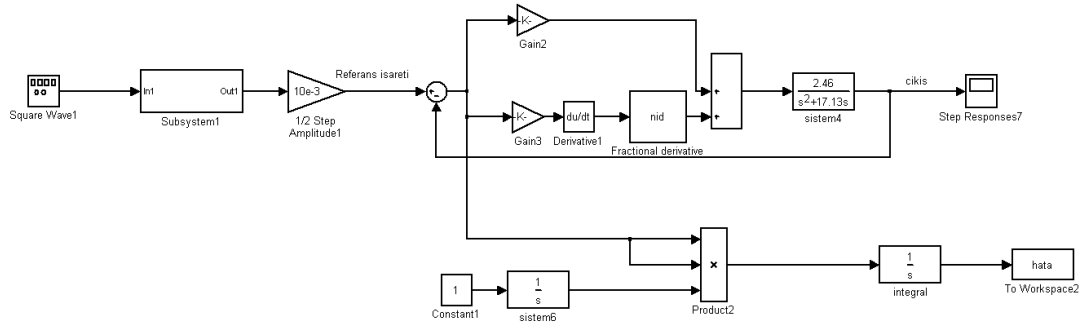
Çizelge 5.2’deki değerler kullanılarak sistemin girişi motora uygulanan gerilim, çıkışı da aracın konumu olmak üzere DC motorun transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{2.46}{s(s+17.13)} \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Tasarım ölçütü olarak; aşım %5 ve tepe zamanı 0.18s seçilirse geleneksel PD kontrolör analitik yöntemler kullanılarak,

$$G_{PD}(s) = 235.55 + 6.68s \quad (4.48)$$

olarak elde edilir. Kesirli mertebeden PD kontrolörünün tasarımı için bu çalışmada izlenen yol; geleneksel PD kontrolör için belirlenen K_p ve K_d katsayılarını, kesirli mertebeden PD’nin katsayılarına eşit alıp, belirlenen bir performans ölçütünü minimize eden türevleme katsayısını sayısal bir optimizasyon yöntemi kullanarak belirlemek olarak özetlenebilir. Performans ölçütü olarak zamanla ağırlıklandırılmış hatanın karesel integrasyonu (ITSE) seçilmiştir ve optimizasyon yöntemi olarak da genetik algoritma kullanılmıştır. Bu amaçla bir MATLAB fonksiyonu yazılarak ilgili Simulink programı çağırılmış ve performans ölçütünün değeri fonksiyona döndürülmüştür. MATLAB’ın genetik algoritma araç kutusu kullanılarak da ilgili fonksiyonun dolayısı ile performans ölçütü genetik algoritma ile minimize edilmiştir. Benzetim içim oluşturulan Simulink modeli Şekil 4.24’de görülmektedir.

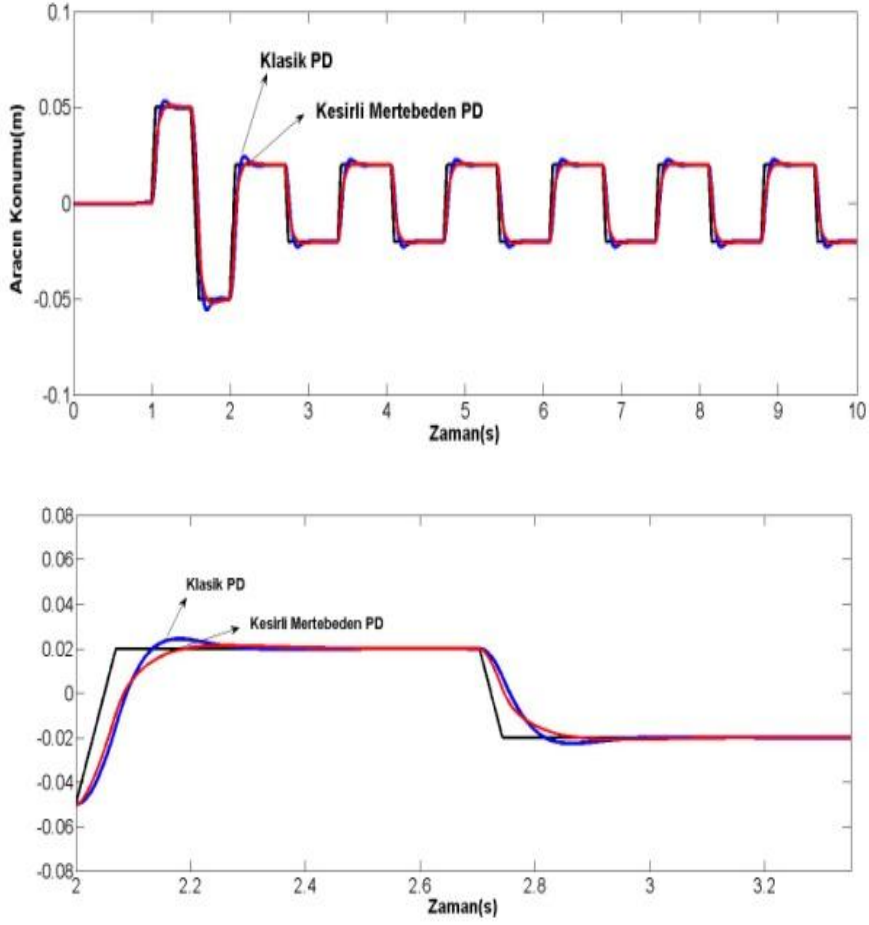


Şekil 4.24 : Benzetim için oluşturulan Simulink modeli

Geleneksel *PD* kontrolör için belirlenmiş olan ve (4.48) ile verilen katsayılar kullanılarak, türevleme mertebesi arama aralığı $0.2 \leq \mu \leq 1.2$ olarak seçilerek genetik algoritma 100 nesil için çalıştırılmış ve ITSE amaç ölçütünü eniyileyen türev mertebesi $\mu = 1.2$ olarak belirlenmiştir. Sonuç olarak kesirli mertebeden *PD* kontrolörü,

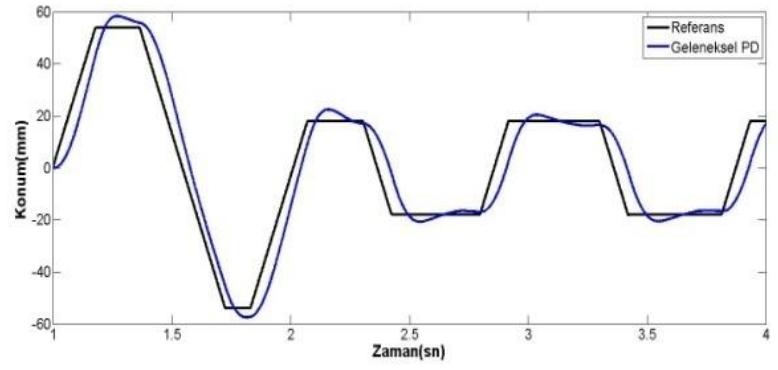
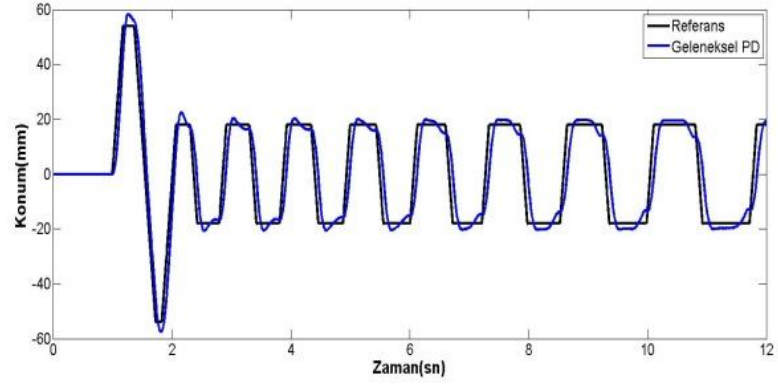
$$G_{PD^\mu}(s) = 235.55 + 6.68s^{1.2} \quad (4.49)$$

şeklinde, performans ölçütü ise 1.454×10^{-3} olarak elde edilmiştir. Tasarlanan *PD* ve kesirli mertebeden *PD* kontrolörleri kullanılarak elde edilen yörünge kontrolüne ilişkin benzetim sonuçları Şekil 4.25'te görülmektedir.

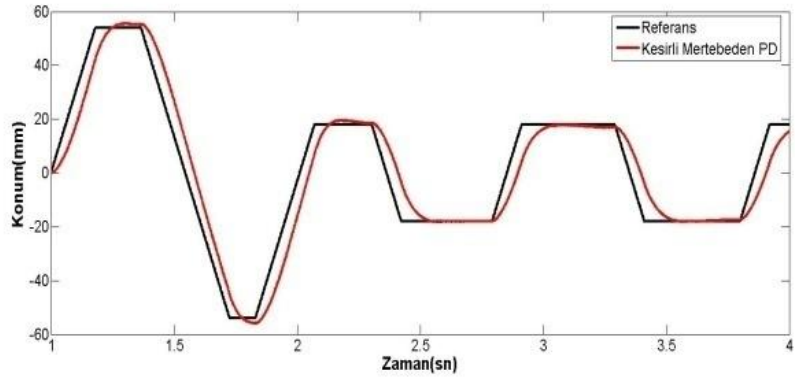
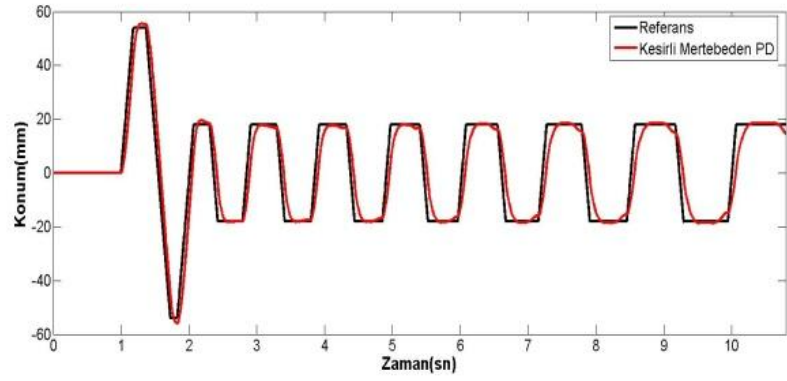


Şekil 4.25 : Geleneksel PD ve kesirli mertebeden PD kontrolörler ile kontrol edilen sistemin benzetim sonuçları

Benzetim sonuçlarından, kesirli mertebeden *PD* kontrolör ile kontrol edilen sistemin, referans yörüngesini geleneksel *PD* ile kontrol edilen sisteme kıyasla çok daha iyi takip ettiği gözlenmiştir. Aşım çok büyük bir oranda düşürülmüştür. Aynı başarı deneysel sonuçlarda da görülmektedir. Deney sonuçlarından elde edilen, geleneksel *PD* ile kontrol edilen sistem cevabı Şekil 4.26’da, bu çalışmada tasarlanan kesirli mertebeden kontrolör ile kontrol edilen sistemin davranışı ise Şekil 4.27’de görülmektedir.

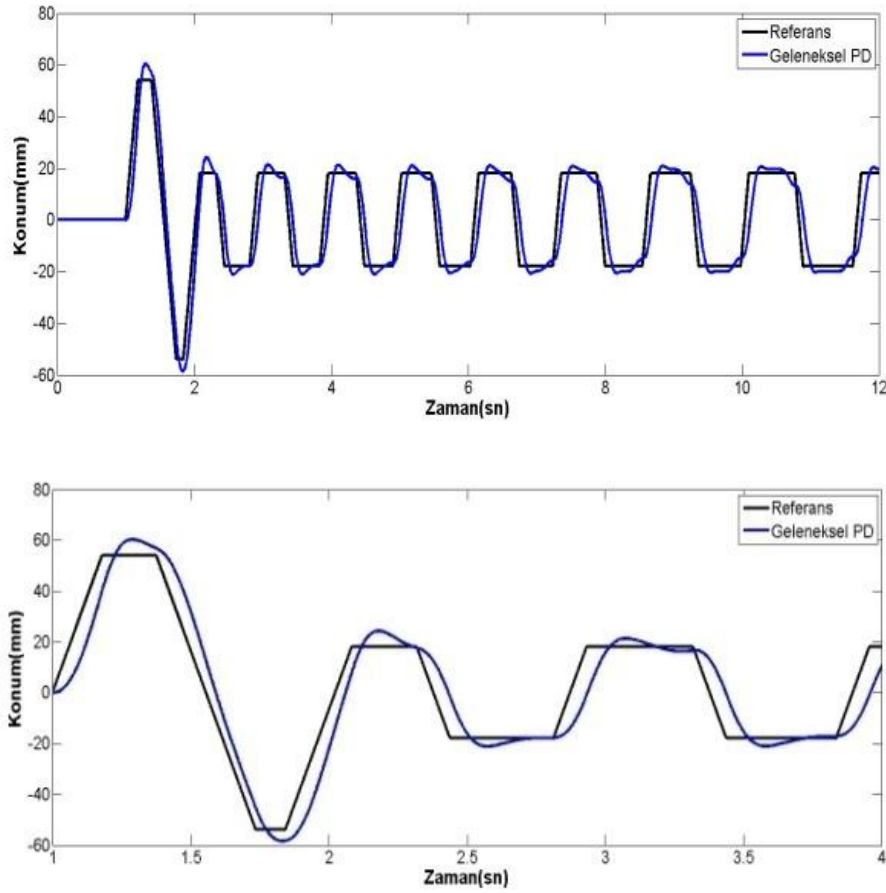


Şekil 4.26 : Geleneksel PD kontrolörünün deneysel sonuçları

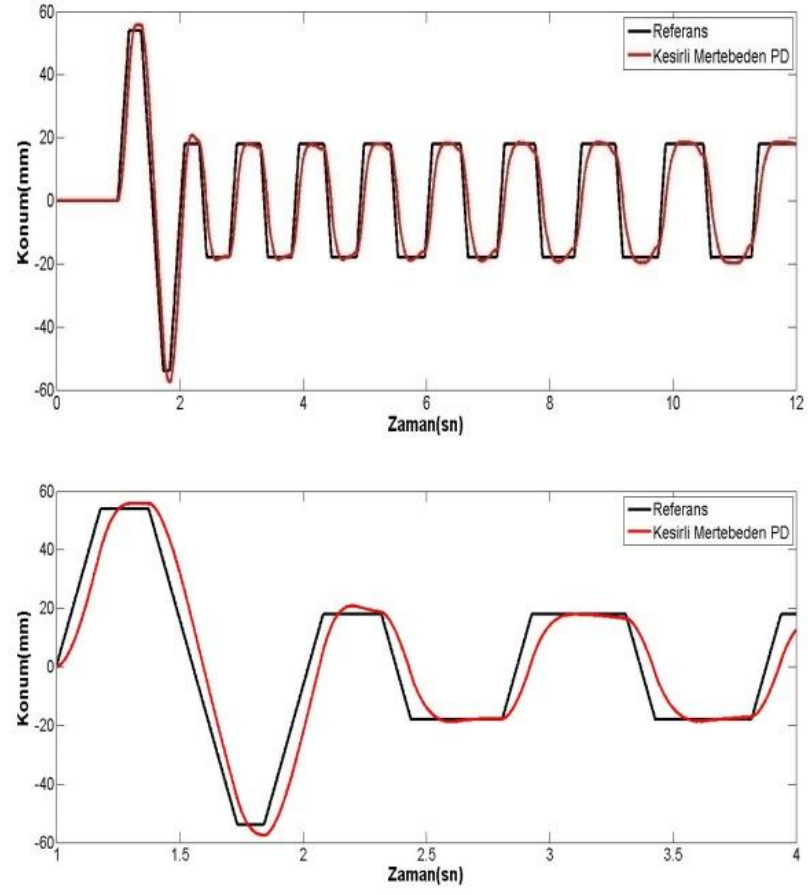


Şekil 4.27 : Kesirli mertebeden PD kontrolörünün deneysel sonuçları

Deneysel sonuçlardan, kesirli mertebeden kontrolör ile kontrol edilen sistem cevabının hem aşırı hızlı olduğu hem de referans işaretini geleneksel PD ile kontrol edilen sistemden çok daha hızlı izlediği görülmüştür. Tasarlanan kesirli mertebeden kontrolörün sistem parametrelerindeki değişimlere karşı dayanıklılığının sınanması amacıyla, DC motorun gövdesinin üzerine 0.45kg'lık bir yük ilave edilmiş ve sistem cevabı incelenmiştir. Bu durum için yapılan deneylerde, elde edilen sistem cevabı geleneksel PD için Şekil 4.28'de, kesirli mertebeden PD için ise Şekil 4.29'da görülmektedir.



Şekil 4.28 : 0.45kg'lık ek yük için PD kontrolörünün performansı



Şekil 4.29 : 0.45kg'lık ek yük için kesirli mertebeden PD kontrolörünün performansı

5. SONUÇ

Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler ve son 50 içerisinde ortaya atılan yeni çalışmalar literatürde 300 yılı aşkın bir süredir var olan kesirli mertebeden türev ve integral kavramlarını pür matematiksek bir araştırma konusu olmaktan çıkartıp uygulamalı mühendislikte kullanılabilir bir hale getirmiştir.

Kontrol mühendisliği açısından bakıldığında ise sistem modellemeyen kontrolör tasarımına, bir çok alanda kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılabileceği görülmüştür.

Bu çalışmada öncelikle literatürde sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville ve Grünwald Letnikov kesirli mertebeden türev tanımları verilmiş ve bu türevlerin lineer olma ve Leibniz kuralı gibi bazı özellikleri ele alınmıştır. Kesirli mertebeden türev ile ilgili kavramların anlaşılabilirliği sağlamak için, bir sabitin kesirli mertebeden türevinin sıfıra eşit olmadığı gösterilmiştir.

Daha sonra kesirli mertebeden türevlerin Laplace dönüşümlerini elde etme yöntemleri verilmiştir. Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin Laplace dönüşümü matematiksel olarak geçerli olsa da, ifade içinde bulunan fonksiyonun kesirli mertebeden türevlerine ilişkin başlangıç değerlerinin hesaplanması ya da bilinmesi kolay olmadığı için kullanılması ile ilgili bazı sorunlar olduğu gösterilmiştir. Fonksiyonun kesirli mertebeden türevlerine ilişkin başlangıç değerlerini, fonksiyonun tam sayılı mertebeden türevlerine dönüştüren Caputo kesirli türev tanımı ve Laplace dönüşümü hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise kesirli mertebeden sistemler, sağladığı avantajlar ve kesirli mertebeden türevlerin sürekli ve ayrık zamandaki yaklaşıklık ifadeleri incelenmiştir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin dinamik sistemleri modellemede çok daha etkili olduğu ve tam sayılı mertebeden modelin doğruluğu kabul edilerek tasarlanan kontrolörlerin gerçek sistem kesirli mertebeden olduğunda sistemin başarımının oldukça düşük olabileceği gösterilmiştir.

Son bölümde ise kesirli mertebeden kontrolör tasarım yöntemlerine ve kesirli mertebeden kontrolörlerin geleneksel kontrolörler ile karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Bu amaçla, önce kesirli mertebeden *PID* kontrolörü tanıtılmış ve bu kontrolör ile kontrol edilen sistemlerin açık ve kapalı çevrim basamak ve impuls cevapları verilmiştir. Daha sonra ise frekans tanım bölgesinde kontrolör tasarımı ve nümerik arama algoritmaları kullanılarak kesirli mertebeden kontrolör tasarımı incelenmiştir. Nümerik arama algoritmaları kullanılarak, bir araç süspansiyon sisteminin, ters sarkacın kontrolü kesirli mertebeden kontrolörler ile gerçekleştirilmiştir. Buna ek olarak DC motorun kesirli mertebeden PD ile kontrolü ile ilgili deneysel bir çalışma yapılmıştır. Ele alınan örnekler için kesirli mertebeden *PID* ve geleneksel *PID* ile ilgili karşılaştırmalı bir çalışma verilmiştir. Elde edilen tüm sonuçlar, kesirli mertebeden kontrolörler ile tam sayılı mertebeden kontrolörlere kıyasla daha iyi sonuçlar verdiği ve sistem parametrelerindeki değişimlere karşı geleneksel kontrolörlere kıyasla daha az duyarlı olduğunu göstermiştir.

Bundan sonra yapılabilecek çalışmalar kesirli mertebeden uyarlamalı kontrolör tasarımı ve durum uzayında ifade edilen sistemlere yönelik kesirli mertebeden kontrolör tasarımı olarak olarak düşünülebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Dalir M., Bashour M.** 2010: Applications of Fractional Calculus. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 4, no 21, p.1021-1032.
- [2] **Kilbas Anatoly A. , Srivastava Hari M. ,Trujillo Juan J.**, 2006: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* Editor:Jan van Mill Elsevier, s.275.
- [3] < http://people.tuke.sk/igor.podlubny/fc_apps.html >, alındığı tarih 11.04.2010
- [4] **Chengbin M., Yoichi H.**, 2004: “An Introduction of Fractional Order Control and Its Applications in Motion Control” *China Control Conference* Shanghai, August.
- [5] **Cafanga, D.** 2007: Fractional Calculus: A Mathematical Tool from the Past for the Present Engineers. *IEEE Industrial Electronics Magazine* Vol. 1 Issue 2.
- [6] **Podlubny I.**, 1999: Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications. *Academic Press*, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto 368 pages, ISBN 0125588402
- [7] **Letnikov A.V**, 1868: Theory of differentiation with an arbitrary order, *Mat. Sb.*, 3, sf.1-66.
- [8] **Oldham Keith B. and Spanier J.**, 1974: *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press sf. 43-57.
- [9] **Güngör F.**, 2007: *Diferansiyel Denklemler*, İTÜ Vakfı Argem A.Ş. Yayınları-I Şubat
- [10] **Cerit C.**, 1998: *Çözümlü Diferansiyel Denklemler Problemleri*, İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,
- [11]<<http://planetmath.org/encyclopedia/LaplaceTransformOfPowerFunction.html>> alındığı tarih 18.04.2010
- [12] **Vinagre, B., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V.**, 2000: Some Approximations of Fractional Order Operators Used in Control Theory and Applications. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 3(3), 231–248.
- [13] **Petrás I., Dorcak L., O’leary P., Vinagre B.M., Podlubny I.**, 2000: The Modelling and Analysis of Fractional-Order Control Systems in Frequency Domain *In: Proc. of ICC’2000*, pp261-264, ISBN 80-7099-510-6 High Tetras, Slovak Rep. May 23-26.

- [14] **Podlubny I.**, 1999 : Fractional Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol.44, No 1, s,208-214.
- [15] **Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A.**, 2004: Numerical Simulations of Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements. *Nonlinear Dynamics*-38 :117-131 Academic Publishers.
- [16] **Oustaloup, A.**, 1983: *Systemes Asservis Lineaires D'ordre Fractionnaire, Theorie et Pratique* Masson, Paris.
- [17] **Lin, J.**, 2001: Modelisation et identification de systemes d'ordre non entier, *These de Doctorat, Universite de Poitiers*, France.
- [18] **Feliu-Battle V., Perez, R. R., Rodriguez L.S.**, 2007:. Fractional Robust Control of Main Irrigation Canals with Variable Dynamic Parameters, *Control Engineering Practice* 15 s.673–686.
- [19] **Ramiro S. Barbosa, J.A. Tenreiro Machado, Isabel M. Ferreira**, 2005: Pole Zero Approximations of Digital Fractional-Order Integrators and Differentiators Using Signal Modeling Techniques, *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 4 – 8.
- [20] **Petras, I., Grega, S., Dorcak, L.** 2003: Digital fractional order controllers realized by PIC microprocessor: Experimental results. *In Proceedings of the international Carpathian control conference* (s. 873–876), High Tatras, Slovak Republic,.
- [21] **Zhao C., Xue D., Chen Y.Q.** 2005: A Fractional Order PID Tuning Algorithm for A Class of Fractional Orde Plants, *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation* s.216-221.
- [22] **Monje C.A., Vinagre B.M., Chen Y.Q., Feliu V., Lanusse P., Sabatier J.**, 2004: Proposals For Fractional $PI^\lambda D^\mu$ Tuning, *The First IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications* Bordeaux , France, July 19-20.
- [23] **Oustaloup A.**, 1995: *La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthese et Applications*. Hermes, Paris France.
- [24] **Podlubny I., Dorcak L., Kostial I.**, 1997: On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers, *Proc. of the 36th IEEE CDC* San Diego
- [25] **Astrom K. J., Hagglund T.**, 1995: PID Controllers: Theory, Design and Tuning, Research Triangle Park, *Instrument Society of America*.
- [26] **Chen, Y. Q., Hu C. H. , Moore K. L.** 2003:. Relay Feedback Tuning of Robust PID Controllers with Iso-Damping Property. *In: 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii, USA.
- [27] **Göktürk E.** 2009: Kesirli PID Tasarım Yöntemi ve Klasik PID ile Karşılaştırmalar *İTÜ Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı Yüksek Lisans Tezi*.

- [28] **Cao J. Y., Liang J., Cao B.G.**, 2005: Optimization of Fractional Order PID Controllers Based on Genetic Algorithms. *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Guangzhou, 18-21 August 2005
- [29] **Cao J. Y., Cao B.G.**, 2006: Design of Fractional Order Controller Based on Particle Swarm Optimization, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 4, no. 6, pp. 775-781, December.
- [30] **Coley D.A.**, 2003: An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers. *World Scientific Publishing* Denver USA.
- [31] **Gen M., Cheng R.**, 2000: Genetic Algorithms & Engineering Optimization. *Wiley Interscience Publication* ISBN: 978-0-471-31531-5 USA.
- [32] **Allayne, A. And Hedrick J. K.** 1995: Nonlinear Adaptive Control of Active Suspensions, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* Vol.3 No.1 , s. 94-101.
- [33] **Kou, F. and Fang Z.** 2007: An Experimental Investigation into the Design of Vehicle Fuzzy Active Suspension, *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics*, s.959-963.
- [34] **Chantranuwathana S., Peng, H.** 1999: Adaptive Robust Control for Active Suspensions, *Proceedings of the Control Conference* San Diego California, s.1702-1706.
- [35] <<http://www.engin.umich.edu/group/ctm/>> Alındığı tarih 18.04.2010
- [36] **Marzi H.** 2008: *Mechatronic Systems*, Chapter 22 Actuator Optimization and Fuzzy Control in Mechatronics, CRC Press, London New York.
- [37] Quanser, “Linear Motion Servo Plants:IP01 or IP02 User Manual”, Document Number:501, Revision 03

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: İlhan MUTLU
Doğum Yeri ve Tarihi: E. Cuma 11.10.1986
Lisans Üniversitesi: İTÜ Kontrol Mühendisliği Bölümü (2008)
İTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü (2009)

Yayın Listesi:

- **Mutlu İ.**, Gören L., "Performance analysis of $PI^\lambda D^\mu$ and PID Controllers ", 09/2009, The 6th IFAC *International Workshop on Knowledge and Technology Transfer*, Ohrid, Macedonia, 26.09.2009 - 29.09.2009
- **Mutlu İ.**, Gören L., " $PI^\lambda D^\mu$ ve PID Kontrolörlerinin Başarım Analizi", 10/2009, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı - TOK'09*, İstanbul, Türkiye, 13.10.2009 - 16.10.2009
- **Mutlu İ.**, "Swing Up Control Of An Inverted Pendulum With PD and Full State Feedback" 05/2010, *The 4th International Student Conference on Advanced Science and Technology*, ICAST 2010 İzmir, Turkey, 25.05.2010-26.05.2010
- Eris O., **Mutlu İ.**, "Design of Signal Control Structures Using Formal Methods For Railway Interlocking Systems" 12/2010 *11th International Conference on Control, Automation Robotics and Vision ICARCV 2010* Singapore 7.12.2010-10.12.2010 (Cevap bekliyor.)
- **Mutlu İ.**, Gören L., "Ters Sarkaç Sisteminin Kesirli Mertebeden PD Kontrolörü ve LQR ile İki Aşamalı Kontrolü", 09/2010, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı - TOK'10*, Kocaeli, Türkiye, 21.09.2010 - 23.09.2010 (Kabul edildi.)
- **Mutlu İ.**, Eris O., Kurtulan S., Gören L., " Demiryolu Anlaşman Sistemlerinde Sinyal Kumandasının Formal Yöntemler ile Tasarımı", 09/2010, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı - TOK'10*, Kocaeli, Türkiye, 21.09.2010 - 23.09.2010 (Kabul edildi.)