

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NONLİNEER DİNAMİK SİSTEMLERDE KAOS,
DALLANMA VE FRAKTALLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Rukiye KARA**

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NONLİNEER DİNAMİK SİSTEMLERDE KAOS,
DALLANMA VE FRAKTALLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Rukiye KARA
509031007**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Haziran 2006**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet CAN
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Emanullah HİZEL (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Allaberen ASHYRALYEV (F.Ü.)

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşmasında bilgisi ve eşsiz desteğiyle bana rehberlik eden değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Can'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca sabır ve destekleri ile her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Mayıs, 2006

Rukiye KARA

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. NONLİNEERLİK	1
1.1. Nonlinear Sistemler	1
1.2. Dinamik Sistemler	3
1.2.1 Durum vektörleri	4
1.2.2. Bir sonraki an: Ayrık zaman	5
1.2.3. Bir sonraki an: Sürekli zaman	6
1.2.4. Dinamik sistemlere ait örnekler	7
1.2.4.1. Bakteriler	7
1.2.4.2. Av-avcı ilişkisi	9
1.3. Faz Uzayı	11
1.3.1. Birinci dereceden adi diferansiyel denklem ile tanımlanan sistemler	12
1.3.2. Kesişmezlik teoremi	14
1.3.3. Bir boyutlu durum uzayı	14
1.3.4. İki boyutlu durum uzayı	14
1.3.5. Av-avcı modeli	15
1.3.6. Durağan hal ve denge eğrileri	15
1.3.7. Denge noktası bulma	16
1.4. Stabilité Analizi	17
1.5. Lineerizasyon	20
1.5.1. Bir boyutlu sistem	21
1.5.1.1. Denge noktası civarında Taylor serisi lineerleştirilmesi	22
1.5.2. İki ve daha yüksek boyutlu durum uzayı	24
1.5.3. Kompleks karakteristik değerler ve dinamikler	29
1.5.4. Karakteristik değerler için Jakobien matris	30
2. PERİYODİKLİK VE KAOS	38
2.1. İnvaryant Kümeler	38
2.1.1. Değişmez Kümeler	38
2.2. Düzlemsel Sistemlerin Çözümlerinin Uzun Dönem Hareketi	40
2.3. Limit Çevrimler	41
2.4. Lyapunov Fonksiyonu	43
2.5. Poincare-Bendixson Teoremi	47
2.6. Dalların Dallar	50
2.6.1. Eyer-Düğüm Dalların	51
2.6.2. Kritik Ötesi Dalların	52
2.6.3. Pitchfork Dalların	52
2.6.4. Hopf Dalların	53

2.6.4.1. Hopf dallanma teorisi	53
2.6.5. Genel Kuramlar ve Örnekler	54
2.6.5.1. Kritik ötesi dallanma-Örnek 3	59
2.6.5.2. Kritik ötesi dallanma-Örnek 4	62
2.6.5.3. Eyer-düğüm dallanma-Örnek 5	63
2.6.5.4. Eyer-düğüm dallanma-Örnek 6	65
2.6.5.5. Kritik altı Hopf dallanma-Örnek 7	66
2.6.5.6. Hopf dallanma-Örnek 8	70
2.6.5.7. Kritik altı Pichfork dallanması-Örnek 9	72
2.6.5.8. Kritik üstü Pichfork dallanması-Örnek 10	73
2.7. Üç Boyutlu Durum Uzayı ve Kaos	75
2.7.1. Metapopülasyon modellerinde başlangıç koşullarına hassas bağlılık	77
2.7.1.1. Özelci ve genelci avcılar	78
2.7.1.2. Çözümler	81
2.7.1.3. Parametre değerlerine hassas bağlılık	81
2.7.1.4. Başlangıç popülasyon değerlerine hassas bağlılık	85
2.7.1.5. Sonuçlar	87
2.8. Determinizm	88
2.9. Üç Boyutlu Durum Uzayı	88
2.10. Üç Boyutlu Sistemlerde Denge Noktası	89
2.10.1. Orana bağlı besin zinciri modeli	91
2.10.1.1. Denge noktası analizi	93
2.10.1.2. Denge noktalarının sınıflandırılması	95
2.10.1.3. Sayısal çözümler	98
2.11. Garip Çekerler	108
2.12. Poincare Kesiti	110
2.13. Periyot Katlama	110
2.14. Lyapunov Üsseli ve Kaos	112
3. FRAKTALLER.	115
3.1. Giriş	115
3.2. Cantor Kümesi	116
3.2.1. Cantor Kümesinin Sembolik Gösterimi	117
3.2.2. Cantor Kümesinin Geleneksel Notasyonu	118
3.2.3. Cantor Kümesinin Fraktal Uygulaması	120
3.3. Sierpinski Üçgeni	121
3.4. Koch'un Kar Tanesi	122
3.5. Fraktal Boyut	123
3.5.1 Giriş	123
3.5.2. Fraktal Boyut Tanımı ve Uygulamaları	123
3.5.3. Kürelerle Kaplama	124
3.6. Julia Kümeleri	132
3.7. Mandelbrot Kümesi	133
3.7.1. Mandelbrot Kümesinin Çizimi	137
3.8. Julia ve Mandelbrot Kümeleri Arasındaki Fark	139
3.9. Julia Kümesi Yapma	140
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .	143
KAYNAKLAR	145
ÖZGEÇMİŞ	148

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1. Bir boyutlu sistemin karakteristik değerleri	21
Tablo 1.2. İki boyutlu durum uzayının sabit noktaları	32
Tablo 3.1. Geometrik şekillerin boyutları	126
Tablo 3.2. Mandelbrot kümesinin çizim örneği	138
Tablo 3.3. $c = 0.2 + 0.5i$ ile başlayan Mandelbrot kümesinin değerleri	139

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1	: (1.16) eşitliğinin grafiği.....	8
Şekil 1.2	: Av avcı popülasyonunun zaman içerisindeki değişimi.....	10
Şekil 1.3	: Av avcı modelinin faz diyagramı.....	11
Şekil 1.4	: $x' = f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği.....	22
Şekil 1.5	: Karakteristik değerler kompleks olduğunda sistemin durumu.....	29
Şekil 1.6	: Örnek 1.3 de verilen av-avcı popülasyonunun zamana göre değişimi	34
Şekil 1.7	: Örnek 1.4 de verilen av-avcı popülasyonunun zamana göre değişimi.....	35
Şekil 1.8	: Av-avcı popülasyonunun faz portresi.....	35
Şekil 1.9	: Sistem 1.52 nin $a=5$ ve $a=-5$ için durumu.....	36
Şekil 2.1	: Sistem 2.2 nin x - y popülasyonlarının zaman çizelgesi.....	43
Şekil 2.2	: Sistem 2.2 nin faz portresi ve doğrultu vektörlerinin alanı.....	43
Şekil 2.3	: Lyapunov fonksiyonunun grafiği.....	47
Şekil 2.4	: $x_1' = x_1 + x_2 - x_1^3$ ve $x_2' = -x_1$ sisteminin (0,0)'daki kararsız denge noktası.....	48
Şekil 2.5	: Sistemin kararlı çevrime yaklaşması.....	50
Şekil 2.6	: x_1 in zamana göre grafiği.....	50
Şekil 2.7	: Yamyamlık modelinde x in kararlılık grafiği.....	57
Şekil 2.8	: Transcritical bifurkasyonda denge durumu.....	60
Şekil 2.9	: Parametrenin çeşitli değerleri için sistemin faz portresi.....	61
Şekil 2.10	: Eyer-düğüm bifurkasyonda denge durumu.....	63
Şekil 2.11	: Parametrenin çeşitli değerleri için faz portresi.....	64
Şekil 2.12	: Hopf bifurkasyon sisteminin kararlılık durumu.....	67
Şekil 2.13	: Parametrenin çeşitli değerleri için faz portresi.....	68
Şekil 2.14	: Supercritical Hopf bifurkasyon sisteminin kararlılık durumu.....	69
Şekil 2.15	: Parametrenin çeşitli durumlarına göre sistemiz faz portresi.....	70
Şekil 2.16	: Pitcfork bifurkasyon sisteminin kararlılık durumu.....	72
Şekil 2.17	: Subcritical Pitcfork bifurkasyonunun faz portresi.....	73
Şekil 2.18	: Supercritical Pitcfork bifurkasyonunun kararlılık durumu.....	74
Şekil 2.19	: Supercritical Pitcfork bifurkasyonunun faz portresi.....	74
Şekil 2.20	: Model 2 nin şematik gösterimi.....	80
Şekil 2.21	: Model 1 de verilen sistemin üç boyutlu xyz düzlemine iz düşümü....	82
Şekil 2.22	: Model 1 in başlangıç koşullarına hassas bağıllığı.....	83
Şekil 2.23	: Model 2 nin b parametresine bağıllığı.....	84
Şekil 2.24	: Model 2 nin w_4 parametresine bağıllığı.....	85

Şekil 2.25 :	Model 1 in başlangıç popülasyonuna hassas bağılılığı.....	86
Şekil 2.26 :	Model 2 nin başlangıç popülasyonuna hassas bağılılığı.....	87
Şekil 2.27 :	Orana bağlı besin zinciri modelinin parametrelere bağılılığı.....	99
Şekil 2.28 :	Başlangıç koşullarına hassas bağılılığı.....	100
Şekil 2.29 :	{1.0, 2.0, 1.0} başlangıç koşulları altında çözümün üç boyutlu grafiği.....	101
Şekil 2.30 :	{0.70, 0.40, 0.42} başlangıç koşulları altındaki sistemin çözüm grafiği.....	102
Şekil 2.31 :	Zaman içerisinde bir noktaya doğru küçülüyor.....	102
Şekil 2.32 :	{0.70, 0.40, 0.45} başlangıç koşulları altında sistemin üç boyutlu görüntüsü.....	103
Şekil 2.33 :	8.23 periyotlu bir limit çevrime yaklaşan çözümün üç boyutlu görüntüsü.....	103
Şekil 2.34 :	m_2 parametresine verilen önemsiz bir artımla sistemin çözüm grafiği.....	104
Şekil 2.35 :	{1.0, 2.5, 2.0} başlangıç koşullarında sistemin çözüm grafiği.....	104
Şekil 2.36 :	$E_1 = (0.6522, 0.3478, 0.3506)$ başlangıç koşullarında sistemin üç boyutlu görüntüsü.....	105
Şekil 2.37 :	Sistem 4.87 olan periyodunu koruyarak zaman içerisinde genişlemektedir.....	106
Şekil 2.38 :	{0.7, 1.4, 0.4} başlangıç koşullarında sistemin durumu.....	106
Şekil 2.39 :	Uzun zaman sonra çözüm 8.43 periyotlu limit çevrime yaklaşmaktadır.....	106
Şekil 2.40 :	En üstteki avcı yok olduğunda çözüm durmaktadır.....	107
Şekil 2.41 :	{0.8, 0.1, 0.3} başlangıç koşulunda sistemin durumu.....	108
Şekil 2.42 :	Lorenz Çekicisi.....	109
Şekil 2.43 :	“a” parametresinde yapılan ufak değişimler sonucu meydana gelen periyot katlama.....	112
Şekil 3.1 :	Cantor kümesi.....	116
Şekil 3.2 :	Sierpinski üçgenleri.....	121
Şekil 3.3 :	Koch’un Kar Tanesi.....	122
Şekil 3.4 :	Herhangi bir eğriyi gittikçe küçülen yarıçapta kürelerle kaplamak...	124
Şekil 3.5 :	$N(K, r) \leq N_{\square}(K, r) \leq 4N(K, r)$ eşitsizliğinin açıklaması.....	128
Şekil 3.6 :	$c = -0.85 + 0.18i$ değeri için Julia kümesi.....	133
Şekil 3.7 :	Mandelbrot Kümesi.....	136
Şekil 3.8 :	$c = -0.5 + i$ ile başlayan Mandelbrot kümesi.....	138
Şekil 3.9 :	$c = 0.29 + 0.016i$ için Julia kümesi.....	140
Şekil 3.10 :	$c = -0.748 + 0.0725i$ için Julia kümesi.....	140
Şekil 3.11 :	$c = -0.16 + 0.74i$ için Julia kümesi.....	141
Şekil 3.12 :	$c = -1.24 + 0.15i$ için Julia Kümesi.....	141

NONLINEER DİNAMİK SİSTEMLERDE KAOS, DALLANMA VE FRAKTALLER

ÖZET

Bu çalışmada nonlinear dinamik sistemlerde kaos, dallanma ve fraktaller incelenmiştir. Nonlinear sistemlere giriş için gerekli olan teorik bilgiler verilmiş ve bu teorik bilgiler biyolojik sistemlerden seçilen örneklerle desteklenmiştir.

Yaşadığımız dünyada nonlinear bir yapıya sahiptir. Biçim, bileşim ve fonksiyonda standart bir sınıflamanın mümkün olmadığı, olağan üstü bir çeşitliliğin olduğu bir dünyada yaşıyoruz. En yakın kişisel evrenimizde bile istediğimiz her şeye yapabildiğimiz sınırsız bir özgürlüğe sahip değilizdir. Çünkü doğal çevremize, bizimle ilgili olan sosyal ve profesyonel kurumlara ve hatta kullandığımız çok sayıdaki teknolojik alete bile karmaşık bağlarla bağlıyızdır. Bu bağlar arasında meydana gelebilecek küçük bir itme veya çekme bazen güzel bazen hoş olmayan durumlar meydana getirebilir. Diğer bir deyişle, etki ve tepkiler orantısız değildir. Önemsiz bir etki fark edilir derecede büyük sonuçlar doğurabilir. Etki ve tepki ya da sebep ve sonuçlar arasındaki bu orantısızlık “nonlinearlık” olarak adlandırılır.

Kaos ve nonlinear dinamiklerin sağladığı yeni teoriksel kavramlar basit sistemlerin aniden meydana getirdiği karmaşık davranışları anlamamıza yardım eder. Kaos teorisinin önemli özelliklerinden biriside kelebek etkisi olarak bilinen başlangıç koşullarına hassas bağlılıktır. Bu teori, ayrıca, periyodik olmayan sistemlerin davranışı hakkında uzun vadede tahminlerin yapılamayacağını açıklar. Bu çalışmada, ele alınan sistemlerin kaosa gidişindeki bu özelliklerde incelenmiştir.

Nonlinear dinamiklerin getirdiği bir diğer önemli kavramda fraktallerdir. Fraktal geometri modern bilimini, özellikle kaos biliminin önemli uğraş alanlarından birini oluşturur. Fraktal geometri ayrıca, bu çalışmada da görebileceğiniz gibi, ancak bilgisayarlar yardımıyla gerçekleştirilebilen matematiksel iterasyonlar sayesinde, oldukça zengin grafik görüntüler elde edilebilmesini de sağlamaktadır. Bu şekiller doğadaki birçok oluşumun izlediği kuralları da izlediğinden oldukça garip ve doğal bir güzellikleri var. Ayrıca, fraktal boyutlar dediğimiz buçuklu veya kesirli boyutlara sahip olmaları açısından da alışılmadık özelliklere sahipler.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın giriş niteliğindeki birinci bölümünde lineer olmayan dinamik sistemler ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve ele alınan sistemlerin dinamiksel davranışları ile faz uzayları incelenmiştir. İkinci bölümde, kaos kavramı ele alınmış, ele alınan üç boyutlu nonlinear biyolojik sistemlerin denge noktaları analiz edilip başlangıç koşullarında yapılan küçük değişimlerle periyodiklikten kaotikliğe geçişleri incelenmiştir. Ayrıca dallanma kavramı üzerinde durulmuş, verilen örneklerde sistemlerin dallanma durumundaki faz portreleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise fraktal ve fraktal boyut kavramı üzerinde durulmuş, ayrıca Julia ve Mandelbrot kümelerini temel alarak kompleks sistemler incelenmiştir.

CHAOS, BIFURCATION AND FRACTALS IN NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

SUMMARY

In this study, chaos, bifurcation and fractals in nonlinear dynamics are investigated. Theoretical information needed to nonlinear dynamics is given and this information is supplied with examples chosen ecological systems.

In real word we encounter nonlinearity frequently. We live in a word that is so extraordinary diverse in composition, form and function that any standard classification is impossible. Even within our immediate personal universe, we are not at complete liberty to do as we please, because we are inextricably linked to our natural environment, the social and professional intuitions with which we are associated devices that we use. Thus a little push here, a little pull there, and major events can occur, for some the good, and some not so pleasant. In other words, cause and effects are not proportional. A small effect can have significant consequences; conversely, a major effort might yield very little. Such events called nonlinear.

The new theoretical concepts which are gotten the chaos and nonlinear dynamics help us to understand that simple systems get to merge suddenly complex behavior. One of the characteristics of the chaos theory is sensitive dependence of the initial condition known as butterfly effect. This theory also explains that it is impossible to prediction about the behavior of the no periodic systems. In this study we investigate this property in considered systems as changing the system's parameters and initial population.

Another important notion about nonlinear dynamics is the fractals. Actually, fractals are wonderful images which are drawn with computer programs as a result of mathematical equations. These images have quite strange and natural beauty because of following the same rule with a lot of formations in nature. Fractal geometry composes one of the important parts of the chaos. Furthermore, fractals have fractional dimension known as fractal dimension.

In the first chapter of this study, basic definitions and examples about nonlinear dynamics systems and dynamical behavior are given and made phase space analyses the discussed model systems.

Chapter 2 deals with no periodicity and chaos. We discuss how periodic points change as the system is change (bifurcation). Also, equilibrium points and sensitive dependence of initial condition of the three dimensional nonlinear population model systems are analyzed.

Chapter 3 deals with fractals and some complex dynamics such that Mandelbrot set. In this section we investigate fractal dimension of some image.

1. NONLİNEERLİK

Bilimsel konulara giriş amacıyla kullanılan ders kitapları, iyi tanımlanmış, harici koşullar altındaki doğal bir sistemin tek bir yolu takip edeceği ve bu koşullar altındaki önemsiz bir değişimin sistemin tepkisinde, yine aynı şekilde, önemsiz bir değişime neden olacağı fikri üzerine kurulmuştur. Lineer ilişkiler grafik üzerinde bir doğru olarak ifade edilir ve bu ilişkilerin mantığını anlamak kolaydır.

Nonlinear sistemler genellikle çözüme elverişli değildir. Akışkan ve mekanik sistemlerde, nonlinear şartlar, genellikle insanların konuyu basite indirip kolay anlaşılır hale getirmek istedikleri zaman devre dışı bırakmak istedikleri özellikler arasındadır. Bu tür sistemlerdeki karmaşık ilişkiler nonlinearliğin hesaplanmasını zorlaştırmaktadır; aynı zamanda da lineer sistemlerde hiçbir zaman bulunmayan bir davranış biçimi zenginliği yaratmaktadır [1].

1.1.Nonlinear Sistemler

Bir dinamik sistem iki bileşenden ibarettir: sistemin nasıl geliştiğini belirten “dinamik” ya da bir kural ve bir başlangıç koşulu ya da sistemin başladığı durum. Doğal bir olayı ya da bir dinamik sistemi tanımlayan en başarılı kurallar sınıfı diferansiyel denklemlerdir[2].

Etrafımızdaki hareketlerin bazıları, bir saat sarkacının sallanması gibi, düzenlidir, kolaylıkla anlaşılır ve ifade edilebilir. Fakat bazıları ise, bir şelalenin akışı gibi, düzensizdir ve daha önce belirtilen kurallara aykırı olarak ortaya çıkarlar. Matematikçi Henri Poincare(1892) bu tür problemlerin gerçek kaynağını inceleyen ilk bilim adamıdır. Bu yüzyılın başlarında Poincare, “Science and Method” adlı makalesinde şöyle yazmıştır[3]:

“Dikkatimizden kaçan çok küçük bir sebep, görmezden gelemeyeceğimiz çok büyük bir etkiye neden olabilir. Eğer doğanın kurallarını ve başlangıç aşamasında evrenin durumunu kesin olarak bilseydik, sonraki herhangi bir zamanda evrenin durumunu tam olarak tahmin edebilirdik. Doğa kanunlarının bizim için artık hiçbir gizliliğinin

kalmadığı bir durumda bile başlangıç durumunu yaklaşık olarak bilmemiz, bir sonraki durumu tahmin etmede bize imkân verirse, kurallarla yönetilen bir olayın tahmin edilebildiğini söyleyebiliriz. Fakat bu anlattığımız gibi değildir. Başlangıç koşullarındaki küçük farklılıklar sonuçta çok büyüklerini üretir. Başlangıçtaki küçük bir hata sonuçta büyük bir hataya sebep olacaktır. Böylelikle tahmin yapmak imkânsız hale gelir ve biz tesadüfî bir olaya sahip oluruz...”

Bir nonlinear dinamik sistemi tanımlamak için ilk olarak bir lineer sistem örneğini inceleyelim. Lineer bir dinamik sistem doğrusal olarak orantılı olan bir dinamik kurallar ile sistem değişkenlerinden oluşur. Lineer sistemler, problem parçalara bölünerek ve sonra tüm çözümü inşa etmek için bu parçalar bir araya getirilerek analiz edilebilir. Örneğin aşağıda verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x \quad (1.1)$$

Bu diferansiyel denklem ile tanımlanan dinamik sistem lineerdir, çünkü tüm terimleri x' in doğrusal fonksiyonudur. x 'in 2. türevi $-x$ ile orantılıdır. Bu lineer diferansiyel denklemi çözmek için, x in t ye göre ikinci türevinin $-x'$ e eşit olduğu $x(t)$ gibi bir fonksiyon bulmalıyız. Bu durumda olası iki çözüm:

$$x_1(t) = \sin t \text{ ve } x_2(t) = \cos t \text{ dır ve}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -\sin t = -x_1(t) \text{ ve} \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -\cos t = -x_2(t) \quad (1.3)$$

Böylece x_1 ve x_2 (1.1) lineer denklem sistemini sağlar. Diferansiyel denklem lineer olduğu için bu iki çözümün toplamı $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ da bir çözümdür. Bunun doğruluğunu gösterilirse:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) + \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -[x_1(t) + x_2(t)] = -x(t) \quad (1.4)$$

Bu yöntemle, bulunan herhangi bir çözümden yeni bir çözüm elde edilebilir. Lineer diferansiyel denklemlerin bu özelliği “katlama prensibi (principle of superposition)” olarak adlandırılır.

Şimdi aynı metodu nonlinear bir sisteme uyguladığımızda neler olacağını inceleyelim. Aşağıda verilen, 2. mertebeden nonlinear diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^2 \quad (1.5)$$

Bu diferansiyel denklemin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ gibi iki farklı çözümünün bulunabildiğini varsayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) \\ &\neq -(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) \\ &= -(x_1 + x_2)^2 \\ &= -x^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Görüldüğü üzere, nonlinear denklemin çözümlerinin toplanmış hali yeni bir çözüm değildir. Bundan dolayı katlama prensibi nonlinear sistemlerde geçersizdir.

Geleneksel olarak bir diferansiyel denklem, denklemi sağlayan bir fonksiyon bulunarak çözülür ve belirli bir başlangıç koşulu ile sistemin yörüngesi belirlenir. Ayrıca, bir sistemin kapalı formdaki çözümünde başlangıç koşullarında yapılan küçük bir değişimin sistemin öngörülen yörüngelerinde orantılı bir değişim üreteceği beklenir. Fakat kaotik bir sistemde birbirine çok yakın iki başlangıç koşulu alınsa bile uzun süreli yörüngelerde büyük değişimler meydana gelebilir [3].

1.2.Dinamik Sistemler

Sistem kavramını, karşılıklı etkileşim içinde olan şeyler(bireyler veya nesneler) ve bunların arasındaki ilişkilerin anlaşılması olarak tanımlanabilir. Sistemler modellenabilir ve bu modeller orijinal sistemin davranışını deneysel olarak tekrarlayarak incelemekte kullanılır. Örneğin, doğadaki türler arasındaki etkileşimin modellenmesi bir sistemdir.

Dinamik sistem, zaman içinde değişen bir sistem olarak tanımlanır. Dinamik sistemler lineer ya da nonlinear olabilir. Bilindiği gibi doğrusal kavramı, basit bir şekilde, matematiksel modellerin grafik üzerinde doğru biçiminde gösterilebilmelerini belirtir. Doğrusal sistemler klasik bilimde, gerçeği iyi bir şekilde açıklamaktan ziyade, basit olmaları nedeniyle büyük ilgi görmüş ve yaygın olarak kullanılmıştır. Biri bağımsız diğeri ise bağımlı değişken olan x ve y gibi iki değişkenli doğrusal model basit olmakla birlikte çoğu zaman gerçekçi değildir. Ayrıca sırf basitleştirme adına, x ve y 'yi diğer değişkenlerden soyutlayarak çözümlemeye çalışsak, bilgi kümemizde sadece iki değişken olduğunu varsaysak ve modelimizde x 'i sürekli arttırdığımızda y 'de aynı oranda artsa bile; gerçek hayatta bunlar geçerli olmayacaktır.

Doğrusal olamayan sistemlerde girdi ve çıktı arasında bir orantı yoktur. Bir doğrusal modelden sapmalar, klasik bilimde deneysel “hata”lar veya gürültü(noise) olarak ele alınır. Fakat yapılan çalışmalar, deneysel hataların önemli bilgiler verebileceğini göstermektedir.

Bir dinamik sistem iki kısımdan oluşur:

- i) Reel ya da kuramsal bir sistemin kesin durumunu tanımlayan “ durum vektörü” ve
- ii) Sistemin, verilen geçerli durumundan, zamanın bir sonraki anındaki durumunu söyleyen “fonksiyon”.

1.2.1. Durum Vektörleri

Yukarı atılan bir topun durumu iki sayı kullanılarak tanımlanabilir: Topun yerden yüksekliği h ve hızı(yukarı doğru) v . h ve v sayıları biliniyorsa topun akıbeti tamamıyla belirlenebilir. (h, v) sayı çifti topun durumunu tam olarak tanımlayan vektör olduğundan dolayı sistemin durum vektörü olarak adlandırılır. Sembolik olarak $\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir [1].

Kısaca durum vektörü, bir sistemin geçerli durumunun sayısal bir ifadesidir. Sistemin durumu vektördür ve sembolik olarak x ile ifade edilir.

1.2.2. Bir Sonraki An: Ayrık Zaman

Bir dinamik sistemin ikinci kısmı sistemin zaman içinde nasıl değiştiğini gösteren bir kuraldır. Bir diğer deyişle, sistemin geçerli olan(şu andaki) durumu verildiğinde, bir sonraki zaman diliminde sistemin durumunun ne olacağını bildirir.

Zaman bir ipteki boncuklar gibi, birbirini takip eden ayrık parçaların bir sıralanışıdır

$$x(t+1) = kx(t) \quad (1.7)$$

Sistemin durumu zamanla değiştiğinden dolayı, herhangi bir andaki durumu tanımlayan bir notasyona ihtiyaç duyulur. t zamanındaki sistemin durumu $x(t)$ ile tanımlanır. (1.7) eşitliği, sistemin başlangıç durumu belirsiz olduğundan, dinamik bir sistemin tam bir tanımı değildir. Bu nedenle sistemin tam tanımı:

$$x(t+1) = kx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.8)$$

şeklinde. x_0 sistemin 0 anındaki durumunu, yani başlangıç durumunu tanımlar.

(1.8) eşitliğini tüm ayrık zamanlı sistemlere uygulanabilir şekilde genelleleyebiliriz. $x \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü ve $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için;

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (1.9)$$

şeklinde yazılabilir. (1.8) eşitliğinde $n=1$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = kx$ dır. $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu altında (1.9) eşitliğini göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x(0)) = f(x_0) \\ x(2) &= f(x(1)) = f(f(x_0)) \\ x(3) &= f(x(2)) = f(f(f(x_0))) \\ &\vdots \\ x(t) &= f(x(t-1)) = f(f \dots (f(x_0))) \end{aligned} \quad (1.10)$$

şeklinde t zamanındaki x değerini hesaplayabiliriz. $f(f(x))$ fonksiyonunu $f^2(x)$, $f(f(f(x)))$ fonksiyonunu $f^3(x)$ ve genel olarak $f^k(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_k$

şeklinde yazabiliriz.

1.2.3. Bir Sonraki An: Sürekli Zaman

Birçok sistem akıcı ve düzgün bir şekilde ilerleyen bir zaman ile daha iyi tanımlanabilir. Havaya atılan top örneğinde topun bir anlık durumu $x = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$ durum vektörü ile verilmekte idi. Fakat sürekli bir zamanda bir sonraki anda topun durumunun ne olacağı sorusu uygun değildir. Zaman sürekli ilerlediğinden dolayı bir sonraki an yoktur. Sürekli bir zamanı tanımlamak amacı ile kullanılan t negatif olmayan reel bir sayıdır ve sistem $t = 0$ da başlar.

Zamanın bir sonraki anı için bir kural yazılamadığından, verilen herhangi bir anda sistemin nasıl değişeceği tanımlanır. İlk olarak; top yukarı doğru v hızına sahip olduğundan, hız tanımından $\frac{dh}{dt} = v$ elde edilir. İkinci olarak; yerçekimi kuvveti

topu aşağı doğru çekeceğinden, g pozitif bir sabit olmak üzere $\frac{dv}{dt} = -g$ elde edilir.

Böylece sistemdeki değişim aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h'(t) = v(t) \quad (1.11-1)$$

$$v'(t) = -g \quad (1.11-2)$$

Matrisel formda gösterilirse;

$$\begin{bmatrix} h'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$x' = f(x) \quad (1.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $f(x) = Ax + b$ dır ve $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ve $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$ sabit vektörüdür.

Gerçekte, (1.13) eşitliği tüm sürekli zamanlı dinamik sistemler için genel bir formdur. Sürekli zamanlı dinamik bir sistem $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum vektörüne ve bir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna sahiptir ve iyi tanımlı olabilmesi için bir $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu verilmelidir.

1.2.4. Dinamik Sistemlere Ait Örnekler:

1.2.4.1. Bakteriler

Bir kavanozun içinde besleyici bir takım maddelerle birlikte bazı bakterilerde vardır. Zaman içerisinde, bakteriler ürerler ve ölürlür. b bakterilerin üreme oranı, p de ölüm oranı olsun. Buradan bakteri popülasyonunun büyümesi $b-p$ kadar olur. Bunun anlamı; eğer kavanozda bakteri var ise, bakteri sayısındaki artış oranının $(b-p)x$ olmasıdır. Yani; $r = b - p$ iken

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \text{dır.} \quad (1.14)$$

$t = 0$ anında x_0 bakteri ile başlarsak;

$$x(t) = e^{rt} x_0 \quad \text{olur.} \quad (1.15)$$

Bu formül, $t = 0$ anında x_0 bakteri olduğunu ve sayının üssel olarak arttığını, fakat zaman ilerledikçe bakteri sayısının son derece büyük olacağını ifade eder. Yani,

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \text{basit modeli uzun dönemde gerçekçi değildir.}$$

Şimdi, sabit üreme oranının b olduğunu yani, x adet bakteri varsa bunun bx ile orantılı şekilde artacağını ve ölüm oranının px olduğunu varsayalım, böylece, eğer x adet bakteri varsa px^2 ile orantılı olacak şekilde azalacaktır. Bu iki ifade birleştirilirse;

$$\frac{dx}{dt} = bx - px^2 \quad (1.16)$$

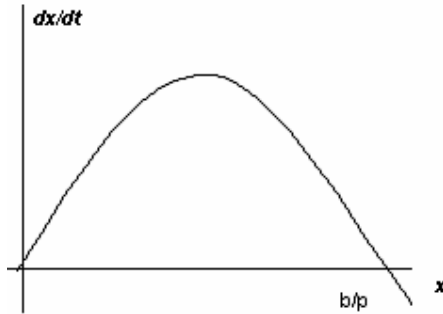
dinamik sistemini elde ederiz

“Bu modelde kendi kendini besleme(self-sustainig) özelliği var mıdır?” sorusunu ele alalım. $b\tilde{x} - p\tilde{x}^2 = 0$ eşitliğini sağlayan bir $\tilde{x}$ sayısı var mıdır diye arıyoruz. Bu özel seviyede üreme/ölüm oranı dengededir (çünkü $\tilde{x}$, $dx/dt=0$ yapar) ve popülasyon ne artar ne de azalır.

(1.16) eşitliğinin sağ tarafını sıfıra eşitlersek:

$$\frac{dx}{dt} = bx - px^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ya da } x = \frac{b}{p}$$

İki adet kendi kendini besleme seviyesi olduğunu görürüz: $\tilde{x} = 0$ ve $\tilde{x} = b/p$. Elbette ki, bu iki değer $bx - px^2 = 0$ ikinci derece denkleminin iki köküne karşılık gelir. Bu eşitlik bir paraboldür ve grafiği Şekil 1.1 de gösterildiği gibidir.



Şekil 1.1: (1.16) eşitliğinin grafiği

İlk olarak, $\tilde{x} = 0$ ’ı göz önüne alalım. Bu kendi kendini besleme noktasıdır. Bu durumda bakteri yoktur, bu yüzden doğan ya da ölen bakteri de yoktur. Kavanozda bundan sonra da bakteri olmayacaktır. Tabii ki en ufak bir kirlenme ile ($x > 0$ fakat b/p den küçük), $\frac{dx}{dt} = bx - px^2 > 0$ olur (Şekil 1.1). Böylece, bakteri sayısı kavanoz kirlenir kirlenmez artmaya başlayacaktır. Bundan dolayı $\tilde{x} = 0$ denge noktası kararsızdır. Bu denge noktasında uzak, önemsiz pertürbasyonlar dengeyi bozacaktır.

$\tilde{x} = b/p$ denge noktasını göz önüne alalım. Bu popülasyon seviyesinde bakteriler $b\tilde{x} = b(b/p) = b^2/p$ oranında ürer ve $p\tilde{x}^2 = p(b/p)^2 = b^2/p$ oranında ölür, böylelikle doğum ve ölüm oranları kesinlikle dengededir. x popülasyonunun $\tilde{x} = b/p$ in çok az üstünde ya da altında olduğu durumlarda ne olacağını inceleyelim: Eğer x b/p den çok az büyük ise, $\frac{dx}{dt}$ in negatif olduğu görülür. (Şekil 1). Böylece bakteri sayısı b/p in soluna ve çok yakın düşecektir. Tersine, x , b/p den çok az küçük ise $\frac{dx}{dt}$ nin pozitif olduğu görülür, bu yüzden popülasyon b/p değerinde, artma eğiliminde olacaktır. b/p nin kararlı denge olduğu görülür. $\tilde{x} = b/p$ den uzaktaki küçük bir pertürbasyon b/p ye geri dönmek için kendini doğrultacaktır.

1.2.4.2. Av-Avcı İlişkisi

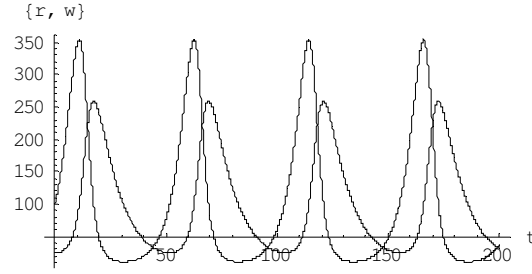
Bir önceki örnekte, sadece tek bir türü içeren bir sistemin basit bir modelini inceledik. Şimdi tavşan ve onu yiyerek beslenen kurt popülasyonlarından oluşan karmaşık bir modeli ele alalım. Tavşanlarda ki üreme, a pozitif sabiti için, $dr/dt = ar$ şeklinde kendi kendilerine olacaktır. Diğer yandan, kurtların beslenmesi için gerekli olan tavşan sayısında azalma olduğunda, yani kıtlık durumunda, kurt popülasyonu, pozitif b katsayısı için $dw/dt = -bw$ şeklinde azalacaktır.

Bu iki canlı türü aynı ortama bırakıldığında kurtlar tavşanları yiyecektir ve sonuçta ortamda daha çok kurt, daha az tavşan bulunacaktır. Kurt popülasyon miktarını w , tavşan popülasyon miktarını r ile gösterirsek, tavşan sayısı ya da kurt sayısı arttıkça bu iki türün karşılaşma olasılıkları da artacağından dolayı, tavşan popülasyonundaki kayıp ve kurt popülasyonunda ki artış rw ile orantılıdır. Etkileşim içinde olan bu iki türün popülasyonlarındaki değişimi tanımlayan denklemler, a , b , g , h pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{dr}{dt} = ar - grw \quad (1.17-a)$$

$$\frac{dw}{dt} = -bw + hrw \quad (1.17-b)$$

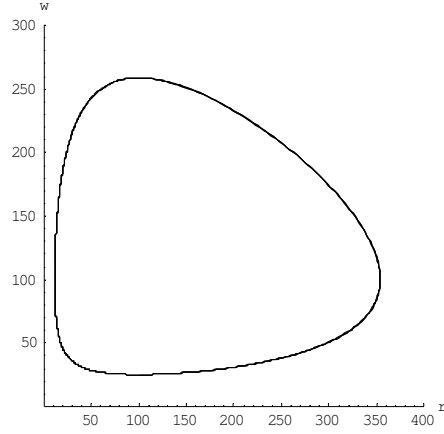
$a = 0.2$, $b = 0.1$, $g = 0.002$, $h = 0.001$, $r_0 = 100$, $w_0 = 25$ koşulları altında yukarıdaki diferansiyel denklem sistemi sayısal yaklaşım ile çözülebilir



Şekil 1.2: Av ve avcı popülasyonlarının zaman içerisindeki değişimi. Üstteki eğri av(tavşan) ve alttaki eğri avcı(kurt) popülasyonunu göstermektedir.

Şekil 1.2 incelenirse, tavşan ve kurt popülasyonlarının süreç içerisinde dalgalandığı görülür. Popülasyon hareketleri periyodiktir, her 50 birim zamanda model tekrarlanmaktadır. Kurt popülasyonu azaldığında, tavşan popülasyonu yükselmekte; sonrasında, besin (yani tavşan) daha bereketli hale geldiğinde kurt popülasyonu artmaktadır. Fakat kurt popülasyonu arttığında ise kurtlar çok fazla tavşanı avlamakta ve tavşan popülasyonu azalmaktadır. Bu durum, kurdun besin maddesinde kıtlığa ve kurt popülasyonunda azalmaya neden olacaktır. Sonuç olarak, kurt sayısı tavşan popülasyonunu yeniden eski haline getirecek şekilde yeterince azaldığında çevrim yeniden başlayacaktır.

Bu sürecin doğal çevrimini tam anlamıyla değerlendirmek için Şekil 1.3 deki gibi x ekseninin tavşan sayısını, y ekseninin kurt sayısını gösterdiği bir grafik üzerinde tavşan ve kurt popülasyon büyüklükleri çizilebilir. Faz diyagramı olarak adlandırılan eğri üzerindeki her bir nokta sistemin bir durumunu gösterir. Sistemin durumu eğri etrafında saatin ters yönünde hareket eden bir noktadır [1].



Şekil 1.3: Av-avcı modelinin faz diyagramı. Yatay eksen av(tavşan) sayısını, düşey eksen avcı(kurt) sayısını göstermektedir.

1.3. Faz uzayı

Faz uzayı bir dinamik sistemin mümkün olan tüm durumlarının birleşimidir. Bir faz uzayı sonlu (ideal bir yazı-tura atımında iki durum söz konusudur: yazı ve tura), sayılabilir sonsuz (durum değişkenleri tamsayıdır) ya da sayılamayan sonsuz (durum değişkenleri reel sayıdır) olabilir. Faz yörüngeleri aynı olayın çeşitli başlangıç noktalarından geçen hallerini temsil eder.

Bir başlangıç değer probleminin çözümü ile faz uzayına iz düşümü alınan yol dinamik sistemin yörüngesi (trajectory, orbit) olarak adlandırılır. Durum değişkenleri reel değerler aldığıında, ayrık zamanlı bir sistemin yörüngesi noktalar dizisi iken sürekli zamanlı bir sistemin yörüngesi ise eğridir.

Genellikle iki boyutlu düzlem ya da üç boyutlu uzayda çalışılır ve kartezyen koordinatlarda x , y ve z doğrultularına sahip olan bir noktanın durumu özelleştirilir. Dinamik bir sistemle uğraşırken bu özelleştirme yetersizdir, çünkü dinamik sistemlerde noktalar bir yere sabitlenmiş olarak kalmazlar, hareket halindedirler yani; noktanın pozisyonu zamana bağlıdır. Bunu $[x(t), y(t), z(t)]$ şeklinde yazarak açıklarız. Dinamikler veya da hareket, aşağıdaki denklem kümesi ile belirtilir:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f_1(x, y, z) \quad (1.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = f_2(x, y, z) \quad (1.19)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = f_3(x, y, z) \quad (1.20)$$

Durum değişkenleri ve onların türevlerinin oluşturduğu uzaya faz uzayı denir. Zaman ilerlerken durum uzayındaki bir nokta yörünge olarak adlandırılan bir yol izler [4].

Durum uzayındaki “denge noktası” (kritik nokta olarak ta adlandırılır) notasyonu nonlinear sistemlerin dinamiklerini anlamada önemli bir rol oynar. Sadece iki ya da daha fazla boyutlu durum uzayında meydana gelebilen periyodik hareket limit çevrim olarak adlandırılır. Kararlılık ya da kararsızlık terimleri, denge nokta ya da limit çevrimin komşuluğunda yörüngelerin nasıl davrandığını anlamak için çok önemlidir.

Zaman ilerlerken durum uzayındaki bir başlangıç noktası bir yörüngeyi takip eder. Hareket periyodik ise yörünge kendi üzerine kapanır. Bu şekildeki kapalı periyodik hareket “çevrim” olarak adlandırılır. Bir diğer başlangıç noktası başka bir yörüngenin parçası olacaktır. Farklı başlangıç noktalarından meydana gelen çok sayıdaki yörünge topluluğu sistem için faz portresi meydana getirir.

Tanım (Serbestlik derecesi):Dinamik sistem teorisinde serbestlik derecesi, sistemin dinamik durumunu belirtmek gerekli olan bağımsız değişkenlerin sayısı olarak tanımlanır [5].

1.3.1. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem ile Tanımlanan Sistem

Serbestlik derecesi 3 olan bir sistemi göz önüne alalım. Bu tür bir sistemi tanımlamak için x , y , z gibi üç adet durum değişkenine ihtiyaç duyulur. sistemin dinamiklerinin birinci mertebeden üç adet diferansiyel denklem ile ifade edildiğini varsayalım. Yani; denklemler sadece, x , y , z 'nin zamana göre birinci mertebeden türevlerinden ibaret olsun:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.21)$$

f , g , h fonksiyonları x , y ve z değişkenlerine bağlıdır. Zaman değişkeni t tek başına bu fonksiyonlarda gözükmez. Bu durumda sistemin otonom olduğu söylenir. Sistemin

zamana bağılı hareketi üç boyutlu durum uzayında, koordinatları $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ olan bir noktanın hareketinin izlenmesi ile elde edilir.

f , g , h fonksiyonları zaman değişkeni içeriyorsa (1.21) sistemi otonom değildir. Serbestlik derecesi 2 olan otonom olmayan bir sistem aşağıdaki formdadır:

$$\dot{x} = f(x, y, t) \quad (1.22-a)$$

$$\dot{y} = g(x, y, t) \quad (1.22-b)$$

Yeni bir değişkenle, yukarıdaki denklemler otonom hale getirilebilir:

$$\dot{z} = \frac{dt}{dt} = 1 \quad (1.23)$$

ve dinamik denklemler

$$\dot{x} = f(x, y, z) \quad (1.24-a)$$

$$\dot{y} = g(x, y, z) \quad (1.24-b)$$

$$\dot{z} = 1 \quad (1.24-c)$$

haline dönüşür.

Dinamik sistemler için birinci mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmasının temel nedeni; bu formdaki sistemlerin denge noktalarını tespit etmemize olanak sağlamasıdır. Denge noktaları bu sistemlerin dinamiklerinde önemli rol oynar. Denge noktaları; durum değişkenlerinin tümünün zamana göre türelerinin sıfır olduğu durum uzayındaki noktalar olarak tanımlanırlar. Böylelikle standart formdaki bir denklem sisteminin denge noktaları

$$f(x, y, z) = 0$$

$$g(x, y, z) = 0$$

$$h(x, y, z) = 0$$

olarak tanımlanır. Bu üç cebirsel denklemin çözümü ile sistemin denge noktaları bulunur [5].

1.3.2. Kesişmezlik Teoremi

Durum uzayındaki denge noktası ve yörünge çeşitlerini incelemeden önce temel ve önemli bir teoremi verelim:

Teorem: Sonlu periyotlu zamanda, durum uzayının iki ayrık yörüngesi kesişmez ya da tek bir yörünge sonraki zamanlarda kendini kesmez.

Ayrık yörünge; yörüngelerden birinin diğer yörüngelerden herhangi birinin noktalarında başlamayacağı anlamındadır.

1.3.3. Bir Boyutlu Durum Uzayı

Bir boyutlu sistem x olarak adlandırılan tek bir durum değişkenine sahiptir. Dinamik çeşitlilik açısından çok ilginç bir sistem değildir. Bir boyutlu durum uzayı için dinamik denklem aşağıdaki formdadır:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.25)$$

Durum uzayı sadece x ekseninden oluşan bir doğrudur. Denge noktaları $\dot{x} = 0$ için karşılık gelen x değerleridir. Eğer yörünge denge noktasında meydana gelmişse orada kalır.

1.3.4. İki Boyutlu Durum Uzayı

Dinamik sistem x, y gibi iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklem çiftinden oluşur:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sistemin davranışı x - y durum uzayında yörüngelere bakılarak izlenebilir. $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sistemin denge noktaları olmak üzere;

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 0 \\ g(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

eşitlikleri sağlanır.

1.3.5. Av-Avcı Modeli

Ekoloji bilimi genel olarak, türlerin popülasyon dinamiklerini daha iyi anlayabilmek için çalışmalar yapmaktadır. Besin zinciri dinamikleri hakkında, bir av ve bir avcıdan oluşan iki türü kapsayan basit bir modeli inceleyerek fikir sahibi olabiliriz. Av-avcı dinamiklerinin en geniş kapsamlı ele alındığı model Lotka-Volterra av-avcı modelidir. Bu model, aşağıda verildiği gibi, iki diferansiyel denklemden oluşan bir sistemdir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by - \lambda x) \\ \dot{y} &= y(cx - d - \mu y)\end{aligned}\tag{1.28}$$

Bu modelde t anındaki av popülasyonu $x(t)$, avcı popülasyonu ise $y(t)$ ile gösterilmiştir ve a, b, c, d, λ, μ sistemin parametreleridir. a ve c , her iki popülasyonda çok az olduğunda, x ve y türlerinin üreme oranıdır. Pozitif veya negatif olabilir. Negatif olmayan b ve d sabitleri popülasyonların kendileriyle etkileşimlerini ölçer. $b = d = 0$ ise x ve y için Malthusian büyüme oranının sıfır olduğu varsayılır. Pozitif ise büyümenin lojistik denklem ile modellendiği söylenir. λ ve μ sabitleri ise türler arasındaki etkileşimi ölçer.

Diferansiyel denklemlerin oldukça karmaşık olan bu sistemi, av ve avcı popülasyonlarının zamanla nasıl değişeceğini ve birbirleriyle etkileşimlerini tanımlar.

1.3.6. Durağan Hal ve Denge Eğrileri

Eğer sistem bir şekilde kendini durgun durumda bulursa, sonsuza kadar bu durumda kalacaktır. Durağan durumla ilgili bilinmesi gereken çok önemli iki gerçek vardır.

2. Dinamik sistemler durağan bir durumdan daha fazlasına sahip olabilirler,
3. Durağan durumların hepsi kararlı durağan durum değildir

Sistem kararlı bir durağan durumda ise ve bu durağan durumun biraz uzağında pertürbe edilirse, sistem durağan duruma geri dönecektir. Durağan durumda değişkenler (x ve y) zamanla değişmez ve (1.28) eşitlikleri sıfıra eşitlenerek bulunur.

$$\dot{x} = 0$$

- $x = 0$ ya da
- $a - by - \lambda x = 0$

(1.29)

$$\dot{y} = 0$$

- $y = 0$ ya da
- $cx - d - \mu y = 0$

(1.30)

Yukarıdaki $\dot{x} = 0$ ya da $\dot{y} = 0$ eşitlikleri denge eğrileri (nullclines, isoclines) olarak adlandırılır. Bu doğrular üzerindeki tüm noktalarda x ve y dengededirler. Her iki eğrinin kesişim noktası da, tüm diferansiyel denklem sisteminin dengesini göstermektedir. Durağan durum, denge eğrileri için, herhangi bir noktada mevcuttur. Bu problemde, üç noktada durağan durum olma potansiyeli vardır:

- $x = 0, y = 0$
- $x = \frac{a}{\lambda}, y = 0$
- $x = \frac{\frac{a\mu}{b} + d}{c + \frac{\mu\lambda}{b}}, y = \frac{\frac{ca}{\lambda} - d}{\mu + \frac{bc}{\lambda}}$

(1.31)

Faz uzayında alınan herhangi bir nokta av(x) ve avcı(y) popülasyonlarını gösterir ve her bir nokta iki doğrultu okuna sahiptir. İlk doğrultu oku(sağ ya da sol) av popülasyonunun arttığını ya da azaldığını ifade eder ($\dot{x} > 0$ ya da $\dot{x} < 0$), ikinci doğrultu oku ise avcı popülasyonundaki değişimi ifade eder. Her bir “isosector” üst ya da altında ve sağ ya da solunda bir doğrultu oku vardır. İsosector, denge eğrileri ile sınırlı, faz düzleminde bir uzaydır.

1.3.7. Denge Noktası Bulma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.32)$$

diferansiyel denklem sistemini en genel formda;

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1.33)$$

olarak ifade edersek; $F(\tilde{x})=0$ koşulunu sağlayan dinamik bir sistemin $\tilde{x}$ sabit vektörü denge noktası olarak adlandırılır. $i = 1, \dots, N$ için

$$\left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{\tilde{x}} = 0 \quad (1.34)$$

denkleminin sonucu olarak, $x(t) = \tilde{x}$ sabit fonksiyonu dinamik sistemin bir çözümüdür. Genellikle, denge noktaları civarındaki sistemin davranışı ile ilgileniriz ve denge noktalarının civarındaki yörüngeler bu noktalara (1) yakınsıyor (asimptotiksel kararlılık), (2) ıraksıyor (kararsızlık) ya da (3) nokta civarında bir yörüngede kalıyor (kararlı fakat asimptotiksel kararlı değil) olabilir. Denge noktaları, ayrıca, kritik nokta olarak ta adlandırılırlar. Kritik nokta olmayan bir noktadan başlayan bir sistem sonlu zaman sonra kritik noktaya ulaşamaz. Ayrıca, kritik nokta olmayan en az bir noktadan geçen yörünge periyodik çözüme karşılık gelen bir kapalı eğri olmadıkça kendini kesmez [5].

1.4. Kararlılık (Stabilite) Analizi

İki boyutlu bir sistemin stabilite tanımları aşağıda verilmiştir:

Tanım(Stabilite): $u = (x(t), y(t))$ durum vektörünü tanımlasın. $P_0 = (x_0, y_0)$ kritik nokta ve $u_0(t) = (x(t_0), y(t_0))$ durum vektörünün başlangıç değeri olsun. Pozitif $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\|u(0) - u_0\| \leq \delta_\varepsilon$ olacak şekilde, $\|u(t) - u_0\| \leq 0$ koşulunu sağlayan δ_ε pozitif sayısı vardır.

Yukarıdaki tanım, kritik nokta civarında başlayan bir yörüngeyi yine bu civarda kalacağı anlamındadır.

Tanım(Asimptotiksel stabilite): $t \rightarrow \infty$ iken, kritik noktaya yeterince yakın başlayan tüm yörüngeler bu noktaya asimptotiksel olarak yaklaşıyorsa kritik noktaya asimptotiksel kararlıdır denir. Bunun anlamı, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u(0)\| = 0$ olmasıdır.

Bu durumları bir örnek ile görmeye çalışalım:

$f(x) = x^2$ olsun ve ayrık zamanlı bir sistem düşünelim:

$$x(t+1) = f(x(t)) = [x(t)]^2 \quad (1.35)$$

Bu fonksiyonu ötelediğimizde ne olacağını görelim:

Sistemin iki adet denge noktası vardır: 0 ve 1 ($f(x) = x$ yani $x^2 = x$ denkleminin çözümleri). Eğer ötelemeye 0 ya da 1 noktalarından başlarsak sistemin ilerlemediğini görürüz. Öteleme işlemine ilk olarak 0'a çok yakın bir sayı olan 0.1 sayısı ile başlayalım. x^2 'yi ötelersek görürüz ki;

$$0.1 \rightarrow 0.01 \rightarrow 0.0001 \rightarrow 0.00000001 \rightarrow \dots \quad (1.36)$$

$t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow 0$ olduğu açıktır. Bu durumda sistemin kararlı ya da sistemi x_0 denge noktasına çok yakın bir noktadan başlattığımızda, x_0 denge noktasına doğru çekildiğinden, çekici denge noktası olduğunu söyleriz.

Şimdi diğer denge noktası olan 1'i inceleyelim. Hesaplamaya, ilk olarak 1'e çok yakın bir nokta olan 1.1 noktasından başlayalım. Bu durumda;

$$1.1 \rightarrow 1.21 \rightarrow 1.4641 \rightarrow 2.14358881 \rightarrow \dots \rightarrow 445.7916 \rightarrow \dots \quad (1.37)$$

olduğunu görürüz. $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow \infty$ olduğu açıktır. 0.9 noktasından başlarsak;

$$0.9 \rightarrow 0.81 \rightarrow \dots \rightarrow 0.0012 \rightarrow \dots \quad (1.38)$$

Bu durumda ise $x(t) \rightarrow 0$ dır. 1'in yakınındaki bir noktadan başladığımız sistemin 1'den uzağa ötelenme eğiliminde olduğunu görüyoruz bu durumda 1'in kararsız denge noktası olduğunu söyleriz [1].

Bir sistemin sahip olacağı denge noktalarının türlerini tanımlarsak:

(1) Kararlı denge noktası:

$\tilde{x}$ denge noktası civarındaki tüm x_0 başlangıç değerleri için sistem bu civarda kalır, ayrıca; $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow \tilde{x}$ dır.

(2) Ucu ucuna (Marginally) kararlı:

$\tilde{x}$ yakınındaki tüm x_0 başlangıç değerleri için, sistem $\tilde{x}$ yakınında kalır, fakat $\tilde{x}$ 'e yakınsamaz.

(3) Kararsız denge noktası:

$\tilde{x}$ denge noktası kararlı ya da ucu ucuna kararlı değil ise kararsız olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle, $\tilde{x}$ 'in çok yakınındaki x_0 başlangıç değerleri için sistem $\tilde{x}$ 'den uzaklaşır.

Bu durumları açıklamak için aşağıda verilen dört örneği göz önüne alalım. Her bir sistem A 'nın 2×2 'lik bir kare matris olduğu $\dot{x} = Ax$ formundadır ve $\tilde{x} = 0$ denge noktası dört örnek için de vardır.

1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda sistemin çözümü;

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} x_0 \quad (1.39)$$

olur. $t \rightarrow \infty$ iken e^{-2t} ve e^{-t} , 0'a gider, dolayısıyla 0 kararlı denge noktasıdır. Eğer biz bu sisteme 0'ın yakınındaki herhangi bir x_0 vektöründen başlarsak, sistem 0'a yakınsayacaktır. (Gerçekte, sıfıra yakınsaması için x_0 'ı, 0'ın bir civarından seçmek gereksizdir. Sistem, nereden başladığımızın önemi olmaksızın, daima sıfıra yakınsayacaktır. Bu tür denge noktalarına global kararlı deriz.)

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Sistemin çözümü aşağıdaki formdadır:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} x_0. \quad (1.40)$$

$t \rightarrow \infty$ iken e^{2t} ve e^t , sonsuza gider, dolayısıyla 0 kararsız denge noktasıdır. Sıfıra ne kadar yakın başladığımızın önemi olmaksızın, sistem daima sıfırdan uzaklaşacaktır.

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. Sistemin çözümü;

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} x_0 \quad (1.41)$$

olacaktır. Bu sistemde de 0 denge noktası kararsızdır. Bunun nedeni; a sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere,

$$x_0 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \text{ gibi iki adet başlangıç noktasını göz önüne aldığımızda, } t \rightarrow \infty$$

iken, ilk başlangıç koşulu için $|x(t)| \rightarrow \infty$, ikinci başlangıç koşulu için ise $x(t) \rightarrow 0$ olmasıdır. Bazı noktalar sıfırdan itilirken, bazıları sıfıra doğru çekilmektedir. Sıfıra çok yakın başlamasına karşı sıfırdan uzaklaşan yörüngeler olmasından dolayı bu denge noktası kararsızdır. Sıfıra yakın bazı başlangıç noktaları için sistem sıfıra yakınsa bile, denge noktasının kararsızlığını değiştirmez.

$$4) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \text{ olur. Bu durumda 0 denge noktası ne kararludur ne de}$$

kararsızdır. Kararlı olmadığını görmek için 0 civarında herhangi bir x_0 başlangıç noktası alalım. $t \rightarrow \infty$ iken sistem asla sıfıra yaklaşmaz. 0 denge noktası kararsız da değildir. Kararsız olması için 0 civarında alınan başlangıç noktalarında sistem sıfırdan uzaklaşmalıdır. Açıkçası, 0'dan belirli bir uzaklıkta başlarsak, sistem sıfırdan uzaklaşmayacaktır. Bundan dolayı bu sistem ucu ucuna kararludur.

1.5. Lineerizasyon

Bu bölümdeki amaç, dinamik bir sistemin $\tilde{x}$ denge noktasının kararlı ya da kararsız olduğunu söyleyecek bir metot geliştirmektir.

f fonksiyonu lineer ise, yani; $f(x) = Ax + b$ formunda ise cevap son derece basittir: A 'nın öz değerlerini kontrol ederiz.

İlk olarak bir boyutlu bir sistem (f bir değişkenli fonksiyon) ile başlayıp, yüksek boyutlara genelleştireceğiz.

1.5.1 Bir boyutlu sistem

Bir boyutlu bir durum uzayında üç tür denge noktası vardır:

- (1) Döğümler(sinks-nodes): Denge noktası, yörüngeleri yakınlarına çeker.
- (2) İtici (sources): yörüngeleri yakınlarından iterler.
- (3) Eyer noktaları: yörüngeleri bir yandan çekerken diğeryandan iterler.

Bir boyutlu sistemin, türevinin denge noktasındaki değeri karakteristik değer ya da

öz değeri olarak adlandırılır. Karakteristik değeri λ ile gösterilir; $\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ dır.

Denge noktalarında $f(x)$ 'in türevini hesaplayarak ve denge noktalarının karakteri belirlenir ve bu noktaların civarlarındaki yörüngelerin davranışını saptanabilir.

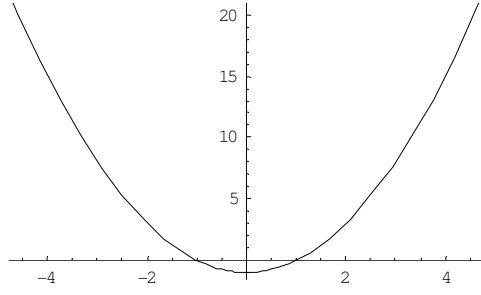
Karakteristik değeri sıfıra eşit olduğunda, denge noktasının karakterini bulmak için $f(x)$ 'in x 'e göre ikinci türevi incelenir. Eyer nokta için, ikinci türev x_0 'ın her iki tarafında da aynı işarete sahiptir. Döğüm nokta ya da itici için ise, ikinci türev, x , x_0 'dan geçerken işaret değiştirir. (Döğüm noktası için solda pozitif, sağda negatif, itici için ise; solda negatif sağda pozitif.)

Fonksiyonun biçimi ya da durumu önemsiz bir şekilde değiştirildiğinde, denge noktası aynı karakterde kalırsa yapısal olarak kararlı olduğu, karakter değiştirirse ya da bu değişiklikler altında tamamıyla yok olursa yapısal olarak kararsız olduğu söylenir[5].

Tablo 1.1: Bir boyutlu sistem için karakteristik değerler.

$\lambda < 0$	Döğüm denge noktası
$\lambda > 0$	İtici denge nokta

$x' = f(x) = x^2 - 1$ olsun. Bu sürekli zaman sisteminin denge noktaları ± 1 dir. Fonksiyonun grafiğı Şekil 1.4 de gösterildiğı gibidir.



Şekil 1.4: $x' = f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği

Denge noktalarının yapısını inceleyelim: Sisteme 1'den çok az büyük bir x_0 değeri ile başladığımızı varsayalım. Bu durumda $f(x) > 0$ olduğundan $x(t)$ artar ve sonsuza kadar da artmaya devam edecektir. Yani; 1'den gittikçe uzaklaşacaktır. Diğer yandan, x_0 , 1'den çok az küçük ise $f(x) < 0$ olacaktır. Bu durumda ise, $x(t)$ azalacak ve ters doğrultuda 1'den uzaklaşacaktır.

Şimdi -1 denge noktasını göz önüne alalım. x_0 değeri, -1 den çok az büyük ise, $f(x) < 0$ olur ve böylece $x(t)$ değeri -1 e doğru azalır. x_0 değeri, -1 den küçük alındığında ise, $f(x) > 0$ olur ve -1 in üstüne doğru artar.

1.5.1.1. Denge Noktası Civarında Taylor Serisi Lineerleştirilmesi

$\dot{x} = f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir denge noktasının yapısını inceleyebilmek için, x_0 denge noktasının bir komşuluğunda, $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisine açılımı kullanılabilir:

x_0 denge noktasında hesaplanan türev değerleri için,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{6} (x - x_0)^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (1.42)$$

Birinci mertebeden daha yüksek mertebeli türevler ihmal edilirse, E hata fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$f(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0) + E(x - x_0) \quad (1.43)$$

$x \rightarrow x_0$ iken $E(x-x_0) \rightarrow 0$ olması beklenir. Hata fonksiyonu $(x-x_0)$ farkından daha küçük olmalıdır. Bunun anlamı; $x \rightarrow x_0$ iken,

$$\frac{E(x-x_0)}{x-x_0} \rightarrow 0$$

olması demektir. (1.30) eşitliğinin her iki tarafını $(x-x_0)$ bölersek;

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = \frac{E(x-x_0)}{x-x_0} \quad (1.44)$$

elde ederiz. Türev tanımından, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ dır ve $x \rightarrow x_0$ iken,

$$\frac{E(x-x_0)}{x-x_0} \rightarrow 0$$

olacaktır [1]. Denge noktasının tanımından (1.43) eşitliğin sağ tarafındaki $f(x_0)$ terimi sıfıra eşittir. Yörüngelerin denge noktasından uzaklığını belirten $\Delta x = x - x_0$, yeni bir değişken olarak tanımlanabilir. Buradan

$$\frac{d}{dt} \Delta x = f'(x_0) \Delta x \quad (1.45)$$

gibi yeni bir denklem elde edilir. Bu ifadenin çözümü; $\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$ olduğunda, yani

λ denge noktasının karakteristik değeri iken, $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ dır.

Buradan görülüyor ki; $\lambda < 0$ olduğunda yörüngeler denge noktasına üssel olarak yaklaşırken (düğüm noktası), $\lambda > 0$ olduğunda ise denge noktasından üssel bir şekilde uzaklaşacaktır (itici). Denge noktasının bir civarı için, λ 'ya Lyapunov üsseli de denir [5].

Tanım: Bir boyutlu durum uzayında, denge noktasının bir civarı için Lyapunov üsseli, λ karakteristik değeridir.

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (1.46)$$

1.5.2. İki ve Daha Yüksek Boyutlu Durum Uzayı

Bu bölümde iki ya da daha yüksek boyutlu nonlinear sistemlerde, bir lineer fonksiyon ile çok değişkenli nonlinear bir fonksiyona yaklaşım konusunu inceleyeceğiz. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olmak üzere, sürekli zamanlı dinamik bir sistemin en genel formu; $\dot{x} = f(x)$ şeklindedir. f fonksiyonuna $\tilde{x}$ denge noktasının bir komşuluğunda lineer bir fonksiyonla yaklaşmak istiyoruz. Yani; A , en iyi yaklaşımı veren, $n \times n$ bir matris iken;

$$f(x) \approx A(x - \tilde{x}) + f(\tilde{x}) \quad (1.47)$$

formunu araştırıyoruz. E hata fonksiyonu olmak üzere;

$$f(x) = A(x - \tilde{x}) + f(\tilde{x}) + E(x - \tilde{x}) \quad (1.48)$$

olarak yazarsak, $x \rightarrow x_0$ iken,

$$\frac{|E(x - x_0)|}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \quad (1.49)$$

olmasını isteriz [1]. Bu yaklaşımı iki boyutlu bir sistemde inceleyelim:

Sistemin dinamiklerini belirleyen denklemlerin x, y olarak belirlenen durum değişkenleri ile birinci mertebeden diferansiyel denklemler olarak yazıldığını varsayalım. Zamana bağlı bu denklemler genel olarak;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (1.50)$$

formundadır. Sistemin hareketi, x - y durum uzayında yörüngelerine bakılarak izlenebilir. Denge noktaları,

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

eşitliklerini sağlar. Denge noktalarının karakteri ve bu noktaların bir komşuluğundaki yörüngelerin hareketi, f ve g fonksiyonlarının denge noktalarında hesaplanan

türevleri ile belirlenir. f ve g fonksiyonları (x_0, y_0) denge noktasında diferansiyellenebiliyorlarsa

$$\begin{aligned} f(x_0 + u, y_0 + v) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_f(u, v), \\ g(x_0 + u, y_0 + v) &= g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_g(u, v). \end{aligned} \quad (1.52)$$

(u, v) çifti küçülürken $R_f(u, v)$ ve $R_g(u, v)$ kalanları daha da küçülecektir.

Böylelikle $\sqrt{u^2 + v^2} \rightarrow 0$ iken

$$\frac{R_f(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \rightarrow 0 \text{ ve } \frac{R_g(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \rightarrow 0 \quad (1.53)$$

olacaktır. Böylece, kalan terimler (x_0, y_0) ile $(x_0 + u, y_0 + v)$ arasındaki mesafenin ölçüsüne, $\sqrt{u^2 + v^2}$, oranla çok daha küçük kalacaktır.

(x_0, y_0) , (1.50) deki sistemin denge noktası olduğundan

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$$

dır. Sonuç olarak, (1.52) eşitliği

$$\begin{aligned} f(x_0 + u, y_0 + v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_f(u, v), \\ g(x_0 + u, y_0 + v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_g(u, v). \end{aligned} \quad (1.54)$$

haline gelir. (1.50) deki sistemde $x = x_0 + u$ ve $y = y_0 + v$ koyarak u ve v gibi yeni değişkenler tanımlanabilir.

$$x' = (x_0 + u)' = u' \text{ ve } y' = (y_0 + v)' = v \text{ olacağı aşîkârdır. (1.50) den}$$

$$u' = x' = f(x, y) = f(x_0 + u, y_0 + v) \text{ ve} \quad (1.55-a)$$

$$v' = y' = g(x, y) = g(x_0 + u, y_0 + v) \quad (1.55-b)$$

elde edilir. (1.54) kullanılırsa

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_f(u, v), \\ v' &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v + R_g(u, v). \end{aligned} \quad (1.56)$$

denklemler sistemi elde edilir. Yine, (x_0, y_0) denge noktasının $(x, y) = (x_0 + u, y_0 + v)$ komşuluğu için (1.50) denklemler sisteminin çözümünde ne olduğu ile ilgileniyoruz. Bu, (1.56) sisteminin denge noktasının komşuluğundaki çözümünü orjineye dönüştürür. Orjin komşuluğundaki (u, v) değerleri için $R_f(u, v)$ ve $R_g(u, v)$ kalanları çok küçüktür, bu nedenle kalanları ihmal edilen sistem ile sistem (1.50) un karşılaştırılması ile ilgileniriz [6].

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\tilde{u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\tilde{v}, \\ \tilde{v}' &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\tilde{u} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\tilde{v}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

(1.57) da ki sistem, (x_0, y_0) denge noktasında (1.50) sisteminin lineerleştirilmesi olarak adlandırılır. Lineerleştirme doğrusal, homojen ve sabit katsayılıdır. (1.56) ve (1.57) sistemleri aynı çözüme sahip değildir fakat her birinin denge noktalarının bir komşuluğunda ki çözümler arasında niteliksel benzerlikler olacaktır.

$u = (\tilde{u}, \tilde{v})^T$ olmak üzere, vektör formdaki lineerizasyon $u' = Ju$ olarak gösterilir.

Burada;

$$J = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

dır. $J(x_0, y_0)$ matrisi $(x_0, y_0)^T$ noktasında $(f, g)^T$ nin Jakobien matrisi olarak adlandırılır.

Örnek 1.1: Denge noktasını karakterize etmek için en genel av-avcı modeli olan Volterra modelini ele alalım:

Av popülasyonunu $x(t)$, avcı popülasyonunu $y(t)$ ile gösterirsek, av-avcı sistemi;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by) \\ \dot{y} &= y(-c + dx)\end{aligned}\tag{1.59}$$

şeklindedir ve tüm katsayılar pozitiftir.

Bu av-avcı sistemi ilk kez İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından incelenmiştir.

I. Dünya Savaşı sırasında İtalyan balıkçıları, daha az avlanmaya çıktıkları dönemlerde köpek balığı ve diğer avcı canlı türlerinin avlanma oranının arttığı, savaştan sonra avlanma normale döndüğünde ise bu canlılar tarafından avlanma oranı savaş öncesi seviyesine düştüğünün farkına vardılar. Volterra bu olayı açıklamak için (1.59) denklem sistemi ile verilen av-avcı modelini kurdu [6].

İlk olarak bu denklem sisteminin zamana göre türevlerini sıfıra eşitleyerek denge noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned}x(a - by) &= 0 \\ y(-c + dx) &= 0\end{aligned}\tag{1.60}$$

Bu denklem sistemini sağlayan iki adet (x, y) noktası vardır:

$$(0, 0) \text{ ve } (x_0, y_0) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Bu denge noktalarının karakterini incelemek için, iki boyutlu durum uzayına geri dönüp, (x_0, y_0) denge noktasının bir komşuluğunda (1.50) denklem sisteminin

Taylor serisine açılımını yazalım:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \\ \dot{y} &= g(x, y) = (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y} + \dots\end{aligned}\tag{1.61}$$

$x_1 = x - x_0$ ve $y_1 = y - y_0$ denge noktasından sapmayı gösteren yeni değişkenler olmak üzere $\dot{x}_1 = \dot{x}$ ve $\dot{y}_1 = \dot{y}$ olduğu açıktır. Taylor açılımındaki tüm yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse;

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1 \\ \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g}{\partial y_1} y_1\end{aligned}\tag{1.62}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (1.62) sistemi x_1 ve x_2 durum değişkenleri için, birinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemlerdir. Yukarıdaki notasyon basitleştirilirse; i ve $j=1,2$ için,

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\tag{1.63}$$

olarak yazılabilir. (1.62) sistemindeki ilk denklem zamana göre türetilip, ikinci denklemi kullanarak $\dot{x}_2$ yok edilirse, sadece x_1 'e bağlı bir denklem elde edilir.

$$\ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}\dot{x}_2 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}(f_{21}x_1 + f_{22}x_2)\tag{1.64}$$

(1.62) da ki ilk denklem kullanılarak x_2 yok edilir:

$$\ddot{x}_1 = (f_{11} + f_{22})\dot{x}_1 + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})x_1\tag{1.65}$$

(1.65) denkleminin çözümünün, λ bir sabit, C ise $t=0$ anındaki başlangıç koşulları ile belirlenen, zamandan bağımsız bir sabit olmak üzere;

$$x_1(t) = Ce^{\lambda t}\tag{1.66}$$

formunda olduğunu varsayalım. λ pozitif ve reel ise yörünge denge noktasından uzaklaşacaktır, yani kararsız denge noktası olacaktır. λ negatif reel bir sayı ise, yörünge denge noktasına yaklaşacaktır, yani kararlı denge nokta olacaktır.

Çözüme geri dönüp, (1.65) eşitliğinde (1.66) kullanılırsa

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22}) = 0\tag{1.67}$$

elde edilir. Bu eşitlik λ 'nın karakteristik denklemi olarak adlandırılır. İkinci dereceden denklem olduğundan, aşağıda standart formülü ile verildiği gibi iki adet çözümü vardır:

$$\lambda_{+,-} = \frac{f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2} \quad (1.68)$$

Karekök içindeki ifade pozitif ise, karakteristik değerler reel, negatif ise kompleks sayıdır.

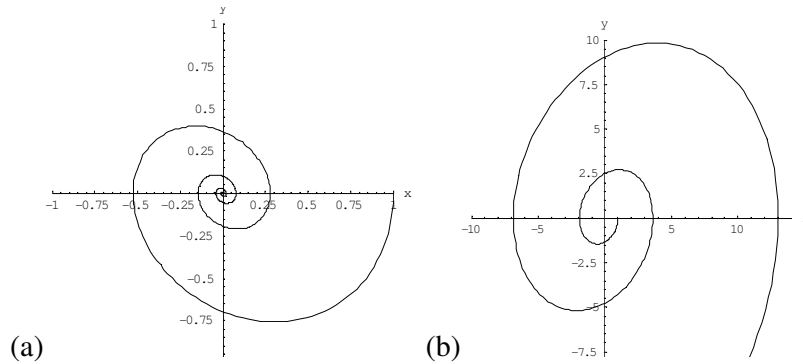
(1.65)'in en genel çözümü; C ve D, $t = 0$ anındaki x_1 ve x_2 başlangıç koşullarından bulunan sabitler olmak üzere,

$$x_1(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \quad (1.69)$$

formunda yazılabilir [5].

1.5.3. Kompleks Karakteristik Değerler ve Dinamikler

Karakteristik değerler reel değil de kompleks sayı olduğunda dinamik sistemin yörüngeleri, Şekil 1.5 de gösterildiği gibi, denge noktasından uzaklaşan ya da denge noktasına doğru hareket eden spiral şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.5: Karakteristik değerler kompleks olduğunda, (a) spiral düğüm ve (b) spiral itici meydana gelir.

(1.68) eşitliğindeki karekökün argümanı negatif olduğunda, karakteristik değerler

$$\lambda_{1,2} = R \pm i\Omega \quad (1.70)$$

şeklinde yazılır.

$$R = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22}) \quad (1.71)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})} \quad (1.72)$$

Bu durumda yörüngenin davranışını görmek için $x_1(t)$ denkleminde bu karakteristik değerler kullanılır:

$$x_1(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} = e^{Rt} [Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}] \quad (1.73)$$

$x_1(0) = 0$ özel durumu göz önüne alındığında $C = -D$ olur ve Euler formülü kullanılırsa;

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.74)$$

F , $x_2(0)$ 'a bağlı bir sabit olup,

$$x_1(t) = Fe^{Rt} \sin(\Omega t) \quad (1.75)$$

olarak yazılır. Bu sonuçtan, salınım genliği üssel olarak artar ya da azalırken ($R > 0$ ya da $R < 0$ durumuna bağlı olarak), x_1 'in, Ω açısal hızı ile salındığı görülür. x_2 de benzer davranışları sergiler. Farklı başlangıç koşullarına karşılık gelen durum uzayı davranışları şekil 1.5 de gösterilmiştir. Daha genel başlangıç durumları için durum uzayı davranışı aynıdır: üssel olarak artan ya da azalan genlik ile sınırlar.

Şekil 1.5'in solundaki denge noktası için, denge noktasının içine doğru dönerek gelen yörünge spiral düğüm (odak), sağdaki denge noktasından uzaklaşan yörünge ise spiral-itici (kararsız odak) olarak adlandırılır. $R = 0$ olduğu özel durumda, yörünge denge noktasının etrafında kapalı bir döngü formundadır. Bu kapalı döngülü yörüngeye çevrim denir. Süreç içerisinde, çevrimin komşuluğundaki yörüngeler ona doğru çekilirse limit çevrim olarak adlandırılır. Denge noktasının türü ise “merkez” dir [5].

1.5.4. Karakteristik Değerler için Jakobien Matris

Karakteristik değerleri bulmanın daha genel ve kullanışlı bir metodu, zaman gelişimli fonksiyonların türevlerinden oluşan Jakobien Matris yöntemidir. Bu metot, denge noktaları için karakteristik değer bulmada istenilen boyutlu durum uzayına genelleştirilebilir. f , çok değişkenli vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

olarak yazılabilir. f 'in Jakobieni J , f_j fonksiyonlarının kısmı türevlerinden oluşan bir matristir:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

İki boyutlu bir sistem ele alındığında, Jakobien matris aşağıdaki formdadır:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.79)$$

eşitliğinden (1.67) deki karakteristik denklem elde edilir.

Verilen bir denge noktasının karakteristik değerleri ile ilgili değerlendirmeler yapabilmek için (1.78) Jakobien matrisinin izdüşümü tanımlanmalıdır:

$$Tr(J) = f_{11} + f_{22} \quad (1.80)$$

(1.68) de, karakteristik değerler için çözümü incelersek, matrisin izdüşümünün karakteristik değerlerin toplamına eşit olduğunu görürüz:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(Df) \quad (1.81)$$

Bu sadece sistemin yörüngelerinin bir çekiciye doğru yığılıp yığılmadığını test etmek için gereklidir. $Tr(J)$ 'in işareti denge noktasının düğüm ya da itici olduğunu belirler.

Jakobien matrisi, sadece esas köşegen üzerindeki elemanların sıfırdan farklı olduğu diyagonal forma dönüştürülürse, sistemin öz değer ve öz vektörleri kolaylıkla bulunabilir. Burada öz değer, denge noktasının karakteristik değerleri, öz vektör ise birbiri ile bağlantılı karakteristik doğrultuları anlatır. İki boyutlu durum uzayı için diyagonal matris

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

formundadır. Δ bu matrisin determinantı olmak üzere;

$$\Delta = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} \quad (1.83)$$

olur. Buradan denge noktasının yapısı Tablo 1.2 de verildiği gibi belirlenebilir.

Tablo 1.2: İki boyutlu durum uzayının denge noktaları

	$Tr(Df) < 0$	$Tr(Df) > 0$
$\Delta > (1/4)(Tr(Df))^2$	Spiral düğüm	Spiral itici
$0 < \Delta < (1/4)(Tr(Df))^2$	Düğüm	İtici
$\Delta < 0$	Eyer nokta	Eyer nokta

Kısaca özetlersek, iki boyutlu bir dinamik sistem için dört durum söz konusudur:

- (1) Öz değerler aynı işaretli ise denge noktası düğümdür. Öz değerlerin işareti negatif ise kararlı, pozitif ise kararsızdır.
- (2) Öz değerler zıt işaretli ise denge noktası eyerdir.
- (3) Öz değerler eşit olduğunda, işaretleri negatif ise kararlı düğüm, pozitif ise kararsız düğümdür.
- (4) Öz değerler $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ gibi kompleks olduğunda $\alpha \neq 0$ ise denge noktası bir spiraldir. Yörünge'nin kapalı bir eğri olduğu (periyodik çözümler) $\alpha = 0$ durumunda ise denge noktasının türü merkezdir.

Örnek 1.2: Volterra Modeli

Bu model için iki adet denge noktası bulmuştuk:

$$(0,0) \text{ ve } (c/d, a/b) \quad (1.84)$$

Jakobien matrisi;

$$J = \begin{bmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

$(0,0)$ denge noktası için;

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

Buradan karakteristik değerler $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$ bulunur. $(0,0)$ eyer noktasıdır.

$(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$ denge noktası için;

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

İz düşüm 0 ve determinant pozitif olduğundan, lineerizasyonun merkez olduğunu görürüz. Öz değerler $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ca}$ dır.

Örnek 1.3: (1.28) sistemi ile tanıtılan rekabet halindeki türlerin bir modelini ele alalım:

$$\begin{aligned} x' &= (1-x-y)x, \\ y' &= (4-7x-3y)y. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Denge noktalarını bulmak için,

$$\begin{aligned} (1-x-y)x &= 0, \\ (4-7x-3y)y &= 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

sistemi çözülmelidir. $(1-x-y)x=0$ denkleminin çözümünden $x=0$ ve $x+y=1$ doğrularının birleşimi olan x -denge eğrisi bulunur. $(4-7x-3y)y=0$ ikinci eşitliğinin çözümü $y=0$ ve $7x+3y=4$ doğrularının birleşimi olan y -denge eğrisini verecektir. Denge noktaları bu denge eğrilerinin kesişim noktalarıdır: $(0,0)$, $(0,4/3)$, $(1,0)$ ve $(1/3,4/3)$.

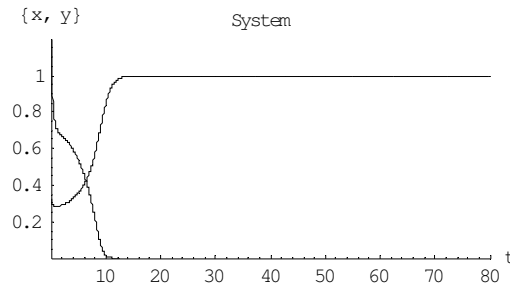
Sistemin Jakobien matrisi hesaplanırsa

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -7y & 4-7x-6y \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

$(1/3, 4/3)$ denge noktasındaki Jakobien matris

$$J(1/3, 4/3) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -21/4 & -9/4 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

olarak bulunur. $\det(J) = -3/4$ olduğunda lineerizasyon orijinde bir eyer noktaya sahiptir. Şekil 1.6 da x - y popülasyonlarının zamana bağlı değişimleri verilmiştir



Şekil 1.6: x ve y popülasyonlarının zamana bağlı değişimleri

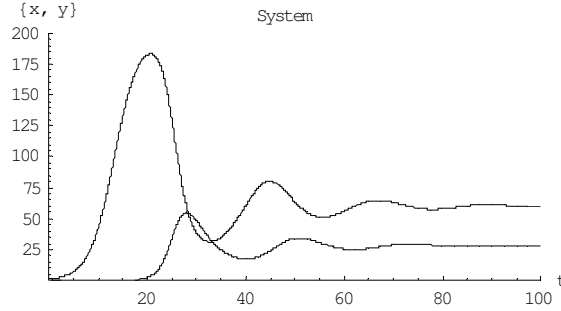
Örnek 1.4: Aşağıda verilen, av popülasyonunun lojistik olarak arttığı av-avcı modelini göz önüne alalım [6]:

$$\begin{aligned} x' &= (0.4 - 0.002x - 0.01y)x, \\ y' &= (-0.3 + 0.005x)y. \end{aligned} \quad (1.92)$$

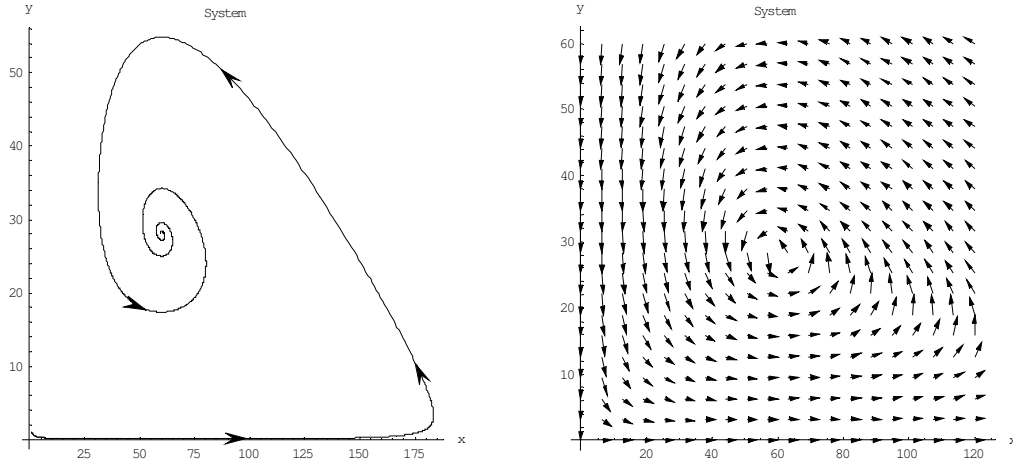
Sistemin denge noktalarından biri $(60, 28)$ dir ve bu noktadaki Jakobien matris

$$J = \begin{pmatrix} -0.12 & -0.6 \\ 0.14 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

dır. $D = \det(J) = 0.084$ ve $T = \text{tr}(J) = -0.12$ olarak bulunur. $\det(J) > 0$, $\text{tr}(J) < 0$ ve $T^2 - 4D = -0.3216 < 0$ olduğundan lineerizasyon orjinde spiral düğüme sahiptir. Şekil 1.7 de x - y popülasyonlarının zamana bağlı değişimi, şekil 1.8 de ise faz portresi verilmiştir.



Şekil 1.7: Av-avcı popülasyonunun zaman çizelgesi



Şekil 1.8: Av avcı popülasyonunun faz portresi

Örnek 1.5: Aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} x' &= y + ax(x^2 + y^2), \\ y' &= -x + ay(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (1.94)$$

$a=5$ ve $a=-5$ değerleri için sistemin orjindeki lineerizasyonunu ve sistemin dinamiklerini karşılaştıralım.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3ax^2 + ay^2 & 1 + 2axy \\ -1 + 2axy & ax^2 + 3ay^2 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

Orjinde sistemin Jakobien matrisi

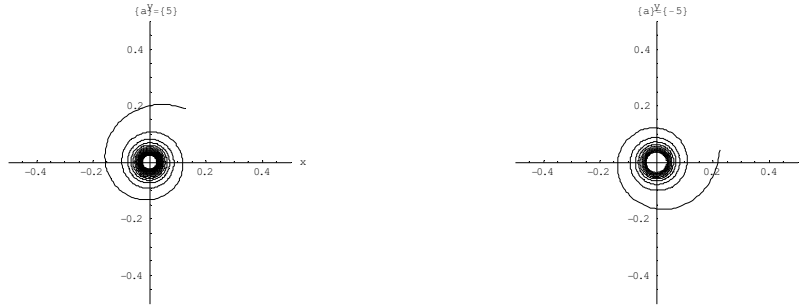
$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

şeklindedir. Böylelikle bu noktadaki lineerizasyon

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= -u. \end{aligned} \quad (1.97)$$

formundadır. Görüldüğü üzere a parametresine bağıllık yoktur. Jakobien matrisin determinanı 1 ve izdüşümü 0 dır. Böylelikle lineerizasyon $(0,0)$ noktasında merkeze sahiptir ve çözüm eğrisi orjini kuşatan kapalı bir eğridir [6].

$a=5$ için çözüm eğrisi Şekil 1.9'da gösterilmiştir. t artarken eğri orjinden spiral şeklinde uzaklaşmaktadır. $t \rightarrow -\infty$ iken ise eğri içe doğru kıvrılmaktadır. $a=-5$ iken çözüm grafiği Şekil 6 da gösterilmiştir. Bu durumda sistemin zıt bir davranış göstermektedir. $t \rightarrow \infty$ iken içe doğru kıvrılmaktadır.



Şekil 1.9: Sistem (1.52)'nin $a=5$ ve $a=-5$ için çözümleri

Orjinin komşuluğunda gerçekte neler olduğunu görmek için $x(t)$ ve $y(t)$ nonlineer sistemin bir çözümü olduğunu varsayalım ve

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (1.98)$$

fonksiyonunu ele alalım. $r(t)$, orjin ile $(x(t), y(t))$ noktası arasındaki uzaklık olduğundan $r > 0$ dır. r nin türevini hesaplamak için (1.6) sistemini kullanabiliriz.

$r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ olarak ele alalım. $(r^2)' = 2rr'$ olur.

$$\begin{aligned} 2rr' &= (r^2)' \\ &= (x(t)^2 + y(t)^2)' \\ &= 2xx' + 2yy' \\ &= 2x(y + ax(x^2 + y^2)) + 2y(-x + ay(x^2 + y^2)) \\ &= 2a(x^2 + y^2)^2 \\ &= 2ar^4 \end{aligned}$$

$$r' = ar^3. \tag{1.99}$$

(1.99) eşitliği çözülebilir fakat çözümün niteliksel analizi yeterlidir. $a > 0$ ise, (1.99) eşitliği $r = 0$ da kararsız denge noktasına sahiptir. $t \rightarrow -\infty$ iken $r(t) \rightarrow 0$ olacaktır yani, şekil 1.9 daki çözüm eğrisi orjine yakalaşacaktır. t arttıkça orjinden uzaklaşacaktır. $a < 0$ ise, $t \rightarrow \infty$ iken çözüm orjine yaklaştacaktır. Bu durumda nonlinear sistem, lineerizasyonu bir merkez iken, kendisi orjinde bir “spiral düğüme” sahip olacaktır.

2. PERİYODİKLİK VE KAOS

Bu bölümde, dinamik bir sistemin, önceki bölümde ele alınan olası üç davranışının (denge noktasına yakınsama, ıraksama ve çevrim) yanı sıra diğer bir davranış türü olan kaos incelenecektir.

2.1. İnvaryant (Değişmez) Kümeler

Denge noktasının bir komşuluğunda alınan başlangıç koşulları ile incelenen çözümler lokal çözüm olarak adlandırılır. Denge noktasından uzakta, herhangi bir yerde başlayan çözümleri inceleyen metotlar ise global çözümlerdir.

Global metotları bulmak oldukça zordur ve genelde, sadece bir kaç durum için geçerlidirler. Her özel sisteme uygulanabilen çözümlerin bir kombinasyonunu bulmak gerekir. Kullanılan bir kaç metot olmasına karşın onlar da her sisteme uygulanamamaktadır. Bu bölümde bu metotları inceleyeceğiz.

2.1.1. Değişmez (İnvaryant) Kümeler

“ n boyutlu $y' = f(y)$ sistemi için değişmez küme; $y' = f(y)$ nin, $y(0) \in S$ başlangıç koşulu altında çözümü $y(t)$ ise, tüm $t \geq 0$ için $y(t) \in S$ dır”, özelliğinin sağlandığı, bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi değişmezdir. Böylece, S başlangıç değerini içerirse o noktadan türeyen tüm çözüm eğrisini içermelidir.

S kümesi $t \geq 0$ için çözümü içerdiğinden pozitif olarak değişmezdir. $t \leq 0$ için çözüm eğrisini içerseydi negatif olarak değişmez olacaktı. Şimdi değişmez küme örneklerini inceleyelim [6].

Örnek 2.1: Rekabet eden türlerin sistemini tüm denge noktalarını inceleyelim

$$\begin{aligned} x' &= (1 - x - y)x, \\ y' &= (4 - 7x - 3y)y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

x - ve y -eksenlerinin değişmez olduğunu gösterelim.

(2.1) sisteminin dört adet denge noktası bulunmuştur: $(0,0)$, $(0,4/3)$, $(1,0)$ ve $(1/4,4/3)$.

$(1/4,4/3)$ denge noktası eyer nokta idi. Ayrıca sistemin Jakobien matrisi hesaplanmıştı.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -7y & 4-7x-6y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Şimdi, $(0,0)$ dan başlayarak diğer denge noktalarını inceleyelim. $(0,0)$ noktasındaki Jakobien matris

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dır. Bu diyagonal matristen öz değerler kolaylıkla bulunabilir. Buradan $(0,0)$ noktası düğümdür. $(0,4/3)$ noktasında Jakobien matris

$$J(0,4/3) = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ -28/3 & -4 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Bu noktadaki sistemin öz değerleri incelendiğinde kararlı düğüm nokta olduğu görülür. $(1,0)$ noktasında ki Jakobien matris;

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Bu denge noktası da kararlı düğümdür.

İlk olarak x -eksenini ele alalım. $(x_0,0)$ noktası bu eksen üzerinde herhangi bir nokta olsun. $x(t)$, $x' = (1-x)x$ denkleminin $x(0) = x_0$ ve başlangıç koşulu altındaki çözümü ve $y(t) = 0$ olsun. (2.1) sisteminde yerine koyarak $(x(t), y(t))$ nin çözüm olduğu görülür. Böylece, x -ekseninde başlayan herhangi bir çözüm pozitif ve negatif zaman doğrultularının her ikisinde de yine x ekseninde kalacaktır. Aynı durum y

ekseninin de pozitif ve negatif olarak invaryant olduğunu gösterir. (2.1) sistemi popülasyon modeli olduğundan çözüm daima pozitif olacaktır.

2.2. Düzlemsel Sistemlerin Çözümlerinin Uzun Dönem Hareketi

U kümesinde tanımlı bir sistemi ve bu sistemin U içinde $y(0) = y_0$ gibi bir noktada başlayan $y(t)$ çözümünü ele alalım. Çözüm U 'nun sınırlarını dışına ya da sonsuza doğru hareket edebilir. Fakat $t \geq 0$ durumunda U nun sınırlı bir alt kümesinde kalan çözüm eğrilerine ne olduğuyla daha çok ilgilenilir. Şimdiye kadar iki ihtimal gördük: incelediğimiz birçok örnekte çözüm eğrileri bir noktaya ya da periyodik çözüme karşılık gelen kapalı bir eğriye yaklaşıyordu.

Bazı terminolojilere ihtiyaç duyulabilir. Bu nedenle ilk olarak limit kümesinin tanımını verelim: $y(0) = y_0$ da başlayan çözüm eğrisinin tüm limit noktalarının kümesi $y(t)$ çözümünün limit kümesi olarak tanımlanır. Bu küme $w(y_0)$ ile gösterilir. $y(t_k) \rightarrow x$ iken $t_1 < t_2 < \dots < \infty$ şeklinde ∞ yaklaşan bir dizi var ise x noktası $w(y_0)$ da dır. Bazen, tüm çözüm eğrileri bir kümenin yakınından başlar, bu limit kümesi bir çekici kümedir.

Çözüm eğrisi tek bir noktaya yaklaşıyorsa limit kümesi bir noktadan ibarettir. Herhangi bir düğüm, yakınından başlayan her bir çözüm eğrisinin limit kümesidir. Bu nedenle, düğüm bir çekici örneğidir.

Eğer çözüm periyodikse ve kapalı bir eğri ise eğri üzerindeki her nokta limit kümesidir. Bunu görmek için $x(t)$ çözümünü ele alalım ve periyodunun T olduğunu varsayalım. t_0 keyfi bir sayı olsun. $x(t_0) = x(t_0 + T) = x(t_0 + 2T) = \dots$ olur. $t_0 + kT$ dizisi sonsuza yaklaşır fakat $x(t_0 + kT)$ noktaları $x(t_0)$ noktasına eşittir. Bu nedenle, $x(t_0)$ noktası periyodik çözümlü eğrinin limit kümesidir. t_0 keyfi olduğundan, periyodik bir çözümün limit kümesinin çözüm eğrisinin kendisi olduğunu görürüz.

Nokta ve kapalı eğriden başka çözüm eğrileri var mıdır? Yüksek boyutlu sistemlerde vardır. Aşağıdaki teorem limit kümeleri hakkında bir kaç önemli bilgiyi içermektedir.

Teorem 2.1: U kümesinde tanımlı $y' = f(y)$ sistemini ele alalım.

1. $y(0) = y_0$ da başlayan çözüm eğrisi yine sınırlı U kümesi içerisinde kalıyorsa, $w(y_0)$ limit kümesi boş kümedir.

2. Herhangi bir limit küme pozitif ve negatif olarak invaryanttır.

$w(y_0)$ tek bir x_0 noktasından ibaret olsun. Teorem (2.1) ün ikinci kısmına göre, bu tek noktalı küme invaryanttır. Yani, x_0 da başlayan çözüm eğrisi yine x_0 da kalır. Diğer bir deyişle x_0 denge noktasıdır. Bu nedenle eğer çözüm eğrisi bir noktaya yakınsıyorsa bu nokta denge noktasıdır.

Pozitif ve negatif olarak invaryant olan her küme herhangi bir noktadaki tüm çözüm eğrilerini içerir. Bu tür bir küme çözüm eğrilerinin bir birleşimidir [6].

2.3. Limit Çevrimler

Yeni tür bir çekiciyi gösteren aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6) sistemini (r, θ) kutupsal koordinatlarına dönüştürelim:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \tag{2.7}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ ve } \tan \theta = \frac{y}{x} \tag{2.8}$$

olduğu aşikârdır. İlk eşitlik türetilip, (2.6) kullanılırsa:

$$\begin{aligned} 2rr' &= \frac{d}{dt} r^2 \\ &= 2(xx' + yy') \\ &= 2 \left[x(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + y(x + y(1 - x^2 - y^2)) \right] \\ &= 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \\ &= 2r^2(1 - r^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Böylece, $r \neq 0$ için

$$r' = r(1 - r^2) \quad (2.10)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\tan \theta$ türetildiğinde

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta) &= \frac{d}{dt} \tan \theta \\ &= (xy' - yx')/x^2 \\ &= \left[x(x + y(1 - x^2 - y^2)) - y(-y + x(1 - x^2 - y^2)) \right] / x^2 \\ &= (x^2 + y^2)/x^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\sec^2(\theta)\theta' = (x^2 + y^2)/x^2$ olduğundan

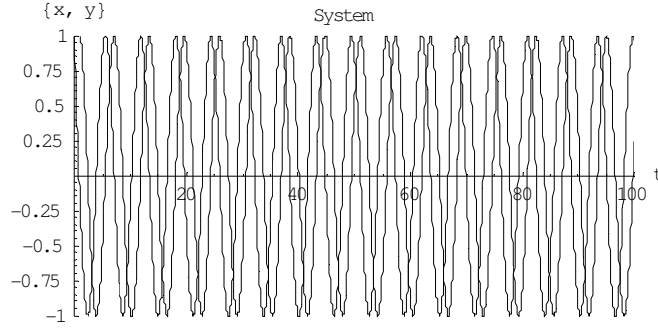
$$\theta' = 1 \quad (2.11)$$

olur. Böylelikle (2.6) sistemi kutupsal koordinatlara dönüştürüldüğünde (2.10) ve (2.11) denklemlerinden oluşan basit bir sisteme dönüşür. (2.11) denkleminin çözümünden $\theta = t + c$ bulunur. Bunun anlamı tüm çözüm eğrilerinin orjin etrafında saat yönünün tersine doğru spiral şeklinde kıvrılmakta olduğudur.

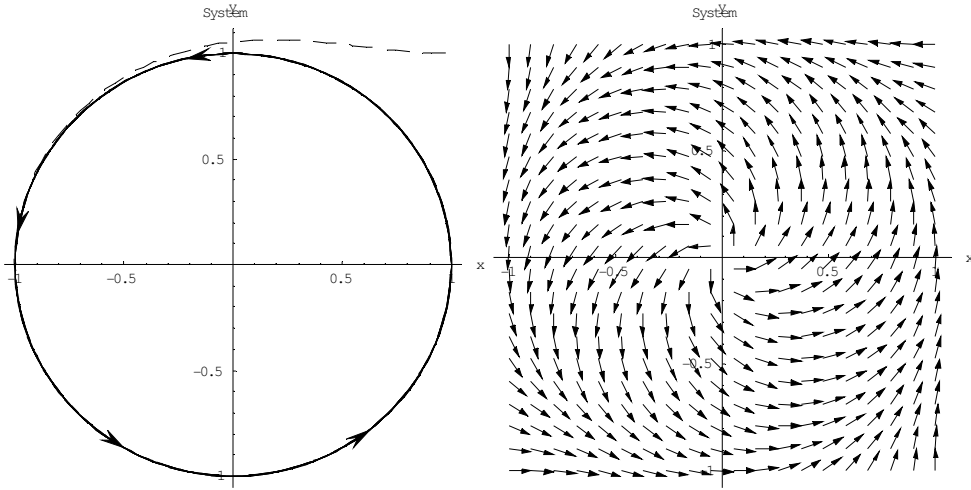
(2.10) denkleminin analizinden 0 ve 1 denge noktaları açıkça görülmektedir. $0 < r < 1$ için r artarken sistemin 1'e doğru artmaktadır. $r > 1$ için r azaldığında ise sistem 1'e doğru azalmaktadır. Bundan dolayı (2.10) için $r = 1$ asimptotiksel kararlı denge noktasıdır. (2.6) sisteminde ise faz uzayında birim çember olan bir çözüm eğrisi anlamındadır ve diğer orjinden uzakta başlayan diğer tüm çözüm eğrileri orjine doğru spiral şeklinde kıvrılarak yaklaşmaktadır. Böylece, birim çember $\mathbb{R}^2$ deki herhangi bir nokta için limit kümesidir.

Diğer çözümlerin spiral şeklinde kıvrılarak yaklaştığı kapalı çözüm eğrisine limit çevrim denir. $t \rightarrow \infty$ iken çözüm eğrileri limit çevrime doğru kıvrılıyorsa, bu bir çekicidir ve çekici limit çevrim olarak adlandırılır. $t \rightarrow -\infty$ iken çözüm eğrileri limit çevrime doğru kıvrılıyorsa da itici limit çevrim adını alır. Çözüm eğrilerinin bir yandan limit çevrime yaklaşırken bir yandan uzaklaşması da olasıdır [5].

Şekil 2.1 de yukarıda verilen sistemdeki x - y popülasyonlarının zamana bağlı değişimleri ve şekil 2.2 de ise faz portresi gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Sistem (2.2) deki x ve y popülasyonlarının zaman çizelgesi



Şekil 2.2: Sistem (2.2) nin faz portresi ve doğrultu vektörlerinin alanı

2.4. Lyapunov Fonksiyonu

Global kararlılık analizinde kullanılan bu fonksiyon Alaksandr Lyapunov tarafından bulunmuştur. Aşağıda verilen düzlemsel otonom sistemi göz önüne alalım

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

$V(x, y)$, sürekli olarak diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun ve bir çözüm eğrisi boyunca V nin nasıl değiştiğini inceleyelim. Yani, (2.12) sisteminin $(x(t), y(t))$ gibi bir çözümüne sahip olduğumuzu varsayıp, bu çözüme karşılık gelen $V(x(t), y(t))$

fonksiyonunu ve bu fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu bulmaya çalışırız. Bunu için, $V(x,y)$ fonksiyonunu türevini alırsak:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y).\end{aligned}\quad (2.13)$$

elde ederiz. Buradan

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) g(x, y) \quad (2.14)$$

bulunur. $\dot{V}(x, y) > 0$ ise V fonksiyonu (x, y) noktasına doğru olan çözüm eğrisi boyunca artmakta, $\dot{V}(x, y) < 0$ ise de azalmaktadır.

(2.14) eşitliğinin

$$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)^T$$

olduğu görülür. (2.12) sistemi vektörel formda ifade edilirse, sağ tarafı $F = (f, g)^T$ vektör alanı haline gelir. (2.14) eşitliği

$$\dot{V} = \text{grad}V \cdot F \quad (2.15)$$

formunda yazılabilir. (2.15) eşitliğindeki $\dot{V}$, sistem (2.12) ile tanımlanan $F = (f, g)^T$ vektör alanı doğrultundaki V 'nin türevidir.

$\text{grad}V$, V nin hızla arttığı doğrultudaki noktaları göstermekteydi. $\dot{V}(x, y) > 0$ ise, V vektör alanı doğrultusunda artmaktadır. Yani, çözüm eğrisi yukarıya doğru, bir tepe oluşturacak şekilde, yükselmektedir. $\dot{V}(x, y) < 0$ olduğunda ise (x, y) de ki çözüm eğrisi yokuş aşağı gitmektedir.

Yüksek boyutlu sistemlere yukarıda yazılanlar uygulanırsa $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ve $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ olmak üzere

$$x' = f(x) \quad (2.16)$$

şeklinde bir otonom sistemi göz önüne alalım. $V(x)$ gibi bir fonksiyona sahip olduğumuzu varsayalım ve bir çözüm eğrisi boyunca bu fonksiyonun nasıl değişeceğini inceleyelim. Yani, $x(t)$ (2.16) sisteminin bir çözümü olmak üzere, t 'nin bir fonksiyonu olarak, $V(x(t))$ fonksiyonunun nasıl davranacağını inceleyelim. Artan fonksiyon mudur yoksa azalan mıdır? Bu sorunun cevabını fonksiyonu türeterek bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) f_i(x(t)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.10) eşitliğinin sağ tarafını düzenlersek

$$\dot{V} = \text{grad}V(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x) \quad (2.18)$$

elde ederiz ve (2.17)

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \quad (2.19)$$

haline gelir.

Bir V fonksiyonunun x_0 'ı içeren bir S kümesinde tanımlı olduğunu ve

$$V(x_0) = 0 \text{ ve } x \neq x_0 \text{ için } V(x) > 0 \quad (2.20)$$

koşullarını sağladığını varsayalım. Bu tür bir fonksiyona x_0 noktasında bir minimumu olan S kümesinde pozitif tanımlı olduğu söylenir. V fonksiyonu iki değişkenli ise grafiği, en azından yerel minimum değerinin komşuluğunda, bir kâseye benzeyecektir. Tüm $x \in S$ değerleri için $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonu S de pozitif yarı tanımlıdır. Eşitsizliğin tersi geçerli olduğunda ise, V negatif tanımlı ya da negatif yarı tanımlıdır.

Örneğin, $V(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu, $(0,0)$ noktasında minimum değerini alan ve tüm $\mathbb{R}^2$ de pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Genelleştirirsek, $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, 0 da minimumu olan, $\mathbb{R}^n$ de pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

x_0 da denge noktası olan (2.16) sistemini göz önüne alalım. x_0 da minimumu olan S kümesi üzerinde pozitif tanımlı ve ayrıca, S üzerinde $\dot{V}$ in negatif tanımlı olduğu V fonksiyonunun bulunabileceğini varsayalım. Bu durumda her çözüm bir tümsekten kayar gibi hareket edecektir ve x_0 noktasına gelene kadar da durmayacaklardır. Bu x_0 'ın asimptotiksel kararlı denge noktası olmasını gerektirir [6].

Teorem 2.2: $x' = f(x)$ sisteminin x_0 da denge noktası olduğunu varsayalım. V ise x_0 ın bir U komşuluğunda tanımlı, yani x_0 da minimumu olan pozitif tanımlı, sürekli olarak diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

- i) $\dot{V}$ fonksiyonu U da negatif yarı tanımlı ise, x_0 kararlı denge noktasıdır.
- ii) $\dot{V}$ fonksiyonu U da negatif tanımlı ise, x_0 asimptotiksel kararlı denge noktasıdır.

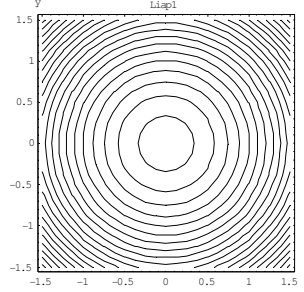
Örnek 2.2:

$$\begin{aligned} x' &= y + ax(x^2 + y^2), \\ y' &= -x + ay(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{2.21}$$

sistemini göz önüne alalım. Orjinde izole edilmiş minimum noktası bulunan $V(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de pozitif tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) g(x, y) \\ &= 2x(y + ax(x^2 + y^2)) + 2y(-x + ay(x^2 + y^2)) \\ &= 2a(x^2 + y^2)^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

$a < 0$ ise $\dot{V}$, $\mathbb{R}^2$ de negatif tanımlıdır. Bu durumda orjin asimptotiksel kararlı denge noktası olacaktır. Bu durum sistemin Jakobien'inin imajiner öz değere sahip olması durumunda, yani lineerizasyonun bir merkeze sahip olması durumunda geçerlidir.



Şekil 2.3: Lyapunov fonksiyonunun grafiği

2.5 . İki Boyutlu Dinamik Sistemler: Poincare-Bendixson Teoremi

$x' = f(x)$ iki boyutlu sürekli zamanlı bir sistem olsun. Bu sistemin her bir x durumu faz uzayında bir noktaya karşılık gelir. Sistem x_0 durumunda harekete başlarsa $x(t)$ faz uzayında, yörünge olarak adlandırılan, bir eğri çizecektir. x_0 sistemin denge noktası ise, bu noktadan harekete başlayan sistem bu noktada saplanıp kalır. Genel olarak eğri bu x_0 noktasına süreç içerisinde tekrardan dönebilir. İlk dönüşün T zamanında olduğunu varsayarsak, T zamanında sistem hareketine x_0 noktasında yeniden başlamış gibidir. $t+T$ zamanında da, kesinlikle, t zamanında olduğu yerde olacaktır. Diğer bir deyişle, herhangi bir t zamanı için $x(t+T) = x(t)$ dır. Bu tür bir harekete periyodik hareket ve $x(t+T) = x(t)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif T sayısına da eğrinin periyodu denir.

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ $x' = f(x)$ sisteminin iki farklı yörüngesi ise, $t \rightarrow \infty$ iken $|x_1(t) - x_2(t+c)| \rightarrow 0$ koşulunu sağlandığında, $x_1(t)$ yörüngesinin $x_2(t)$ yörüngesine yaklaştığı söylenir.

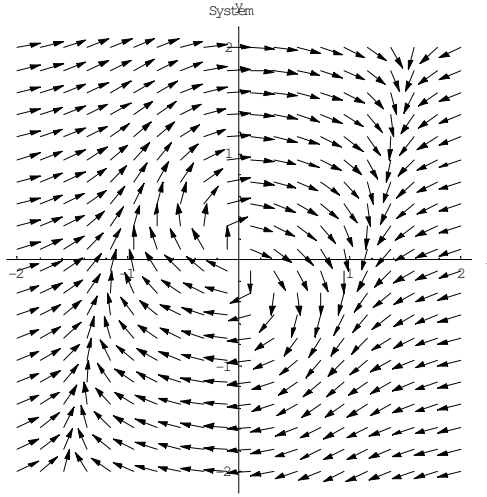
$x' = f(x)$ iki boyutlu sürekli zamanlı dinamik sistemi, $t \rightarrow \infty$ iken üç farklı davranış sergileyebilir: (1) sabit bir noktaya yakınsayabilir, (2) sonsuza ıraksayabilir ya da (3) periyodik bir orbite yaklaşabilir. Bu fikir Poincare-Bendikson teoreminin temelini oluşturur.

$x_1' = x_1 + x_2 - x_1^3$ ve $x_2' = -x_1$ şeklindeki bir dinamik sistemi göz önüne alalım. Sistemin tek bir denge noktası vardır ve $\tilde{x} = 0$ dır. Bu denge noktasındaki Jakobien matrisi hesaplanırsa;

$$J = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 & \partial f / \partial x_2 \\ \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$J(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Öz değerler $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ dır. Buradan 0'ın kararsız denge nokta olduğu görülür.



Şekil 2.4: $x_1' = x_1 + x_2 - x_1^3$ ve $x_2' = -x_1$ sistemi (0,0) da kararsız denge noktasına sahiptir.

0 kararsız denge noktası olmasına rağmen, sistemin Lyapunov fonksiyonunun $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ olup olmadığını inceleyelim. 0 kararsız olduğundan V nin Lyapunov fonksiyonu olması elbette ki imkânsızdır. Bunu görmeye çalışalım. $V(x) > 0$ olduğu aşikârdır.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\
&= 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \\
&= 2x_1(x_1 + x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1) \\
&= -2x_1^4 + 2x_1^2 \\
&= 2x_1^2(1 - x_1^2).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

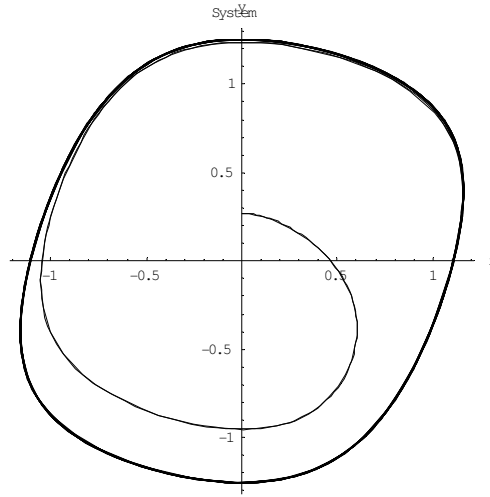
$dV/dt < 0$ olmalı. $|x_1| < 1$ olduğunda dV/dt pozitif olacaktır. Diğer yandan, $|x_1| > 1$ olduğunda ise $dV/dt < 0$ olur, yani sistem 0'a doğru hareket edecektir. $t \rightarrow \infty$ iken $|x(t)| \rightarrow \infty$ mudur? $|x(t)|$ nin yeterince büyük olduğunu varsayalım. $|x_1(t)|$ büyük olmayacağından $|x_2(t)|$ büyük $|x_1(t)|$ ise sınırlı olacaktır.

$$x_1' = x_2 - (x_1 \text{ i içeren terimler})$$

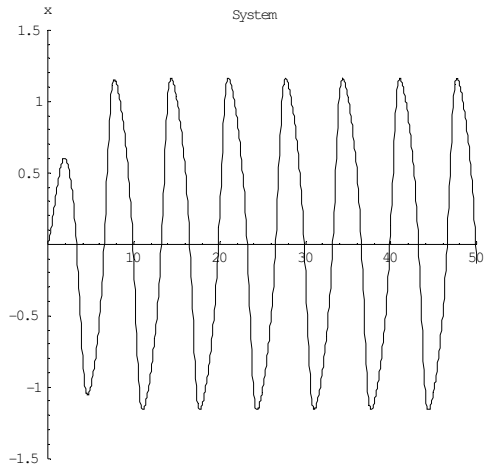
olduğundan $x_1(t)$ sınırsız olduğunda dx_1/dt sınırsız olacaktır. Bundan dolayı orjinden yeterince uzakta olan $x(t)$ bulunamaz.

Tek denge noktası 0 kararsız olduğu halde patlayıcı bir hareket imkânsızdır. Poincare-Bendixson Teoremi $t \rightarrow \infty$ iken $x(t)$ 'nin periyodik bir yörünge haline geleceğini ifade eder [1].

Şekil 2.5 de sistemin dinamiksel durumu, şekil 2.6 da ise x 'in zamana göre değişimi gösterilmektedir.



Şekil 2.5: (0,0) kararsız denge noktasının bir komşuluğunda başlayan sistem kararlı bir çevrime yaklaşmaktadır.(0'ın yakınından başlayan yörünge, dışa doğru kıvrılarak limit çevrime yaklaşmıştır.)



Şekil 2.6: x_1 'in t ye göre grafiği. Sistem aniden periyodik hale dönüşmüştür.

2.6 . Dallanmalar

Bir parametre kritik noktadan (dallanma noktası) geçtiğinde çözümün yapısında niteliksel değişimler meydana gelir.

Lokal Dallanma Teorisi: α 'nın parametre olduğu

$$y' = f(y, \alpha) \quad (2.26)$$

sistemi göz önüne alalım. $f(y_0, \alpha) = 0$ eşitliğinin çözümünden sistemin denge noktası bulunur.

Tanımlar:

1. (y_0, α) denge noktasında Jakobien sıfırsa ve çok sayıda dallanma bir araya geliyorsa, (y_0, α) 'nın dallanma noktası olduğu söylenir.
2. N_α , α parametrelili bir sistemdeki denge noktalarının sayısı olmak üzere, herhangi bir $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ aralığında N_α sabit değil ise α_0 dallanma değeri olarak adlandırılır ve α parametresini değeri α_0 'dan geçerken sistemin dallanmaya gittiği söylenir.
3. Bir α_0 değerinde (1) sisteminin çözümü yapısal olarak kararlı değil ise, α_0 dallanma değeridir [7].

2.6.1. Eyer-Düğüm (Fold) Dallanma

$$y' = f(y, \alpha)$$

sistemini göz önüne alalım ve $\alpha = \alpha_0$ durumunda, sistemin aşağıdaki özellikleri sağlayan y_0 denge noktası bulunduğunu varsayalım:

$$\frac{\partial f(y_0, \alpha_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.27-a)$$

$$\frac{\partial^2 f(y_0, \alpha_0)}{\partial y^2} \neq 0 \quad ((y_0, \alpha_0) \text{ extramum noktası}) \quad (2.27-b)$$

$$\frac{\partial f(y_0, \alpha_0)}{\partial \alpha} \neq 0 \quad (2.27-c)$$

(2.27-b) ve (2.27-c)'nin işaretine bağlı olarak;

- i) $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) olduğunda (y_0, α_0) komşuluğunda denge noktası yoktur.
- ii) Herbir $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) değerinde (y_0, α_0) 'ın komşuluğunda iki denge durumu söz konusudur. Biri kararlı diğeri kararsız olan bu denge durumları hiperboliktir.

2.6.2. Kritik Ötesi Dallanma:

$$y' = f(y, \alpha) \quad (2.28)$$

sistemi göz önüne alalım ve $\alpha = \alpha_0$ durumunda, sistemin aşağıdaki özellikleri sağlayan y_0 denge noktası bulunduğunu varsayalım:

$$\frac{\partial f(y_0, \alpha_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.29-a)$$

$$\frac{\partial^2 f(y_0, \alpha_0)}{\partial y^2} \neq 0 \quad ((y_0, \alpha_0) \text{ ekstremum noktası}) \quad (2.29-b)$$

$$\frac{\partial^2 f(y_0, \alpha_0)}{\partial \alpha \partial y} \neq 0 \quad (2.29-c)$$

(2.29-b) ve (2.29-c)'nin işaretine bağlı olarak;

- i) $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) durumunda y_0 denge noktası karardır (kararsızdır).
- ii) Her bir $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) değerinde y_0 kararsız hale gelir ve $y_0(\alpha)$ karardlı (kararsız) denge noktasında dallanma meydana gelir.

2.6.3. Çatal (Pitchfork) Dallanma:

$$y' = f(y, \alpha) \quad (2.30)$$

sistemi göz önüne alalım ve $\alpha = \alpha_0$ durumunda, sistemin aşağıdaki özellikleri sağlayan y_0 denge noktası bulunduğunu varsayalım:

$$\frac{\partial f(y_0, \alpha_0)}{\partial y} = 0 \quad (2.31-a)$$

$$\frac{\partial^3 f(y_0, \alpha_0)}{\partial y^3} \neq 0 \quad (2.31-b)$$

$$\frac{\partial^2 f(y_0, \alpha_0)}{\partial \alpha \partial y} \neq 0 \quad (2.31-c)$$

(2.31-b) ve (2.31-c)'nin işaretine bağlı olarak;

- i) $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) durumunda y_0 denge noktası kararlıdır (kararsızdır).
- ii) Her bir $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) değerinde y_0 kararsız hale gelir ve $y_0(\alpha)$ kararlı (kararsız) denge noktasında iki dallanma meydana gelir.

2.6.4. Hopf Dallanma:

Hopf dallanması en az 2x2 lik sistemlerde meydana gelir.

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \alpha), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \alpha). \end{aligned} \tag{2.32}$$

sistemi göz önüne alalım. $y_0 = (y_{10}, y_{20})$ denge noktasında sistemin Jakobien matrisi tekil değil ise sistem bu noktada sürekli olarak diferansiyellenebilir.

2.6.4.1. Hopf Dallanma Teoremi:

$(y_0(\alpha_0), \alpha_0)$ denge noktasında hesaplanan Jakobien matrisin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu kabul edelim:

- i) Parametrenin α_0 kritik değerinde sadece imajiner kısımdan oluşan $\theta(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ kompleks öz değer çiftine sahip olsun yani, $\omega(\alpha_0) \neq 0$ iken $\theta(\alpha_0) = 0$ olsun.

$$\text{ii) } \left. \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} \pi \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0 \tag{2.33}$$

ise sistem periyodik çözüm ailesine sahiptir.

α_0 kritik noktası Hopf dallanma noktası olarak adlandırılır. Kararlı bir çevrim meydana geldiğinde kritik üstü Hopf dallanması, diğer durumda kritik altı Hopf dallanmasına sahibizdir.

(i) ve (ii) koşulları $n \times n$ boyutlu bir diferansiyel denklem sisteminde uyarlanabilir. $n \geq 0$ durumunda inceleyeceğimiz kompleks köklerin dışındaki tüm kökler, teoremin gerektirdiği üzere, negatif reel kısma sahip olur

2.6.6. Genel Kuramlar ve Örnekler

Bir önceki bölümde bahsedildiği üzere;

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (2.34)$$

şeklinde formüle edilen bir dinamik modelin denge durumundaki tüm λ öz değerleri negatif reel kısma sahip ise sistem kararlıdır. Ayrıca, öz değerlerin sayısı modelin boyutuna eşittir. Örneğin, iki terimli bir dinamik sistem λ_1 ve λ_2 gibi iki öz değer ile karakterize edilir.

Modelin özel bir parametresindeki değişim, öz değerlerin reel kısımlarında negatiflikten pozitifliğe doğru bir değişime neden olduğunda, denge durumunun kararlılığında da bir değişim meydana gelir. Model parametrelerindeki değişimin öz değerlerde meydana getirdiği değişimde genel olarak iki durum söz konusudur:

- λ reel öz değer 0 'ı keserek negatiflikten pozitifliğe geçebilir.
- λ_1 ve λ_2 kompleks öz değer çifti, sırasıyla, sıfır olmayan $i\omega$ ve $-i\omega$ değerinde imajiner eksenini keserler.

Ayrıca,

- Kararlı bir düğüm, sadece eyer noktasına dönüşümle bozulabilir ve
- Kararlı bir odak, sadece, kararsız ve odak noktasına geçiş ile bozulabilir.

Yukarıdaki durumlardan ilki, iki tür dallanma için karakteristiktir: kritik ötesi (dallanma noktası) ve eyer-düğüm dallanma (limit noktası). İkincisi ise Hopf dallanması için bir karakteristiktir. Bu tür kararlılık değişimi denge durumunu karakterize eden öz değerlerdeki değişimlere bağlanır.

Kritik ötesi ve eyer-düğüm dallanmaları, alternatif kaynaklarla beslenmenin yanında, aynı popülasyondaki yetişkin bireylerin genç bireyleri yiyecek olarak avladığı, kendi cinsinin etini yiyen bir yamyam türünün popülasyon dinamikleri kullanılarak gösterilebilir. Bu modelde x popülasyondaki genç bireylerin miktarını, y ise yetişkinlerin miktarını gösterebilir. Popülasyon dinamikleri aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi ile tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha y - \delta x - \beta_{xy} \\ \frac{dy}{dt} &= \delta x - \frac{\mu}{\rho + \beta x} y\end{aligned}\tag{2.35-a-b}$$

(2.35-a-b) sisteminde her bir yetişkin bireyin üreme oranı α ile tanımlanırken, αy birim zamandaki tüm yetişkin bireyler tarafından dünyaya getirilen yavru bireylerin toplam miktarını göstermektedir. δ genç bireylerin gelişim hızını gösterirken, δx , birim zamanda olgunlaşan genç bireylerin sayısını modellemektedir. β_{xy} aynı popülasyondaki genç bireyleri yiyerek beslenen yetişkinleri belirtmektedir. Yetişkin bireylerin haricen, kendi türleri dışında farklı besin kaynakları da aradığı varsayılmakta ve bu yoğunluk ρ ile gösterilmektedir. Yetişkin bireylerin ölüm oranının $\rho + \beta x$ 'e eşit olduğu yani, toplam besin miktarı ile ters orantılı olduğu varsayılmaktadır. Orantılılık sabiti μ ile gösterilmektedir. Böylece $\mu y/(\rho + \beta x)$ birim zamanda ölen yetişkin bireylerin toplam sayısını tanımlar. Modelde, genç bireylerin yetişkin bireyler tarafından avlanmak dışında başka bir ölüm sebeplerinin olmadığı varsayılmıştır.

(2.35-b) eşitliğinden sabit durumdaki $\bar{y}$ yetişkin bireylerinin sayısı, $\bar{x}$ genç birey miktarı ile pozitif olarak ilişkilendirilebilir:

$$\bar{y} = \frac{\delta \bar{x}(\rho + \beta \bar{x})}{\mu}\tag{2.36}$$

Bu denge durumundaki $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ miktarlarının tek türlü tanımlandığını belirtir. (2.35a) eşitliğinin sağ tarafında (2.36) eşitliği kullanılıp 0'a eşitlenirse $\bar{x}$ denge durumu için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\delta \bar{x}(\alpha \rho - \mu + \beta(\alpha - \rho)\bar{x} - \beta^2 \bar{x}^2)}{\mu} = 0$$

Model böylece $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ aşikâr denge durumuna ve gerekli şartları sağlayan aşikâr olmayan denge durumuna sahip olur:

$$\beta^2 \bar{x}^2 + \beta(\rho - \alpha)\bar{x} + (\mu - \alpha\rho) = 0\tag{2.37}$$

$$\bar{y} = \frac{\delta\bar{x}(\rho + \beta\bar{x})}{\mu} \quad (2.38)$$

Aşağıda, aşikâr olmayan denge durumu ve bu denge durumunun kararlılığı, yetişkin bireylerin besine bağlı ölüm oranını ölçen μ parametresinin bir fonksiyonu olarak incelenecektir.

μ parametresinin fonksiyonu olarak denge durumundaki $\bar{x}$ 'in grafiğini çizmek için en uygun yöntem, ilk olarak $\bar{x}$ 'in bir fonksiyonu olarak μ 'nün grafiğinin çizmektir. Bağımlı değişken μ ve bağımsız değişken $\bar{x}$ arasındaki ilişki aşağıdaki kuadratik denklem ile verilmiştir:

$$\mu = \alpha\rho + \beta(\alpha - \rho)\bar{x} - \beta^2\bar{x}^2 \quad (2.39)$$

Bu parabol kolaylıkla çizilir ve sonrasında gerekli olan $\bar{x}$ bağımlı değişkeni ve μ bağımsız değişkeni arasındaki ilişkiyi oluşturmak için $\mu = \bar{x}$ doğrusu etrafında döndürülebilir.

Bu modelin Jakobien matrisi aşağıda verildiği gibidir:

$$J = \begin{bmatrix} -\delta - \beta\bar{y} & \alpha - \beta\bar{x} \\ \delta + \frac{\mu\beta}{(\rho + \beta\bar{x})^2}\bar{y} & \frac{\mu}{\rho + \beta\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ denge noktası Jakobien matriste yerine konulursa, öz değerler için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\rho\lambda^2 + (\delta\rho + \mu)\lambda + \delta(\mu - \alpha\rho) = 0 \quad (2.41)$$

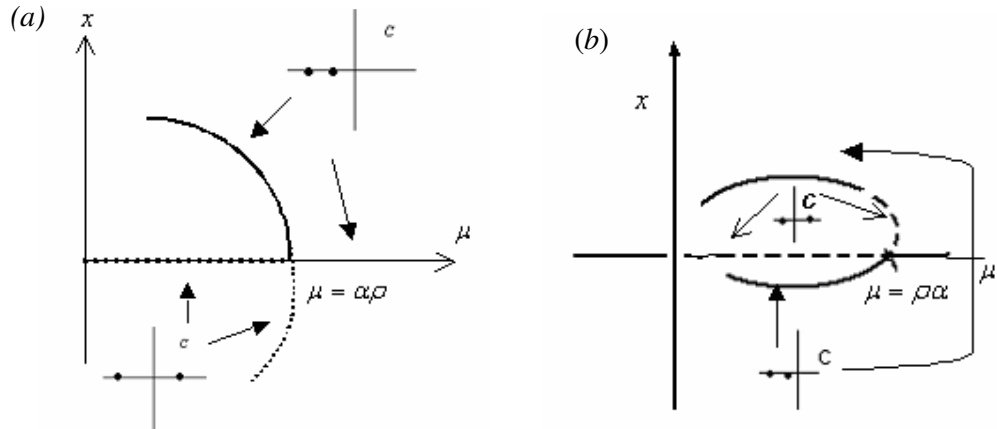
Yukarıdaki eşitlikten, $\frac{\alpha}{\mu/\rho} < 1$ ise, aşikâr denge durumunun reel fakat negatif olmayan iki öz değer ile karakterize edileceği sonucuna varılabilir.

Bu eşitsizliğin sol tarafı, çok düşük popülasyon zenginliğinin şartları altında tüm hayatı boyunca tek bir birey tarafından dünyaya getirilen yavruların beklenen sayısı olarak yorumlanabilir. Popülasyon yoğunluğu düşük olduğunda yoğunluğa bağlı etkiler ortadan kalkacaktır ve ne genç nüfustaki ölüm oranı artacak ne de yetişkin

nüfustaki ölüm oranı azalacaktır (yamyamlıktan dolayı). Böylece eşitsizliğin sol tarafı ömür boyunca üreme miktarı olacaktır.

Aşıkâr denge durumundaki (2.41) karakteristik denklem $\mu = \alpha\rho$ olduğunda denge durumundaki kararlılık değişimini gösterir. $\mu = \alpha\rho$ değerini aşıkâr olmayan denge durumunda (2.39) popülasyondaki genç bireylerin zenginleşme koşulunda yerine konulması (2.39) koşulunun $\bar{x} = 0$ ve $\bar{x} = \frac{\alpha - \rho}{\beta}$ çözümlerini gösterir.

$\mu = \alpha\rho$ için, aşıkâr ve aşıkâr olmayan (2.39) denge durumu koşulu aynı $\bar{x} = 0$ çözümünü verir. Her iki denge durumu değerleri μ parametresinin bir fonksiyonu olarak çizilirse, $\mu = \alpha\rho$ parametre değerinde aşıkâr denge durumunun eğrisi ile aşıkâr olmayan denge durumunu gösteren eğrinin kesiştiği görülür. Ayrıca $\bar{x} = \frac{\alpha - \rho}{\beta}$ eşitliği, $\mu = \alpha\rho$ değeri için, $\alpha > \rho$ durumunda, ikinci bir pozitif, aşıkâr olmayan denge durumunun varlığını göstermektedir [8].



Şekil 2.7: μ nün fonksiyonu olarak x in kararlılık grafikleri

(2.7-a-b) grafikleri, $\alpha < \rho$ ve $\alpha > \rho$ durumlarındaki denge durumundaki $\bar{x}$ zenginliği ve yetişkin ölüm oranı μ arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu iki figürün her biri iki eğri gösterir: Aşıkâr denge durumunu gösteren eğri ve μ parametresinin bir fonksiyonu olarak aşıkâr olmayan denge durumunu gösteren eğri. Bu eğrilerin her biri için figürler ayrıca hangi parametre değerleri için özel denge durumunun kararlı hangileri için kararsız olduğunu gösterir. İki figüre α ve ρ 'ya bağlı olarak meydana gelebilecek iki ayrı durum için temsil etmektedir:

- $\alpha < \rho$ ise, aşikâr olmayan denge durumunu temsil eden eğri, aşikâr denge durumunu temsil eden eğri ile kesiştikleri $(\mu, \bar{x})$ noktasının soluna doğru kıvrılır. Bu parametre değerleri için aşikâr olmayan denge durumunu belirleyen (2.39) koşulu, $\mu = \alpha\rho$ için negatif $\bar{x} = (\alpha - \rho)/\beta$ genç bireylerin popülasyon yoğunluğunda, ikinci bir aşikâr olmayan çözüme sahiptir. Bu değerlendirmeye uygun olarak, $\bar{x}$ 'nün fonksiyonu olarak μ ile belirlenen (2.39) kuadratik eşitliğinin $\bar{x}$ 'nün negatif değerinde maksimumu olan bir parabol olduğu sonucuna varabiliriz. Böylece, bu koşul artan $\bar{x}$ değeri için μ 'nün monoton olarak azaldığını belirler.
- $\alpha > \rho$ ise, aşikâr olmayan denge durumunu temsil eden eğri, aşikâr denge durumunu temsil eden eğri ile kesiştiği $(\mu, \bar{x}) = (\alpha\rho, 0)$ noktasında sağa doğru kıvrılır. Bir başka deyişle, başlangıçta eğri ölüm oranı parametresi μ 'nün yüksek değerlerine doğru uzanırken sonrasında $\bar{x}$ 'in bir pozitif değerinde μ 'nün daha düşük değerlerine geri döner (Şekil 2.7-b). Bu durumda $\mu = \alpha\rho$ için ikinci bir $\bar{x} = (\alpha - \rho)/\beta$ aşikâr olmayan denge durumu yoğunluğu vardır. $\alpha > \rho$ olduğunda $\bar{x}$ 'nün fonksiyonu olarak μ ile belirlenen (2.39) kuadratik eşitlik $\bar{x}$ 'in pozitif değerinde maksimumu olan bir paraboldür.

$\bar{x}$ ve $\bar{y}$ 'nün pozitif değerlerinde (2.40) Jakobien matrisinin iz düşümünün negatif olduğu açıktır. Böylece, reel öz değerlerden biri pozitif olduğunda aşikâr olmayan denge durumu bozulabilir. Bu durumda denge durumu kararlı düğüm veya odak ya da kararsız eyer nokta olacaktır. (2.40) Jakobien matrisinin determinanı, (2.36) $\bar{y}$ için açılımı uygulandıktan sonra aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\det J = \frac{\delta(3\beta^2\bar{x}^2 + 2\beta(\rho - \alpha)\bar{x} + (\mu - \alpha\rho))}{\rho + \beta\bar{x}} \quad (2.42)$$

$\bar{x}$ 'in küçük, pozitif değerleri için $\alpha < \rho$ olduğu sürece determinant pozitifdir. Böylece, $\alpha < \rho$ durumu için, Jakobien matrisin iz düşümü negatif iken determinanı pozitif olduğundan denge durumu daima kararlıdır.

Diğer yandan, $\alpha > \rho$ durumunda, $\det J$ determinanı küçük fakat pozitif $\bar{x}$ değerleri için negatif olacağından aşikâr olmayan denge durumu bir eyer noktasıdır.

$$\bar{x} = \frac{\alpha - \rho}{2\beta} \quad (2.43)$$

olduğunda $\bar{x}$ 'nün değerlerinin artması ile determinantta sıfıra eşit olmak için artar. $\bar{x}$ 'nün bu değerinde eğri μ 'nün maksimum değerine ulaştığı ve μ değerlerinin daha altına doğru geri büküldüğü aşikâr olmayan denge durumundadır. μ ve $\bar{x}$ arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde belirtilir:

$$(\mu, \bar{x}) = \left(\frac{(\alpha + \rho)^2}{4}, \frac{\alpha - \rho}{2\beta} \right) \quad (2.44)$$

μ 'nün bu maksimum değerinde aşikâr olmayan denge durumu eyer noktasından kararlı düğüme dönüşür. $\bar{x}$ arttıkça Jakobien matrisin iz düşümü negatif kalırken determinantta artacaktır. Böylece

$$\bar{x} > \frac{\alpha - \rho}{2\beta} \quad (2.45)$$

için, aşikâr olmayan denge durumu daima kararlı olacaktır [8]

2.6.6.1. Örnek 3 (Kritik Ötesi Dallanma):

μ nün tüm değerleri için bir eyer, bir düğüm noktasına sahip olan, aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x^2 - y + \mu x. \end{aligned} \quad (2.46)$$

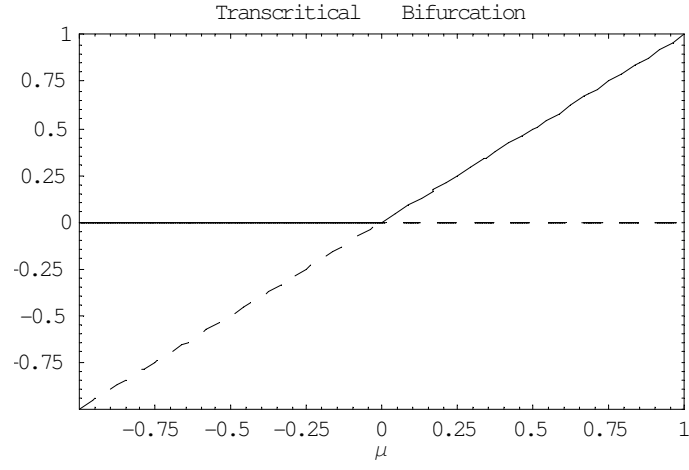
Sistemin denge noktaları $E_0 = (0,0)$ ve $E_1 = (\mu,0)$ dır ve bu denge noktalarına karşılık gelen ve $x^* = 0, \mu$ ile tanımlanan, öz değerler,

$$E_0 : -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu - 8x^*} \right) \quad (2.47)$$

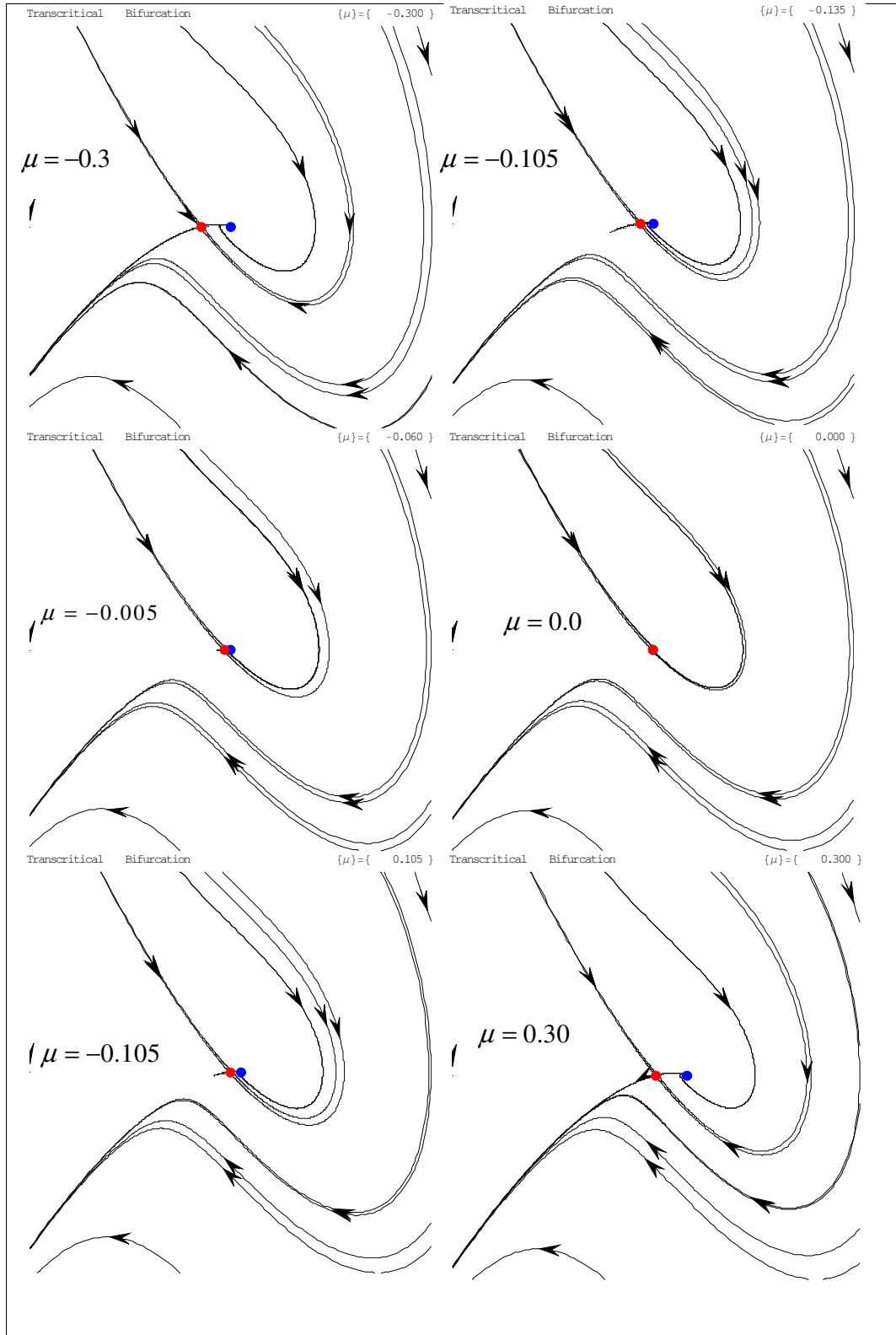
$E_0 = (0,0)$ denge noktasında ki öz değer:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu} \right) \quad (2.48)$$

dür ve denge noktası $\mu < 0$ için kararlı spiral düğüm, $\mu > 0$ için eyer noktadır [9].



Şekil 2.8: μ 'nün fonksiyonu olarak denge durumunun gösterimi. Kesikli çizgiler kararsız, düz çizgiler kararlı.



Şekil 2.9: μ 'nün çeşitli değerleri için, denge noktasının komşuluğunda alınan çeşitli başlangıç değerleri için, sistemin faz portresi. Denge noktası, $\mu = 0$ için, sağ tarafta düğüme sol tarafta eyer noktaya benzemektedir.

$E_1 = (\mu, 0)$ denge noktasındaki öz değerler:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\mu} \right) \quad (2.49)$$

dir ve denge noktası $\mu < 0$ için eyer, $0 < \mu < 1/4$ için kararlı düğüm, $1/4 < \mu$ için kararlı spiral düğümdür.

$\mu \neq 0$ olduğunda bir eyer, bir düğüm nokta vardır. $\mu = 0$ da tek bir öz değer vardır: (0,-1)

Kritik ötesi dallanmada μ parametresi, $\mu = 0$ 'dan geçerken E_0 ve E_1 arasında sistemin kararlılığı değişmektedir.

2.6.6.2. Örnek 4 (Kritik Ötesi Dallanma):

(2.35-a-b) yamyamlık modelinin analizinden $\mu = \alpha\rho$ değerinde, sırasıyla, aşikâr ve aşikâr olmayan denge durumlarını gösteren eğrilerin kesiştikleri söylenebilir. μ ' nün azalan değerleri için aşikâr denge durumunun kararlılığı bu kesişim noktasında kararlı bir düğümden eyer noktasına dönüşürken, aşikâr olmayan denge durumu eyer noktasından kararlı bir düğüme dönüşür. Diğer bir ifadeyle, bu denge durumları kesim noktasında kararlılık karakteristiklerini değiştirirler. Her bir sabit durum, ikisi de reel olan bir çift öz değer ile tanımlanır. $(\mu, \bar{x}) = (\alpha\rho, 0)$ kesim noktasında bu iki öz değer çiftinden biri (bir çift aşikâr denge durumu ile diğer ise aşikâr olmayan denge durumu ile ilgili) daima negatif iken, diğer çift sıfır değerini alır. Diğer bir ifadeyle, kesişim noktasında iki öz değer aynı zamanda sifıra eşit olacaktır, fakat farklı iki denge durumuna ait olacaklardır. μ değeri $\alpha\rho$ kritik değerinde yukarıdan aşağıya düşerken aşikâr denge durumunun uygun olan sıfır öz değeri reel kısımların pozitif olduğu kompleks yarı düzleminin sağına doğru hareket edecektir. Eş zamanlı olarak aşikâr olmayan denge durumunda uygun olan sıfır öz değeri sola reel kısımların negatif olduğu kompleks yarı düzleme doğru hareket eder.

$\mu = \alpha\rho$ değerinde meydana gelen denge durumu karakteristiklerindeki değişimler kritik ötesi dallanma için göstergeci. $(\mu, \bar{x}) = (\alpha\rho, 0)$ kesişim noktası dallanma noktası olarak ifade edilir. Kritik ötesi dallanmalar popülasyon dinamiklerinde

oldukça yaygındır. Kritik ötesi dallanmanın karakteristik özellikleri aşağıda belirtildiği gibidir:

- Dallanma noktası, modelin farklı denge durumlarını gösteren iki eğrinin kesişim noktasıdır.
- Kesişim noktasında her iki denge durumu da sıfır öz değere sahiptir.
- Kesişim noktasına doğru giderken, sıfır öz değerlerden biri kompleks düzlemin soluna diğeri ise sağına doğru kayar. Böylece, denge durumları karakteristik kararlılıklarını değiştirir.

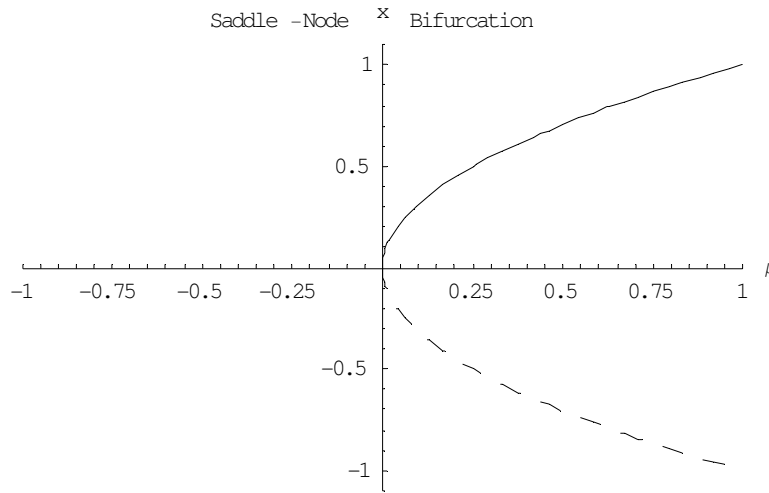
Bu özellikler sadece dallanma noktası komşuluğundaki öz değerlerde meydana gelen değişime bağlıdır. Bundan dolayı, iki denge eğrisinin kesim noktasında karakteristiklerin kararlılığında değişim meydana gelecektir.

2.6.6.3. Örnek 5 (Eyer-Düğüm Dallanması):

$$\begin{aligned} x' &= \mu - x^2, \\ y' &= -y \end{aligned} \tag{2.50}$$

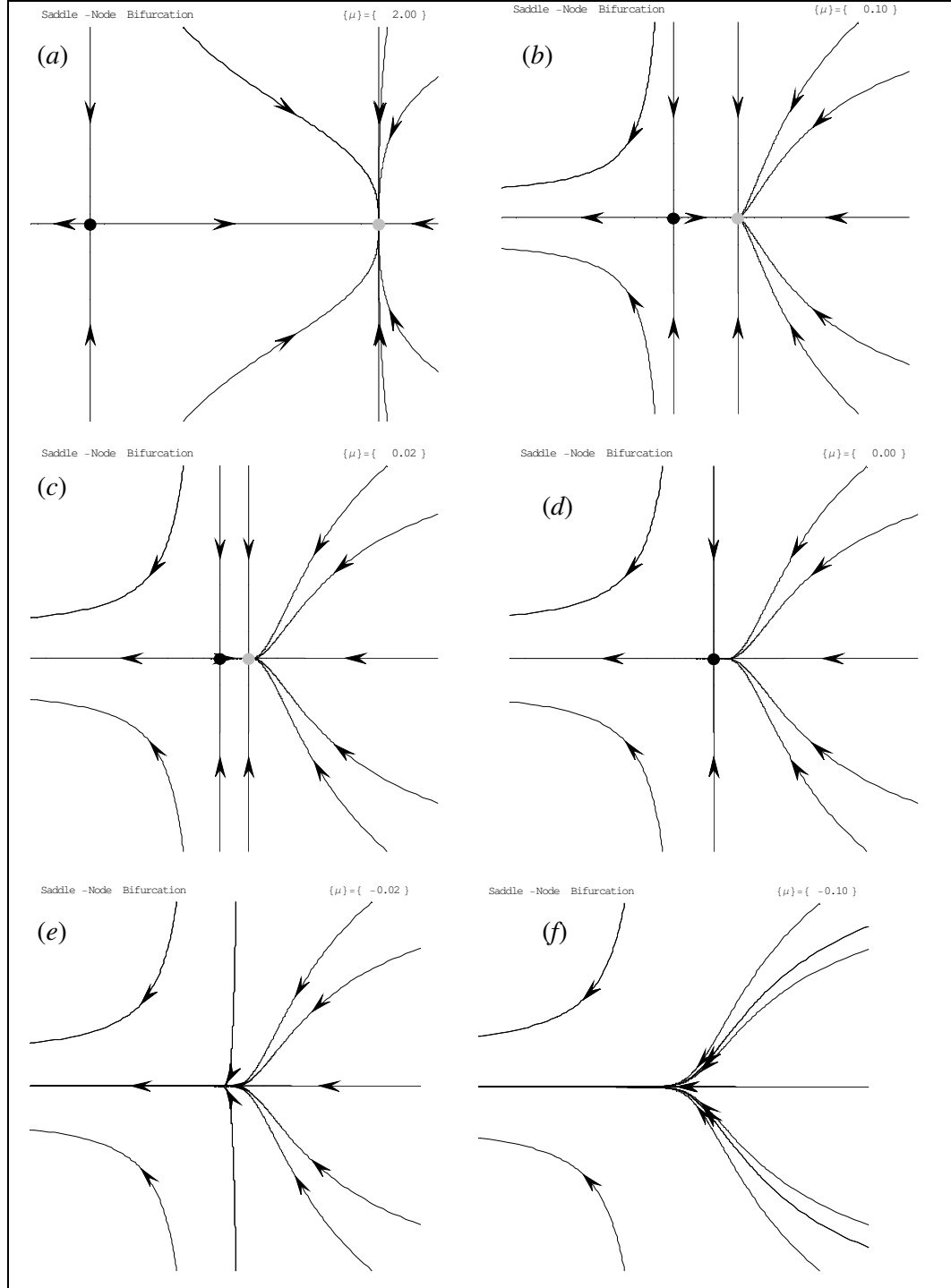
sistemini göz önüne alalım. Bu sistem $\mu > 0$ için iki, $\mu = 0$ için bir denge noktasına sahiptir. $\mu < 0$ için denge noktası yoktur [9].

$\mu > 0$ için öz değerler: $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ dır.



Şekil 2.10: μ nün bir fonksiyonu olarak, denge noktasındaki x 'in grafiği Düz çizgi kararlı durumu, kesikli çizgi kararsız durumu göstermektedir.

μ 'nün çeşitli değerleri için, denge noktası komşuluğunda alınan çeşitli başlangıç koşulları ile sistemin faz portresini çizdirelim.



Şekil 2.11: $\mu = \{2.0, 0.10, 0.2, 0.0, -0.2, -0.10\}$ değerleri için sistemin durumu. Sağ tarafta kararlı düğüm varken sol tarafta eyer nokta mevcuttur

2.6.6.4. Örnek 6 (Eyer-Düğüm Dallanması):

(2.35-a-b) sisteminde $(\mu, \bar{x}) = \left(\frac{(\alpha + \rho)^2}{4}, \frac{\alpha - \rho}{2\beta} \right)$ noktasında, $\alpha > \rho$ değerleri için

aşikâr olmayan denge durumunu gösteren eğri bir extremuma sahiptir. (Şekil 2.7-b).

$(\alpha + \rho)^2/4$ den çok az küçük olan μ değerleri için eyer nokta ve kararlı düğüm gibi iki denge durumu var iken, çok az büyük olan μ değerleri için hiçbir suretle aşikâr olmayan denge durumu yoktur. Bu noktada, aşikâr olmayan denge durumunun kararlılığı kararlı düğümünden, eyer noktaya dönüşür. Eğrinin extremum noktası limit nokta olarak adlandırılır. Limit nokta civarında meydana gelen denge durumu karakteristiklerindeki değişim eyer-düğüm dallanma olarak adlandırılır. Çünkü $\mu = (\alpha + \rho)^2/4$ 'deki limit nokta değerinden geçen μ 'nün değeri arttığında, eyer nokta ve kararlı düğüm birleşir ve kaybolur. Kararlılıktaki değişim yine reel değerli öz değerlerin, denge durumu eğrisi limit nokta civarında izlendiğinde işaret değiştirmesi ile ilişkilidir. Genel olarak aşağıdaki ifadeleri belirtebiliriz:

- Bir limit noktası parametre değerlerinin uzandığı denge durumu eğrisinde bir noktadır,
- Limit noktasında eyer nokta ve kararlı düğüm birbirine karışıp ortadan kaybolur ya da başka bir ifadeyle, limit nokta civarında denge durumu reel değerli öz değerler işaret değiştirdikleri için, kararlılığı değişir.

Herhangi bir türdeki dinamik bir sistemde çok sık meydana gelen limit noktalar resmedilebilir. Limit noktasının komşuluğunda dinamiklerin karakteristikleri modelden bağımsızdır ve denge durumunu karakterize eden öz değerlerdeki değişimler ile tamamıyla belirlenebilirler.

Bundan dolayı, bir modelin analizi esnasında, bir denge durumu limit nokta gösterir ve bu noktanın komşulundaki denge durumunu kararlılık özelliği hakkında doğrudan doğruya bilgi verir. Alternatif olarak, dinamik bir modelin sayısal simülasyonu esnasında, parametre değerlerinin belirli bir aralığı için denge durumuna ulaşırsa fakat parametrelerdeki küçük artım veya azalışlar aniden denge durumlarının kaybolmasına neden olursa limit noktasının varlığı ile ilgili şüphe duyulabilir. Böylece eyer noktanın varlığı başlangıçta yaklaşılan denge durumuna yakındır.

2.6.6.5. Örnek 7 (Kritik Altı Hopf Dallanması):

Aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(x^2 + y^2 + \mu)(1 - x^2 - y^2), \\y' &= x + y(x^2 + y^2 + \mu)(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}\tag{2.51}$$

Sitemin denge noktası $(0,0)$ dır. Denge noktasında sistemin öz değerleri:

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\tag{2.52}$$

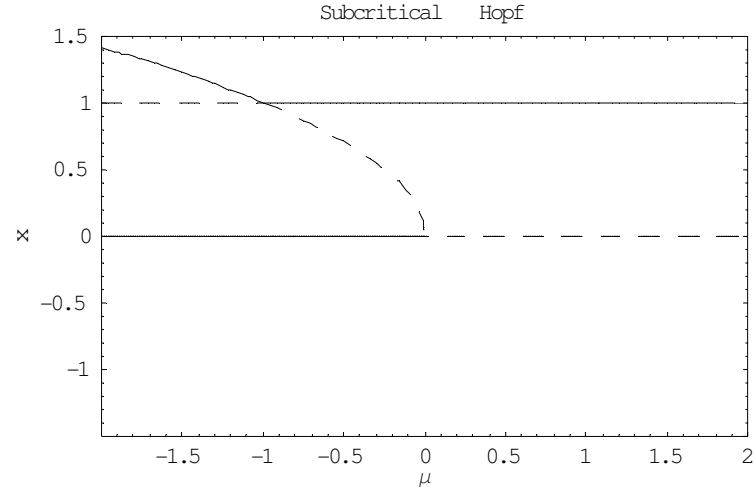
Böylece $\mu < 0$ değerleri için $(0,0)$ denge noktası kararlı spiral düğüm, $\mu > 0$ için ise kararsız spiral düğümdür. $\mu = 0$ da ise öz değerler $\lambda_{\pm} = \pm i$ dir. Sadece imajiner kısımdan oluşan bu öz değerler bir merkez (center) belirtir. $\mu = 0$ 'daki dallanmaya kritik altı hopf dallanması adı verilir.

Kutupsal koordinatlara geçilir ise:

$$\begin{aligned}r' &= -r(-1 + r^2)(r^2 + \mu), \\ \theta' &= 1\end{aligned}\tag{2.53}$$

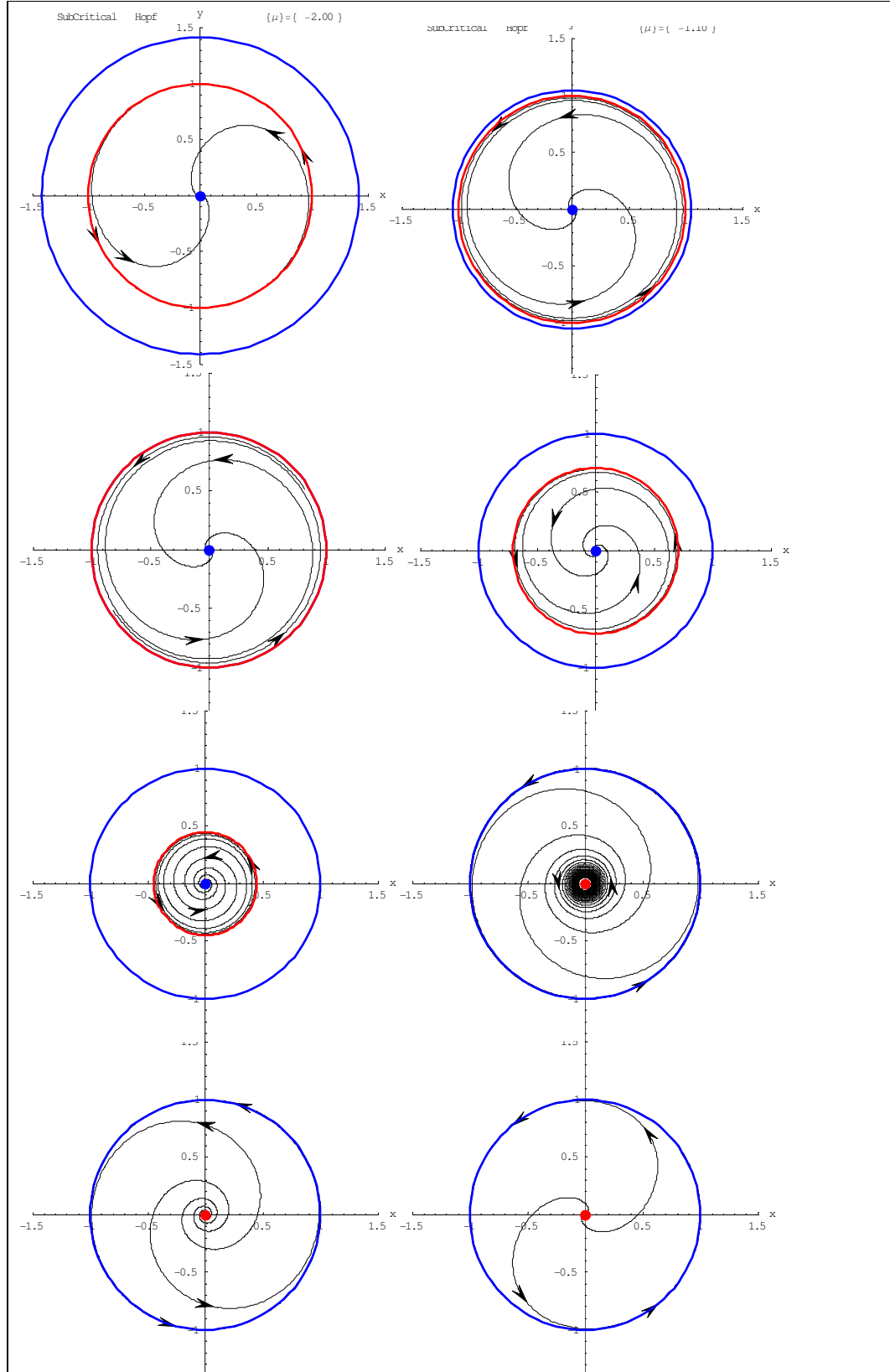
elde edilir. $r = 1$, $r = \sqrt{-\mu}$ ve negatif μ 'ler için limit çevrim mevcuttur. $\mu < -1$ için $r = \sqrt{-\mu}$ deki limit çevrim kararlı, $r = 1$ deki limit çevrim kararsızdır. $-1 < \mu < 0$ için $r = \sqrt{-\mu}$ deki limit çevrim kararsız $r = 1$ deki kararlıdır. Buradan μ 'nün -1 den geçerken limit çevrimin kritik ötesi dallanmaya sahip olduğu görülür. $\mu \rightarrow 0^-$ iken kararsız çevrim denge noktasını yutar. $\mu > 0$ için tek bir kararlı çevrim vardır.

$\mu < 0$ için kararlı denge noktasında bulunan sistemi düşünelim. μ 'nün değerini arttırdıkça kararsız çevrim denge noktasına doğru büzülecektir. μ sıfır olduğunda denge noktası kararsız olacaktır. μ 'nün değerine göre sistemin kararlılığını belirten aşağıdaki diyagramda kesikli çizgilerde sistem kararsız, düz çizgilerde ise kararlıdır.



Şekil 2.12: Sistemin μ 'ye bağlı kararlılığı

Denge noktası yakınında alınan iki yörünge ile sistemin μ ' ya bağlı durumu şekil 2.13 de gösterilmiştir. Kırmızı renk kararsız durumu, mavi ise kararlı durumu göstermektedir.

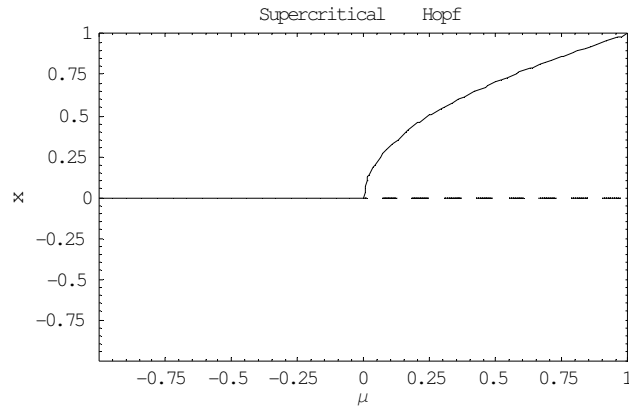


Şekil 2.13: $\mu = \{-2, -1.10, -1.00, -0.5, -0.2, 0.0, 0.2, 1.0\}$ değerlerinde sistemin faz portresi

Kritik üstü Hopf dallanma için aşağıdaki sistemi ele alalım:

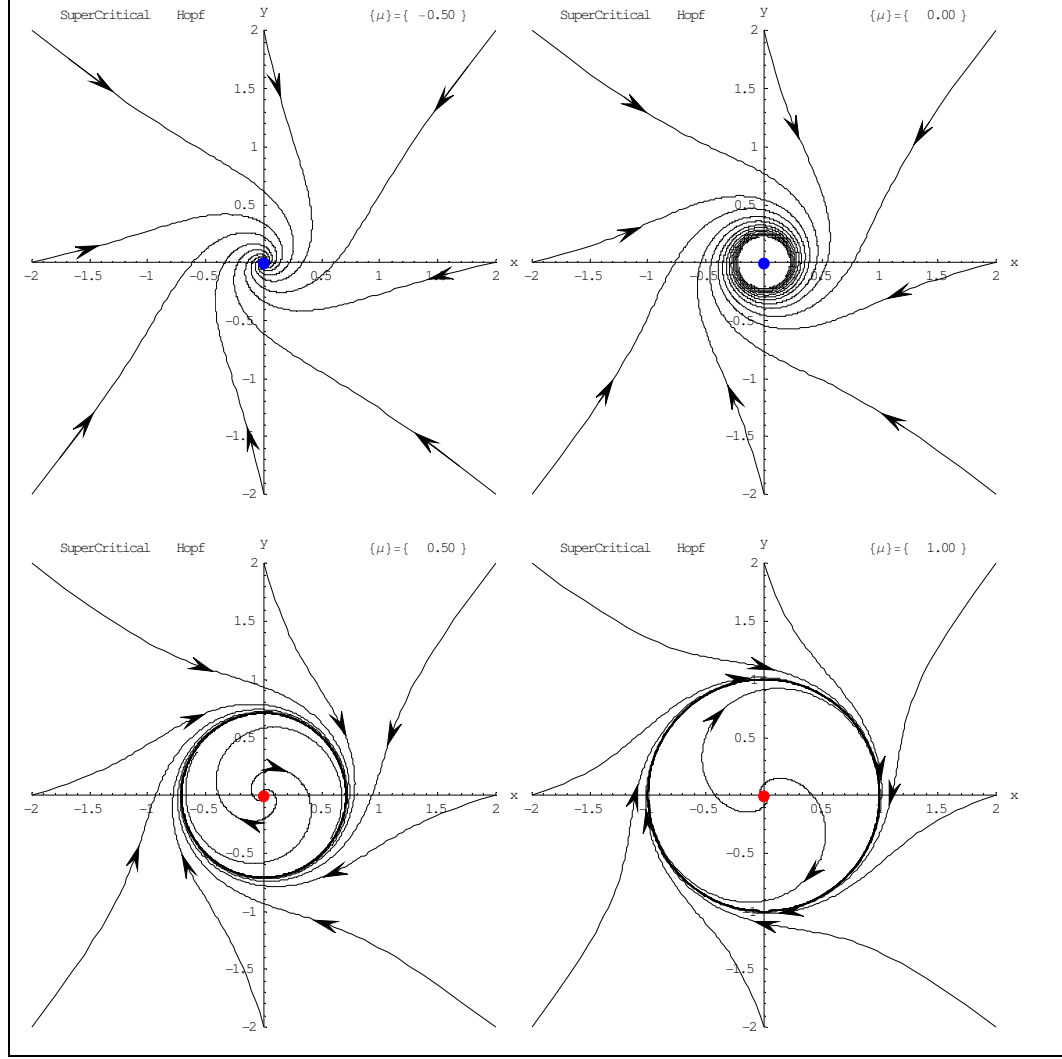
$$\begin{aligned} x' &= y - x(x^2 + y^2 - \mu), \\ y' &= -x - y(x^2 + y^2 - \mu). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sistemin sadece $(0, 0)$ denge noktası vardır. Öz değerler $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ dir ve sistemin denge noktasının kararlılığı kritik altı incelemesinin yapıldığı sistem ile aynıdır. μ 'nün fonksiyonu olarak sistemin kararlılık grafiği şekil 2.14 de gösterildiği gibidir. Kesikli çizgiler kararsızlığı kararlı çizgiler kararlılığı göstermektedir.



Şekil 2.14: S istemin μ 'ye bağlı kararlılığı

Denge noktası komşuluğunda seçilen başlangıç değerleri için μ 'nün çeşitli değerlerinde sistemin faz portresi şekil 2.15 de verildiği gibidir:



Şekil 2.15: $\mu = \{-0.5, 0.0, 0.5, 1.0\}$ değerlerinde sistemin durumu

2.6.6.6. Örnek 8 (Hopf Dallanması):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{axy}{1 + ahx}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\epsilon axy}{1 + ahx} - \mu y \end{aligned} \quad (2.55)$$

Rosenzweig-MacArthur modeli olarak bilinen (2.55) modelinde, x ve y sırasıyla av(besin) ve avcı(tüketici) popülasyonlarını göstermektedir. r , avcının yokluğunda avın üssel olarak büyüme oranıdır. μ , avın yokluğunda, avcının ölüm oranıdır. a , avcının birim zamanda saldırma oranı, ϵ ise av yok olduğunda, avcının yumurtalarını dönüştürmesidir. K çevrenin avı taşıma kapasitesi, $(1 - x/K)$ ise avın

lojistik olarak büyümesi olarak tanımlanır. Rosenzweig-MacArthur modeli aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- Daima eyer nokta olan aşikâr bir denge durumuna sahiptir

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad (2.56)$$

- Sadece avın bulunduğu ve

$$K < K_c = \frac{\mu}{a(\varepsilon - \mu h)} \quad (2.57)$$

olduğu sürece kararlı olan $(x_2, y_2) = (K, 0)$ denge durumuna sahiptir. K 'nin daha büyük değerlerde avaya bağlı denge durumu bir eyer nokta olacaktır.

- Av ve avcının pozitif değerleri için, $K > K_c$ olduğunda

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{\mu}{a(\varepsilon - \mu h)}, \frac{\varepsilon r(aK(\varepsilon - \mu h) - \mu)}{a^2(\varepsilon - \mu h)^2 K} \right) \quad (2.58)$$

Aşikâr olmayan denge durumuna sahiptir. Bu denge durumu, K taşıma kapasitesi

$$K_s = \frac{\varepsilon + \mu h}{ah(\varepsilon - \mu h)} \quad (2.59)$$

değerini aştığında, kararsız ya da limit çevrim haline gelecektir.

Yukarıda verilen sonuçlardan, sadece avaya bağlı denge durumu ve aşikâr olmayan denge durumunu gösteren eğrilerin kesiştiği ve daha sonra aşikâr olmayan denge durumunun pozitif değere döndüğü $K = K_c$ değerinde kritik ötesi dallanma meydana geleceği kolaylıkla görülmektedir. Böylece avaya bağlı denge durumunun kararlı düğümden eyer noktaya dönüştüğü $K = K_c$ değerinde bir dallanma noktası meydana gelir ve aşikâr olmayan denge durumu tam tersi şekilde değişir.

$K = K_s$ değerinde aşikâr olmayan denge durumu kararlılığı Hopf dallanmasına doğru değiştirir. Bu tür dallanma aşağıdaki şekilde karakterize edilir:

- Bir kompleks öz değer çifti imajiner ekseni, reel kısımları pozitif olacak şekilde, kompleks düzlemin sol yarı kısmından sağ yarı kısmına doğru keser,

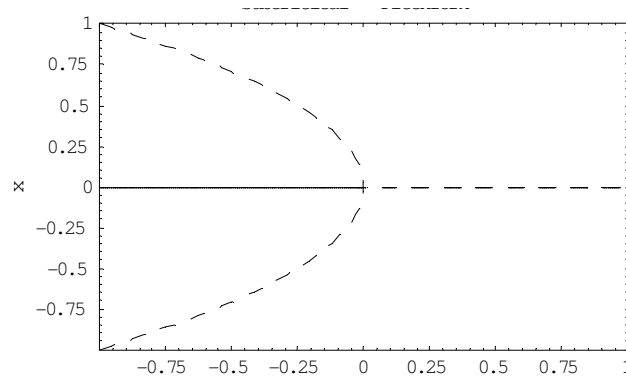
- Dallanmada bir limit çevrim meydana gelir. Limit çevrim durum uzayında kapalı invariant bir düğümdür. Bunun anlamı eğer başlangıç noktası limit çevrimin sağında seçilirse, sistemin durumu her zaman için limit çevrim boyunca hareket edecektir. Dallanma noktası komşuluğundaki en az bir parametre değeri için limit çevrim bir çekici olacaktır, yani limit çevrime yakın başlangıç koşulları ile başlanırsa sistemin durumu uzun vadede, limit çevrime yaklaşacaktır. Dallanma noktasında limit çevrimin genliği başlangıçta sonsuz küçük olurken, dallanma noktasından kararsız parametre bölgesine doğru hareket edildiğinde genlik artacaktır.

2.6.6.7. Örnek 9 (Kritik Altı Pichfork Dallanma):

Aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım:

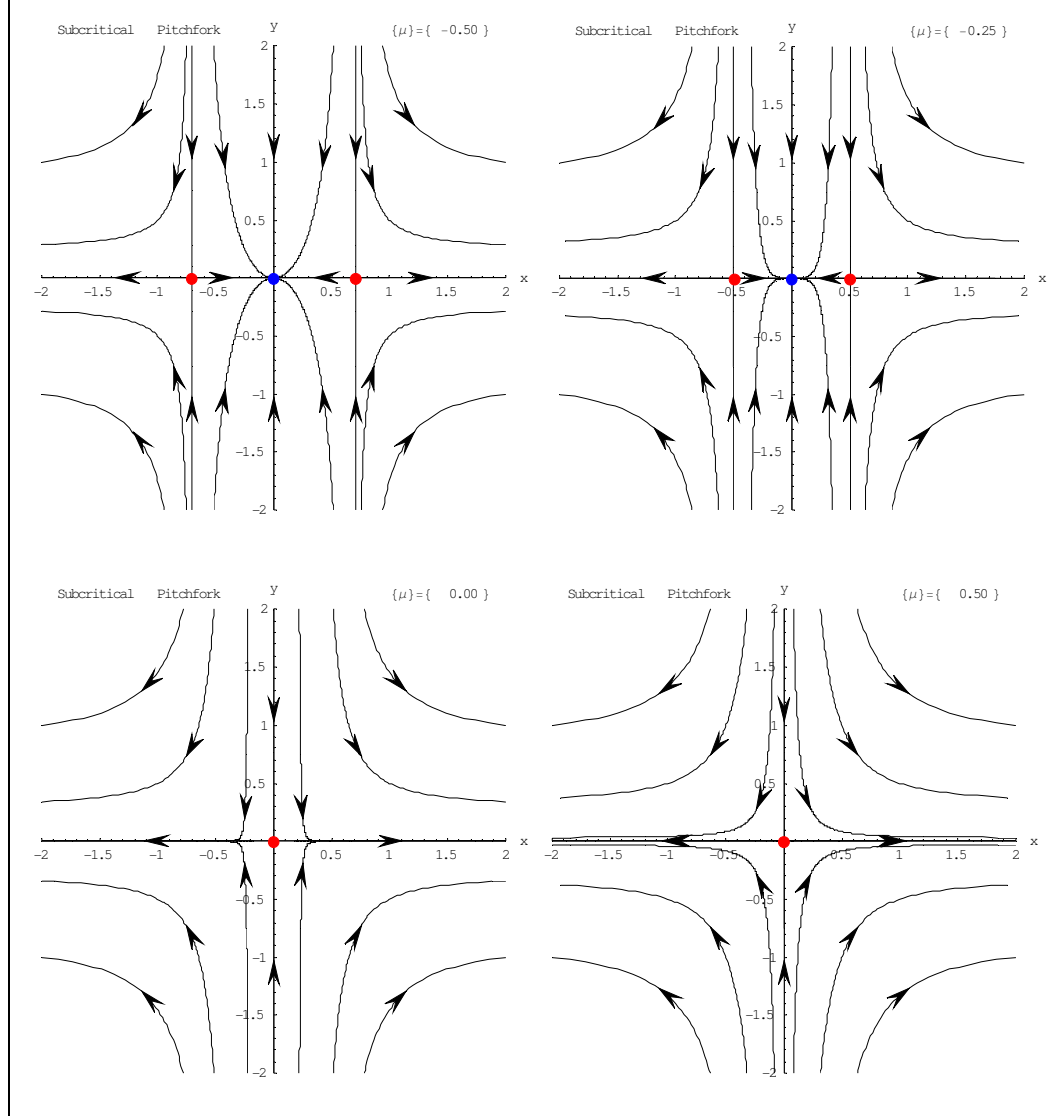
$$\begin{aligned} x' &= \mu x + x^3, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sitem $\mu \geq 0$ için bir, $\mu < 0$ için üç adet denge noktasına sahiptir. μ artarken üç denge noktası bir denge noktasında birleştiği için $\mu = 0$ durumunda dallanma vardır. μ 'nün fonksiyonu olarak sistemin kararlılık grafiği şekil 2.16 da gösterildiği gibidir. Kesikli çizgiler kararsızlığı kararlı çizgiler kararlılığı göstermektedir.



Şekil 2.16: S istemin μ 'ye bağlı kararlılığı

Denge noktası komşuluğunda seçilen başlangıç değerleri için μ 'nün çeşitli değerlerinde sistemin faz portresi şekil 2.17'de verildiği gibidir:



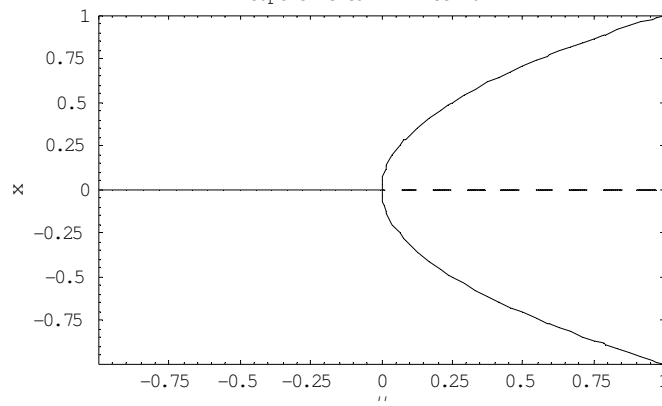
Şekil 2.17: Kritik altı Pichfork dallanması $\mu = \{-0.50, -0.25, 0.0, 0.50\}$

2.6.6.8. Örnek 2.10 (Kritik Üstü Pichfork Dallanma):

Aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım:

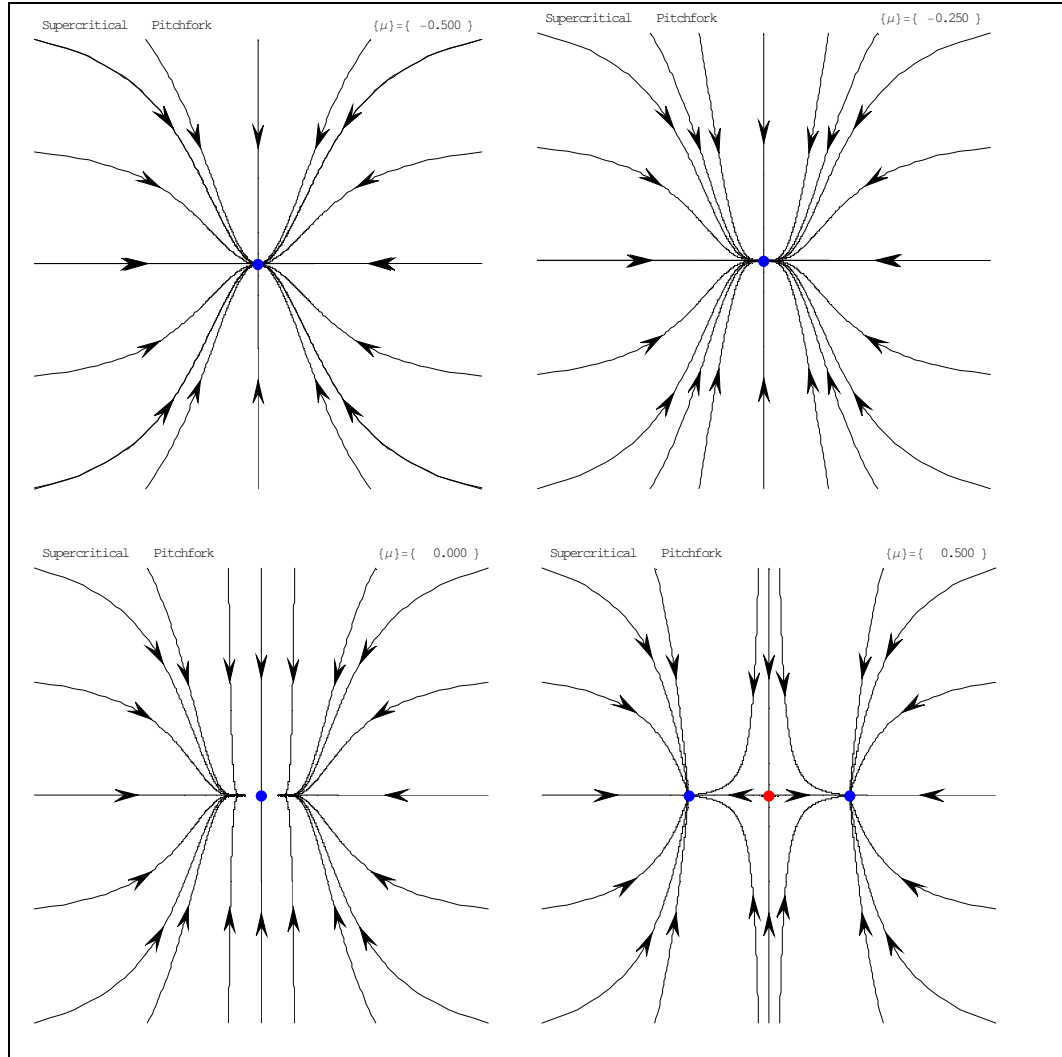
$$\begin{aligned} x' &= \mu x - x^3, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Sitem $\mu \leq 0$ için bir, $\mu > 0$ için üç adet denge noktasına sahiptir. μ azalırken üç denge noktası tek bir denge noktasında birleştiği için $\mu = 0$ durumunda dallanma vardır. μ 'nün fonksiyonu olarak sistemin kararlılık grafiği şekil 2.18'de gösterildiği gibidir. Kesikli çizgiler kararsızlığı kararlı çizgiler kararlılığı göstermektedir



Şekil 2.18: Sistemin μ 'ye bağlı kararlılığı

Denge noktası komşuluğunda seçilen başlangıç değerleri için μ 'nün çeşitli değerlerinde sistemin faz portresi şekil 2.19'da verildiği gibidir:



Şekil 2.19: $\mu = \{-0.50, -0.25, 0.0, 0.50\}$ değerlerinde kritik üstü Pitchfork dallanması

2.7 Üç Boyutlu Durum Uzayı ve Kaos

Bilgisayarların üretilmesinden önce matematiksel modellerin, matematikçiler ve günün elverdiği teknoloji ile çözülebilmesi için basitleştirilmesi gerekmektedir. Örneğin, gezegenlerin güneş etrafındaki hareketlerini tanımlayan karmaşık denklemler, gezegenlerin kendileri arasındaki çekim etkileri önemsiz kabul edilerek sadece güneşin çekim etkisine bağlı bir sisteme indirgenirdi.

Güçlü bilgisayarlar yardımı ile modelleri basitleştirmelerden kurtararak, karmaşık modellerin evrimini görmek mümkündür. Basitleştirmelerden kurtulan matematiksel modeller hızla daha karmaşık ve nonlinear bir hal almakta ve davranışları genelde basitleştirilmiş lineer modellerden çok farklı olmaktadır. Oldukça yeni bir bilim olan nonlinear dinamik, ‘kaotik’ davranışlar sergileyen modelleri de kapsayan nonlinear modellerin davranışları üzerinde çalışmaktadır [10].

Peki, ‘kaotik’ davranış nedir?

Kaotik sistemler, düzen ve düzensizliğin bir kombinasyonu olarak tanımlanabilecek geniş yelpazeli davranışlar göstermektedir. Kaotik sistemlerin garip ve öngörülemez davranışlarının temelde üç nedeni vardır:

Birincisi; kaotik sistemler, bir önceki periyottan elde edilen çıktının bir sonraki periyot için girdi olarak kullanıldığı geri-beslemeli sistemlerdir. Değişkenler arasındaki ilişki nonlinear olduğundan neden ve etki arasındaki ilişki orantılı değildir.

İkincisi; önemsiz gibi görülen girdiler zaman ilerledikçe sistemin davranışı büyük ölçüde etkileyebilirler. Bu fenomenin en popüler versiyonu, 1960’ların başında Edward Lorenz tarafından açıklanan ‘Kelebek Etkisi’ dir. Bu teoriye göre, Brezilya yağmur ormanlarında kanat çırpın bir kelebek, birkaç ay sonra Atlantik Okyanusu’nda bir kasırgaya yol açabilir. Kelebek etkisi, bir modeldeki herhangi bir değişkenin önemsiz olduğu düşünülerek yok sayılmasının modelin gerçekliği yansıtmamasına engel olacağını ileri sürmektedir.

Kaotik sistemlerin üçüncü özelliği ise, başlangıç koşullarına olan hassas bağımlılıktır. Henri Poincare bu konu hakkında “ Dikkatimizden kaçan küçük bir neden, görmekten kaçamayacağımız bir etki yaratabilir ve biz de bu etkinin şansa

bağlı olduğunu söyleriz. Başlangıç koşulundaki küçük farklılıklar çok büyük değişikliklere yol açabilir. Tahmin yapmak imkânsız bir hale gelir...” diye yazmıştır.

Bunlardan da anlaşılacağı üzere, bir kaotik sistemde; değişkenler arasındaki ilişki, önemsiz görünen değişkenler ve sistemin başlangıç koşulları, sistemin davranışı açısından büyük önem taşımaktadır.

Lorenz “...ben periyodik olmayan davranış özellikleri gösteren hiçbir fiziksel sistemde öngörü yapmanın mümkün olmadığını artık anlamış bulunuyorum” diyerek kaos teorisinde temel olan bir noktadan da söz eder. Lorenz’in bu çalışmasından sonra “kaos teorisi”nin açıklamaya çalıştığı dıştan düzensiz olarak görünen ama içsel bir düzene sahip olan kaotik sistemlerin iki ana noktası net olarak ortaya konulur. 1- Başlangıç durumuna hassas bağımlılık 2 - Rasgele olmama durumu. Daha açık bir ifade ile: Dünyadaki birçok olay aslında kaotik bir yapılanmaya sahiptir (her şey bize öğretildiği gibi lineer yani doğrusal değildir); bir kar tanesinin oluşumu, sigara dumanının yükselişi, ağaç köklerinin gelişimi, kuş sürülerinin uçuşu, denizdeki dalgaların hareketleri... Bütün bu kaotik yapılanmalar kendi içerisinde bir düzenliliğe sahiptir ve rasgele değillerdir [10].

Kaotik davranış durum uzayındaki yakın yörüngelerin ayrılması ile karakterize edilir. Zamanın fonksiyonu olarak, iki yakın yörünge arasındaki ayrılma üssel olarak artar.

Kaotik davranış üreten üç ya da daha fazla boyutlu durum uzayının önemli bir özelliği; yörüngelerin kesişmeksizin birbirlerini sararak ve kendilerini tekrar etmeksizin sınırlı bir bölge içerisinde kalma yetenekleridir. Bu tip dinamik hareketler garip çekici olarak adlandırılır. Eğer çekici üzerindeki davranış kaotik ise yani çekici üzerindeki yörüngeler civarlarındaki yörüngelerden üssel olarak uzaklaşıyorsa çekicinin kaotik olduğunu söyleriz [5].

Yakın yörüngelerin üssel ayrılı notasyonu Lyapunov üsseli ile formal hale getirilir. Kaotik çekici üzerindeki iki yakın yörünge, $t = 0$ anında d_0 uzaklığı ile başlarsa, $d(t)$ olarak tanımlanan, t anındaki iki yörüngenin birbirlerine olan uzaklığı

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (2.62)$$

açılımını sağladığından dolayı, yörüngeler ayrılır. (2.62) deki λ parametresi Lyapunov üsseli olarak adlandırılır. λ pozitif ise hareketin kaotik olduğunu söyleriz.

Kaos tek bir yörüngenin davranışında da gözükebilir. Yörüngeler durum uzayında kaotik bir çekiciye doğru saparken, daha önce ziyaret ettiği bazı noktaların yakınına geri dönerler (o noktaya değil. O noktaya geri dönseydi hareket periyodik olurdu). Eğer yörüngeler birbirlerinden üssel olarak uzaklaşıyorsa, özel bir komşuluğunu ikinci ziyaretinde tamamen farklı bir davranışa sahip olacaktır. Kısacası bu davranış “non periodicity of chaos” olarak adlandırılır.

2.7.1. Metapopülasyon Modellerinde Başlangıç Koşullarına Hassas Bağlılık:

Bir ekosistem içindeki yaşam kompleks bir sistemdir. Ekosistemler kaotik dinamikler üreten tüm elementlere sahiptirler. Kaos, genellikle, matematiksel modellerle tahmin edilmesine rağmen onun doğadaki varlığının kanıtı kıtlık ve belirsizliktir.

Besin zincirleri de son derece basit yapıları ekosistemler olmasına karşın, çok karmaşık dinamiklere sahiptirler. Uzun yıllar önce modellenen çalışmalar, besin zincirlerinin zengin dinamiklere sahip olduğunu doğrulamaktadır. Kompleks popülasyon dinamikleri üzerindeki çalışmalar neredeyse popülasyon ekolojisi kadar eskidir. İlk olarak, Alfred Lotka(1925) ve Vito Volterra(1926), birbirlerinden bağımsız olarak, günümüzde de onların isimleriyle anılan, birbirlerini etkileyen türlerin basit bir modelini geliştirdiler. Bu modelde, ditropik besin zincirinin, yani av-avcı sisteminin, eğer avın büyüme oranı sabit ve avcının fonksiyonel tepkisi lineer ise, verilen herhangi bir başlangıç koşulu altında devamlı olarak salınabildiği gösterilmiştir.

Michcel Rozenweig ise Robert MacArthur ile, mezun bir öğrenci iken 1960’larda, Lotka-Volterra denklemlerine yoğunluğa bağlılığı ve avcının davranışını da ekledi. Böylelikle, bu ekolojiksel model lineer olmayan limit çevrim göstermeye başladı.

1970’lerde ise fizikçi Robert May, ayrık zamanlı, popülasyon yoğunluğuna bağlı, lineer tasvir olarak ta bilinen, son derece basit bir ekolojik model geliştirdi.

Lotka ve Volterra tarafından yapılan ilk çalışmalardan bu yana, ekolojideki gerçekçi matematiksel model çalışmaları, özellikle türler ve çevreleri arasındaki ilişkiye dayalı çalışmalar, biyolojicilerin olduğu kadar matematikçilerinde ilgisini çeken çok popüler bir konu haline gelmiştir. Farklı popülasyon modelleri üzerindeki incelemeler, av- avcı ilişkisi ve rekabet, zararlıların ekolojiksel kontrolü gibi bir çok farklı alanda var olan dinamik süreci anlamaya yardımcı olmaktadır. Biyolojide matematik kullanımının artması biyolojinin daha nitelikli hale gelmesi için

kaçınılmazdır. Gerçekte, birçok realist biyoloji problemi, uygun matematiksel modellerin oluşturulması temeline dayanılarak çözülür.

Avcılar ve avları arasındaki ilişkinin dinamiği, uzun zamandır, ekoloji ve matematiksel ekolojide yaygın temalardan biridir ve uzun süre daha öyle olmaya devam edecektir. Bu problemler ilk bakışta matematiksel olarak çok basit gözükse bile, gerçekte, çok karmaşıktırlar. Literatürde birçok farklı av-avcı modeli vardır. Bu modellerden Rosenzweig-MacArthur (Rosenzweig ve MacArthur, 1963) modeli ve Holling-Tanner modelleri bu çalışmada temel aldığımız modellerdir [15].

2.7.1.1. Özelci ve Genelci Avcılar:

Türler arasında dört temel etkileşim vardır: Av-avcı, rekabet, parazitsel yaşam ve mutualizm. Av-avcı ilişkisi en çok karşılaşılan etkileşimdir. İki çeşit avcı vardır: (i) Spesiyalist(özelci) avcı (ii) Generalist(genelci) avcı. Özelci avcı tek bir besin maddesi ile beslenir ve bu besin maddesi olmadığına ya da kısıtlı miktarda olduğunda, yani kıtlık durumunda, avcı popülasyonu üssel olarak azalır veya yok olur. Genelci avcı ise alternatif beslenme seçeneklerine sahiptir. En çok tercih ettiği besin maddesinin kısıtlı miktarda olduğu durumlarda, alternatif beslenme seçeneklerine yönelir.

Rozenzweig-MacArthur modeli özelci avcı ve avı arasındaki ilişkiyi tarif eden modellerden birisidir. Genellikle iki biyolojik tür arasındaki av-avcı etkileşimini tanımlamakta kullanılan sürekli zaman modelidir [Rozenzweig&MacArthur 1963; Rozenzweig 1971]. Bu model aşağıdaki formda yazılır:

$$\frac{dX}{dt} = a_1X - b_1X^2 - \frac{wYX}{X + D}, \quad (2.63.a)$$

$$\frac{dY}{dt} = -a_2Y + \frac{w_1YX}{X + D_1}. \quad (2.63.b)$$

Yukarıdaki model, lojistik av ve 2. tür Holling fonksiyonel tepkili, özelci avcıdan oluşmaktadır. X ve Y değişkenleri, sırasıyla, av ve avcı türlerinin popülasyon yoğunluğunu göstermektedir. a_1 katsayısı, av popülasyonundaki büyüme oranını göstermektedir, b_1 , av türünün bireyleri arasındaki yiyecek, yer vb. için rekabetin şiddetini ölçmektedir. w , Y avcısı tarafından avlanan X av türünün maksimum

oranıdır, başka bir deyişle, maksimum avlanma oranıdır. D , avın avcı saldırısından kaçma başarısını ölçer ve avın çevresindeki korunma olanaklarına bağlıdır. a_2 parametresi beslenmek için av olmadığında Y avcı popülasyonunun yok olma hızını ölçer. D_1 , D ile benzer anlam taşımaktadır.

Holling ve Tanner tarafından verilen aşağıdaki model ise genelci avcı ve avının dinamiklerini tanımlar:

$$\frac{dZ}{dt} = AZ \left(1 - \frac{Z}{K} \right) - \frac{w_3 UZ}{Z + D_3}, \quad (2.64.a)$$

$$\frac{dU}{dt} = cU - \frac{w_4 U^2}{Z}. \quad (2.64.b)$$

Bu modelde Z , genelci avcı için en çok tercih edilen besindir. Av ve avcı popülasyonları lojistik olarak büyümektedir. A , Z avının büyüme oranıdır ve K ise avın yaşadığı çevrenin onun popülasyonunu taşıma kapasitesidir. w_3 , av türünün avcısı U tarafından nüfus başına maksimum avlanma oranıdır. c , U avcısının nüfus başına üreme oranını ölçer. (2.64.b) eşitliğinde ki son terim, avın nüfus başına ulaşılabilirliğine bağlı olarak, U türündeki kaybı tanımlar. Diğer parametreler bir önceki modeldekilerle aynı anlamları taşımaktadır.

Yukarıdaki özelci avcı ve genelci avcı modellerini birbirine bağlayarak aşağıda inceleyeceğimiz metapopülasyon modellerini elde ederiz. Bağlantı mekanizması, model 1 için, matematiksel olarak, ilk alt sistemin ikinci eşitliğine $-w_2 Y^2 U / (Y^2 + D_2^2)$ teriminin eklenmesi ile gösterilebilir [18].

i. *Model 1*

$$\frac{dX}{dt} = a_1 X - b_1 X^2 - \frac{w Y X}{X + D}, \quad (2.65.a)$$

$$\frac{dY}{dt} = -a_2 Y + \frac{w_1 Y X}{X + D_1} - \frac{w_2 Y^2 U}{Y^2 + D_2^2}, \quad (2.65.b)$$

$$\frac{dZ}{dt} = AZ \left(1 - \frac{Z}{K} \right) - \frac{w_3 UZ}{Z + D_3}, \quad (2.65.c)$$

$$\frac{dU}{dt} = cU - \frac{w_4 U^2}{Y + Z}. \quad (2.65.d)$$

Bu modelde, Y bir özerci avcıdır, yani X türü, Y için tek geçerli besin maddesidir. Bundan dolayı, X ' in yokluğunda Y üssel olarak yok olacaktır. (2.21-b) eşitliğindeki son terim, genelci avcı olan U türünün fonksiyonel etkisini göstermektedir. En çok tercih ettiği besin maddesi olan Z türünün kıtlığında alternatif bir besine yönelecektir. (2.21.d) eşitliğindeki son terim Z ve Y avlarının nüfus basına elde edilebilirliğine bağlı olarak U avcı türündeki kaybın nasıl olduğunu tanımlar.

ii. *Model 2:*

$$\frac{dx}{dt} = Ax(1-x) - \frac{kxy}{x+d}, \quad (2.66.a)$$

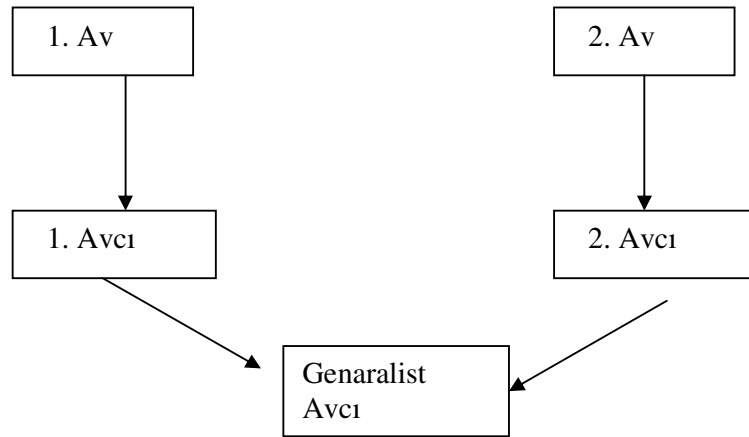
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \frac{w_1xy}{x+d} - \frac{y^2z}{y^2+d_1}, \quad (2.66.b)$$

$$\frac{du}{dt} = au(1-u) - \frac{k_1uv}{u+d_2}, \quad (2.66.c)$$

$$\frac{dv}{dt} = -bv + \frac{w_4uv}{u+d_2} - \frac{wv^2z}{v^2+d_3}, \quad (2.66.d)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w_6y^2z}{y^2+d_1} + \frac{w_7v^2z}{v^2+d_3} - cz. \quad (2.66.e)$$

Bu modelde, x 1. av, y 1. avcı, u 2. av, v 2. avcı ve z ise, özel olarak, 1. veya 2. avcı ile beslenen genelci avcıdır. Bu modelin şematik gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.20: Model 2 ' nin şematik gösterimi

Bir sonraki bölümde, yukarıda verilen, nonlinear adi diferansiyel denklem sistemleri için başlangıç değer problemleri A. Clark tarafından hazırlanan Dinamik Sistemler Paketinin yardımıyla, parametre değerlerinin bir kümesi ve başlangıç koşullarına bağlı olarak çözülmüştür.

2.7.1.2. Çözümler:

Bir sistemin denklemini yazmakla o sistemi anlamış olmayız. Bu sistemlerde mevcut olan küçük nonlinearlik unsurları sistemin geleceğine ilişkin en basit pratik sorulara bile cevap vermemizi zorlaştırır. Bununla birlikte, ekolojik sistemlerin matematiksel modelleri, bu modellerin bilgisayar simülasyonları ve bunların gerçek ekolojik verilerle karşılaştırılması bu tür sistemlerin kontrol edilmesinde ya da geleceğinin tahmin edilmesinde yardımcı olurlar. Aşağıda, her iki sisteminde, ilk olarak parametre değerlerine ikinci olarak başlangıç popülasyonlarına hassas bağıllığı incelenmiştir.

2.7.1.3. Parametre değerlerine hassas bağıllık:

i. *Model 1:*

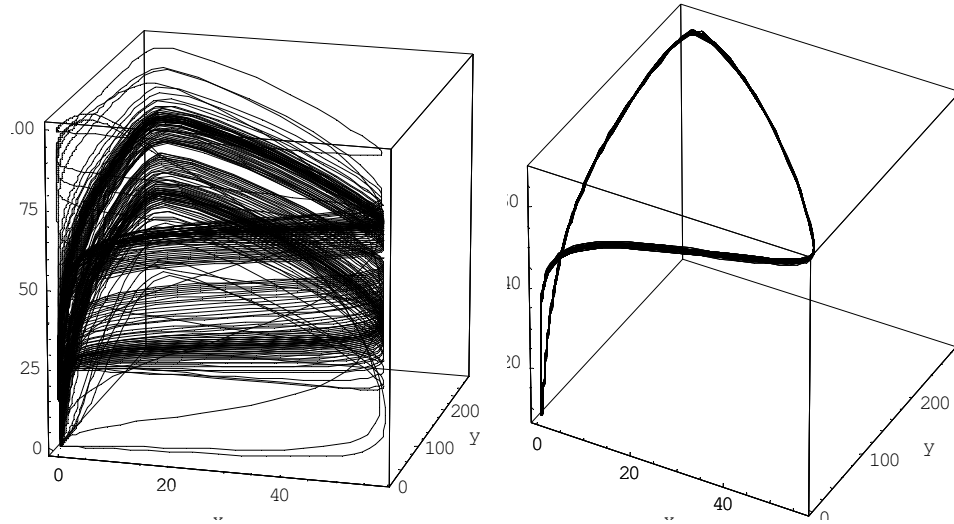
Bu modelde kullanılan parametre değerleri V.Rai [18] in çalışmasından alınmıştır. Ve aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, & a_2 &= 0.7, & w_1 &= 4, & c &= 0.2, & w_4 &= 0.1, & w &= 1, \\ D &= 10, & D_1 &= 10, & w_2 &= 0.05, & D_2 &= 10, & A &= 1.5, & K &= 100, \\ w_3 &= 0.74, & D_3 &= 20, & b_1 &= 0.05 \end{aligned}$$

Ve $\{X(0), Y(0), Z(0), U(0)\} = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$ başlangıç popülasyon değerlerine göre, parametre değerleri değiştirilerek sistemin dinamikleri incelendi.

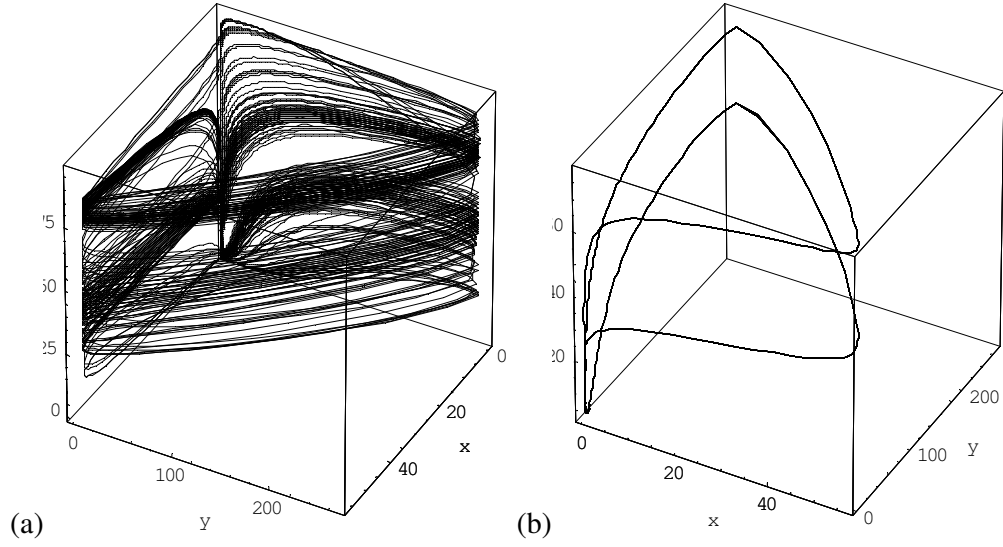
İlk olarak *Y tarafından avlanan X avının maksimum miktarını gösteren w* parametresine göre sistemin dinamikleri incelendi. Bu parametre değeri [0.1, 6] aralığında 0.01 kadarlık adımla arttırıldı. Ve sonuçta [0.16, 0.93] aralığında sistemin davranışının kaotik diğer yerlerde ise düzenli olduğu gözlemlendi. Sistemin davranışındaki *w* parametresine hassas bağıllık şekil 2.21 de gösterilmiştir. Şekil 2.21(a) da *w* parametresini değeri 0.94 alınmıştır ve sistemin davranışının nerdeyse limit çevrim olduğu gözlenmiştir. Şekil 2.21(b) de ise aynı parametrenin değeri 0.93

olarak alınmıştır. Bu durumda ise sistem kaotik davranış sergilemiştir. Bu sistemin w parametre değerindeki 0.01 lik artımın sistemin davranışında yarattığı fark bize bu modelin w parametresine hassas bağıllığını göstermektedir.



Şekil 2.21: (a) $w=0.93$ alındığında Model 1 de verilen sistemin davranışının 3 boyutlu xyz düzlemine izdüşümü. (b) $w=0.94$ durumunda Model 1 de verilen sistemin xyz 3 boyutlu düzlemine izdüşümü.

Aynı şekilde w_2 parametresini değeri $[0.01, 0.8]$ aralığında incelenmiştir. Bu incelemede sistemin davranışının $w_2=0.01$ ve $w_2 \in [0.7, 0.75]$ aralığında kaotik olduğu gözlenmiştir. Bu parametreye bağlı olarak sistemin davranışı dar bir aralıkta kaos göstermektedir. Sistemin bu parametredeki değişime gösterdiği hassasiyet Şekil 2.22 de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.22: (a) $w=1$ ve $w_2=0.01$ durumunda diğer parametre değerleri yukarıda verilen ile aynı iken model sistem (2.65) in davranışının 3 boyutlu xyz düzlemine iz düşümü. (b) $w=1$ ve $w_2=0.02$ durumunda model sistem (2.65) in davranışının 3 boyutlu xyz düzlemine iz düşümü.

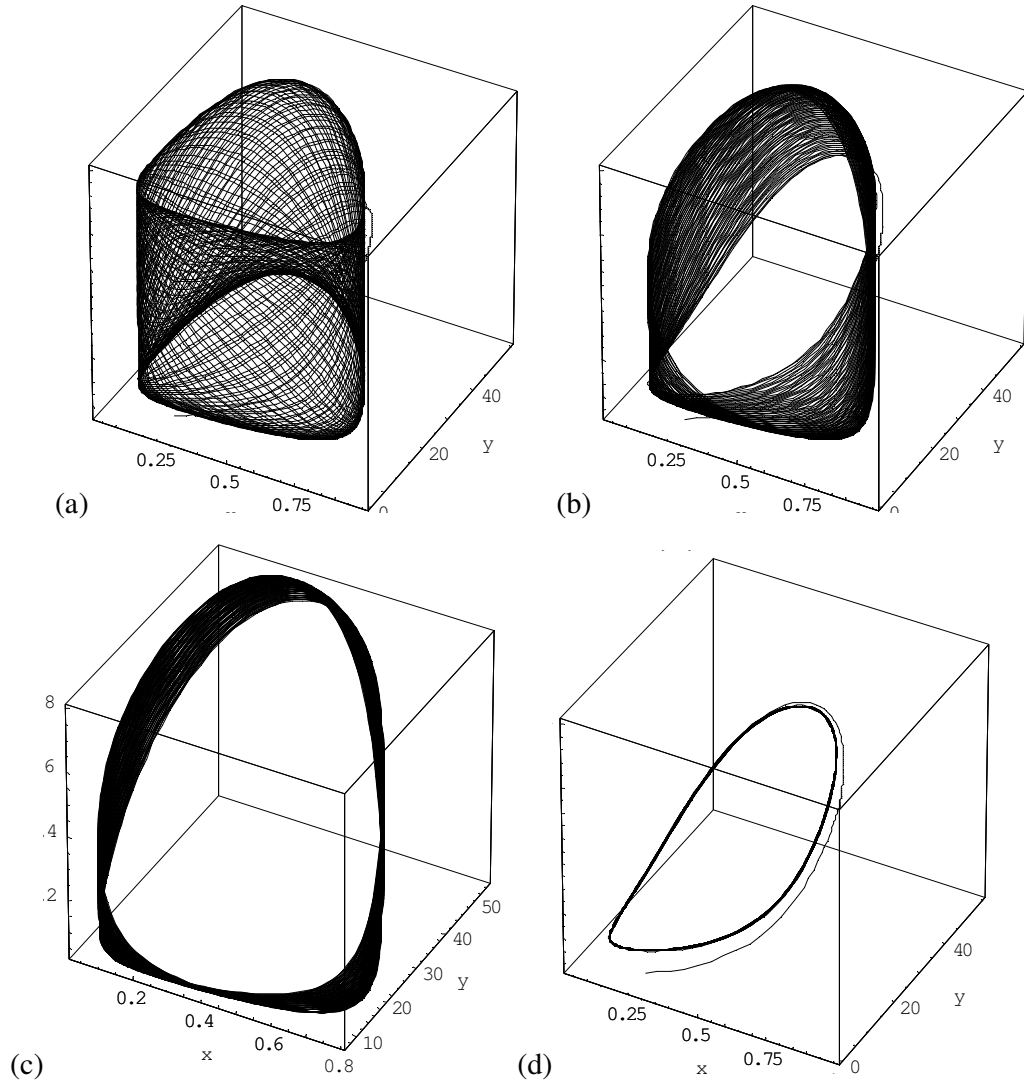
ii. *Model 2*

Bu modelde kullanılan parametre değerleri aşağıdaki gibidir ve V. Rai[6] nin çalışmasından alınmıştır.

$$a_1 = 2, \quad k = 0.025, \quad d = 0.25, \quad c = 1, \quad w_1 = 2, \quad d_1 = 100, \quad a = 2, \quad k_1 = 0.025, \\ d_2 = 0.25, \quad b = 1, \quad w_4 = 2, \quad w = 1, \quad w_7 = 0.2, \quad d_3 = 100, \quad w_6 = 0.1$$

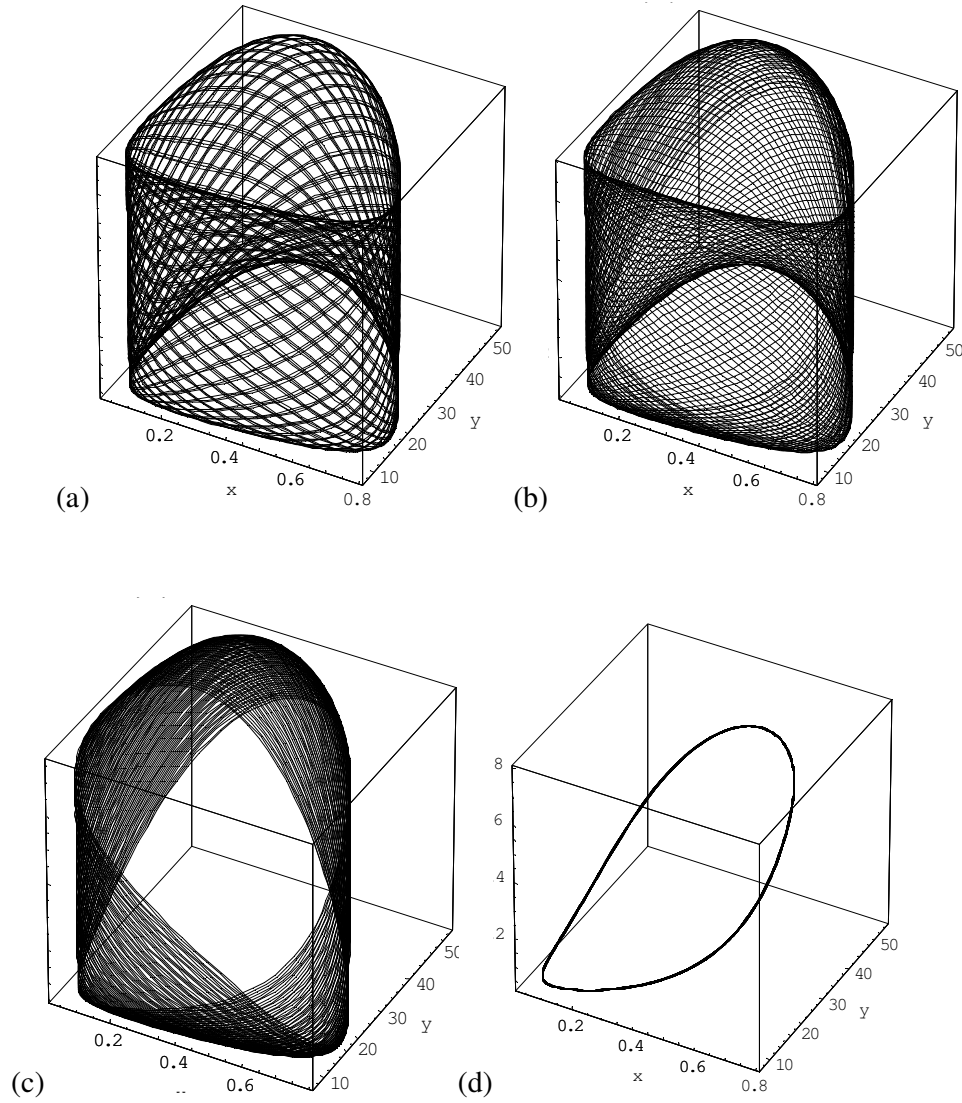
Bu parametre değerlerini esas alarak sistemin parametreye hassas bağıllığını inceleyebilmek için çeşitli parametrelerin değerlerinde küçük oynamalar yaptık ve sistemin dinamiklerini inceledik.

İlk olarak b parametresini ele aldık ve $b=0.95$, $b=0.995$, $b=0.998$ ve $b=1.0$ değerlerinde sistemin davranışının 3 boyutlu iz düşümünü aldık. Sonuçta sistemin davranışı ilk olarak kaotikken parametre değerindeki küçük artımlarla, şekil 2.23 de gösterildiği üzere, şerit halinde yarı limit çevrim ve son olarak limit çevrim halini almıştır.



Şekil 2.23: Model sistem (2.66)'nın davranışının, b parametresinin farklı değerlerine göre üç boyutlu xyz düzlemine iz düşümü. (a) $b=0.95$ (b) $b=0.995$ (c) $b=0.998$ ve (d) $b=1.0$ olarak alınmıştır. Diğer parametre değerleri sabit tutulmuştur. Sistemin davranışının kaotiklikten limit çevrime geçişteki b parametresine hassas bağıllığı gözlenmektedir.

İkinci olarak, aynı sistemin w_4 parametresine bağıllığı incelenmiştir. Parametre değerine $[0.1, 3.0]$ aralığında 0.1 'lik artım verilerek sistemin davranışının nasıl değiştiği gözlenmiştir. Aşağıda verilen grafikler bu bağıllığın en çok fark edildiği değerlerde sistemin davranışındaki değişimleri göstermektedir.



Şekil 2.24: Model sistem (2.66)'nın w_4 parametresine hassasiyeti. Diğer parametre değerleri sabit tutularak w_4 parametresinin değeri değiştirilip sistemin davranışının xyz üç boyutlu faz uzayına iz düşümü incelenmiştir. Sonuçta sistemin davranışının kaotiklikten periyodikliğe geçişi gözlenmiştir. (a) $w_4 = 1.7$, (b) $w_4 = 1.8$, (c) $w_4 = 1.9$, (d) $w_4 = 2.0$ olarak alınmıştır.

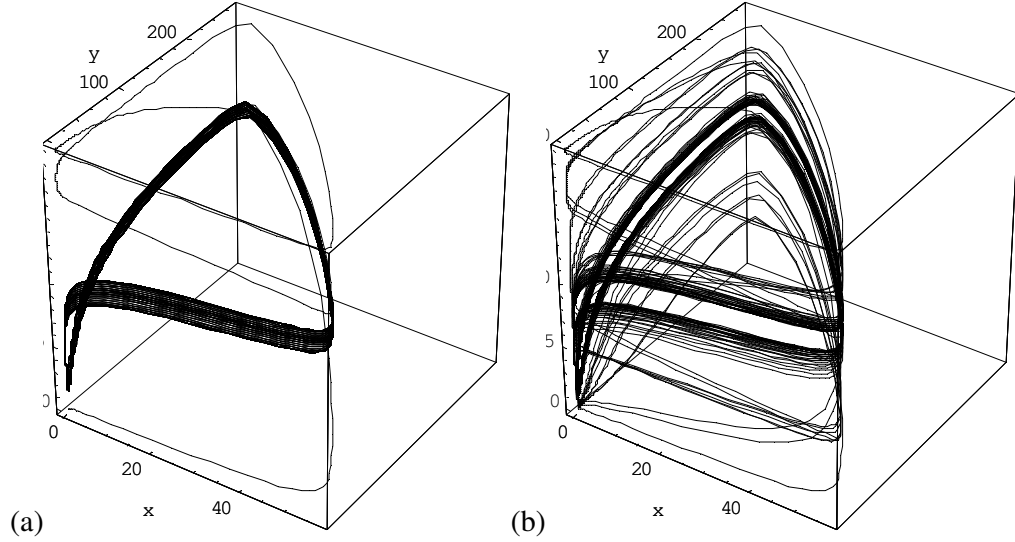
2.7.1.4. Başlangıç Popülasyon Değerlerine Hassas Bağlılık:

i. Model 1:

Bu sistemin başlangıç koşullarına hassasiyetini inceleyebilmek için, parametre değerlerini değiştirmeksizin, U genelci avcısının başlangıç popülasyonuna küçük artımlar verdik. İlk olarak sistemin başlangıç popülasyonu

$$(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$$

olarak alındı. Bu başlangıç koşulları altında sistemin davranışı limit çevrim iken, aşağıdaki grafiklerde görüldüğü üzere, verilen küçük artımlarla kaotik çekici halini aldı.



Şekil 2.25: Verilen başlangıç koşulları altında sistemin davranışının xyz-üç boyutlu faz uzayına izdüşümü. (a) başlangıç popülasyonları $(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ olarak alındı ve sistemin dinamiklerinin neredeyse limit çevrim olduğu gözlemlendi. (b) $(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.15)$ olarak alındı ve sistemin U avcısının başlangıç popülasyonuna verilen 0.05' lik artımla kaotik hale geldiği gözlemlendi.

ii. Model 2:

Model 1' e uygulanan sürecin aynısı model 2' ye de uygulandı ve sistemin başlangıç koşullarına hassasiyeti incelendi. Yalnız daha iyi bir gözlem yapabilmek için sistemin parametre değerleri aşağıdaki gibi alındı.

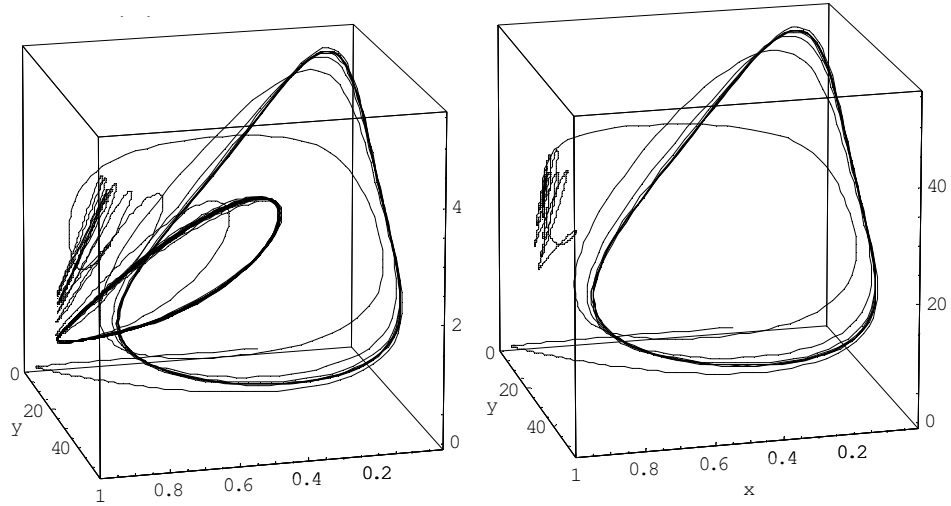
$$a_1 = 2, \quad k = 0.025, \quad d = 0.25, \quad c = 1, \quad w_1 = 2, \quad d_1 = 100, \quad a = 2, \quad k_1 = 0.025, \\ d_2 = 0.25, \quad b = 1, \quad w_4 = 2, \quad w = 1, \quad w_7 = 0.7, \quad d_3 = 100, \quad w_6 = 0.85$$

Av ve avcı türlerinin başlangıç popülasyonları ise

$$(X_0, Y_0, U_0, V_0, Z_0) = (0.3, 0.47, 0.1, 0.1, 0.1)$$

olarak alındı ve Y_0 başlangıç popülasyonuna verilen küçük artımların sistemin davranışı üzerindeki sonuçları gözlemlendi. Bu incelemeler sonucunda sistemin

davranışının x-y-üç boyutlu faz uzayına izdüşümünü gösteren aşağıdaki grafikler elde edildi.



Şekil 2.26: Model 2 ‘nin farklı başlangıç popülasyonlarında x-y-üç boyutlu faz uzayına iz düşümü. (a) $(X_0, Y_0, U_0, V_0, Z_0) = (0.3, 0.47, 0.1, 0.1, 0.1)$
(b) $(X_0, Y_0, U_0, V_0, Z_0) = (0.3, 0.5, 0.1, 0.1, 0.1)$

Grafiklerde de görüldüğü gibi, Y_0 başlangıç popülasyonu 0.47 olarak alındığında sistemin davranışı ilk olarak periyodik olup daha sonra kaotik bir hal almıştır. Aynı başlangıç popülasyonuna verilen 0.03’lük artımla sistemin kaotik olan davranışı kararlı odak haline dönüşmüştür.

2.7.1.5. Sonuçlar:

Bu çalışmada, özelci ve genelci avcı türlerini kapsayan, dört ve beş boyutlu iki farklı besin zincirinin kaotik davranışları incelendi. Sayısal çözüm yöntemi kullanılarak bu sistemlerin davranışının üç boyutlu faz uzayına izdüşüm grafikleri çizildi.

Tüm bu grafiklerden görüldüğü üzere sistemlerin gösterdiği kaotik davranışlar alışılmış kaotik çekicilerden farklıdır. Ayrıca, düzensiz davranış gösteren bir dinamik sistem, parametrelerinde ya da başlangıç koşullarında yapılan çok küçük değişikliklerle, aniden odak noktası, periyodik ya da yarı-periyodik hareketler gibi, düzenli hale geçmektedir. Sistemlerin bu özelliğinden dolayı kaotik davranış bazı kontrol parametreleri ile modifiye edilebilir.

2.8. Determinizm

Klasik Mekaniğin (Newton Mekaniği) özü determinizmdir. Determinizm, “bir fiziksel sistemin şimdiki durumu, önceki durumunun sonucudur” der. Dolayısıyla her olay ve hareketi önceden belirlemek mümkündür. Newton’un hareket yasalarına göre, şu andaki olay ve hareket önceki olay ve hareketten çıktığı gibi, bundan sonra olacak olay veya hareket de şu andaki olay veya hareketin sonucu olacaktır. Determinizmin matematiksel dili çok açıktır. Başlangıç koşullarını bilince, ona uyan analitik çözümü, çözüm uzayından seçebiliriz. Bu çözüme f diyelim. Herhangi bir t anında sistemin durumunu biliyor isek, f fonksiyonunu biliyoruz demektir. Artık her a için $f(t+a)$ ve $f(t-a)$ değerlerini hesaplamak mümkündür. Matematiksel açıdan bakınca çözüm fonksiyonunun grafiği üstünde gerçekleşen bu olgu, fiziksel açıdan bakınca söz konusu dinamik sistemin kendi yörüngesi üzerinde belli bir yerden ileriye ya da geriye doğru hareket ettirilebilmesi demektir.

Öyleyse, determinizmin uygulanabilmesi için, sistemin analitik çözümüne ve iyi belirlenmiş başlangıç koşullarına gerekseme vardır. Çok kolaymış gibi görünen bu iş, gerçekte pek çok sistem için imkânsızdır. Bu imkânsızlık kaos diye anılan fenomenleri yaratır [34].

2.9. Üç Boyutlu Durum Uzayı

Dinamik bir sistem üç bağımsız dinamiksel değişkene sahip ise üç boyutlu dinamik sistem olarak adlandırılır.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \quad (2.67)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

f_1 , f_2 , f_3 fonksiyonları kapalı formdadır, zamanı içermezler, yani sistem otonomdur. İki boyutlu otonom olmayan bir sistem aşağıdaki formda tanımlanır:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \quad (2.68-a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t). \quad (2.68-b)$$

Otonom olmayan bu sistem, $x_3 = t$ gibi üçüncü bir değişkenin tanımlanmasıyla aşağıdaki gibi otonom hale dönüştürülür:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \quad (2.69-a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \quad (2.69-b)$$

$$\dot{x}_3 = 1 \quad (2.69-c)$$

2.10. Üç Boyutlu Sistemlerde Denge Noktası

(2.23) deki denklem sistemindeki zamana bağlı türevler sıfıra eşitlenerek denge noktaları bulunur. Jacobien matrisin hesaplanmasıyla denge noktasının karakteri belirlenir:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Bu matrisin hesaplanmasıyla λ_1 , λ_2 ve λ_3 gibi üç adet karakteristik değer bulunur.

Burada üç durum söz konusudur:

1. Üç karakteristik değer de reel ve eşit değilse,
2. Üç karakteristik değer de reel ve en az ikisi eşit ise,
3. Bir reel, iki kompleks karakteristik değer varsa.

Üç ya da daha yüksek boyutlu durum uzayları için denge noktasının indeksinden bahsedilir. Bir denge noktasının indeksi reel kısmı pozitif olan noktanın karakteristik değerlerinin sayısı olarak tanımlanır [5].

Üç boyutlu durum uzayında dört temel denge noktası çeşidi vardır:

1. **Düğüm:** Karakteristik değerlerin tümü reel ve negatiftir. Düğüm noktasının komşuluğundaki tüm yörüngeler, birbirlerine sarılmaksızın, denge noktasına doğru çekilirler.

Spiral Düğüm: Tüm karakteristik değerler negatif reel kısma sahiptir, fakat ikisinin imajiner kısmı sıfırdan farklıdır. Yörüngeler düğüme yaklaşırken düğüm noktasının etrafında döner.

2. **İtici:** Tüm karakteristik değerler reel ve pozitifdir. İtici noktasının komşuluğundaki tüm yörüngeler bu noktadan ayrılır.

Spiral İtici: Tüm karakteristik değerler pozitif reel kısma sahiptir, fakat iki tanesi sıfır olmayan imajiner kısma sahiptir. Yörüngeler denge noktasından ayrılırken, iticinin etrafına sarılır.

3. **Eyer nokta- 1 indeksli:** Tüm karakteristik değerler reeldir. Bir tanesi pozitif diğer ikisi negatiftir. Yörüngeler yüzey üzerinde eyer noktaya yaklaşır ve eğriden ayrılır.

Spiral Eyer nokta- İndeks 1: Negatif reel kısmı iki karakteristik değer kompleks sayı çifti formundadır. Yörüngeler yüzeye yaklaşırken eyer nokta etrafına sarılır.

4. **Eyer nokta- indeks 2:** Tüm karakteristik değerler reeldir. İki pozitif bir tanesi negatiftir. Yörüngeler eğri üzerinde eyer noktaya yaklaşır.

Spiral Eyer nokta- indeks 2: Pozitif reel kısmı iki karakteristik değer kompleks sayı çifti formundadır. Yüzey üzerinde yörüngeler eyer noktadan ayrılırken eyer nokta etrafına sarılır.

Teorem 2.3: y_0 , $y' = f(y)$ otonom sisteminin bir denge noktası ve J bu denge noktasındaki sistemin Jakobien matrisi olsun.

- i) J 'nin her öz değerinin reel kısmı negatif ise, y_0 asimptotiksel kararlı denge noktasıdır.
- ii) J en azından bir tane pozitif reel kısmı öz değere sahip ise, y_0 kararsız denge noktasıdır.

2.10.1. Orana Bağlı Besin Zinciri Modeli

“Orana bağlı yırtıcı avlanma(predation)” terimi ilk olarak Arditi ve Ginzburg [19] tarafından avcının beslenme oranı (fonksiyonel tepkisi), klasik modellerde olduğu gibi, sadece av yoğunluğuna bağlı olmayıp, durum değişkenlerinin, yani av ve avcı yoğunluğunun, oranına da bağlı olduğu durumları tanımlamak için kullanılmıştır. Orana bağlı modellerin bir avantajı, klasikleşmiş modellerde öngörülen, biyolojiksel kontrol ve zenginleşme paradokslarına sahip olmamalarıdır. Arditi ve Saiah’in[20] deneysel incelemeleri ava bağlı modellerin homojen durumlarda, orana bağlı modellerin ise heterojen durumlarda geçerli olduğunu göstermiştir. Onların çalışmalarını temel alan, Ginzburg ve Akçakaya[21] ve McCarthy[22] doğadaki sistemlerin ava bağlılıktan ziyade orana bağlılığa daha yakın olduğu sonucuna varmışlardır.

Orana bağlı bir av-avcı modeli genel olarak aşağıdaki formadadır:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= xf(x) - cyp(x/y), & x(0) > 0, \\ \dot{y}(t) &= (p(x/y) - d)y, & y(0) > 0.\end{aligned}\tag{2.71}$$

Eğer $p(x) = (mx/a + x)$, $f(x) = r(1 - x/K)$ ise (2.71) Michaelis-Menten fonksiyonel tepkili orana bağlı av-avcı modeline dönüşür:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - c \frac{mxy}{x + ay}, & x(0) > 0, \\ \dot{y}(t) &= \left(\frac{mxy}{x + ay} - d\right)y, & y(0) > 0.\end{aligned}\tag{2.72}$$

denklem sisteminin Hsu, Hwang ve Kuang[23] tarafından yapılan analizleri sonucunda, orana bağlı modellerin çok daha zengin ve biyolojiksel olarak daha gerçekçi dinamikler üretebildiği gözlenmiştir. Özellikle bu modeller zenginleşme ve biyolojiksel kontrol paradokslarını üretmeyecektir. Ayrıca orana bağlı modeller, verilen bir av-avcı etkileşiminin olası sonucu olarak iki taraflı neslin tükenmesine izin verir.

Klasik besin zinciri modelleri gerçekçi dinamikler üretme konusunda yetersizdir. Bu sıkıntıyı azaltmak için aşağıda verilen biçimde üç farklı tropik seviyeli orana bağlı besin zinciri modelini ele alacağız:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{1}{\eta_1} \frac{m_1 xy}{a_1 y + x}, & x(0) > 0, \\
\dot{y}(t) &= \frac{m_1 xy}{a_1 y + x} - d_1 y - \frac{1}{\eta_2} \frac{m_2 yz}{a_2 z + y}, & y(0) > 0, \\
\dot{z}(t) &= \frac{m_2 yz}{a_2 z + y} - d_2 z, & z(0) > 0.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Bu modelde x, y, z sırasıyla avın avcının ve en üstteki avcının popülasyon yoğunluklarını tanımlamaktadırlar. $i=1,2$ için η_i, m_i, a_i, d_i sırasıyla, ürün sabiti, avcının maksimal büyüme oranı, yarı doygunluk sabiti ve avcının ölüm oranını göstermektedir. r ve K ise avın büyüme oranı ve taşıma kapasitesidir. Bu üç tür arasında ki basit ilişki şu şekildedir: z sadece y ile beslenir, y ise x ile beslenir ve böylelikle basit bir besin zinciri üretirler. Bu basit besin zincirinin ayırt edici bir özelliği zincirdeki türlerden birisi yok olduğunda daha üst tropik seviyedeki türlerinde yok olacağı anlamına gelen domino etkisine sahip olmasıdır.

Sistem (2.73)' ü daha sade hale getirebilmek için, sistemi aşağıda verilen oranlarla boyutsuzlaştıracğız:

$$\begin{aligned}
t &\rightarrow rt, & x &\rightarrow \frac{x}{K}, & y &\rightarrow \frac{a_1}{K} y, & z &\rightarrow \frac{a_2 a_1}{K} z, \\
m_1 &\rightarrow \frac{m_1}{r}, & d_1 &\rightarrow \frac{d_1}{r}, & m_2 &\rightarrow \frac{m_2}{r}, & d_2 &\rightarrow \frac{d_2}{r}.
\end{aligned}$$

Böylelikle, sistem (2.73) aşağıdaki forma dönüşür:

$$\dot{x}(t) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} = F_1(x, y), \tag{2.74-a}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{y+z} = F_2(x, y, z), \tag{2.74-b}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{m_2 yz}{y+z} - d_2 z = F_3(y, z). \tag{2.74-c}$$

Burada, $c_1 = \frac{m_1}{\eta_1 a_1 r}$, $c_2 = \frac{m_2}{\eta_2 a_2 r}$ dir.

2.10.1.1. Denge Noktalarının Analizi

Bu bölümde yukarıda verilen, orana bağlı üç türden oluşan boyutsuzlaştırılmış besin zinciri modelinin denge noktalarını bulup, sistemin kararlılığını inceleyeceğiz.

Yukarıdaki sistemin denge noktalarını bulmak için denklemlerin sağ taraflarını sıfıra eşitleriz:

$$x(1-x) - \frac{c_1xy}{x+y} = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{m_1xy}{x+y} - d_1y - \frac{c_2yz}{y+z} = 0, \quad (2.76)$$

$$\frac{m_2yz}{y+z} - d_2z = 0. \quad (2.77)$$

Yukarıdaki üç eşitliğin çözümü ile, sistem (2.74)'ün $E_0(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ ve $E_1(x^*, y^*, z^*)$ şeklinde iki adet denge noktasına sahip olduğu görülür. $E_1 = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ denge noktasının varlığını incelersek:

$$1-x - \frac{c_1y}{x+y} = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{m_1x}{x+y} - d_1 = 0. \quad (2.79)$$

Bu iki eşitliğin çözümünden;

$$\bar{x} = \frac{c_1d_1 + m_1 - c_1m_1}{m_1}, \quad \bar{y} = \frac{(m_1 - d_1)(c_1d_1 + m_1 - c_1m_1)}{m_1d_1}. \quad (2.80)$$

olarak bulunur. E_0 pozitif denge noktasının varlığı için;

$$(i) \ c_1 > 1 + \frac{c_1d_1}{m_1} \text{ ya da } A = \frac{c_1d_1 + m_1 - c_1m_1}{m_1} \text{ dersek } A > 0, \ (ii) \ m_1 > d_1$$

koşulları sağlanmalıdır.

$E_1(x^*, y^*, z^*)$ denge noktasının varlığı için, (2.78), (2.79) ve (2.80)'dan, sırasıyla, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$y = \frac{x(1-x)}{c_1 - 1 + x}, \quad (2.81)$$

$$\frac{m_1 x}{x+y} = d_1 + \frac{c_2 z}{y+z}, \quad (2.82)$$

$$z = \frac{(m_2 - d_2)y}{d_2}. \quad (2.83)$$

(2.82) eşitliğinde z yerine (2.83) konulup, denklem düzenlenirse;

$$y = \left(\frac{m_1 m_2}{d_1 m_2 + c_2 m_2 - c_2 d_2} - 1 \right) x \quad (2.84)$$

elde edilir. (2.81) ile karşılaştırsak:

$$\frac{x(1-x)}{c_1 - 1 + x} = \left(\frac{m_1 m_2}{d_1 m_2 + c_2 m_2 - c_2 d_2} - 1 \right) x \quad (2.85)$$

$$B = \frac{m_1 m_2}{d_1 m_2 + c_2 m_2 - c_2 d_2} \text{ dersek; } x^* = 1 - c_1 \left(1 - \frac{1}{B} \right) \quad (2.86)$$

Eşitlik (2.81) ve (2.83) dan ise

$$y^* = (B-1) \left(1 - c_1 + \frac{c_1}{B} \right), \quad z^* = \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} \right) (B-1) \left(1 - c_1 + \frac{c_1}{B} \right) \quad (2.87)$$

elde edilir

E_1 pozitif denge noktasının varlığı için ise;

$$(i) m_2 > d_2, \quad (ii) B > 1, \quad (iii) 0 < c_1 < B/(B-1)$$

koşulları sağlanmalıdır.

2.10.1.2. Denge Noktalarının Sınıflandırılması

Bir sistemin denge noktalarındaki dinamiksel davranışının incelenebilmesi için her bir denge noktasına karşılık gelen varyasyonal matris hesaplanmalıdır:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x + \frac{c_1 y^2}{(x+y)^2} & \frac{-c_1 x^2}{(x+y)^2} & 0 \\ \frac{m_1 y^2}{(x+y)^2} & \frac{m_1 x^2}{(x+y)^2} - d_1 - \frac{c_2 z^2}{(y+z)^2} & \frac{-c_2 y^2}{(y+z)^2} \\ 0 & \frac{m_2 z^2}{(y+z)^2} & \frac{m_2 y^2}{(y+z)^2} - d_2 \end{pmatrix}$$

i. E_0 denge noktası için:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1 - 2A + \frac{c_1(m_1 - d_1)^2}{m_1^2} & \frac{-c_1 d_1^2}{m_1^2} & 0 \\ \frac{(m_1 - d_1)^2}{m_1} & \frac{d_1^2}{m_1} - d_1 & -c_2 \\ 0 & 0 & m_2 - d_2 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

J Jacobien matrisinin karakteristik denklemini yazarsak:

$$f(\lambda) = \text{Det}(J - \lambda I) = \left(1 - 2A + \frac{c_1(m_1 - d_1)^2}{m_1^2} - \lambda\right) \left(\frac{d_1^2}{m_1} - d_1 - \lambda\right) (-d_2 - \lambda) - \frac{c_1 d_1^2 (m_1 - d_1)^2}{m_1^3} (d_2 + \lambda) \quad (2.89)$$

$f(\lambda) = 0$ denkleminin köklerinden sistemin öz değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m_1^2} (L + \sqrt{M}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2m_1^2} (L - \sqrt{M}), \quad \lambda_3 = -d_2 + m_2. \quad (2.90)$$

$$L = -c_1 d_1^2 + d_1^2 m_1 - m_1^2 + c_1 m_1^2 - d_1 m_1^2,$$

$$M = L^2 + 4m_1^2 (c_1 d_1 (d_1 - m_1)^2 + d_1 m_1 (d_1 - m_1)). \quad (2.91)$$

E_0 , sistem (2.76)'un negatif olmayan denge noktası olduğundan,

$$c_1 d_1 (d_1 - m_1)^2 + d_1 m_1 (d_1 - m_1) < 0 \text{ ve } m_1 > d_1 \quad (2.92)$$

olacaktır. Böylelikle,

$$4m_1^2 d_1 (d_1 - m_1) (m_1 (1 - c_1) + c_1 d_1) < 0 \text{ ve} \quad (2.93)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4m_1^4} (L^2 - M) = -4m_1^2 d_1 (d_1 - m_1) (m_1 (1 - c_1) + c_1 d_1) > 0. \quad (2.94)$$

elde edilir.

Öz değerler reel ise, işaretleri aynıdır. Diğer taraftan, $L > 0$ ise

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{L}{m_1^2} > 0. \quad (2.95)$$

olacaktır.

Yani kökler reel ise $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, her iki kök de kompleks ise $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) > 0$ dır.

- $m_2 > d_2$ olduğunda $\lambda_3 > 0$ dır ve E_0 itici noktadır.
- $m_2 < d_2$ olduğunda $\lambda_3 < 0$ dır ve E_0 eyer noktadır.

Her iki durumda da E_0 kararsızdır.

$L < 0$ durumunda, her iki kök de reel ise $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, kökler kompleks ise $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0$ dır.

- $m_2 > d_2$ olduğunda $\lambda_3 > 0$ dır ve E_0 eyer noktadır.
- $m_2 < d_2$ olduğunda $\lambda_3 < 0$ dır ve E_0 spiral düğüm noktadır.

ii. E_1 denge noktası için:

Burada E_1 in varlığını kabul edeceğiz ve onun lokal kararlılığını inceleyeceğiz.

Yukarıda verdiğimiz varyasyonal matriste E_1 'i yerine koyarsak:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2x^* + \frac{c_1 y^{*2}}{(x^* + y^*)^2} & \frac{-c_1 x^{*2}}{(x^* + y^*)^2} & 0 \\ \frac{m_1 y^{*2}}{(x^* + y^*)^2} & \frac{m_1 x^{*2}}{(x^* + y^*)^2} - d_1 - \frac{c_2 z^{*2}}{(y^* + z^*)^2} & \frac{-c_2 y^{*2}}{(y^* + z^*)^2} \\ 0 & \frac{m_2 z^{*2}}{(y^* + z^*)^2} & \frac{m_2 y^{*2}}{(y^* + z^*)^2} - d_2 \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

J 'in karakteristik polinomu

$$f(\lambda) = \det(J - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{23}a_{32}(a_{11} - \lambda)$$

şeklindedir. Karakteristik polinomun köklerini bulmak için $f(\lambda) = 0$ alınır.

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33}, \\ A_2 &= a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32}, \\ A_3 &= a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Yukarıda yazılan kübik denklemin negatif reel kısmı köklerinin olması için gerek ve yeter şart $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ ve $A_1A_2 > A_3$ koşullarının sağlanmasıdır. a_{11} de

$$y^* = \frac{x^*(1 - x^*)}{c_1 - 1 + x^*} \quad (2.99)$$

yerine koyarsak,

$$a_{11} = x^* \left(-1 + \frac{c_1 y^*}{(x^* + y^*)^2} \right) \quad (2.100)$$

elde ederiz. Aynı şekilde, a_{22} de

$$\frac{m_1 x^*}{x^* + y^*} - d_1 = \frac{c_2 z^*}{z^* + y^*} \quad (2.101)$$

kullanırsak,

$$a_{22} = y^* \left(-\frac{m_1 x^*}{(x^* + y^*)^2} + \frac{c_2 z^*}{(z^* + y^*)^2} \right) \quad (2.102)$$

ve a_{33} de ise

$$\frac{m_2 y^*}{y^* + z^*} = d_2 \quad (2.103)$$

eşitliğini kullanırsak,

$$a_{33} = -\frac{m_2 y^* z^*}{(y^* + z^*)^2} \quad (2.104)$$

elde ederiz.

Eğer $a_{11} < 0$ ve $a_{22} < 0$ ise $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ ve $A_3 > 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 = & -(a_{11})^2 a_{22} - (a_{11})^2 a_{33} + a_{11} a_{12} a_{21} - (a_{22})^2 a_{33} - a_{11} (a_{22})^2 - 2a_{11} a_{22} a_{33} + a_{22} a_{12} a_{21} \\ & + a_{23} a_{32} a_{22} - a_{22} (a_{33})^2 - a_{11} (a_{33})^2 + a_{23} a_{32} a_{33} \end{aligned}$$

$A_1 A_2 - A_3 > 0$ olduğu görülür.

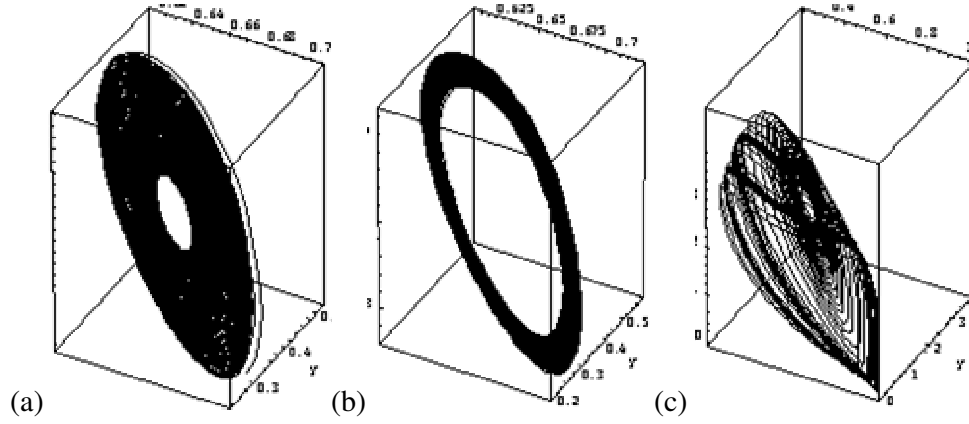
Dolayısıyla E_I asimptotiksel kararlı noktadır.

2.10.1.3. Sayısal Çözümler

Bu bölümde model sistem (2.27)'ün başlangıç koşullarına ve parametre değerlerine hassas bağlılığını sayısal çözüm yöntemleri kullanarak inceleyeceğiz. Bu amaçla, model sistem (2.27)'ün parametre değerleri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 2, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 11. \quad (2.105)$$

$(x_0, y_0, z_0) = (0.7, 0.3, 0.3)$ başlangıç koşulu altında m_2 ve c_1 parametre değerlerine verilen küçük artırımlarla sistemin dinamikleri incelenmiştir.



Şekil 2.27: Parametre değerlerindeki değişimin sistemin davranışına yansımaları. (a) Sistemin parametre değerleri $m_1=10$, $m_2=2$, $d_1=1$, $d_2=1$, $c_1=1$, $c_2=11$ olarak alınmış ve sistemin davranışının limit çevrim olduğu gözlenmiştir. (b) Diğer parametreler aynı kalmak üzere $m_2=2.005$ olarak alınmış ve sistemin dinamiklerinin yarı-limit çevrim olduğu gözlenmiştir. (c) $m_2=2.005$ ve $c_1=1.1$ alınmıştır.

Yukarıdaki grafikleri incelerken kullandığımız dört farklı parametre değerleri kümesinde de E_0 denge noktasına göre sistem kararsız eyer noktası olduğu gözlenmiştir. E_1 ise

$$m_1=10, \quad m_2=2.01, \quad d_1=1, \quad d_2=1, \quad c_1=1, \quad c_2=11. \quad (2.106)$$

parametre değerlerinin kümesinde kararsız olup parametrelerin incelenen diğer üç farklı kümesinde kararlıdır.

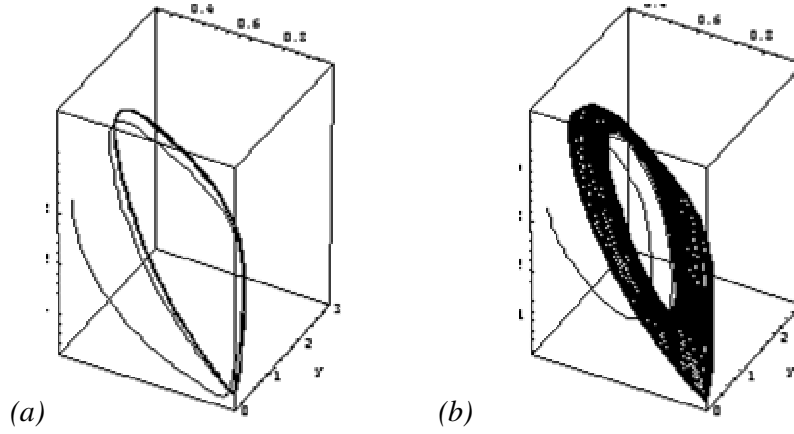
Sistemin başlangıç popülasyon değerlerine gösterdiği hassasiyeti inceleyebilmek için, yukarıda verilen parametre değerlerini değiştirmeksizin sistemin başlangıç popülasyonlarında yapılan küçük değişimlerin sistemin dinamiklerini nasıl etkilediğini araştırdık.

$$m_1=10, \quad m_2=2, \quad d_1=1, \quad d_2=1, \quad c_1=1, \quad c_2=11 \quad (2.107)$$

parametre değerlerinde,

$$(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.3, 0.3) \text{ ve } (x_0, y_0, z_0) = (0.3, 0.3, 0.3)$$

başlangıç koşulları altında sistemin dinamikleri incelendi ve aşağıdaki grafikler elde edildi:



Şekil 2.28: (a) $(x_0, y_0, z_0) = (0.2, 0.3, 0.3)$ durumunda (b) $(x_0, y_0, z_0) = (0.3, 0.3, 0.3)$ durumunda sistemin davranışı.

2.10.1.4. Denge Noktalarının Karşılaştırılması

i. E_0 kararlı, E_1 kararsız

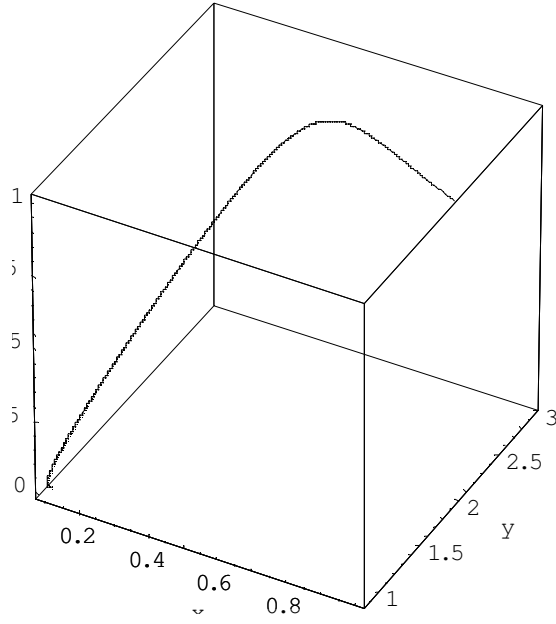
$\{c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2\} = \{1.0, 0.1, 0.2, 0.2, 2.1, 0.1\}$ parametre değerlerinde denge noktalarının koordinatları

$$E_0 = (0.095, 0.905, 0.) \text{ ve } E_1 = (0.048, 0.952, -0.476), \quad (2.108)$$

Bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler ise

$$E_0 : \{0.095 + 0.091I, 0.095 - 0.091I, -0.100\}, \quad E_1 : \{-0.136, 0.110, -0.054\} \quad (2.109)$$

olacaktır. Çözümün parametre kümesi ya da başlangıç koşullarında yapılan değişimlere hassas bağlı olmadığı bulunur. $\{1.0, 2.0, 1.0\}$ başlangıç koşulları altında çözümün üç boyutlu görüntüsü:



Şekil 2.29: $\{1.0, 2.0, 1.0\}$ başlangıç koşulları altında çözümün üç boyutlu grafiği

ii. E_1 kararlı, E_0 kararsız

$$\{c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2\} = \{1.000, 11.000, 1.000, 1.000, 10.000, 2.005\} \quad (2.110)$$

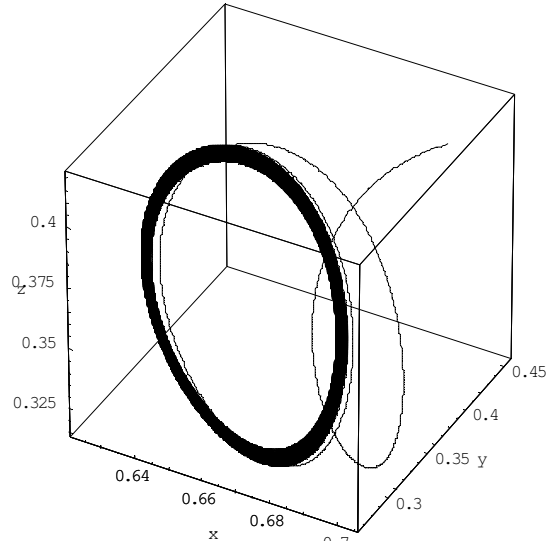
parametre değerleri altında sistemin denge noktaları;

$$E_0 = (0.1, 0.9, 0.0), \quad E_1 = (0.6514, 0.3486, 0.3504) \quad (2.111)$$

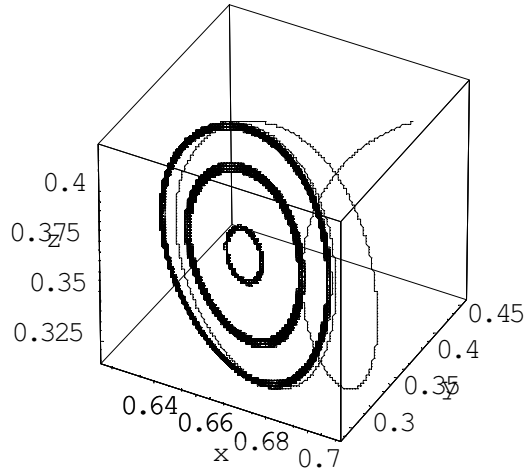
Bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler

$$E_0 : \{1.005, -0.797, -0.113\}, \quad E_1 : \{-0.0003 + 1.2896I, -0.0003 - 1.2896I, -0.4458\}$$

olacaktır. $\{0.70, 0.40, 0.42\}$ başlangıç koşulları altında sistemin çözüm grafiği:

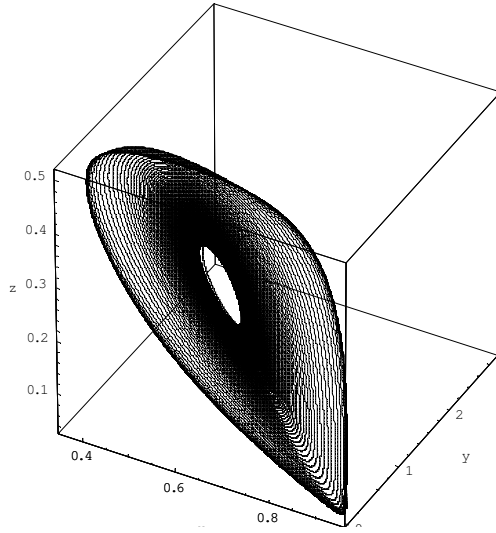


Şekil 2.30: $\{0.70, 0.40, 0.42\}$ başlangıç koşulları altındaki sistemin çözüm grafiği



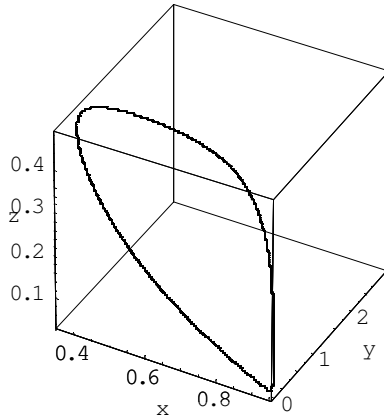
Şekil 2.31: Zaman içerisinde bir noktaya doğru küçülüyor.

Başlangıç koşullarına verilen çok küçük bir artımla $\{0.70, 0.40, 0.45\}$, tamamen farklı bir çözüm elde ediliyor:



Şekil 2.32: $\{0.70, 0.40, 0.45\}$ başlangıç koşulları altında sistemin üç boyutlu görüntüsü

Zaman içerisinde, bu çözüm 8.23 periyotlu bir limit çevrime yaklaşmaktadır:



Şekil 2.33: 8.23 periyotlu bir limit çevrime yaklaşan çözümün üç boyutlu görüntüsü

Diğer yandan, m_2 parametresinin değerinde küçük bir değişim yapıp, parametre değerlerinin kümesini

$$\{c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2\} = \{1.000, 11.000, 1.000, 1.000, 10.000, 1.500\} \quad (2.112)$$

olarak alalım. Denge noktalarının koordinatları;

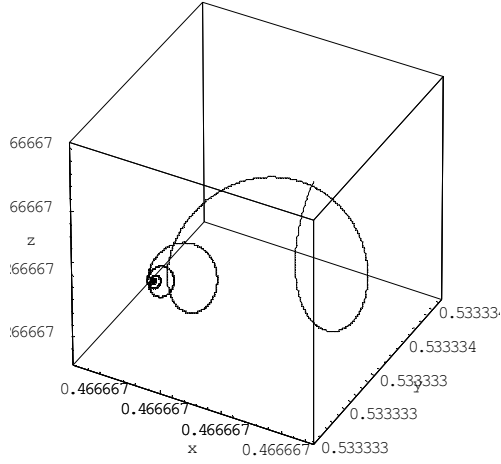
$$E_0 = (0.1, 0.9, 0.0), \quad E_1 = (0.467, 0.533, 0.267) \quad (2.113)$$

Bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler;

$$E_0 : \{-0.797, 0.500, -0.113\} \quad (2.114)$$

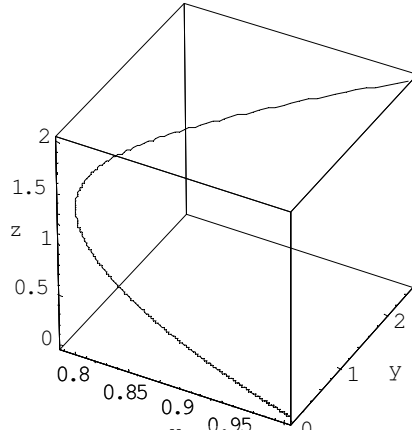
$$E_1 : \{-0.1637 + 1.190I, -0.1637 - 1.190I, 0.110 - 0.2682I\} \quad (2.115)$$

olarak bulunur. Çözüm başlangıç koşullarına hassas bağlıdır ve $E_1 = (0.467, 0.533, 0.267)$ başlangıç koşulları için çözümün üç boyutlu görüntüsü:



Şekil 2.34: m_2 parametresine verilen önemsiz bir atımla sistemin çözüm grafiği

Sistemin başlangıç koşulları $E_1 = (0.467, 0.533, 0.267)$ değerlerinden uzakta, $\{1.0, 2.5, 2.0\}$ olarak alındığında çözümün üç boyutlu görüntüsü:



Şekil 2.35: $\{1.0, 2.5, 2.0\}$ başlangıç koşullarında sistemin çözüm grafiği

iii. E_0 ve E_1 kararsız:

$$\{c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2\} = \{1.000, 11.000, 1.000, 1.000, 10.000, 2.008\} \quad (2.116)$$

parametre değerlerinde sistemin denge noktaları;

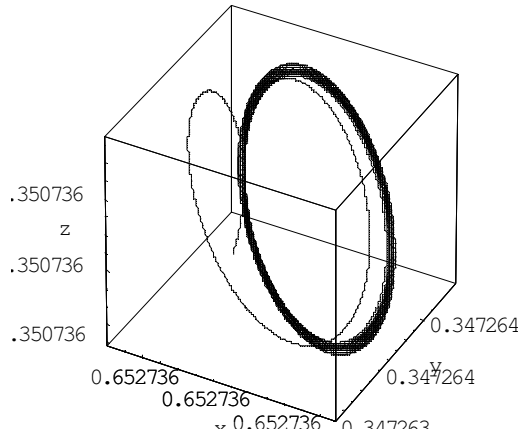
$$E_0 = (0.1, 0.9, 0.0), \text{ ve } E_1 = (0.6522, 0.3478, 0.3506), \quad (2.117)$$

Bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler;

$$E_0 : \{1.0080, -0.7971, -0.1129\} \quad (2.118)$$

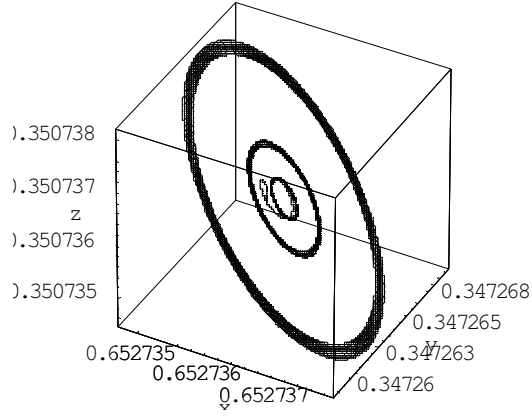
$$E_1 : \{0.0005 + 1.2893I, 0.0005 - 1.2893I, -0.4467\} \quad (2.119)$$

olarak bulunur. $E_1 = (0.6522, 0.3478, 0.3506)$ başlangıç verileri için çözümün üç boyutlu grafiği giderek genişleyen bir spiraldir:



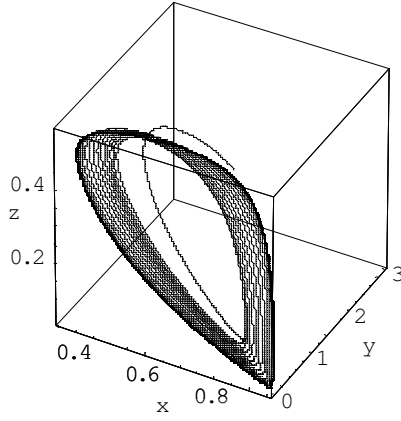
Şekil 2.36: $E_1 = (0.6522, 0.3478, 0.3506)$ başlangıç koşullarında sistemin üç boyutlu görüntüsü.

Aşağıda verilen şekil sistemin zaman içerisinde nasıl genişlediğini göstermektedir. Sistemin periyodu bu genişleme sürecinde neredeyse sabit bir periyot olan 4.87 de kalmıştır.



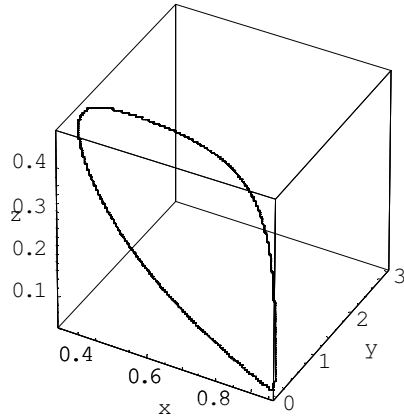
Şekil 2.37: Sistem 4.87 olan periyodunu koruyarak zaman içerisinde genişlemektedir.

Başlangıç noktası olan E_1 den uzaklaştıkça sistemin çözüm grafiği de değişmektedir:



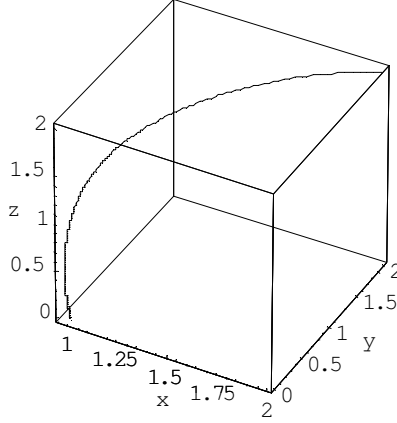
Şekil 2.38: $\{0.7, 1.4, 0.4\}$ başlangıç koşullarında sistemin durumu

Uzun vadede sistemin çözümü, 8.43 periyotlu, E_1 in kararlı olduğu durumdaki, limit çevrime yaklaşmaktadır:



Şekil 2.39: Uzun zaman sonra çözüm 8.43 periyotlu limit çevrime yaklaşmaktadır.

$\{2., 2., 2.\}$ başlangıç koşullarında ise tamamiyle farklı bir çözüm elde edilmektedir:



Şekil 2.40: En üstteki avcı yok olduğunda çözüm durmaktadır

$$\{c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2\} = \{1.0, 11.0, 1.0, 1.0, 10.0, 2.3\} \quad (2.120)$$

parametre değerlerinde ise sistemin denge noktaları

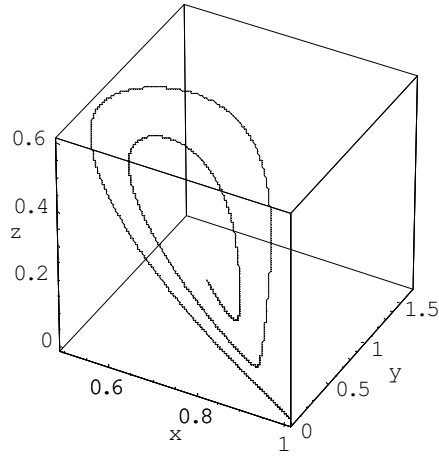
$$E_0 = (0.10, 0.90, 0.), \quad E_1 = (0.7217, 0.2783, 0.3617), \quad (2.121)$$

Bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler;

$$E_0 : \{1.3000, -0.7971, -0.1129\}, \quad (2.122)$$

$$E_1 : \{0.0696 + 1.2409I, 0.0696 - 1.2409I, 0.110 - 0.5304I\} \quad (2.123)$$

dir. Çözümün başlangıç koşullarına ve parametre değerlerinde yapılan değişimlere bağlı olmadığı görülmüştür. $\{0.8, 0.1, 0.3\}$ başlangıç koşulu altındaki çözüm en üstteki avcı yok olana kadar sürmektedir:



Şekil 2.41: $\{0.8, 0.1, 0.3\}$ başlangıç koşulunda sistemin durumu

2.10.1.5. Sonuçlar

Bu çalışmada, orana bağlı besin zinciri modeli analiz edilmiştir. Denge noktalarındaki olası davranışlar incelenmiştir.

Bir sistemin başlangıç koşullarında yapılan küçük bir değişiklik sistemin davranışında çok büyük sonuçlar doğuruyorsa o sistemin başlangıç koşullarına bağlılığından söz edilir. Neden ve sonuç arasındaki bağlantı karşılıklı etkileşimlerin karmaşıklığı içinde kaybolur gider. Yani non-lineer sistemler uzun vadeli tahminin mümkün olmadığını ortaya çıkarmıştır. Çünkü sistemdeki küçük hareketler, çoğaltan etkisiyle, sistemi yeni doğrultulara yönlendirir ve sonuçta önceden görülmemiş, tahmin edilmemiş bir yere varılır.

Bu çalışmada incelenen orana bağlı besin zinciri modelinde de başlangıç koşullarına hassas bağıllık gözlenmiştir.

2.11. Garip Çekerler

Poincaré 'nin 1900 yılında ortaya koyduğu kaos kavramı, meteorolojist Edward Lorenz'in 1963 yılında meteorolojik değişimlerin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı diye ifade edilen gözlemlerine kadar kimsenin ilgisini çekmedi. Lorenz, ele aldığı dinamik sistem için başlangıç koşullarında oluşacak küçük değişimlerin sonuca çok büyük etkiler yaptığını gözlemledi. Böylece, uzun süreli hava tahminleri yapmanın olanaksız olduğunu ortaya koydu.

Lorenz havanın ısı değişimini belirlemek için, birinci basamaktan üç tane diferansiyel denklemden oluşan

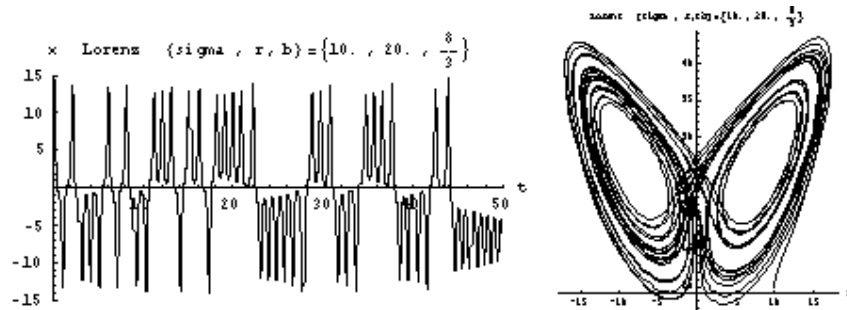
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - y - zx, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz + xy.\end{aligned}\tag{2.124}$$

sisteminin sayısal çözümü arıyordu. Sistem doğrusal değildir (nonlinear) ve akışkanlar dinamiğinde kullanılan sistemlerin basitleştirilmiş bir özel durumudur. Zamanı gösteren t değişkeni $\Delta t \approx dt$ kadar değiştiğinde, Lorenz, şu yaklaşık işlemleri yaptı:

$$\begin{aligned}X &= x + \Delta x \approx x + dx = x + (-axdt) + (aydt) \\ Y &= y + \Delta y \approx y + dy = y + bxd t - ydt - zxd t \\ Z &= z + \Delta z \approx z + dz = z - czdt + xydt\end{aligned}\tag{2.125}$$

(Başlangıç değerleri: $dt = .02$, $a = 5$, $b = 15$, $c = 1$)

t değiştikçe yeni (X,Y,Z) noktasının üç boyutlu uzayda çizdiği yörüngeyi bilgisayarla çizmeye başladı. Ortaya çıkan grafik, kendi kendisini hiç kesmiyor ve iki nokta civarına yığılıyordu. Bu yığılma noktalarına Lorenz Çekerleri (attractor) ya da Garip Çekerler denir. Şekil 2.42 de Lorenz çekicisi gösterilmiştir.



Şekil 2.42: Lorenz Çekicisi

2.12. Poincare Kesiti

Bölüm 1 de görüldüğü üzere, iki boyutlu dinamik sistemler tekrarlayan, periyodik limit çevrimler ile bağlantılı uzun dönemli hareketler gösterebilirler. Poincare kesiti tekniği bu limit çevrimlerin tanımının boyutluluğunu düşürebilir ve daha basit analizler yapılmasına yardımcı olur.

Üç boyutlu durum uzayı için, Poincare kesiti bir Poincare yüzeyi (iki boyutlu bir düzlem) seçerek ve verilen bir yörüngenin yüzeyi kestiği yerdeki noktalar kaydedilerek üretilir. Yörüngeler yüzeyi çaprazlamasına kestiği sürece düzlem seçimi çok önemli değildir, yani yörüngeler yüzeye paralel ya da neredeyse paralel hareket etmezler.

Yüksek boyutlu uzaylardaki yörüngeleri ya da transformasyonları etüt edebilmek için Poincare tarafından aşağıdaki tasvir tavsiye edilmiştir. Bu transformasyonda

$$g : P \rightarrow P'$$

bir x noktasını $g(x)$ noktasına bağlamaktadır.

P düzlemi yörüngeleri kesen bir düzlem, bir yörüngenin düzlemi bir yönde deldiği nokta ise x ise, yörüngenin bir dönüş yapıp gelmesinden sonra düzlemi aynı yönde deldiği ikinci nokta birincinin imajı olur yani $g(x)$. Bu suretle, tam yörüngeler yerine düzlem üzerindeki noktalar izlenir.

2.13. Periyot Katlama

Periyot katlama limit çevrim ile başlar. Limit çevrim ise, düğüm ya da diğer bir denge noktasını içeren dallanma ile başlayabilir. Bazı kontrol parametreleri değişirken limit çevrim kararsız hale gelir. Periyodik limit çevrimin Poincare kesitinde tek bir noktaya karşılık geldiğini varsayalım. Eğer karakteristik çarpanlardan biri -1 den daha küçük olduğunda limit çevrim kararsız hale gelirse birçok durumda yeni hareket periyodik olur fakat orijinal hareket periyodik olmak şartı ile iki katlı periyoda sahip olur. Poincare kesitinde bu yeni limit çevrim orijinal poincare kesit noktasının her bir yanında olan iki nokta gösterir.

Kesim noktalarındaki bu sıra değişimi orijinal limit çevrimin -1 'den daha küçük karakteristik çarpana sahip olması ile alakalıdır. Bu çeşit bir dallanma “flip

dallanması” olarak adlandırılır. Çünkü yeni yörüngeler bir taraftan diğer tarafa, önden arkaya dönerler-çevrilirler.

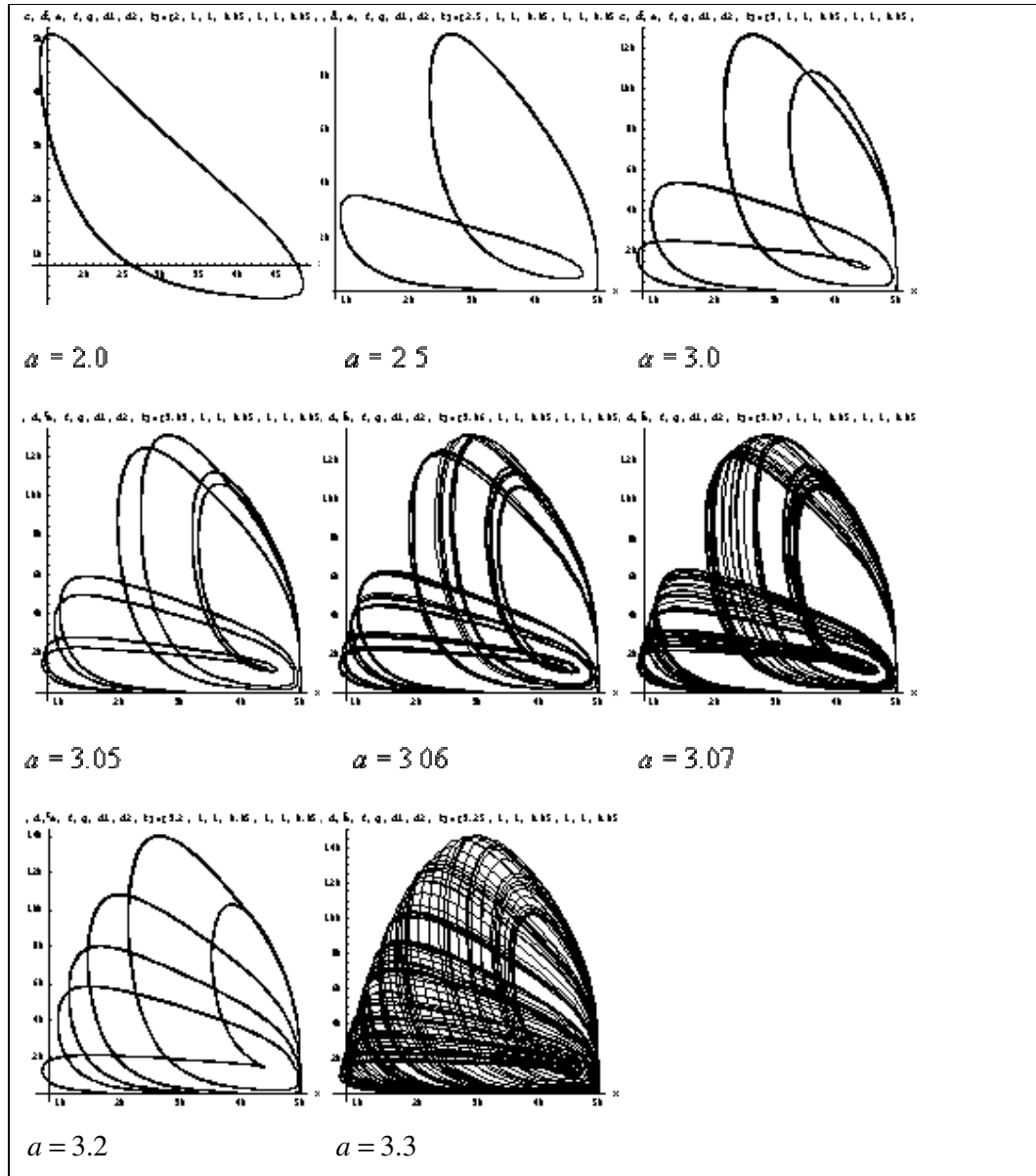
Kontrol parametreleri değişirken iki periyotlu limit çevrim karasız hale gelebilir ve dört periyotlu limit çevrim doğurur. Periyot katlama süreci periyot sonsuz olana kadar devam edebilir yani yörünge asla kendini yinelemez ve kaotiktir.

2.13.1. Üç Boyutlu Besin Zinciri Modelinde Periyot Katlama:

Aşağıda verilen üç boyutlu besin zinciri modelini ele alalım [24]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax(1 - \frac{x}{K}) - \frac{bxy}{x + d_1}, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - \frac{eyz}{y + d_2}, \\ \frac{dz}{dt} &= -fz + gyz.\end{aligned}\tag{2.126}$$

(2.126) modelinde x , av popülasyonunun, y ve z ise avcı popülasyonunun yoğunluklarını göstermektedir. y avcısı x ile z avcısı ise y ile beslenmektedir. bu modelin $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.05$, $e = 1$, $f = 1$, $g = 0.05$ $d_1 = 10$, $d_2 = 10$ $K = 50$ $1 < a < 10$ parametre değerleri ve $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.03$, $z_0 = 0.03$ başlangıç koşulları altında “ a ” parametresinde yapılan ufak değişimler aşağıda gösterilen periyot katlamayı doğurmuştur.



Şekil 2.43: α parametresinde yapılan ufak değişimler sonucu meydana gelen periyot katlama.

2.14. Lyapunov Üsseli ve Kaos

Belirtildiği gibi kaosun çok önemli bir karakteristiği başlangıç şartlarındaki değişikliklere hareketin aşırı derecede bağımlı olmasıdır. Birbirine çok yakın yörüngeler birbirinden üssel olarak ayrılırlar. Bu durum sistemin Lyapunov kararlılığının olmadığını gösterir. Hâlbuki düzenli yörüngeler birbirinden zamanla lineer olarak ayrılırlar. Yörüngelerin birbirinden ayrılma hızı Lyapunov üsselleri ile

nitelikli hale getirilmektedir. Tanım olarak bu değerler üssel ayrılmanın ortalama hızını belirtirle.

Lyapunov üsseli durum uzayındaki çekimin ya da denge noktasından itilimin orantısal ölçüsüdür. Bir boyutlu durum uzayı için x_0 başlangıç noktası x de başlangıç noktasının komşuluğundan bir nokta olsun. $x_0(t)$ verilen başlangıç noktasından doğan $x(t)$ ise başka bir başlangıç noktasından doğan iki yörünge olsun.

Zamana bağlı denklem aşağıdaki gibi olsun:

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (2.127)$$

x 'in x_0 'a yakın olduğunu varsaydığımızdan Taylor açılımını kullanabiliriz:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (2.128)$$

İki yörünge arasındaki mesafe $s = x(t) - x_0(t)$ olur ve bu farkın değişim oranı, $f(x)$ 'in Taylor açılımında sadece ilk terimleri korursak, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Bu farkın zaman ilerledikçe üssel olarak artmasını bekleriz ve

$$s(t) = s(0)e^{\lambda t} \quad (2.130)$$

denklemini sağlayan λ değerinin zaman ortalaması bize Lyapunov üsselini verecektir:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{s}{s_0} \quad (2.131)$$

koşulunu sağlayan λ Lyapunov üsselini buluruz. (2.130) eşitliğinin zamana göre türetirsek;

$$\dot{s} = \lambda s(0)e^{\lambda t} = \lambda s, \quad (2.132)$$

(2.130) ve (2.131) eşitliklerini karşılaştırsak;

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (2.133)$$

buluruz. Böylece λ pozitif ise iki yörünge'nin birbirinden ayrıldığını, λ negatif ise de iki yörünge'nin yaklaştığını görürüz.

İki ya da daha yüksek boyutlu durum uzayında Lyapunov üsseli ile durum uzayındaki doğrultuların her biri için yörüngelerin kısalma ya da açılma oranı ile ilgilenebiliriz. Üç boyut için üç adet Lyapunov üsseli tanımlanabilir:

$$\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad (2.134)$$

En az bir pozitif Lyapunov üsseline sahip olan sistem kaotik olarak tanımlanır [5].

3. FRAKTALLER

3.1. Giriş

Fraktal; matematikte, çoğunlukla kendine benzeme özelliği gösteren karmaşık geometrik şekillerin ortak adıdır. Fraktaller, klasik, yani Eukleidesçi geometrideki kare, daire, küre gibi basit şekillerden çok farklıdır. İlk olarak 1975'te Polonya asıllı matematikçi Beneoit B. Mandelbrot tarafından ortaya atılan fraktal kavramı, yalnızca matematik değil fiziksel kimya, fizyoloji ve akışkanlar mekaniği gibi değişik alanlar üzerinde önemli etkiler yaratan yeni bir geometri sisteminin doğmasına yol açmıştır. Tüm fraktallar kendine benzer ya da en azından tümüyle kendine benzer olmamakla birlikte, çoğu bu özelliği taşır. Kendine benzer bir cisimde cismi oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin bütününe benzer. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelerde sonsuza değin sürebilir; öyle ki, her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, gene cismin bütününe benzer. Bu fraktal olgusu, kar tanesi ve ağaç kabuğunda kolayca gözlenebilir. Bu tip tüm doğal fraktaller ile matematiksel olarak kendine benzer olan bazıları, stokastik, yani rasgeledir; bu nedenle ancak istatistiksel olarak ölçeklenirler.

Fraktallerin bir başka önemli özelliği de, fraktal boyut olarak adlandırılan bir matematiksel parametredir. Bu cisim ne kadar büyütülürse büyütülsün ya da bakış açısı ne kadar değiştirilirse değiştirilsin, hep aynı kalan fraktallerin bir özelliğidir. Eukleidesçi boyutun tersine fraktal boyut, genellikle tam sayı olmayan bir sayıyla, yani bir kesir ile ifade edilir. Fraktal boyut, bir fraktal eğri yardımıyla anlaşılabilir.

Fraktal boyut, Eukleidesçi olmayan belirli bir biçimin karmaşıklığını ve şekil nüanslarını açığa çıkarır. Fraktal algoritma, engebeli dağlık araziler ya da ağaçların karışık dal sistemleri gibi karmaşık, çok düzensiz doğal cisimlerin gerçektekine benzer görüntülerinin oluşturulabilmesini olanaklı kılmıştır [14].

3.2. Cantor Kümesi

Bilinen ilk fraktal Cantor kümesidir. Cantor kümesini C harfi ile göstereceğiz. $[0,1]$ kapalı aralığını ele alalım ve bu kapalı aralığı üç eşit açık aralığa bölüp ortadaki aralığı yani $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ aralığın atalım. Geriye $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ aralığı kalır.

Aynı süreci tekrarlırsak: her bir aralığı üç parçaya bölüp ortadakini atarsak

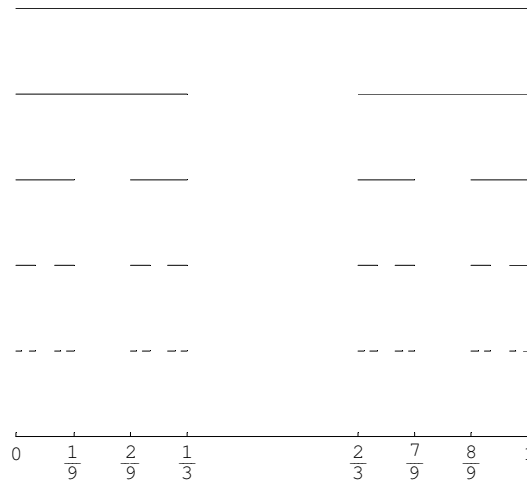
$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

elde ederiz. Bu süreci sonsuza kadar sürdürebiliriz. Her seferinde ortadaki açık aralığı atıyoruz ve kapalı aralık kalıyor. Birim aralığın uzunluğu 1 dir. İlk adımda uzunluğunun üçte birini, ikinci adımda kalanların uzunluklarının üçte birini sildik.

Genelleştirilirse, k . adımda 2^k tane kapalı aralığın toplam uzunluğunu $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ dir.

$k \rightarrow \infty$ iken C kümesinin toplam uzunluğu sıfır olur. Bu süreçten sonra kümede bir şey kalmamış mıdır? Elbette kalmıştır. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ 0 ve 1 hala C kümesindedir.

Şimdi C'nin tüm noktalarını iki farklı biçimde inceleyeceğiz: İlk olarak bir sembolik (LR) notasyonda ve sonra geleneksel notasyonda. Şekil 3.1 de Cantor kümesinin geometrik yapısı gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Cantor kümesi

3.2.1. Cantor Kümesinin Sembolik Gösterimi:

Birim aralığın ilk parçası atıldığında soldakini L sağdakini R ile gösterebileceğimiz iki parça kalır:

$$L = \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ ve } R = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

L ve R parçalarının her biri yine iki parçaya ayrılacaktır. Soldaki parçanın alt parçaları $LL = \left[0, \frac{1}{9}\right]$ ve $LR = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ ile, aynı şekilde sağdaki parçanın alt parçaları da $RL = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ ve $RR = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ ile gösterilebilir. Üçüncü adımda sekiz kapalı aralığa sahibizdir ve bunlar da aynı şekilde LLL den RRR 'e doğru adlandırılabilirler. L ve R 'nin LLRRLRL... şeklindeki sonsuz bir sıralanışı kapalı aralıkların iç içe ardılığının doğmasına neden olur:

$$L \supset LL \supset LLR \supset LLRR \supset LLRRL \supset \dots, \quad (3.1)$$

Bu şekildeki bir dizinin kesişimi

$$L \cap LL \cap LLR \cap LLRR \cap LLRRL \cap \dots \quad (3.2)$$

boş küme değildir ve C Cantor kümesinin noktalarını içerir. Kesişim tek bir noktadan daha fazlasını içeremez, aksi takdirde tüm aralığı içermiş olur, bu da Cantor kümesinin uzunluğunun sıfır olması gerçeğiyle çelişir. Böylelikle Cantor kümesinin her bir noktası L ve R'ın bir dizisi tarafından tek türlü belirlenir.

3.2.2. Cantor Kümesinin Geleneksel Notasyonu

Kapalı aralıkların uç noktalarını nasıl bulacağımızı inceleyelim. LLL den RRR 'a değişen sekiz kapalı aralığı göz önüne alıp, aşağıdaki aralıkları kontrol edelim:

$$LLL = \left[\frac{0}{27}, \frac{1}{27}\right] \quad RLL = \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right]$$

$$LLR = \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \quad RLR = \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right]$$

$$\begin{aligned}
LRL &= \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27} \right] & RRL &= \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27} \right] \\
LRR &= \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27} \right] & RRR &= \left[\frac{26}{27}, \frac{27}{27} \right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Bu sekiz aralığın uç noktalarını üç tabanında yazalım:

$$\begin{aligned}
0/27 &= 0.000_3 & 18/27 &= 0.200_3 \\
1/27 &= 0.001_3 & 19/27 &= 0.201_3 \\
2/27 &= 0.002_3 & 20/27 &= 0.202_3 \\
3/27 &= 0.010_3 & 21/27 &= 0.210_3 \\
6/27 &= 0.020_3 & 24/27 &= 0.220_3 \\
7/27 &= 0.021_3 & 25/27 &= 0.221_3 \\
8/27 &= 0.022_3 & 26/27 &= 0.222_3 \\
9/27 &= 0.100_3 & 27/27 &= 1.000_3
\end{aligned}$$

On tabanında nasıl ki 81 sayısı $80.999999\dots = 80.\overline{9}$ şeklinde yazılabiliyorsa, benzer şekilde de $\frac{1}{3}$ sayısını da 3 tabanında 0.1_3 şeklinde yazarız. Ayrıca $0.02222\dots_3 = 0.0\overline{2}_3$ şeklinde de yazılabilir. Bu belirsizlik sadece notasyonu sonlu olan (sonsuz kadar gitmeyen) ve son basamağı 1 olan sayılarda ortaya çıkar. Son basamaktaki 1 ondalık olarak $0\overline{9}$ 'a ya da üçlük tabanda $0\overline{2}$ 'ye dönüştürülebilir. Cantor kümesini anlayabilmek için bu dönüşümün kullanılması daha yararlıdır. Uç noktalara bu dönüşüm uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
0/27 &= 0.000_3 & 18/27 &= 0.200_3 \\
1/27 &= 0.000\overline{2}_3 & 19/27 &= 0.200\overline{2}_3 \\
2/27 &= 0.002_3 & 20/27 &= 0.202_3 \\
3/27 &= 0.00\overline{2}_3 & 21/27 &= 0.20\overline{2}_3
\end{aligned}$$

$$6/27 = 0.020_3 \quad 24/27 = 0.220_3$$

$$7/27 = 0.020\bar{2}_3 \quad 25/27 = 0.220\bar{2}_3$$

$$8/27 = 0.022_3 \quad 26/27 = 0.222_3$$

$$9/27 = 0.0\bar{2}_3 \quad 27/27 = 0.\bar{2}_3$$

Dikkat edilirse tüm sayılar 0 ve 2 rakamlarından oluşmaktadır. Bunun Cantor kümesindeki tüm sayılar için doğru olduğunu söyleyebiliriz:

$x \in [0,1]$ sayısı ancak ve ancak sadece 0 ve 2 rakamları kullanılarak üç tabanında yazılabiliyorsa Cantor kümesindedir. Başka bir deyişle,

$$x \in C \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}, \quad \forall a_j \in \{0,2\} \quad (3.4)$$

dir. Bu ifadenin gerçekliğini görmeye çalışalım: Üç tabanındaki ondalık kısmın ilk basamağı 1 olan sayılara ne yapabiliriz? Bu sayılar 0.1_3 ile 0.2_3 , yani $1/3$ ile $2/3$, arasındadır. Ayrıca 0.1_3 sayısı virgülden sonraki ilk basamağında 1 olan bir sayı olarak göz önüne alınmayabilir. Çünkü $0.0\bar{2}_3$ şeklinde de yazılabilir. Üçüncü sütununda silinemeyen 1 olan sayılar $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ açık aralığındadır ve bunlar Cantor kümesi oluşumunun ilk adımında elenmiştir.

Hangi sayıların ikinci basamağında 1 rakamı vardır, yani $0.\square 1 \square \square \square_3$ formundadır? İlk basamağında 1 olan sayıları zaten incelediğimiz için $0.01 \square \square \square_3$ ve $0.21 \square \square \square_3$ şeklindeki sayıları göz önüne alalım. 0.01_3 ve 0.21_3 sayıları $0.00\bar{2}_3$ ve $0.20\bar{2}_3$ formunda yazıldığı için kontrol etmeye gerek yoktur. İlk 1'i ikinci basamağında olan sayılar

$$0.01_3 < x < 0.02_3 \quad \text{ya da} \quad 0.21_3 < x < 0.22_3$$

daha geleneksel gösterimle

$$\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9} \quad \text{ya da} \quad \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$$

formundadır. Bunlar ikinci adımda silinen açık aralıklardır. İlk 1'i k . basamağında olan üç tabanındaki sayılar C 'yi oluştururken k . adımda silinen sayılardır. Kalan sayılar Cantor kümesini oluşturur. Böylelikle $\frac{3}{4} = 0.202020..._3$ şeklinde yazıldığı için Cantor kümesinin bir elemanıdır fakat $\frac{3}{8} = 0.\overline{10}$ Cantor kümesinin elemanı değildir.

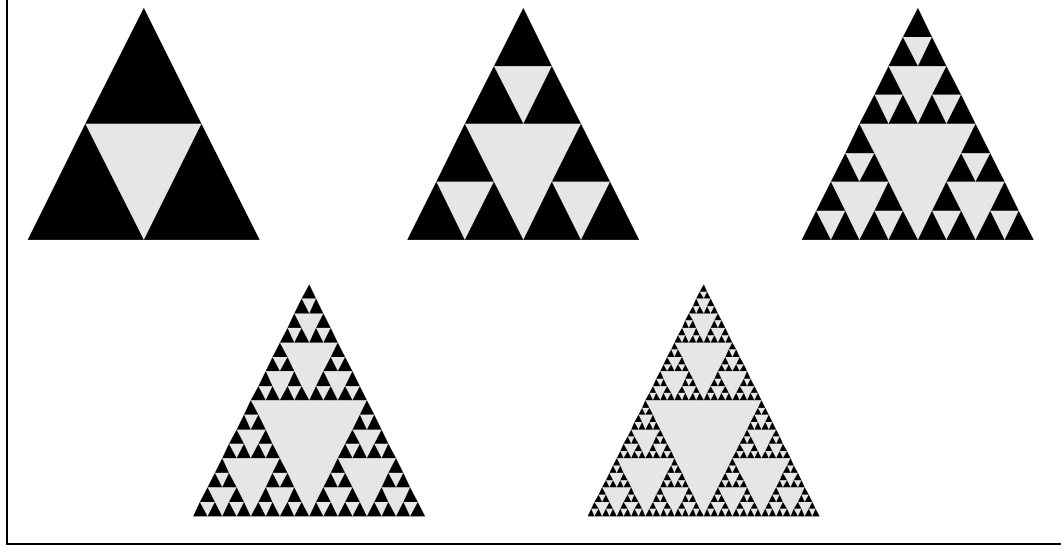
3.2.3. Cantor Kümesinin Fraktal Uygulaması

Fraktallerin iki önemli özelliği vardır: Kendi kendine benzerlik ve fraktal boyut. Fraktal bir görüntünün bir kesitine yakından bakılırsa şeklin kendisi veya çok benzeri görülür. Örneğin Cantor kümesinin tümünü ya da $2/81$ ve $3/81$ arasında kalan çok küçük bir parçasını inceleyelim (LLL aralığını). Bu parça orijinal modelin $1/81$ oranında küçültülmüş halidir ve C ile aynı özelliklere sahiptir.

İkinci olarak, fraktaller fraktal boyuta sahiptir. Noktanın boyutu yoktur. Doğru veya eğri ise bir boyutludur. Bir karenin iç bölgesi ya da kürenin yüzeyi ise iki boyutlu objelere örnektir, alana sahiptirler fakat hacimleri yoktur. Cantor kümesi göz önüne alındığında, uzunluğu olmadığından boyutunun birden küçük olduğu düşünülür. Fakat diğer yandan, bu kümede çok sayıda nokta vardır. Cantor kümesinin boyutunun olmadığını söylemek adil değildir. Fraktal boyut daha sonraki bölümlerde tekrardan ele alınacaktır [1].

3.3. Sierpinski Üçgeni

Cantor kümesinin hammaddesi birim aralıktı. Sierpinski üçgeni için düzlemdeki bir üçgen ve iç bölgesi ele alınır. Cantor kümesinin ana yapısı aralığın orta kısmının atılmasına dayanıyordu. Sierpinski üçgeni için, temel adım üçgenin ortasının çıkartılmasıdır. Ele alınan üçgenin kenarlarının orta noktaları işaretlenir ve bu orta noktalar birleştirildiğinde dört tane eş üçgen elde edilir. Merkezde kalan üçgen karalanır, sonra da kesilip atılır. Bu küçük üçgen orijinalinin $\frac{1}{4}$ 'ü oranında bir alan kaplar. Kalan üçgenlere aynı süreç uygulanırsa, yani hepsinin ortasındaki üçgenler atılıp, sonsuza kadar devam edilirse şekil 3.2 elde edilir.



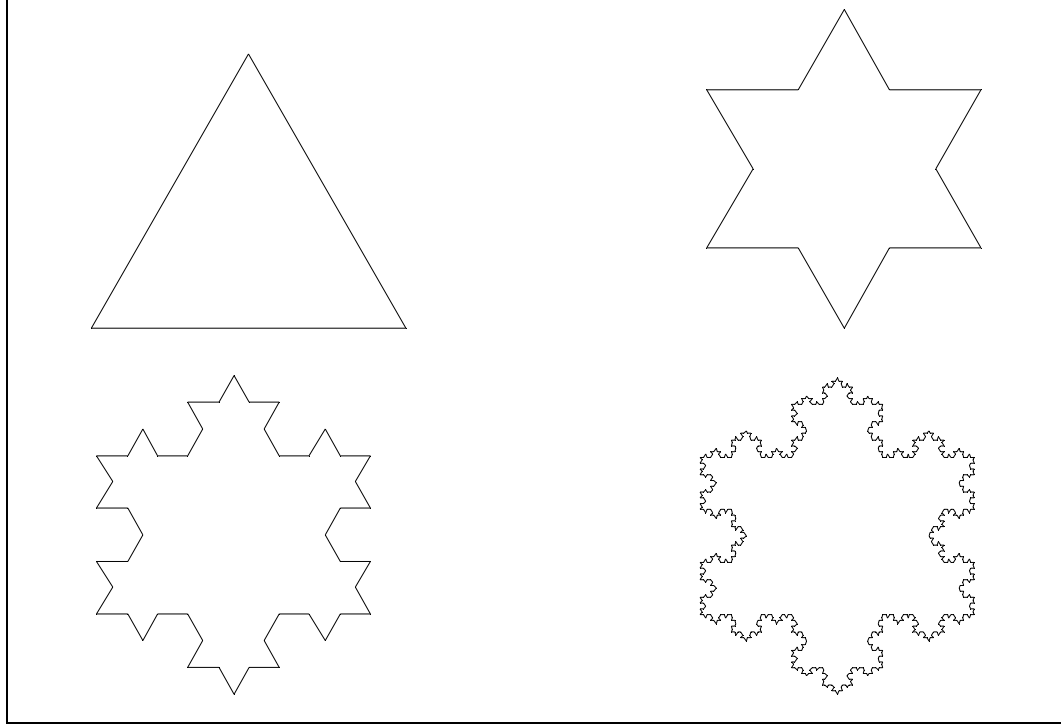
Şekil 3. 2: Sierpinski üçgenleri

Sierpinski üçgenleri, Cantor kümesinin de sahip olduğu, kendi kendini tekrar etme özelliğine sahiptir. Alt üçgenlerin her biri orijinalinin yarısı oranındadır.

Atılan her parça $\frac{1}{4}$ 'lük bir alan bırakır ve k adet parça atıldıktan sona kalan alan orijinalinin $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ katıdır. Böylelikle $k \rightarrow \infty$ iken Sierpinski üçgeninin alanı sıfır olur. Fakat bu alan bir boyutlu bir eğriden daha fazladır. O halde Sierpinski üçgeninin boyutu 1 ile 2 arasındadır.

3.4. Koch'un Kar Tanesi

Cantor kümesine yakın bir yapı uygulanır. Eşkenar bir üçgen ile başlanır, fakat bu kez üçgenin iç bölgesi alınmaz. Üçgenin her bir kenarını üç eşit parçaya ayrılıp ortadaki parça atılır. Boşta kalan iki uca atılan bu parçadan birer tane bağlanır ve uçları üçgenin dış tarafında birleştirilir. Bu uygulama üçgenin her bir kenarı için sonsuza kadar tekrarlandığında Koch'un kar tanesin elde edilir. Her adımda eğrinin uzunluğu $\frac{4}{3}$ çarpanı kadar artar. Böylelikle Koch kar tanesi sonsuz uzunluğa fakat sıfır alana sahip olacaktır.



Şekil 3.3: Koch'un Kar Tanesi

3.5. Fraktal Boyut

3.5.1. Giriş

Doğrunun bir, düzlemin iki, küpün ise üç boyutlu olduğunu söyleriz. Noktanın ise boyutu yoktur, uzunluğu, genişliği hatta yüksekliği de yoktur. Doğru bir boyutludur, bu boyut onun uzunluğuna karşılık gelir. Doğrunun da genişliği ve yüksekliği yoktur. Fakat uzunluğu sonsuzdur. Düzlem iki boyutludur, bunlar uzunluk ve genişliktir, fakat derinlik (ya da yükseklik) yoktur. Küp ise üç boyutludur çünkü uzunluk, genişlik ve yükseklik gibi üç doğrultuya sahiptir. Ayrıca bu objeler kendi kendine benzerlik özelliğine sahiptir. Bir doğruyu her biri eşit uzunlukta dört parçaya bölebiliriz ve bunların her biri 4 ile çarpılarak orijinal parça meydana getirilebilir. Aynı şekilde 7 eş parçaya bölüp 7 çarpanı ile büyütülebilir. Genel olarak, bir doğruyu, N çarpanı ile büyütülebilecek, N adet kendine benzer parçaya ayrılabilir.

Karede durum farklıdır. Kare dört kendine benzer parçaya ayrılabilir. Fakat büyütme çarpanı bu kez ikidir. Alternatif olarak, 9 parçaya bölündüğünde çarpan üç olacaktır. Kısaca kendinin kopyası olan N^2 parçaya bölünebilir ve bunların her birinin orijinal şekli elde etmek için N büyütme çarpanı vardır. Sonuç olarak bir küp N^3 tane

kendine benzer parçaya ayrılır ve bu parçalardan her biri N büyültme çarpanı ile orijinal küpün boyutuna ulaşabilirler.

Boyut basit olarak, parçalara ayrılan figürün N büyültme çarpanı ile kendi kendine benzer parçaların sayısının üssüdür [21].

3.5.2. Fraktal Boyut Tanım ve Uygulamaları

Sierpinski üçgeni eğriden daha kalın fakat diskten (çember ve iç bölgesi) daha incedir. Bu bölümde bu oldukça karışık sezgisel durumu tam olarak ele alacağız.

Sezgisel olarak boyutunu anlayabileceğimiz kesin objeler vardır. Örneğin bir eğri uzayda, bükülse ve sarılsa bile, bir boyutlu bir nesnedir. İçi dolu bir elips ya da kürenin yüzeyi ise iki boyutlu objelerdir. Bir küp ya da küre ise üç boyutludur. Noktaların sonlu bir kümesi ise sıfır boyutlu bir kümedir.

Peki, bir nesnenin 0.5 boyutlu olması ne anlama gelmektedir?

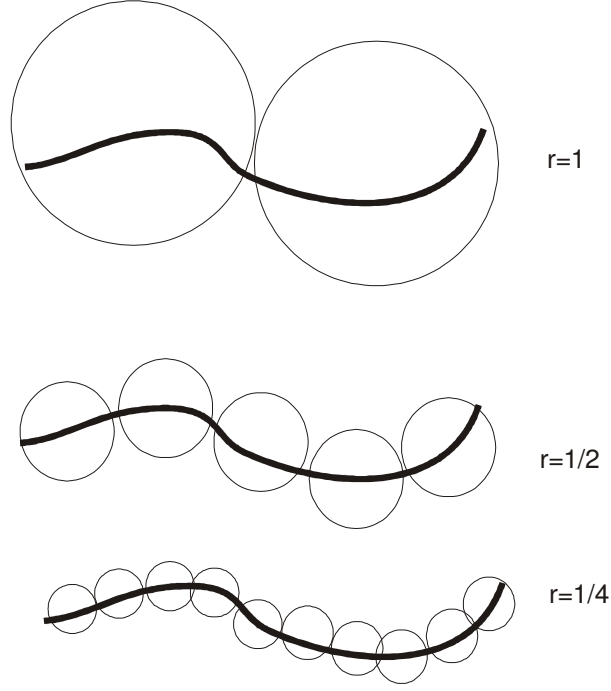
3.5.3. Kürelerle Kaplama

Küre teknik olarak, denge noktasından belirli bir uzaklıkta bulunan noktaların kümesini tanımlamakta kullanılır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$B(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\} \quad (3.5)$$

Yani; x 'den r ya da daha az mesafede bulunan y noktalarının kümesidir. Üç boyutlu uzayda ($\mathbb{R}^3$) küre denildiğinde akla yüzeyi ve iç bölgesi gelir. $\mathbb{R}^2$ de yani düzlemde ise küre (ball) disk ile aynı anlamdadır yani x merkezli r yarıçaplı bir çember ve iç bölgesi. Doğruda ($\mathbb{R}$) ise, x in orta nokta olduğu $[x - r, x + r]$ kapalı aralığıdır.

Herhangi bir K nesnesinin boyutunu hesaplamadaki ana fikir K yı belirlenen bir yarıçaplı kürelerle kaplamaktır. Bunun anlamı bizim birleşimleri K yı kapsayan bir küreler topluluğu aradığımızdır. Ve bunu mümkün olan en az küre ile yapmak isteriz. $N(K, r)$, K yı kaplamak için gerekli olan r yarıçaplı kürelerin minimum sayısını belirtsin.



Şekil 3.4: Herhangi bir eğriyi gittikçe küçülen yarıçapta kürelerle kaplamak

Örneğin, K şekil 3.4 de gösterilen eğri olsun. Şeklin en üstündeki eğri 1 yarıçaplı iki küre ile örtüldüğünden $N(K,1)=2$ dir. Bir sonraki durumda eğri 0.5 yarıçaplı kürelerle kaplanmış ve 5 tane küre kullanılmıştır. Bu yüzden $N(K,0.5)=5$ dir. Bir sonraki grafikte ise $N(K,0.25)=10$ olmaktadır. Kürelerin yarıçapını küçülttükçe iki katı kadar daha fazla sayıda küreye ihtiyaç duyulmaktadır. Çünkü r yarıçaplı bir küre $2r$ uzunluğunda bir eğriyi örtmektedir. Bu durum $N(K,r) \propto r^{-1}$ ifadesi ile gösterilebilir.

Şimdi, iç bölgesi ile birlikte bir kareyi kürelerle kaplayalım. r yarıçaplı kaç tane küre bir kenarının uzunluğu 1 birim olan kareyi kaplamak için gereklidir. r yarıçaplı bir küre πr^2 lik bir alan kapladığından en azından $1/(\pi r^2)$ tane küreye ihtiyaç duyulur. Karenin tüm alanı kaplanamazsa elbette ki daha fazla küre gerekebilir. Diğer yandan, birim kare $\frac{1}{r} \times \frac{1}{r}$ lik küçük karelere bölünebilir. Bir kenar uzunluğu r olan bu küçük kareler yarıçapı r olan tek bir küre ile kaplanabilir. Böylece kare en çok $1/r^2$ tane küre ile kaplanmış olur. Özetlersek;

$$\frac{1}{\pi} r^{-2} \leq N(K, r) \leq r^{-2} \quad (3.6)$$

ya da

$$N(K, r) \propto r^{-2}. \quad (3.7)$$

K noktaların sonlu bir topluluğu olsun. $N(K, r)$ ne olacaktır? Bu sayı K ve r ye bağlıdır, fakat bir kere r oldukça küçüktür (herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın yarısından daha küçüktür), bu nedenle $N(K, r)$ sabittir (tam olarak K deki noktaların sayısı kadardır). Bu durum $N(K, r) \propto 1$ ya da $N(K, r) \propto r^{-0}$ olarak gösterilebilir.

Son olarak $\mathbb{R}^3$ ü ele alalım ve birim küpü r yarıçaplı kaç tane küre ile kaplayacağımızı bulalım. Kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi r^3$ olduğundan, $N(K, r) > 3/(4\pi r^3)$ olacaktır. Birim küpü bir kenarının uzunluğu r birim olan $\frac{1}{r^3}$ adet alt küplere bölerek, $N(K, r) \leq 1/r^3$ olduğunu buluruz. Böylece $N(K, r) \propto r^{-3}$ olur.

Tablo 3.1: Geometrik şekillerin boyutu

K kümesi	K nın boyutu	$N(K, r) \propto r^{-0}$
Noktaların sonlu kümesi	0	r^{-0}
Eğri	1	r^{-1}
Kare ve iç bölgesi	2	r^{-2}
Küp (içi dolu)	3	r^{-3}

Kompakt kümelerin dört farklı örneğini göz önüne aldık: noktaların sonlu bir topluluğu, bir eğri, kare (iç bölgesi ile birlikte) ve küp (içi dolu). Tablo 5.3 bulunan sonuçları özetlemektedir. Sonuç olarak, herhangi bir d boyutlu K objesi için $N(K, r) \propto r^{-d}$ yazılabilir.

Tanım: $N(K, r)$, K kompakt kümesini kaplamak için gerekli olan r yarıçaplı kürelerin minimum sayısı idi. Bildiğimiz boyutlardaki bir kaç nesne için $N(K, r) \propto r^{-d}$ ilişkisi incelendi.

İlk olarak $(\propto)$ işaretini tanımlayalım. r reel sayısının f ve g fonksiyonları verilsin.

$f(r) \propto g(r)$ yazıldığında anlamı:

$f(r) = g(r) \times (r \text{ yi içeren daha az önemli terimler}).$

Eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa

$\log f(r) = \log g(r) + \log(\text{düşük mertebeden terimler})$

Burada logaritmanın tabanı önemli değildir. Düşük mertebeden terimlerin anlamı nedir? $f(r)$ ya da $g(r)$ den çok daha küçük olan terimlerdir. Her iki taraf $\log g(r)$ ile bölünürse;

$$\frac{\log f(r)}{\log g(r)} = 1 + \frac{\log(\text{düşük mertebeli terimler})}{\log g(r)} \quad (3.8)$$

elde edilir. Düşük mertebeli terimler $g(r)$ 'den çok küçük olduğundan, "1+" dan sonraki terim küçük olmalıdır.

Böylece $f(r) \propto g(r)$ notasyonu formülize edilebilir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log f(r)}{\log g(r)} = 1. \quad (3.9)$$

Örneğin, K bir kare ise $\frac{1}{\pi} r^{-2} \leq N(K, r) \leq r^{-2}$ idi. Her iki tarafın logaritması alınırsa

ve $\log(r^{-2}) = -2 \log r$ ile bölünürse

$$\frac{\log(1/\pi)}{-2 \log r} + 1 \leq \frac{\log N(K, r)}{-2 \log r} \leq 1 \quad (3.10)$$

elde edilir. Böylelikle $r \rightarrow 0$ iken

$$\frac{\log N(K, r)}{\log(r^{-2})} \rightarrow 1 \quad (3.11)$$

olur ve $N(K, r) \propto r^{-2}$ doğrulanabilir.

r^{-2} den -2 yi çekip çıkarmak için logaritmayı kullanabiliriz. $N(K, r) \propto r^{-2}$ olduğunda $r \rightarrow 0$ iken

$$\frac{\log N(K, r)}{(-\log r)} \rightarrow 2 \quad (3.12)$$

dir. “ $-\log r$ ” ayrıca $\log(1/r)$ olarak ta yazılabilir. r sıfıra yakın küçük bir sayı olduğundan $\log(1/r)$ pozitiftir.

K kompakt bir küme olsun. K nın boyutu

$$\dim K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(K, r)}{\log(1/r)} \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır. Fakat limitin olmadığı durumlarda K nın boyutu tanımsızdır. Oysa fraktaller için ötelenmiş fonksiyon sistemlerinin çekicileri meydana gelirken limit daima vardır.

Yukarıda verilen tanım biraz daha sadeleştirilirse:

Verilen boyut tanımını Cantor kümesi ya da Sierpinski üçgeni gibi fraktallere uygulayalım ve onların boyutlarını hesaplayalım. Burada ki en büyük zorluk $N(K, r)$ sayısını hesaplanmasıdır. Fakat tanımı değiştirmeksizin uygulama ve hesaplamaları kolaylaştıracak bazı sadeleştirmeler yapılabilir.

K kenar uzunluğu 1 birim olan bir kare olsun. K nın boyutunu hesaplamak için $N(K, r)$ ’yi bilmek isteriz, fakat bu sayının değerini tam olarak nasıl elde edeceğimizi bilmeyiz. Oysaki bu sayının kesin değerinin bilinmesi gerekmez. Yaklaşımlarımız $\dim K = 2$ ifadesinin doğruluğunu teyit etmekte oldukça yeterlidir. Kürelerle örtmek yerine kareler kullanarak bu hesaplama sadeleştirilebilir.

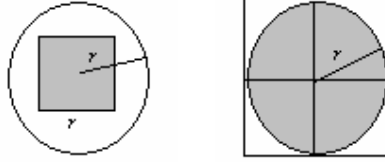
$N_{\square}(K, r)$, K yı örtmek için gereken kenar uzunluğu r olan eksene paralel kare kutuların minimum sayısı olarak tanımlanır. Kare kutu, kare ve iç bölgesi anlamındadır. Eksene paralel ise karelerin tabanlarının x -eksenine paralel olduğu anlamındadır.

$N_{\square}(K, r)$ ile ilgili iki güzel durum vardır: İlki, hesaplanması $N(K, r)$ den daha basittir. İkincisi ise, boyutun tanımında N ve $N_{\square}$ yer değiştirebilirler. Nedeni aşağıdaki eşitsizlikte verilmiştir:

$$N(K, r) \leq N_{\square}(K, r) \leq 4N(K, r). \quad (3.14)$$

Bu eşitsizliği kelimelerle ifade edersek:

- K cismi $n = N_{\square}(K, r)$ adet kutu ile örtüldüğünde, n ya da daha az sayıda disk ile örtülebilir.
- K , $n = N_{\square}(K, r)$ tane disk ile örtüldüğünde, $4n$ ya da daha az sayıda kutu ile örtülebilir.



Şekil 3.5: $N(K, r) \leq N_{\square}(K, r) \leq 4N(K, r)$ eşitsizliğinin açıklaması

Bu durumların doğruluğu için şekil 3.5 incelenebilir. İlk iddia için şeklin sol tarafına bakalım. K yi r kenar uzunluklu n adet kutu ile örtersek, basit bir biçimde her bir kutu ile eş merkezli r yarıçaplı bir disk yer değiştirebilir. Böylelikle K , n adet disk ile örtülebilir fakat daha iyisi de yapılabilir. Bu yüzden $N(K, r) \leq n = N_{\square}(K, r)$ olacaktır.

İkinci iddia için, K 'nin r yarıçaplı $n = N(K, r)$ tane disk ile örtüldüğünü varsayalım; bu durumda her bir disk, şekil 3.5'in sağ tarafında görüldüğü gibi, dört kare kutu ile yer değiştirilebilir. Bu durumda K , $4n$ tane kutu ile örtülebilir, fakat daha iyi bir durumda söz konusu olabilir. Böylece $N_{\square}(K, r) \leq 4n = 4N(K, r)$ olur.

(3.14) eşitsizliğinin tüm terimlerinin logaritması alınıp $\log(1/r)$ ile bölündüğünde

$$\frac{\log N(K, r)}{\log(1/r)} \leq \frac{\log N_{\square}(K, r)}{\log(1/r)} \leq \frac{\log 4 + \log N(K, r)}{\log(1/r)} \quad (3.15)$$

elde edilir. Son olarak $r \rightarrow 0$ iken limit alınır. Eşitsizliğin sağ ve sol tarafındaki terimler $\dim K$ 'ya yönelirler ve böylece ortadaki terim $\dim K$ 'ya yakınsar.

Sonuç olarak, boyut için iki denk tanım elde ettik: kürelerle örttüğümüz $N(K, r)$ ve eksene paralel kutularla örttüğümüz $N_{\square}(K, r)$

$$\dim K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(K, r)}{\log(1/r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_{\square}(K, r)}{\log(1/r)}. \quad (3.16)$$

r sayısı durum geometrisine uygun değilse, $N(K, r)$ ya da $N_{\square}(K, r)$ nin hesaplanması hoşla gitmez. Örneğin, $r = 1/2$ ise, Sierpinski üçgenini örtmek için tam olarak üç kutuya ihtiyaç duyulacağı aşikârdır. Aynı şekilde $N_{\square}(K, \frac{1}{4}) = 9$ olacaktır. Fakat $N_{\square}(K, \frac{1}{5})$ i hesaplamak kolay değildir. Kısacası, r nin her değeri için işe yarayan bir $N_{\square}(K, r)$ formülüne sahip olmak çok zordur [1].

Bu durum bir başka sadeleştirme gerektirir. K nin boyutu, biliyoruz ki $r \rightarrow 0$ iken

$$\frac{\log N_{\square}(K, r)}{\log(1/r)} \rightarrow \dim K \quad (3.17)$$

olur. Sıfıra doğru ilerleyen $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ sayılarının herhangi bir dizisi için

$$\frac{\log N_{\square}(K, r_1)}{\log(1/r_1)}, \frac{\log N_{\square}(K, r_2)}{\log(1/r_2)}, \frac{\log N_{\square}(K, r_3)}{\log(1/r_3)} \dots \quad (3.18)$$

dizisi $\dim K$ ya yakınsayacaktır.

Sierpinski üçgeni (S) için bu durumun nasıl çalıştığına bakalım. $N_{\square}(S, \frac{1}{2}) = 3$ ve

$N_{\square}(S, \frac{1}{4}) = 9$ olduğunu belirtmiştik. Bu şekilde devam edilirse

$$N_{\square}\left(S, \frac{1}{2}\right)=3,$$

$$N_{\square}\left(S, \frac{1}{4}\right)=9,$$

$$N_{\square}\left(S, \frac{1}{8}\right)=27,$$

$$N_{\square}\left(S, \frac{1}{16}\right)=81$$

$\vdots$

$$N_{\square}\left(S, \frac{1}{2^k}\right)=3^k.$$

r nin her değeri için $N_{\square}(S, r)$ için endişe etmek yerine, r nin değerlerinin, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ gibi, uygun bir dizisi kullanılabilir. Sıfıra giden bu dizi azalandır. Böylece

$$\begin{aligned} \dim S &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_{\square}(S, r)}{\log(1/r)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\square}(S, 2^{-k})}{\log(1/2^{-k})} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 3}{k \log 2} \\ &= \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1.585. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aynı yöntemle Cantor kümesinin (C) fraktal boyutunu hesaplayalım. $N_{\square}(C, \frac{1}{3})=2$ olduğu açıktır: Gereksinim duyulan $\frac{1}{3}$ uzunluklu iki aralık (bir boyutlu kutular) L ve R dir. $N_{\square}(C, \frac{1}{9})=4$ dür (dört kutu LL, LR, RL ve RR dir.). bu şekilde devam edilirse $N_{\square}(C, \frac{1}{27})=8$ ve $N_{\square}(C, \frac{1}{81})=16$ bulunur. Genelleştirilirse

$$N_{\square}\left(C, \frac{1}{3^k}\right) = 2^k \quad (3.20)$$

elde edilir. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ dizisi kullanılarak bir önceki yöntem ile C 'nin fraktal boyutu hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \dim C &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_{\square}(C, r)}{\log(1/r)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\square}(C, 3^{-k})}{\log(1/3^{-k})} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{k \log 3} \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 \approx 0.6309. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.6. Julia Kümeleri

$f_c(z) = z^2 + c$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f_c(z) = z$ eşitliği çözülerek f_c fonksiyonunun denge noktaları bulunur:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}. \quad (3.22)$$

$c > \frac{1}{4}$ iken, $f_c(z) = z$ eşitliği reel köklere sahip olmadığından, fonksiyonun denge noktası yoktur. $c = \frac{1}{4}$ için, tek bir denge nokta vardır. $c < \frac{1}{4}$ için ise denge nokta sayısı ikidir.

$c = -66/25 = -2.64$ durumunu göz önüne alalım. f_c fonksiyonunun denge noktaları:

$$z = \frac{11}{5}, -\frac{6}{5}$$

olacaktır. f_c fonksiyonunun iterasyonları için tüm z_0 değerlerinin bir B kümesi tüm k 'lar için sınırlı olacaktır.

$f_c^k(z)$ ötelendiğinde sınırlı kalan tüm x değerlerinin kümesi B_c , sınırlanamayan $f_c^k(z)$ ler için x in kümesi ise U_c olsun:

$$B_c = \{x : |f_c^k(z)| \nrightarrow \infty, k \rightarrow \infty\} \quad (3.23)$$

$$U_c = \{x : |f_c^k(z)| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\} \quad (3.24)$$

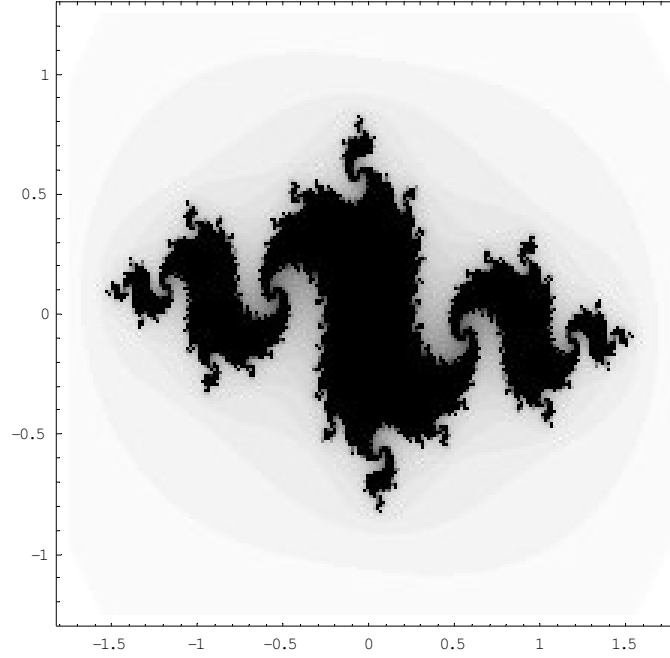
B_c ve U_c kümeleri birbirlerinin tümleyenidir. Bu iki küme arasındaki sınır J_c olarak tanımlanır ve f_c kümesinin Julia kümesi olarak adlandırılır. B_c ise f_c fonksiyonunun doldurulmuş Julia kümesidir.

$c = -\frac{3}{4}$ durumunda sistemin denge noktası $-\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{2}$ dir. $z = 1 + 2i$ olarak alındığında $f_{-3/4} = (1 + 2i)^2 - \frac{3}{4} = -3.75 + 4i$ olacaktır. B_c nin resmi yapılmak isterse aşağıda belirtilen süreç uygulanır:

Her z kompleks sayısı düzlemde bir noktaya karşılık gelir. B_c nin her elemanı için bir nokta işaretlenir ve böylece B_c nin iki boyutlu bir tasviri meydana gelir. B_c kümesi reel ve imajiner eksenin her ikisine göre de simetriktr.

B_c kümesi girintili çıkıntılı düzgün olmayan bir kümedir. Yakından bakılsa bile bu girintiler kaybolmaz. Şekli ne kadar yakınlaştırırsak yakınlaştıralım büyük figürün bir benzeriyle karşılaşırız. Bu küme fraktaldir.

$c = -0.85 + 0.18i$ olarak alalım. Bunun sonucunda elde edilen figür şekil 3.6 de gösterilmiştir.



Şekil 3.6: $c = -0.85 + 0.18i$ değeri için Julia kümesi

Julia kümesini çizmek için c kompleks sayısını belirledikten sonra verilen bir z kompleks sayısı B_c 'de mi diye sorarız. Bu sorunun cevabı için büyük bir k sayısı seçeriz ve $|f^k(z)|$ büyük mü diye kontrol ederiz. Eğer $|f^k(z)|$, 2 ve $|c|$ den büyük ise $|f^k(z)|$ 'nin büyük olduğunu söyleriz. Genellikle (fakat her zaman değil) $|c| \leq 2$ olduğunda $|f^k(z)| > 2$ koşulunu gerektirir. $|z| > 2$ ve $|z| \geq |c|$ ise, $k \rightarrow \infty$ iken $f^k(z)$ 'nin sonsuza gittiğini iddia ederiz. z den başlayarak f 'yi ötelediğimizde mutlak değeri 2 den büyük (ya da en azından $|c|$) olan bir noktaya hiçbir zaman ulaşamıyorsak, $f^k(z) \rightarrow \infty$ olduğunu garanti ederiz. Şimdi bunun doğruluğunu görmeye çalışalım. $|z| > 2$ (ve $|z| \geq |c|$) olduğunu varsayalım. $|z| > 2$ olduğundan, pozitif ε sayısı için $|z| \geq 2 + \varepsilon$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
 |f_c(z)| &= |z^2 + c| && f_c \text{ nin tanımından} \\
 &\geq |z^2| - |c| && |z^2 + c| + |-c| \geq |z^2| \text{ (üçgen eşitsizliği)} \\
 &\geq |z^2| - |z| && |z| \geq |c| \text{ olduğundan}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |z|(|z|-1) \\
&\geq |z|(1+\varepsilon) \quad |z| \geq 2+\varepsilon \text{ olduğundan.}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu çıkarım kullanılarak,

$$|f_c^k| \geq |z|(1+\varepsilon)^k \rightarrow \infty \tag{3.26}$$

elde edilir ve böylece $z \in U_c$ olur.

$z \in B_c$ olduğunu test etmek için, $k=1,2,3\dots$ değerleri için $f_c^k(z)$ hesaplanır ve hiçbir zaman $|f_c^k(z)| > \max\{2,|c|\}$ olmuyorsa, $z \in B_c$ dir. $z \in B_c$ olduğunu varsayalım: $z \notin U_c$ olduğuna karar vermeden önce f_c kaç kere ötelenmelidir? Bu cevabı zor bir sorudur ve cevap, hesaplamayı yapan insana bağlıdır: hız ve doğruluk.

Eğer hız çok önemliyse, k 'nin mütevazı bir değeri (20 gibi) kabul edilebilir sonuçlar verir. Yanlış tanımlanan noktalar olacaktır (B_c de olduğunu düşündüğümüz fakat gerçekte U_c de olan), fakat yapılan hesaplamaların büyük yüzdesi doğru olacaktır.

Eğer doğruluk çok önemliyse, k 'nin büyük bir değeri (100 gibi) iyi sonuçlar verir. Bu durumda daha az hata yapılacaktır fakat kullanılan bilgisayar çok daha uzun süre çalışacak ve resmin üretilmesi çok daha uzun zaman alacaktır. Eğer Julia kümesinin kabaca bir resmini elde etmek istiyorsak küçük sayıda öteleme yapmak yeterlidir. Diğer yandan, yüksek çözünürlü bir şekil elde etmek için, büyük değerli k sayısı kullanılmalıdır

Julia kümesinin resmine renk ekleyerek doğal ve estetik olarak hoş a giden bir şekil elde edilebilir. $f^k(z)$ iterasyonu hesaplanırken, sınırların dışına çıkan yani mutlak değerce büyük olan, $f^k(z)$ fonksiyonlarının ilk k sayıları kaydedilir. Bu k sayısı z noktasının zaman kaçağı olarak adlandırılır. $z \in B_c$ ise büyük bir $|f^k(z)|$ değeri elde etmeyiz, bu yüzden onun zaman kaçağı sonsuz olur.

Şimdi dikdörtgen bir bölgedeki tüm z noktaları için ekranda bir nokta işaretlemek istiyoruz ($x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ ve $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$). B_c nin elemanı olan noktalar için siyah nokta, diğer tüm z noktaları (U_c nin elemanı olanlar) için z 'nin zamandan kaçmasına bağlı olarak farklı bir renk işaretlenebilir. Örneğin, $k=0$ iken kırmızı nokta ve k arttıkça gökkuşağının renkleri kullanılabilir.

3.7. Mandelbrot Kümesi

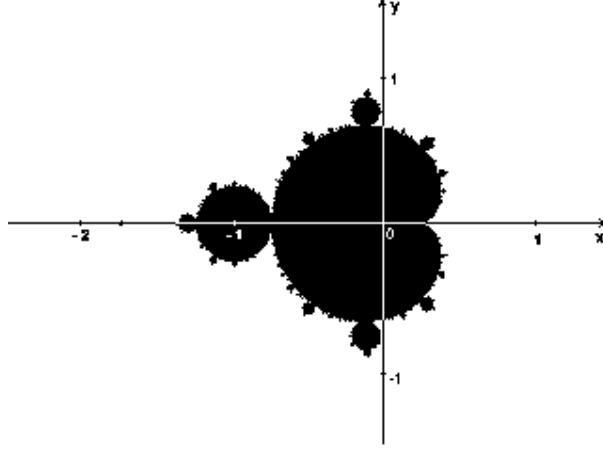
Değişik Julia kümeleri yaratmak istenirse, c 'nin bazı değerleri için B_c nin fraktal bir yapı ve bağlantılı bir bölge olduğu unutulmamalıdır. f_c sıfır noktasında ötelenmeye başladığında $f_c^k(0)$ sınırlı kalırsa, B_c kümesi bağlantılı olur, fakat $|f_c^k(0)| \rightarrow \infty$ ise, B_c fraktal bir yapı olacaktır. Bu durum, c 'nin hangi değerleri için $f_c^k(0)$ 'nın sınırlı kalacağı hangi değerleri için ise sonsuza gideceği sorusunun doğmasına neden olur. $f_c^k(0)$ 'nın sınırlı kaldığı c değerlerinin kümesi Mandelbrot kümesi (M) olarak tanımlanır:

$$M = \{a \in \mathbb{C} : |f_c^k(0)| \nrightarrow \infty\}. \quad (3.27)$$

Julia kümesine uygulanan sürecin aynısı Mandelbrot kümesine uygulanarak bu kümenin de resmi çizilebilir. $|c| > 2$ ise $c \notin M$ dir. Bunun nedenini görmek için $f_c(0) = c$ olarak alalım ve mutlak değeri en azından $|c|$ olan ya da 2 den büyük olan bir noktadan (c) f_c fonksiyonunu ötelemeye başlayalım Julia kümesindeki süreçten dolayı $|f_c^k(0)| \rightarrow \infty$ olacaktır. Bazı k değerleri için $|f_c^k(0)| > 2$ bulunursa $c \notin M$ olur. Diğer yandan, k nın büyük değerleri için, $|f_c^k(0)| \leq 2$ bulunursa $c \in M$ olacaktır.

Mandelbrot kümesi $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyon fonksiyonu ile tanımlanan kompleks dizi ile oluşturulan yakınsak serilerin bölgesidir. Diğer bir deyişle, basit bir algoritma ile kompleks düzlemdeki noktaları iki kategoriye ayırmak mümkündür:

- Mandelbrot kümesi içerisindeki noktalar
- Mandelbrot kümesi dışındaki noktalar



Şekil 3.7: Mandelbrot Kümesi

Şekil 3.7 kompleks düzlemin bir kısmını göstermektedir. Mandelbrot kümesine ait noktalar siyah renkle gösterilmiştir.

Mandelbrot kümesi dışındaki noktaları bir renkle işaretlemek de mümkündür. Renk, noktanın Mandelbrot kümesi dışında olduğunu belirlemek için kaç tane iterasyon yapıldığına bağlıdır ve Mandelbrot kümesinden uzaklıkları bu renkler ile yorumlanabilir [1].

3.7.1. Mandelbrot kümesi çizimi

Kompleks düzlemde bir nokta seçelim (bu seçilen nokta c olsun). Bu noktaya karşılık gelen kompleks sayı $c = x + iy$ formundadır. z değeri olarak sıfır alıp, $z^2 + c$ açılımının değerini hesaplayalım. Sonuç açıkça görüldüğü üzere c dir. Bulduğumuz bu değeri z 'ye atayıp, yaptığımız işlemi tekrarlayalım. Şimdi bulduğumuz sonuç $c^2 + c$ kompleks sayısıdır. Bu değeri tekrar z 'ye atayıp uyguladığımız sürece tekrar ve tekrar devam edelim. Diğer bir deyişle $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyon fonksiyonunu uygulayalım. Bu süreci c başlangıç noktasının düzlemdeki bir yerden başka bir yere göçü olarak düşünebiliriz. Bu iterasyonun sonucunda noktaya ne olur? Orjinin yakınında kalacak mı ya da orjine olan uzaklığı sınırsız bir şekilde artarak ondan uzaklaşacak mıdır? İlk durumda, c 'nin Mandelbrot kümesine ait olduğu, diğer durumda ise c 'nin sonsuza gittiği söylenir ve istenirse, noktanın orjinden uzaklaşma hızına bağlı olarak c 'ye bir renk atanabilir.

Farklı bir bakış açısından algoritma incelenirse: Düzlemdeki tüm noktaların sonsuz ve Mandelbrot kümesi tarafından çekildiğini düşünelim. Bu

- Mandelbrot kümesinden uzaktaki noktaların sonsuza doğru niçin hızla hareket gittiğini
- Mandelbrot kümesi yakındaki noktaların sonsuza niçin yavaşça kaçtığını
- Mandelbrot kümesi içindeki noktaların niçin asla sonsuza kaçmadığını

anlamamızı kolaylaştıracaktır.

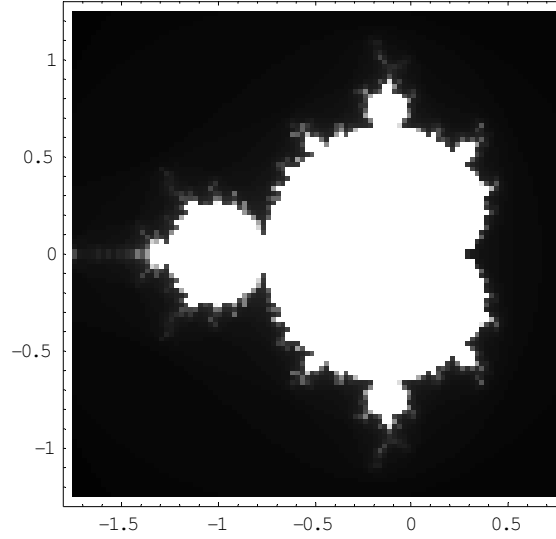
Görüldüğü gibi, yukarıda tanımlanan süreci uygulamak oldukça zordur. Çünkü fonksiyon sonsuz kere ötelenemeyeceği için noktanın sonsuza gidip gitmediğini göremeyiz. Noktanın orjinden uzaklığı ikiden daha büyük hale geldiyse limitsiz olarak büyüyeceği anlamına gelir. Bunun sonucu olarak, noktanın orjinden uzaklığı 2 değerine ulaştığında öteleme sürecini durdurulabilir. Çünkü biliyoruz ki nokta sonsuza gidecek ve gerçekleştirilen iterasyon sayısına bağlı olarak noktaya bir renk atanabilir (küçük sayıdaki bir öteleme noktanın hızla sonsuza gittiği anlamındadır).

Diğer taraftan, nokta Mandelbrot kümesine ait ise orjinden uzaklığı, ne kadar iterasyon yapılırsa yapılsın, asla ikiden daha büyük olmayacaktır. Nokta Mandelbrot kümesine ait olmasa bile onun sonsuza gideceğini ortaya çıkaran çok büyük sayıda iterasyonlar gerekebilir. Ya da maksimum sayıda iterasyondan sonra kümenin elemanı olduğunu varsayabiliriz.

Düzlemdeki özel bir noktaya nasıl renk atanacağını bir örnekle görelim. Mandelbrot kümesinin dışındaki $c = -0.5 + i$ noktası ile başlayalım. $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyon fonksiyonu tablo 3.2 de gösterilen değerleri üretecektir: (Şekil 3.28 kompleks düzlemde karşılık gelen noktaları göstermektedir.

Tablo 3.2: Mandelbrot kümesi çizim örneği

Adım sayısı	Geçerli Değer	Orjine uzaklık
1	$-0.5 + i$	1.12
2	-1.25	1.25
3	$1.06 + i$	1.46
4	$-0.37 + (3.1)i$	3.15



Şekil 3.8: $c = -0.5 + i$ ile başlayan Mandelbrot kümesi

Üçüncü iterasyonda, noktanın orjinden uzaklığı ikiden büyük hale gelmiştir. Bunun anlamı c başlangıç noktasının Mandelbrot kümesine ait olmadığıdır. Aynı süreci Mandelbrot kümesi içinden alınan $c = 0.2 + 0.5i$ sayısı için tekrarlayalım. Bu durumda noktanın orjinden uzaklığı asla ikiden büyük olmamaktadır. Maksimum iterasyon sayısına ulaştığımızda (örneğin 200 gibi) c başlangıç noktasının Mandelbrot kümesine ait olduğunu varsayınız ve siyah renge boyarız. Bu durumda elde edilen noktalar ise tablo 3.3 de gösterilmiştir.

Tablo 3.3: $c = 0.2 + 0.5i$ ile başlayan Mandelbrot kümesinin değerleri

Adım sayısı	Geçerli değer	Orjine uzaklık
1	$0.2 + 0.5i$	0.54
2	$-0.01 + 0.7i$	0.7
3	$-0.29 + 0.49i$	0.57
4	$0.05 + 0.22i$	0.22
5	$0.15 + 0.52i$	0.54
6	$-0.05 + 0.66i$	0.66
7	$-0.23 + 0.44i$	0.48
8	$0.06 + 0.3i$	0.3
....		

3.8. Julia Kümeleri ve Mandelbrot Kümesi Arasındaki Fark

Julia kümeleri ile Mandelbrot kümesi arasında sıkı bir bağ vardır. Onları üretmekte kullanılan öteleme fonksiyonu $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dir. Bu formülün kullanımındaki fark nedir?

Mandelbrot kümesinin resmini çizmek için, kompleks düzlemin her bir c noktası için formül ötelenir ve daima $z_0 = 0$ ile başlanır.

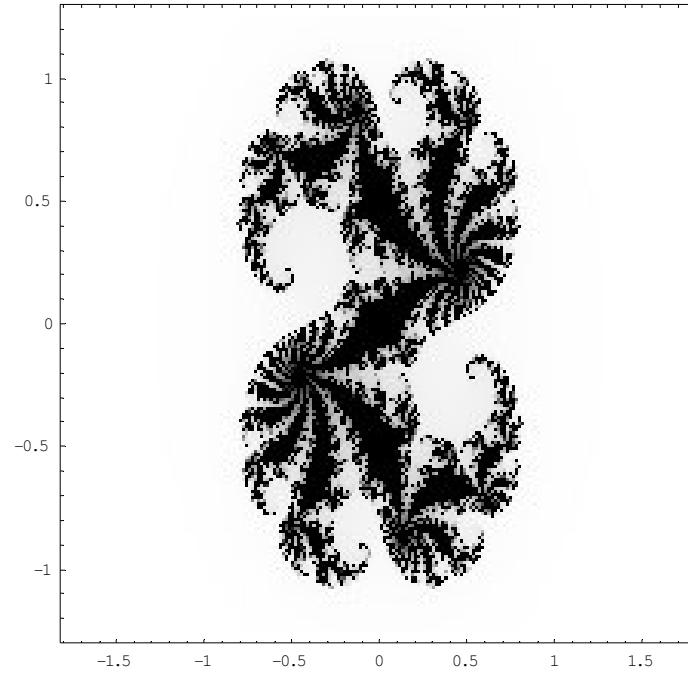
Julia kümelerinin resmini çizerken, z_n değeri değişirken, c tüm bu öteleme süreci esnasında sabit bir değerde kalır. c 'nin değeri Julia kümesinin şeklini belirler. Diğer bir deyişle kompleks düzlemdeki her nokta belirli bir Julia kümesi ile ilişkilidir.

3.9. Julia Kümesi Yapma

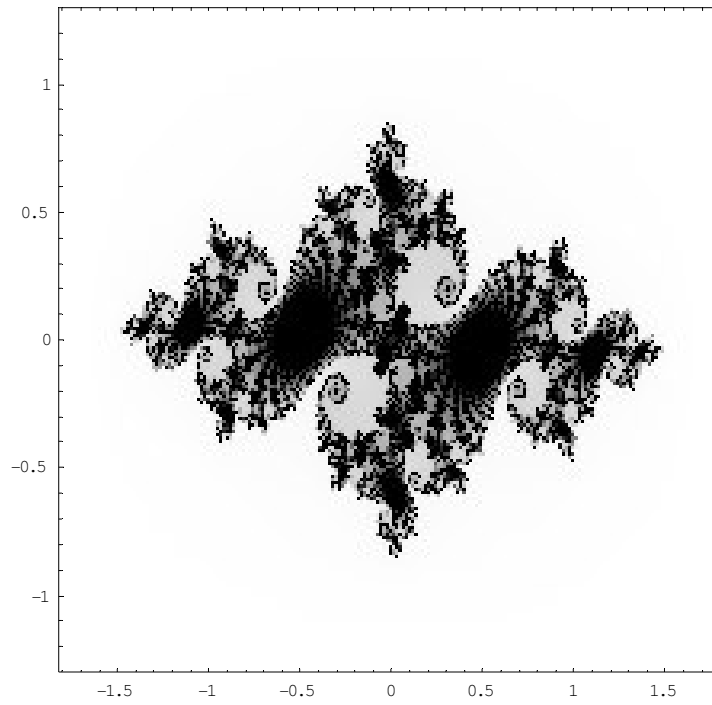
Kompleks düzlemde bir nokta seçelim ve bu noktayı c olarak adlandıralım. c ye karşılık gelen kompleks sayı $c = x + iy$ formundadır. c ile bağlantılı olarak aşağıdaki algoritma Julia kümesi üretir: bu algoritma kompleks düzlemde verilen genel bir z noktasının, c ile bağlantılı olarak, Julia kümesine ait olup olmadığını belirler ve böylece ona atanacak renk belirlenmiş olur.

z kümeye ait ise, $z_0 = z$ kullanılarak $z_{n+1} = z_n^2 + c$ fonksiyonu ötelenir. Fonksiyon ötelendiğinde z başlangıç noktasına ne olur? Ya orjinin bir civarında kalacak ya da orijinle arasındaki mesafe limitsiz olarak artarak uzaklaşacaktır. İlk durumda, nokta Julia kümesine aittir, diğer durumda ise sonsuza gider (sonsuz, nokta için bir çekicidir) ve z 'ye orjinden uzaklaşma hızına bağlı olarak bir renk atanabilir. c ile bağlantılı olarak Julia kümesinin bir şeklini elde etmek için koordinatları $-2 < x < 2$ ve $-1.5 < y < 1.5$ aralığında değişen tüm z noktaları için bu süreç tekrarlanmalıdır.

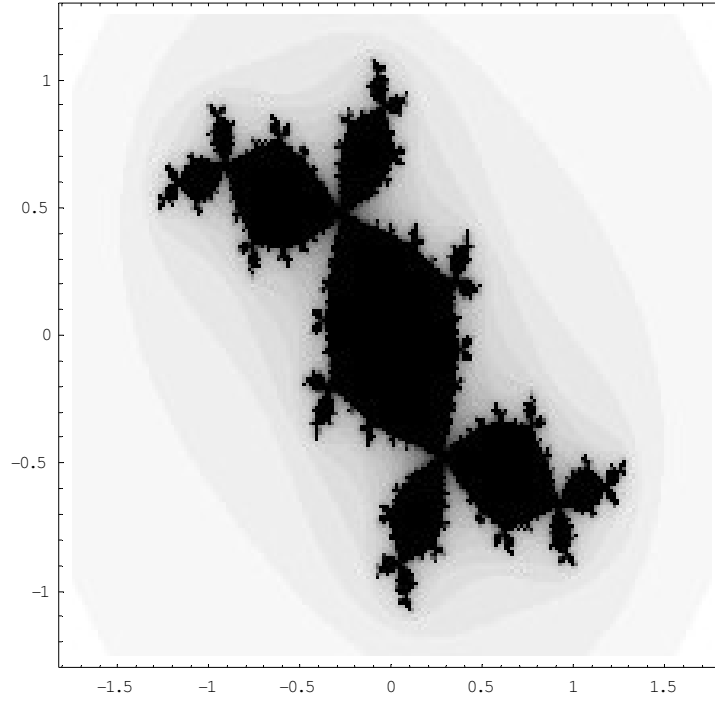
Julia kümeleri şaşırtıcı şekillere sahip olmaktadır. Şekil 3.9'dan 3.11'e kadar c 'nin farklı değerleri için meydana gelen Julia kümeleri gösterilmiştir. Dikkat edilirse bu şekiller doğada var olan birçok fraktal yapı ile örtüşmektedir.



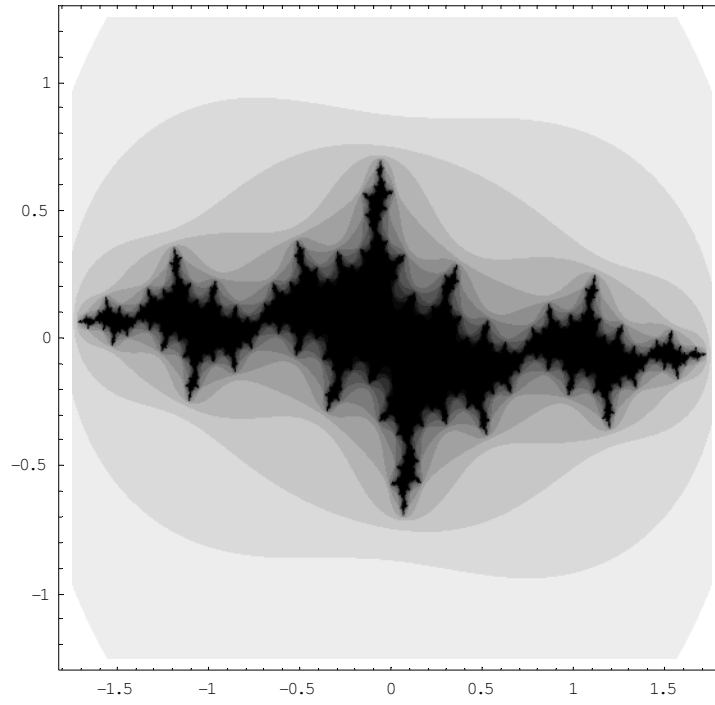
Şekil 3.9: $c = 0.29 + 0.016i$ için Julia kümesi



Şekil 3.10: $c = -0.748 + 0.0725i$ için Julia kümesi



Şekil 3.11: $c = -0.16 + 0.74i$ için Julia kümesi



Şekil 3.12: $c = -1.24 + 0.15i$ için Julia Kümesi

Julia kümesi üretmek için kullanılan bu metot Mandelbrot kümesi için kullanılan ilke aynıdır. Noktanın orjinden uzaklığı 2 den büyük olursa onun sınırsız olarak artacağından emin olabiliriz. Böylece, aradaki mesafe iki değerine ulaştığında noktanın sonsuza gideceğini bildiğimiz için öteleme sürecini durdurabiliriz ve gerçekleşen iterasyon sayısına bağlı olarak ona bir renk atayabiliriz (büyük sayıdaki bir iterasyon noktanın sonsuza yavaşça gittiği anlamındadır). Nokta Julia kümesine ait ise, orjinle arasındaki mesafe asla 2 den daha büyük olmayacaktır ve ne kadar iterasyon yapıldığı önemsizdir. Maksimum sayıda ötelemeden sonra noktanın kümenin hangi kısmına ait olduğuna karar verip ona göre renklendiririz. Daha fazla iterasyon kullanıldığında şekilde çok daha fazla detay olacaktır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Ekolojik sistemlerin matematiksel modelleri, bu modellerin bilgisayar simülasyonları ve bunların gerçek ekolojik verilerle karşılaştırılması, bu tür sistemlerin kontrol edilmesinde ya da kısa vadede sistemin geleceğinin tahmin edilmesinde yardımcı olurlar.

Ekolojik sistemler üzerinde yapılan deneysel ve teorik çalışmalar, bu sistemlerin nonlinear dinamiğin modelleri ile tanımlanabildiğini göstermektedir. Günümüz doğa bilimlerindeki bir diğer eğilim, birbiriyle ilişkili çok sayıda basit canlının oluşturduğu sistemlerin, çoğunlukla karmaşık ya da kaotik olabilen hareketlerini incelemektir. Aynı etkileşim ağının bireyleri olan türlerin dinamiklerinin, birbirlerine olan etkilerinin araştırılması amacıyla, popülasyon ekolojisi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Doğal ekolojik sistemlerdeki etkileşim ağı, yönelimsel bir ilişki ile birbirine bağlanan türlerden oluşan besin zincirleri ya da besin ağlarıdır. Bu tür sistemler, genellikle, lineer olmayan türden bir dinamik davranış gösterirler. Pek çok karmaşık ve nonlinear sistem, bilgisayar simülasyon teknikleri kullanılarak başarıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada lineer olmayan dinamik sistemler teorisi ele alınıp, popülasyon dinamiklerinden seçilen besin zinciri modelleri ve bu modellerin dinamiksel davranışları incelenmiştir. Bu tür sistemlerin sahip oldukları nonlinearlik unsurlarından dolayı başlangıç koşullarında yapılan küçük değişimlerin çok büyük, öngörülemeyen sonuçlar doğurduğu ve bu nedenle sistemlerin davranışları ile ilgili uzun vadede tahminlerin yapılamayacağı sonucuna varılmıştır.

Mandelbrot , “Bulutlar küre değildir.”, “Dağlar koni değildir.” diyerek fraktal geometrinin özünü tanımlamaktadır. Fraktal geometri, kaotik dinamik süreçlerde biçimlerinin karmaşık olmasından dolayı garip çekici olarak adlandırılan şekilleri anlamaya ve garipliklerini keşfetmeye yardımcı olmaktadır. Bu çalışmada, son olarak, fraktal geometri ve fraktal boyut kavramları üzerinde durulmuş ve verilen örneklerle bu kavramlar incelenmiştir.

Ele alınan modellerin dinamikleri Mathematica üzerinde A.Clark tarafından hazırlanan “Dinamik Sistemler Paketi” yardımıyla incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Scheiner, E.R.** 1996. Invitation to Dynamical Systems, The John Hopkins University Press, Washington, D.C.
- [2] **Bernice, C.**, 1997. The Edge of Chaos, John Wiley and Sons, New York.
- [3] **Tufillaro, N.B.** 1992. An .experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley, Reilly, Boston.
- [4] **Çambel, A.B.**, 1993. Applied Chaos Theory: A Paradigm for Complexity, Academic Press, Boston.
- [5] **Hilborn, R.C.**, 1994. Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press, New York.
- [6] **Boyce, W.E.**, 2001. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley and Sons Press, New York.
- [7] **Panfilov, A.**, 2001. Non-linear Dynamical Systems, Utrecht University Press.
- [8] **Roos, A.M.**, 2001. Modeling Population Dynamics, University of Amsterdam Press.
- [9] **Perko, L.**, 1991. Differential equations and dynamical systems, Springer-Verlag New York.
- [10] **Gleick, J.**, 1987. Chaos: Making a New Science, Viking. New York.
- [11] **Barnsley, M.** 1988, Fractals Everywhere, Academic Press, Boston.
- [12] **Strogatz, S.**, 1994. Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley, Boston..
- [13] **Tsonis, A.A.**, 1992. Chaos: From Theory to Applications, Plenum Press, New York.
- [14] **Hacısalıhoğlu, H.H., Yaz, N.**, 2002.. Fraktal Geometri I, Ankara Univ., Ankara.
- [15] **Teschl, G.**, 2004. Ordinary differential equations and dynamical systems, *PhD Thesis*, MIT, Nondbergstraße, Austria.
- [16] **Wirkus, S.A.**, 1999. The Dynamics of two coupled van der pol oscillators with delay coupling, *PhD Thesis*, Cornell University.

- [17] **Gakkar, S., Naji, R.K.**, 2003. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain, *Chaos, Solitons and Fractals* **18**, 229-239
- [18] **Rai, V.**, 2004. Chaos in natural populations: edge or wedge. *Ecological Complexity*, **1**, 127-138.
- [19] **Arditi, R., Ginzburg, L. R.**, 1989. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence, *J. Theoretical Biology* **139**, 311-326.
- [20] **Arditi, R., Saiah, H.**, 1992. Empirical evidence of the role of predator-prey theory, *Ecology* **73**:1530-1535.
- [21] **Ginzburg, L. R., Akçakaya, H. R.**, 1992. Consequences of ratio-dependent predation for steady state properties of ecosystems, *Ecology* **73**, 1536-1543.
- [22] **McCarthy, M. A., Ginzburg, L. R., Akçakaya, H. R.**, 1995. Predator interference across trophic chains., *Ecology* **76**(4), 1310-1319.
- [23] **Hsu, S. B., Hwang, T. W., Kuang, Y.**, 2001. Global analysis of the Michaelis-Menten type ratio-dependence predator-prey system, *J. Math. Biol.* **42**, 489.
- [24] **Joy, M.P.**, 1996. On the integrability and chaotic behaviour of an ecological model, *J.Phys. A* **21**, 2291-2299.
- [25] **Hsu, S. B., Hwang, T.W., Kuang, Y.**, 2003. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control., *Mathematical Biosciences* **181**, 55-83.
- [26] **Hastings, A., Powell, T.** 1991. Chaos in a three-species food chain, *Ecology* **72**, 896.
- [27] **Hastings, A., Klebanoff, A.**, 1993. Chaos in three species food chains, *J.Math. Biol.* **32**, 427.
- [28] **Dubey, B., Upadhyay, R.K.**, 2004. Persistence and extinction of one-prey and two-predator system, *Nonlinear Analysis* **9**(4), 307-329.
- [29] **Gakkar, S., Naji, R.K.**, 2003. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain, *Chaos, Solitons and Fractals* **18**, 229-239.
- [30] **Kara, R., Can, M.**, 2006. Ratio-Dependent Food Chain Models with Three Trophic Levels, *International Journal of Computer Science*, Volume **1**, No: 2, pp. 85-92,
- [31] **Kara, R., Can, M.**, 2006. Hopf Point Analysis for Ratio-Dependent Food Chain Models, *Mathematical Biosciences*, (submitted).

- [32] **Kara, R., Can, M.**, 2006. Four and Five Dimensional Metapopulation Models, *Iranian Journal of Science and Technology*, (submitted)
- [33] **Kara, R., Can, M.**, 2006. Chaos in Food Chain Models, *Journal of Contemporary Mathematics*, (submitted).
- [34] **Karaçay, T.**, 2004. Determinizm ve Kaos, Mantık, *Matematik ve Felsefe II.Ulusal Sempozyumu* , Asos, 21-24 Eylül.
- [35] **Kara, R., Can, M.**, 2005, Metapopülasyon Modellerinde Av-Avcı Etkileşimi, *Ulusal Matematik Sempozyumu*, İstanbul Kültür Üniversitesi, İstanbul, 05-08- Eylül.
- [36] **Kara, R., Can, M.**, 2005, Orana Bağlı Besin Zinciri Modeli, *Bilimde Modern Yöntemler Sempozyumu*, Kocaeli., 16-18 Kasım.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Nevşehir’de doğdu. 1998 yılında Yeşilköy 50. Yıl Lisesi’nden ve 2003 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik lisans programından mezun oldu. 2003 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.