İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞEN ARDIŞIK HÜCRE YÖNLÜ, KAPALI FORMÜLASYONLU YÖNTEM

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Ali Ruhşen ÇETE

Anabilim Dalı: Uçak Mühendisliği

Programı: Uçak Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Adil YÜKSELEN

ARALIK 2004

ÖNSÖZ

Öncelikle düşündüğüm, inandığım, hayal ettiğim şeyleri uygulamak için risk almaktan korkmamayı bana aşılayan aileme ve bir çok açıdan zararlı bir karakter gibi görünen ama hayallerin gerçekleşmesinin temel taşı olan inatçılığımı dokuma işleyen atalarıma teşekkür ederim. Ayrıca bilimi ve araştırmayı bana tanıtan ve sevdiren öncelikle Makine Mühendisi eniştem Emre Kargıner ve sayğıdeğer hocam Prof.Dr. Fevzi Ünal olmak üzere tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Tez jürime katılan öncelikle tez izleme komitemde de bulunan Prof.Dr. Kadir Kırkköprü, Doç.Dr. Metin Orhan Kaya'ya ve Prof.Dr. İsmail Hakkı Tuncer, Prof.Dr. Nafiz Alemdaroğlu'na ilgileri nedeniyle teşekkür ederim. Kendisine son derece sevgi ve saygı duyduğum tez danışman hocam Prof.Dr. Adil Yükselen'e ilgisi ve desteği için teşekkür ederim.

Bana görüşleri ile yardımda bulunan iş arkadaşlarım Makine Yüksek Mühendisi Hakan Tiftikçi, Uçak Yüksek Mühendisi Yüksel Ortakaya'ya ve ideallerime inanarak benimle fedakar olarak çalışan proje mühendisi iş arkadaşlarım Emre Gürdamar, Kıvanç Ülker, Özlem Ceyhan, Onur Baş, Ali Aktürk ve Cumhur Özgür'e manevi ve fikri destekleri nedeniyle teşekkür ederim. Kişiliklerine, çalışmalarına ve kaybetmedikleri çalışma aşklarına büyük saygı duyduğum ve imrendiğim saygıdeğer hocalarım Prof.Dr.Sinan Akmandor ve Prof.Dr. Haluk Aksel'e ilgileri ve destekleri nedeniyle teşekkür ederim. Ayrıca bana moral desteklerini hep yanımda hissettiğim sayğıdeğer hocalarım Prof.Dr. Zeki Erim ve Prof.Dr. Ünver Kaynak'a özellikle teşekkürlerimi sunarım.

Kendimi bilime adamışlıkla sevdiklerimi ihmal etmemim onları sevmediğim anlamına gelmediğini anlayan tüm sevdiklerimden özür diler ve teşekkürlerimi sunarım. Ama herşeyden önce onlara ayırmam gereken zamanı çaldığım halde beni anlayan ve destekleyen herşeyden çok sevdiğim eşim Serap ve kızım Ilgın Ceren'den öncelikle özür diler ve teşekkür ederim ve bu çalışmamı öncelikle kızıma, eşime ve tüm candan sevdiklerime adarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER ii
KISALTMALAR iv
TABLO LİSTESİ v
SEMBOL LİSTESİ xviii
ÖZET xix
SUMMARY xxii
1. GİRİŞ 1

1.1. Sayısal Çözüm Yöntemleri, Ağ yapıları, Algoritmalar 1

1.2. Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon Yöntemi 4

1.3. Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu Yöntem 6

1.4. Test Çözümleri 8

1.5. Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu Sonlu Hacimler Yönteminin Sonuçlarının Değerlendirilmesi 10

2 SAYISAL YÖNTEM 13

2.1 Giriş 13

2.2 DYKF Yöntemi, Sonlu Farklar Yöntemi ile Ayrıklaştırma 14

2.3 Kartezyen Çözüm Ağında Hat Gauss-Seidel Yöntemi 18

2.4 Eğrisel Koordinatlara Geçiş 18
2.4.1 Eğrisel Koordinatlarda DYKF için Ayrıklaştırma 21

2.5 Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon (DAHYKF) Yöntemleri 23
2.5.1 Ardışık Hücre Yönleri Kavramı 23
2.5.2 DAHYKF Yönteminin Sonlu Fark Esaslı Çeşitlemeleri 25
2.5.3 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacımlar Yöntemi 29

2.5.4 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı, Açık Formülasyonlu RK4 Yöntemi ... 35
2.5.5 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı İteratif DAHYKF Yöntemi ... 36
2.5.6 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı Nokta Gauss-Seidel Yöntemi için Formülasyon ... 36
2.5.7 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi için Formülasyon ... 36
2.5.8 Programlama ve Veri Yapısı ... 38

2.6 Sayısal Kararlılık ve Yakınsama Karakterleri ... 42
2.6.1 DYKF Yönteminin Sayısal Kararlılık Analizi ... 42
2.6.2 DAHYKF Yönteminin Sayısal Kararlılık Analizi ... 45
2.6.3 Kararlılık Analiz Sonuçlarının Yorumlanması ... 48

2.7 Çözüm Ağı Üretimi ve Düzgünleştirilmesi ... 49
3. UYGULAMALAR ... 51

3.1. Giriş ... 51

3.3. Basamak Potansiyel Akışı ... 61

3.4. Simetrik Joukowsky Profili Etrafındaki Potansiyel Akış ... 67

3.5. Paralel İki Duvar Arasındaki Isı Yayınımı Problemi ... 77
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ... 85
KAYNAKLAR ... 88
EK. A Zamana Bağlı Isı Geçişi Denkleminin Eğrisel Koordinatlara Dönüşümü Ve DYKF Yöntemi İle Ayrıklaştırılması ... 96
EK. B Daire Etrafındaki Çözümlerin Detay Grafikleri ... 103
EK. C Basamak Akışı Detay Grafikleri ... 141
EK. D Simetrik Jukowski Profili Etrafındaki Akışın Detay Grafik ve Tabloları ... 158
EK. E Daimi Olmayan Isı Yayınımı Uygulaması ... 170
ÖZGEÇMİŞ ... 196

KISALTMALAR

SHY	: Sonlu Hacimler Yöntemi (Finite Volume Method, FVM)
SFY	: Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method, FDM)
DYKF	: Değişen Yönlü, Kapalı Formülasyon (Alternating Direction İmplicit,ADI)
DAHYKF	: Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyon (Alternating Cell Direction Implicit ACDI)
RK4	: Runge-Kutta 4 zaman integrasyonu kullanan Sonlu Hacimler Metodu çözücü
LGS	: Hat Gauss-Seidel Yöntemi
PGS	: Nokta Gauss-Seidel Yöntemi
IDAHYKF	: İteratif DAHYKF Yöntemi

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1 Şekil 2.13'daki örnek ağ yapısına ait çözüm bantları. e ile başlayan terimler kenarları, f ile başlayan ifadeler hücreyi temsil etmektedir 40
Tablo 2.2 DAHYKF için Fortran 90 programının veri yapısının tanımlandığı başlık modülü. 41
Tablo 3.1 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 0° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 75
Tablo 3.2 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 10° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 75
Tablo 3.3 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 20° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 76
Tablo B.1 Yapısal çözüm ağı ile RK4 yöntemi sonuçları. 133
Tablo B.2 Yapısal çözüm ağı ile DAHYKF yöntemi sonuçları. 134
Tablo B.3 Yapısal çözüm ağı ile DYKF yöntemi sonuçları. 135
Tablo B.4 Deforme edilmiş yapısal çözüm ağı ile DAHYKF yöntemi sonuçları 136
Tablo B.5 Deforme edilmiş yapısal çözüm ağı ile DYKF yöntemi sonuçları 137
Tablo B.6 Yapısal çözüm ağları ile DAHYKF yöntemi çözümleri 138
Tablo B.7 Düzgünleştirilmiş yapısal çözüm ağları ile DAHYKF yöntemi çözümleri 139
Tablo B.8 Düzgünleştirilmiş ve normal yapısal çözüm ağları ile RK4 yönteminin çözümleri. 140
Tablo C.1 DAHYKF yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 155
Tablo C.2 DYKF yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 156
Tablo C.3 RK4 yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri. 157
Tablo D.1 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 0° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri. 168
Tablo D.2 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 10° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri. 168
Tablo D.3 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 20° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri. 169
Tablo E.1 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin yapısal çözüm ağı ile elde edilen çözümlerinin detayları. 170
Tablo E.2 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin yapısal olmayan çözüm ağı ile elde edilen çözümlerinin detayları. 178

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 Yapısal çözüm ağı kullanan sayısal yöntemlerindeki hesaplama ve fiziksel düzlem. 5
Şekil 1.2 Bir dörtgen (a) altıgen (b) ve dikdörtgen prizması (c) elemanlarının ve karşılıklı kenarlarından (ya da yüzlerinden) geçen hücre yönleri. 6
Şekil 2.1 Bir kartezyen ağ sistemi ve indisleri 15
Şekil 2.2 Kartezyen koordinatlarda Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon yöntemi. 16
Şekil 2.3 Çok bloklu yöntemlerde eşleşme sınır şartı noktaları. 23
Şekil 2.4 Hücre yönleri: (a) dörtgen, (b) altıgen (c) dikdörtgen prizması 24
Şekil 2.5 Dörtgen elemanlı yapısal olmayan bir çözüm ağında ardışık hücre yönleri. 24
Şekil 2.6 Kenar orta noktası esaslı SFY ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi 25
Şekil 2.7 Köşe noktası esaslı, SFM ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi 26
Şekil 2.8 Hücre merkezi esaslı, SF ayrıklaştırmalı DYKF yöntemi 28
Şekil 2.9 Hücre merkezi esaslı, SHY. 30
Şekil 2.10 Genel formda kenar esaslı formülasyon için oluşturulmuş yapı 31
Şekil 2.11 Hücre merkezi esaslı SHY de sınır şartı için integral bölgeleri. 34
Şekil 2.12 Yöntemin bir hücre yapısında iki yöndeki çözüm bantları. 37
Şekil 2.13 Yapısal olmayan bir ağda çözüm bantları. 38
Şekil 2.14 Eğrisel koordinatlı bir çözüm ağı parçasının indisleri. 44
Şekil 2.15 Bir hücrenin, komşuları, kenarları ve integrasyon için tanımlanmış alanları. 45
Şekil 2.16 Hücre kenarlarının ve integrasyon için tanımlanan dörtgenin kararlılık analizinde gerekli büyüklükler ile şematik gösterimi. 47
Şekil 2.17 Düzgünleştirme yöntemi için yapısal olmayan bir ağ parçasında birleşme noktaları. 50
Şekil 2.18 Yapısal olmayan üçgen elemanlı ağlardan üretilmiş dörtgen ağlar, (Not: üstteki şekil orijinal ağ yapısını, alttaki ise düzgünleştirilmiş halini göstermektedir) 50
Şekil 3.1 Daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması. 53
Şekil 3.2 Daire etrafındaki problem için 21x21 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 53
Şekil 3.3 Daire etrafındaki problem için 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 54
Şekil 3.4 Daire etrafındaki problem için 41x41 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 54
Şekil 3.5 Daire etrafındaki problem için bozuntulu 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 57
Şekil 3.6 Daire etrafındaki problem için burulmuş 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 58
Şekil 3.7 Daire etrafındaki problem için burulmuş-düzgünleştirilmiş 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 58
Şekil 3.8 DAHYKF yönteminin burulmuş ve burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağlarında daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım çözümlerinin iterasyon sayısına göre hata grafikleri. 59
Şekil 3.9 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 527 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 60

Şekil 3.10 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 642 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 60
Şekil 3.11 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 981 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri. 60
Şekil 3.12 Birim yükseklikteki basamak etrafındaki potansiyel akışın analitik çözümü ve kullanılan dönüşümlerin şematik gösterimi. 61
Şekil 3.13 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması. 63
Şekil 3.14 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve DYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması. 64
Şekil 3.15 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve DYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin hata değerlerinin karşılaştırılması. 64
Şekil 3.16 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve RK4 yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması. 65
Şekil 3.17 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 31x11 3 bloklu blok yapısal ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 66
Şekil 3.18 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 61x21 3 bloklu blok yapısal ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 66
Şekil 3.19 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 333 noktalı yapısal olmayan ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 66
Şekil 3.20 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 333 noktalı yapısal olmayan ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 67
Şekil 3.21 Simetrik Jukowsky profili dönüşümünü gösterir düzlemler. 68
Şekil 3.22 Çözümlerde kullanılan simetrik Jukowsky profili etrafındaki Hiperbolik çözüm ağı üretimi ile elde edilmiş C tipi çözüm ağı. 69
Şekil 3.23 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 70
Şekil 3.24 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi. 70
Şekil 3.25 DYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısı için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 71
Şekil 3.26 DYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi. 71
Şekil 3.27 RK4 yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi. 72
Şekil 3.28 Çözümlerde kullanılan simetrik Jukowsky profili etrafındaki yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı. 72
Şekil 3.29 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısı için 1102 noktalı yapısal olmayan ağ üzerindeki potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 73

Şekil 3.30 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi. 73
Şekil 3.31 0° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 74
Şekil 3.32 0° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 74
Şekil 3.33 Aynı sıcaklıktaki iki paralel levha arasındaki ısı yayınımı probleminin şematik gösterimi. 77
Şekil 3.34 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.1 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı. 79
Şekil 3.35 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı. 79
Şekil 3.36 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.1 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı. 80
Şekil 3.37 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı. 80
Şekil 3.38 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zamana göre dağılımı. 81
Şekil 3.39 327 noktalı aralarında üçgen elemanda bulunduran dörtgen yapısal olmayan çözüm ağı. 82
Şekil 3.40 327 noktalı aralarında üçgen elemanda bulunduran dörtgen yapısal olmayan çözüm ağında DAHYKF yönteminin hata dağılımı. 82
Şekil 3.41 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerinde zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı. 83
Şekil 3.42 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerinde zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı. 84
Şekil 3.43 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zamana göre dağılımı. 84
Şekil B.1 Sırası ile 21x21 (a), 31x31 (b), 41x41 (c) boyutlarındaki yapısal çözüm ağları. 103
Şekil B.2 Sırası ile 31x31 boyutunda bozulmuş (a), burulmuş (b), burulmuş ve düzgünleştirilmiş (c) yapısal çözüm ağları. 104
Şekil B.3 Sırası ile 527 noktalı (a), 642 noktalı (b) ve 981 noktalı (c) yapısal olmayan çözüm ağları. 105
Şekil B.4 Sırası ile düzgünleştirilmiş 527 noktalı (a), 642 noktalı (b) ve 981 noktalı (c) yapısal olmayan çözüm ağları. 106
Şekil B.5 21x21 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 107
Şekil B.6 21x21 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 107
Şekil B.7 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 108
Şekil B.8 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 108

Şekil B.9 41x41 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 109
Şekil B.10 41x41 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması 109
Şekil B.11 21x21 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 110
Şekil B.12 21x21 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 110
Şekil B.13 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 111
Şekil B.14 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 111
Şekil B.15 41x41 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 112
Şekil B.16 41x41 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 112
Şekil B.17 21x21 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 113
Şekil B.18 21x21 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 113
Şekil B.19 31x31 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 114
Şekil B.20 31x31 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 114
Şekil B.21 41x41 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 115
Şekil B.22 41x41 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 115
Şekil B.23 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 116
Şekil B.24 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 116
Şekil B.25 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal çözüm ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 117
Şekil B.26 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 117
Şekil B.27 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 118
Şekil B.28 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 118
Şekil B.29 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 119
Şekil B.30 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 119

Şekil B.31 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 119
Şekil B.32 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 120
Şekil B.33 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 120
Şekil B.34 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 120
Şekil B.35 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 121
Şekil B.36 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 121
Şekil B.37 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 122
Şekil B.38 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 122
Şekil B.39 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 123
Şekil B.40 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 123
Şekil B.41 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 124
Şekil B.42 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 124
Şekil B.43 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 124
Şekil B.44 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 125
Şekil B.45 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 125
Şekil B.46 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 125
Şekil B.47 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 126
Şekil B.48 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 126
Şekil B.49 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 126
Şekil B.50 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 127
Şekil B.51 Düzgünleştirilmiş 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 127
Şekil B.52 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 128

Şekil B.53 Düzgünleştirilmiş 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 128
Şekil B.54 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 129
Şekil B.55 Düzgünleştirilmiş 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması. 129
Şekil B.56 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 130
Şekil B.57 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 130
Şekil B.58 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 131
Şekil B.59 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 131
Şekil B.60 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 132
Şekil B.61 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri. 132
Şekil C.1 DAHYKF yöntemi için basamak etrafındaki 1023 noktalı (31x11 3 blok) blok yapısal çözüm ağı. 141
Şekil C.2 DAHYKF yöntemi için basamak etrafındaki 3843 noktalı (61x21 3 blok) blok yapısal çözüm ağı. 141
Şekil C.3 DYKF yöntemi için basamak etrafındaki 31x11 boyutlu 3 blok yapısal bloklu çözüm ağı. 142
Şekil C.4 DYKF yöntemi için basamak etrafındaki 61x21 boyutlu 3 blok yapısal bloklu çözüm ağı. 142
Şekil C.5 DAHYKF ve RK4 yöntemi için basamak etrafındaki 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı. 142
Şekil C.6 DAHYKF ve RK4 yöntemi için basamak etrafındaki 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı. 143
Şekil C.7 DAHYKF yöntemi ve 1023 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 143
Şekil C.8 DAHYKF ve 1023 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 144
Şekil C.9 DAHYKF Yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri. 144
Şekil C.10 DAHYKF yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 145
Şekil C.11 DAHYKF yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 145
Şekil C.12 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri. 146

Şekil C.13 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 146
Şekil C.14 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 147
Şekil C.15 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri. 147
Şekil C.16 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 148
Şekil C.17 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 148
Şekil C.18 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 149
Şekil C.19 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 149
Şekil C.20 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 150
Şekil C.21 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 150
Şekil C.22 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 151
Şekil C.23 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 151
Şekil C.24 RK4 yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 152
Şekil C.25 RK4 yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 152
Şekil C.26 RK4 yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 152
Şekil C.27 RK4 yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 153

Şekil C.28 RK4 yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 153
Şekil C.29 RK4 yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 153
Şekil C.30 RK4 yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 154
Şekil C.31 RK4 yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. 154
Şekil D.1 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 158
Şekil D.2 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 159
Şekil D.3 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 159
Şekil D.4 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 160
Şekil D.5 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 160
Şekil D.6 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 161
Şekil D.7 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 161
Şekil D.8 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 162
Şekil D.9 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 162
Şekil D.10 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 163
Şekil D.11 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 163
Şekil D.12 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 164

Şekil D.13 10° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 164
Şekil D.14 20° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 165
Şekil D.15 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 165
Şekil D.16 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 166
Şekil D.17 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri. 166
Şekil D.18 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi. 167
Şekil D.19 10° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 167
Şekil D.20 20° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri. 167
Şekil E.1 327 noktalı üçgen ve dörtgen elemanlardan oluşan çözüm ağı (açık renk) ve çözüm bantları (koyu renk)..... 171
Şekil E.2 297 noktalı sadece dörtgen elemanlardan oluşan çözüm ağı (açık renk) ve çözüm bantları (koyu renk)..... 171
Şekil E.3 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerinin çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 172
Şekil E.4 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, DYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 172
Şekil E.5 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 173
Şekil E.6 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, LGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 173
Şekil E.7 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 174

Şekil E.8 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 174
Şekil E.9 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 175
Şekil E.10 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 175
Şekil E.11 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin zamana bağlı hata dağılımı. 176
Şekil E.12 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerinin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı. 176
Şekil E.13 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 40x40 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı. 177
Şekil E.14 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 40x40 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı. 177
Şekil E.15 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 178
Şekil E.16 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 179
Şekil E.17 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 179
Şekil E.18 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 180
Şekil E.19 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 180
Şekil E.20 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 181
Şekil E.21 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0002 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 181

Şekil E.22 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 182
Şekil E.23 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 182
Şekil E.24 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 183
Şekil E.25 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 183
Şekil E.26 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 184
Şekil E.27 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 184
Şekil E.28 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı. 185
Şekil E.29 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 185
Şekil E.30 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 186
Şekil E.31 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 186
Şekil E.32 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 187
Şekil E.33 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 187
Şekil E.34 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0002 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 188
Şekil E.35 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 188

Şekil E.36 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 189
Şekil E.37 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 189
Şekil E.38 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 190
Şekil E.39 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 190
Şekil E.40 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 191
Şekil E.41 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 191
Şekil E.42 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 192
Şekil E.43 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı. 192
Şekil E.44 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı. 193
Şekil E.45 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı. 193
Şekil E.46 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı. 194
Şekil E.47 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı. 194
Şekil E.48 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı. 195

SEMBOL LİSTESİ

x,y	: Kartezyen koordinatlar
ξ,η	: Dönüşüm düzlemi koordinatları, Eğrisel koordinatlar
L	: İntegrasyon çarpanları
u	: Çözüm değişkeni
t	: Zaman büyüklüğü
ψ	: Akım fonksiyonu
A	: Alan
I	: İntegrasyon
i,j	: Yapısal ağ yapısında lokasyon indisleri
k	: Zaman indisi
u^k	: Üst indis (k) zaman indisi
u_L	: Alt indis (L) lokasyon indisi

ÖZET

DEĞİŞEN ARDIŞIK HÜCRE yÖNLÜ, KAPALI FORMÜLASYONLU YÖNTEM

Günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde sayısal yöntemler ve onlara duyulan ihtiyaç hızla artmaktadır. Geliştirilen algoritmalar yanında sayısal çözüm yöntemlerinde kullanılan çözüm ağları da çeşitlilik göstermektedir. Literatürde yer alan sayısal çözüm yöntemlerinin algoritmik yapıları ile kullandıkları çözüm ağ yapıları arasında genellikle bir eşleşme söz konusudur. Yapısal çözüm ağı kullanan yöntemler çoğu zaman kapalı formülasyonlu, dolayısıyla daha kararlı ve hassastırlar. Fakat yapısal çözüm ağı üretimi, özellikle karmaşık geometriler için hayli zordur. Yapısal olmayan çözüm ağı kullanan yöntemler ise genellikle açık formülasyonlu olup, bunun sonucu olarak yakınsama ve hassasiyet konularında daha zayıftırlar. Buna karşılık yapısal olmayan çözüm ağlarının kolay ve hızlı üretilebilmesi bu yöntemlerin bir avantajıdır. Bu yönde bir uygulama kolaylığına sahiptirler.

Bu tez çalışmasının amacı, yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağlarında çalışabilen hızlı kapalı formülasyonlu bir yöntem geliştirmektir. Böyle bir yöntemin yapısal olmayan çözüm ağlarında da yapısal çözüm ağı kullanan yöntemlerin performansına ulaşacağı değerlendirilmektedir. Bu amaçla, literatürde çok iyi bilinen “Değişen Yönlü, Kapalı Formülasyon – DYKF (Alternating Direction Implicit - ADI) yöntemindeki “değişen yönler” kavramınından ilham alınarak, “Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyon - DAHYKF)” adı verilen yeni bir yöntem bu tez kapsamında önerilmiştir. Bu yöntemdeki değişen yönler DYKF ’de olduğu gibi eğrisel koordinatlar olmayıp, “Değişen Ardışık Hücre Yönleri” dir. Hücre Yönleri ile, iki-boyutlu halde çift kenar sayısına, üç-boyutlu halde ise çift yüzey sayısına sahip hücrelerin karşılıklı kenarlarını takip ederek oluşturulan yönler kastedilmekte, ardışık hücre yönleri ise komşu hücrelerin birbirini izleyen yönlerinin oluşturduğu bir hücre yönleri zincirini ifade etmektedir. DAHYKF yöntemindeki ayrıklaştırmalar sonlu hacim tekniği ile gerçekleştirilmiştir.

Bu tez çalışması çerçevesinde, henüz geliştirilme aşamasında olan DAHYKF yönteminin test edilmesi hedeflenmiştir. Bu nedenle yöntem şimdilik sadece iki-boyutlu problemler için uygulanmış olup, test çalışmalarında örnek problem olarak sıkıştırılamaz potansiyel akış problemi ele alınmıştır. Yöntemin üç-boyutlu halde de uygulanması mümkündür.

İki-boyutlu sıkıştırılamaz potansiyel akış problemi aslında potansiyel veya akım fonksiyonu için yazılmış Laplace denklemi ile temsil edilmekle birlikte, gerek DYKF yöntemi ve gerekse önerdiğimiz DAHYKF yöntemi zaman adımında ilerleyen tip (time marching) algoritmalar olduğu için bu çalışmada doğrudan Laplace denklemini çözmek yerine, yakınsadığında bu denklemi verecek olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

şeklindeki "zamana bağlı yayınım denklemi" nin çözümü üzerinde durulmuştur.

Çalışma kapsamındaki örnek testler için, analitik tam (exact) çözümleri bilinen daire, basamak ve simetrik Joukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış problemleri seçilmiştir.

Bu örnek problemler için sayısal olarak DAHYKF yöntemi ile elde edilen sonuçlar öncelikle analitik sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sayısal çözüm performanslarının karşılaştırılması için de ayrıca klasik DYKF yöntemi sonuçları ile ve bunun yanında Runge-Kutta zaman integrasyonu kullanan Sonlu Hacim esaslı bir yöntemin (çalışmada bu yöntem RK4 olarak adlandırılmıştır) sonuçları kullanılmıştır.

Bu test çalışmalarında, yapısal ve yapısal olmayan ağ yapıları, blok yapısal ağ yapıları, ağ sıkılaştırma, ağ deformasyonu gibi uygulamalar gerçekleştirilerek yöntemin performansı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Yapılan test çalışmalarından elde edilen sonuçlara göre DAHYKF yönteminin özelliklerini aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

Olumlu yanları;

- DYKF yöntemi çözüm ağına bağlı olarak şartlı kararlı olmasına karşılık DAHYKF yöntemi çözüm ağından bağımsız olarak şartsız kararlıdır.
- DAHYKF yönteminde bir iterasyon adımının çözüm hızı DYKF yöntemine yakın bir değerdedir, ve RK4 yönteminden 4 kat daha hızlıdır.
- DAHYKF yönteminin en düşük yakınsama iterasyon sayısı DYKF yönteminden daha büyüktür. Bununla birlikte, DYKF yönteminde bu optimum değeri verecek zaman adımı uzunluğu dar bir aralıkta yer almakta olup, önceden kestirilmesi mümkün değil iken, DAHYKP yönteminde optimum yakınsama değerine yüksek bir zaman adımı uzunluğunda bir kez erişildikten sonra zaman adımı uzunluğu arttırıldığında bu değer bir değişim göstermemektedir. Dolayısıyla DAHYKF yönteminde optimum iterasyon sayısı için gerekli zaman adımı uzunluğunu önceden kestirmek mümkündür. Bu bakımdan uygulamada DYKF yönteminden çoğu zaman avantajlı olmaktadır. DAHYKF yönteminin optimum yakınsama iterasyon sayısı RK4 yönteminkinden her zaman doğal olarak çok azdır. Çözüm ağları sıkılaştıkça da bu fark hızla artmaktadır.
- DAHYKF metodunda çok bloklu yapılarda dolaysız uygulama mümkündür. Yöntem tüm blokları bir bütün halinde çözeceği için "bloklar arası eşleşme sınır şartları" gerekmemektedir. Bu özellik nedeniyle hem uygulama oldukça kolaylaşmakta hem de daha karmaşık çok bloklu ağları çözmek mümkün olmaktadır.
- DAHYKF yöntemi yapısal olmayan çözüm ağlarında da aynı karekterleri göstermektedir. Yapısal ağlarda olduğu gibi şartsız kararlıdır. Bu nedenle özellikle yapısal olmayan ağlarda çok yüksek bir performansa ulaşmaktadır.
- DAHYKF yöntemi zamana bağlı uygulamalarda DYKF ve RK4 yöntemine yakın bir performans göstermektedir. Ayrıca DAHYKF yöntemini zamanda iteratif bir şema eklendiğinde ortaya çıkan IDAHYKF yöntemi çok daha iyi bir performans sergilemektedir.

Olumsuz yanları;

- DAHYKF yöntemi, Yaklaşık Çarpanlarına Ayırma (Approximate Factorization), Alt-üst üçgensel ayırma (LU Decomposition) gibi daha üst düzey değişen yönler yöntemlerinin uygulanmasına uygun bir yapısı olmadığı değerlendirilmekle birlikte bu konu araştırmaya açıktır.
- DAHYKF yöntemi iki boyutlu halde dörtgen ve üç boyutlu halde de dörtgenler prizmasını temel olarak desteklemektedir. Üçgen elemanları doğrudan desteklememektedir. Bununla birlikte üçgen elemanları birleştirerek dörtgen elemanlar elde etmek yoluyla uygulama mümkündür.
- DAHYKF yöntemi yapısal olmayan çözüm ağlarında çözücü ağın düzgünlüğüne karşı hassastır. Ancak Laplacian düzgünleştirme yöntemi ile bu sorunu kolaylıkla gidermek mümkündür.

Bu tez çalışmasında önerilen DAHYKF yöntemi, sayısal performansı ve bunun yanında kolay kullanım özellikleri ile ön plana çıkmaktadır. Tez çalışması bu yöntemin ortaya konulması ve temel özelliklerinin gösterilmesi ile sınırlı tutulmuştur. Yöntemin bir çok probleme uygulanması ve geliştirilmesi bu tez çalışmasını izleyecek çalışmaların konusu olacaktır. Yöntemin hayli geniş bir alanda etkin olarak kullanılabileceği değerlendirilmektedir. Yöntemin yapısal olarak da gelişmeye açık olduğu düşünülmektedir. Bu yapısal geliştirmeler yöntemin hassasiyet mertebesinin yükseltilmesi, dörtgen elemanlarda asılı noktaları destekler forma getirilmesi gibi çalışmalar olabilir.

SUMMARY

ALTERNATING CELL DIRECTION IMPLICIT METHOD

Numerical Methods and the need for them to solve engineering problems are quickly increasing. Mesh types used in the numerical methods have a wide variety There exists generally a correlation between the mesh type and the algorithmic structure of any numerical method given in the literature. Numerical methods using structured meshes have usually implicit formulations. Therefore they are more stable and accurate. But, generation of structured meshes is difficult, especially around complex geometries. Numerical methods using unstructured meshes have generally explicit formulations, on the other hand. So, they are poor in view of numerical stability and accuracy. However, an important advantage of these methods is that unstructured meshes are generated easily.

The aim of this thesis is to develop a new method having a fast implicit formulation used with structured and unstructured meshes. The performans of such a method with unstructured meshes is expected to reach the performance of a method using structured meshes. For this purpose, a new method named as “Alternating Cell Directions İmplicit – ACDI method” is proposed in this study. This method is inspired by “alternating directions” concept of well known “Alternating Directions Implicit – ADI method”. “Alternating directions” in this method are not curvilinear coordinates as in the ADI method, but these are “Alternating Sequential Cell Directions”. Cell direction means, a direction formed by following from one edge to its opposite edge on a quadrilateral. “Sequential Cell Direction” is a chain of cell directions formed by neighbouring cells. Discretizations in the ACDI method are made by a finite volume technique.

In this study, testing of this method is targetted, since the method is being newly developed. Therefore, the method is applied on two-dimensional problems, and the incompressible potential flow is considered as an example test problem. Application of the method for three-dimensional cases is possible

A two-dimensional incompressible potential flow problem is modelled by a Laplace equation for eighter potential function or stream function. However, the following “unsteady difusion equation” is considered instead of Laplace equation in this study, since the ADI method and also the new ACDI method is a “time marching” method.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

This equation gives the same solution as Laplace equation does, when it converges for large time values.

For the example tests in the frame of this thesis, the two-dimensional incompressible potential flow around a circular cylinder, a forward-facing step and a

symmetrical Joukowsky airfoil are considered, since the analytical exact solutions are known.

For these example problems, the numerical results obtained by the ACDI method are first compared with the analytical results.

For the comparisons of this method's numerical solution performance, the classical ADI Method's solutions and the results of a Finite Volume Method using Runge-Kutta time integration (In this study this method is briefly called RK4) are used.

In these test works, several applications are realized such as structured and unstructured grids, block structured grids, grid refinement, and grid deformation.

As a result of test works, the proporties of the ACDI method are summarized in the following:

Advantages

- Although the ADI method is conditionally stable depending on mesh type, the ACDI method is unconditionally stable independent of mesh type.
- Speed of an iteration step for the ACDI method is aproximately one and half times slower then ADI and RK4 method.
- Minimum convergency iteration number with respect to Δt of the ACDI method is greater than the ADI method. The prediction of this optimum value is generally difficult for ADI method. On the other hand, in the ACDI method, once the optimum convergency iteration number is obtained for a large value of Δt, this value does not change while the time step is increased. Therefore, the prediction of the optimum time step is easily possible. This property is an advantage of ACDI method in practical. Optimum convergency iteration number of the ACDI method is naturally less then RK4 method, especially for fine meshes.
- Direct application of the ACDI method is possible on multi-block structured meshes. Boundary conditions on the interface between the blocks are not necessary to match, since the ACDI method solves all of the blocks without dividing. Because of this property, the application is easy and, more complex multi-block applications are possible.
- The ACDI Method exposes the same characteristics on unstructured meshes. It is unconditionally stable. Therefore it has a high performance especially on unstructured mesh.
- ACDI method on unsteady application exposes same performans with ADI and RK4 methods. In addition Iterative ACDI method, that appears from adding an iterative scheme to ACDI method, shows better performans than others on unsteady applications.

Disadvantages

- It is appraised that the algorithmic structure of the ACDI method is not adequate for high level alternating direction methods such as Approximate Factorization, LU Decomposition methods. However, this idea is open for the discussions.
- The ACDI method basically supports quadrilateral elements in two-dimensional problems and quadrilateral prism in three-dimensional

problems. However, this problem is resolved by combining the triangular elements into quadrilateral elements.

- The ACDI method is sensitive to non-smoothness of the meshes, especially in unstructured grids. But this problem can be easly solved by using well-known Laplacian smoothing method.

The ACDI method developed in this thesis is foremost with numerical performance and practical usage characteristics. Of course the aim of the thesis is only to expose the method and its basic characteristics. Applications to several problems and the further development of the method will be, of course, the topic of future studies.

The method is appraised as can be effectively used in a wide range. However, some structural developments for the method, such as inreasing the order of accuracy, supporting to hanging node on quadrilateral element etc, is accessible before some applications.

1. GİRİŞ

1.1. Sayısal Çözüm Yöntemleri, Ağ yapıları, Algoritmalar

Sayısal çözüm yöntemlerinin temelini, çözüm bölgelerini sonsuz küçük kabul edilebilecek parçalara (hücre) bölüp, diferansiyel veya integral formda yazılmış denklemlerin bu hücrelerde yaklaşık formda ifade edilmesi esasına dayanan ayrıklaştırma teknikleri oluşturmaktadır. Bu nedenle sayısal çözüm yöntemleri öncelikle kullanılan ayrıklaştırma tekniklerine göre sınıflandırılmaktadır.

En önce keşfedilen ve uygulanan ayrıklaştırma yöntemleri sonlu fark esaslı olanlarıdır. Sonlu fark ayrıklaştırmasında problemler diferansiyel denklemlerle temsil edilir. Daha sonra keşfedilen sonlu elemanlar, sonlu hacimler ve sınır elemanlar gibi teknikler ise problemleri integral formda yazılmış denklemlerle incelerler. Bunlardan sınır elemanlar yöntemleri kısıtlı problemlere uygulanabilmesi ve problemleri sadece sınırlarda çözmesi nedeniyle diğerlerinden farklı bir kategoride değerlendirilebilir. Bütün bu yöntemlerde çözüm bölgesi bir takım ayrık noktalarla ve bunlar arasında yer alan hücrelerle (çözüm ağı) temsil edilir.

Gün geçtikçe hızla ilerleyen Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği alanında oldukça geniş bir yelpazede çözüm algoritmaları ve çözüm ağı yapıları kullanılmaktadır **(Henne, 1990, Jameson, 2003)**. Çözüm algoritmaları ve çözüm ağları bu kadar çeşitli olmasına karşılık bir problemin hangi tip çözüm ağlarıyla ve hangi algoritmalarla çözülmesinin uygun olacağı çoğu zaman tartışma konusu olmaktadır. Zira söz konusu olan yöntemlerin her birinin bir diğerine kıyasla çeşitli olumlu ve olumsuz yanları vardır. Tartışma konusu olan ana hususlar şu şekilde sınıflandırılabilir:

- Çözüm algoritması : Kapalı-Açık (Implicit-Explicit)
- Çözüm ağı yapısı : Yapısal-Yapısal olmayan (structured-unstructured)

Aslında bu iki grup arasında da uygun eşleşmeler söz konusudur. Örneğin, yapısal çözüm ağı kullanan yöntemler çoğunlukla kapalı formülasyonludur. Veya kapalı formülasyonun kolayca uygulanacağı söylenebilir (**Beam ve Warming, 1982, Alonso ve Jameson, 1994**). Buna karşılık, yapısal olmayan çözüm ağı kullanan yöntemler çoğunlukla açık formülasyonlu yapıdadır **(Caughey ve Hafez, 1994)**. Bu

tip ağlarla kapalı formülasyon kullanmak oldukça zordur. Yapısal çözüm ağı kullanan kapalı formulasyonlu yöntemler daha kararlıdır (çoğunlukla şartsız kararlıdır). Daha hassas sonuç verirler ve daha az adımda yakınsarlar. Fakat yapısal çözüm ağı üretmek oldukça zordur ve tam kapalı formulasyon kullanılmışsa çözüm zamanı uzar. Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon - DYKF yöntemi (Alternating Direction Implicit Method – ADI) gibi kapalı bir formulasyon kullanılırsa çözüm zamanı tam kapalı formulasyonlara göre daha kısa olur (**Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson ve diğ., 1984**). DYKF yöntemi her çözüm adımı için bazen açık formülasyonlardan daha uzun çözüm zamanı gerektirse de daha çabuk yakınsama özelliği nedeniyle neticede genellikle açık formulasyonlu algoritmalardan daha hızlı sonuç vermektedir. Tek dezavantajı ise ağ üretiminin çok zor ve zaman alıcı olmasıdır ki bu husus da oldukça önemlidir.

Yukarıdaki karşılaştırmaları şu şekilde özetlemek mümkündür:

Yapısal çözüm ağı kullanan, kapalı formülasyonlu sayısal yöntemler

Olumlu yanları

- Daha kararlıdır ve çoğunlukla şartsız kararlıdır. Dolayısıyla adım zamanları büyük seçilebilir.
- Daha hassas ve düzgün sonuç verir.
- Daha çabuk yakınsar.
- Yapısal çözüm ağları DYKF yöntem gibi hızlı kapalı formülasyonlara uygundur. Bu tip yöntemler uygulanırsa, genellikle hızlı yakınsama özellikleri ile birlikte daha kısa bilgisayar zamanında sonuç verebilirler.
- Özellikle DYKF yöntem ya da benzeri bir hızlı algoritma kullanıldığında, yapısal olmayan kapalı formülasyonlu yöntemlere oranla daha az bilgisayar hafızasına ihtiyaç duyarlar.

Olumsuz yanları

- Yapısal ağ yapmak zordur. Hatta bazı yapılarda imkansızdır. Fakat bu sakınca çok bloklu, üst üste binen (overset) ağ yapılarıyla kısmen azaltılabilmektedir.
- Tam kapalı formülasyon kullanılması, gerekli bilgisayar zaman ve hafızasını arttırır. Tam kapalı formülasyon, yapısal ağ ile birlikte kullanılırsa gerekli

bilgisayar zamanı ve hafızası açık formulasyonlara göre çok daha fazla olacaktır.

- Programlaması açık formulasyonlu çözücülere göre oldukça zordur.

Yapısal olmayan çözüm ağı kullanan, açık formülasyonlu sayısal yöntemler

Olumlu yanları

- Çözüm ağı üretimi nispeten kolaydır, ve karmaşık geometriler etrafında çözüm ağı üretmek de mümkündür. Dolayısıyla uygulaması nispeten kolaydır.
- Programlanması kolaydır.

Olumsuz yanları

- Yakınsaması ve hassasiyeti nispeten düşüktür.
- Yapısal olmayan çözüm ağları ile kapalı formulasyonlar uygulamak zordur.

Yukarıda bahsi geçen ayrıklaştırma yöntemlerinin çok önemli farklılıklarından biri de kullanabildikleri çözüm ağı çeşitleridir. Sonlu fark yöntemleri genel olarak yapısal çözüm ağları ile kullanılmaktadır. Bu tekniklerin yapısal olmayan çözüm ağlarında kullanılması teorik olarak mümkün olsa da pek etkin değildir. Buna karşılık Sonlu Eleman ve Sonlu Hacim yöntemleri her iki tip çözüm ağı için de uygundur.

Sonlu Fark yöntemleri genel olarak yapısal çözüm ağları kullanımıyla kısıtlı olmakla birlikte özellikle kapalı formülasyonlu ayrıklaştırmada oldukça başarılıdır. Bu yöntem, kapalı formülasyonla diğerlerine kıyasla daha hassas, kararlı ve hızlı çözümler verebilmektedir. Ancak, karmaşık geometriler etrafında yapısal çözüm ağları yaratmak oldukça zordur. Buna karşılık Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacimler ayrıklaştırma yöntemleri daha ziyade açık formülasyonlu algoritmalara uygundur. Bu yöntemlerle kapalı formülasyonlu algoritmalar kullanılabiliyor olsa da Sonlu Fark yöntemleri kadar etkin olmamakta, daha uzun bilgisayar zamanı ve daha çok bilgisayar hafızasına ihtiyaç duymaktadırlar.

Bu tez çalışmasında amaç kapalı çözüm algoritmalarının avantajını ağ yapılarının (yapısal ve yapısal olmayan) olumlu yanlarıyla birleştirmeye çalışmak, yani yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağlarını kullanabilen, hızlı kapalı formülasyon kullanan yeni bir sayısal çözüm algoritması geliştirmektir. Bu amaçla kapalı formülasyonlar için iyi bilinen Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon – DYKF tekniğini, Sonlu Hacim esaslı bir ayrıştırma tekniği ile birlikte kullanan ve “Değişen Ardışık Hücre Yönlü

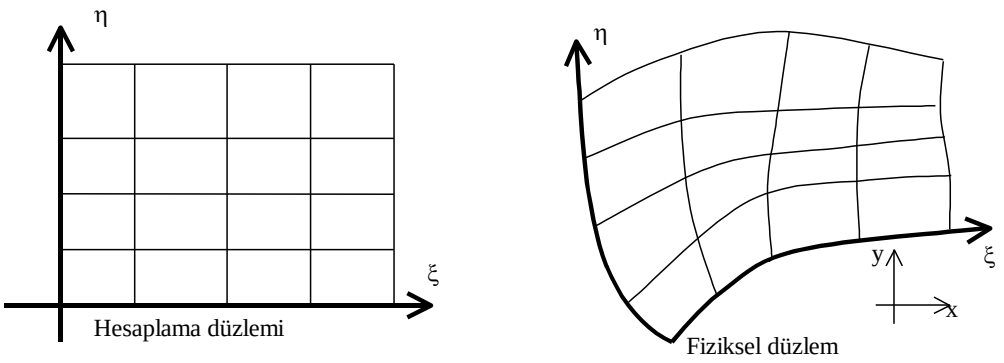
Kapalı Formülasyon – DAHYKF Yöntemi" adı altında yeni bir yöntem önerilmektedir. Çalışmadaki ana hedef bu sayısal yöntemin ayrıntılarını ortaya koymak ve yetkinliğini test etmek olarak belirlenmiştir. Belirlenen hedef çerçevesinde kolaylık düşüncesi ile bu tez kapsamında yöntem sadece iki-boyutlu halde incelenecektir. Ancak üç-boyutlu uygulamalar da mümkündür. Yine aynı kolaylık düşüncesi ile matematiksel model olarak sadece Laplace denklemi ele alınacaktır. Daha doğrusu bu denklemin zamana bağlı bir formu gibi düşünülebilecek olan "Zamana Bağlı Isı denklemi (veya literatürde Zamana Bağlı Yayınım Denklemi olarak da adlandırılmaktadır)" incelenecektir. Zira bu denklem zaman adımında ilerleyerek Laplace denklemine yakınsayacaktır.

Laplace denkleminin seçilmesinin ana nedeni, özellikle akışkan akımlarıyla ilgili bir çok problem için çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş olması ve bu bakımdan bir çok çözüm tekniğinin iyi bilinmesi ve bundan daha da önemlisi bir çok halde analitik çözümlerinin elde edilebiliyor olmasıdır. Elde edilen analitik çözümlerin test amaçlı çalışmalarda karşılaştırma amacı ile kullanılabilmesi önemli bir olanak sağlamaktadır.

1.2. Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon Yöntemi

Bu çalışmada önerilen DAHYKF yöntemi literatürde çok iyi bilinen ve yaygın olarak kullanılan Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon - DYKF (Alternating Direction Implicit Method – ADI) yönteminin "değişen yönler" kavramından ilham almaktadır. Bu bakımdan önerilen yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için DYKF yöntemiyle ilgili bazı ayrıntılara Tezin ikinci bölümünde yer verilecektir.

Klasik DYKF yöntemi zamanda iki-yarım adım ilerleyerek hesaplama uzayında sırayla değişen yönlerde kapalı formülasyonla alınan çözümler ile gerçekleşir. Şekil 1.1 de iki-boyutlu halde fiziksel düzlemde ve hesaplama düzlemindeki ağ yapıları gösterilmektedir. Buna göre, önce sadece ξ yönünde kapalı formülasyonla yarım zaman adımı atılır, sonra da η yönünde kapalı formülasyonla yarım adım atılarak tam adım tamamlanır. Üç boyutlu problemlerde elbette ki üçüncü bir eksen daha olacaktır.



Şekil 1.1 Yapısal çözüm ağı kullanan sayısal yöntemlerindeki hesaplama ve fiziksel düzlem.

DYKF yönteminin bulunması 50'li yıllara uzanmaktadır **(Douglas ve Gallie, 1955, Douglas ve Rachford, 1956, Douglas, 1955),** ve bu yıllardan itibaren bu yöntem araştırmacıların ilgi odağında olmuştur. Günümüzde bu yöntem artık klasikleşmiş olup genellikle kitaplara konu olarak girmiştir **(Anderson ve diğ., 1984; Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000).** Böyle olmasına karşılık halen çeşitlemeleri ve yeni uygulamaları yeni yayınlarda görülmektedir (**Hee ve diğ.,2000; Douglas ve diğ., 2003; Chassaing ve diğ., 2003**).

DYKF yönteminin oldukça geniş bir yelpazede geliştirilmiş bulunan çeşitlemelerinin bazıları ana başlıklar halinde şunlardır:

- Çok Bileşenli DYKF yöntemi (Multi-Component ADI, **Dzyuba, 1997; Zhadeba, 1997; Abrashin ve Zhadeba, 1997**)
- Çok-Kademeli DYKF yöntemi (Multi-Stage ADI, **Douglas, 1963; Douglas, 1966; Meyer, 1977; Zhadeva, 1998; Abrashin, 1999**)
- Çok Bloklu DYKF yöntemi (Multi-Zone ya da Multi-Block ADI, **Rai, 1985; Walters ve diğ., 1986**)
- Alt bant-Üst bant ayırmalı DYKF Yöntemi (LU-ADI **Jameson ve Turkel, 1981, Yokota ve Caughey, 1988**)
- Yaklaşık Çarpanlarına ayırma yöntemi (Approximate Factorization, **Fairweather ve Mitchell, 1965**; **Pulliam ve Chaussee, 1981; Abarbanel ve diğ., 1986; Chassing ve diğ., 2003**)
- Sonlu Elemanlar yöntemleri ile hibrid DYKF yöntemleri (**Krishnamachari ve diğ., 1986; Abrashin ve Lekhtikov, 1995; Douglas, 1996**)
- DYKF yöntemi ile Varyasyonel eşitsizliklerin çözümü (**Hee ve diğ.; 2000, Wang ve diğ., 2000; Wang ve diğ., 2000; Han, 2002**)

Bu yöntemler genel olarak daha büyük ve daha dolu çözüm matrislerini, çoğunlukla üç-bantlı çözüm matrisi parçalarına ayıran ve her bir matrisi ayrı ayrı çözerek çözüm zamanı ve hafızasını daha verimli kullanan yöntemlerdir.

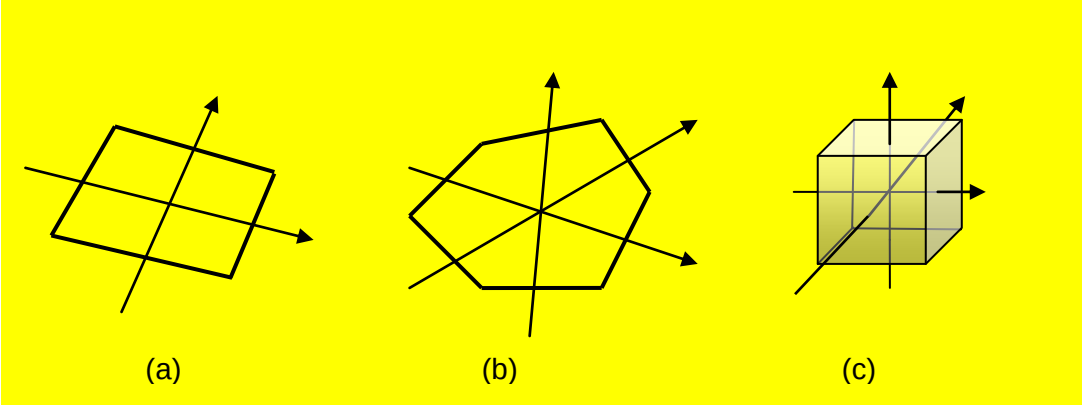
Klasik DYKF yöntemi uygulamalarında hesaplama düzlemine bağlı olarak sırayla değiştirilen ξ ve η eksenleri yönünde ele alınan ardışık hücre noktaları kapalı formülasyonla çözülecek çözüm bantlarını oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında önerilen yöntemde ise bu çözüm bantlarının hesaplama düzlemine bağlı olan çözüm bantları değil de alternatif başka çözüm bantları olabileceği dikkate alınmaktadır.

1.3. Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu Yöntem

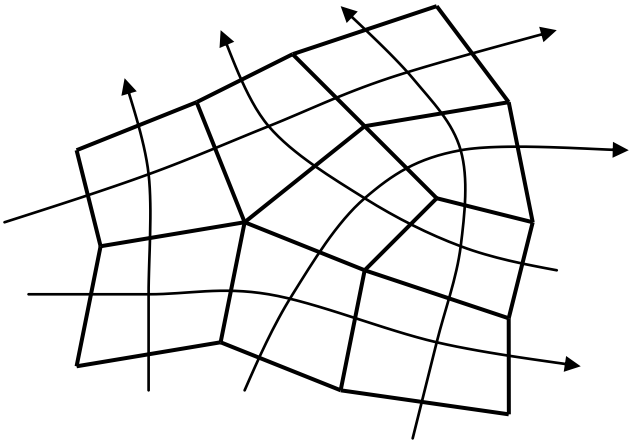
Bu çalışmada önerilen "Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon - DAHYKF Yöntemi" ne ilişkin ayrıntılara 2. Bölümde yer verilecektir.

Yöntem, yukarıda da belirtildiği gibi DYKF yönteminin "değişen yönler" kavramından ilham almaktadır. DAHYKF yönteminde Şekil 1.2 de görüldüğü gibi çift sayılı kenarlara (veya üç boyutlu halde yüzeylere) sahip hücrelerin karşılıklı kenar veya yüzeylerinden geçen doğrultular "hücre yönü (cell direction)" olarak ve Şekil 1.3 de görüldüğü gibi birbirini izleyen komşu hücrelerin yönleri birleştirilerek bulunan hücre yönleri zinciri de "ardışık hücre yönleri (Sequential Cell Directions)" olarak adlandırılmaktadır.

DYKF yöntemindeki ilham alınan "değişen yönler" ise DAHYKF yönteminde ardışık hücre yönlerinin değişmesi anlamına gelmektedir. Bu konudaki ayrıntılara yine Tezin 2. bölümünde yer verilecektir.



Şekil 1.2 Bir dörtgen (a) altıgen (b) ve dikdörtgen prizması (c) elemanlarının ve karşılıklı kenarlarından (ya da yüzlerinden) geçen hücre yönleri.



Şekil 1.3 Dörtgen elemanlı yapısal olmayan bir çözüm ağında ardışık hücre yönleri.

Aslında “değişen ardışık hücre yönleri” kavramını farklı ayrıklaştırma yöntemleri ile birlikte kullanarak, hücrelerdeki çözüm noktalarının nereleri olacağına da bağlı olmak üzere bir çok farklı DAHYKF yöntemi önermek mümkündür. Yöntemin çeşitlemeleri, öncelikle kullanılan ayrıklaştırma tekniğine göre “Sonlu Fark” esaslı ve “Sonlu Hacim” esaslı olmak üzere iki ana gruba ayrılabilir. Her bir ana grupta, çözüm noktalarının “hücre köşe noktaları”, “hücre kenar orta noktaları” ve “hücre merkezleri” olabileceği dikkate alınarak üçer çeşitleme yapılabileceği göz önüne alınırsa, yöntemin çeşitlemelerinin altı adet olabileceği söylenebilir.

Ancak hücre köşe noktalarını veya kenar orta noktalarını esas alarak sonlu hacim ayrıklaştırması kullanan bir kapalı formülasyon literatürde yer almadığı gibi bu çalışma kapsamında da geliştirilememiştir. Bu bakımdan bu tez çalışmasında geriye kalan dört alternatif üzerinde durulmuş olup, Bölüm 2 de bunlara ait bazı ayrıntılara kısaca yer verilmiştir. Bu yöntemlerden en uygununun

- çözüm noktaları olarak hücre merkezlerini alan ve
- Sonlu Hacimlerle ayrıklaştırma yapan

yöntem olacağı değerlendirilmiş olup, yine Bölüm 2 de bu yönteme ait ayrıntılara geniş bir şekilde yer verilmiştir. Burada yöntemin formülasyonu ayrıntılı biçimde sunulduğu gibi, “Ayrık Pertürbasyon Yöntemi **(Hoffmann ve Chiang, 2000)”** ile yapılan kararlılık analizine de yer verilmiştir. Öncelikle DYKF yöntemi için uygulanan bu kararlılık analizi sonuç olarak “Sonlu Fark” esaslı çeşitlemelerin performansının kararlılık bakımından yeterince iyi olmayacağı sonucunu vererek yukarıdaki seçimin yapılmasına katkıda bulunmuştur.

Bu çalışmada uygulanan ayrıklaştırma düşük mertebeli bir yaklaşım olup, ileriki çalışmalarda daha yüksek mertebeli bir sonlu hacimler ayrıklaştırması (**Cai ve diğ., 2003**) kullanmak mümkün görülmektedir.

Tezin 2. Bölümünde yöntemin uygulamaları için FORTRAN 90 dilinde geliştirilen bilgisayar programının yapısından ve veri yönetiminden de söz edilmiştir.

Önerilen DAHYKF yönteminin test çalışmalarında karşılaştırma yapabilmek amacıyla öncelikle DYKF yöntemi ve bunun yanında uzayda aynı türden ayrıklaştırmayı ve zaman adımında açık formulasyonlu Runge-Kutta integrasyonunu kullanan standart bir yöntem **(Jameson, 1997; Swanson ve Turkel, 1997)** kullanılmıştır. RK4 kısaltması ile adlandırılan bu yönteme ilişkin bazı bilgiler de Bölüm 2 de verilmiştir.

1.4. Test Çözümleri

Hücre merkezi esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemini test etmek amacı ile üç adet test problemi için değişik parametrelerle çözüm gerçekleştirilmiştir. Karşılaştırma amacıyla aynı test halleri için ayrıca DYKF ve Runge-Kutta (RK4) yöntemleri ile de çözümler yapılmıştır. Tüm sonuçlar **Uygulamalar** bölümünde ve **Ekler** kısmında grafik ve tablolar halinde verilmiştir.

Sözü edilen test problemleri ve bunların seçilme nedenleri aşağıda sıralanmıştır:

1. *Daire Etrafındaki Potansiyel Akış:*

   Daire etrafındaki potansiyel akışın test problemi olarak seçilmesinin sebebi diğer test problemlerinin olduğu gibi analitik sonuçlarının bilinmesi, kolay çözüm ağı üretilmesidir. Bu test problemi üzerinde kararlılık davranışı ve ağ kalitesi etkilerini incelemek üzere çözümler yapılmıştır. Tüm çözüm ağı çeşitlerinde DAHYKF, DYKF ve RK4'ün değişik Δt'lerde çözümleri alınmıştır. Kullanılan tüm çözüm ağı çeşitleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

   - *Yapısal Çözüm Ağları:* 21x21, 31x31, 41x41 noktalı çözüm ağları kullanılmıştır, değişik boyutta ağlar kullanılarak ağ boyutunun etkisi de gözlenmiştir.
   - *Bozuntuya Uğratılmış Yapısal Çözüm Ağı:* 31x31 nokta sayısındaki yapısal çözüm ağı, her bir noktası belirli bir maksimum değer doğrultusunda random olarak saptırılarak bozuntuya uğratılmıştır. Bu

testin amacı, ağ kalitesinin düşmesi durumunda yöntemlerin davranışlarını gözlemlemektir.

- *Burulmuş Yapısal Çözüm Ağı:* Yine 31x31 nokta sayısındaki yapısal çözüm ağı bir yönde burulmuştur. Bu test ağını kullanmadaki amaç ortogonalitenin bozulması ya da burulmuşluğun (skewness) artması halinde yöntemlerin davranışlarını gözlemlemektir.
- *Burulmuş, Düzgünleştirilmiş Çözüm Ağı:* Bir önceki çözüm ağına Laplasiyen düzgünleştirilme uygulanmış ağdır. Bu düzgünleştirme burulmuşluğu düzeltmemektedir, sadece noktaların dengeli dağılımını sağlamaktadır. Bu test ağının amacı özellikle DAHYKF'nin bu düzgünleştirmeye hassas olmasıdır, böylece yöntemin burulmuşluğa olan davranışı daha iyi anlaşılacaktır.
- *Yapısal Olmayan Çözüm Ağları:* Bu Ağlar 527, 642 ve 942 noktalıdır. Bu test ağlarında amaç yöntemlerin yapısal olmayan çözüm ağlarında davranışlarını incelemektir. Elbette yapısal ağlar için tanımlı olan DYKF yöntemi ile çözüm alınmamıştır.
- *Düzgünleştirilmiş Yapısal Olmayan Çözüm Ağları:* Yukarıdaki ağların Laplasiyen düzgünleştirme uygulanmış halleridir. Bu test ağlarının kullanılmasındaki amaç yapısal olmayan çözüm ağlarında düzgünleştirmenin sonuçlara etkisidir.

2. Basamak Potansiyel Akış:

Basamak potansiyel akışın test problemi olarak seçilmesinin sebebi diğer test problemlerinin olduğu gibi analitik sonuçlarının bilinmesi, çok bloklu yapıya kolay bir örnek teşkil etmesidir. Yapısal çözüm ağı olarak üç kartezyen bloktan oluşan çok bloklu bir yapı seçilmiştir. Bu test problemi üzerinde çok bloklu ağların çözümlere etkilerini incelemek üzere çözümler yapılmıştır. Tüm çözüm ağı çeşitlerinde DAHYKF, DYKF ve RK4'ün değişik Δt'lerde çözümleri alınmıştır. Kullanılan tüm çözüm ağı çeşitleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- *3 Bloklu Yapısal Çözüm Ağları:* 31x11'lik 3 Blok, 61x21'lik 3 Blok boyutlu çok bloklu yapısal çözüm ağları. Bu test çözüm ağları DYKF yönteminde çok bloklu çözüm ağının ve aynı ağ ile DAHYKF yönteminin performanslarının karşılaştırılması amacı ile seçilmiştir.
- *Yapısal Olmayan Çözüm Ağları:* 333 ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağları. Bu test ağlarında amaç yöntemlerin yapısal olmayan

çözüm ağlarında davranışlarını incelemektir. Elbette yapısal ağlar için tanımlı olan DYKF yöntemi ile çözüm alınmamıştır.

3. *Jukowski Simetrik Profili Etrafındaki Potansiyel Akış:*

Kalınlık oranı %15 olan Jukowski Simetrik Profil Etrafındaki potansiyel akışın test problemi olarak seçilmesinin sebebi diğer test problemlerinde olduğu gibi analitik sonuçlarının bilinmesidir. Bu test problemi üzerinde C tipi çözüm ağı yapısının etkilerini incelemek üzere çözümler yapılmıştır. Ayrıca değişik hücum açıları da kullanılarak problem daha zorlaştırılmıştır. Tüm çözüm ağı çeşitlerinde DAHYKF RK4 ve DYKF yönteminin değişik Δt'lerde çözümleri alınmıştır. Bu uygulamada yapısal 79x20 boyutlu ve yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağları seçilmiştir.

4. *Aynı Sıcaklıkta Paralel İki Levha Arasındaki Zamana Bağlı Isı Yayınımı Problemi*

Bu problemin test örneği olarak seçilmesinin sebebi yöntemin zaman bağlı problemlerdeki performansını ölçmektir. Ayrıca bu problemin analitik çözümüde mevcuttur. Ayrıca bu çalışmada Nokta Gauss-Seidel, Hat Gauss-Seidel ve iteratif DAHYKF yöntemleride uygulanmıştır.

- *Yapısal Çözüm Ağları:* 20x20, 40x40 noktalı çözüm ağları kullanılmıştır, değişik boyutta ağlar kullanılarak ağ boyutunun etkisi de gözlenmiştir.
- *Yapısal Olmayan Çözüm Ağları:* 297 ve 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağları. Bu test ağlarında amaç yöntemlerin yapısal olmayan çözüm ağlarında zamana bağlı davranışlarını incelemektir. Elbette yapısal ağlar için tanımlı olan DYKF ve LGS yöntemleri ile çözüm alınmamıştır.

1.5. Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu Sonlu Hacimler Yönteminin Sonuçlarının Değerlendirilmesi

DAHYKF yöntemi ile yapılan uygulama sonuçlarından önemli görülenler tezin Sonuç ve Öneriler başlıklı 4. bölümünde kısaca özetlenmiştir. Ancak yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırılması sonucu görülen olumlu ve olumsuz yanlarının burada da maddeler halinde sıralanması yararlı bulunmuştur:

DAHYKF Yönteminin olumlu yanları;

- DYKF yönteminin aksine DAHYKF yöntemi çözüm ağından bağımsız olarak şartsız kararlıdır.
- DAHYKF yönteminin bir iterasyon adımındaki çözüm hızı DYKF yöntemine yakın bir değerdedir, ve RK4 yönteminden 4 kat daha hızlıdır.
- DAHYKF yönteminin optimum yakınsaması çok yüksek Δt zaman adımlarında gerçekleşir ve bu değerler genellikle önceden bilinebilir. Bu bakımdan uygulamada DYKF 'den çoğu zaman avantajlıdır.
- RK4 yöntemi açık formülasyonlu olduğu için, beklenen bir sonuç olarak DAHYKF yönteminin optimum yakınsama iterasyon sayısı her zaman RK4 yöntemininkinden çok azdır. Çözüm ağları sıklaştıkça bu fark hızla artmaktadır.
- Çok bloklu yapılarda DAHYKF ile dolaysız uygulama mümkündür. Yöntem tüm blokları bir bütün halinde çözeceği için "bloklar arası eşleşme sınır şartları" gerekmemektedir. Bu özellik nedeniyle hem uygulama oldukça kolaylaşmakta hem de daha karmaşık çok bloklu ağları çözmek mümkün olmaktadır.
- Yöntem yapısal olmayan çözüm ağlarında da aynı karakterleri göstermektedir. Yapısal ağlarda olduğu gibi şartsız kararlıdır. Bu nedenle özellikle yapısal olmayan ağlarda çok yüksek bir performansa ulaşmaktadır. Hassasiyet ve yakınsama açılarından programın performansı aynen yapısal çözüm ağlarındaki düzeyde olmakta hatta daha az çözüm ağı noktası ile yapısal çözüm ağları ile aynı performansı yakalayabilmektedir.
- DAHYKF yöntemi zamana bağlı uygulamalarda DYKF ve RK4 yöntemine yakın bir performans göstermektedir. Ayrıca DAHYKF yöntemini zamanda iteratif bir şema eklendiğinde ortaya çıkan IDAHYKF yöntemi çok daha iyi bir performans sergilemektedir.

DAHYKF yönteminin olumsuz yanları;

- DAHYKF yönteminin optimum zaman adımındaki yakınsama iterasyon sayısı DYKF yöntemindekinden fazladır.
- DAHYKF yöntemi, Yaklaşık Çarpanlarına Ayırma (Approximate Factorization, **Pulliam ve Chaussee, 1981**), Alt-üst üçgensel ayırma (LU Decomposition, **Matsushima ve diğ., 1987**) gibi daha üst düzey değişen

yönler yöntemlerinin uygulanmasına uygun bir yapısı olmadığı değerlendirilmektedir. Bununla birlikte konu araştırmaya açıktır.

- DAHYKF yöntemi iki-boyutlu halde dörtgen ve üç boyutlu halde de dörtgenler prizmasını temel olarak desteklemektedir. Fakat yapısal olmayan ağ yapıları yaygın olarak üçgen elemanlardan (iki-boyutlu halde) oluşmaktadır. Bu tür hücre yapılarından dörtgen elemanlı hücre yapılarına dönüşüm yapmak gereklidir. Nitekim tez çalışmasında basit bir yolla üçgen elemanlar ikişer ikişer birleştirilerek dörtgen elemanlar elde edilmektedir.
- DAHYKF özellikle yapısal olmayan çözüm ağlarında çözücü ağın düzgünlüğüne hassastır. Fakat bu sorun Laplasiyen düzgünleştirme yöntemi ile kolaylıkla çözümlenmiştir.

Ayrıca bu yöntemle ileriki aşamalarda asılı noktaları (hanging nodes) destekleyen bir formülasyon da mümkün görülmektedir. Eğer bu yapı eklenirse yöntemin neredeyse tüm ağ yapılarını aynı hızlı kapalı formülasyonla çözümlemesi mümkün olacaktır. Bu tip ağ ve çözüm algoritmalarından bazıları Alan Yeniden Yerleştirme (Domain Decomposition, **Stewart, 1992**) yöntemi, Çoklu Ağ yöntemi (Multigrid, **Swanson ve diğ., 1997, Özyörük ve Long, 1997**), Kartezyen ağlı yöntemler **(Aftosmis, 1997, Pandya ve Aftosmis, 2001)** ve adaptif ağ kullanan yöntemler **(Berger ve Jameson, 1985, Zeeuw ve Powell, 1993)** olarak sıralanabilir. Elbette tüm yöntemleri uygulamak bu tez kapsamını aşacaktır, fakat vurgulanmak istenen yöntemin önünün açık olmasıdır.

2 SAYISAL YÖNTEM

2.1 Giriş

Bu çalışmanın ana hedefi “Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon (DAHYKF) Yöntemi” adını alacak yeni bir sayısal yöntemi ortaya koymak ve yetkinliğini test etmekdir. Kolaylık düşüncesi ile bu tez kapsamında yöntem sadece iki-boyutlu halde incelenecektir. Ancak üç-boyutlu uygulamalar da mümkündür. Yine aynı kolaylık düşüncesi ile matematiksel model olarak sadece Laplace denklemi ele alınacaktır. Bu denklemin seçilmesinin ana nedeni, özellikle akışkan akımlarıyla ilgili bir çok problem için çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş olması ve bu bakımdan bir çok çözüm tekniğinin iyi bilinmesi ve bundan daha da önemlisi bir çok halde analitik çözümlerinin elde edilebiliyor olmasıdır. Elde edilen analitik çözümlerin test amaçlı çalışmalarda karşılaştırma amacı ile kullanılabilmesi önemli bir olanak sağlamaktadır.

Ancak, bu çalışmada önerilen DAHYKF yönteminin hareket noktası olan Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon (DYKF) yöntemi zamanda ilerleyen (time-marching) tipte bir sayısal yöntem olduğu için, Laplace denklemi yerine, buna benzeyen ancak ilaveten zamana göre bir türev içeren ve literatürde “Zamana Bağlı Difüzyon Denklemi” **(Pozrikidis, 1998)** veya “Zamana Bağlı Isı Denklemi” (**Hoffmann ve Chiang, 2000)** olarak tanınan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

denkleminin kullanılması daha uygun olacaktır. Bu denklem her ne kadar, herhangi bir zaman adımında zamana bağlı bir çözüm veriyor ise de zaman değişkeninin çok büyük değer alması halinde Laplace denkleminin çözümüne yakınsayacağı bilinmektedir. Ayrıca bir çok araştırmacı da (**Douglas ve Gallie, 1955, Douglas ve Rachford, 1956, Douglas, 1955**) benzer nedenlerle bu denklem üzerinde değişik sayısal yöntemleri uygulamışlardır.

Giriş bölümünde ana fikri kısaca anlatılan ve DAHYKF ismi verilen yöntemlerin uygulanması için bazı seçenekler önermek mümkündür. Bu seçenekler ayrıklaştırmanın

- Sonlu Farklar Yöntemi - SFY, ya da
- Sonlu Hacımlar Yöntemi - SHY

ile yapılmasına bağlı olarak iki ana gruba ayrılabilir. Bu çalışmada SHY ile ayrıklaştırılmış DAHYKF yöntemi seçilmiştir. Bu yöntemin tercih edilme nedeninin anlaşılması için diğer seçeneklerden ve bunların olumlu ve olumsuz yanlarından bahsetmek gerekecektir. Ancak bu konulara girmeden önce DYKF yöntemini incelemek faydalı olacaktır. Zira DYKF yöntemi, önerilen DAHYKF yönteminin çıkış noktası olduğu gibi ayrıca DYKF yöntemi için çıkartılan bir kısım formülasyon daha ileride DAHYKF yönteminin varyasyonlarının çıkartılmasında da kullanılacaktır. Ayrıca DYKF yöntemi bu özelliği nedeniyle bir karşılaştırma yöntemi olarak da seçilmiştir.

2.2 DYKF Yöntemi, Sonlu Farklar Yöntemi ile Ayrıklaştırma

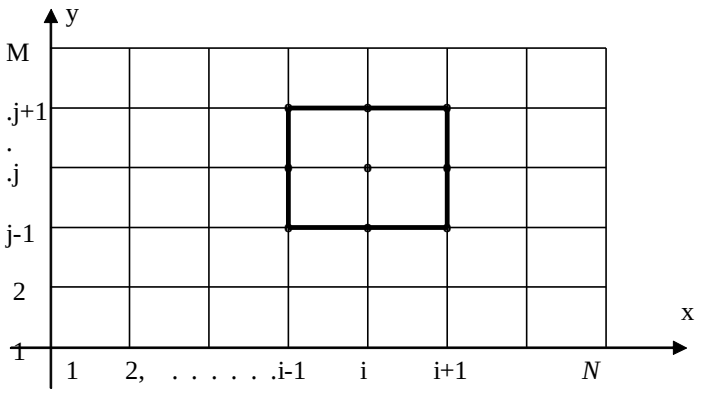
Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon yöntemi (Alternating Direction Implicit Method - ADI) klasikleşmiş bir yöntem olup, ayrıntılarını birçok kaynakta bulmak mümkündür **(Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson, 1984; Wachspress, 1962; Wachspress ve Habetler, 1960; Douglas ve Gallie, 1955; Douglas ve Rachford, 1956; Douglas, 1955)**. Bununla birlikte, bu çalışmada önerilen DAHYKF yönteminin iyi anlaşılabilmesi ve bir karşılaştırma yöntemi olarak kullanıldığı için DYKF yönteminin kısaca hatırlatılmasında yarar bulunmaktadır.

Şekil 2.1 de görüldüğü gibi bir kartezyen ağ yapısında zamana göre birinci dereceden türev ileri doğru farklarla, ve konuma göre ikinci türevler de merkezi farklarla

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k}}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} \qquad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2}$$



Şekil 2.1 Bir kartezyen ağ sistemi ve indisleri

şeklinde ayrıklaştırılarak, bu eşitlikler (2.1) denkleminde kullanıldığı taktirde;

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k}}{\Delta t}=\frac{u_{i+1,j}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^{2}}+\frac{u_{i,j+1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^{2}} \tag{2.3}$$

veya yeni bir düzenleme ile

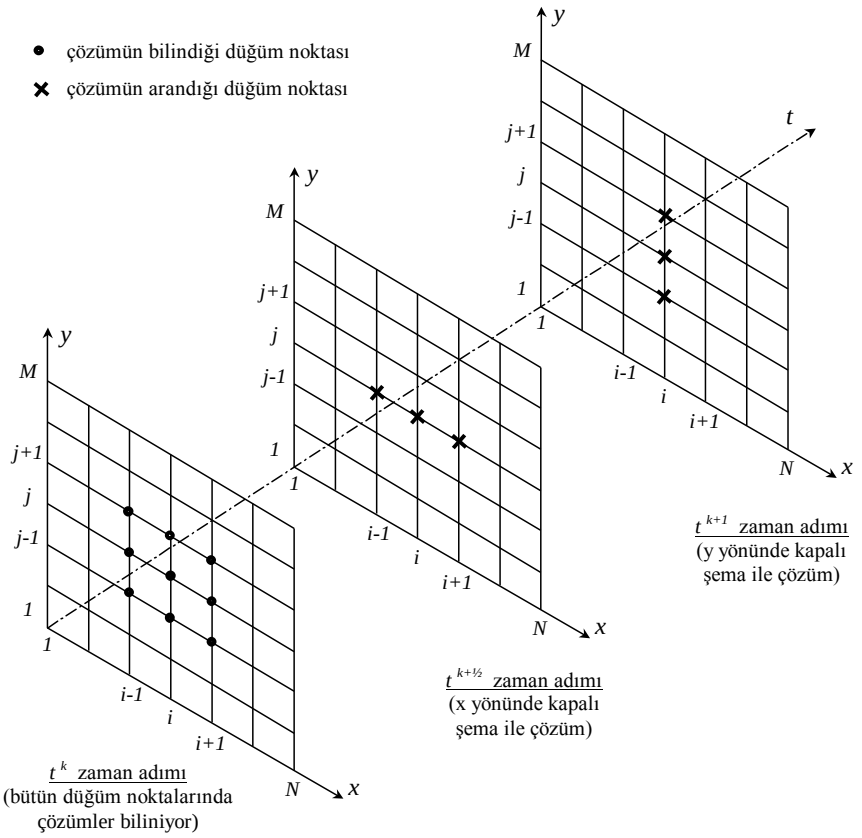
$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^{2}}\right)\cdot(u_{i+1,j}^{k+1}+u_{i-1,j}^{k+1})+\left(\frac{\Delta t}{\Delta y^{2}}\right)\cdot(u_{i,j+1}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1})-\left(\frac{2\Delta t}{\Delta y^{2}}+\frac{2\Delta t}{\Delta x^{2}}+1\right)\cdot u_{i,j}^{k+1}=u_{i,j}^{k} \tag{2.4}$$

denklemi elde edilir. Burada *k* üst-indisi herhangi bir zaman adımında bilinen büyüklükleri, *k+1* üst-indisi ise bunu izleyen zaman adımındaki bilinmeyenleri, yani hesaplanması gereken büyüklükleri belirtmektedir. Buna göre, (2.4) denkleminde

$$u_{i+1,j}^{k+1}\ ;\ u_{i-1,j}^{k+1}\ ;\ u_{i,j+1}^{k+1}\ ;\ u_{i,j-1}^{k+1}\ ;\ u_{i,j}^{k+1}$$

olmak üzere 5 adet bilinmeyen vardır, ve bu denklem kapalı (implicit) olarak adlandırılan türde bir sayısal formülasyondur. Şekil 2.1'deki ağ yapısının (*i,j*) noktası etrafındaki uygulama ile elde edilen bu denklemin benzerleri, ağ sisteminin diğer noktaları etrafında da uygulanarak bir doğrusal denklem takımı elde edileceği ve bu denklem takımının 5-köşegenli bir katsayılar matrisine sahip olacağı kolaylıkla görülebilir. Bu denklem sisteminin çözümünün bir çok kapalı formülasyonlu sonlu-fark yönteminde karşılaşılan 3-köşegenli denklem sistemlerine kıyasla daha zor olacağı, daha uzun bilgisayar süresi ve daha fazla bilgisayar hafızası alacağı da tahmin edilebilir.

DYKF yöntemi yukarıda belirtilen zorluğu basit bir yaklaşımla ortadan kaldırmaktadır. Şöyle ki; bir zaman adımında her iki konumsal doğrultuda da kapalı formülasyonlu bir ayrıklaştırma yapmak yerine, zamanda iki yarım-adım atarken, ilk yarım-adımda konumsal doğrultulardan birinde kapalı diğerinde açık formülasyonlu bir ayrıklaştırma yapmakta, ikinci yarım-adımda ise bunun aksini yapmaktadır. Böylece her bir yarım-adımda bir tek konumsal doğrultudaki kapalı formülasyon ile, üç-köşegenli denklem sistemleri elde edilmektedir. DYKF yöntemi değişen yönlerde kapalı formülasyonlar kullanarak çözümü kolaylaştırmakta ve hızlandırmaktadır. Bu yaklaşım şematik olarak Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Kartezyen koordinatlarda Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon yöntemi.

Yukarıda açıklanan hususların anlaşılmasını kolaylaştırmak için (2.1) denkleminin sol tarafındaki zamana göre birinci dereceden türev, yarım zaman adımı (*k+1/2*) üst-indisiyle belirtilmek üzere yarım zaman adımında ileri farklarla, sağ tarafındaki ikinci derece türevlerden *x* doğrultusunda olanı kapalı formülasyonlu olacak biçimde (*k+1/2* zaman adımında) ve *y* yönündeki ikinci türev de açık formülasyonlu olacak biçimde (*k* zaman adımında) merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2}-u_{i,j}^{k}}{\Delta t/2}=\frac{u_{i+1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i-1,j}^{k+1/2}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}}{(\Delta y)^2} \tag{2.5}$$

veya yeni bir düzenleme ile

$$d_x\cdot u_{i+1,j}^{k+1/2}-(2d_x+1)\cdot u_{i,j}^{k+1/2}+d_x\cdot u_{i-1,j}^{k+1/2}=-d_y\cdot u_{i,j+1}^{k}+(2d_y-1)\cdot u_{i,j}^{k}-d_y\cdot u_{i,j-1}^{k} \tag{2.6}$$

elde edilir. Burada

$$d_x=\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2},\qquad d_y=\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2} \tag{2.7}$$

dir. Ağ sisteminin bütün noktaları etrafında benzeri uygulama yapıldığı taktirde (2.6) denklemine benzer denklemlerden oluşan üç-köşegenli bir denklem sisteminin ortaya çıkacağı açıktır. Bu denklem sistemi Dirichlet tipi sınır şartı kullanıldığı taktirde matris formunda

$$\begin{bmatrix} b_{2,2} & c_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,2} & b_{3,2} & c_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & b_{4,2} & c_{4,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1,2} & b_{N-1,2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{4,2} \\ .. \\ .. \\ u_{N-1,2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{2,2}-a_{2,2}\cdot u_{1,2} \\ R_{3,2} \\ R_{4,2} \\ .. \\ .. \\ R_{N-1,2}-c_{N-1,2}\cdot u_{N,2} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\begin{aligned} R_{i,j}&=-d_y\cdot u_{i,j+1}^{k}+(2d_y-1)\cdot u_{i,j}^{k}-d_y\cdot u_{i,j-1}^{k} \\ a_{i,j}&=d_x,\quad b_{i,j}=-(2d_x+1),\quad c_{i,j}=d_x \end{aligned} \tag{2.9}$$

dir.

İkinci yarım-zaman-adımında bu defa *x* doğrultusundaki ikinci dereceden konumsal türev açık formülasyonlu olacak biçimde (*k+1/2* zaman adımında) ve *y* doğrultusundaki türev de kapalı formülasyonlu olacak biçimde (*k+1* zaman adımında) merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta t/2}=\frac{u_{i+1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i-1,j}^{k+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \tag{2.10}$$

denklemi, veya düzenlenerek

$$d_y \cdot u_{i,j+1}^{k+1} - (2d_y + 1) \cdot u_{i,j}^{k+1} + d_y \cdot u_{i,j-1}^{k+1} = -d_x \cdot u_{i+1,j}^{k+1/2} + (2d_x - 1) \cdot u_{i,j}^{k+1/2} - d_x \cdot u_{i-1,j}^{k+1/2} \quad (2.11)$$

denklemi elde edilir. Burada yine ağ sisteminin bütün noktalarındaki benzeri uygulamalar ile (2.11) denkleminin benzerlerinden oluşan üç-köşegenli bir denklem sisteminin ortaya çıkacağı görülebilir. Bu denklem sistemini de (2.8) denklem sistemi gibi matris formda düzenlemek mümkündür.

2.3 Kartezyen Çözüm Ağında Hat Gauss-Seidel Yöntemi

Bu yöntemin DYKF yönteminden farkı önceki çözülmüş değerleri kullanması ve sağ tarafdaki diğer ikinci türev ayrıklaştırmasında ki *i,j* değerlerini bilinmeyenler içine katmaktır. Buna göre yöntemin formülasyonu aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} I &\rightarrow d_x \cdot u_{i+1,j}^{k+1/2} - (2d_y + 2d_x + 1) \cdot u_{i,j}^{k+1/2} + d_x \cdot u_{i-1,j}^{k+1/2} = -d_y \cdot u_{i,j+1}^{k*} - u_{i,j}^{k*} - d_y \cdot u_{i,j-1}^{k*} \\ J &\rightarrow d_y \cdot u_{i,j+1}^{k+1} - (2d_y + 2d_x + 1) \cdot u_{i,j}^{k+1} + d_y \cdot u_{i,j-1}^{k+1} = -d_x \cdot u_{i+1,j}^{k+1/2*} - u_{i,j}^{k+1/2*} - d_x \cdot u_{i-1,j}^{k+1/2*} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Burada * ifadeleri çözülmüş yada bir önceki adımda çözülmüş ifadeleri temsil etmektedir, yani örneğin k* k yada k+1/2'yi temsil etmektedir. Hat Gauss-Seidel yöntemi (**Hoffmann ve Chiang, 2000**) literatürde olduğu gibi LGS kısaltması ile anılacaktır. Bu metodun şeması yapısal sonlu farklar olması dışında DAHYKF yöntemine benzerdir.

2.4 Eğrisel Koordinatlara Geçiş

Gerek (2.1) denklemi ve gerekse bunun DYKF yöntemi ile ayrıklaştırılmasından elde edilen denklemler kartezyen koordinatlarda yazılmış olduğundan bunlarla sadece dikdörtgensel bölgelerdeki problemleri çözmek mümkün olacaktır. Bu bakımdan çözüm yelpazesini genişletmek için denklemleri eğrisel koordinat sistemine dönüştürmek gerekir. Zamana bağlı ısı yayınımı denkleminin eğrisel koordinatlara dönüştürülmesi bazı kaynaklarda da yer almaktadır **(Abrashin ve Dzyuba, 1994)**.

Bir (ξ, η) eğrisel koordinat sisteminin (x, y) kartezyen koordinat sistemine

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde bağlı olduğu varsayılarak ξ ve η değişkenlerinin tam diferansiyelleri için matris formda

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

veya (2.13) bağıntılarını tersine düşünerek *x* ve *y* değişkenlerinin tam diferansiyelleri için

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

yazmak mümkündür. Burada değişkenlerin altında bulunan indisler hangi değişkene göre kısmi türev alındığını belirtmektedir.

(2.15) eşitliğinin sağ tarafındaki matris çarpımı (2.14) eşitliğinin sağında gerekli yere konursa eşitliğin gerçekleşmesi için

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.16}$$

olması gerektiği görülür. Bu matris eşitliği açılarak

$$\xi_x = J \cdot y_\eta \quad , \quad \xi_y = -J \cdot x_\eta \quad , \quad \eta_x = -J \cdot y_\xi \quad , \quad \eta_y = J \cdot x_\xi \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada *J* büyüklüğü

$$J = \frac{1}{x_\xi \cdot y_\eta - y_\xi \cdot x_\eta} \tag{2.18}$$

olup, Jakobiyen olarak adlandırılmakta, $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ büyüklükleri ise dönüşümün metrikleri olarak anılmaktadır.

(2.1) denkleminin eğrisel koordinatlara dönüşümü için ilk olarak denklemde yer alan *x* 'e göre ikinci türev ele alınırsa, zincir kuralı uygulanarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{2.19}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (2.20)$$

dir. y 'ye göre ikinci türev için de benzeri işlemler yapılırsa, bağımsız değişkenlerin türevleri kısaca alt indislerle belirtilmek suretiyle (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\xi_x^2+\xi_y^2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\left(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\left(\eta_x^2+\eta_y^2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$+\left(\xi_{xx}+\xi_{yy}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(\eta_{xx}+\eta_{yy}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad (2.21)$$

şekline gelir. Ancak uygulamada bu ifadenin $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ metrikleri cinsinden yazılması daha uygun olur. Nitekim (2.16) bağıntıları bu son denklemde kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa sonuç olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+P\frac{\partial u}{\partial \xi}+Q\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad (2.22a)$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$\alpha=x_\eta^{\,2}+y_\eta^{\,2}$$
$$\beta=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta$$
$$\gamma=x_\xi^{\,2}+y_\xi^{\,2}$$
$$G(x)=\alpha\cdot x_{\xi\xi}-2\beta\cdot x_{\xi\eta}+\gamma\cdot x_{\eta\eta} \qquad (2.22b)$$
$$G(y)=\alpha\cdot y_{\xi\xi}-2\beta\cdot y_{\xi\eta}+\gamma\cdot y_{\eta\eta}$$
$$P=J^{-3}\left(y_\eta\cdot G(x)-x_\eta\cdot G(y)\right)$$
$$Q=J^{-3}\left(-y_\xi\cdot G(x)+x_\xi\cdot G(y)\right)$$

dir. Zamana bağlı ısı denkleminin eğrisel koordinatlara dönüşümüne ilişkin ayrıntılar Ek A' da verilmiştir.

2.4.1 Eğrisel Koordinatlarda DYKF için Ayrıklaştırma

Daimi olmayan ısı denkleminin eğrisel koordinatlardaki formu için DYKF yöntemi ile ayrıklaştırılmasını bazı kaynaklarda bulmak mümkündür **(Abrashin ve Dzyuba, 1994)**. Ancak, ilerideki konuların daha kolay anlaşılması bakımından burada kısaca hatırlatmakta yarar bulunmaktadır.

Kartezyen koordinatlardaki (2.1) denkleminde bağımlı değişkenin *x* ve *y* ye göre sadece ikinci dereceden türevleri var iken, eğrisel koordinatlarda bunun karşılığı olarak elde edilen (2.22a) denkleminde farklı olarak ξ ve η ya göre birinci mertebeden türevler ve ayrıca bu değişkenlere göre bir karışık ikinci türevin de yer aldığı görülmektedir. Bu denklem için DYKF yöntemi uygulanırken söz konusu karışık türevin her iki yarım-zaman adımında da açık formülasyonla yazılması halinde herhangi bir sorun çıkmayacaktır.

Buna göre ağ yapısının herhangi bir (i,j) hesap noktası civarında (2.22a) denkleminde ilk yarım-zaman adımı için ξ 'ye göre türevler kapalı formülasyonla ve η 'ya göre türevlerle ξ ve η 'ya göre karışık türev de açık formülasyonla ayrıklaştırılacak şekilde bir düzenleme yapılırsa

$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{k}}{\Delta t / 2} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)^{k+\frac{1}{2}} - P\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{k+\frac{1}{2}} = -2\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)^{k} + \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^{k} + Q\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{k} \tag{2.23}$$

elde edilir. Bu bağıntı, ξ ve η ya göre türevler ayrıklaştırılarak ve düzenlenerek

$$\left(P\cdot\frac{\Delta t}{4} - \frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \left(1+\alpha\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \left(P\cdot\frac{\Delta t}{4} + \frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = rhs \tag{2.24a}$$

şekline gelir. Eşitliğin sağ tarafındaki terimler

$$\begin{aligned} rhs = &\left(\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2} - Q\cdot\frac{\Delta t}{4}\right)\cdot u_{i,j-1}^{k} + \left(1-\gamma\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k} + \left(Q\cdot\frac{\Delta t}{4} + \frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i,j+1}^{k} \\ &- \frac{\beta\cdot\Delta t}{4}\left[u_{i+1,j+1}^{k} - u_{i+1,j-1}^{k} - u_{i-1,j+1}^{k} + u_{i-1,j-1}^{k}\right] \end{aligned} \tag{2.24b}$$

şeklinde olup, görüldüğü gibi sadece önceki zaman adımından bilinen değerleri içermektedir. Burada $\Delta\xi$ ve $\Delta\eta$ büyüklükleri, literatürde de sıkça tercih edildiği gibi, kolaylık amacı ile "birim değerde" alınmıştır.

İkinci yarım-zaman adımında, bu defa η yönündeki türevler kapalı formülasyonla ve ξ yönündeki türevlerle çapraz türev de açık formülasyonla ayrıklaştırılıp benzeri işlemler yapılarak

$$\left(Q\cdot\frac{\Delta t}{4}-\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i,j-1}^{k+1}+\left(1+\gamma\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+1}-\left(Q\cdot\frac{\Delta t}{4}+\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i,j+1}^{k+1}=rhs \tag{2.25a}$$

ifadesi elde edilir. Burada da eşitliğin sağ tarafı yine

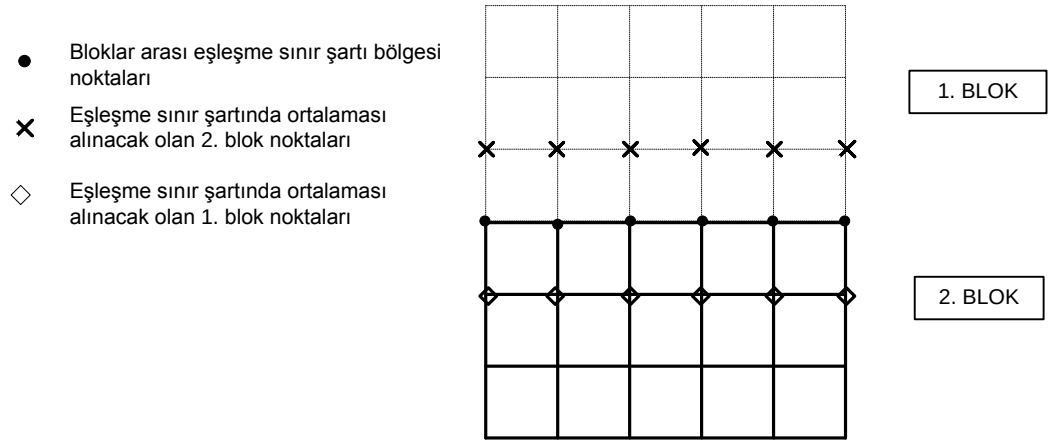
$$\begin{aligned} rhs=&\left(\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}-P\cdot\frac{\Delta t}{4}\right)\cdot u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}+\left(1-\alpha\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}+\left(P\cdot\frac{\Delta t}{4}+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\\ &-\frac{\beta\cdot\Delta t}{4}\left[u_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{2.25b}$$

şeklinde önceki zaman adımından bilinen değerleri içermektedir. Zamana bağlı ısı yayınımı denkleminin eğrisel koordinatlara dönüştürülmüş formu için DYKF ile yapılan ayrıklaştırmaya ilişkin ayrıntılara yine Ek A' da yer verilmiştir.

İzleyen kısımlardaki "Sonlu Fark Ayrıklaştırması" kullanan algoritmalar burada elde edilenlere benzer formülasyonları kullanmaktadır. Bunların yukarıdaki yöntemden farkı, ξ ve η yönlerinin nasıl tanımlandığı ve bu hesap noktalarının hücrenin nerelerinde alındığı hususlarıyla ilgilidir.

Ayrıca çalışmada çok bloklu DYKF uygulaması da mevcut olup tek bloklu DYKF yönteminden tek farkı bloklar arası eşleşme sınır şartlarının kullanılmasıdır. DYKF (**Rosenfeld ve Yassour, 1994**) ve benzeri yapısal ağ kullanan sayısal yöntemlerde (**Karman ve diğ., 1986, Walters ve diğ, 1986, Rai,1985, Rai, 1984**) çok bloklu sistemler ya yapısal ağlarla mümkün olmayan ya da ağ kalitesini oldukça düşüren kompleks geometrilerin çözülebilmesi için veya çözüm zamanını azaltmak amacıyla paralel programlama yapmak için kullanılmaktadır. Çok bloklu sistemlerde çözüm bölgesi birden çok parçaya bölünmektedir. Bloklar arası sınırlar üzerinde gerçek bir sınır şartı bulunmamakla birlikte her bir bloğun kendi başına çözülebilmesi için bir sınır şartı tanımlanması gerekmektedir. Eşleşme sınır şartı adı verilen bu sınır şartı problemi gerçek çözüm değerine yakınsatacak şekilde olmalıdır.

Eşleşme sınır şartını bir çok şekilde uygulamak mümkündür. Bu çalışmada en basit ve klasik bir uygulama olarak, Şekil 2.3'de görüldüğü gibi iki bloğun bir önceki düğüm noktalarının ortalamaları kullanılmaktadır.



Şekil 2.3 Çok bloklu yöntemlerde eşleşme sınır şartı noktaları.

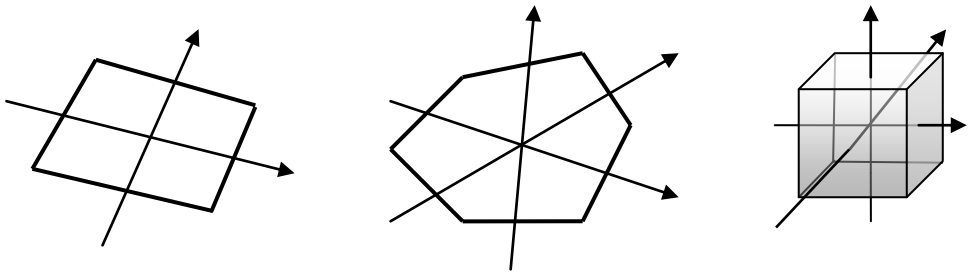
2.5 Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon (DAHYKF) Yöntemleri

Daha önce de belirtildiği gibi DAHYKF Yöntemi adı altında bazı çeşitlemeler yapmak mümkündür. Bu kısımda çeşitlemelere kısaca değinilerek bunlar arasında en uygun olduğu gözlenen yöntemin ayrıntılarına ve kararlılık analizine yer verilecektir.

DAHYKF yöntemi DYKF yönteminde olduğu gibi değişen yönlerde kapalı formülasyonlar kullanmaktadır. Ancak, DAHYKF yöntemindeki değişen yönler DYKF dekinden farklıdır. Aslında yöntemin özgünlüğü de bu farkla ilgilidir. Yöntemin bu özgün yanının daha iyi anlaşılabilmesi için “Hücre Yönleri” ve “Ardışık Hücre Yönleri” kavramlarının açıklanmasında yarar bulunmaktadır.

2.5.1 Ardışık Hücre Yönleri Kavramı

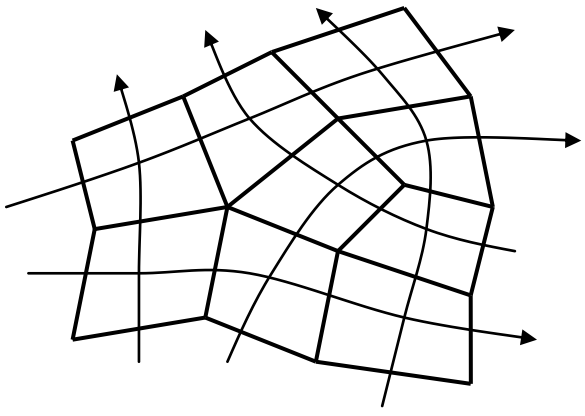
Şekil 1.2 de görüldüğü gibi karşılıklı (çift sayılı) kenar ya da yüzlere sahip her hücre doğal olarak karşılıklı kenar veya yüzlerinden geçen yönlere sahiptir. Bu yönlere, bu çalışmada “Hücre Yönleri” (Cell Directions) adı verilmektedir. Dörtgen, altıgen veya dörtgenler prizması gibi geometriler bu tanıma uymakta olup hücre yönlerine sahiptirler. Elemanlar üzerinde bir çok interpolasyon, dönüşüm ve benzeri matematiksel uygulama aslında bu yönleri kullanmaktadır.



Şekil 2.4 Hücre yönleri: (a) dörtgen, (b) altıgen (c) dikdörtgen prizması

Karşılıklı kenarlara sahip elemanlardan oluşan bir çözüm ağında bir hücre üzerinden bir yönde geçip izleyen komşu hücre üzerinden de aynı yönde devam ederek bir "ardışık yön" tanımlamak mümkündür. Bütün hücrelerde benzeri işlem yapıldığında Şekil 1.'de gösterildiği gibi her hücreden tüm hücre yönlerinde geçilen bir ardışık yönler ağı oluşur. Bu ardışık yönler grubuna bu çalışmada "Ardışık Hücre Yönleri" (Alternating Cell Directions) adı verilmektedir. Ayrıca bu yönlere göre yapılan bir çözüm söz konusu olduğunda da "çözüm bandı" tabiri kullanılmaktadır.

Ardışık Hücre Yönleri yapısal olmayan ağlar için bir yön yapısı oluşturmaktadır, ve bu yapıdan yararlanılarak DYKF benzeri çözüm yöntemleri geliştirmek mümkündür. Nitekim DAHYKF yönteminin esası "Ardışık Hücre Yönleri" boyunca türevleri kapalı formülasyonla yazarak diferansiyel denklemleri üç-köşegenli katsayılar matrisine sahip lineer denklem takımlarına indirgeme esasına dayanmaktadır. Bu yapıyı kullanan çözüm yöntemi önerileri izleyen bölümlerde verilmektedir.



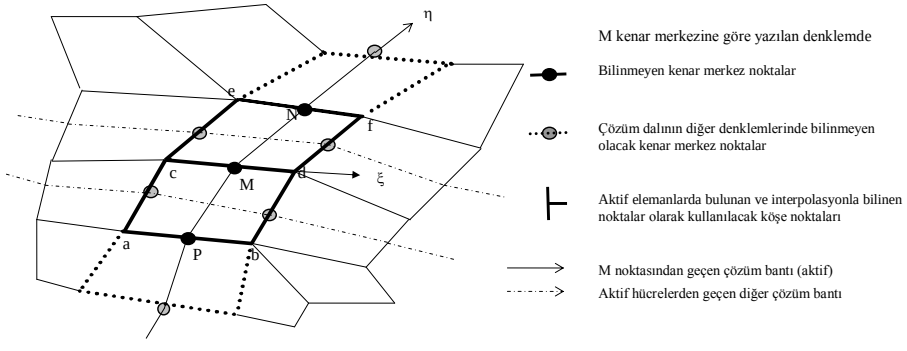
Şekil 2.5 Dörtgen elemanlı yapısal olmayan bir çözüm ağında ardışık hücre yönleri.

2.5.2 DAHYKF Yönteminin Sonlu Fark Esaslı Çeşitlemeleri

DAHYKF yönteminin, ayrıklaştırmanın sonlu fark esaslı veya sonlu hacim esaslı gerçekleştirilmesine bağlı olarak iki ana grup çeşitlemesini önermek mümkündür. Bu tez çalışmasında sonlu hacim ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi tercih edilmiş olmakla birlikte bu seçimin niçin yapıldığının anlaşılması bakımından bu kısımda sonlu fark ayrıklaştırmalı çeşitlemelerin kısaca tanıtılmasında yarar görülmüştür. Çeşitlemeler daha ziyade ayrıklaştırmanın temel alındığı hücre elemanlarına göre yapılanmaktadır.

2.5.2.1 Kenar Merkezi Esaslı, Sonlu Fark Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi

Bu yöntemde Şekil 2.6 'da gösterildiği gibi dörtgensel hücrelerden oluşan ağ yapısında hesap noktaları kenarların orta noktaları olup, çözüm bantları ardışık hücre yönü mantığıyla oluşturulmakta ve kenar orta noktalarından geçmektedir. Bu durumda hücrelerden iki farklı yönde geçen çözüm bantlarının kesişme noktaları çözüm noktaları ile çakışık olmamaktadır. Örneğin Şekil 2.6 da köşe noktaları sırasıyla *abdc* ve *cdfe* olan iki komşu hücre ele alınırsa, η ile gösterilen çözüm bandında bu iki hücreye ait çözüm noktaları kenar orta noktaları olan *P, M, N* noktalarıdır ve η yönündeki türevler bu kenar orta noktalarından yararlanılarak kapalı formülasyonla ayrıklaştırılmaktadır. Buna karşılık diğer ξ yönündeki türevler ise hücre köşe noktalarından yararlanılarak açık formülasyonla ayrıklaştırılmaktadır. Yani, örneğin *M* kenar orta noktası etrafında ξ yönündeki türev için komşu iki hücrenin ortak kenarının iki köşe noktası olan *c* ve *d* noktalarındaki değerlerden yararlanılmaktadır. DYKF yönteminin η yönündeki ayrıklaştırmasını temsil eden (2.25) bağıntıları bu noktalara ve yönteme göre düzenlenirse



Şekil 2.6 Kenar orta noktası esaslı SFY ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi

$$\left(\frac{Q\cdot\Delta t}{4}-\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)u_P^{k+1/2}+\left(1+\gamma\cdot\Delta t\right)u_M^{k+1/2}-\left(\frac{Q\cdot\Delta t}{4}+\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)u_N^{k+1/2}=\left(\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}-\frac{P\cdot\Delta t}{4}\right)u_c^k$$
$$+\left(1-\alpha\cdot\Delta t\right)\cdot u_M^k+\left(\frac{P\cdot\Delta t}{4}+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_d^k-\frac{\beta\cdot\Delta t}{4}\left[u_f^k-u_b^k-u_e^k+u_a^k\right] \quad (2.26)$$

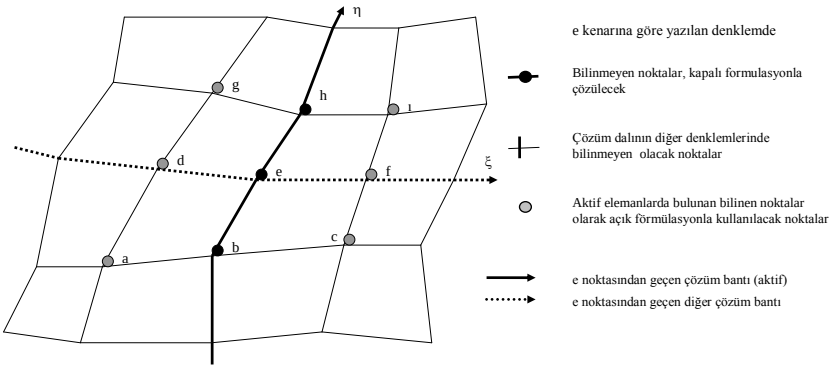
elde edilir. Bu denklemler çözüm bandı boyunca birbirini takip eden her bir kenar orta noktasında yazılırsa her çözüm bandı için üç-köşegenli bir denklem sistemi elde edilir.

Ancak bu yöntemde, yukarıda örnek olarak gösterilen *c* ve *d* noktalarında olduğu gibi hücre köşe noktaları çözüm noktaları olmayıp bu noktalardaki değerlerin bulunması için bir önceki çözüm adımında kenar orta noktalarında elde edilen değerlerden hareketle interpolasyon yapılması gerekmektedir.

DAHYKF yöntemi için ilk seçenek olarak seçilen bu yöntem denenmiş olup dengesiz yapısı nedeniyle çok zayıf bir performans göstermiştir. Yöntemin performansı çözüm ağı yapısına ve interpolasyon kalitesine çok bağlı olmaktadır. Bu nedenlerle yöntemin tez çalışmasının devamında kullanılmasından vazgeçilmiştir.

2.5.2.2 Köşe Noktası Esaslı, Sonlu Fark Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi

Bu yöntemde çözüm noktaları hücre köşe noktaları olup çözüm bantları bu noktalar üzerinden geçmektedir (Şekil 2.7). Tek bloklu yapısal ağlara uygulandığında, veri yönetimi ve pratik uygulama dışında klasik DYKF yönteminden pek farklı değildir. Ayrıca bu yaklaşım çok bloklu yapısal ağlarda otomatik olacaktır. Blok kavramı ile blok eşleşme sınır şartlarını ortadan kaldırarak sınırdaki yakınsama problemlerini gidermektedir.



Şekil 2.7 Köşe noktası esaslı, SFM ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi

DYKF yöntemi ile (2.25) bağıntılarını elde etmek için uygulanan ayrıklaştırmalar bu yöntem için köşe noktaları kullanılarak tekrarlanırsa

$$\left(\frac{Q\ \Delta t}{4}-\frac{\gamma\ \Delta t}{2}\right)u_b^{k+1/2}+\left(1+\gamma\cdot\Delta t\right)u_e^{k+1/2}-\left(\frac{Q\ \Delta t}{4}+\frac{\gamma\ \Delta t}{2}\right)u_h^{k+1/2}=\left(\frac{\alpha\ \Delta t}{2}-\frac{P\ \Delta t}{4}\right)u_d^k$$
$$+..\left(1-\alpha\ \Delta t\right)u_e^k+\left(\frac{P\ \Delta t}{4}+\frac{\alpha\ \Delta t}{2}\right)u_f^k-\frac{\beta\ \Delta t}{4}\left[u_i^k-u_c^k-u_g^k+u_a^k\right] \quad (2.27)$$

elde edilir. Bu yöntemin çok bloklu halde DYKF yönteminden tek farkı ξ ve η gibi koordinat yönleri ayırımı olmaksızın yukarıdaki formülasyonun sadece hücre yönlerine göre kullanılmasıdır. Tek bloklu yapısal bir ağda ise hücre yönleriyle ξ ve η koordinat yönlerinin aynı olması dolayısı ile yöntem DYKF yöntemiyle aynıdır.

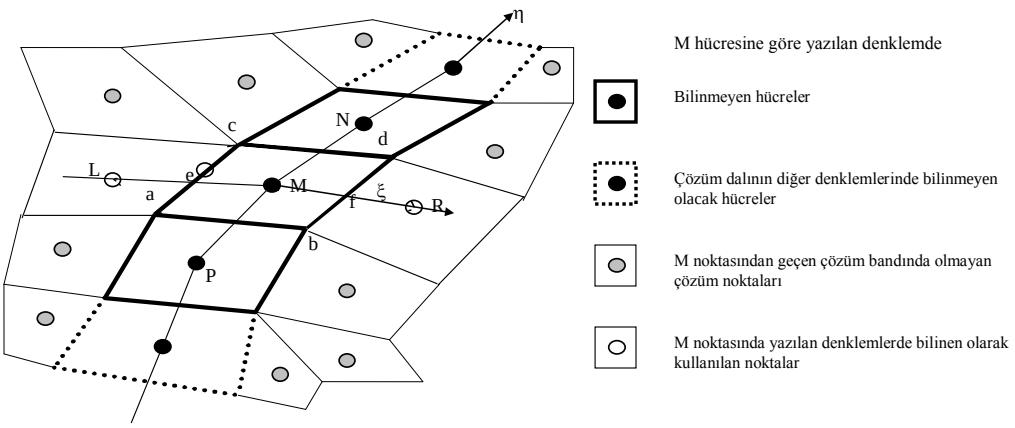
Ancak bu yöntemin yapısal olmayan ağlarda uygulaması problemli olacaktır. Çünkü hücre yönlerinin belirlenmesi sorunlu olmaktadır. İkincil yön için gerekli noktalar interpolasyonla elde edilebilir. Bu belirsizlikler nedeniyle bu yöntemin yapısal olmayan ağlara uygun olmadığını söylenebilir. Fakat klasik SFY 'ne oldukça esnek bir yapı kazandıracağı değerlendirilmektedir. Yapısal olmayan ağlar için kullanımının sorunlu görülmesi nedeniyle bu yöntem de bu çalışma kapsamına alınmamıştır. Fakat çok bloklu yapısal çözüm ağlarında DYKF yöntemine kıyasla bazı artıları olacağı değerlendirilmektedir. Bloklara ayırma, bloklar arası eşleştirme sınır şartı olmaması hem kullanım kolaylığı hem de yakınsamada avantajlar getirecektir.

2.5.2.3 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Fark Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi

Klasik "Sonlu Fark" yöntemleri genellikle çözüm noktaları hücre kenar noktaları olacak şekilde uygulanmaktadır. Nitekim buna uygun DAHYKF çeşitlemelerine yukarıda değinilmiştir. Bu kısımda ise klasik SFY 'den farklı olarak hücre merkezi esas alınmıştır. Önerilen bu yöntemin çözüm noktaları ve çözüm bantları Şekil 2.8 'de gösterilmektedir. Bu yöntemde de DYKY yönteminin ayrıklaştırma sistemine benzer bir formülasyon kullanılmaktadır. (2.25) bağıntıları bu yönteme göre düzenlenirse

$$\left(\frac{Q\ \Delta t}{4}-\frac{\gamma\ \Delta t}{2}\right)u_P^{k+1/2}+\left(1+\gamma\ \Delta t\right)u_M^{k+1/2}-\left(\frac{Q\ \Delta t}{4}+\frac{\gamma\ \Delta t}{2}\right)u_N^{k+1/2}=\left(\frac{\alpha\ \Delta t}{2}-\frac{P\ \Delta t}{4}\right)u_L^k$$
$$+\left(1-\alpha\ \Delta t\right)\cdot u_M^k+\left(\frac{P\ \Delta t}{4}+\frac{\alpha\ \Delta t}{2}\right)u_R^k-\frac{\beta\ \Delta t}{4}\left[u_d^k-u_b^k-u_c^k+u_a^k\right] \quad (2.28)$$

elde edilebilir. Her hücreden iki çözüm bandı geçtiği için her formülasyonda yarım zaman adımı kullanılmaktadır. Böylece tüm çalışma bandları işlendikten sonra tam zaman adımı doğal olarak tamamlanmaktadır.



Şekil 2.8 Hücre merkezi esaslı, SF ayrıklaştırmalı DYKF yöntemi

Bu yöntem SFY kullanan yapısal olmayan ağları da desteklemeye en uygun yöntem gibi görülmektedir. Yöntemin en iyi özelliği, çözüm için hücre merkezi dışındaki noktaların (köşe noktaları) değerlerine gerek duyulmamasıdır. Bu husus, çözüm sırasında interpolasyon yapılmayacağı için algoritmanın oldukça hızlanması sonucunu yaratmaktadır.

Yöntemin izleyen bölümde izah edilecek olan Sonlu Hacim esaslı DAHYKF yöntemine göre olumsuz yanı ise akı korunumunun zayıf olması ve çözüm kalitesinin ağ kalitesine çok bağlı olmasıdır. İlerleyen bölümlerde inceleneceği gibi sonlu fark ayrıklaştırması kullanan DYKF yöntemi üniform kartezyen ağlar dışında şartlı kararlı olmaktadır. Bu da aynı yapıyı kullanan bu yöntemin yapısal ağlarda dahi şartlı kararlı olacağını göstermektedir. Ayrıca SFY kullanıldığı zaman asılı noktaların desteklenmesi de oldukça zor görünmektedir. Yani, ilerisi için planlanan "asılı noktaların desteklenmesi" anlamında bir geliştirme için uygun değildir. Bu nedenlerden dolayı geliştirme çalışmaları izleyen kısımda anlatılan Hücre Merkezi Esaslı Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı yöntem ile yapılacaktır.

2.5.2.4 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi:

DAHYKF yönteminin olası çeşitlemeleri üzerinde yapılan ön incelemeler bu tez çalışması kapsamında en uygun çeşitlemenin hücre merkezi esaslı ve sonlu hacim ayrıklaştırması kullanan bir yöntem olacağını ortaya koymuştur. Bu kısımda bu yöntemin ayrıntıları ele alınacaktır. Ancak bu ayrıntılara geçmeden önce "Hücre Merkezi Esaslı Sonlu Hacimleri Yöntemi" konusunda bilgi vermek yararlı olacaktır. Bu yöntem aynı zamanda DAHYKF yönteminin karşılaştırılacağı yöntemlerden birisi olarak düşünülmektedir. Ayrıca burada Hücre merkezi esaslı SHY için anlatılacak

olan ayrıklaştırma, açık formülasyon uygulaması ve Sonlu Hacimler, DAHYKF yöntemi için de kullanılacaktır.

2.5.3 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacımlar Yöntemi

Bu çalışmada SHY ayrıklaştırması için çok yaygın olarak bilinen bir hücre merkezli formülasyon kullanılmıştır **(Swanson ve Turkel, 1997)**. Bu formülasyon bir çok araştırmacı tarafından da denenmiştir **(Swanson ve Turkel, 1997; Jameson, 1997; Krist ve diğ., 1998)**. Yapılan kaynak araştırmasında özellikle akışkanlar mekaniği uygulamalarında kapalı formülasyonlu SHY sık kullanılmadığı görülmüştür. Açık formülasyonlu zaman integrasyonu için en yaygın olan çözüm yolu ise Runge-Kutta yöntemidir **(Jameson, 1997; Swanson ve Turkel, 1997)**. Runge-Kutta zaman integrasyonlu yöntem izleyen kısımlarda anlatılmış ve karşılaştırma amacı ile sayısal çözümler alınmıştır. SHY integral formda uygulanan bir yöntemdir. Bu bakımdan (2.1) denklemi bir hücre alanında integre edilirse

$$\int_A \frac{\partial u}{\partial t} dA = \int_A \nabla^2 u dA = \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA \tag{2.29}$$

şeklinde, zamana bağlı ısı yayınımı denkleminin integral formu elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki zamana göre türev integral dışına alınarak ve sağ taraftaki integral teriminin mertebesi de, Green teoremi uygulanmak suretiyle düşürülerek

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A u dA = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds \tag{2.30}$$

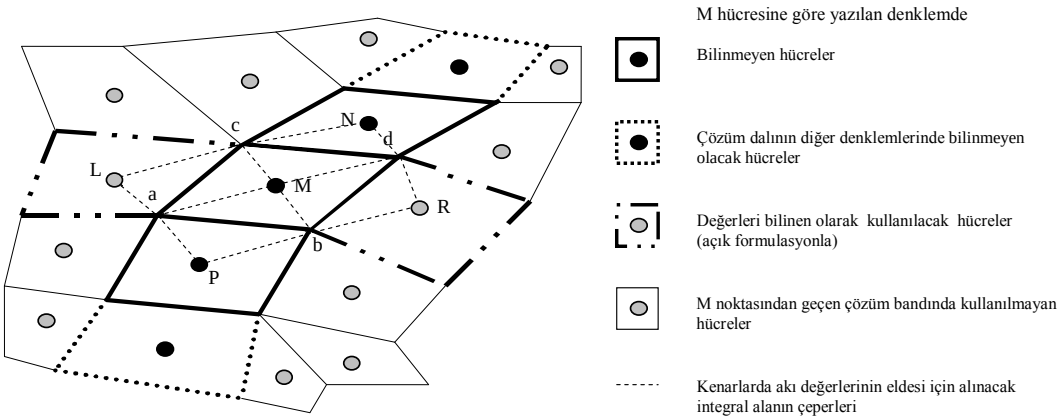
elde edilir. Bu integralde geçen *C* sınırı, Şekil 2.9 'da gösterilen ağ yapısında merkezi *M* ile belirtilen hücre için *abcd* dörtgeninin kenarlarıdır. Sınır eğrisinin normal ve teğet doğrultularındaki türevler arasında 90° lik açı farkı nedeniyle

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \tag{2.31}$$

ilişkisi vardır. Bu eşitlikler (2.29) denkleminde yerine konularak

$$A_{abcd} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \int_{abcd} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{abcd} \frac{\partial u}{\partial y} dx \tag{2.32}$$

elde edilir. Burada $\bar{u} = \frac{1}{A}\int_{abcd} udA$ dır.



Şekil 2.9 Hücre merkezi esaslı, SHY.

(2.31) ifadesinde *abcd* sınırı boyunca belirtilen integrallerin *ab*, *bc*, *cd* ve *da* kenarları boyunca ayrı ayrı alınması söz konusudur. Bu kenarlar üzerinde akıların (değişkenlerin uzay eksenlerine göre türevleri) integralleri alınacaktır. SHY 'de türev hesapları SFY 'nde olduğu gibi değil, integraller yardımıyla gerçekleştirilmektedir. SHY integral ifadeden yola çıkmakta ve alan üzerinde (üç-boyutlu halde hacim üzerinde) integral almakta, yani ortalama değerleri hesaplamaktadır. Bu nedenle akı integrallerini de yine alan integraline, yani alanda ortalamalara dönüştürmek gerekmektedir. Şekil 2.9 'da, kenarlar üzerindeki akı integrallerini almak için tanımlanmış bölgeler görülmektedir. Bu integral bölgeleri hücrenin merkezi bir köşe, komşu hücrenin merkezi karşı köşe ve bu iki komşu hücrenin ortak kenarının uçları da diğer köşeler olmak üzere bir dörtgenden oluşmaktadır. Bu alanlar sayesinde komşu noktaların değerleri de ilişkilendirilerek korunum yasaları daha iyi sağlanmaktır. Örnek olarak *ab* kenarında akı integrallerini almak için *MaPb* dörtgeni kullanılmaktadır.

ab kenarı üzerinde integral hesabını formüle etmek için öncelikle *MaPb* dörtgeni üzerinde akı hesaplarının yapılması gerekmektedir. Akının bu dörtgen üzerindeki integrali Green Teoremi uygulanılarak alan integralinden eğri integraline dönüştürülürse akıların bu alanlardaki ortalama değerleri için

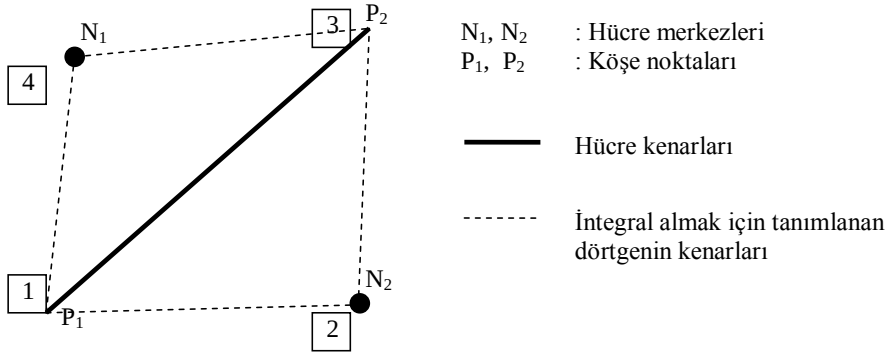
$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{ab} \cdot A_{MaPb} = \int_{A_{MaPb}} \frac{\partial u}{\partial x} dA = \int_{MaPb} u \frac{\partial x}{\partial n} ds = \int_{MaPb} u \frac{\partial y}{\partial s} ds = \int_{MaPb} u \cdot dy$$
$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{ab} \cdot A_{MaPb} = \int_{A_{MaPb}} \frac{\partial u}{\partial y} dA = \int_{MaPb} u \frac{\partial y}{\partial n} ds = -\int_{MaPb} u \frac{\partial x}{\partial s} ds = -\int_{MaPb} u \cdot dx \quad (2.33)$$

ifadelerine gelinir. Buradaki integraller trapez kuralı yardımıyla hesaplanırsa

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{ab} = \frac{1}{A_{MaPb}}\left[\frac{(u_M + u_a)}{2}\Delta y_{Ma} + \frac{(u_a + u_P)}{2}\Delta y_{aP} + \frac{(u_P + u_b)}{2}\Delta y_{Pb} + \frac{(u_b + u_M)}{2}\Delta y_{bM}\right]$$
$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{ab} = \frac{-1}{A_{MaPb}}\left[\frac{(u_M + u_a)}{2}\Delta x_{Ma} + \frac{(u_a + u_P)}{2}\Delta x_{aP} + \frac{(u_P + u_b)}{2}\Delta x_{Pb} + \frac{(u_b + u_M)}{2}\Delta x_{bM}\right] \quad (2.34)$$

elde edilir. Yukarıdaki ortalama değerler, izleyen kısımlarda kolaylık bakımında üstü çizgili olarak gösterilmeyecektir.

Çok uzun karmaşık denklemlerin bilgisayar programlamasına uygun olmaması nedeniyle sistematik bir yaklaşım yaparak denklemleri küçük parçalar halinde ve genel bir formda yazmak yararlı olacaktır. Genel formda kenar temelli bir formülasyonun bu çalışma için en uygun yapıyı oluşturacağı değerlendirilmekte olup, Şekil 2.10 'da bu yapının elemanları gösterilmektedir.



Şekil 2.10 Genel formda kenar esaslı formülasyon için oluşturulmuş yapı

P_1P_2 kenarındaki akı integrali bu yapıya göre yazılırsa

$$I_{P_1P_2} = \int_{P_1P_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{P_1P_2} \frac{\partial u}{\partial y} dx = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_1P_2} \Delta y_{P_1P_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_1P_2} \Delta x_{P_1P_2} \quad (2.35)$$

elde edilir. Akının diferansiyel açılımı için verilen (2.34) denklemi yeni formata göre düzenlenirse

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_1P_2} = \frac{1}{2A_{P_1P_2}}\left[\left(u_{N_1}+u_{P_1}\right)\Delta y_{N_1P_1}+\left(u_{P_1}+u_{N_2}\right)\Delta y_{P_1N_2}+\left(u_{N_2}+u_{P_2}\right)\Delta y_{N_2P_2}+\left(u_{P_2}+u_{N_1}\right)\Delta y_{P_2N_1}\right]$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_1P_2} = \frac{1}{2A_{P_1P_2}}\left[\left(u_{N_1}+u_{P_1}\right)\Delta x_{N_1P_1}+\left(u_{P_1}+u_{N_2}\right)\Delta x_{P_1N_2}+\left(u_{N_2}+u_{P_2}\right)\Delta x_{N_2P_2}+\left(u_{P_2}+u_{N_1}\right)\Delta x_{P_2N_1}\right] \quad (2.36)$$

şeklini alır. Bu durumda (2.35) denklemi yeniden düzenlenerek,

$$I_{P_1P_2} = L_{N_1}u_{N_1}+L_{N_2}u_{N_2}+L_{P_1}u_{P_1}+L_{P_2}u_{P_2} \quad (2.37)$$

elde edilir. Buradaki L büyüklükleri sadece ağ geometrisine bağlı olan sabit değerlere sahip integral çarpanlarıdır. Değerleri (2.36) denkleminden

$$L_{N_1} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_2N_1}+\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_1P_1}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_1P_1}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_2N_1}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}}$$
$$L_{N_2} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_1N_2}+\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_2P_2}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_2P_2}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_1N_2}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}}$$
$$L_{P_1} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_1N_2}+\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_1P_1}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_1P_1}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_1N_2}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \quad (2.38)$$
$$L_{P_2} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_2N_1}+\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_2P_2}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_2P_2}+\Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_2N_1}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}}$$

şeklinde bir kez elde edilir ve işlemler boyunca saklanarak kullanılır.

Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi işlemlerde hücre köşe noktalarındaki değerler de kullanılmaktadır. Bu nedenle her çözüm adımında köşe noktalarındaki değerlerin interpolasyon ile yenilenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada interpolasyonlar için önce, basitliği ve algoritma yapısına uygunluğu nedeniyle "ters uzaklık (inverse distance)" yöntemi düşünülmüş olmakla birlikte, daha basit bir yöntem olan "ortalama alma" yönteminden daha yüksek bir performans vermediği görülerek "ortalama alma interpolasyon yöntemi" kullanılması tercih edilmiştir. Köşe noktalarındaki değerler için interpolasyonda, köşenin komşu olduğu tüm hücrelerin merkez noktalarındaki değerler kullanılmaktadır. Okuyucu için alternatif bir yöntem olarak "ters uzaklık interpolasyonu"nun formülasyonu da **(Sasena, 1998)** aşağıda verilmiştir:

$$\phi_a = \left(\sum_{J=1}^{m}\left(\phi_J / {d_{Ja}}^n\right)\right) \Big/ \sum_{I=1}^{m}\left(1/{d_{Ia}}^n\right) \quad (2.39)$$

Burada d_{Ja}, J hücre merkez noktasının a köşe noktasına olan uzaklığı ve m de a noktasına komşu olan hücre sayısıdır. Ayrıca n büyüklüğü bir interpolasyon parametresidir. Bu interpolasyonları yapabilmek için elbette her köşe noktasına komşu olan hücrelerinin bilinmesine ihtiyaç vardır. İlerleyen bölümlerde her noktanın komşu hücrelerinin bilinmesini sağlayan veri yapısından bahsedilecektir.

Programlamanın her hücre için çevrimsel yapısı, öncelikle kenarlar için bir çevrim ve her kenar çevriminde bu kenarı çevreleyen integrasyon dörtgenin noktalarında (Şekil 2.10) bir iç çevrimden oluşmaktadır. Bahsedilen kenarlara ait dörtgenin köşelerini dönen çevrim için (2.37) denklemi düzenlenirse

$$I_{K,P_1P_2} = \sum_{N=1}^{4} L_{K,N} \cdot u_N = \sum_{N=1}^{4} I_{K,N} \tag{2.40}$$

elde edilir. Burada K, hücrelerin kenar numaralarını; N, Şekil 2.10 'daki integrasyon dörtgeninin köşe noktalarını ve $I_{K,N}$ ise K kenarının integrasyon dörtgenin N numaralı köşesinin integral terimini temsil etmektedir. Yöntemin zaman integrasyonu, basitlik nedeniyle ve temel karşılaştırma yöntemi olan DYKF ile aynı yaklaşım uygulanması daha doğru bir karşılaştırma sağlayacağı için ileri farklarla yapılmaktadır.

Böylece (2.30) denkleminin sağ tarafındaki terimlerin integrali tam anlamıyla formüle edildikten sonra, denklemin sol tarafındaki zaman türevi de ileri farklarla ayrıklaştırılırsa Sonlu Hacimlerle ayrıklaştırma formülasyonu

$$A_{abcd} \frac{\left(u_M - u_{old,M}\right)}{\Delta t} = \sum_{K=1}^{4} I_{K,P_1P_2} = \sum_{K=1}^{4} \sum_{N=1}^{4} L_{K,N} \cdot u_N \tag{2.41}$$

şeklinde elde edilir.

2.5.3.1 Sonlu Hacimler Ayrıklaştırması için Sınır Şartları

Çözüm bölgesinin sınırlarındaki değerler için genel olarak Dirichlet tipi veya Neumann tipi sınır şartı uygulanmaktadır.

Dirichlet sınır şartı

Şekil 2.11 'deki örnek ağ yapısında M merkezli hücrenin ab kenarı bir sınır çizgisi olup buradaki Dirichlet tipi sınır şartı $u_a=c_1$, $u_b=c_2$ şeklinde belirtilebilir. Uygulama için ab doğrusu üzerinde akı değerlerinin integrasyonu gerekmektedir. Bu integrasyon

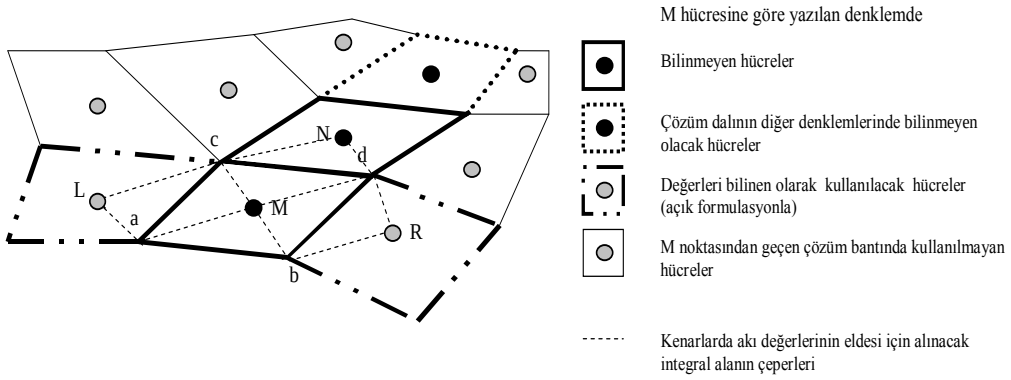
aMb üçgensel alanında yapılmaktadır. (2.32) Denklemindeki integrasyon ifadesi bu üçgen alan için yazılır ve düzenlenirse integrasyon çarpanları

$$L_{P_1} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}{}^2 + \Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2}{}^2 + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_1P_1}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}}$$

$$L_{P_2} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}{}^2 + \Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_2N_1} + \Delta x_{P_1P_2}{}^2 + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_2N_1}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \qquad (2.42)$$

$$L_{N_1} = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_2N_1} + \Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_2N_1}\right)}{2A_{P_1N_1P_2N_2}}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.11 Hücre merkezi esaslı SHY de sınır şartı için integral bölgeleri.

Dirichlet sınır şartı yukarıdaki integrasyon çarpanları kullanılarak ve sınır değerleri sabit tutularak gerçekleşir.

Neuman sınır şartı

Neuman sınır şartı $(\partial u / \partial n)_{P_aP_b} = C$ şeklinde olup, bu sınır şartı SHY'nin doğası gereği hücre kenarı üzerinde otomatik olarak tanımlıdır. Zamana bağlı ısı denkleminin (2.29) bağıntısıyla verilen integral formunda sağ taraf $\int_A (\partial u / \partial n) ds$ dir.

Buna göre Şekil 2.11 deki P_aP_b kenarındaki Neumann sınır şartı değeri akı integrali içerisinde yerine konulursa

$$I_{P_aP_b} = C \cdot \Delta s$$

İfadesi elde edilir. Neumann tipi sınır şartı, sınıra komşu hücrenin sınırla çakışık kenarındaki akı integrasyonu için yukarıdaki eşitlik kullanılınca gerçekleşmiş olacaktır. Bir çok problemde C sabitinin değeri sıfırdır ve bu durumda bu kenar

üzerinde hiç bir işlemin yapılmaması sınır şartının otomatik olarak sağlanması anlamına gelmektedir.

2.5.4 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı, Açık Formülasyonlu RK4 Yöntemi

Sonlu Hacim ayrıklaştırmalı DAHYKF yönteminin yapısal olmayan ağlardaki performansını karşılaştırabilmek için bir yönteme ihtiyaç duyulmuştur. Aynı türde bir ayrıklaştırma kullanan ve zaman integrasyonu olarak da Runge-Kutta açık formulasyonunu uygulayan bir yöntem literatürde oldukça yaygındır **(Jameson, 1997; Swanson ve Turkel, 1997)**. Bu çalışmada kısaca RK4 olarak adlandırılan yöntemin ayrıklaştırma formülleri DAHYKF yöntemiyle tamamen aynı olup, sadece elde edilen denklemlerde bilinmeyen kabulleri farklıdır. Sonuçlar kısmında bu yöntemden elde edilen veriler yer almaktadır. (2.32) denkleminin sağ tarafının Sonlu Hacim ayrıklaştırması ile nasıl hesaplanacağı bir önceki kısımda gösterilmişti. Denklem, sol tarafındaki zaman integrasyonunun Runge-Kutta yöntemiyle hesabı için

$$A\frac{du}{dt} = R(u) \tag{2.43}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada $R(u)$ terimi (2.32) denkleminin sağ tarafını yani akı integrayonunu ve A ise hücrenin alanını temsil etmektedir. Bu ifadeye göre 4 kademeli Runge-Kutta zaman şeması aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &= u^{n} \\
u^{(1)} &= u^{(0)} + \frac{\Delta t}{2A} R(u^{(0)}) \\
u^{(2)} &= u^{(0)} + \frac{\Delta t}{2A} R(u^{(1)}) \\
u^{(3)} &= u^{(0)} + \frac{\Delta t}{A} R(u^{(2)}) \\
u^{(4)} &= u^{(0)} + \frac{\Delta t}{6A}\left[R(u^{(0)}) + R(u^{(1)}) + R(u^{(2)}) + R(u^{(3)})\right] \\
u^{n+1} &= u^{(4)}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Burada $u^{(i)}$ terimleri zaman şemasının i kademesindeki sonuçlarını temsil etmektedir. Şemaya göre her iterasyonda akı integrasyonları yeni değerler için tekrar yapılmaktadır ve 4 iterasyon tamamladıktan sonra akı hesaplarında kullanılan köşe noktalarının değerleri komşu hücrelerinin değerleri kullanılarak interpolasyon ile hesaplanır.

2.5.5 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı İteratif DAHYKF Yöntemi

Bu yöntem DAHYKF yönteminin zamanda iterasyon edilmesi ile elde edilmiştir. Yöntem artık değerinin belli bir değerin (bu çalışmalarda 1e-8) altında olana kadar değerleri yenileyerek tekrarlanması şeklinde çalışmaktadır. Bu yöntem için IDAHYKF kısaltması kullanılmıştır.

2.5.6 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı Nokta Gauss-Seidel Yöntemi için Formülasyon

Nokta Gauss-Seidel yöntemi (**Hoffmann ve Chiang, 2000**) DAHYKF yönteminin açık formülasyonlu halidir denilebilir. Aynen DAHYKF'de olduğu gibi ayrıklaştırmada ki tüm hücre merkezi değişken değerleri bir parantezde toplanmakta ve denklemin sağ tarafındaki bilinenler o adım içinde daha önce çözülmüşse kullanılmaktadır. Buna göre yöntemin formülasyonu aşağıdaki şekilde olacaktır.

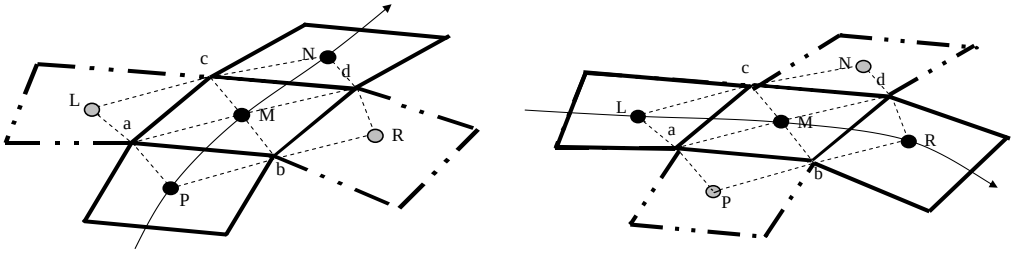
$$u_M = -\left\{ \begin{array}{l} \left(L_P u_P + L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab} + \left(L_R u_R + L_b u_b + L_d u_d\right)_{bd} \\ +\left(L_N u_N + L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca} \\ + \dfrac{2A_{abcd}}{\Delta t} u_{old,M} \end{array} \right\} \Big/ \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca} - \frac{2A_{abcd}}{\Delta t} \right) \qquad (2.45)$$

Buradan sonra Nokta Gauss-Seidel yöntemine literatürde olduğu gibi PGS kısaltması yapılacaktır. Bu yöntem açık formülasyonlu olmasına rağmen şartsız kararlıdır fakat çözüm hassasiyetinin oldukça diğer yöntemlere göre oldukça düşük olacaktır.

2.5.7 Hücre Merkezi Esaslı, Sonlu Hacim Ayrıklaştırmalı DAHYKF Yöntemi için Formülasyon

Yöntem adında da geçtiği gibi önceki kısımlarda anlatılmış bulunan hücre yönlerini temel alan bir çözüm algoritmasına sahiptir. Ayrıklaştırma RK4 yönteminde uygulanan ile aynı olmakla birlikte, bu yöntemdeki formülasyonda sadece denklemin yazıldığı hücrenin değeri değil ama bazı komşu hücrelerin değerleri de bilinmeyen olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlama öyle yapılmaktadır ki her denklemde üç bilinmeyen vardır ve ardışık yazılmış denklemlerdeki bilinmeyenler de ardışık olmalıdır. Bu sayede her çözüm bandı yazıldığında katsayılar matrisi üç-köşegenli olacaktır. Bunu sağlayan da çözüm bantlarının "hücre yönleri"nde olmasıdır. Bu bantlar her hücreden sadece iki kez geçecek ve böylece her hücre her iki yönünde

DYKF yönteminde olduğu gibi ayrı ayrı kapalı formülasyonla hesaplanmış olacaktır. Daha önce anlatılan DAHYKF yöntemleri de bu mantığa göre çalışmaktadır. Bu yöntemin diğerlerinden farkı ayrıklaştırma yönteminin sonlu hacim esaslı olması ve hücre bilinmeyenlerinin hücre merkezinde tanımlanmasıdır.



Şekil 2.12 Yöntemin bir hücre yapısında iki yöndeki çözüm bantları.

(2.40) Denklemi, Şekil 2.12 'ye göre açık bir formda yazılırsa

$$A_{abcd}\frac{\left(u_M - u_{old,M}\right)}{\Delta t/2} = I_{P_aP_b} + I_{P_bP_d} + I_{P_dP_c} + I_{P_cP_a}$$
$$A_{abcd}\frac{\left(u_M - u_{old,M}\right)}{\Delta t/2} = \left(L_M u_M + L_P u_P + L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab} + \left(L_M u_M + L_R u_R + L_b u_b\right. \tag{2.46}$$
$$\left. + L_d u_d \right)_{bd} + \left(L_M u_M + L_N u_N + L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_M u_M + L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca}$$

elde edilir. Bu denklem, Şekil 2.12'da gösterilen birinci şekildeki yönlere göre bilinmeyenler solda, bilinenler sağda olmak üzere düzenlenirse

$$L_P u_P + \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca} - \frac{2A_{abcd}}{\Delta t}\right)\cdot u_M + L_N u_N = -\left\{\left(L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab}\right.$$
$$\left. + \left(L_R u_R + L_b u_b + L_d u_d\right)_{bd} + \left(L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca} + \frac{2A_{abcd}}{\Delta t} u_{old,M}\right\} \tag{2.47}$$

elde edilir. Çözüm bandının diğer yönde olması durumunda ise benzeri ifade

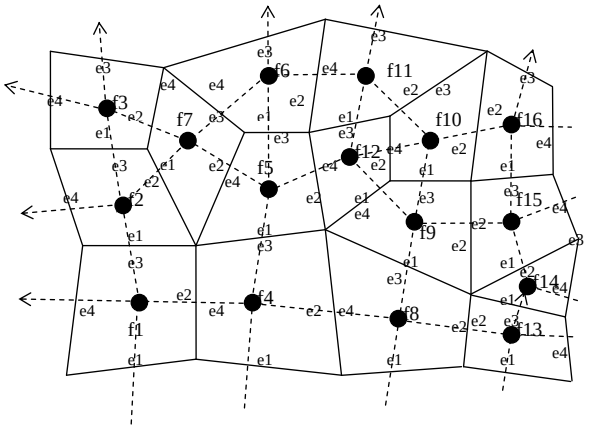
$$L_L u_L + \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca} - \frac{2A_{abcd}}{\Delta t}\right)\cdot u_M + L_R u_R = \left\{\left(L_P u_P + L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab}\right.$$
$$\left. + \left(L_b u_b + L_d u_d\right)_{bd} + \left(L_N u_N + L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca} + \frac{2A_{abcd}}{\Delta t} u_{old,M}\right\} \tag{2.48}$$

şeklinde bulunur. Çözüm algoritmasında, bir hücre üzerindeki çözüm bandının yönüne göre yukarıdaki denklemlerden birisi kullanılır. Çözüm bandı üzerinde kalındığı sürece ardışık denklemler oluşan, üç-köşegenli katsayılar matrisine sahip bir denklem takımı elde edilir. Her çözüm bandından elde edilen denklem takımları standart bir yöntemle çözülür. Her iterasyon sonunda hücre kenar noktalarındaki değerler interpolasyon ile yenilenerek hesaplamalara devam edilir. Yukarıda

anlatılan çözüm algoritmasının programlanabilmesi için klasik veri dizi yapıları yeterli olmamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada uygulanan veri yapısından ve programlamadan bahsetmekte yarar bulunmaktadır.

2.5.8 Programlama ve Veri Yapısı

Tüm formülasyonları yukarıdaki kısımlarda verilen yönteme ait bilgisayar programı algoritmasından ve ayrıca verilerin nasıl düzenlendiğinden bahsetmekte yarar bulunmaktadır. Literatürde çok değişik veri yönetim biçimleri yer almaktadır **(Sedgewick, 1988; Kreher, 1999)**. Bu çalışmadaki yönteme en uygun veri yönetim yapısı hücre esaslı dört kenarlı veri yapısıdır (Cell based quad edge). Veriler esas olarak iki adet tek boyutlu dizi grubunda tutulmaktadır. Bu diziler köşe noktalarını içeren noktalar kümesi grubundan ve hücre bilgilerini saklayan dizi grubundan oluşmaktadır. Hücre grubunda dört kenarın bilgileri bulunmaktadır, bunlar kullanılarak bir çözüm bandının başındaki hücre bilgilerinden bant takip edilebilir. Bunun için ayrıca çözüm bandının başlangıç hücre bilgilerini saklayan bir dizi kullanılmıştır (Header).



Şekil 2.13 Yapısal olmayan bir ağda çözüm bantları.

Şekil 2.13'daki örnek ağ yapısı üzerinde veri yapısı incelenebilir, Tablo 2.1'de bu örnek ağın çözüm bandı takibi görülmektedir. Bu örnekte başlangıç dizisi (1,4,8,13,13,14,15,16) bilgilerini içerir, bu numaralı hücreler çözüm bantlarının başlangıç hücreleridir, hücre veri yapısında takip eden hücre bilgisi bulunmaktadır. Böylece çözüm bantları hücreleri takip ederek ortaya çıkmaktadır. Bu ardışık yapı zincir liste (Linked List) olarak bilinmektedir **(Sedgewick, 1988, Kreher, 1999, Nyhoff ve Leestma, 1997, Metcalf ve Reid, 1998)**. Çözüm bandında sırasıyla hücre denklemleri yazılarak bir üç-köşegenli denklem takımı ortaya çıkar, bu denklem takımı çözülerek diğer banda geçilebilir.

Anlaşılacağı gibi DAHYKF yöntemi iki boyutlu problemler için dörtgen elemanlar kullanılması esası üzerine kurulmuştur. Bununla birlikte yöntem, sıfır uzunluklu kenar yaklaşımı ile üçgensel elemanları da kullanabilmektedir. Üçgen elemanda öncelikle hangi köşenin sıfır kalınlıklı kenar kabul edileceği kararlaştırılır. Bu seçimde en basit kriter en dar açıya sahip köşenin seçilmesidir. Diğer bir yaklaşım ise çözüm bantlarının daha uzun olmasına yarayan köşenin seçilmesidir. Bu iki kriter de bu çalışmada kullanılmıştır. Seçilen sıfır uzunluklu köşede çözüm bandı sonlanacaktır. Bu işlem sınır şartları açısından da yeterlidir. Şekil 2.13 ve Tablo 2.1'de 14. hücre üçgen bir elemandır ve üçgen eleman durumundaki uygulama bu şekil ve tablodan daha iyi anlaşılmaktadır. Çok sayıda üçgen eleman kullanılması halinde sonlandırmadan dolayı çözüm bandı uzunlukları kısalacaktır. Bu nedenle kapalı formülasyonun avantajı azalabilmektedir. Bunun dışında üçgen eleman kullanımının hiçbir sakıncası yoktur. Bu çalışmada yapısal olmayan çözüm ağı olarak üçgen elemanlı ağlardan modifikasyon ile elde edilen dörtgen elemanlı yapısal olmayan ağlar kullanılmaktadır. Bu modifikasyon uygun şekilde ikişer ikişer üçgen elemanları birleştirmekten ibaret olup, bu uygulama literatürde de mevcuttur (**Lee ve Lee, 2003**). Bu ağlar modifikasyon yöntemi dolayısıyla kısmen üçgen elemanlar da bulundurmaktadır ve yöntemin uygulaması sonucunda bu üçgen elemanlar hiçbir sorun yaratmamıştır.

Tablo 2.1 Şekil 2.13'daki örnek ağ yapısına ait çözüm bantları. e ile başlayan terimler kenarları, f ile başlayan ifadeler hücreyi temsil etmektedir

e1,f1,e3 →	e1,f2,e3 →	e1,f3,e3				
e1,f4,e3 →	e1,f5,e3 →	e1,f6,e3				
e1,f8,e3 →	e1,f9,e3 →	e1,f10,e3→	e2,f11,e4→	e2,f6,e4→	e3,f7,e1→	e2,f2,e4
e1,f13,e3→	e1,f14					
e4,f13,e2→	e2,f8,e4→	e2,f4,e4→	e2,f1,e4			
e4,f14,e2→	e1,f15,e3→	e1,f16,e3				
e4,f15,e2→	e2,f9,e4 →	e1,f12,e3→	e1,f11,e3			
e4,f16,e2→	e2,f10,e4→	e2,f12,e4→	e2,f5,e4 →	e2,f7,e4 →	e2,f3,e4	
f16	-					
f11	-					
f6	-					
f3	-					
f2	-					
f1	-					

Şekil 2.13 ve Tablo 2.1'de örnek bir ağda çözüm bantlarının şematik yapısı ve bu yapının veri yönetimi kısmen görülmektedir. Bu veri yapısını programlamada uygulayabilmek için uygulanabilirliği de göz önüne alınarak Fortran 90 **(Metcalf ve Reid, 1998; Nyhoff ve Leestma, 1997)** programlama dili tercih edilmiştir. Veri yönetimi yapısı Fortran 90 formunda yazılmış Tablo 2.2'de verilen başlık modülünde görülebilmektedir.

Tablo 2.2 DAHYKF için Fortran 90 programının veri yapısının tanımlandığı başlık modülü.

```
MODULE HEADER
! KENAR VERİ YAPISI: KENAR AİLESİ
   TYPE EDGES
     INTEGER*4 F_NO
     INTEGER*1 P_NO(2), E_NO, IBC
     REAL AREA,UDN
   END TYPE EDGES
! NOKTA VERİ YAPISI: NOKTA AİLESİ
   TYPE POINTS
     INTEGER*4 FPIXNO
     INTEGER*1 IBC
     REAL  WGFUN, C(2),U,UO
   END TYPE POINTS
! YÜZ VERİ YAPISI: YÜZ AİLESİ
   TYPE FACES
     REAL ::AREA,C(2),U,UO,A(4),AA
     INTEGER*4 P_NO(4)
     TYPE(EDGES),DIMENSION(4) :: EDGE
   END TYPE FACES
! NOKTA DALLARI İNDİSİ : NOKTANIN KOMŞU YÜZLERİ
   TYPE PFACE
     INTEGER*4 NEXT, F_NO
   END TYPE PFACE
   REAL, DIMENSION(:,:), ALLOCATABLE :: A
   REAL, DIMENSION(:)  , ALLOCATABLE :: R,SY
   TYPE (POINTS),DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: P
   TYPE (FACES),DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: F
! HEAD INDEX OF FACE BUNCH, FACES INDEX OF POINT
   INTEGER*4, DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: HIX
   INTEGER*1, DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: HIXE
   TYPE (PFACE), DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: FPIX
 END MODULE HEADER
```

Daha önce de bahsedildiği üzere burada temel iki aile vardır ve bunlar tek boyutlu dizi yapısında olan nokta ve hücre aileleridir. Nokta ailesinin alt aile kümesi yoktur ve bu ailede noktanın koordinatları (C(2)), değişkenin eski ve yeni değerleri (U,UO), sınır şartı tipi (IBC) ve interpolasyonda kullanılan ağırlık fonksiyonu (WGFUN) vardır. İkinci temel dizi hücre ailesidir. Bu aile hücrenin alanı (AREA), hücre merkezini koordinatları (C(2)), yeni ve eski değişken değerleri (U,UO), integrasyon çarpanları (A(4),AA), köşe noktalarının indisleri P_NO(4) ve alt küme kenar ailesinden (EDGE(4)) oluşmaktadır. Hücrenin kenar ve komşuluk bilgilerini saklayan

kenar ailesi ise kenarın komşu yüzünün indisi (F_NO), kenarın komşu yüzdeki kenar numarası (E_NO), kenar noktalarının indisleri (P_NO(2)), kenar sınır şartı tipi (IBC), hücre alanı (AREA) ve Neumann sınır şartı değerinden (UDN) oluşmaktadır. Bahsedilen veri yapısı sayesinde çözüm bantlarının izlenmesi ve bu bantlardan çözüm elde edilmesi kolaylıkla sağlanabilmektedir.

2.6 Sayısal Kararlılık ve Yakınsama Karakterleri

Bu çalışmada önerilen yöntemle karşılaştırmalar için kullanılan yöntemlerin kararlılık davranışlarının bilinmesi, birbirleriyle kararlılık açısından karşılaştırılabilmeleri ve sonuçların yorumlanabilmesi için önemlidir.

RK4 yöntemi açık formulasyonlu bir yapıya sahiptir ve şartlı kararlı olduğu yaygın olarak bilinmektedir. Nitekim bir çok temel sayısal analiz kitabında şartlı kararlı olduğu belirtilmiş ve kararlılık analizleri verilmiştir **(Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson, 1984).**

DYKF yöntemi bir çok temel sayısal analiz kitabına girmiş olup, bir çok yayında ayrıca üniform kartezyen ağ yapısı için kararlılık analizleri de yer almaktadır **(Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson, 1984; Douglas, 1956a; Douglas, 1956b; Abarbanel ve diğ., 1986).** Bu analizler uniform kartezyen ağ yapısı için yöntemin şartsız kararlı olduğu ispatlanmaktadır. Fakat yöntemin eğrisel koordinat sistemindeki kararlılık analizi çok az yayında yapılmıştır **(Widlund,1967; Abrashin ve Dzyuba,1994).** Bu konudaki mevcut yayınların bakış açıları daha çok matematiksel olup, DAHYKF yöntem için yapılacak olan kararlılık analizine uyumlu olması açısından DYKF yönteminin kararlılık analizinin bu çalışmada bir kez daha yapılması uygun görülmüştür. Ayrıca bu sayede kararlılık davranışları da matematiksel olarak yorumlanabilmiştir.

2.6.1 DYKF Yönteminin Sayısal Kararlılık Analizi

DAHYKF yöntemi ayrık pertürbasyon kararlılık analizi ile (**Hoffmann ve Chiang, 2000**) inceleneceği için DYKF yönteminin kararlılık analizi de bu yöntem ile yapılmıştır. (2.6) Denkleminde $u_{i,j}^{k+1/2}$ ve $u_{i,j}^{k}$ terimlerine hata terimleri eklenir ve kendinden çıkarılırsa

$$-(2d_x+1)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}=(2d_y-1)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k}\rightarrow\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}{\varepsilon_{i,j}^{k}}=\frac{(1-2d_y)}{(1+2d_x)}=\frac{1-\Delta t/\Delta y}{1+\Delta t/\Delta x} \tag{2.49}$$

ve aynı yaklaşım y yarım adımı için de uygulanırsa benzeri şekilde

$$-(2d_y+1)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1}=(2d_x-1)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}\rightarrow\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1}}{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}=\frac{(1-2d_x)}{(1+2d_y)}=\frac{1-\Delta t/\Delta x}{1+\Delta t/\Delta y} \tag{2.50}$$

elde edilir. DYKF yöntemi iki adımdan oluştuğu için iki adımın da kararlılık şartlarına uyması gerekmektedir. Bu durumda kararlılık şartı aşağıdaki gibi olur:

$$\left|\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}{\varepsilon_{i,j}^{k}}\right|\le 1\quad ve\quad \left|\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1}}{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}\right|\le 1 \tag{2.51}$$

Bu şartın her zaman sağlanabilmesi, yani yöntemin şartsız kararlı olabilmesi için $\Delta x=\Delta y$ olması gerekmektedir. Buna göre yöntem kartezyen koordinatlarda hücre yükseklik ve genişliklerinin eşit ve uniform olması halinde şartsız kararlıdır.

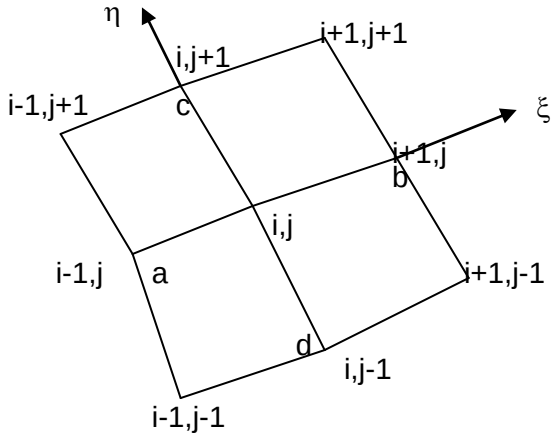
Yöntemin şartsız kararlılığının kartezyen ağlarda bile uniformluk şartına bağlı olması eğrisel koordinatlarda da bu analizin yapılması ihtiyacını pekiştirmektedir. Yukarıdaki uygulama DYKF yönteminin eğrisel koordinatlarda ayrıklaştırılmış ifadelerini içeren (2.24) ve (2.25) bağıntıları için uygulanırsa

$$\begin{aligned}(1+\alpha\cdot\Delta t)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}&=(1-\gamma\cdot\Delta t)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k}\rightarrow\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}{\varepsilon_{i,j}^{k}}=\frac{(1-\gamma\cdot\Delta t)}{(1+\alpha\cdot\Delta t)}\\(1+\gamma\cdot\Delta t)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1}&=(1-\alpha\cdot\Delta t)\cdot\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}\rightarrow\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1}}{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}=\frac{(1-\alpha\cdot\Delta t)}{(1+\gamma\cdot\Delta t)}\end{aligned} \tag{2.52}$$

ifadeleri elde edilir. (2.22) denklemlerinden görüldüğü gibi α, γ pozitif büyüklüklerdir. Buna göre (2.51) denklemindeki yakınsama şartları ancak $\alpha=\gamma$ olduğunda her zaman doğru olacaktır. Yani yöntem ancak bu durumda şartsız kararlı olacak, diğer durumlarda ise şartlı kararlı olacaktır. $\alpha=\gamma$ eşitliğini geometrik olarak yorumlamak için Şekil 2.1'deki *(i,j)* noktasının metrik değerleri hesaplanırsa ($\Delta\xi=\Delta\eta=1$ kabul edilmektedir)

$$
\begin{aligned}
&x_\xi = x_{i-1,j} - x_{i+1,j} \ , \qquad x_\eta = x_{i,j-1} - x_{i,j+1} \\
&y_\xi = y_{i-1,j} - y_{i+1,j} \ , \qquad y_\eta = y_{i,j-1} - y_{i,j+1} \\
&\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 = \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right)^2 + \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right)^2 = l_{cd}^2 \\
&\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 = \left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)^2 = l_{ab}^2
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

ifadeleri elde edilir. Burada l_{ab}, ve l_{cd} büyüklükleri sırasıyla ab ve cd arasındaki uzaklıklardır. Yukarıdaki ifadeler sonucunda algoritmanın şartsız kararlı olması için çözüm ağlarının her iki doğrultudaki uzunluklarının eşit olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Bu şartın tüm ağ noktalarında gerçekleşebilmesi için açıların da 90° olması gerekecektir. Bu şartlar fiziksel düzlem ve hesaplama düzlemi arasında konform bir dönüşümün olması gerektiğini hatırlatmaktadır. Konform dönüşüm şartı, dönüşümde tekillikler olmaması, yani dönüştürülen her bir noktanın dönüşüm sonucunda bir tek nokta ile eşleşmesi ve dönüşümün Cauchy-Riemann şartlarına uymasıdır **(Needham, 1997).**



Şekil 2.14 Eğrisel koordinatlı bir çözüm ağı parçasının indisleri.

Bir çözüm ağının tekillik göstermemesi, yani fiziksel düzlemdeki her bir ağ noktasının sayısal düzlemdeki bir nokta ile eşleşmesi, özel durumlar dışında doğal bir şarttır. Cauchy-Riemann şartları ise aşağıdaki gibidir.

$$x_\xi = y_\eta \quad , \quad x_\eta = -y_\xi \tag{2.54}$$

Yukarıdaki şartlar (2.55) bağıntılarındaki α eşitliğine uygulanırsa

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 = (-y_\xi)^2 + x_\xi^2 = \gamma \tag{2.55}$$

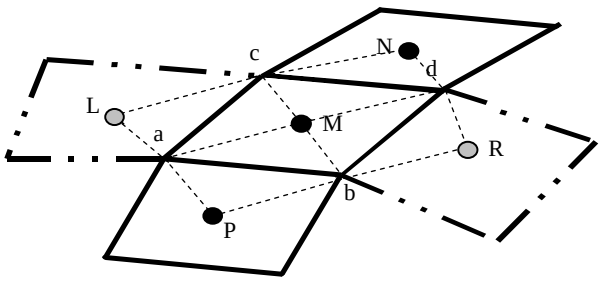
elde edilir. Bu ifadelerden DYKF yönteminin şartsız kararlı olabilmesi için eğrisel koordinat sistemine dönüşümün konform olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Bunun geometrik anlamı, $\Delta\xi=\Delta\eta=1$ alınması durumunda, bütün açıların 90° olması ve her çözüm ağı hücresinin ξ *ve* η yön uzunluklarının eşit olmasıdır. Diğer bir deyişle DYKF yönteminin şartsız kararlılık şartı çözüm ağının her hücresinin bir kare olmasıdır. Yöntemlerin kararlılıkları yanında, Δt nin büyümesi halindeki yakınsama karakterlerinin de matematiksel olarak incelenmesi gerekmektedir. Şartlı kararlı durumda belli bir Δt değerinden sonra yöntem ıraksak olacaktır. Burada DYKF yönteminin en avantajlı olacağı şartsız kararlı haldeki ($\alpha=\beta$) durumu incelenmektedir. Δt sonsuza giderken yakınsama kriterinin limiti alınırsa

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1}}{\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}}=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{\left(1-\alpha\cdot\Delta t\right)}{\left(1+\alpha\cdot\Delta t\right)}=\frac{-\alpha}{\alpha}=-1 \qquad (2.56)$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu ifade Δt büyüdükçe yöntemin zayıf bir yakınsama karakterine (nötr kararlı) ulaşacağını göstermektedir. Ayrıca kapalı bir formülasyonun genel olarak Δt büyüdükçe daha hızlı yakınsadığı bilinmektedir. Bu iki durum birleştirildiğinde, Δt artırıldığında önce yakınsamanın artacağı ve daha sonra yöntemin kararlılığının zayıflaması nedeniyle yakınsamanın tekrar azalacağı söylenebilir ki uygulama sonuçları bu savı doğrulamaktadır.

2.6.2 DAHYKF Yönteminin Sayısal Kararlılık Analizi

Önerilen DAHYKF yöntemi yapısal olmayan çözüm ağlarını da kullanabildiğinden kararlılık analizi için bu yapıya uygunluğu nedeniyle ayrık pertürbasyon yönteminin **(Hoffmann ve Chiang, 2000)** uygun olacağı değerlendirilmiştir. Kararlılık analizini yapmadan önce temel denklemin Şekil 2.15 deki örnek hücre üzerindeki değişkenler cinsinden yazılması gerekmektedir.



Şekil 2.15 Bir hücrenin, komşuları, kenarları ve integrasyon için tanımlanmış alanları.

(2.46) Denkleminde ayrık pertürbasyon kararlılık analizi için u_M ve $u_{old,M}$ terimlerine hata terimleri eklenmesi gerekmektedir. Fakat bunu yapmadan önce bu değişkenler ayrı ayrı yazılırsa

$$A_{abcd}\frac{\left(u_M - u_{old,M}\right)}{\Delta t / 2} = \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca}\right)\cdot u_M + \left(L_P u_P + L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab} + \left(L_R u_R + L_b u_b + L_d u_d\right)_{bd} + \left(L_N u_N + L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca} \tag{2.57}$$

Denklemi elde edilir, bu denklemde u_M ve $u_{old,M}$ terimlerine hata terimleri eklenerek tekrar yazılırsa;

$$A_{abcd}\frac{\left[\left\{u_M + \varepsilon_M\right\} - \left\{u_{old,M} + \varepsilon_{old,M}\right\}\right]}{\Delta t / 2} = \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca}\right)\cdot\left\{u_M + \varepsilon_M\right\} + \left(L_P u_P + L_a u_a + L_b u_b\right)_{ab} + \left(L_R u_R + L_b u_b + L_d u_d\right)_{bd} + \left(L_N u_N + L_d u_d + L_c u_c\right)_{dc} + \left(L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a\right)_{ca} \tag{2.58}$$

ve iki denklem birbirinden çıkarılırsa

$$A_{abcd}\frac{\left(\varepsilon_M - \varepsilon_{old,M}\right)}{\Delta t / 2} = \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca}\right)\cdot\varepsilon_M = \varepsilon_M\sum_{k=1}^{4} L_{M,k} \tag{2.59}$$

elde edilir. Kararlılık analizi yapmak için yukarıdaki denklemden yararlanarak hata teriminin büyüyüp büyümediği öğrenilebilir. Bu amaçla denklem düzenlenirse

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right)\varepsilon_M = \varepsilon_{old,M}$$

veya

$$\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{old,M}} = 1\Big/\left(1 - \frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right) \tag{2.60}$$

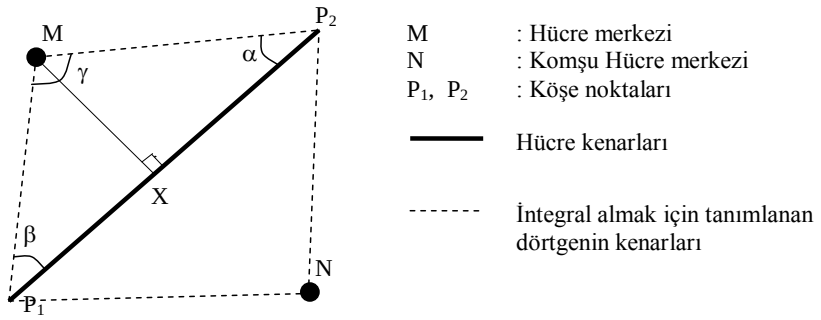
ifadesi elde edilir. Kararlılık şartı hata oranlarının mutlak değerinin bir önceki değerinin altında olmasıdır yani çözülen yeni hata terimi eskisinden büyük olmamalıdır. Bu kararlılık şartı yazılıp düzenlenirse;

$$\left|\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{old,M}}\right| = \left|1\Big/\left(1 - \frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right)\right| \le 1$$
$$\left|1 - \frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right| \ge 1 \tag{2.61}$$

bulunur. Bu ifadeler mutlak değerlerinden kurtarılırsa;

$$\left(1-\frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4}L_{M,k}\right)\geq 1 \quad veya \quad \left(1-\frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4}L_{M,k}\right)\leq -1 \quad \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4}L_{M,k}\right)\leq 0 \qquad veya \quad \left(\frac{\Delta t}{2\cdot A_{abcd}}\sum_{k=1}^{4}L_{M,k}\right)\geq 2 \tag{2.62}$$

şartları elde edilir. Denklemde Δt ve A_{abcd} terimlerinin pozitif olduğu bilinmektedir. Bu nedenle u_M değişkeninin çarpanları olan $L_{M,k}$ terimlerini incelemek gerekir. Bu terim hücre geometrisiyle ilgili bir çarpandır. Şekil 2.16'deki gibi bir kenar üzerinde genelleme yapılabilirse toplamda da bir sonuca varılabilir.



Şekil 2.16 Hücre kenarlarının ve integrasyon için tanımlanan dörtgenin kararlılık analizinde gerekli büyüklükler ile şematik gösterimi.

(2.37) Denkleminde L_M çarpanı yukarıdaki şekildeki indislere göre düzenlenirse;

$$L_M = \frac{\left(\Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{P_2M} + \Delta y_{P_1P_2}\Delta y_{MP_1} + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{MP_1} + \Delta x_{P_1P_2}\Delta x_{P_2M}\right)}{2A_{P_1MP_2N}} \tag{2.63}$$

Yukarıdaki terimler eşitliğin işaretini anlamak üzere düzenlenirse,

$$L_M = \frac{\left\{\Delta y_{P_1P_2}\left(\Delta y_{P_2M} + \Delta y_{MP_1}\right) + \Delta x_{P_1P_2}\left(\Delta x_{MP_1} + \Delta x_{P_2M}\right)\right\}}{2A_{P_1MP_2N}}$$
$$L_M = \frac{\left\{\Delta y_{P_1P_2}\left(y_M - y_{P_2} + y_{P_1} - y_M\right) + \Delta x_{P_1P_2}\left(x_{P_1} - x_M + x_M - x_{P_2}\right)\right\}}{2A_{P_1MP_2N}} = -\frac{\Delta y_{P_1P_2}^2 + \Delta x_{P_1P_2}^2}{2A_{P_1MP_2N}} \tag{2.64}$$

ifadesi elde edilir. Buradan L_M değerlerinin negatif olduğu sonucu çıkar. Ayrıca kararlılık ifadesindeki diğer uzunluk ve alan büyüklükleri de pozitif değerlere sahiptir. Bunun sonucu olarak hata oranları da her zaman birden küçük olacaktır. Bu yargı denklemler ile şöyle ifade edilir.

$$L_M \le 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4} L_{M,k} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\Delta t}{2 \cdot A_{abcd}} \sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right) \ge 1 \tag{2.65}$$

Sonuç olarak şartsız kararlılık ispatlanmakta olup aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left| \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{old,M}} \right| \le 1 \tag{2.66}$$

DAHYKF yönteminin şartsız kararlı olduğu bulunmuş olmakla birlikte, Δt büyüdükçe kararlılığın ne duruma geleceği de incelenmelidir. Bu amaçla, Δt sonsuza giderken kararlılık kriterinin limiti alınırsa

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{old,M}} = \lim_{\Delta t \to \infty} \left[1 \Big/ \left(1 - \frac{\Delta t}{2 \cdot A_{abcd}} \sum_{k=1}^{4} L_{M,k}\right) \right] = \frac{1}{\infty} = 0 \tag{2.67}$$

ifadesi bulunur. Bunun anlamı Δt artıkça yöntemin kararlılığının artacağıdır. Yakınsama karakteri de Δt artıkça arttığına göre, bu artış karakteri kararlılık nedeniyle zayıflamayacaktır. Fakat doğaldır ki yakınsama karakteri Δt arttıkça devamlı artmayacaktır, yöntemin hassasiyet mertebesi (accuracy order) ve sayısal hassasiyet (numerical resolution) bir limit oluşturacaktır. Bu yorum da uygulama sonuçlarından görülmektedir. Sayısal uygulamalarda Δt artıkça yakınsama hızı artmakta ve yüksek bir Δt değerinden sonra hep aynı iterasyon sayısında yakınsama olduğu görülmektedir.

2.6.3 Kararlılık Analiz Sonuçlarının Yorumlanması

DYKF ve DAHYKF yöntemleri için yapılan kararlılık analizi sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- DYKF yöntemi üniform kartezyen çözüm ağlarında ve eğrisel koordinatlardaki çözüm ağlarında konform dönüşüm olduğu hallerde şartsız kararlıdır. Diğer durumlarda şartlı kararlıdır.
- DYKF yönteminin kararlılığı Δt sonsuza yaklaştıkça zayıflar.
- DAHYKF yöntemi her türlü çözüm ağında şartsız kararlıdır.
- DAHYKF yöntemi Δt sonsuza yaklaştıkça kararlılığı güçlenir.

Uygulama sonuçları burada çıkarılan kararlılık analizi sonuçları ile uyum halindedir.

2.7 Çözüm Ağı Üretimi ve Düzgünleştirilmesi

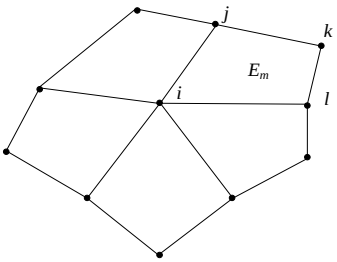
Çözüm ağı üretimi günümüzde başlı başına bir disiplin haline gelmiş **(Thompson ve diğ., 1999)** olup, ana hedef bu olmadığından, bu çalışmada çözüm ağı üretim yöntemlerinden fazlaca bahsedilmeyecektir. Çalışmadaki yapısal ağların üretiminde basit yöntemler kullanılmış ve bunlar fortran programı kullanılarak analitik olarak elde edilmiştir. Yapısal olmayan dörtgen elemanlı çözüm ağı üretimi konusunda bir çok değişik yöntem vardır (**Hwan ve Yang, 1993; Wang, 2000; Hoffmann ve Chiang, 2000; Thompson ve diğ., 1999**). Bu yöntemlerin çoğu da otomatiktir. Fakat çalışmanın temel konusu bu olmadığı için basit ve hazır bir programın seçilmesi tercih edilmiştir. Yapısal olmayan ağ üreticisi olarak kullanımı serbest (public domain) olan MESHGEN programı **(Yu ve diğ., 1999)** kullanılmıştır. Bu program üçgen elemanlı yapısal olmayan ağlar üretebilmektedir. Üçgen elemanlı yapıdan dörtgen elemanlı yapıya dönüşüm için ise bir fortran programı yazılmıştır. Bu program üçgen elemanları ikişer ikişer birleştirerek dörtgen elemanlar elde etmektedir. Birleştirme tekniği (Merging Technique) denilen bu yöntem literatürde de yer almaktadır (**Lee ve Lee, 2003**). Uygulanan yöntemde bazı üçgen elemanlar birleştirilemeden bırakılmaktadır. Yöntem bu elemanları bir kenarı sıfır uzunluklu kenar kabulü ile çözebilmektedir.

Çözümleri düzgünleştirmek için yaygın olarak bilinen Laplacian düzgünleştirme (Laplacian Smoothing) yöntemi (**Zhu ve diğ., 1991**) kullanılmıştır. Yöntem her noktanın pozisyonunu komşu hücrelerin kenarlarını kullanarak komşu hücrelerle oluşan şeklin merkezini hesaplar ve iteratif olarak çözüme devam eder. Çoğunlukla bir kaç iterasyon yeterli olmaktadır.

Şekil 2.17'deki örnek i noktasının Laplasyen düzgünleştirme ile yeni konumunu hesaplamak için kullanılan formülasyon aşağıdaki şekildedir.

$$P_i = \frac{1}{4 \cdot M} \sum_{m=1}^{M} \left(P_j + 2 \cdot P_k + P_l \right) \tag{2.68}$$

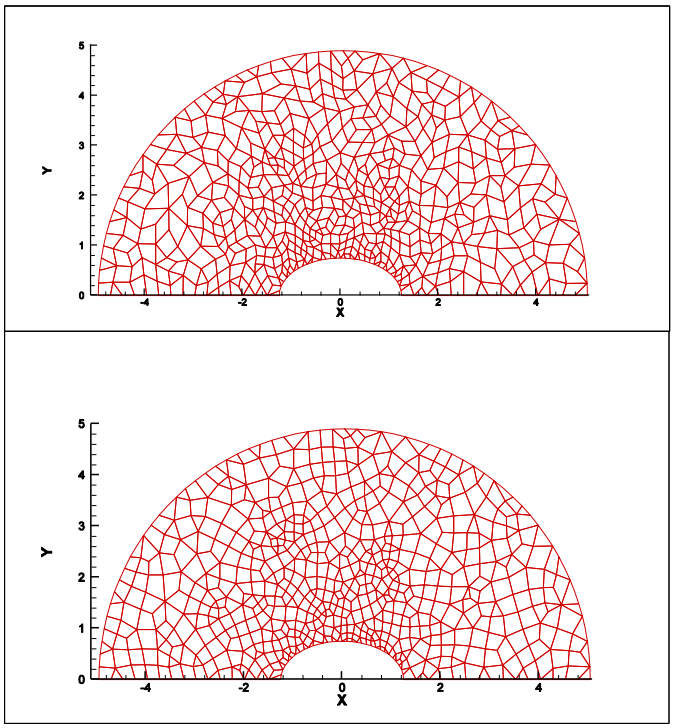
Burada $P=(x,y)$, M i noktası etrafındaki hücre sayısıdır



Şekil 2.17 Düzgünleştirme yöntemi için yapısal olmayan bir ağ parçasında birleşme noktaları.

Bu yöntemle bir kaç iterasyonda iyi sonuç alınmakta olup hiç bir uygulama zorluğu yoktur. Ayrıca çok kısa sürmektedir. Bu nedenle DAHYKF yönteminin bir parçası olarak değerlendirilebilir. Düzgünleştirme işlemi yöntemin kenar noktaların değerlerini basit bir interpolasyon işlemi ile gerçekleştirdiği için yöntemin performansında oldukça etkilidir. Şekil 2.18 de düzgünleştirme farkını gösteren bir grafik verilmiştir. Ayrıca uygulamalarda görüleceği gibi düzgünleştirme yapısal ağlara da uygulanmıştır.

Şekil 2.18'de görüldüğü gibi bu yöntemde arada üçgen elemanlar da kalmaktadır. Üçgen elemanlar iki komşu kenarı üst üste binmiş dörtgen eleman olarak kabul edilmektedir. Programın yapısı böylece üçgen elemanları da kısmen kabul edebilmektedir. Çözüm bantları ise bu sıfır uzunluklu kenar doğrultusunda sonlandırılmaktadır.



Şekil 2.18 Yapısal olmayan üçgen elemanlı ağlardan üretilmiş dörtgen ağlar, (Not: üstteki şekil orijinal ağ yapısını, alttaki ise düzgünleştirilmiş halini göstermektedir)

3. UYGULAMALAR

3.1. Giriş

Önceki bölümde ayrıntıları izah edilen DAHYKF yöntemi kullanılarak, analitik çözümü bilinen üç problem için test çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Test çalışmaları ayrıca DYKF ve RK4 yöntemleri ile tekrarlanarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bunun yanında yöntemin zamana bağlı davranışı incelenmek üzere LGS, PGS ve iteratif DAHYKF yöntemleride “Zamana bağlı yayınım” denklemine uygulanmıştır. Bu bölümde bu test çalışmaları ve elde edilen sonuçlar yer almaktadır.

İlk test çalışmasında daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi ele alınmış olup, çözüm ağı sıklığı, bozuntular ve zaman aralığı etkileri DYKF ve RK4 yöntemleri ile karşılaştırılarak incelenmiştir. İkinci test çalışması basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım çözümlerini içermektedir. Bu çalışmada ayrıca DYKF yöntemi de üç bloklu olarak çözülerek çok blok etkisi de incelenmiştir. Ayrıca RK4 yöntemi ile karşılaştırma yapılırken yapısal olmayan çözüm ağı da kullanılmış, yine bu çalışmada da zaman aralığı ve çözüm ağı kalitesinin çözümlere olan etkisi incelenmiştir. Üçüncü çalışma ise bir kanat profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi için C tipi çözüm ağı uygulamasıdır. Tüm uygulamalar Penthium IV anakartlı ve 2.4 MHz hızındaki bir bilgisayarla gerçekleştirilmiştir. Belirtilen test problemlerini modelleyen denklem aslında akım fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.1)$$

şeklinde bilinen Laplace denklemidir. Ancak test uygulamalarında bu denklem yerine akım fonksiyonu için yazılmış "zamana bağlı yayınım denklemi" çözümlenmiştir. Bekleneceği üzere bu denklem zamanın büyük değerleri için Laplace denkleminin çözümüne yakınsamaktadır. Bu çalışmalarda zaman büyüklüğü sadece iteratif bir parametredir, bu nedenle zaman ve zaman adımının biriminin bir anlamı yoktur ve birimsiz olarak değerlendirilebilir.

Bu çalışmalarda metnin bütünlüğünün bozulmaması açısından ayrıntı grafik ve tabloların eklerde verilmesi yaklaşımı uygulanmıştır.

3.2. Daire Etrafındaki Potansiyel Akım

Birim yarıçaplı bir daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım alanı için akım fonksiyonunun analitik çözümü

$$\psi(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{3.2}$$

şeklinde elde edilebilir **(Yükselen, 1995, Jones, 1975)**. Seçilen bütün (*x,y*) noktaları için akım fonksiyonunun tam (exact) değerini bu bağıntı yardımıyla hesaplamak mümkün olup, böylece sayısal yöntemlerle elde edilen çözümlerin doğruluğu kolaylıkla test edilebilir.

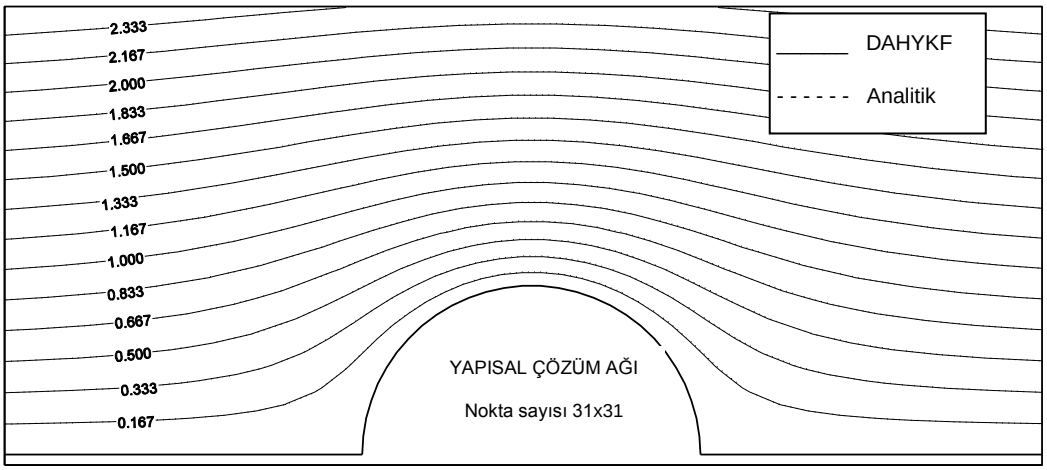
Bu problem sayısal olarak öncelikle tez çalışmasında önerilen Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyon - DAHYKF (Alternating Cell Directions Implicit, ACDI) yöntemi ile çözümlenmiştir. Bu hesaplamalarda Dirichlet tipi sınır şartı kullanılmıştır. Yani sınırlar üzerinde akım fonksiyonun değeri çözümlemelere sınır değerler olarak sokulmuştur.

Sayısal çözümlerde genel olarak seçilen çözüm bölgesi genişliğinin bir etkisi olacağı beklenir. Ancak, daire etrafındaki potansiyel akım problemine ait sayısal çözümlemelerde bu etkiyi ortadan kaldırmak için, seçilen çözüm bölgesinin sınırlarındaki sınır şartları analitik çözümlerden alınmıştır.

DAHYKF yönteminin yapısal çözüm ağlarındaki ve kapalı formülasyondaki performansını değerlendirebilmek için eğrisel koordinat sisteminde yazılmış Değişen Yönlü, Kapalı formülasyon - DYKF (Alternating Direction Implicit, ADI) yöntemi ile çözümlemeler yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yöntemin yapısal olmayan çözüm ağlarındaki performansını değerlendirebilmek için de zaman adımında integrasyonu Runge-Kutta yöntemi ile yapan bir Sonlu Hacimler yöntemi (bu yöntem kısaca RK4 olarak adlandırılmıştır) ile çözümlemeler yapılmış ve yine elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

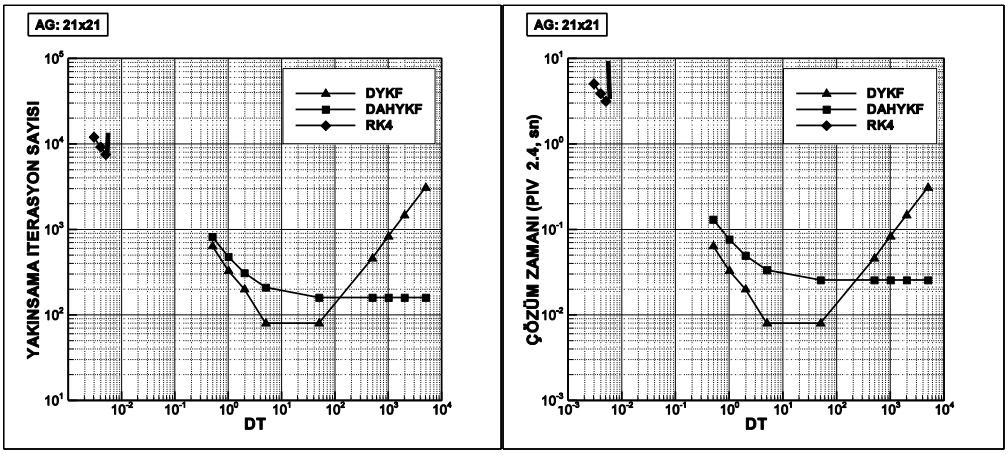
Yapılan tüm çözümlere ait ağ yapıları, yakınsama karakterleri, hatalar, akım fonksiyonu değerleri ve benzeri diğer ayrıntılar karşılaştırmalı grafikler ve tablolar halinde EK.B ’de verilmiştir.

DAHYKF yöntemi ile 31x31 nokta sayılı yapısal çözüm ağı kullanılarak elde edilen akım çizgileri analitik çözümlerle karşılaştırmalı olarak Şekil 3.1’de verilmiştir. Bu şekle göre DAHYKF yöntemi sonuçlarının analitik çözümlerle son derece uyumlu olduğu görülmektedir.

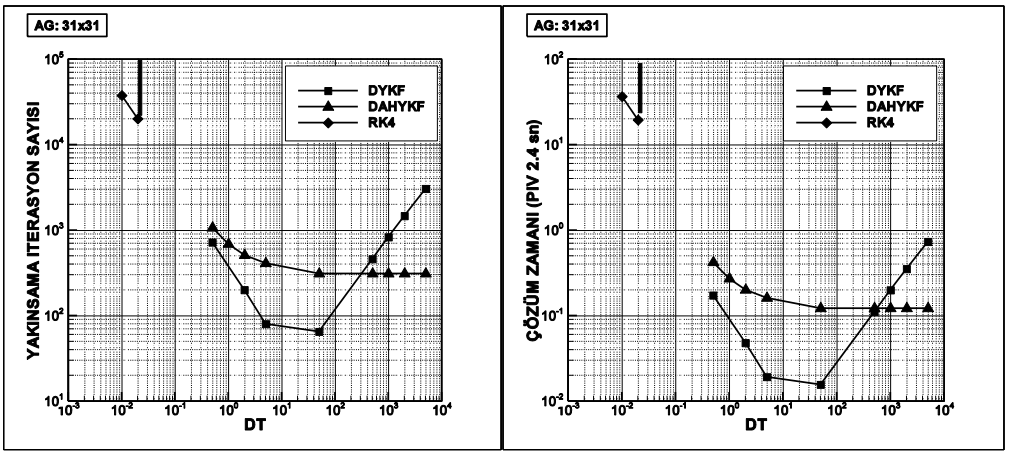


Şekil 3.1 Daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması.

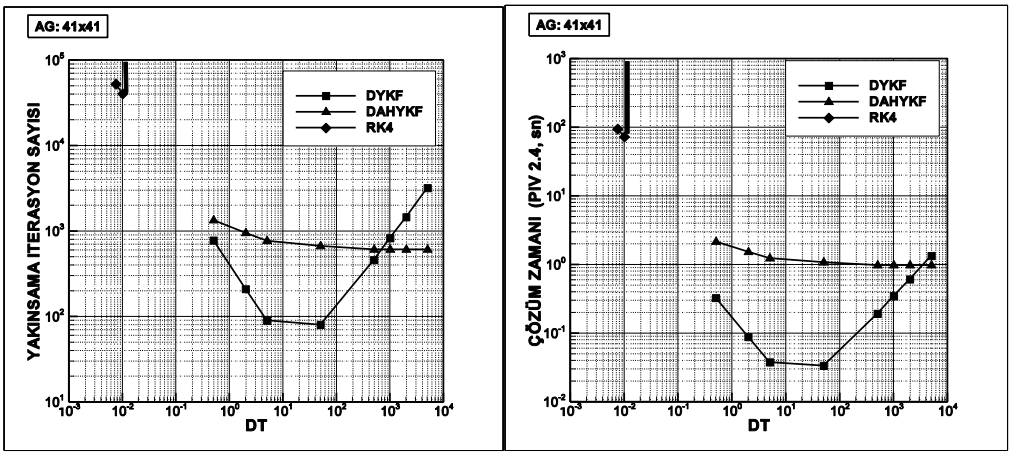
Daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi için aynı çözüm havzasında 21x21, 31x31 ve 41x41 nokta sayısı kullanılarak yukarıda belirtilen üç farklı sayısal yöntemle yapılan hesaplamalara ait yakınsama karakteristikleri ve çözüm süreleri sırasıyla, Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ’de karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.2 Daire etrafındaki problem için 21x21 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.



Şekil 3.3 Daire etrafındaki problem için 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.



Şekil 3.4 Daire etrafındaki problem için 41x41 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.

Öncelikle üç yöntemin yakınsama karakterleri incelenirse; zaman adımları artarken DYKF yönteminde yakınsamanın önce hızlandığı fakat bir optimum değerden sonra yavaşladığı görülmektedir. DAHYKF yönteminde ise aynı şekilde zaman adımı arttıkça yakınsama hızlanmakta ancak tekrar bir yavaşlama görülmemektedir. Yani yüksek zaman adımlarında optimum bir değere oturmakta ve hep aynı kalmaktadır. Ayrıca her iki yöntemin de büyük zaman adımlarında çözüm vermesine bakılarak şartsız kararlı oldukları söylenebilir. Bunların aksine RK4 yöntemi, bilindiği üzere şartlı kararlı bir karakter sergilemektedir. RK4 yönteminin yakınsayabildiği zaman aralığı değerleri diğer yöntemlerden 100~1000 kat daha düşüktür.

Bu sonuçlar nicelik olarak da değerlendirmek istenirse; öncelikle bir iterasyon adımının çözüm süresi bakımından DAHYKF yöntemi DYKF yönteminden yaklaşık 1.5 kat daha uzun, RK4 yönteminin bir iterasyon çözüm süresi ise yaklaşık DYKF

yöntemiyle aynıdır. Aslında DAHYKF yöntemi ile DYKF yöntemi arasında önemli bir hız farkının olmaması beklenmektedir. Çünkü bir iterasyon adımında her iki yöntemde yapılan işlem sayıları birbirlerine denk düzeydedir. Buradaki çözümlemelerde bir fark çıkmasının sebebinin dizi ve değişken yapıları arasındaki fark olduğu düşünülmektedir. DYKF yöntemi çok basit yapısı ile dizileri otomatik şekilde kullanmasına karşılık, DAHYKF yönteminde değişkenler bir indeksleme sistemi ile çağrılmaktadır.

Zaman adımı uzunluklarına göre elde edilen en iyi yakınsama iterasyon sayılarının ağ sıkılığı ile ilişkisi için yapılan karşılaştırmada ise ibre DYKF yönteminden yana gözükmektedir. Çözüm ağı sıklığı değişmesine rağmen DYKF yönteminde hep aynı mertebede bir optimum yakınsama iterasyon sayısı elde edilmektedir. DAHYKF yönteminde çözüm ağı sıklığı arttıkça optimum yakınsama iterasyon sayısı artmaktadır. Bu yöntemde 21x21, 31x31 ve 41x41 nokta sayılı çözüm ağlarında sırası ile yaklaşık 2, 4 ve 5 kat daha fazla iterasyon sayısında yakınsama elde edilmektedir. Bu da bilgisayar çözüm süresini DYKF yöntemine kıyasla oldukça artırmaktadır. Burada DAHYKF yönteminin avantajı ise optimum noktasının bilinmesidir. Çok büyük zaman adımları seçildiğinde DAHYKF yönteminin yakınsama iterasyon sayısının hep optimum olacağı bilinmektedir. DYKF yönteminde ise hangi zaman adımında optimum iterasyon sayısında elde edileceğini önceden kestirmek mümkün olamamaktadır. RK4 yöntemi ise açık formülasyonlu olması nedeniyle şartlı kararlı olduğu için bu karşılaştırmalarda oldukça başarısız çıkmıştır. Bu çözüm ağlarında optimum (yani yakınsak en yüksek zaman adımı) yakınsama iterasyon sayısı DYKF yönteminden sırası ile 50, 250, 500 kat daha fazladır.

Çözücülerin hassasiyeti (hata düzeyi) ise aşağı yukarı aynı mertebede olmakla birlikte DYKF yöntemi yine hep en hassas çözümleri vermektedir. RK4 ve DAHYKF yönteminin ortalama hataları yaklaşık aynıdır. Fakat bu hata değerleri DYKF yöntemininkinden en fazla 1.5 kat daha büyük çıkmaktadır (Bkz.**EK.B)**.

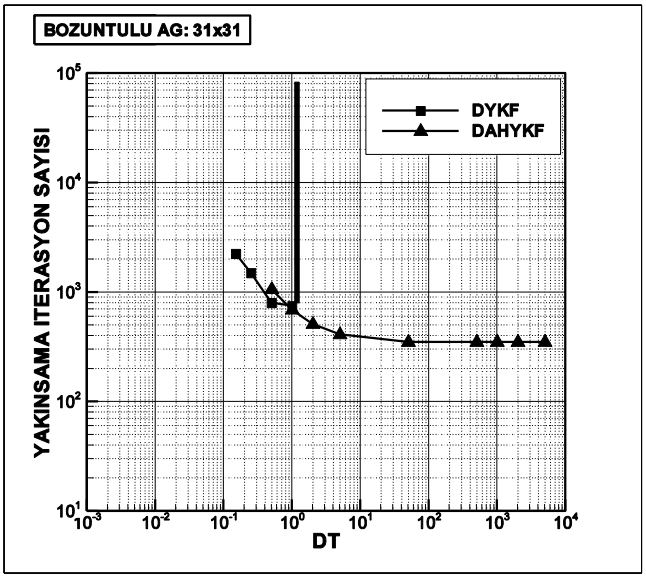
Bu sonuçlardan, özellikle hassasiyet konusunda DYKF yönteminin çok büyük bir fark olmasa da daha iyi bir performans gösterdiği fark edilmektedir. Buna karşılık DAHYKF yönteminin zaman adımı uzunluğu artırıldıkça optimum performansa ulaşması da hayli önemli bir özellik olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca DAHYKF yönteminin ayrıklaştırmasını daha yüksek mertebede yapmak mümkündür (**Cai ve diğ., 2003**). Bunun yanında Sonlu Hacimler ayrıklaştırmasının çözüm ağı kalitesinden daha az etkileneceği düşünülmektedir. Bu düşünceden hareketle 31x31

noktalı yapısal çözüm ağı değişik tipte deformasyonlara uğratılarak çözücülerle tekrar test edilmiştir. Bu deformasyonlar sırası ile bozuntulu, burulmuş ve burulmuş-düzgünleştirilmiş olmak üzere üç tip olarak seçilmiştir. Bozuntulu çözüm ağı, noktaların pozisyonları rastlantısal şekilde küçük oranlarda değiştirilerek elde edilmektedir. Burulmuş çözüm ağları, ortogonal yapıyı bozmak için çözüm ağlarının burulması yoluyla elde edilmektedir. Burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağları ise burulmuş çözüm ağlarına, bir önceki bölümde anlatılan Laplasyen düzgünleştirme yönteminin uygulanmış halidir. Bu çözüm ağı tipini bu test çalışması içine sokmanın sebebi DAHYKF yönteminin özellikle hassasiyet açısından bu tip düzgünleştirmeye hassas olmasıdır. Bu yapıda düzgünleştirme yapılsa dahi burulmuşluk (skewness) hala korunmaktadır. Bu yollarla deforme edilmiş bütün çözüm ağları **EK.B**'de verilmiştir.

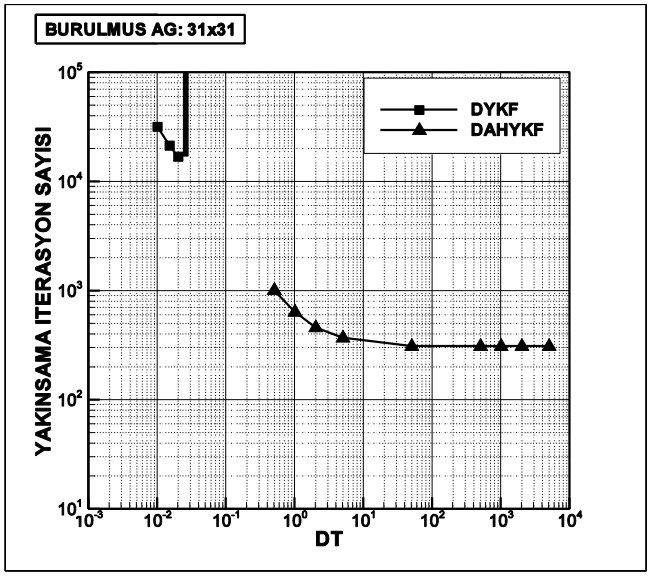
Şekil 3.5'de 31x31 noktalı bozuntulu çözüm ağının DYKF ve DAHYKF yöntemleri ile elde edilmiş çözümlerinin yakınsama karakter ve değerleri görülmektedir. Buradan çıkan sonuç DAHYKF yönteminin yakınsama karakterinin değişmediğidir. Ayrıca yakınsama değerleri açısından normal çözüm ağın sonuçlarından farklı olmadığı gözlenmektedir. Buna karşılık DYKF yöntemi büyük bir performans kaybına uğramış ve şartsız kararlılık yapısı bozulmuştur. DYKF yönteminin 2-boyutlu problemlerde sadece üniform kartezyen ağlarda, ve eğrisel koordinatlarda ise konform dönüşümün sağlandığı durumlarda şartsız kararlı olduğu Bölüm 2'de ispatlanmıştır. Sonlu fark yöntemlerinin metriklere, yani çözüm ağı kalitesine bağımlı olduğu formülasyonlarından da anlaşılmaktadır. DYKF yönteminin avantajı ise hassasiyetinin çok fazla düşmemesidir. Bu örnekle DAHYKF yönteminin bozuntulu çözüm ağı ile yakınsama karakterini kaybetmemekle birlikte hassasiyetini oldukça kaybettiği görülmektedir (Bkz. **EK.B**). Kolay ve hızlı uygulamaya uygun Laplasiyen düzgünleştirme yöntemi kullanıldığında DAHYKF yöntemi optimum hassasiyette çözümler verebilmektedir.

Burulmuş çözüm ağlarının yakınsama karakterleri de Şekil 3.6'da görülebilmektedir. Bu örneğin yakınsama karakteri bir önceki örnekteki gibidir. DAHYKF yöntemi aynı yakınsama karakterini korumuş, DYKF yöntemi ise yine şartlı kararlı bir davranış göstermiş ve ayrıca kararlılık aralığının daralmasından bu yöntemin burulmaya daha hassas olduğu değerlendirilmiştir. Bu örnekte DAHYKF çok büyük bir hassasiyet kaybına uğramıştır. Burulma işleminin çözüm ağının düzgün yapısını (dörtgen yüzeylerin birbirlerine göre dengeli boyutta olması) bozduğu düşünülmektedir,

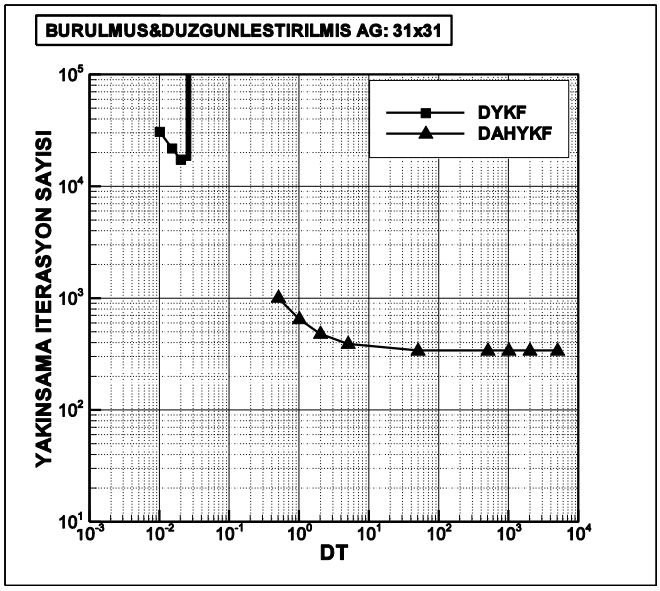
DAHYKF yöntemi interpolasyon kullandığı için düzgün olmayan yapıya karşı hassas olduğu bilinmektedir. Bu düşünce ile burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağında da ayrıca çözümler yapılmıştır, Şekil 3.7'de bu çözümlerin yakınsama karakterleri görülmektedir. Ayrıca Şekil 3.8'de DAHYKF yönteminde burulmuş ve burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağlarının hata büyüklükleri karşılaştırılmaktadır. Görüldüğü gibi burulmuşluk etkisi durmasına rağmen düzgünleştirme hata miktarını oldukça düşürmüştür. Bu çözüm ağındaki düzgünleştirme işleminin DYKF yönteminin performansında hiçbir etki yapmadığı görülmektedir. Buna karşılık DAHYKF yönteminde yakınsama açısından hiçbir şey farketmemiş olmasına rağmen hassasiyet çok fazla artmış, neredeyse normal çözüm ağından daha iyi bir ortalama hata düzeyi vermiştir. Burulmuş ve burulmuş düzgünleştirilmiş çözüm ağlarındaki çözüm ağlarının hata grafikleri Şekil 3.8'de verilmiştir.



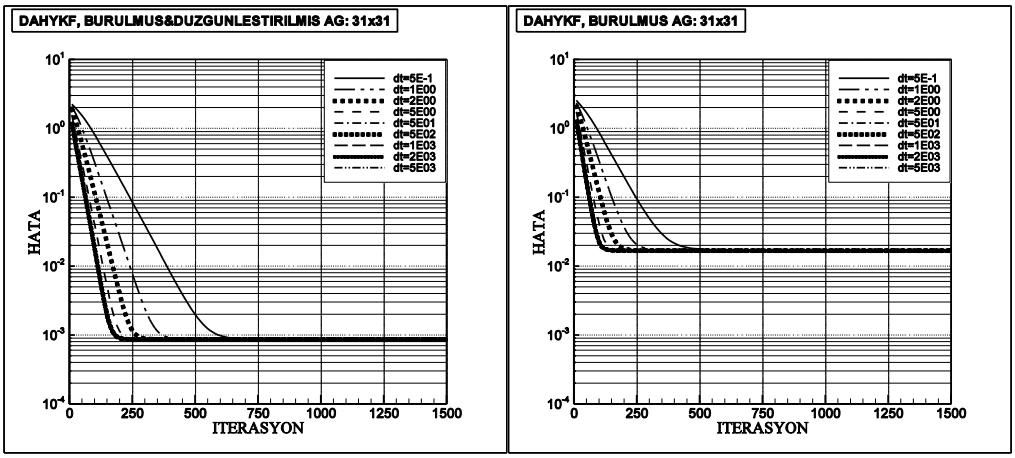
Şekil 3.5 Daire etrafındaki problem için bozuntulu 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.



Şekil 3.6 Daire etrafındaki problem için burulmuş 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.

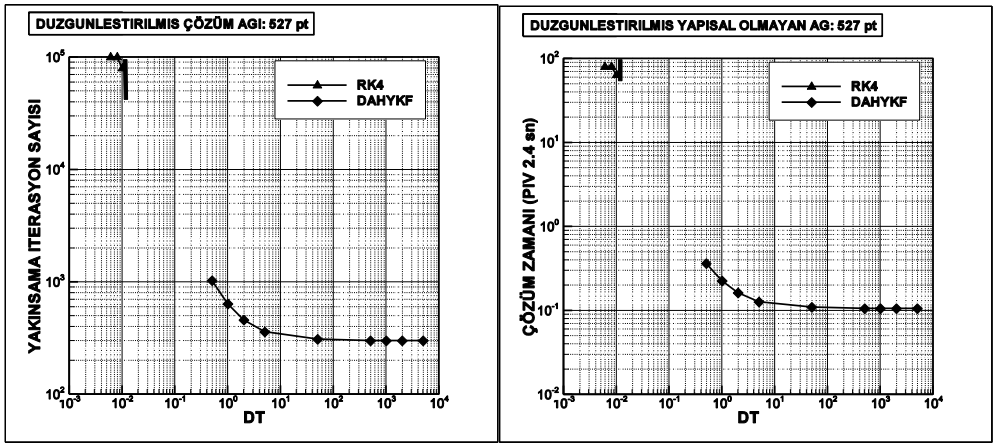


Şekil 3.7 Daire etrafındaki problem için burulmuş-düzgünleştirilmiş 31x31 noktalı yapısal ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.

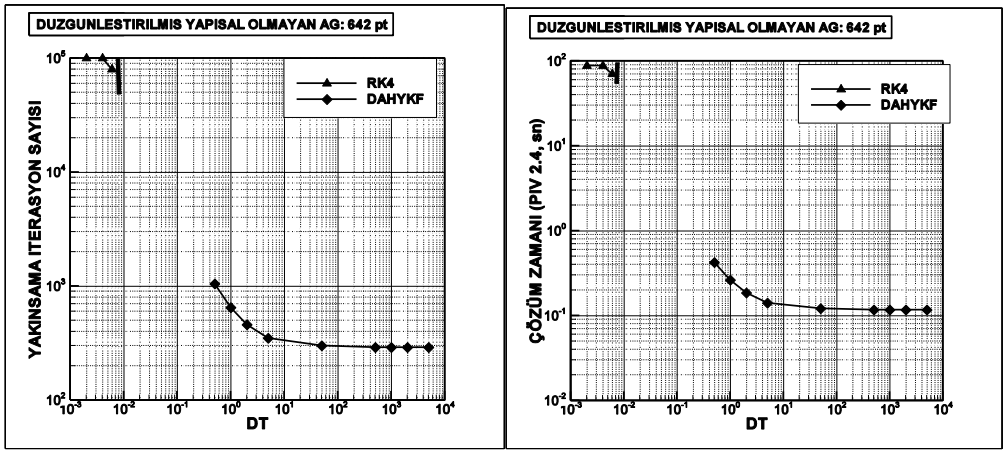


Şekil 3.8 DAHYKF yönteminin burulmuş ve burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağlarında daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım çözümlerinin iterasyon sayısına göre hata grafikleri.

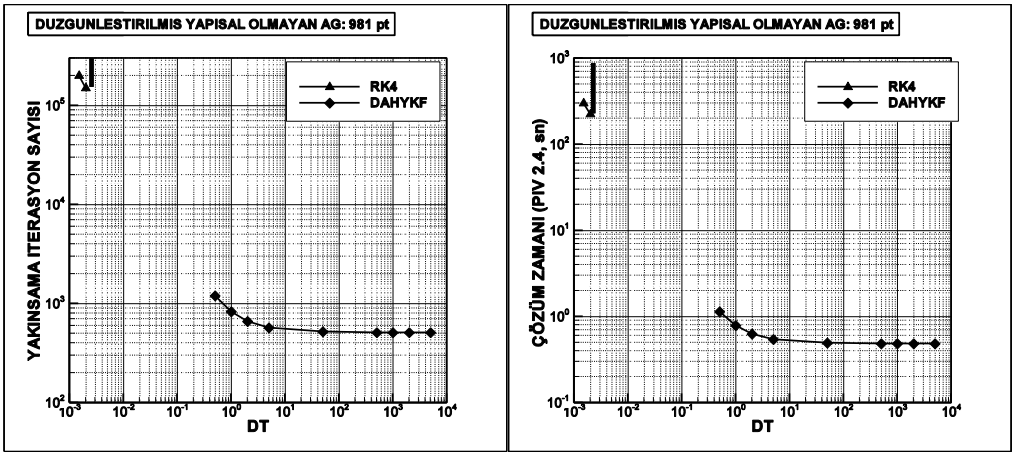
Daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi için düzgünleştirilmiş yapısal olmayan çözüm ağlarında 527, 642 ve 981 nokta kullanılarak, RK4 ve DAHYKF yöntemleri ile çözümlemeler yapılmış olup bu çözümlere ait yakınsama karakterleri sırasıyla Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de sunulmuştur. Bu sonuçlardan görülebildiği gibi DAHYKF yöntemi aynı karakteri sergilemektedir. Görüldüğü gibi hem yakınsama hem de hassasiyet açısından yapısal olmayan düzgünleştirilmiş çözüm ağlarına ait sonuçlar yapısal ağlara ait sonuçlardan geri kalmamaktadır. Hatta özellikle hassasiyet açısından daha iyi olduğu söylenebilir. RK4 yöntemi şartlı kararlı olduğu için bu yönteme ait sonuçlar, özellikle yakınsama açısından oldukça geridir. Yöntemin bu bakımdan pratik değeri neredeyse kalmamaktadır. Bununla birlikte, muhtemelen aynı temel formülasyonları içerdikleri için olsa gerek, RK4 yönteminin hassasiyeti DAHYKF yöntemi ile hemen hemen aynıdır. Bu kısımda daire etrafındaki akım problemi için düzgünleştirilmemiş yapısal olmayan çözüm ağları ile yapılan çözümlemelere ait yakınsama karakterlerini gösteren grafikler konulmasına gerek duyulmamıştır. Çünkü düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağ yapılarıyla elde edilenlerle tamamen aynıdır. Tek fark hassasiyetlerin oldukça düşük kaldığıdır. Bu sonuçlar **EK.B**'de verilmiştir. Dikkati çeken bir diğer husus ise düzgünleştirilmemiş halde RK4 ve DAHYKF yöntemlerinin hassasiyetlerinin yine aynı olduğudur.



Şekil 3.9 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 527 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.



Şekil 3.10 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 642 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.



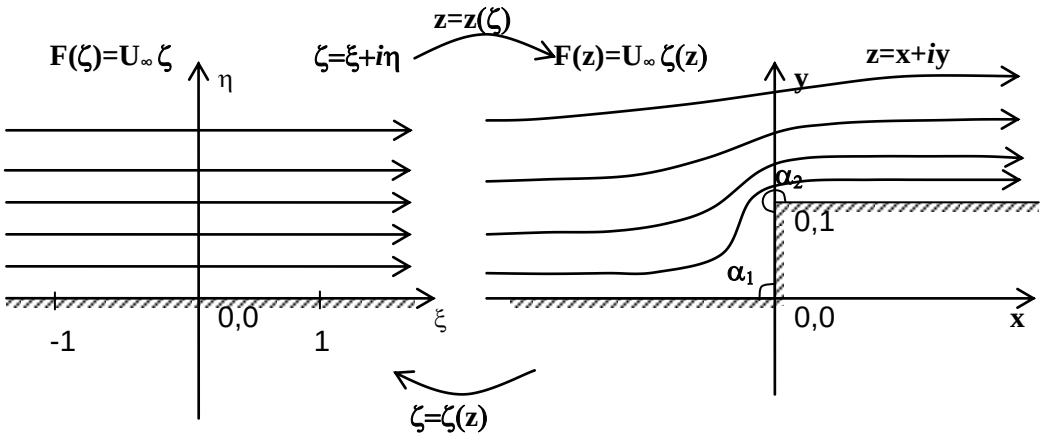
Şekil 3.11 Daire etrafındaki problem için düzgünleştirilmiş 981 noktalı yapısal olmayan ağ ile sayısal çözümlerin yakınsama karakteristikleri.

3.3. Basamak Potansiyel Akışı

İkinci test problemi olarak seçilen “basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım” problemine ait analitik çözümü Scwartz-Christoffel dönüşümü yardımıyla elde etmek mümkündür **(Spurk, 1997)**. n kenarlı bir poligon için Scwartz-Christoffel dönüşümü

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) = K \cdot (\zeta - \xi_1)^{\alpha_1/\pi - 1} \cdot (\zeta - \xi_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \cdots (\zeta - \xi_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ξ_1, ξ_2, ..ξ_n değerleri dönüşüm düzlemindeki tekil dönme noktalarına denk gelen ξ koordinat değerleridir, α_1, α_2 .. α_n büyüklükleri ise fiziksel düzlemde tekil noktalardaki dönme açılarının değerleridir. Şekil 3.12’ deki basamak dönüşümüne göre buradaki büyüklükler



Şekil 3.12 Birim yükseklikteki basamak etrafındaki potansiyel akışın analitik çözümü ve kullanılan dönüşümlerin şematik gösterimi.

n=2, ξ_1=-1, ξ_2=1 ve $\alpha_1=\pi/2$, $\alpha_2=3\pi/2$

dir. Bu değerler (3.3) dönüşüm ifadesinde yerine konulursa,

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) = K \cdot (\zeta + 1)^{-1/2} \cdot (\zeta - 1)^{1/2} = K\sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}} \tag{3.4}$$

elde edilir, ve bu ifade integre edilerek,

$$z = K \cdot \left[\sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right] + C \tag{3.5}$$

dönüşüm fonksiyonu elde edilir. Buradaki K ve C büyüklükleri birer sabit olup değerleri (3.5) bağıntısında bir defa $\xi = \xi_1$ iken $z=z_1$ konarak ve bir defa da $\xi = \xi_2$ iken $z=z_2$ konarak elde edilebilir. Sonuç olarak, bir birim uzunluktaki basamak için dönüşüm fonksiyonu

$$z = z(\zeta) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right] + i \tag{3.6}$$

şeklinde bulunur.

Scwartz-Christoffel dönüşümünden basamak problemi için yukarıdaki dönüşüm fonksiyonu $z=z(\zeta)$ şeklinde elde edilmiş olmakla birlikte uygulamada fonksiyona $\zeta=\zeta(z)$ şeklinde de ihtiyaç vardır. Bu ters dönüşüm fonksiyonu analitik olarak elde edilememiş, ancak, sayısal olarak ve yüksek bir hassasiyetle elde etmek mümkün olmaktadır.

Bu tez çalışmasında analitik çözümler, sayısal çözümlerin hatalarının tespiti için ve ayrıca ve sınırlar üzerindeki fonksiyon değerlerini sayısal yönteme Dirichlet tipi sınır şartı olarak vermek üzere hesaplamak amacıyla kullanıldığı için, hassas da olsa ters dönüşüm için sayısal bir yöntemin doğrudan kullanılması pek uygun görülmemiştir. Bu nedenle sayısal çözüm için oluşturulan ağ yapısındaki z noktalarına $\zeta=\zeta(z)$ dönüşümü sayısal olarak uygulandıktan sonra ζ düzleminde elde edilen noktalara tekrar $z=z(\zeta)$ analitik dönüşümü uygulanarak z düzlemindeki orijinal ağ noktalarına yakın olduğu düşünülen yeni noktalar elde edilmektedir. Bu şekilde elde edilen noktalar kullanılarak, bir bakıma orijinal ağ yapısına çok yakın, ama bir miktar deforme edilmiş bir ağ yapısı elde edilmektedir. Sayısal çözümlemelerde bu yeni ağ yapısı kullanılmıştır. Bu şekilde yapılan dönüşümlerle elde edilen ağ noktalarındaki analitik çözümler tam (exact) çözümler olmaktadır.

Uygulanan (3.6) dönüşüm fonksiyonu ζ düzlemindeki reel eksene paralel üniform akımı z düzleminde basamak etrafındaki akıma dönüştürmektedir. Üniform akım için kompleks potansiyel fonksiyonu $f(\zeta)=U_\infty\zeta$ şeklinde olup basamak akımı için kompleks potansiyel fonksiyonu ve ayrıca potansiyel ve akım fonksiyonları

$$F(z) = F[\zeta(z)] = U_\infty \zeta(z) = U_\infty \xi + i \cdot U_\infty \eta = \phi(z) + i \cdot \psi(z) \tag{3.7a}$$

şeklinde elde edilebilir. Akım fonksiyonunun değeri yukarıdaki eşitliğin sanal kısmından

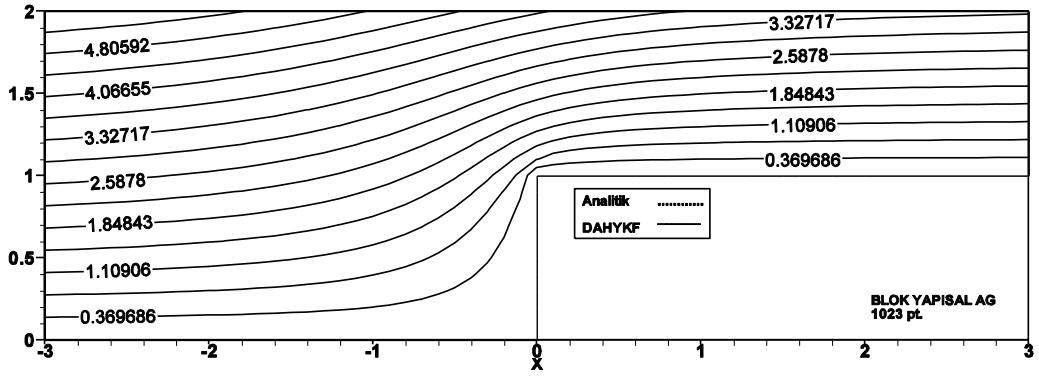
$$\psi(z) = U_\infty \eta = U_\infty \, \mathrm{Im}(\zeta(z)) \tag{3.7b}$$

şeklinde ayrılabilir.

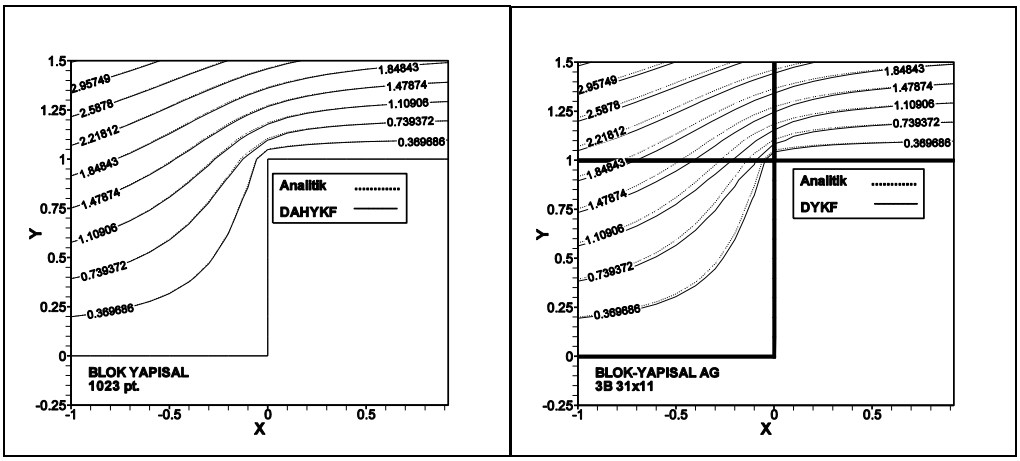
Bu test çalışmasındaki sayısal çözümlere gelince, problem yine bir sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi olup, bu problemi temsil eden denklem (Laplace denklemi) ve bu denkleme karşılık olarak çözülmeye çalışılan denklem (zamana bağlı yayınım denklemi) daire problemindekilerle aynıdır. Denklemin sayısal çözümlerinde yine Dirichlet tipi sınır şartı uygulanmış olup, sınır üzerindeki fonksiyon değerleri yukarıda da ifade edildiği gibi analitik çözümlerden elde edilmiştir. Bu test çalışması özellikle DAHYKF yönteminin çok bloklu sistemlerdeki performansını ve pratikliğini değerlendirme amacıyla yapılmıştır. Karşılaştırma yöntemlerinden RK4 de böyle bir uygulama yapmak mümkün olmadığından çok bloklu yapı için elde edilen sonuçların DYKF yöntemi ile karşılaştırılması gerekmektedir. Aslında DAHYKF yönteminde blok kavramının kullanılmasına gerek yoktur. Zira bu yöntem yapısal ve yapısal olmayan tüm çözüm ağı tiplerini bir bütün olarak algılayabilme avantajına sahiptir.

Basamak akışı problemi iki farklı sıkılıktaki 3 bloklu yapısal çözüm ağlarında DYKF, DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile çözülmüştür. Ayrıca alternatif olması açısından aynı problem yine iki ayrı sıkılıkta yapısal olmayan çözüm ağları ile DAHYKF ve RK4 yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Burada bahsi geçen çözüm ağları **EK.C**'de verilmiştir.

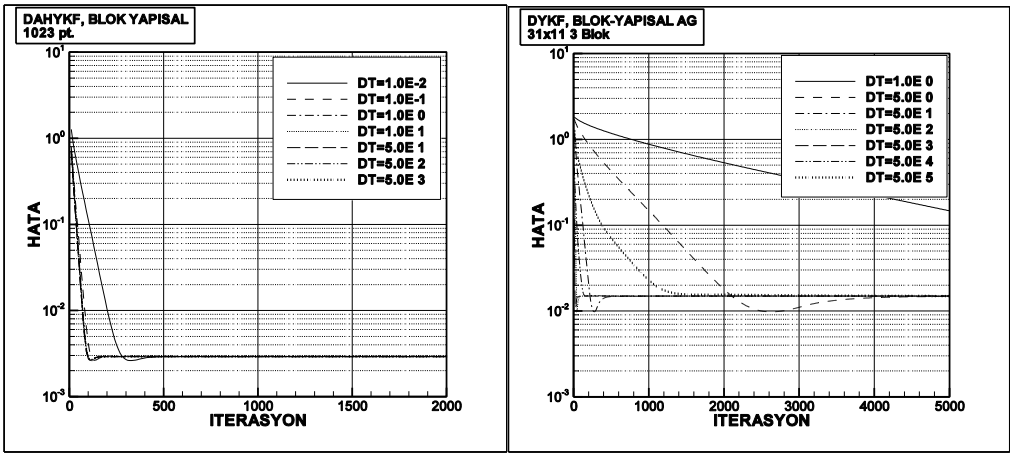
Basamak akışı için çok bloklu ağ yapısında DAHYKF yöntemi ile yapılan çözümleme sonucu elde edilen akım çizgileri Şekil 3.13'de sunulmuştur. Sonuçların analitik çözümlerle son derece uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 3.13 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması.



Şekil 3.14 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve DYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması.

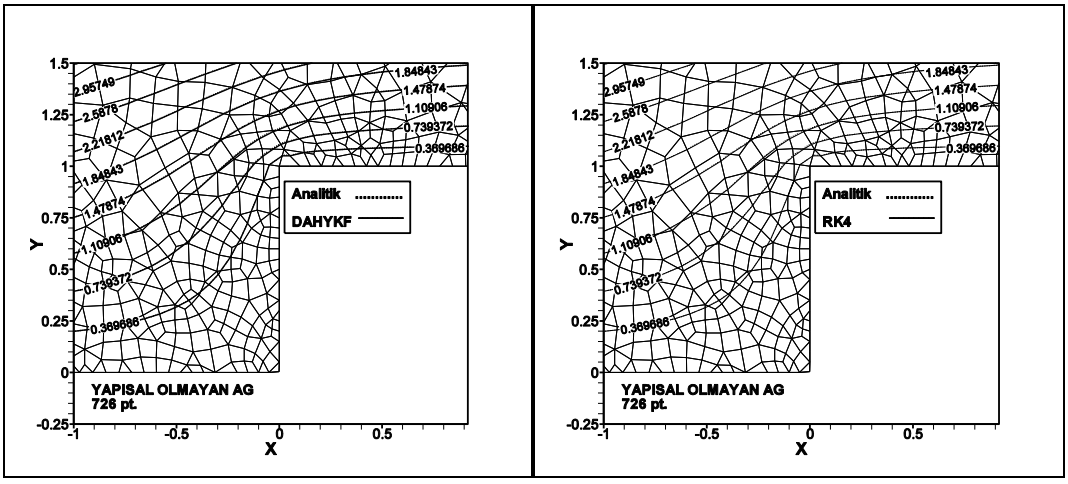


Şekil 3.15 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve DYKF yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin hata değerlerinin karşılaştırılması.

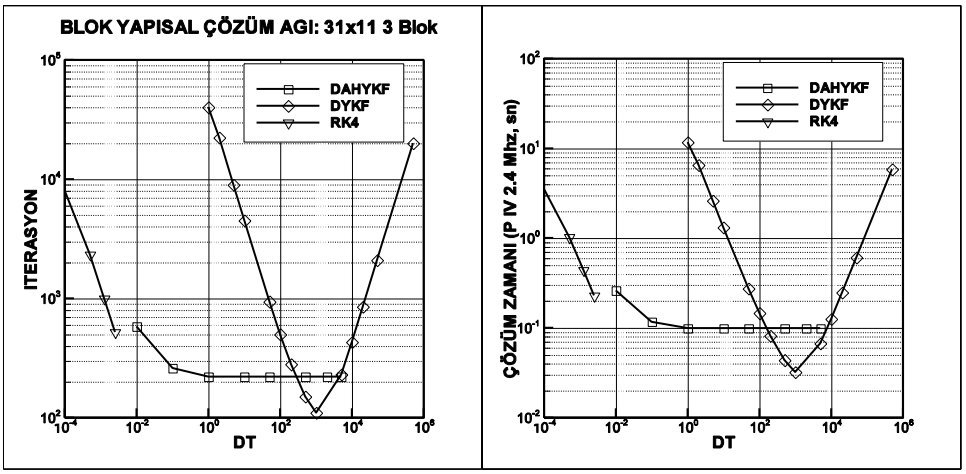
Şekil 3.14'de basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış problemi için sırasıyla DAHYKF ve DYKF yöntemleri ile elde edilen akım çizgilerinin, analitik çözümlerle karşılaştırılmalı yakın birer görünümü yer almaktadır ve Şekil 3.15'de ise değişik zaman adımı uzunlukları için ortalama hataların iterasyon sayısı ile değişimi sunulmuştur. RK4 metodu çözümlerinin hata düzeyleri ayrıklaştırmaları aynı olduğu için DAHYKF metodu ile denk olmaktadır. Şekil 3.16'da yapısal olmayan ağlarda DAHYKF ve RK4 yöntemleri çözümlerinin akım çizgisi eşçizgileri görülmektedir. Şekil 3.17-Şekil 3.20'de bütün çözüm ağları ile elde edilen çözümlerin bilgisayar çözüm süreleri ve yakınsama iterasyon sayılarının zaman adımı uzunluklarına göre değişim grafikleri verilmiştir.

Bu şekillerden görüldüğü gibi çok bloklu çözüm ağlarında DAHYKF yöntemi performansını korurken, DYKF yöntemi oldukça performans kaybetmiştir. DYKF

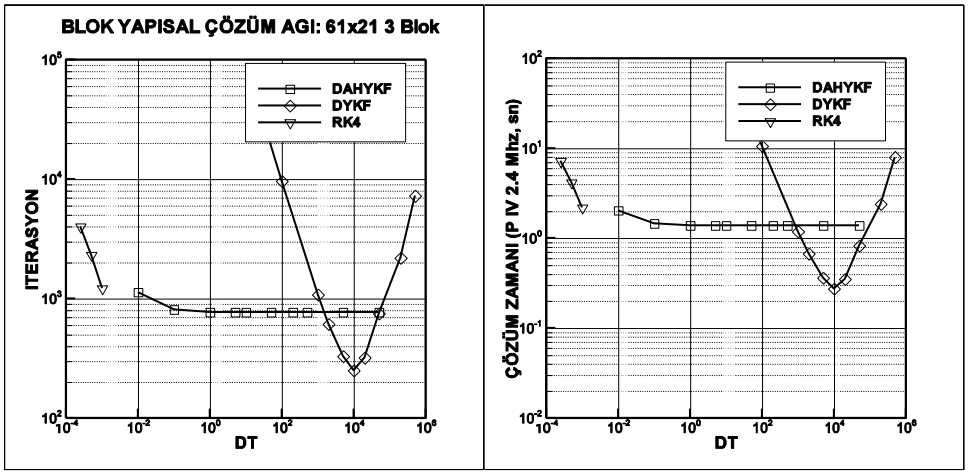
yönteminde optimum yakınsama için iterasyon sayısı yine daha düşük olmasına karşılık optimum değer bölgesi daha daralmıştır. Bunun yanında Şekil 3.15'den ve ayrıca tüm diğer çözümlere ait ayrıntıların bulunduğu **EK.C**'den görüleceği gibi DYKF yöntemi her iki sıklıktaki çözüm ağında da hassasiyet açısından oldukça geri kalmıştır. Bunun sebebinin bloklar arası eşleşme sınır şartları olduğu tahmin edilmektedir. Ayrıca EK.C'de DAHYKF yöntemi ile yapısal olmayan çözüm ağı kullanılarak elde edilen sonuçlar da daha az çözüm ağı noktası ile aynı hassasiyetteki çözümlerin daha hızlı bir şekilde elde edilebileceğini göstermektedir. DAHYKF ve RK4 yöntemleri arasındaki karşılaştırma da beklenildiği gibi hata düzeylerinin denk olmasına rağmen RK4 yönteminin şartlı kararlı olması ve yakınsak değerlerini çok küçük zaman aralıklarında gerçekleştiği için yakınsama iterasyon sayısı ve bilgisayar çözüm zamanı açılarından RK4 çok gerilerde kalmaktadır. DAHYKF ile DYKF yöntemlerinin bir iterasyon adımı için bilgisayar çözüm süreleri arasındaki oran daha önceki örneklerdeki gibi yaklaşık 1.5 değerini korumaktadır. RK4 yönteminin bir iterasyon adımı için bilgisayar çözüm süreleri ise bir önceki örnek çözümlerde olduğu gibi DYKF metoduna denk düzeydedir.



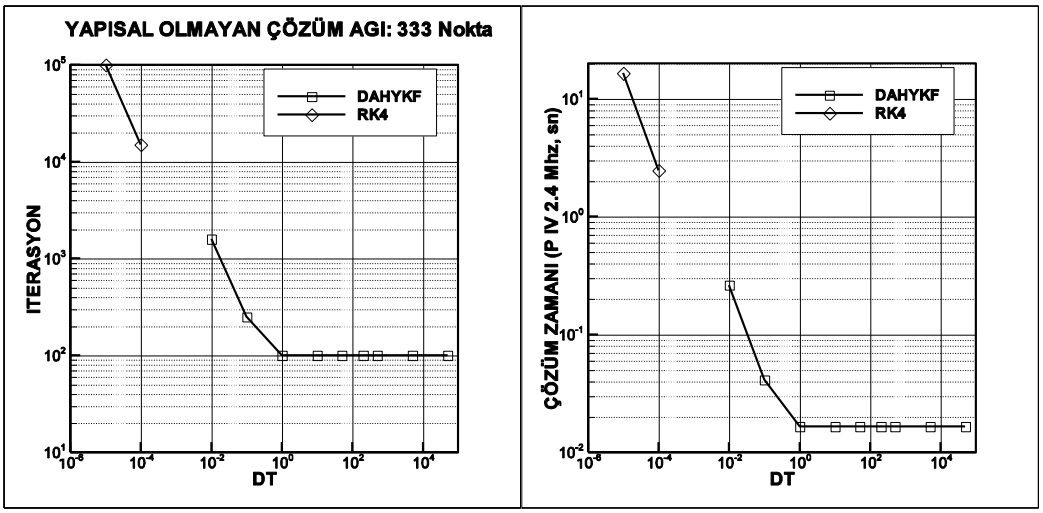
Şekil 3.16 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akışın DAHYKF ve RK4 yöntemi ile alınan akım çizgisi çözümlerinin analitik değerlerle karşılaştırılması.



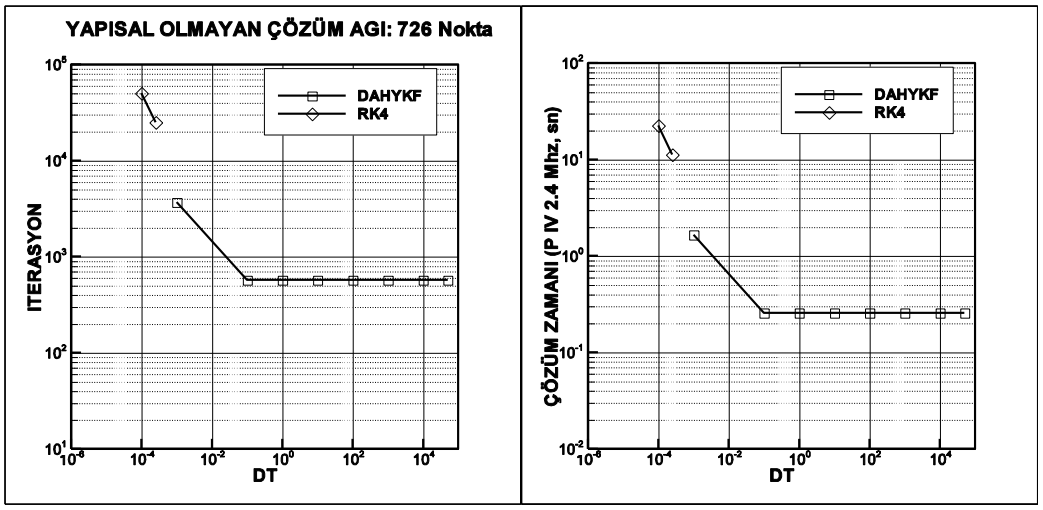
Şekil 3.17 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 31x11 3 bloklu blok yapısal ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



Şekil 3.18 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 61x21 3 bloklu blok yapısal ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



Şekil 3.19 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 333 noktalı yapısal olmayan ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



Şekil 3.20 Basamak etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 333 noktalı yapısal olmayan ağ ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.

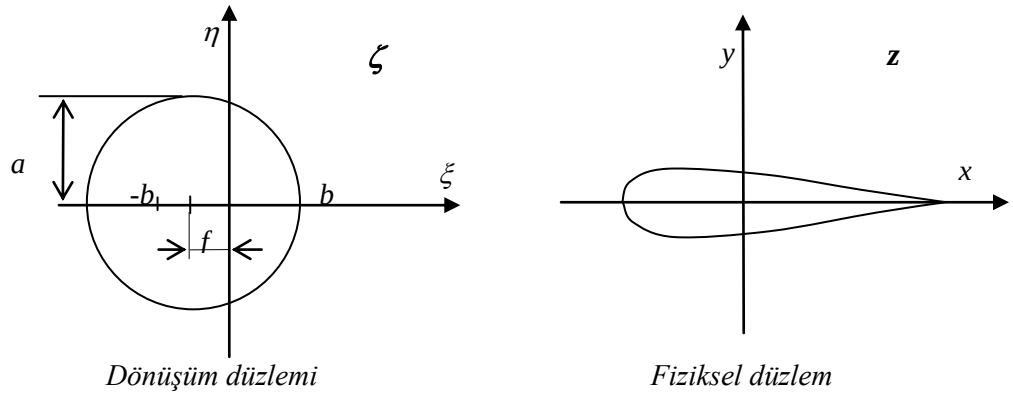
3.4. Simetrik Joukowsky Profili Etrafındaki Potansiyel Akış

DAHYKF yönteminin, daha karmaşık bir ağ yapısı sayılabilecek olan bir C tipi ağ yapısındaki performansını değerlendirmek için bir kanat profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi, üçüncü test problemi olarak ele alınmıştır. Kanat profili olarak, analitik çözümü kolaylıkla elde edilebiliyor olması nedeniyle Joukowsky profili seçilmiştir. Ayrıca, Joukowsky profilinin firar kenarının çok sivri olmasının test çalışmasını zorlayıcı bir etken olduğu da değerlendirilmiştir. Tez çalışmasının ana hedefine uygun olarak sadece simetrik bir profilin incelenmesi yeterli görülmüştür.

Bilindiği üzere Joukowsky profilleri Şekil 3.21'da görüldüğü gibi bir daireden

$$z = \varsigma + \frac{b^2}{\varsigma} \tag{3.8}$$

şeklindeki bir dönüşüm ile elde edilebilmektedir. Aynı dönüşüm fonksiyonu daire etrafındaki akımda tam (exact) olarak elde edilen çözümleri profil etrafındaki tam (exact) çözümlere dönüştürmektedir.



Şekil 3.21 Simetrik Jukowsky profili dönüşümünü gösterir düzlemler.

Kolaylık olması bakımından dairenin yarıçapı 1 birim olarak alınmıştır. İncelenecek Joukowsky profilinin kalınlık oranı %15 olarak seçilmiş olup, buna için daire merkezinin yatay konumunun f=0.1153 de olması gerektiği hesaplanmıştır **(Yükselen, 1995)**.

Daire etrafındaki potansiyel akım çözümü önceki kısımlarda belirtildiği gibi analitik olarak bilinmektedir. Böylece yukarıda ifade edilen dönüşüm sonucunda profil etrafındaki akım için de çözüm bulunabilmektedir, fakat bu akış sirkülasyonsuz olmaktadır. Akışa sirkülasyon teriminin eklenmesi gerekmektedir (bu şekilde taşıma oluşacaktır). Sirkülasyon terimi eklenmiş halde akışın kompleks potansiyel denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$f(z_l) = U_\infty\left(\varsigma_l + \frac{a^2}{\varsigma_l}\right) + \frac{i\cdot\Gamma}{2\pi} Ln\left(\frac{\varsigma_l}{a}\right) \qquad (3.9)$$

$$Burada \quad \varsigma_l = (\varsigma - f)\cdot e^{-i\alpha}$$

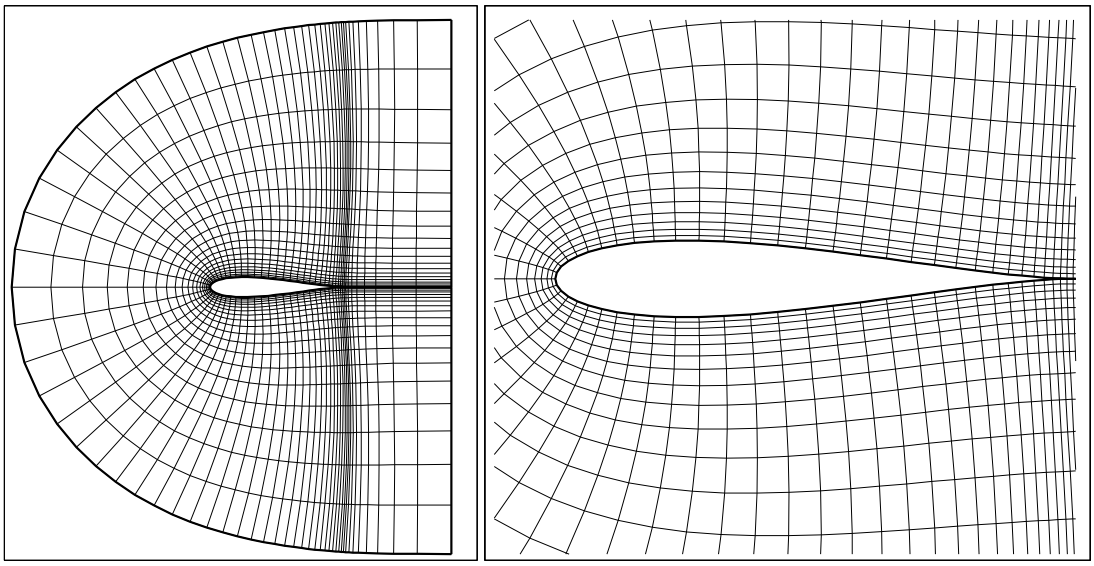
Burada α hücum açısıdır. Γ tekil noktada hızın sıfır olması şartı ile elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen sirkülasyon değeri aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\Gamma = 4\pi\cdot a\cdot U_\infty Sin(\alpha) \qquad (3.10)$$

Bilindiği üzere kompleks potansiyelin sanal kısmı akım fonksiyonuna eşittir ve bu çalışmada akım fonksiyonları gerekmektedir. Ayrıca fiziksel düzlemde herhangi bir yerdeki akım fonksiyonunu elde edebilmek için Jukowsky dönüşümünün tersini de elde etmek gerekir. Denklem (3.8)'da ζ çekilirse ikinci derece denklem ortaya çıkmaktadır, bu denklemin çözümü de yani Jukowsky ters dönüşümü aşağıdaki gibidir.

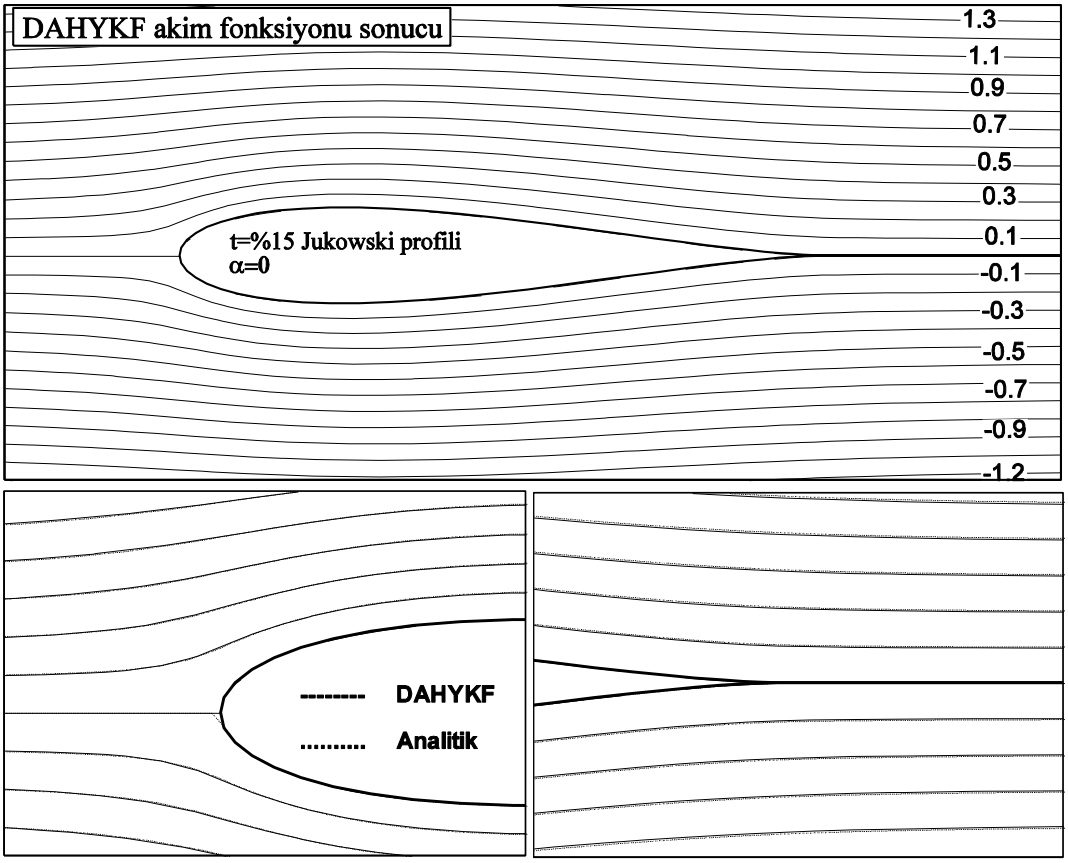
$$\varsigma = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2} \tag{3.11}$$

Çalışmada hata terimlerinin eldesi ve Dirichlet sınır şartları için analitik değerler kullanılmıştır. Çalışmada profil etrafındaki çözümler için en uygun çözüm ağı olan C tipi çözüm ağı uygulanacaktır. C tipi çözüm ağı bir hiperbolik ağ üretici kullanılarak elde edilmiştir (Şekil 3.22).

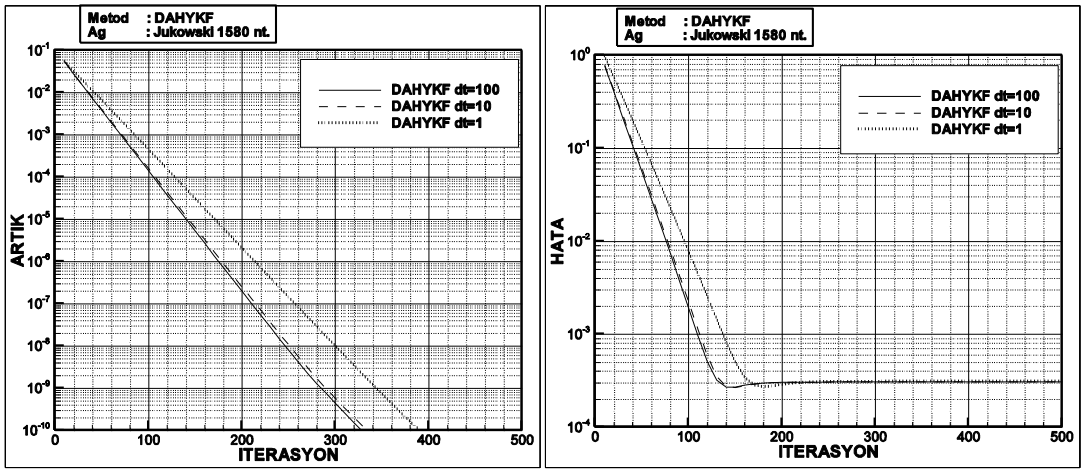


Şekil 3.22 Çözümlerde kullanılan simetrik Jukowsky profili etrafındaki Hiperbolik çözüm ağı üretimi ile elde edilmiş C tipi çözüm ağı.

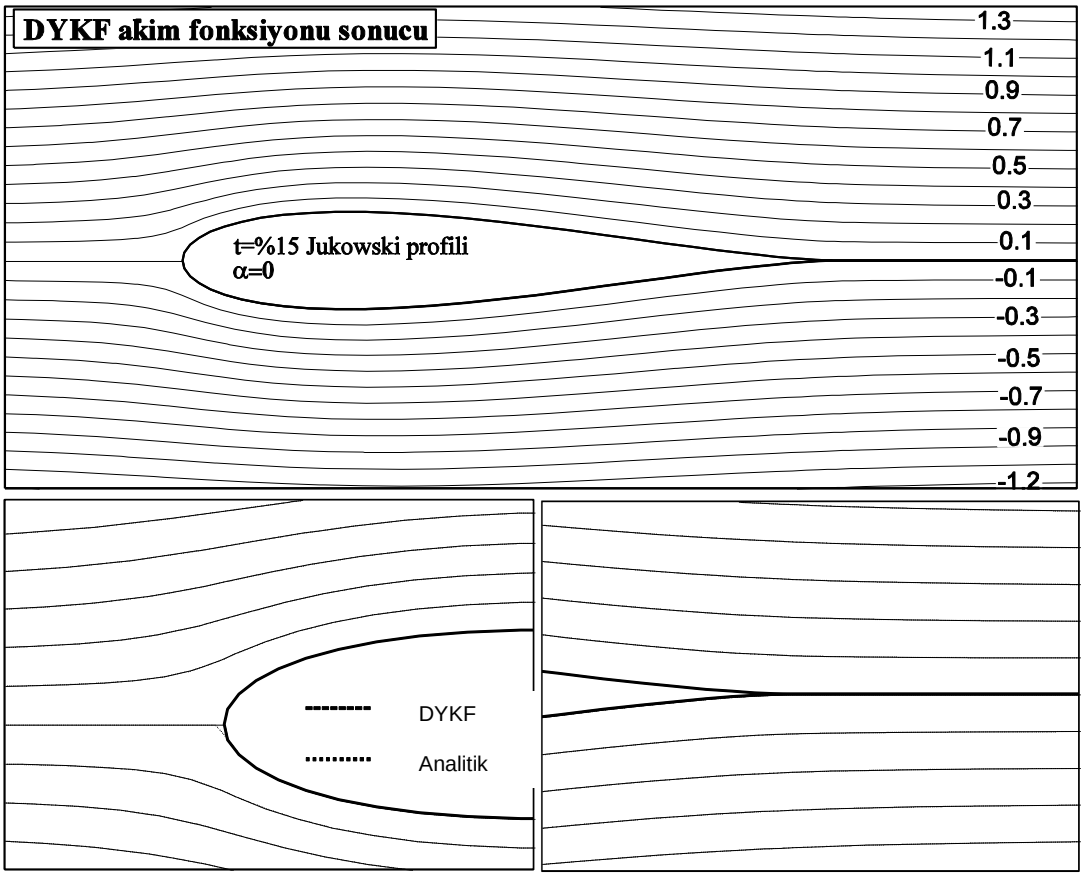
Şekil 3.23'de DAHYKF yöntemi ile profil etrafındaki akış çözümleri görülmektedir. Şekil 3.24'de bu sonuçların artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi görülmektedir. DYKF yönteminin sonuçları ise Şekil 3.25 ve Şekil 3.26'da verilmiştir. Tablo 3.1'de 0°, 10° ve 20° hücum açılarınında içinde olduğu tüm çözümlerin detayları tablo olarak verilmiştir. Ayrıca **EK.D**'de 0°, 10° ve 20° hücum açılarında yapılmış diğer çözümlerin detay grafikleri verilmiştir.



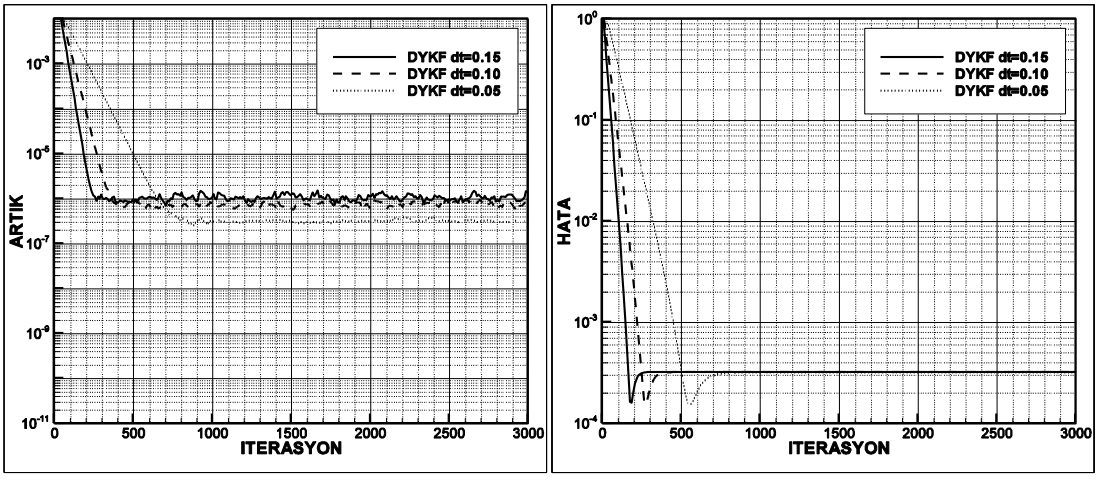
Şekil 3.23 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



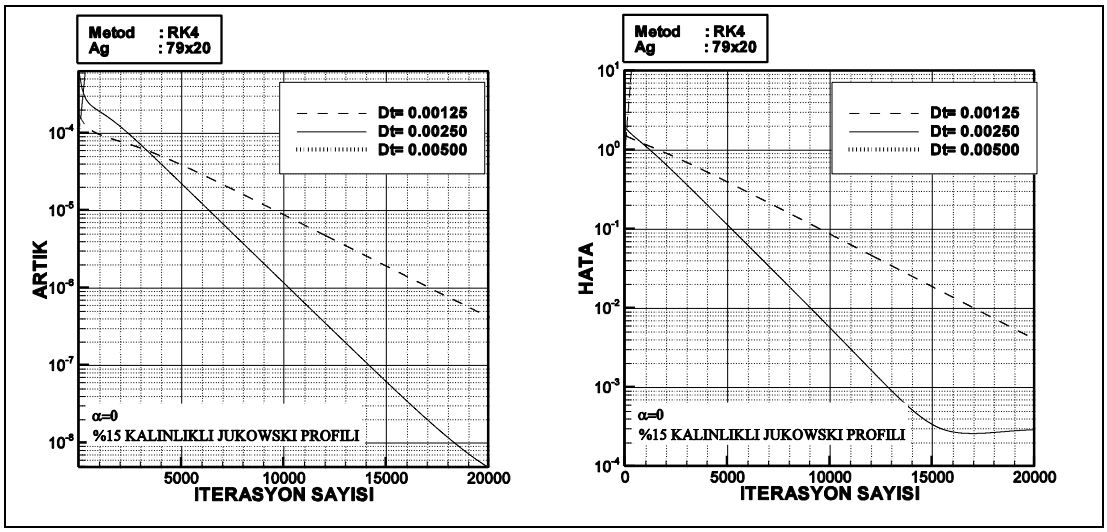
Şekil 3.24 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi.



Şekil 3.25 DYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısı için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.

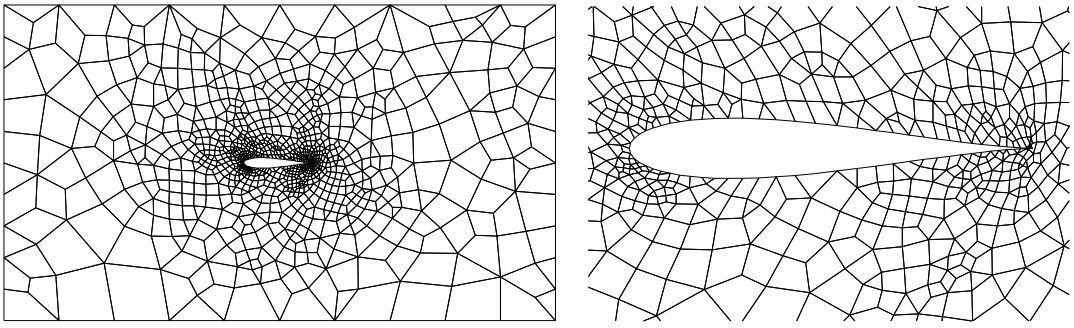


Şekil 3.26 DYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi.

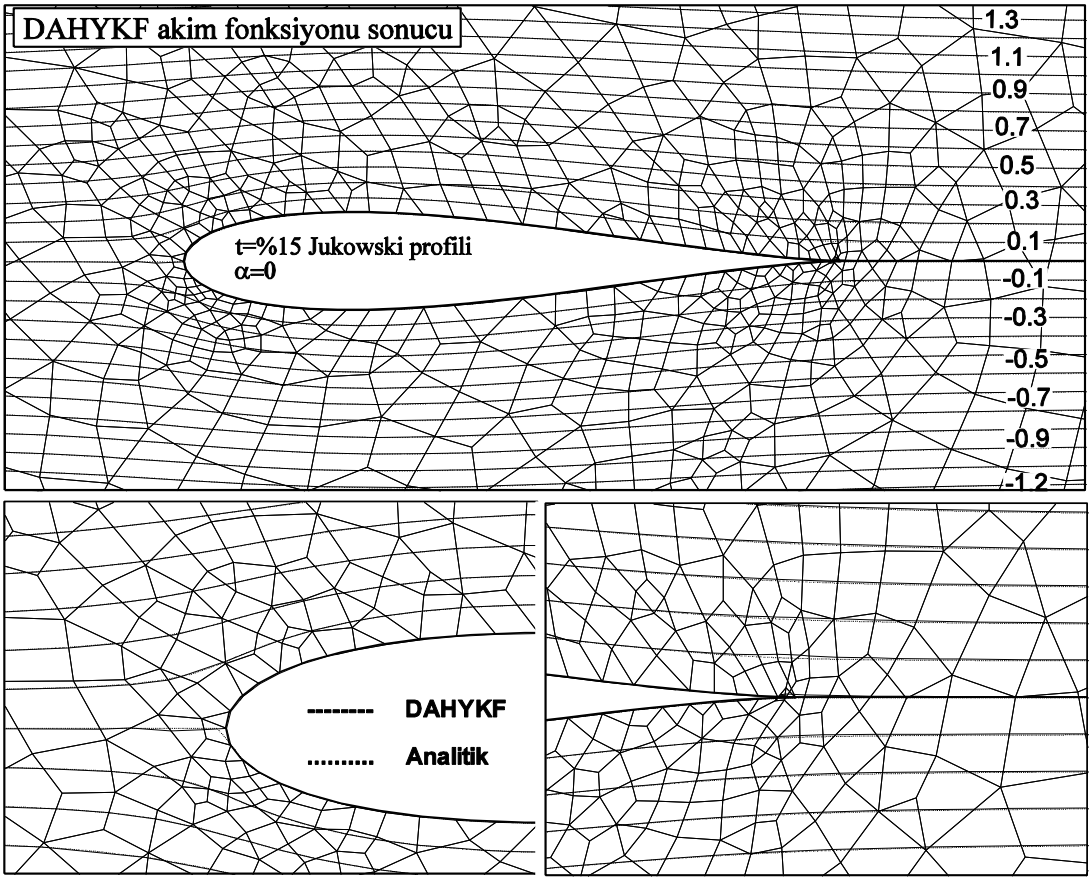


Şekil 3.27 RK4 yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 79x20 (1580 nt) yapısal çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi.

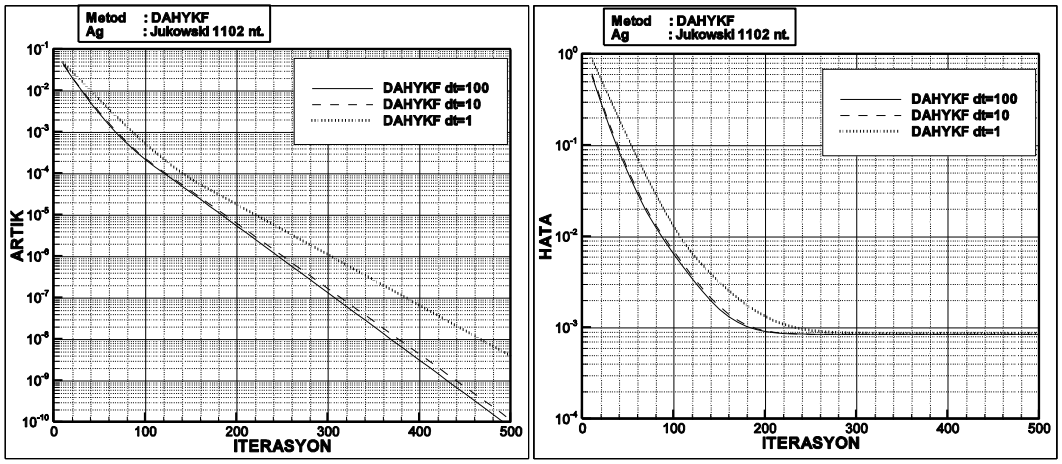
Simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki potansiyel akışın yapısal olmayan çözüm ağında da çözümleri alınmıştır. Şekil 3.28'de bu yapısal olmayan çözüm ağı görülmektedir. Şekil 3.29 ve Şekil 3.30'de yapısal olmayan çözüm ağı ile elde edilen çözümlerin sonuçları verilmiştir, ayrıca **EK.D**'de diğer ayrıntılar verilmiştir. Şekil 3.31 ve Şekil 3.32'de 0° hücum açısındaki sonuçların yakınsama karekterleri görülmektedir. Tablo 3.13.1-3.3'de Jukowsky profili etrafındaki potansiyel akışı çözümlerinin detayları tablolar halinde verilmiştir.



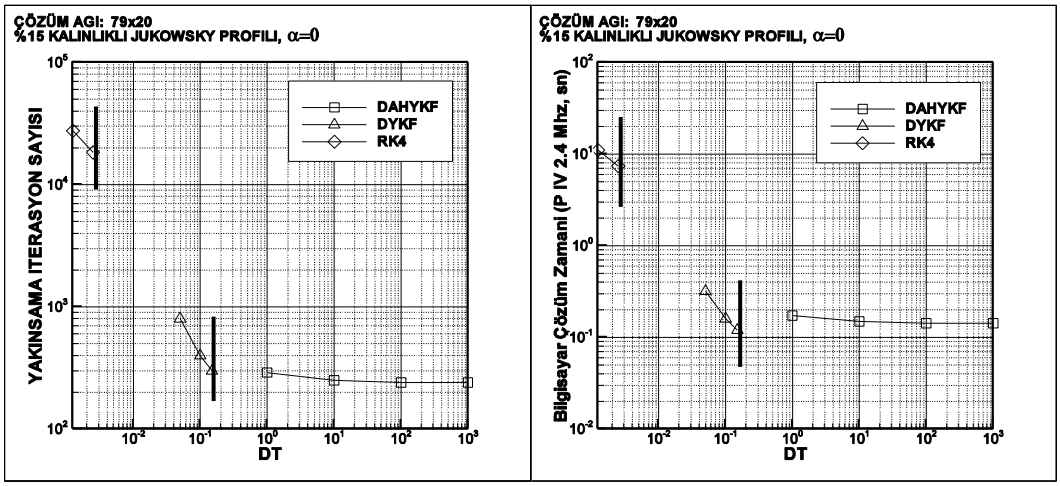
Şekil 3.28 Çözümlerde kullanılan simetrik Jukowsky profili etrafındaki yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı.



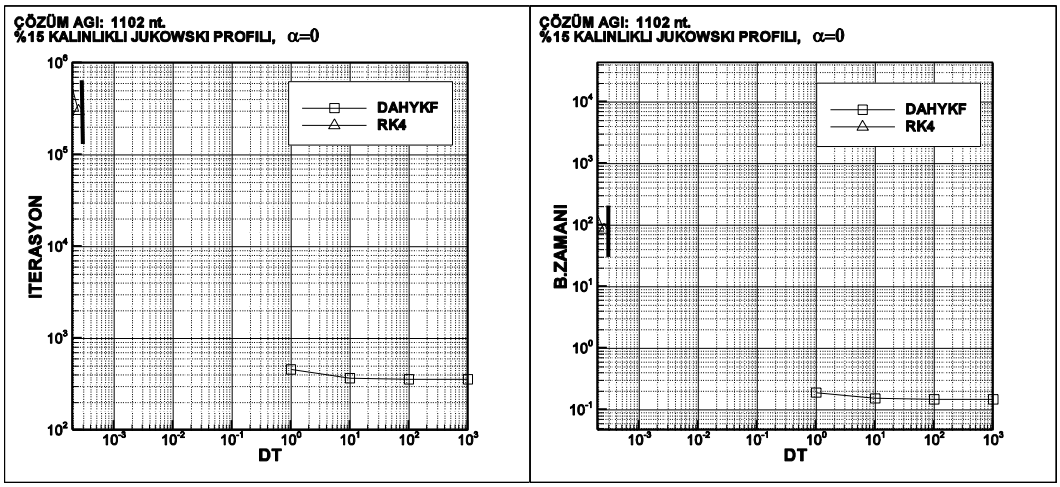
Şekil 3.29 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısı için 1102 noktalı yapısal olmayan ağ üzerindeki potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



Şekil 3.30 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowsky profili etrafındaki 0° hücum açısındaki potansiyel akış çözümünün 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağındaki artık ve hata terimlerinin iterasyon sayısına göre değişimi.



Şekil 3.31 0° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



Şekil 3.32 0° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.

Tablo 3.1 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 0° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BILGISAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	4.9E-08	3.00E-04	2.8E-03	290	0.173	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	3.5E-08	3.00E-04	2.8E-03	250	0.149	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	4.8E-08	3.00E-04	2.8E-03	240	0.143	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	4.7E-08	3.00E-04	2.8E-03	240	0.143	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	2.9E-08	8.48E-04	1.61E-02	460	0.191	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	3.4E-08	8.48E-04	1.61E-02	370	0.154	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	3.6E-08	8.48E-04	1.61E-02	360	0.149	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	3.5E-08	8.48E-04	1.61E-02	360	0.149	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	3.3E-7	1.5E-05	3.2E-04	8.5E-04	800	0.320	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	6.6E-7	3.0E-05	3.1E-04	8.5E-04	400	0.160	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	3.3E-7	4.4E-05	3.1E-04	8.6E-04	300	0.120	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	4.7E-07	7.26E-04	2.12E-03	27540	11.071	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	1.59E-07	2.74E-04	2.80E-03	18320	7.364	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.4E-7	4.0E-05	8.23E-03	2.49E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.2E-7	7.7E-05	1.29E-03	1.62E-02	300000	84	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

Tablo 3.2 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 10° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BILGISAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER ITER. IÇIN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	2,9E-8	6,86E-4	6,11E-3	260	0,154	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	2,4E-8	6,86E-4	6,11E-3	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	3,5E-8	6,86E-4	6,11E-3	210	0,125	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	3,4E-8	6,86E-4	6,11E-3	210	0,125	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	3,14E-8	1,66E-3	1,61E-2	500	0,207	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	2,60E-8	1,66E-3	1,61E-2	400	0,166	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	2,60E-8	1,66E-3	1,61E-2	390	0,161	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	2,54E-8	1,66E-3	1,61E-2	390	0,161	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	2.6E-7	1,4E-5	1.3E-3	5.2E-3	850	0.340	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	7.9E-7	3,0E-5	1.3E-3	5.2E-3	450	0.180	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	1.0E-6	4,4E-5	1.3E-3	5.2E-3	300	0.120	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	1.0E-07	6.28E-04	6.10E-03	32630	13.117	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	7.6E-07	6.58E-04	6.10E-03	17920	7.203	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.4E-7	3.9E-05	1.06E-02	4.63E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.2E-7	7.9E-05	1.39E-03	1.82E-02	300000	84	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

Tablo 3.3 %15 kalınlıklı simetrik Jukowsky profili etrafındaki 20° hucüm açısındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BILGISAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	2,8E-8	1,2E-3	1,1E-2	270	0,161	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	2,2E-8	1,2E-3	1,1E-2	230	0,137	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	3,2E-8	1,2E-3	1,1E-2	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	3,1E-8	1,2E-3	1,1E-2	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	2,9E-8	2,9E-3	2,1E-2	520	0,215	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	2,8E-8	2,9E-3	2,1E-2	410	0,170	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	2,8E-8	2,9E-3	2,1E-2	400	0,166	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	2,6E-8	2,9E-3	2,1E-2	400	0,166	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	2.5E-7	1.1E-5	2.6E-3	1.0E-2	950	0.380	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	6.7E-7	2,7E-5	2.6E-3	1.0E-2	500	0.200	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	1.1E-6	2,9E-5	2.6E-3	1.0E-2	400	0.160	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	1.0E-07	1.12E-03	1.12E-02	33740	13.563	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	8.0E-07	1.18E-03	1.12E-02	18780	7.549	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.6E-7	3.6E-05	2.36E-03	1.95E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.3E-7	6.7E-05	2.29E-03	2.05E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

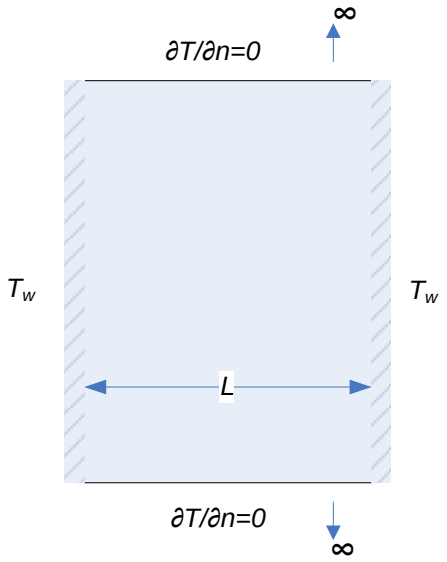
DYKF yönteminde firar kenarını takiben uzanan iz bölgesinde aynen bloklar arasındaki sınır şartları gibi eşleşme sınır şartı uygulanmıştır, bu C tipi çözüm ağının getirdiği bir zorunluluktur. DAHYKF yönteminde çok bloklu ağlarda olduğu gibi böyle bir sınır şartına gerek yoktur. Sonuçlardan görüldüğü gibi ya bu eşleşme sınır şartından ya da çözüm ağında çok ince elemanların olması sebebiyle metod şartlı kararlı olmaktadır. Buna rağmen çözüm hassasiyeti tahminen bu bölgedeki ağın sıkı olması nedeniyle çok etkilenmemiştir. Yine de DAHYKF yönteminin hassasiyet değerleri DYKF yönteminkinden daha iyidir. Artık terimleride DAHYKF yönteminden 2 mertebe daha düşüktür, bunun sebebi yine eşleşme sınır şartı olduğu düşünülmektedir. RK4 yöntemi beklenildiği üzere çok dar bir bölgede yakınsayabilmektedir, hata düzeyleride yine beklenildiği gibi DAHYKF yöntemine denktir. DAHYKF yöntemi hem yakınsama karekteri (şartsız kararlılık), yakınsama zamanı ve hata düzeyleri açılarından öne çıkmıştır. DAHYKF yönteminin hassasiyet değerlerinin hücum açısı ile DYKF'ye göre daha az değişmeside olumludur.

3.5. Paralel İki Duvar Arasındaki Isı Yayınımı Problemi

Bu problemin uygulanma sebebi, metodun zamana bağlı problemlerdeki performansının incelenmesidir. Diğer örneklerde daimi hal hedeflendiği için ara adımların bir anlamı yoktu, fakat bu örnekte zaman parametresi boyunca hatanın minimum olması hedeflenmektedir. Zamana bağlı ısı yayınımı denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{3.12}$$

Çözülecek problem olarak da aynı sıcaklıktaki paralel iki duvar arasındaki ısı yayınımı seçilmiştir.



Şekil 3.33 Aynı sıcaklıktaki iki paralel levha arasındaki ısı yayınımı probleminin şematik gösterimi.

Bu problem aslında tek boyutlu olarak da çözülebiliniyor olmasına rağmen yöntemimizin iki boyutlu olması nedeniyle iki boyutlu olarak çözülecektir. Denklem (3.12)'de verilmiş olan "Zamana Bağlı Isı Yayınımı" denklemi aşağıdaki şekilde birimsizleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
&\tilde{T} = T/T_w, \Lambda\ \tilde{x} = x/L, \Lambda\ \tilde{y} = y/L \\
&\tilde{t} = t/t_s, \Lambda\ \tilde{\alpha} = \alpha/\left(L^2/t_s\right) \\
&\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}\frac{t_s}{T_w} = \tilde{\alpha}\frac{L^2 t_s}{L^2 T_w}\left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Burada t_s yakınsama, yani sıcaklıkların dengelendiği zamanı, T_w duvar sıcaklığını temsil etmektedir. Görüldüğü üzere birimsizleşmiş denklemde aslı ile tamamen aynı formdadır. Çözümlerde,

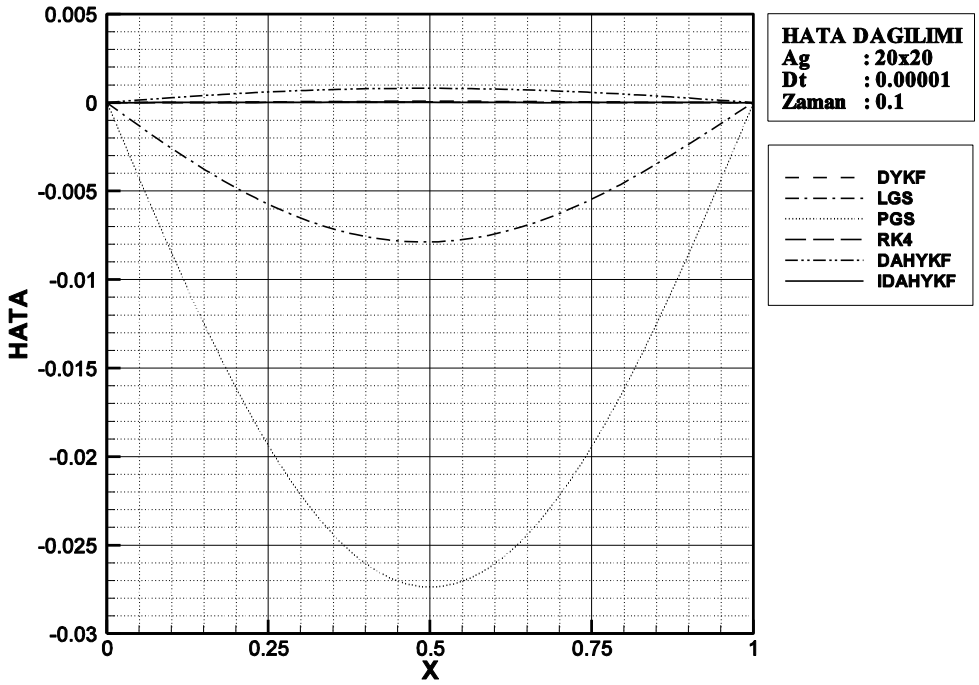
$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha} = 1.0 \\
&\tilde{T}_i = 0 \\
&\tilde{T}_w = 1.0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olarak alınmıştır. Burada T_i başlangıç sıcaklık değerini temsil etmektedir. Bu değere göre birimsiz zaman bire ulaştığında sıcaklıklar dengelenmiş olacaktır. Basitlik nedeniyle buradan sonra birimsizlik ibaresi (~) kullanılmayacaktır. Aynı sıcaklıktaki iki paralel duvar arasındaki ısı yayınımı probleminin analitik çözümü aşağıdaki gibidir.

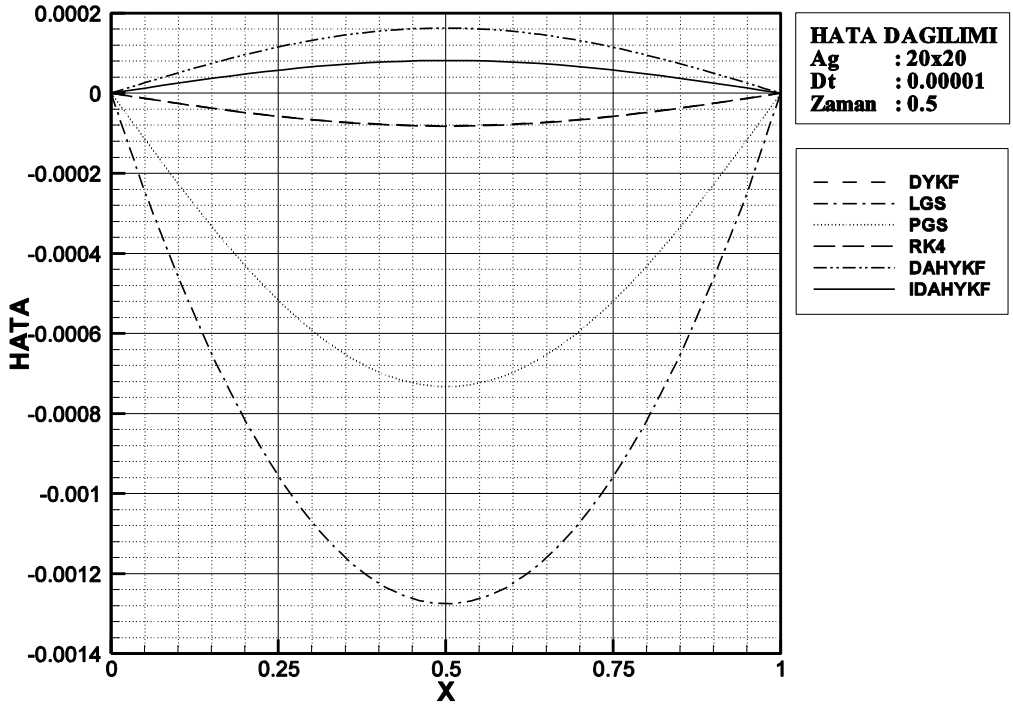
$$T = T_i + 2\left(T_i - T_w\right)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-(m\pi/L)^2 \alpha t}\left[\frac{1-(-1)^m}{m\pi}\right]\sin\left(m\pi\, x/L\right) \tag{3.15}$$

Bu çalışmada sayısal yöntem olarak DAHYKF, IDAHYKF (İteratif DAHYKF), RK4, LGS (Hat Gauss-Seidel – Line Gauss-Seidel), PGS (Nokta Gauss-Seidel – Point Gauss-Seidel) kullanılmıştır. LGS ve PGS yöntemleri DAHYKF yöntemine benzer bir ayrıklaştırmayı kullanmaktadırlar (Bölüm 2'de bahsedilmiştir) ve bu nedenle bir karşılaştırma yapmak için bu probleme uygulanmıştır. RK4 yöntemi zamanda dört mertebe bir ayrıklaştırmaya sahiptir. Bu nedenle IDAHYKF yöntemide uygulamalara katılmıştır. IDAHYKF zaman için iterasyon uygulayarak zaman ayrıklaştırmasının mertebesi yükseltilmektedir.

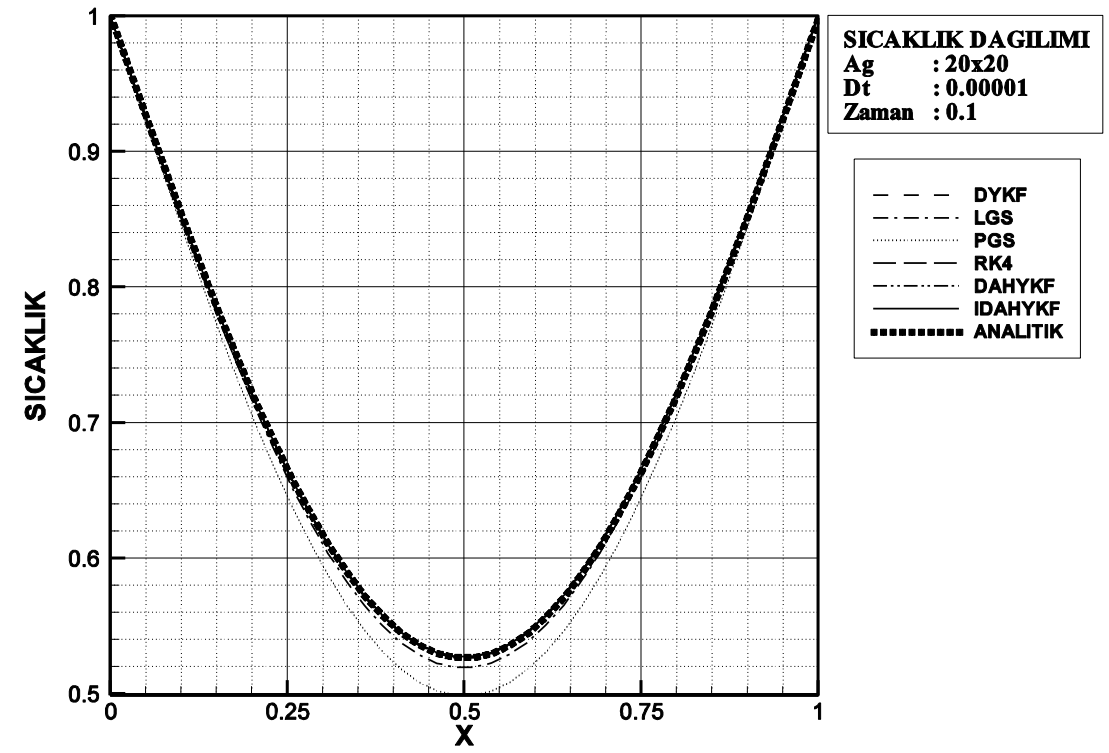
Çözüm ağı bölgesi birimsizleştirmeye göre 1x1 büyüklüğünde bir kare olarak seçilmiştir. Yapısal çözüm ağı olarak 20x20 ve 40x40 boyutları kullanılmış, birimsiz zaman adımı olarak da 0.00001 ve 0.0001 değerleri kullanılmıştır. Metin içinde 20x20 boyutlu çözüm ağı ve birimsiz zaman adımı olarak 0.00001 olan sonuçların bir kısmı verilecektir, geri kalan sonuçların tümü **EK E**'de verilmiştir.



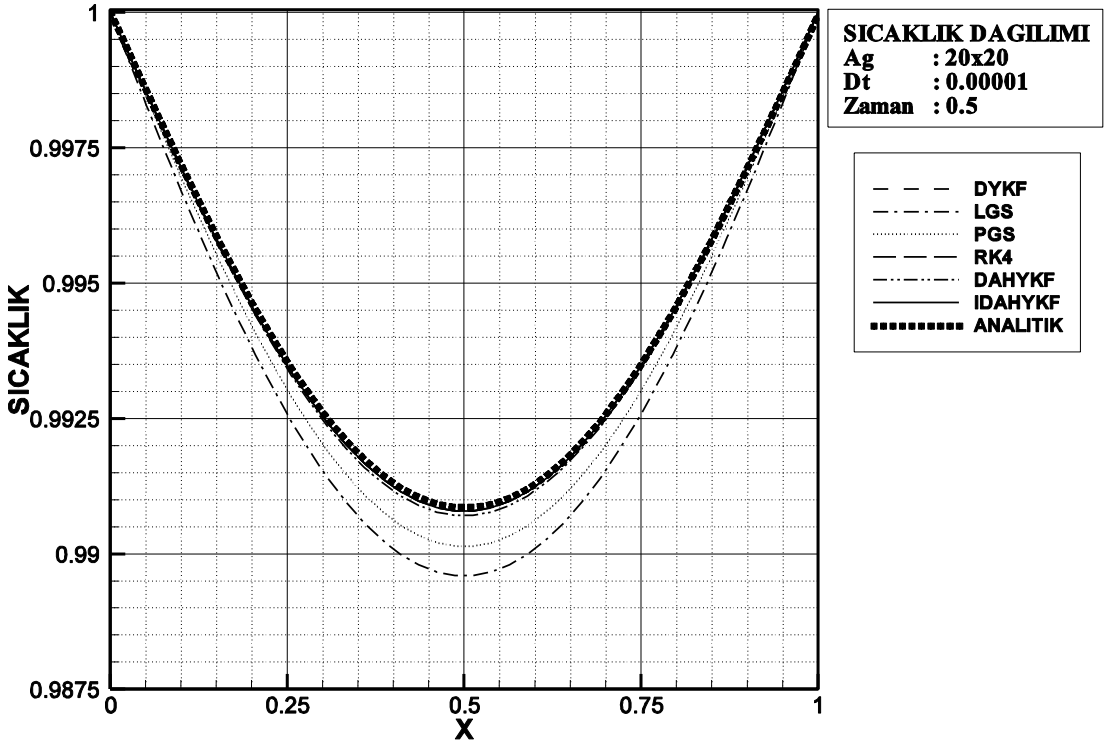
Şekil 3.34 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.1 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı.



Şekil 3.35 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı.

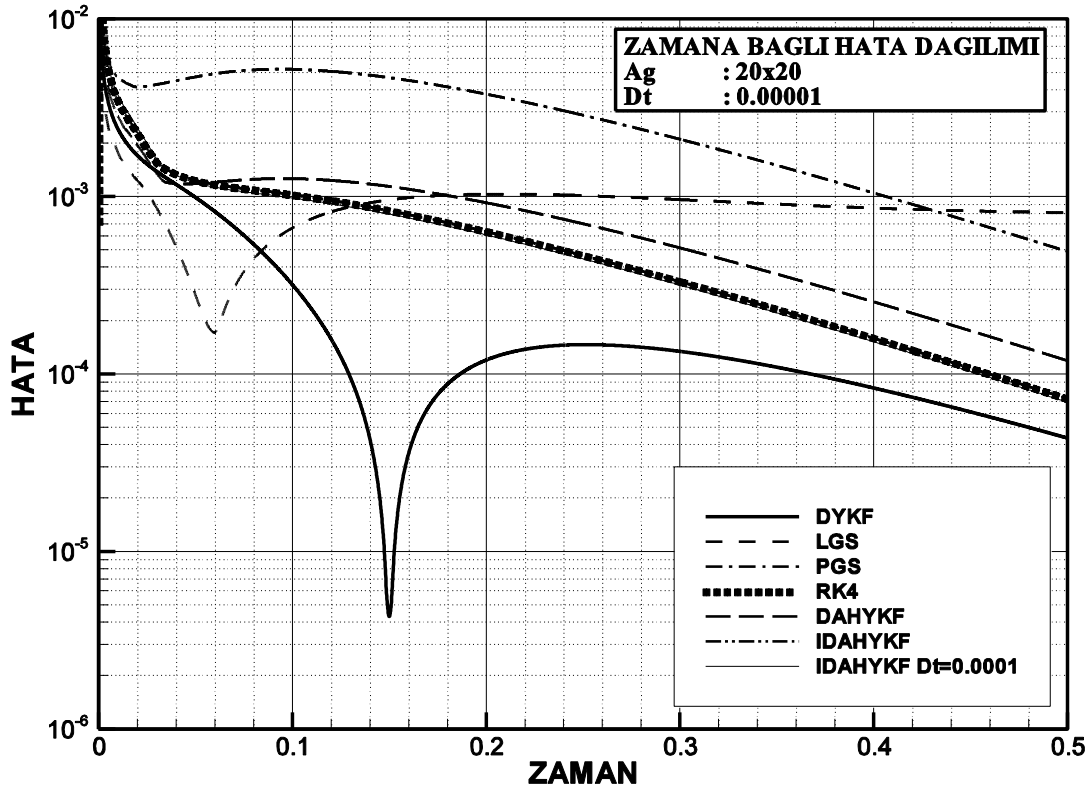


Şekil 3.36 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.1 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı.



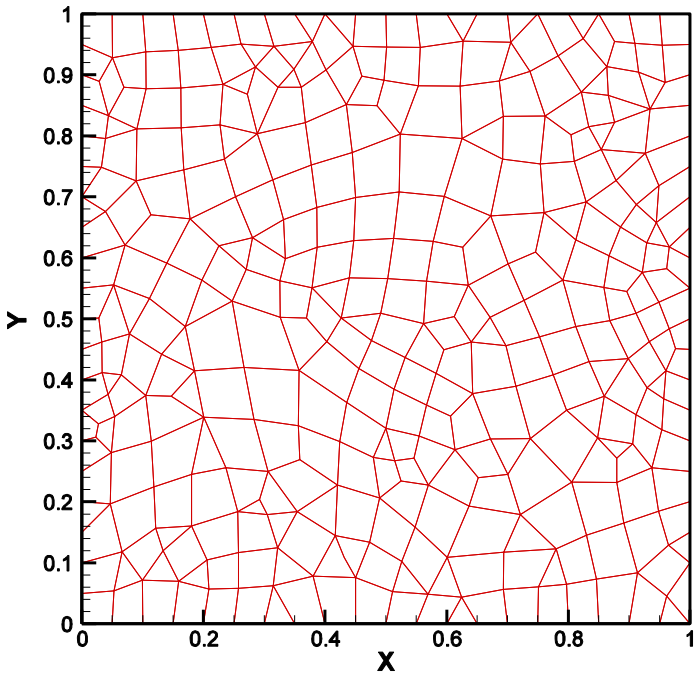
Şekil 3.37 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı.

Şekil 3.34-Şekil 3.38 20x20 boyutlu çözüm ağında ve birimsiz zaman adımı 0.0001 olan çözümlerin zaman boyunca ve uzunluk boyunca hata dağılımları görülebilmektedir. PGS yöntemi açık formülasyonlu olduğu için hata miktarları en fazla olan yöntemdir. LGS ve DAHYKF yöntemlerinin ayrıklaştırmaları kartezyen çözüm ağında tamamen aynı görünmektedir, aralarındaki fark DAHYKF yönteminin hücre merkezli olması nedeniyle farklı pozisyonlarda çözüm alınması ve daha önemlisi Neumann sınır şartı farklıdır. LGS ve DAHYKF yöntemlerinin sonuçlarının farklı olmasının sebebinin Neumann sınır şartı olduğu değerlendirilmektedir. Neumann sınır şartının daha başarılı olması Sonlu Hacimler yönteminin bir özelliğidir. RK4 yönteminin hata düzeyleri oldukça iyidir, sadece bu yöntemin şartlı kararlı olması nedeniyle Δt belli bir miktarın altına düşmeyecektir. DAHYKF yönteminin hata düzeyleri RK4 yöntemine yakındır. IDAHYKF yönteminin hata miktarları hem Δt =0.00001 hemde Δt =0.0001'de tamamen aynı gibidir. **Ek E**'de bilgisayar çözüm zamanı değerlerine bakılırsa bu uygulamada aynı performansı yarı zamanda yakalamanın mümkün olduğu görülmektedir. DYKF yöntemi bu uygulamada en iyi sonucu vermektedir, fakat diğer örneklerde DYKF yöntemi en iyi sonucu vermemektedir (Bkz. **Ek.E**)

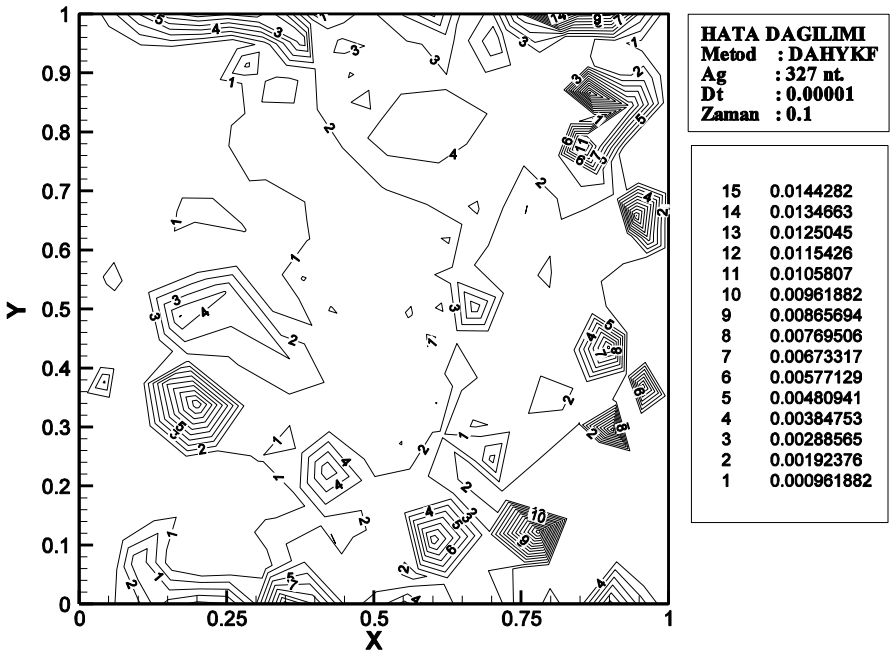


Şekil 3.38 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zamana göre dağılımı.

DAHYKF yöntemi için yapısal olmayan çözüm ağlarında üçgen elemanlar içeren dörtgen elemanlar (Şekil 3.39) zamana bağlı uygulamalarda Şekil 3.40'da görüldüğü gibi büyük hatalara sebebiyet vermektedir. Bu nedenle bu problemde tamamen dörtgen elemanlardan oluşan yapısal olmayan ağlar kullanılmıştır



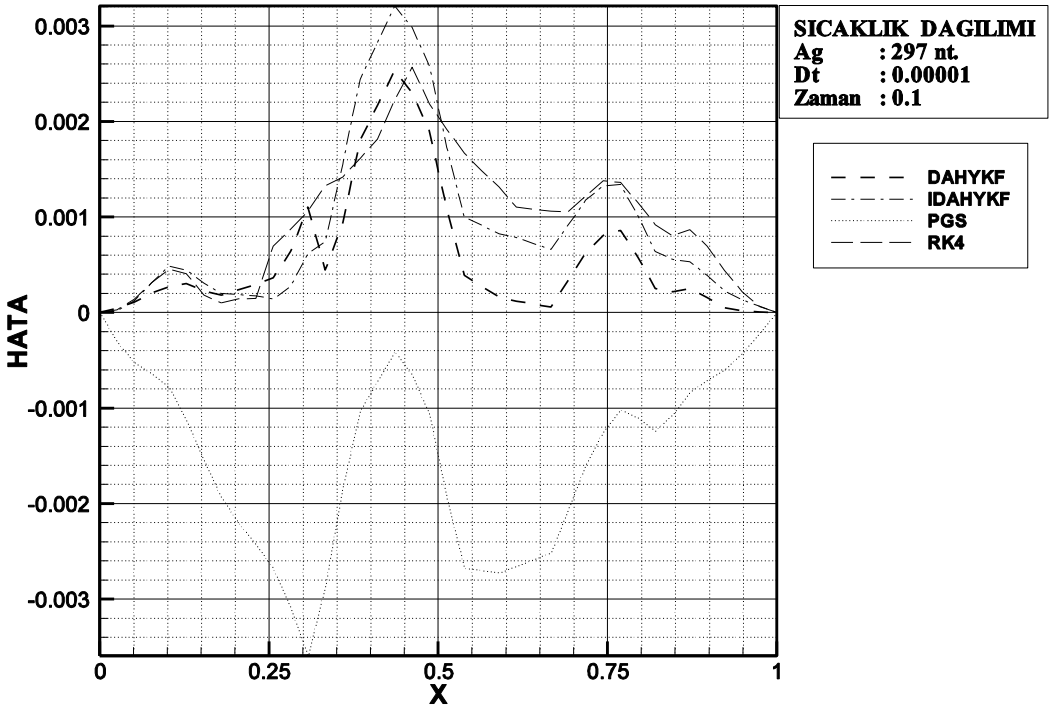
Şekil 3.39 327 noktalı aralarında üçgen elemanda bulunduran dörtgen yapısal olmayan çözüm ağı.



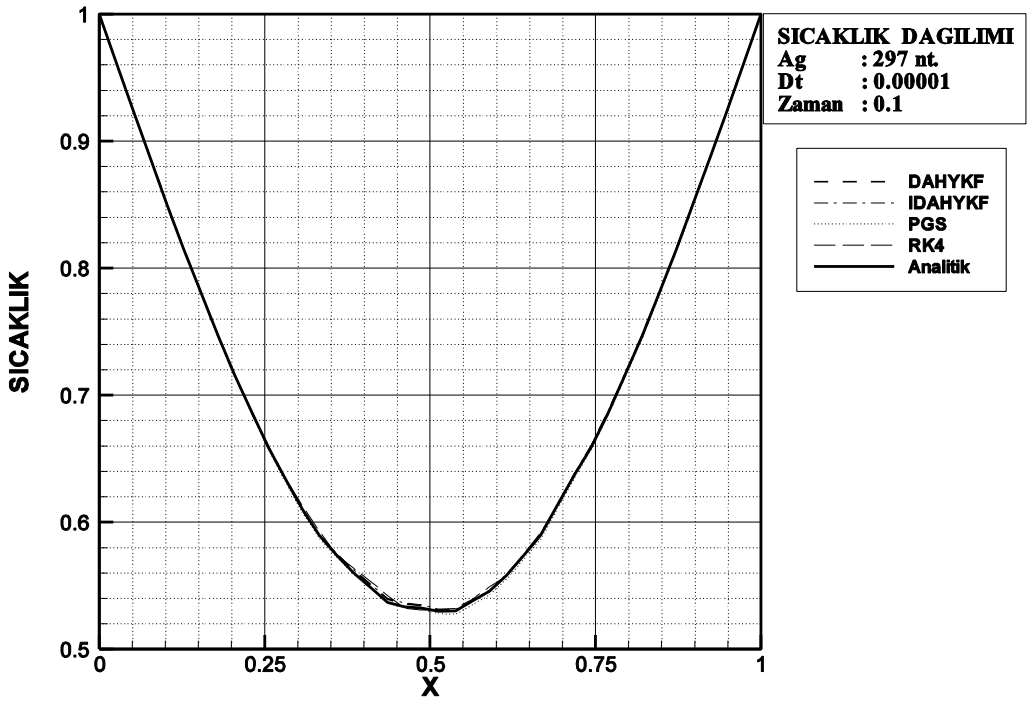
Şekil 3.40 327 noktalı aralarında üçgen elemanda bulunduran dörtgen yapısal olmayan çözüm ağında DAHYKF yönteminin hata dağılımı.

Sonlu farklar yöntemi olan LGS ve DYKF yöntemi elbette yapısal olmayan ağlarda kullanılamıyacaktır. Yapısal olmayan çözüm ağı olarak 297 ve 1283 noktalı çözüm ağları kullanılmıştır. Zaman adımı olarak ise yapısal çözüm ağlarında olduğu gibi 0.00001 ve 0.0001 kullanılmıştır. Bu bölümde sadece 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile birimsiz zaman adımı 0.00001 olan çözümlerin bir kısmı verilecektir. Diğer tüm çözümlerin grafikleri ve tabloları **Ek.E**'de verilmiştir.

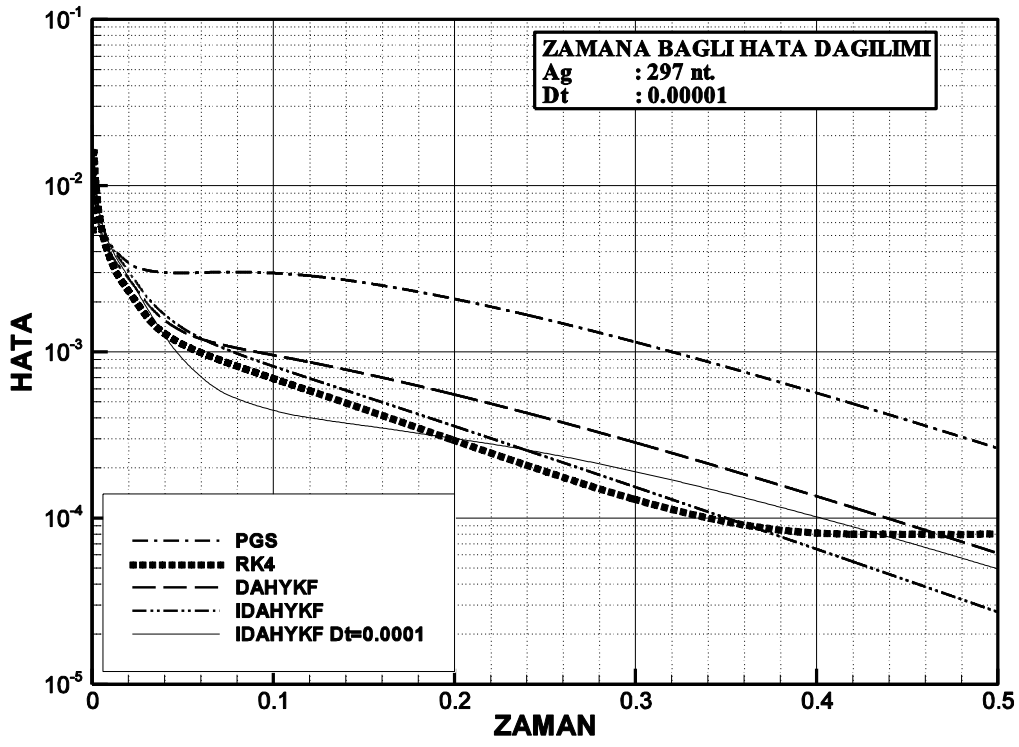
Şekil 3.41-Şekil 3.43'den görüleceği gibi PGS yöntemi dışındaki diğer yöntemler yaklaşık olarak aynı düzey hata miktarlarına sahiptir. DAHYKF yönteminin bir iterasyon bilgisayar zamanları (Bkz. **Ek.E**) RK4 yönteminkinden yaklaşık olarak birbuçuk kat daha fazladır. RK4 yöntemi bu noktada DAHYKF'den avantajlı görülmektedir. Aslında bunun sebebi RK4 yönteminin zamanda dört mertebe hassasiyete sahip olmasıdır. Elbette DAHYKF yöntemini daha zamanda yüksek mertebeli versiyonlarını yapmak mümkündür. Bu çalışmada DAHYKF yöntemine basit bir iteratif şema eklenerek (IDAHYKF yöntemi) zamana göre hassasiyet artırılmıştır. IDAHYKF yöntemi bir adımı bu uygulamalarda 4~6 iterasyonda çözmektedir yani DAHYKF yönteminden 4~6 kat uzun sürede çözüm vermektedir. Yapısal ağ kullanan uygulamalarda da görüldüğü on kat büyük Δt'lerde bile (Şekil 3.43) daha yüksek hassasiyet vermektedir.



Şekil 3.41 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerinde zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca hata dağılımı.



Şekil 3.42 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerinde zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zaman 0.5 iken birimsiz uzunluk boyunca sıcaklık dağılımı.



Şekil 3.43 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı üzerindeki zamana bağlı ısı yayınımı denklemi çözümlerinin birimsiz zamana göre dağılımı.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında “Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon – DYKF” yönteminin “değişen yön” kavramından esinlenerek, yapısal ve yapısal olmayan ağ yapılarının olumlu yanları ile kapalı formülasyonun avantajlarını bir araya getiren “Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyon - DAHYKF Yöntemi” adında Sonlu Hacim ayrıklaştırmalı yeni bir sayısal çözüm tekniği önerilmiştir.

Bilgisayar için programlanan DAHYKF yöntemi ile daire, basamak ve simetrik Joukowsky profili örnek geometriler etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım problemleri için, yapısal ve yapısal olmayan, bloklu ve bloksuz çözüm ağlarında çözümler yapılmış, elde edilen sonuçlar yapısal ve blok yapısal çözüm ağlarında DYKF yöntemi sonuçlarıyla ve yapısal olmayan çözüm ağları için de zaman adımında integrasyonu Runge-Kutta yöntemiyle gerçekleştiren sonlu hacim ayrıklaştırmalı bir başka yöntem (RK4) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Yöntemin zamana bağlı problemlerde ki performansını incelemek üzere aynı sıcaklıktaki iki paralel duvar arasında zamana bağlı ısı yayınımı örneği incelenmiştir. Diğer örneklerdeki yöntemlere ek olarak bu uygulamada PGS (Point Gauss-Seidel), LGS (Line Gauss-Seidel) ve DAHYKF yönteminin zamanda iteratif hale getirilmiş hali IDAHYKF yöntemleride kullanılmıştır. Bu test çalışmalarının sonucunda DAHYKF yöntemiyle ilgili olarak yapılan değerlendirmeler aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

- DAHYKF yöntemi hızlı kapalı bir formulasyona sahiptir (üç bantlı matris çözümleri ile).
- Yapısal ve yapısal olmayan dörtgen elemanlı çözüm ağlarını desteklemektedir. Ayrıca sık olmamak şartı ile çözüm ağı içinde üçgen elemanlar da sorunsuz olarak desteklenmektedir. Çözüm ağı tamamen üçgenlerden ya da baskın olarak üçgenlerden oluşursa kapalı formülasyonun özelliği (avantajı) azalacak ya da kaybolacaktır.
- Her türlü ağda şartsız kararlıdır. Bu analitik ve sayısal olarak ispatlanmıştır.
- Yapısal çözüm ağlarında, DYKF yöntemi gibi performansının çok yüksek olduğu bilinen metodlara yakın bir performans gösterebilmektedir. DYKF yönteminin aksine ağ burulmasından etkilenmemektedir.

- Blok yapısal çözüm ağlarında bloklar arası eşleşme sınır şartlarının gerekliliğini ortadan kaldırarak, hiç bir performans kaybı oluşturmamaktadır.
- DAHYKF yönteminin en üstün yanı ise yapısal olmayan çözüm ağlarında yakınsama, hassasiyet ve bilgisayar çözüm zamanları açısından çok yüksek bir performans göstermesidir. Yapısal çözüm ağlarındaki hassasiyet, yakınsama ve hızlılık karakterlerine denk bir performans elde edebilmektedir. Yöntem dörtgen elemanlardan oluşan yapısal olmayan çözüm ağlarının gizli yapısal karekterlerini yakalamaktadır. Öyle ki yapısal çözüm ağı kullanmanın avantajı kalmamaktadır.
- Zaman adımı uzunluğuna göre yakınsama karakteri DYKF yönteminden farklı olarak her türlü çözüm ağında aynıdır ve zaman adımı uzunluğunun belli bir değerinde optimum (minimum iterasyon sayısında) yakınsama değerlerine ulaşılmakta ve zaman adımı uzunluğu arttırılmaya devam edildiğinde bu değer değişmemektedir. Bu husus da optimum yakınsama için gerekli zaman adımı uzunluğunun önceden kestirilebileceği anlamına gelmektedir.
- Yöntem ağ yapısının düzgün olmamasına karşı hassasiyet göstermekte, fakat sadece hassasiyet kaybı oluşmaktadır. Yapılan örnek uygulamalarda hassasiyetin bir merteben fazla düşebildiği görülmüştür. Bununla birlikte sorun çok basit Laplasyen düzgünleştirme yöntemi kullanılarak giderilebilmektedir. Bu ilave işlemin süresi toplam çözüm süresi ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilecek düzeydedir.
- DAHYKF yönteminin Yaklaşık Çarpanlarına Ayırma (Approximate Factorization, **Mitchell ve Griffiths, 1980**), Alt-üst üçgensel ayırma (LU Decomposition, **Lomax ve diğ., 1999**) gibi daha üst düzey kapalı formülasyonlu yöntemlerin uygulamasına uygunluğu henüz araştırılmamıştır.
- DAHYKF yöntemi zamana bağlı uygulamalarda DYKF ve RK4 yöntemine yakın bir performans göstermektedir. Ayrıca DAHYKF yöntemini zamanda iteratif bir şema eklendiğinde ortaya çıkan IDAHYKF yöntemi çok daha iyi bir performans sergilemektedir.

Elde edilen sonuçlar DAHYKF yönteminin çeşitli çözüm ağı alternatifleriyle yüksek performans göstereceğini ortaya koymuştur. Yöntem, kolayca oluşturulabilen yapısal olmayan çözüm ağlarında yapısal çözüm ağlı kapalı formülasyonlu yöntemlerin performansını gösterebildiği için bu tür yöntemlerin avantajlarını yok edebilecektir.

Bu çalışmada, yeni bir yöntem önerildiği için sadece test amacıyla, nispeten basit sayılabilecek olan sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi üzerinde durulmuştur. Daha karmaşık akış modelleri olan Euler ve Navier-Stokes gibi denklemlerin çözümlerinde yöntemin nasıl davranacağını ileride yapılacak çalışmalar ortaya koyacaktır. Bu konuda, potansiyel akım problemlerinde çözülen denklemin zaten Euler denkleminin daha basitleştirilmiş bir modeli olduğu hususu yöntemin neler yapabileceği konusunda bir fikir verebilir. DAHYKF yöntemi ağ yapılarındaki esnekliği ile hibrid ağ yapılarını otomatik olarak destekleyecektir. Örneğin özellikle viskoz akımlarda sınır tabaka bölgesinde ortogonal ağ yapısına ihtiyaç duyulduğunda bu bölgede yapısal olan ve dış bölgelerde yapısal olmayan çözüm ağlarının kullanılması kolaylıkla mümkün olacaktır.

Bu tez çalışmasını izlemesi gereken, oldukça geniş bir perspektifte çalışma konuları olduğu değerlendirilmektedir. Bu çalışmalar yöntemin kendini tam anlamda kanıtlaması için gereklidir de. Örnekler, sıkışamaz akış, adaptif çözüm ağı, daimi olmayan akış, sıkışabilir akışlarda şok yakalama, çoklu ağ uygulamaları gibi uzayan bir listede sıralanabilir. Diğer temel bir uygulama ise yöntemin üç boyutlu hale getirilmesidir.

Ayrıca bu yöntemle ileriki aşamalarda asılı noktaları (hanging nodes) destekleyen bir formülasyon da mümkün görülmektedir. Eğer bu yapı eklenirse yöntemin neredeyse tüm ağ yapılarını aynı hızlı kapalı formülasyonla çözümlemesi mümkün olacaktır. Bu tip bir algoritmanın destekleyeceği ağ ve çözüm algoritmalarından bazıları “Alan yeniden yerleştirme (Domain Decomposition) yöntemi”, “Çoklu Ağ Metodu **(Pierce ve Giles, 1997, Pernice, 2000)**“, Kartezyen **(Wang ve diğ., 1999)** ağlı yöntemler” ve “Adaptif ağ kullanan yöntemler **(Wendt, 1996)**“ olarak sıralanabilir. Elbette tüm yöntemleri uygulamak bu tez kapsamını aşacaktır, fakat vurgulanmak istenen yöntemin önünün açık olmasıdır.

KAYNAKLAR

Abarbanel, S., Dwoyer, D., Gottlieb, D., 1986. Improving The Convergence Rate To Steady State Of Parabolic ADI Methods, *Journal Of Computational Physics,* **67**, 236-239.

Abrashin, V.N., 1999. The Stability of Difference Schemes of the Many-Component Alternating Direction Method for Parabolic Equations and Systems, *Differential Equations*, **35,** 2, 211-224.

Abrashin, V.N., Dzyuba, I.A., 1994. An Alternating Direction Method for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics in Domain with Curvilinear Boundary, *Differential Equations,* **30, 7**, 1082-1087.

Abrashin, V.N., Lèkhtikov, S.N., 1995. Combining the Alternating Direction Method and the Method of Finite Elements in Solving Problems of Mathematical Physics. I, *Differential Equations,* **31, 7**, 1099-1109.

Abrashin, V.N., Zhadaeva, N.G., 1997. Many-component Alternating Direction Method for Stationary Problems of Mathematical Physics. II, *Differential Equations*, **33,** 9, 1216-1225.

Aftosmis, M.J., 1997. Solution Adaptive Cartesian Grid Methods for Aerodynamics Flow with Complex Geometries, *28th Computational Fluid Dynamics,* 3-7 March.

Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., 1984. Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer, Hemisphere Publication Corporation, New York, s.599

Beam, R.M. and Warming, **R.F.,** 1982. Implicit Numerical Method for the Compressible Navier-Stokes and Euler Equattions, *1981-82 Lecture Notes of Von Karman Institute for Fluid Dynamics.*

Berger, M.J., and Jameson, **A.,** 1985. Automatic Adaptive Grid Refinement for the Euler Equations, *AIAA Journal*, **23**, 4, 561-568

Cai, Z., Douglas, J., Park, M., 2003. Development and Analysis of Higher Order Finite Volume Methods over Rectangles for Elliptic Equations, *Advances in Computational Mathematics*, **19**, 3-33.

Caughey, D.A. and Hafez, M.M., 1994. Frontiers of Computational Fluid Dynamics, John-Wiley & Sons, Newyork.

Chassaing, J.C., Gerolymos, G.A. and Vallet, I., 2003. Reynolds-Stress Model Dual-Time-Stepping Computation of Unsteady Three-Dimensional Flows, *AIAA Journal, **41**, 10, 1882-1894***.**

Douglas, J., 1955. ``Variable Time Steps In The Solution Of The Heat Flow Equation By A Difference Equation".*American Mathematical Society. Proceedings* [Issn: 0002-9939], Cilt: 6, No: ?, Sf: 787-793, 1955.

Douglas, J., 1956, The Solution Of The Heat Equation By A High Order Correct Difference Equation, *Studies In Applied Mathematics*, **35**, 145-151.

Douglas, J., 1956. On The Relation Between Stability And Convergence In The Numerical Solution Of The Linear, *SIAM Journal On Applied Mathematics*, 4, 20-37.

Douglas, J., 1961. On Incomplete Iteration For Implicit Parabolic Difference Equations, *SIAM Journal On Applied Mathematics*, **8**, 433-439.

Douglas, J., 1996. Alternating-Direction Iteration for the p-Version of the Finite Element Metod, *Partial Differantial Application, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics***, 177**, 121-135.

Douglas, J., Gallie, T.M., 1955. On The Numerical Integration Of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ Implicit Methods, *SIAM Journal On Applied Mathematics*, **3**, 42-65.

Douglas, J., Garder, A., Pearcy, C., 1966. Multistage Alternating Direction Methods, *SIAM Journal On Numerical Analysis*, **3**, 570-581.

Douglas, J., Kellogg, R., Varga, R., 1963. Alternating Direction Iteration Methods For N Space Variables, *Mathematics Of Computation*, **17**, 279-282.

Douglas, J., Kim, S., Lim, H., 2003. An Improved Alternating-Direction Method for a Viscous Wave Equation, *Contemporary Mathematics*, **329,** 99-104.

Douglas, J., Rachord, H., 1956. On The Numerical Solution Of Heat Conduction Problems In Two And Three Space Variables, *American Mathematical Society. Transactions*, **82**, 421-439.

Dzyuba, I.A., 1997. On a Version of the Multicomponent Alternating Direction Method to Solve a system of Equations in Elasticity, *Differential Equations,* **33,** 7, 945-949.

Evans, D., Avelas, G., 1981. The Solution Of Elliptic Partial Differential Equations In R-Theta Geometry By Extrapolated, *Mathematics And Computers In Simulation,* **23**, 367-372.

Fairweat, G., Mitchell, A., 1965. A New Alternating Direction Method For Parabolic Equation In 3 Space Variables, *SIAM Journal On Applied Mathematics,* **13**, 8, 957-970.

Gander, W., and Gruntz, D., 1999. Derivation of Numerical Methods Using Computer Algebra, *SIAM Review*, **3**, 577-593.

Han, D., **2002**. A Modified Alternating Direction Method For Variational Inequality Problems, *Applied Mathematics And Optimization,* **45**, 22, 63-74.

He, B., Yang, H., Wang, S., 2000. Alternating Direction Method With Self-Adaptive Penalty Parameters For Monotone Variational, *Journal Of Optimization Theory And Applications,* **106**, 14, 337-356.

Henne, P.A., 1990, Applied Computational Aerodynamics, AIAA Inc.,Washington.

Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., 2000. Computational Fluid Dynamics, Engineering Education System, Wichita, Kansas

Hwang, C., Yang, S., 1993. Locally Implicit Total Variation Diminishing Schemes On Mixed Quadrilateral-Triangular Meshes, *AIAA Journal*, **31**, 15, 2008-2015.

Jameson, A., 1997. Essential Elements of Computational Algorithms for Aerodynamics Analysis and Design, *NASA/CR 97 206268.*

Jameson, A., 2003. The Role of CFD in Preliminary Aerospace Design, *4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conference,* Jully 6-11, Honolulu, Hawaii.

Jameson, A., Turkel, E., 1981. Implicit Schemes and LU Decompositions, *Mathematics of Computation,* **37**, 156, 385-397.

Jones, R.T., 1979. Classical Aerodynamic Theory, *NASA Reference Publication 1050.*

Karman, S.L., Steinbrenner, J.P., and Kisielewski, K.M., 1986, *58th Meeting of the Fluid Dynamics in Aeronautics on Applications of Computational Fluid Dynamics in Aeronautics, Aix En-Provence, France.*

Kellog, R., 1969. A Nonlinear Alternating Direction Method, *Mathematics Of Computation*, **23**, 9 , 23-30.

Konolalov, A., 2003, A Remark On The Theory Of The Cummutative Alternating Direction Method, *Differential Equations*, **39**, 13, 973-983.

Kreher, D.L. and Stinson, D.R., 1999. Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration and Search, CRC Press, Newyork.

Krishnamachari, S., Hayes, L., Russell, T., 1989**.** A Finite-Element Alternating Direction Method Combined With A Modified Method Of Characteristic, *SIAM Journal On Numerical Analysis,* **26**, 15, 1462-1473.

Krist, S.L., Biedron, R.T. and Rumsey, C.L., 1998. CFL3D User's Manual, *NASA/TM 1998 208444.*

Lee, Y., Lee, C., 2003. A New Indirect Anistropic Quadrilateral Mesh Generation Scheme With Enhanced Local Mesh Smoothing Pr, *International Journal For Numerical Methods In Engineering,* **58**, 26, 277-300.

Lomax, H., Pulliam, T.H. and Zingg, D.W., 1999. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, Springer, New York.

Matsushima, K., Obayashi, S. and Fujii, K., 1987. Navier-Stokes Computations of Transonic Flows Using the LU-ADI Method, *AIAA paper, 87-0421 AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada.

Metcalf, M. and Reid, J., 1998. Fortran 90/95 Explained, Oxford University Press, Oxford.

Meyer, G., 1977. Alternating Direction Method For Multidimensional Parabolic Free-Surface Problems, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, **11**, 8, 741-752.

Mitchell, A.R. and Griffiths, D.F., 1980. The Finite Difference Method in Partial Differantial Equation, John-Wiley & Sons, Norwich.

Needham, T., 1997. Visual Complex Analysis, *Clarendon Press, Oxford*

Nyhoff, R.N. and Leestma, C.S., 1997. Introduction to Fortran 90 for Engineers and Scientists, Prentice Hall, London.

Ozyoruk, Y. and Long, **L.N.,** 1997. Multigrid Acceleration of a High-Resolution Computational Aeroacoustics Scheme, *AIAA Journal*, **35**, 3

Pandya, S.A. and Aftosmis, M.J., 2001. Computation of External Aerodynamics for a Canard Rotot/Wing Aircraft, *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 8-11 January, Reno.

Pernice, M., 2000. A Hybrid Method for the Steady-State Incompressible Navier-Stokes Equations, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **10**, 74-91

Pierce, N.A. and Micheal, B.G., 1997. Preconditioned Multigrid Methods for Compressible Flow Calculations on Streched Meshes, *Journal of Computational Physics,* **136**, 425-445

Pozrikidis, C., 1998. Numerical Computations in Science and Engineering, *Oxford University Press.*

Pulliam, T. H. and Chaussee, D.S., 1981. A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm, *Journal of Computational Physics*, **39**, No. 2, 347-363.

Pulliam, T.H., Chaussee, D.S., 1981, A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm, *Journal of Computational Physics,* **39,** 2, 347-363.

Rai, M.M., 1984, A Conservative Treatment of Zonal Boundaries for Euler Equation Calculations, *AIAA Paper, 84-0164.*

Rai, M.M., 1985, An Implicit, Conservative, Zonal-Boundary Scheme for Euler Equation Calculations, *AIAA Paper 85-0488, Reno, Nevada.*

Rosenfield, M., Yassour, Y., 1995. Fully Implicit Solution Of Time Dependent Partial Differential Equations In Arbitrary Multizone, *AIAA Journal*, **33**, 8, 859-863.

Sarrate, J., Huerta, A., 2000. Efficient Unsructured Quadrilateral Mesh Generation, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, **49**, 37, 1327-1350.

Sasena, J.M., 1998. Optimization of Computer Simulations via Smoothing Splines and Krigging Metamodels, *MasterThessis*, University of Michigan.

Scraton, R., Singh, A., 1988. A 4th Order Alternating Direction Method Based On The (2,2)-Pade Approximant, *International Journal Of Computer Mathematics*, **23**, 4, 283-293.

Sedgewick, R., 1988. Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, USA.

Spurk, H.J., 1997, Fluid Mechanics, Springer, Newyork

Stewart, **M.E.M.,** 1992. Domain-Decomposition Algorithm Applied to Multielement Airfoil Grids, *AIAA Journal*, **30**, 6, 1457-1461

Swanson, R.C. and Turkel, **E.**, 1997. Multistage Schemes with Multigrid for Euler and Navier-Stokes , *NASA Technical Paper 3631*, Langley Research Center, Hampton, Virginia.

Thompson, J.F., Soni, B.K. and Weatherill, N.P., 1999. Handbook of Grid Generator, CRC Press, New York.

Vries, H., 1984. A Comparitive Study Of ADI Splitting Methods For Parabolic Equations In Two Space Dimensions, *Journal Of Computational And Applied Mathematics* **10**, 179-193.

Wachspress, E., Habetler, G., 1960. An Alternating Direction Implicit Iteration Technique, *S I A M Journal On Applied Mathematics*, **8**, 403-424.

Walters, R.W., Thomas, J.L. and Switzer, G.F., 1986. Aspect and Applications of Patched Grid Calculations, *AIAA/ASME 4th Fluid Mechanics, Plasma Dynamics and Lasers Conference.*

Wang, S., Yang, H., He, B., 2000. Solving A Class Of Symmetric Variotional Inequalities By A New Alternating Direction Method, *Computers And Mathematics With Applications*, **40**, 27, 927-937.

Wang, Z., 2000. A Fast Nested Multi-Grid Viscous Flow Solver For Adaptive/Quad Grids, *International Journal For Numerical Methods In Fluids,* **33**, 29, 657-680.

Wang, Z.J., Cphen, R.F., Hariharan, N. And Przekwas, A.J., 1999. A 2^N Tree Based Automated Viscous Cartesian Grid Methodology for Feature Capturing, *AIAA **99**, 3300.*

Wendt, J.F., 1996. Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York.

Widlund, O.B., 1967. On Difference Methods for Parabolic Equations and Alternating Direction Implicit Methods for Elliptic Equations, *IBM Journal of Research and Development: Difference Equations,* **11**, 2, 239-243.

Yokota, J.W., Caughey, D.A., 1988. LU Implicit Multigrid Algorithm for the Three Dimensional Euler Equations, *AIAA Journal*, **26,** 9, 1061-1069.

Yu, J., 1999, MESHGEN 1.2 Unstructured Grid Generator, Yeungman Universitesi, CAFlab, http:\\caflab.yeungman.ac.kr.

Yükselen, **A.,** 1995. Aerodinamik I Ders Notları, Hava Harp Okulu Yayınları

Zeeuw, D.D. and Powell, K.G., 1993. An Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equations, *Journal of Computational Physics*, **104**, 56-68

Zhadaeva, N.G., 1997. Multicomponent Version of the Alternating Direction Method for Evolution problems. II, *Differential Equations,* **33,** 7, 1006-1009.

Zhadeva, N.G., 1998. Multicomponent Alternating Direction Method of Solving Many-Dimensional Problems for Elliptic Equations with Mixed Derivatives, **34,** 7, 949-959.

Zhu, J., Zienkiewicz, O., Hinton, E., Wu, J., 1991. A New Approach To The Development Of Automatic Quadrilateral Mesh Generation, *International Journal For Numerical Methods In Engineering,* **32**, 14, 849-866.

EK. A Zamana Bağlı Isı Geçişi Denkleminin Eğrisel Koordinatlara Dönüşümü Ve DYKF Yöntemi İle Ayrıklaştırılması

Metrikler ve Jakobiyen

Bir (ξ, η) eğrisel koordinat sisteminin (x, y) kartezyen koordinat sistemine

$$\xi = \xi(x, y)$$
$$\eta = \eta(x, y) \tag{A.1}$$

şeklinde bağlı olduğu varsayılarak ξ ve η değişkenlerinin tam diferansiyelleri için matris formda

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

veya (A.2) bağıntılarını tersine düşünerek x ve y değişkenlerinin tam diferansiyelleri için

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

yazmak mümkündür. Burada değişkenlerin altında bulunan indisler hangi değişkene göre kısmi türev alındığını belirtmektedir. (A.2) eşitliğinin sağ tarafındaki matris çarpımı (A.3) eşitliğinin sağında gerekli yere konursa eşitliğin gerçekleşmesi için

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}^{-1} \tag{A.4}$$

olması gerektiği görülür. Bu matris eşitliği açılarak

$$\xi_x = J \cdot y_\eta \quad , \quad \xi_y = -J \cdot x_\eta \quad , \quad \eta_x = -J \cdot y_\xi \quad , \quad \eta_y = J \cdot x_\xi \tag{A.5}$$

elde edilir. Burada J büyüklüğü

$$J = \frac{1}{x_\xi \cdot y_\eta - y_\xi \cdot x_\eta} \tag{A.6}$$

olup, Jakobiyen olarak adlandırılmakta, $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ büyüklükleri ise dönüşümün metrikleri olarak anılmaktadır. Metrikler ve jakobiyen eşitlikleri elde edildikten sonra zamana bağlı Isı Geçişi denklemi eğrisel koordinat sistemine dönüştürülebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{A.7}$$

şeklinde verilen zamana bağlı difüzyon denklemini eğrisel koordinatlara dönüştürmek için *x* e göre ikinci dereceden türevi, zincir kuralını uygulayarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

(A.8a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\xi_x + \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\eta_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_{xx} \tag{A.8a}$$

şeklinde yazalım. Burada

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\xi_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\eta_x \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) &== \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\xi_x\end{aligned} \tag{A.9}$$

olup bunlar (A.8a) eşitliğinde yerine konarak düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi_x)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\eta_x\xi_x + \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_{xx} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\eta_x)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\xi_x\eta_x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_{xx} \tag{A.10a}$$

bulunur. Benzeri şekilde *y* ye göre ikinci türev için de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi_y)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\eta_y \cdot \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_{yy} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\eta_y)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\xi_y \cdot \eta_y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_{yy} \tag{A.10b}$$

yazmak mümkündür. (A.10a) bağıntıları (A.7) denkleminde yerlerine konarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\xi_x{}^2 + \xi_y{}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\left(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \left(\eta_x{}^2 + \eta_y{}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{A.11}$$

elde edilir. Difüzyon denkleminin eğrisel koordinatlara dönüştürülmüş bu şekli pratikte pek tercih edilmez. Denklemdeki katsayıların $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ metrikleri cinsinden ifadesi daha uygun olur. Buna göre (A.5) bağıntıları kullanılarak katsayılar için

$$\xi_x{}^2 + \xi_y{}^2 = \left(J \cdot y_\eta\right)^2 + \left(-J \cdot x_\eta\right)^2 = J^2\left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right) \tag{A.12a}$$

$$2\left(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y\right) = 2\left[\left(-J \cdot y_\xi\right)\left(J \cdot y_\eta\right) + \left(J \cdot x_\xi\right)\left(-J \cdot x_\eta\right)\right] = -2J^2\left(y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta\right) \tag{A.12b}$$

$$\eta_x{}^2 + \eta_y{}^2 = \left(-J \cdot y_\xi\right)^2 + \left(J \cdot x_\xi\right)^2 = J^2\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) \tag{A.12b}$$

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial\left(J \cdot y_\eta\right)}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial\left(J \cdot y_\eta\right)}{\partial \eta}\eta_x = \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} y_\eta + J\frac{\partial y_\eta}{\partial \xi}\right)\left(J \cdot y_\eta\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial \eta} y_\eta + J\frac{\partial y_\eta}{\partial \eta}\right)\left(-J \cdot y_\xi\right) \\ &= J\left(J_\xi y_\eta^2 - J_\eta y_\xi y_\eta\right) + J^2\left(y_{\eta\xi} y_\eta - y_{\eta\eta} y_\xi\right) \end{aligned} \tag{A.12c}$$

$$\begin{aligned} \xi_{yy} &= \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial\left(-J \cdot x_\eta\right)}{\partial \xi}\xi_y + \frac{\partial\left(-J \cdot x_\eta\right)}{\partial \eta}\eta_y = \\ &= -\left(\frac{\partial J}{\partial \xi} x_\eta + J\frac{\partial x_\eta}{\partial \xi}\right)\left(-J \cdot x_\eta\right) - \left(\frac{\partial J}{\partial \eta} x_\eta + J\frac{\partial x_\eta}{\partial \eta}\right)\left(J \cdot x_\xi\right) \\ &= Jx_\eta^2 + y_\eta^2\left(J_\xi x_\eta^2 - J_\eta x_\xi x_\eta\right) + J^2\left(x_{\eta\xi} x_\eta - x_{\eta\eta} x_\xi\right) \end{aligned} \tag{A.12d}$$

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= J\left(J_\xi y_\eta^2 - J_\eta y_\xi y_\eta\right) + J^2\left(y_{\eta\xi} y_\eta - y_{\eta\eta} y_\xi\right) \\ &\quad + J\left(J_\xi x_\eta^2 - J_\eta x_\xi x_\eta\right) + J^2\left(x_{\eta\xi} x_\eta - x_{\eta\eta} x_\xi\right) \end{aligned} \tag{A.12e}$$

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= J\left\{J_\xi\left[\left(x_\eta\right)^2 + \left(y_\eta\right)^2\right] - J_\eta\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)\right\} \\ &\quad + J^2\left(x_{\eta\xi} x_\eta - x_{\eta\eta} x_\xi + y_{\eta\xi} y_\eta - y_{\eta\eta} y_\xi\right) \end{aligned} \tag{A.12f}$$

$$\eta_{xx} = \frac{\partial \eta_x}{\partial x} = \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial\left(-J \cdot y_\xi\right)}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial\left(-J \cdot y_\xi\right)}{\partial \eta}\eta_x =$$
$$= -\left(\frac{\partial J}{\partial \xi}y_\xi + J\frac{\partial y_\xi}{\partial \xi}\right)\left(J \cdot y_\eta\right) - \left(\frac{\partial J}{\partial \eta}y_\xi + J\frac{\partial y_\xi}{\partial \eta}\right)\left(-J \cdot y_\xi\right) \tag{A.12g}$$
$$= J\left[-J_\xi y_\xi y_\eta + J_\eta y_\xi^2\right] + J^2\left(-y_{\xi\xi}y_\eta + y_{\xi\eta}y_\xi\right)$$

$$\eta_{yy} = \frac{\partial \eta_y}{\partial y} = \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial\left(J \cdot x_\xi\right)}{\partial \xi}\xi_y + \frac{\partial\left(J \cdot x_\xi\right)}{\partial \eta}\eta_y =$$
$$= \left(\frac{\partial J}{\partial \xi}x_\xi + J\frac{\partial x_\xi}{\partial \xi}\right)\left(-J \cdot x_\eta\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial \eta}x_\xi + J\frac{\partial x_\xi}{\partial \eta}\right)\left(J \cdot x_\xi\right) \tag{A.12h}$$
$$= J\left(-J_\xi x_\xi x_\eta + J_\eta x_\xi^2\right) + J^2\left(-x_{\xi\xi}x_\eta + x_{\xi\eta}x_\xi\right)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = J\left(-J_\xi y_\xi y_\eta + J_\eta y_\xi^2\right) + J^2\left(-y_{\xi\xi}y_\eta + y_{\xi\eta}y_\xi\right)$$
$$+ J\left(-J_\xi x_\xi x_\eta + J_\eta x_\xi^2\right) + J^2\left(-x_{\xi\xi}x_\eta + x_{\xi\eta}x_\xi\right) \tag{A.12i}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = J\left[J_\eta\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) - J_\xi\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)\right]$$
$$+ J^2\left(x_{\xi\eta}x_\xi - x_{\xi\xi}x_\eta + y_{\xi\eta}y_\xi - y_{\xi\xi}y_\eta\right) \tag{A.12j}$$

(A.12a-e) katsayıları sırasıyla

$$\alpha = \xi_x^{\,2} + \xi_y^{\,2} = J^2\left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right) \tag{A.13a}$$

$$-2\beta = 2\left(\eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y\right) = -2J^2\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right) \tag{A.13b}$$

$$\gamma = \eta_x^{\,2} + \eta_y^{\,2} = J^2\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) \tag{A.13c}$$

$$P = \xi_{xx} + \xi_{yy} = J\left[J_\xi\left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right) - J_\eta\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)\right]$$
$$+ J^2\left(x_\eta x_{\xi\eta} - x_\xi x_{\eta\eta} + y_\eta y_{\xi\eta} - y_\xi y_{\eta\eta}\right) \tag{A.13d}$$

$$Q = \eta_{xx} + \eta_{yy} = J\left[J_\eta\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) - J_\xi\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)\right]$$
$$+ J^2\left(x_\xi x_{\xi\eta} - x_\eta x_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\eta} - y_\eta y_{\xi\xi}\right) \tag{A.13e}$$

olarak isimlendirilmek suretiyle (A.11) denklemi daha kısaca

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + P\frac{\partial u}{\partial \xi} + Q\frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{A.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. P ve Q büyüklükleri için elde edilen (A.13a) bağıntılarında jakobiyenin türevleri yer almakta olup, bu türevlerin açılması istenirse

$$J_{\xi} = \frac{-\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(x_{\xi} \cdot y_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta}\right)}{\left(x_{\xi} \cdot y_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta}\right)^2} = -J^2\left(x_{\xi\xi} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\xi\eta} - y_{\xi\xi} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\xi\eta}\right) \tag{A.15a}$$

$$J_{\eta} = \frac{-\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(x_{\xi} \cdot y_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta}\right)}{\left(x_{\xi} \cdot y_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta}\right)^2} = -J^2\left(x_{\xi\eta} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\eta\eta} - y_{\xi\eta} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta\eta}\right) \tag{A.15b}$$

olup bunlar (A.13d) bağıntısında yerleştirilerek

$$P = J\begin{bmatrix} -\left(x_{\xi\xi} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\xi\eta} - y_{\xi\xi} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\xi\eta}\right)\alpha \\ +\left(x_{\xi\eta} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\eta\eta} - y_{\xi\eta} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta\eta}\right)\beta \end{bmatrix} + J^2\left(x_{\eta}x_{\xi\eta} - x_{\xi}x_{\eta\eta} + y_{\eta}y_{\xi\eta} - y_{\xi}y_{\eta\eta}\right)$$

(A.16a)

ve düzenlenerek

$$P = J\begin{bmatrix} \left(-\alpha y_{\xi\eta} + \beta y_{\eta\eta} - Jx_{\eta\eta}\right)x_{\xi} + \left(\alpha y_{\xi\xi} - \beta y_{\xi\eta} + J x_{\xi\eta}\right)x_{\eta} \\ +\left(\alpha x_{\xi\eta} - \beta x_{\eta\eta} - Jy_{\eta\eta}\right)y_{\xi} + \left(-\alpha x_{\xi\xi} + \beta x_{\xi\eta} + J y_{\xi\eta}\right)y_{\eta} \end{bmatrix} \tag{A.16b}$$

ya da

$$P = J\begin{bmatrix} \left(-\alpha y_{\eta}\right)x_{\xi\xi} + \left(\alpha y_{\xi} + \beta y_{\eta} + J x_{\eta}\right)x_{\xi\eta} - \left(\beta y_{\xi} + J x_{\xi}\right)x_{\eta\eta} \\ \left(\alpha x_{\eta}\right)y_{\xi\xi} - \left(\alpha x_{\xi} + \beta x_{\eta} - J y_{\eta}\right)y_{\xi\eta} + \left(\beta x_{\xi} - J y_{\xi}\right)y_{\eta\eta} \end{bmatrix} \tag{A.16c}$$

şeklinde yazılabilir. (A.15a,b) bağıntıları bu kezde (A.13e) bağıntısında yerleştirilerek ve (A.13b,c) bağıntıları dikkate alınarak

$$Q = J\begin{bmatrix} -\left(x_{\xi\eta} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\eta\eta} - y_{\xi\eta} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\eta\eta}\right)\gamma \\ +\left(x_{\xi\xi} \cdot y_{\eta} + x_{\xi} \cdot y_{\xi\eta} - y_{\xi\xi} \cdot x_{\eta} - y_{\xi} \cdot x_{\xi\eta}\right)\beta \end{bmatrix} + J^2\left(x_{\xi}x_{\xi\eta} - x_{\eta}x_{\xi\xi} + y_{\xi}y_{\xi\eta} - y_{\eta}y_{\xi\xi}\right)$$

(A.17a)

ve düzenlenerek

$$Q = J\begin{bmatrix} \left(\beta y_{\xi\eta} - \gamma y_{\eta\eta} + J x_{\xi\eta}\right)x_{\xi} + \left(-\beta y_{\xi\xi} + \gamma y_{\xi\eta} - J x_{\xi\xi}\right)x_{\eta} \\ +\left(-\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J y_{\xi\eta}\right)y_{\xi} + \left(\beta x_{\xi\xi} - \gamma x_{\xi\eta} - J y_{\xi\xi}\right)y_{\eta} \end{bmatrix} \tag{A.17b}$$

ya da

$$Q = J\begin{bmatrix} +\left(\beta y_\eta - J x_\eta\right)x_{\xi\xi} + \left(-\beta y_\xi - \gamma y_\eta + J x_\xi\right)x_{\xi\eta} + \left(\gamma y_\xi\right)x_{\eta\eta} \\ -\left(\beta x_\eta + J y_\eta\right)y_{\xi\xi} + \left(\ \beta x_\xi + \gamma x_\eta + J y_\xi\right)y_{\xi\eta} - \left(\gamma x_\xi\right)y_{\eta\eta} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.17c)}$$

şeklinde yazılabilir.

Zamana Bağlı Isı Geçişi Denkleminin DYKF yöntemi ile Ayrıklaştırılması

Zamana bağlı difüzyon denkleminin eğrisel koordinatlardaki formu olarak elde edilen (A.14) denklemi ağ yapısının herhangi bir (i, j) noktası civarında DYKF ile ayrıklaştırılmak istenirse ardarda gelen iki yarım zaman adımının ilkinde denklemdeki zamana bağlı türev ileri farklarla ayrıklaştırılıp, ξ ye göre birinci ve ikinci dereceden türevler kapalı formülasyonla, η ya göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerle ξ ve η ya göre ikinci dereceden karışık türev ise açık formülasyonla ayrıklaştırılacak biçimde düzenlenerek

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k}}{\Delta t/2} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)^{k+1/2} - P\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{k+1/2} = -2\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^{k} + \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^{k} + Q\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{k}$$

(A.18)

yazılabilir. Bu denklem

$$u_{i,j}^{k+1/2} - \frac{\alpha\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)^{k+1/2} - \frac{P\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{k+1/2} = -\beta\,\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^{k} + \frac{\gamma\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^{k} + \frac{Q\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{k} + u_{i,j}^{k}$$

(A.19)

şeklinde düzenlenip, konuma göre türevler merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$u_{i,j}^{k+1/2} - \frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\cdot\left(u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2\cdot u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}\right) - P\cdot\frac{\Delta t}{4}\cdot\left(u_{i+1,j}^{k+1/2} - u_{i-1,j}^{k+1/2}\right) = rhs \qquad \text{(A.20a)}$$

veya yeni bir düzenleme ile

$$\left(\frac{P\cdot\Delta t}{4} - \frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i-1,j}^{k+1/2} + \left(1+\alpha\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+1/2} - \left(\frac{P\cdot\Delta t}{4} + \frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i+1,j}^{k+1/2} = rhs \qquad \text{(A.20b)}$$

elde edilir. Burada $\Delta\xi$ ve $\Delta\eta$ birim değerde alınmıştır ve "rhs" ile denklemin sağ tarafında kalan ve bir önceki zaman adımından bilinen terimler belirtilmekte olup

$$rhs=\left(\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}-\frac{Q\cdot\Delta t}{4}\right)\cdot u_{i,j-1}^{k}+\left(1-\gamma\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k}+\left(\frac{Q\cdot\Delta t}{4}+\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i,j+1}^{k}$$
$$-\frac{\beta\cdot\Delta t}{4}\left[u_{i+1,j+1}^{k}-u_{i+1,j-1}^{k}-u_{i-1,j+1}^{k}+u_{i-1,j-1}^{k}\right] \qquad \text{(A.21)}$$

dir. İzleyen ikinci zaman adımında ise yine zamana göre türev ileri farklarla ayrıklaştırılıp, bu defa η ya göre birinci ve ikinci dereceden türevler kapalı formülasyonla, ξ ye göre birinci ve ikinci dereceden türevlerle ξ ve η ya göre ikinci dereceden karışık türev açık formülasyonla ayrıklaştırılacak biçimde bir düzenleme yapılarak

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta t/2}-\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)^{k+1}-Q\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^{k+1}=-2\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)^{k+1/2}+\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)^{k+1/2}+P\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^{k+1/2} \qquad \text{(A.22a)}$$

veya düzenlenerek

$$u_{i,j}^{k+1}-\frac{\gamma\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)^{k+1}-\frac{Q\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^{k+1}=-\beta\,\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)^{k+1/2}+\frac{\alpha\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)^{k+1/2}+\frac{P\,\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^{k+1/2}+u_{i,j}^{k+1/2}$$

(A.22b)

elde edilir. Konumsal türevler yine merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$u_{i,j}^{k+1}-\frac{\gamma\cdot\Delta t}{2}\cdot\left(u_{i,j-1}^{k+1}-2\cdot u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k+1}\right)-P\cdot\frac{\Delta t}{4}\cdot\left(u_{i,j+1}^{k+1}-u_{i,j-1}^{k+1}\right)=rhs \qquad \text{(A.23a)}$$

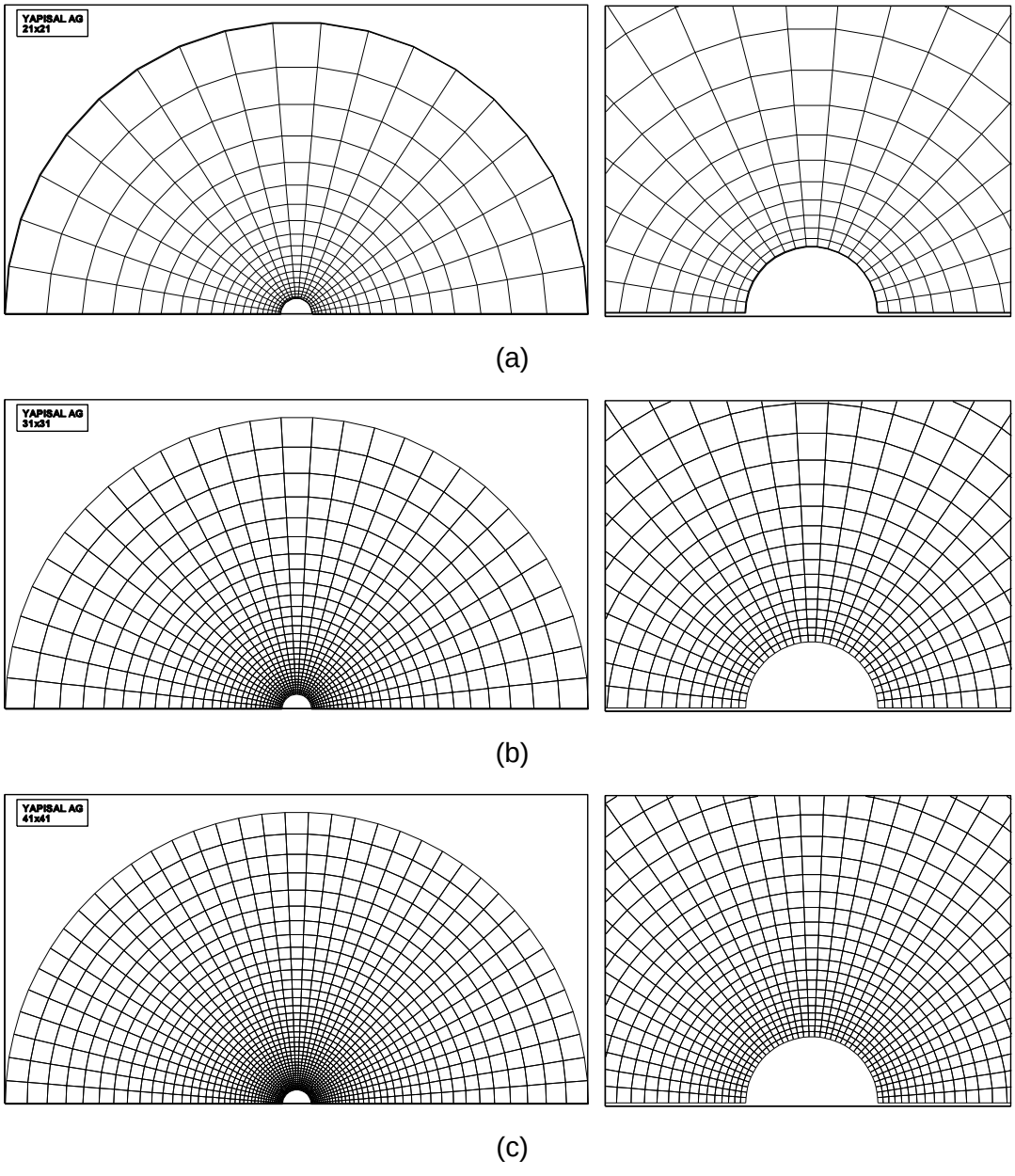
veya son bir düzenleme ile

$$\left(\frac{P\cdot\Delta t}{4}-\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i-1,j}^{k+1}+\left(1+\gamma\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+1}-\left(\frac{P\cdot\Delta t}{4}+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i+1,j}^{k+1}=rhs \qquad \text{(A.23b)}$$

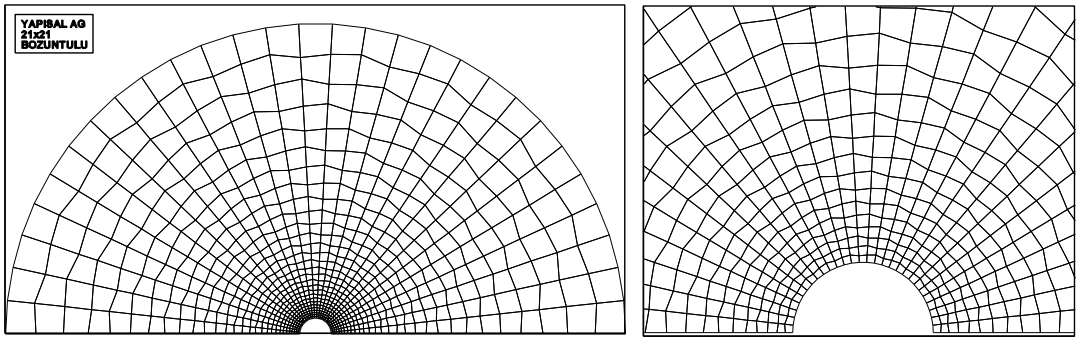
elde edilir. Burada "*rhs*" ile yine denklemin sağında yer alan ve bir önceki zaman adımından bilinen terimler belirtilmekte olup,

$$rhs=\left(\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}-\frac{P\cdot\Delta t}{4}\right)\cdot u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}+\left(1-\alpha\cdot\Delta t\right)\cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}+\left(\frac{P\cdot\Delta t}{4}+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{\beta\cdot\Delta t}{4}\left[u_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}\right] \qquad \text{(A.24)}$$

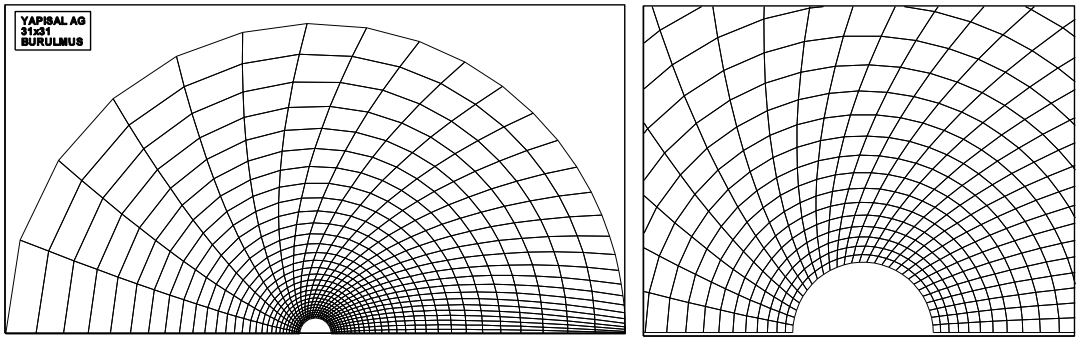
EK. B Daire Etrafındaki Çözümlerin Detay Grafikleri



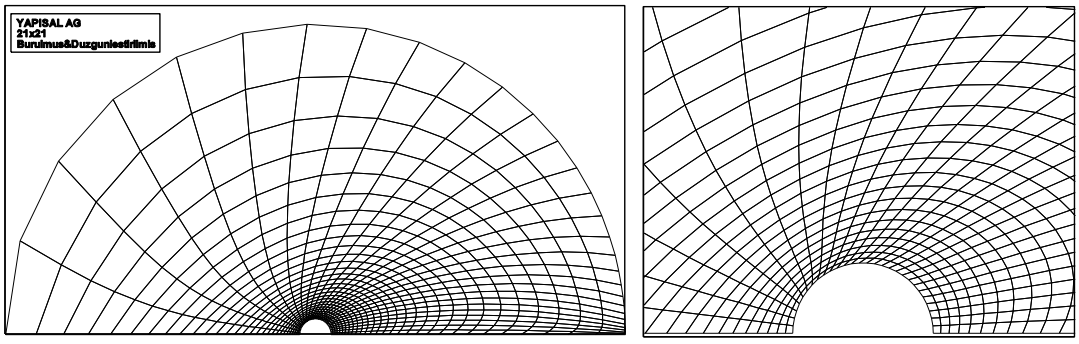
Şekil B.1 Sırası ile 21x21 (a), 31x31 (b), 41x41 (c) boyutlarındaki yapısal çözüm ağları.



(a)

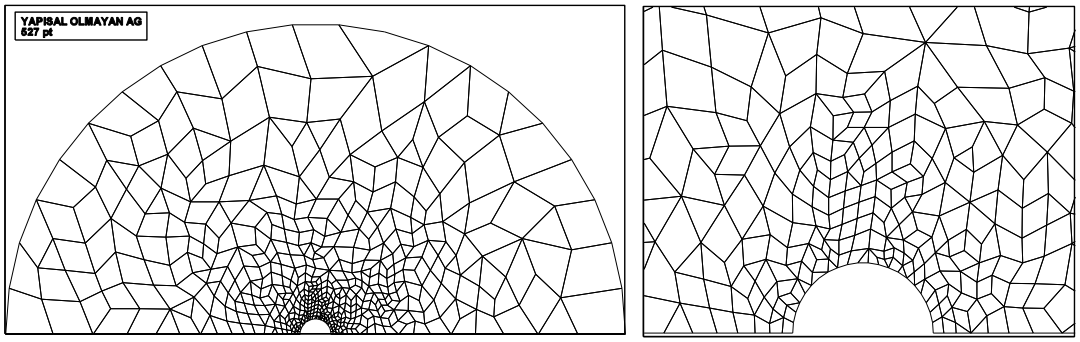


(b)

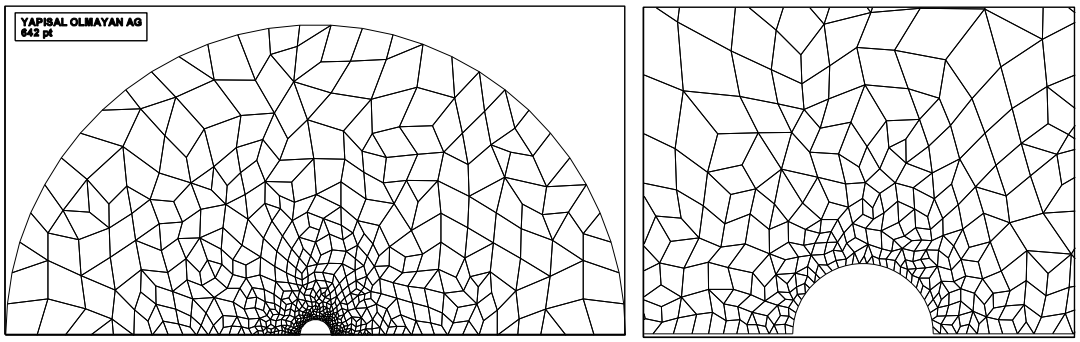


(c)

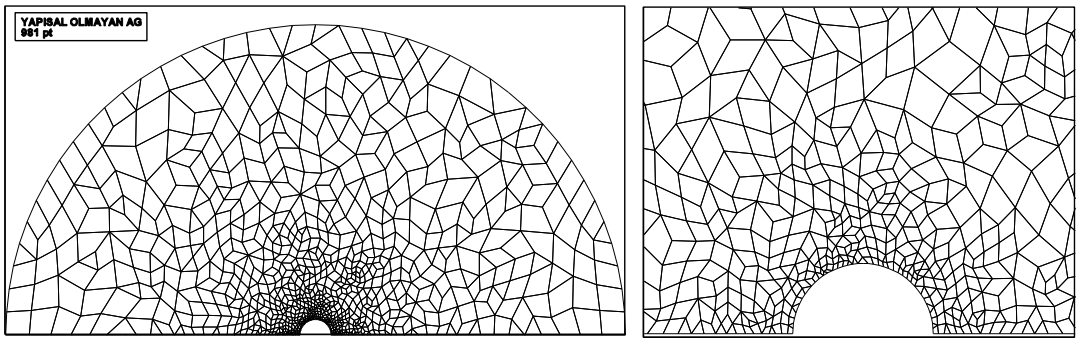
Şekil B.2 Sırası ile 31x31 boyutunda bozulmuş (a), burulmuş (b), burulmuş ve düzgünleştirilmiş (c) yapısal çözüm ağları.



(a)

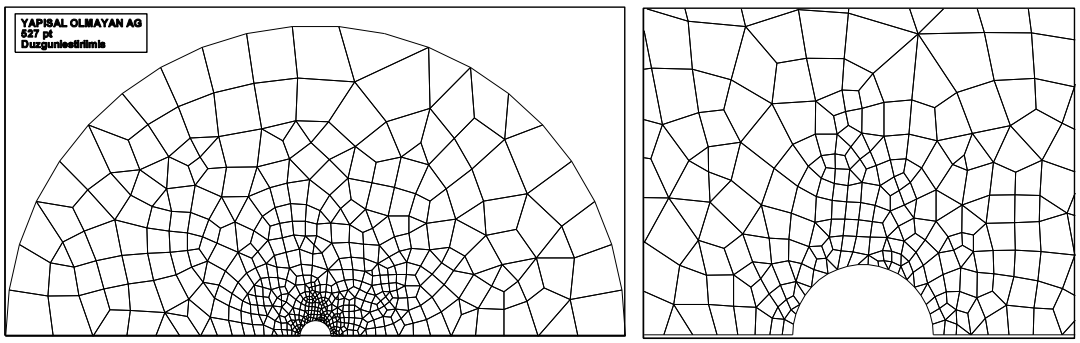


(b)

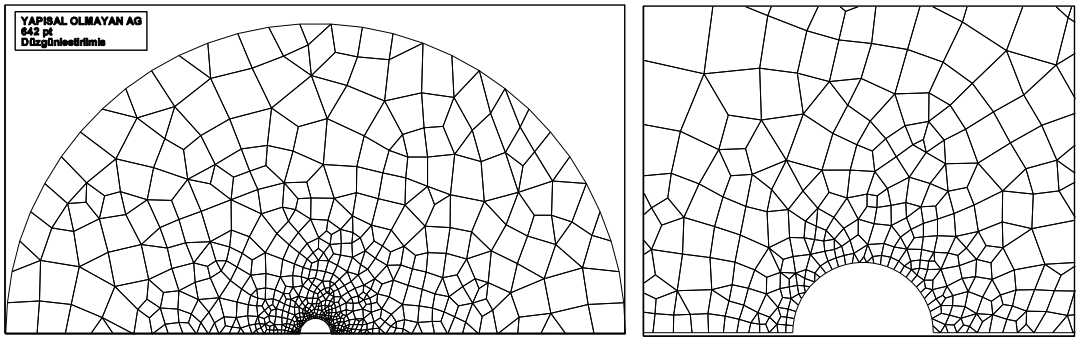


(c)

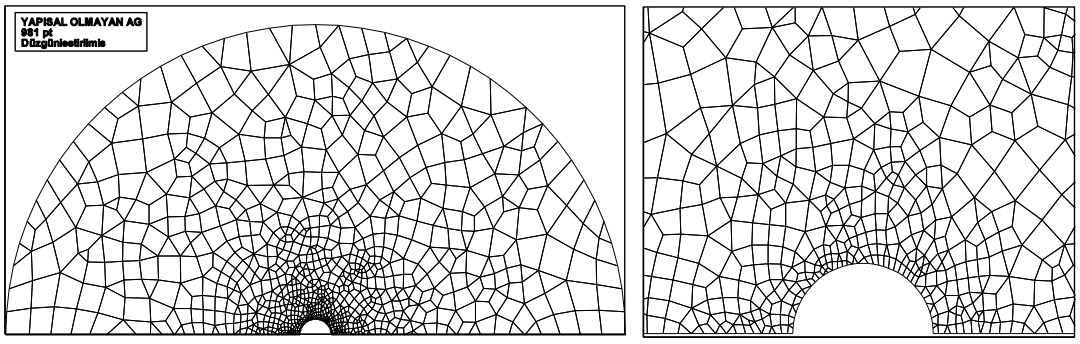
Şekil B.3 Sırası ile 527 noktalı (a), 642 noktalı (b) ve 981 noktalı (c) yapısal olmayan çözüm ağları.



(a)

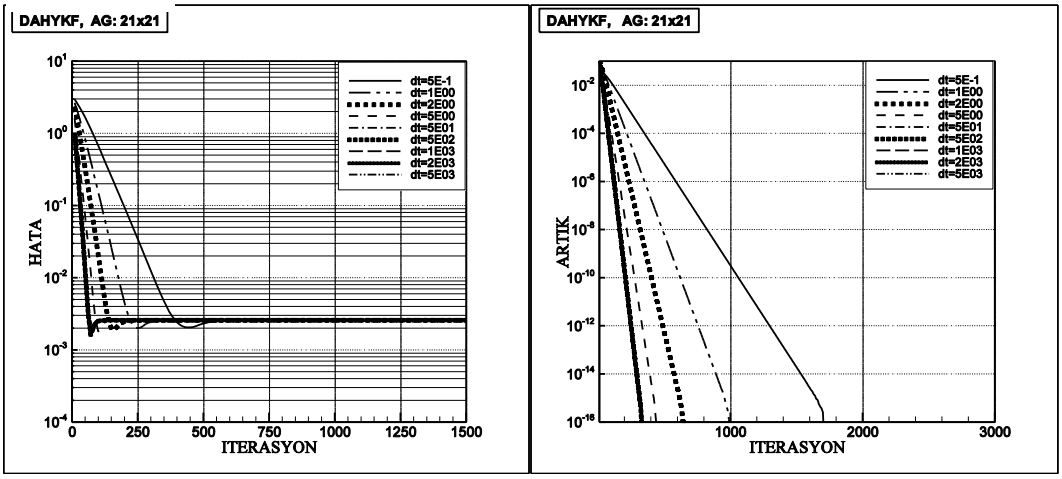


(b)

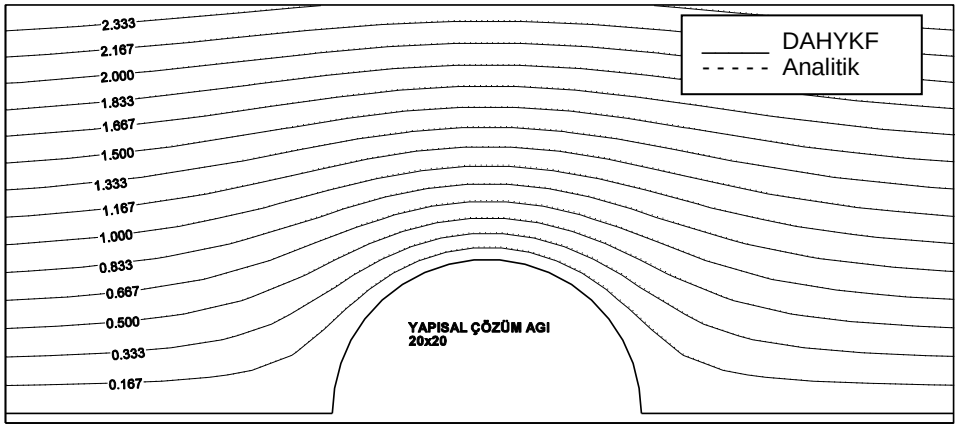


(c)

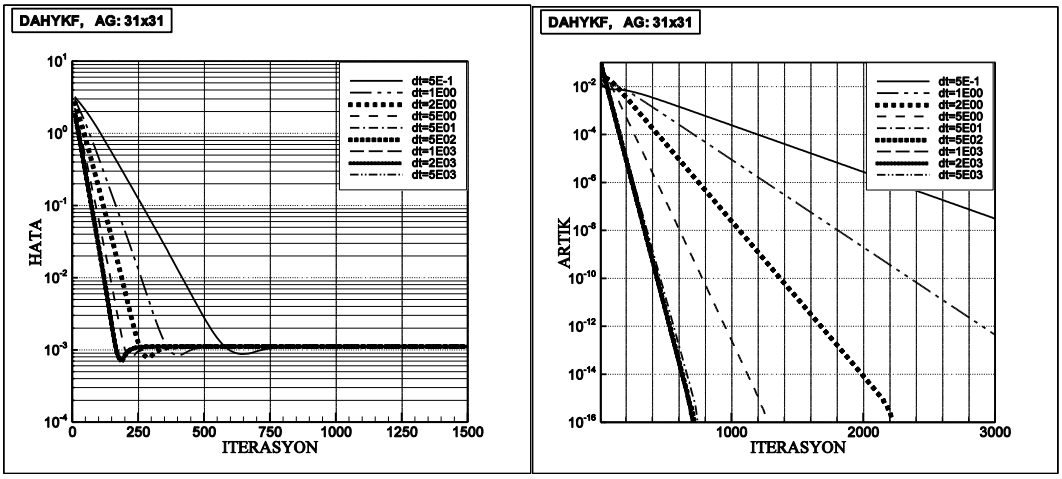
Şekil B.4 Sırası ile düzgünleştirilmiş 527 noktalı (a), 642 noktalı (b) ve 981 noktalı (c) yapısal olmayan çözüm ağları.



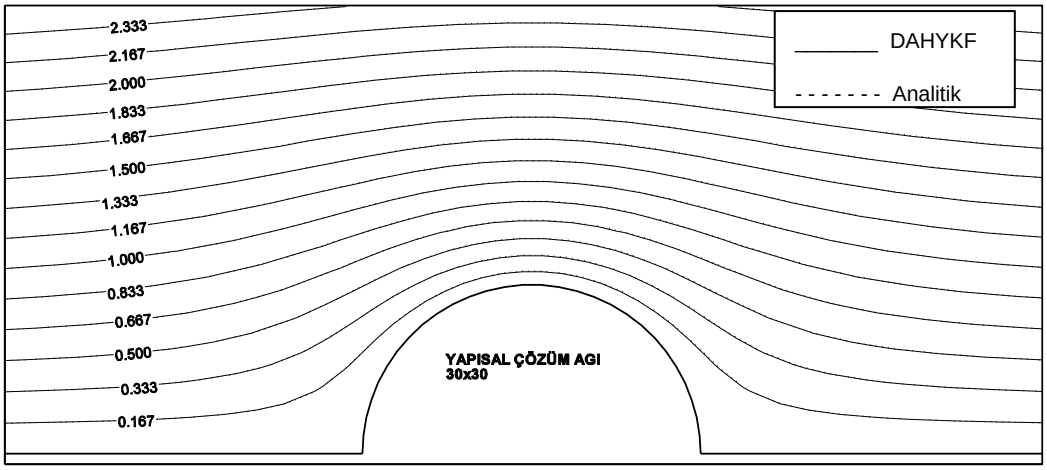
Şekil B.5 21x21 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



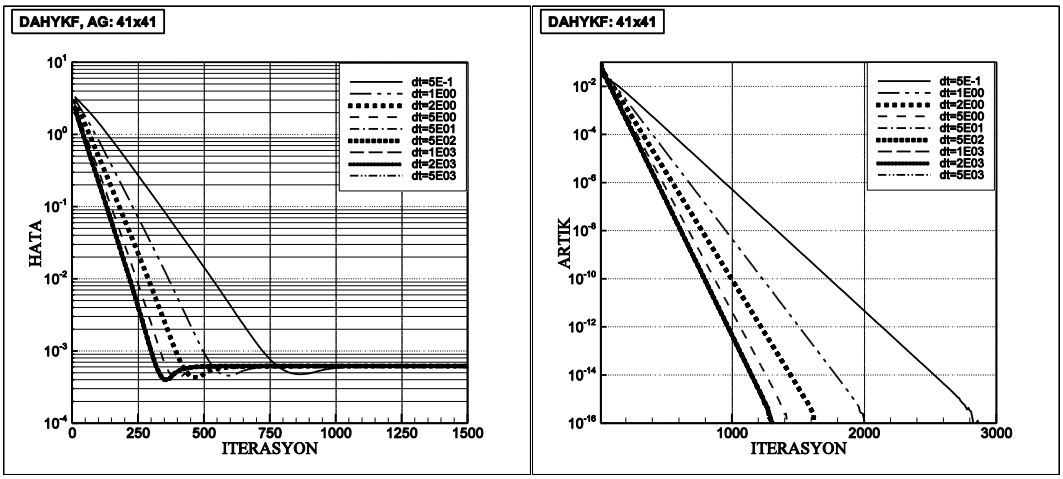
Şekil B.6 21x21 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



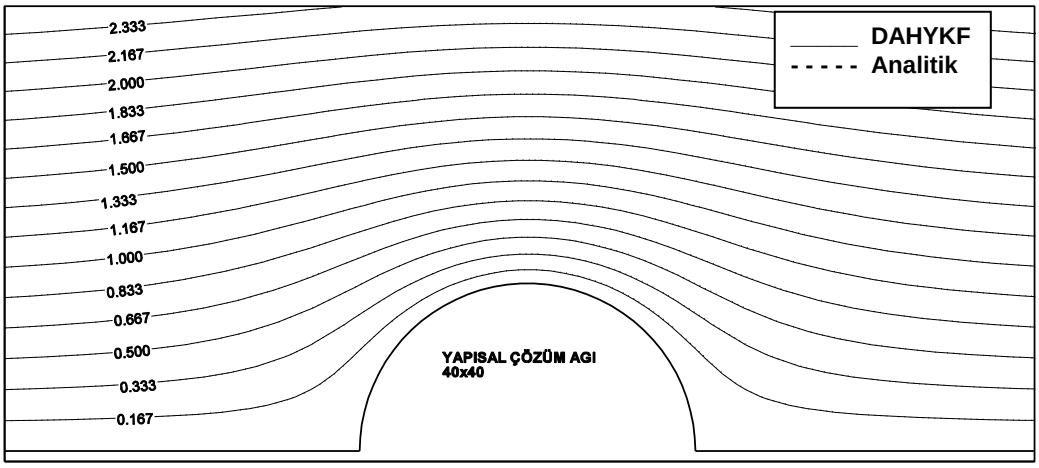
Şekil B.7 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



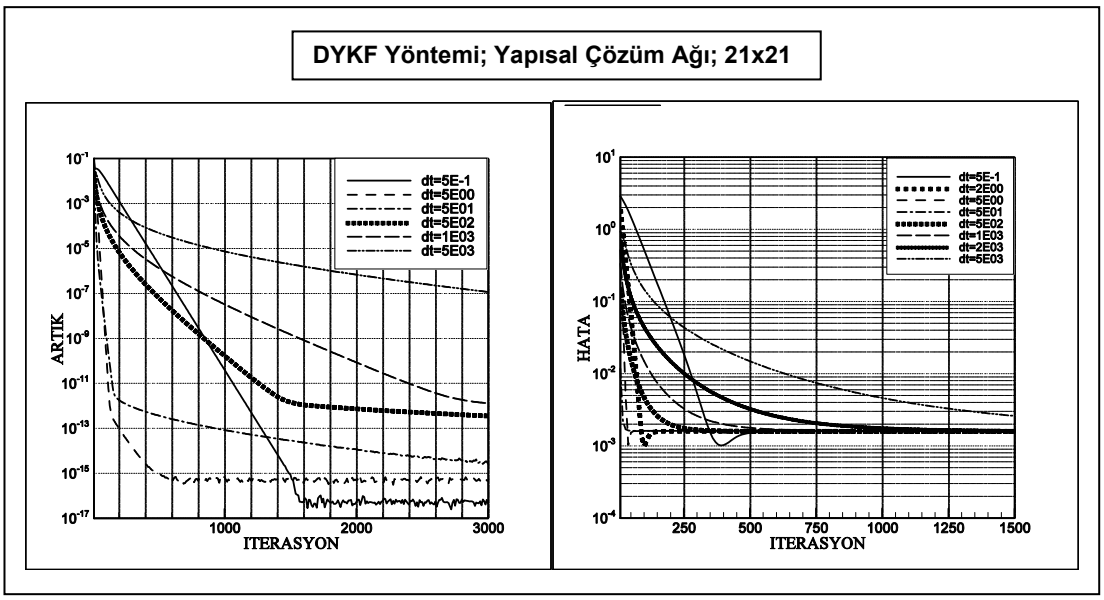
Şekil B.8 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



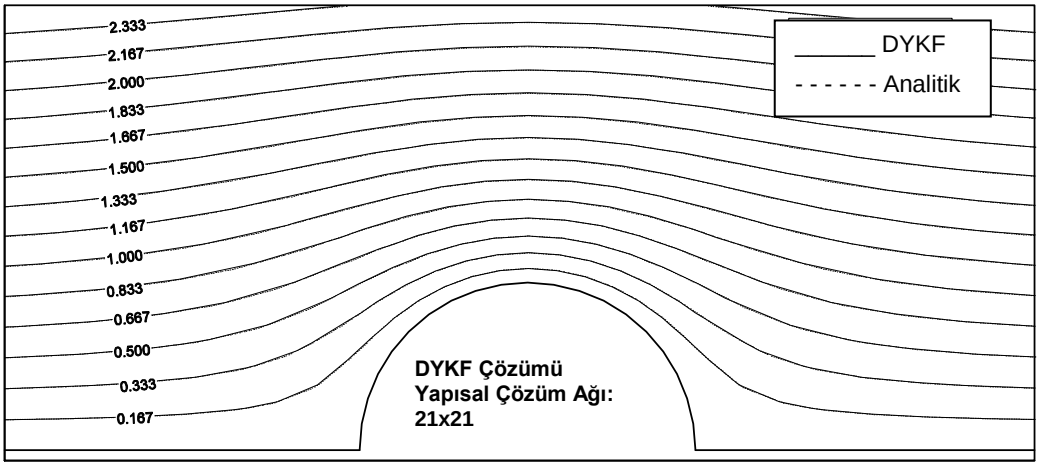
Şekil B.9 41x41 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



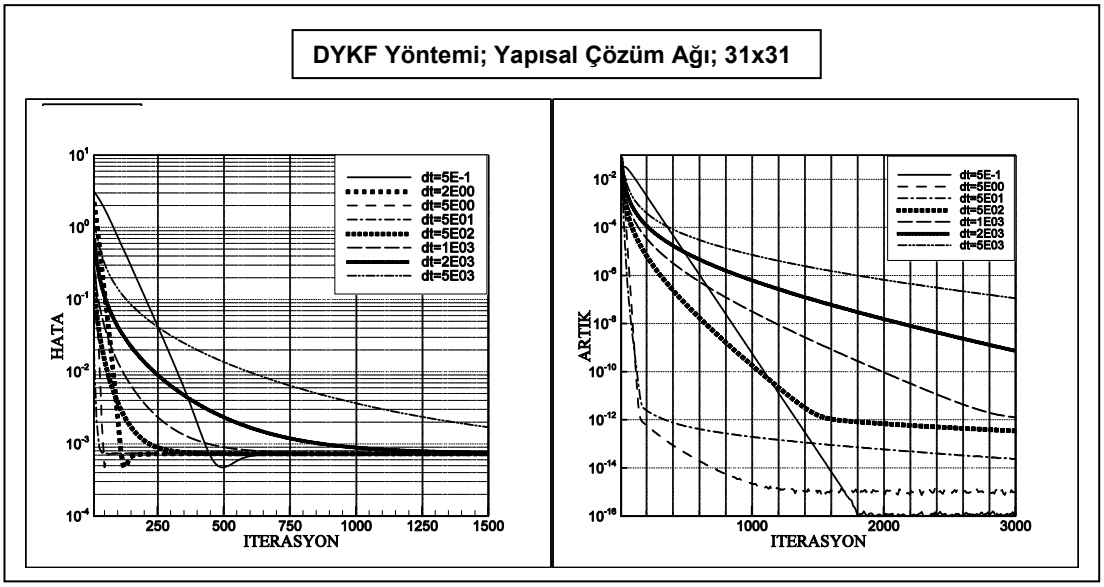
Şekil B.10 41x41 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması



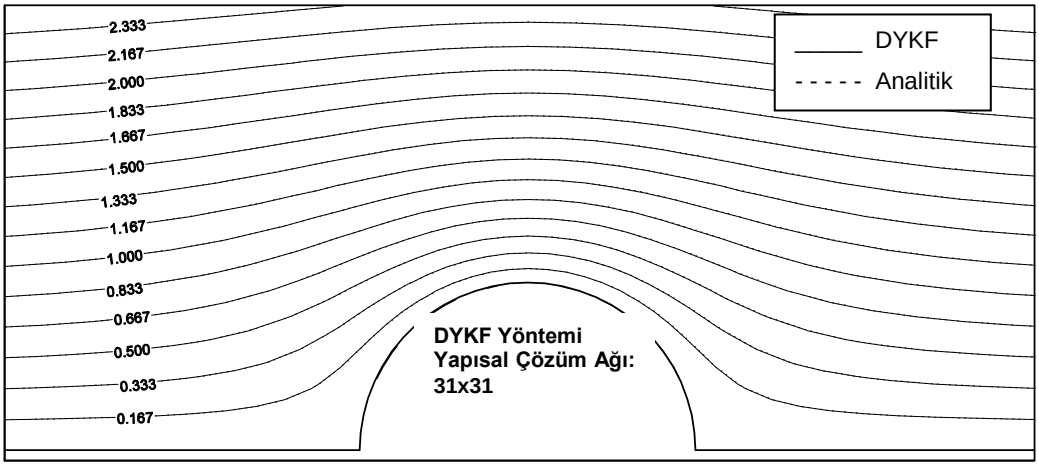
Şekil B.11 21x21 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



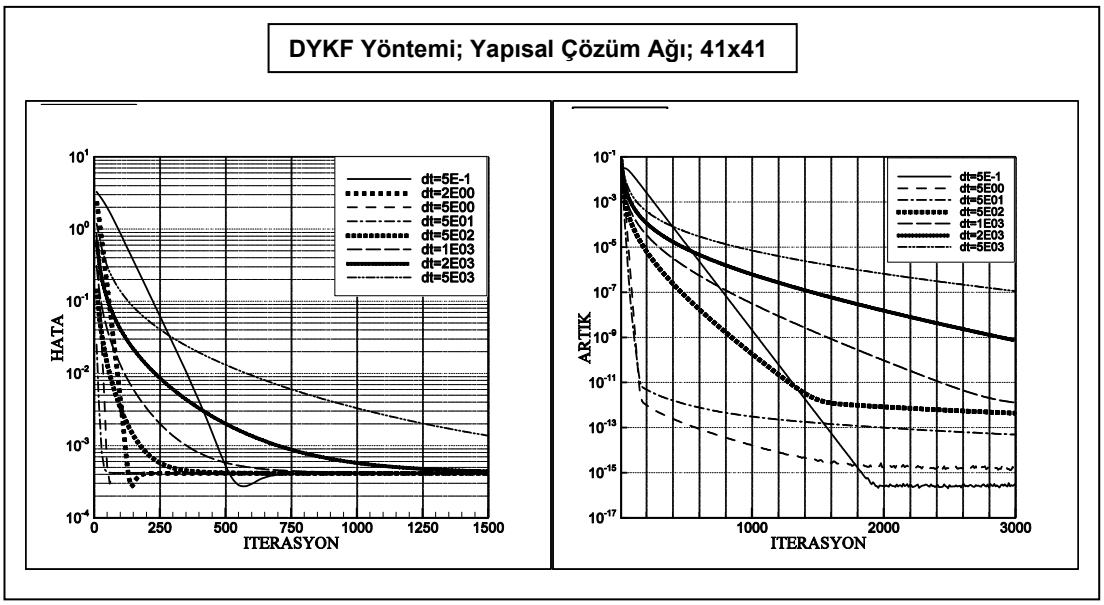
Şekil B.12 21x21 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



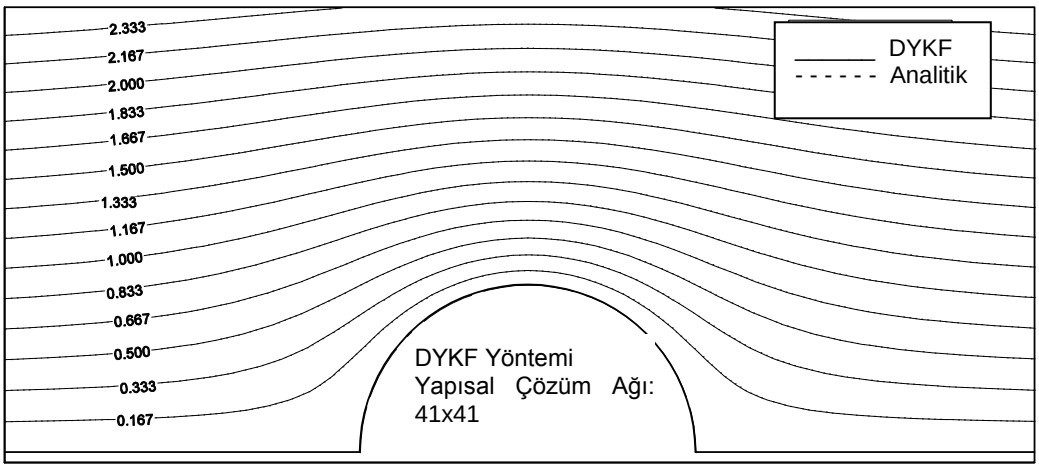
Şekil B.13 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



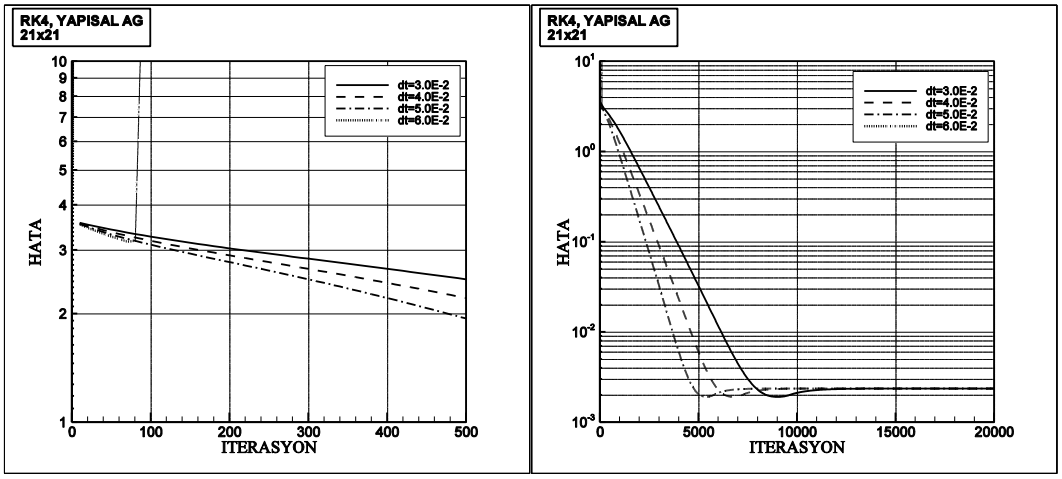
Şekil B.14 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



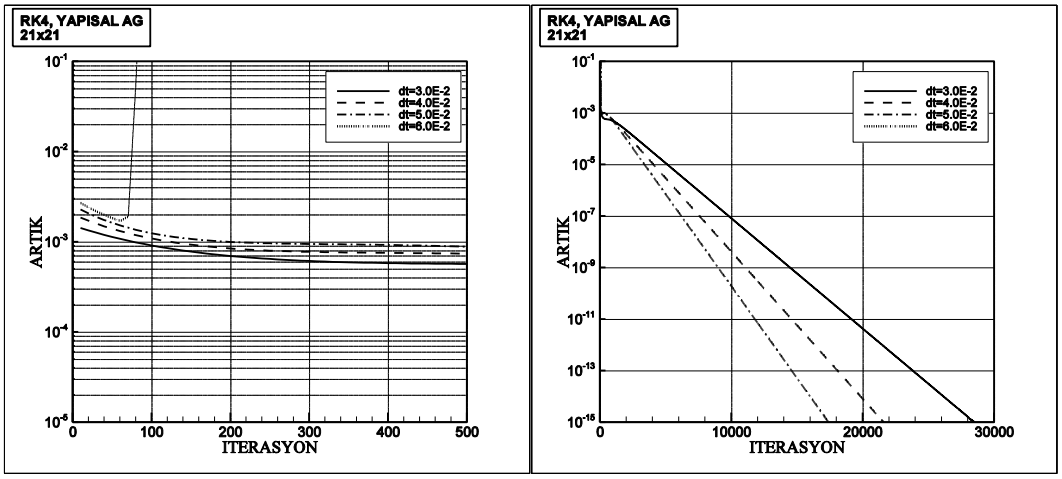
Şekil B.15 41x41 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



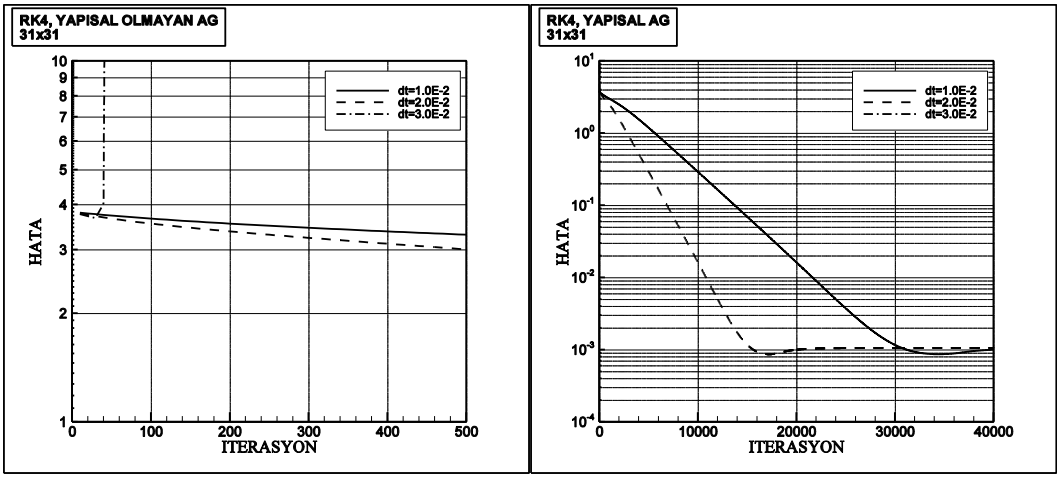
Şekil B.16 41x41 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



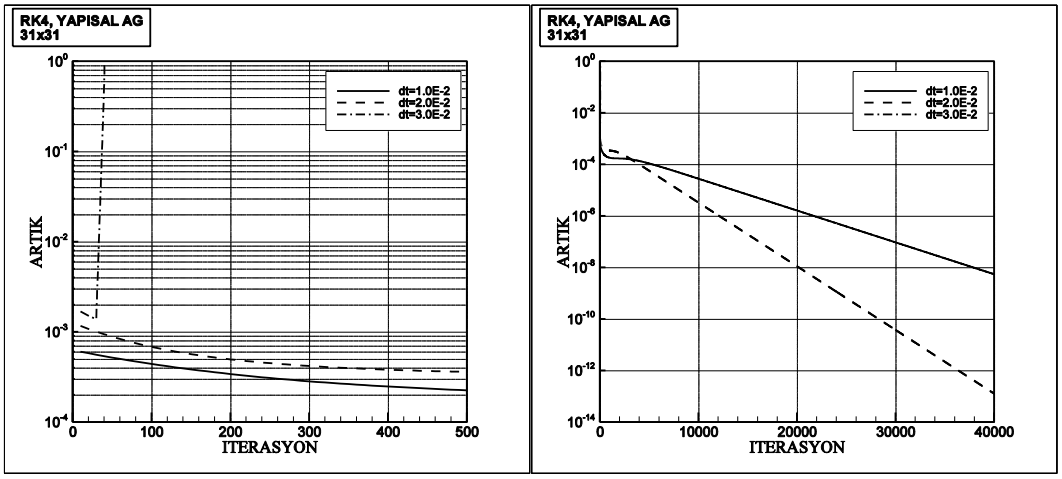
Şekil B.17 21x21 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



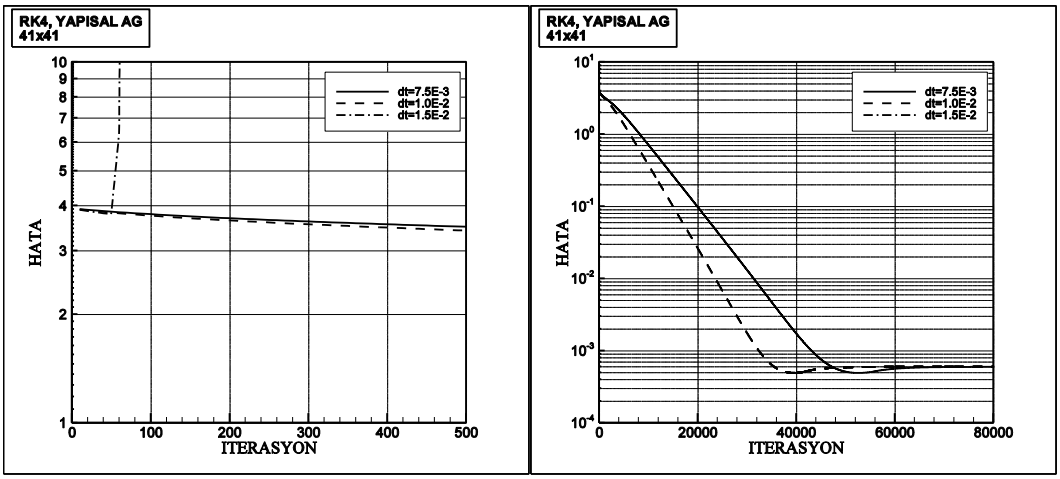
Şekil B.18 21x21 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



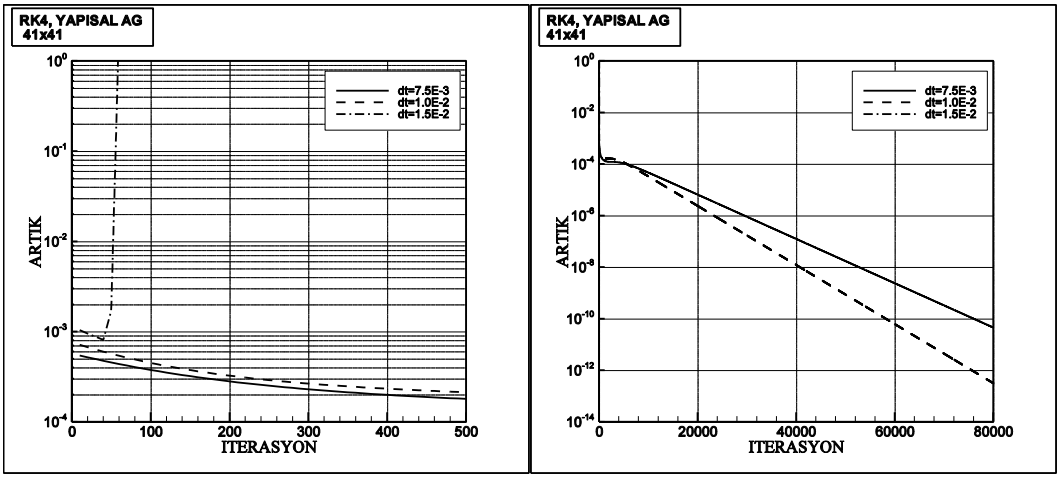
Şekil B.19 31x31 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



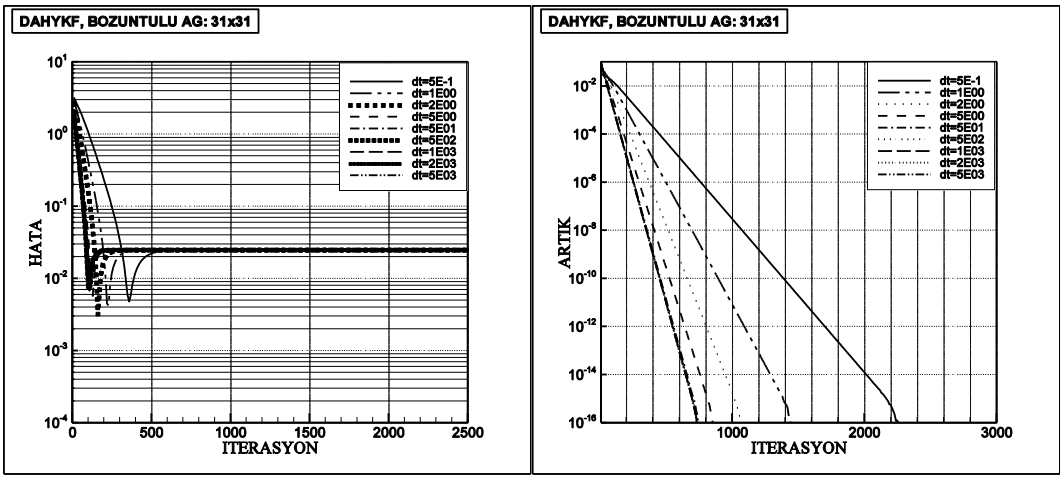
Şekil B.20 31x31 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



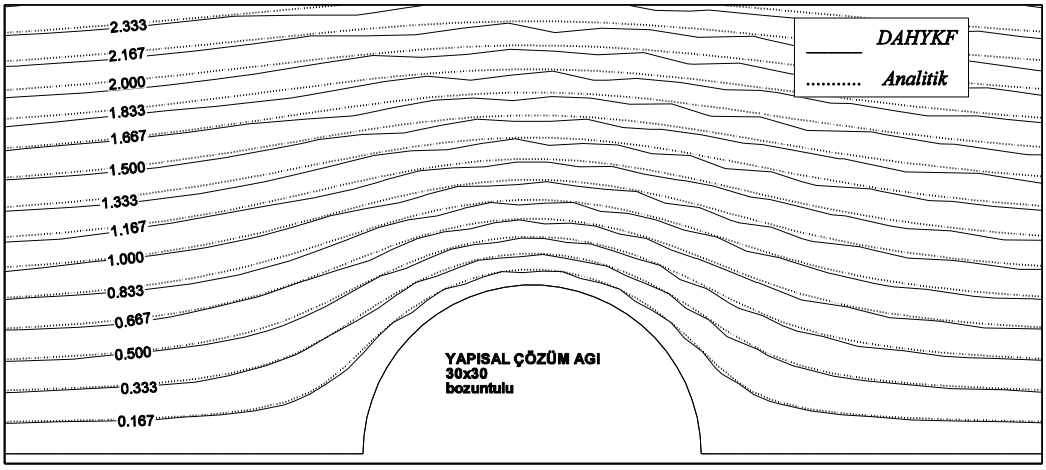
Şekil B.21 41x41 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



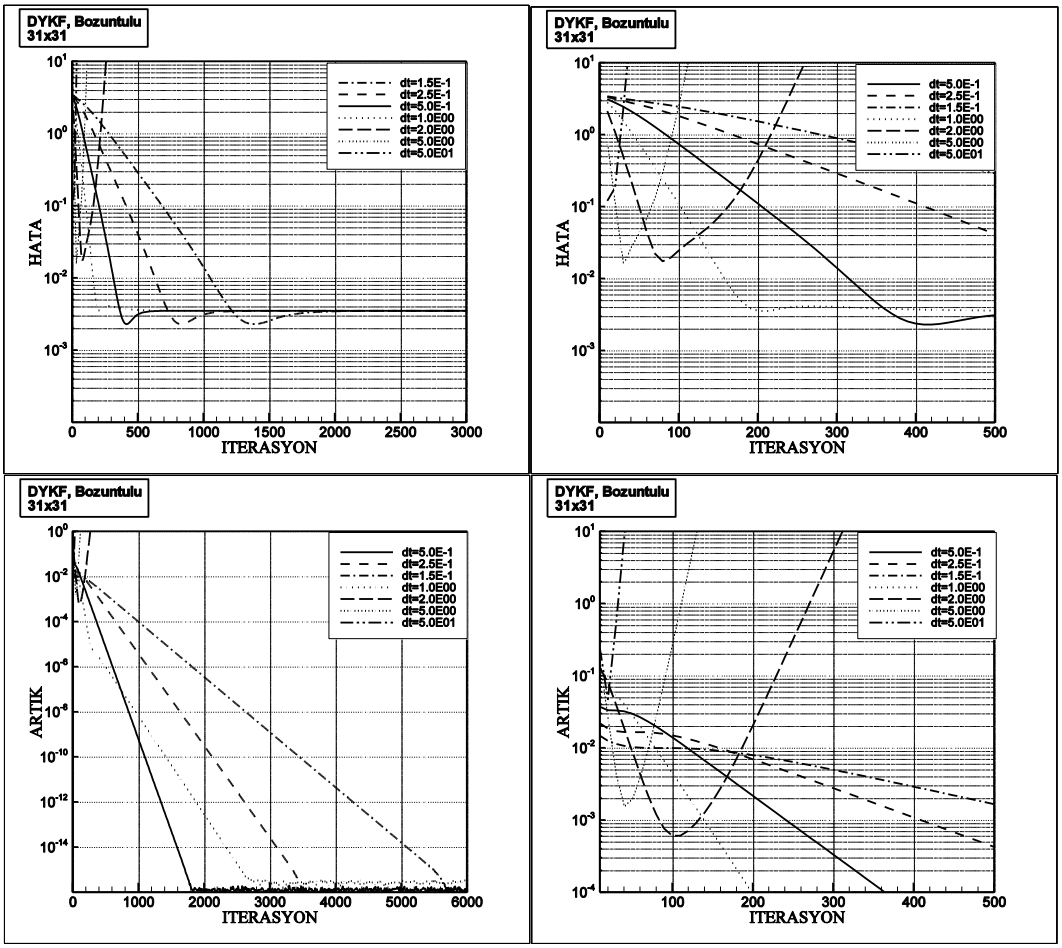
Şekil B.22 41x41 yapısal ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



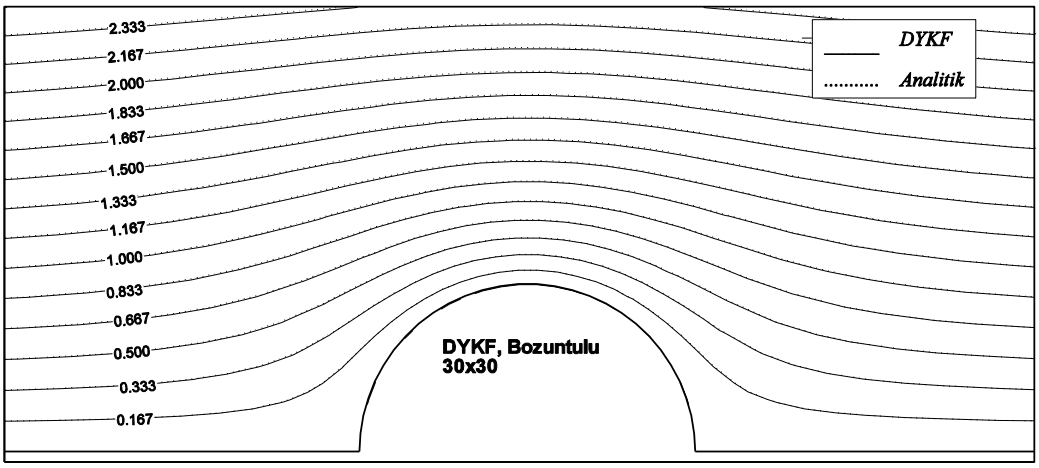
Şekil B.23 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



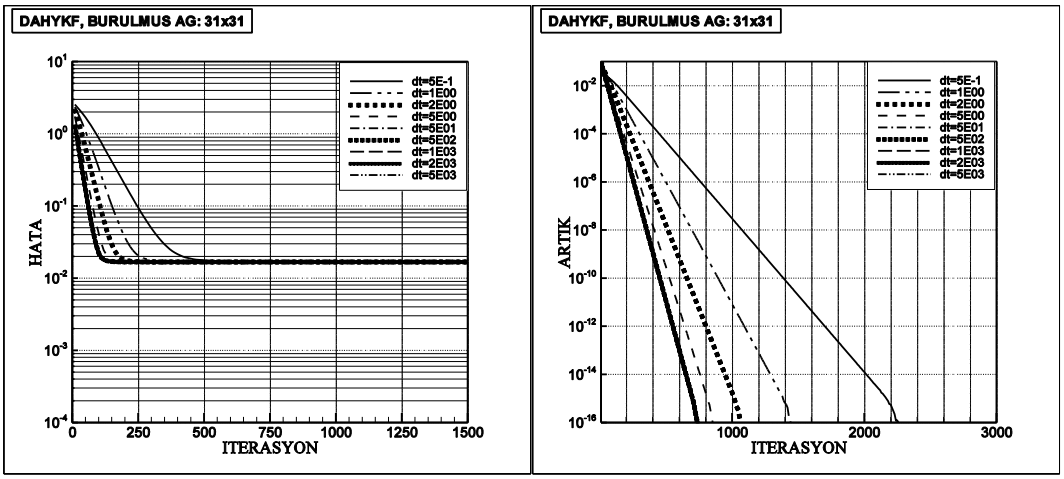
Şekil B.24 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



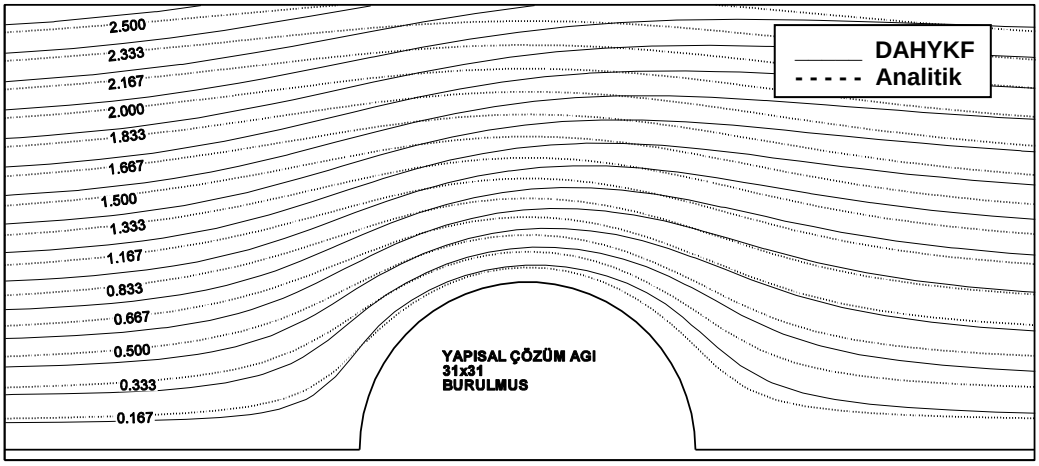
Şekil B.25 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal çözüm ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



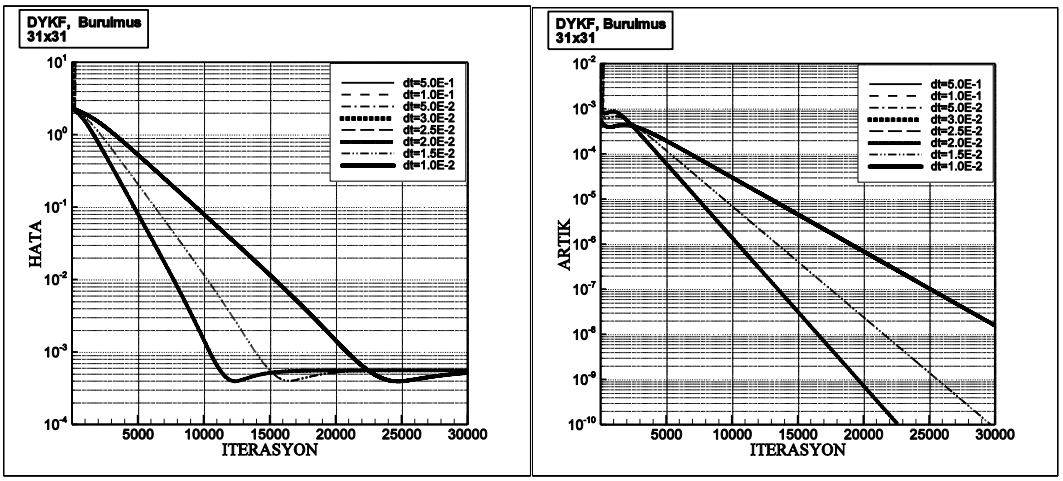
Şekil B.26 Bozuntu verilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



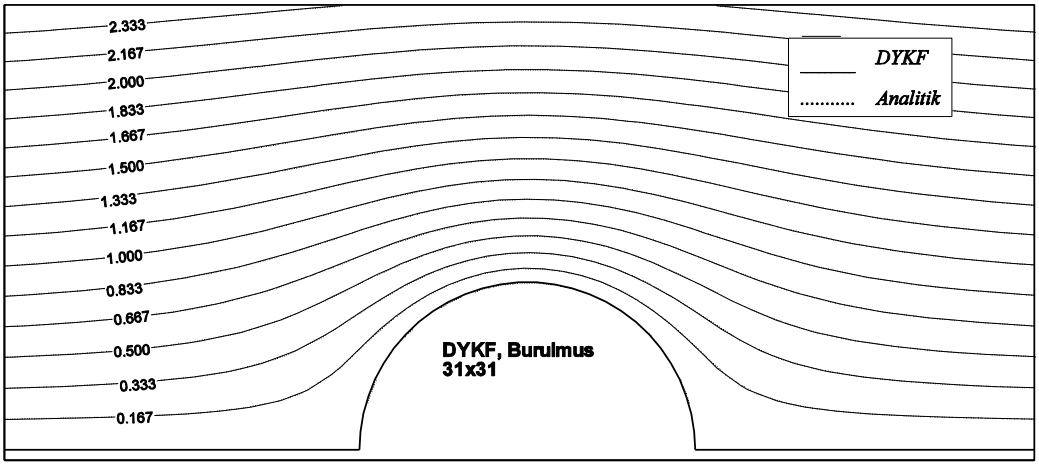
Şekil B.27 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



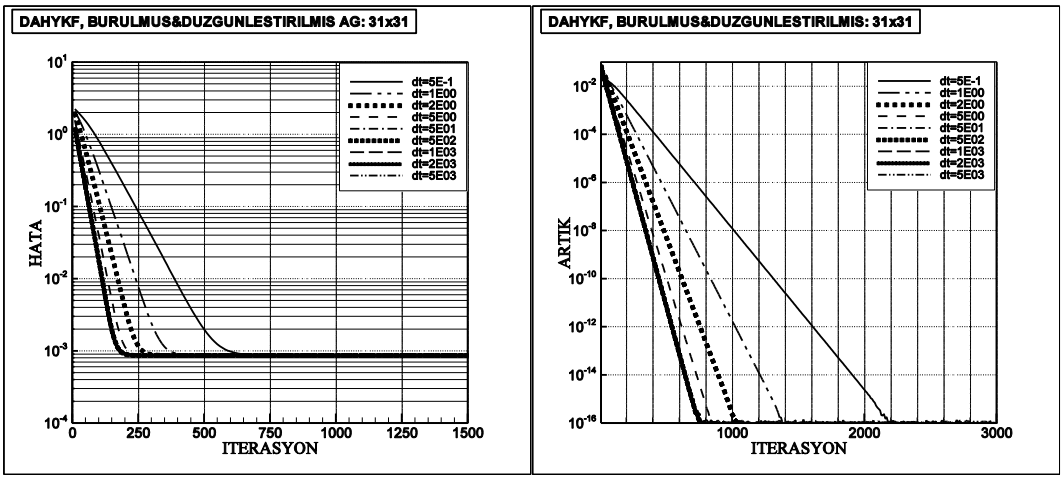
Şekil B.28 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



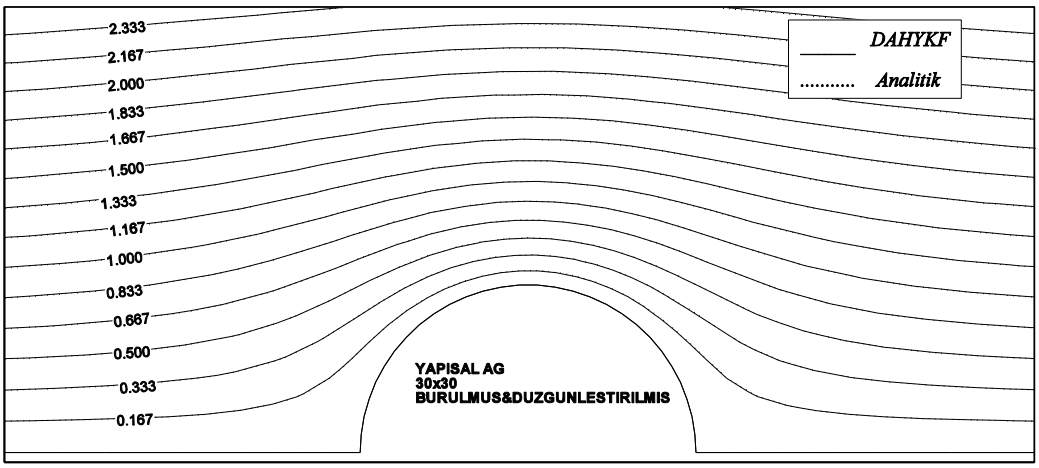
Şekil B.29 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



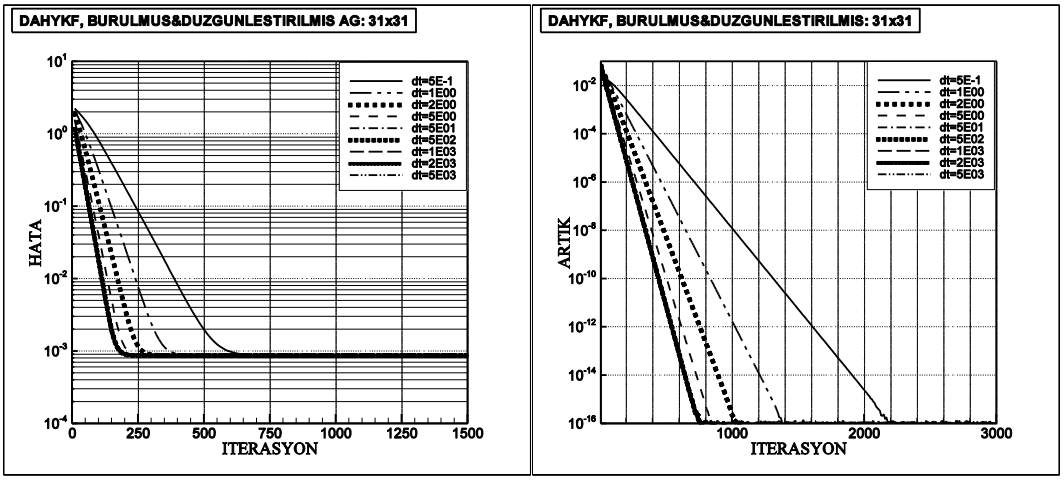
Şekil B.30 Burulmuş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



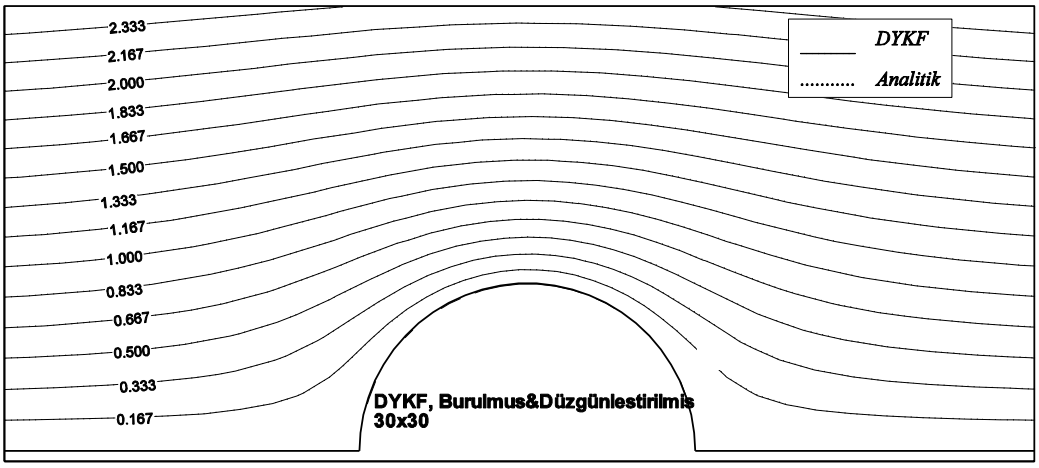
Şekil B.31 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



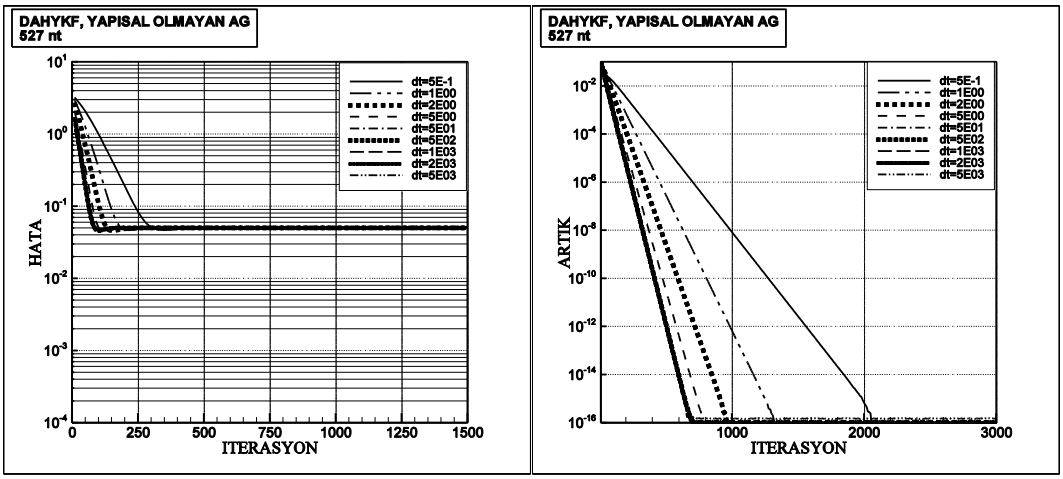
Şekil B.32 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



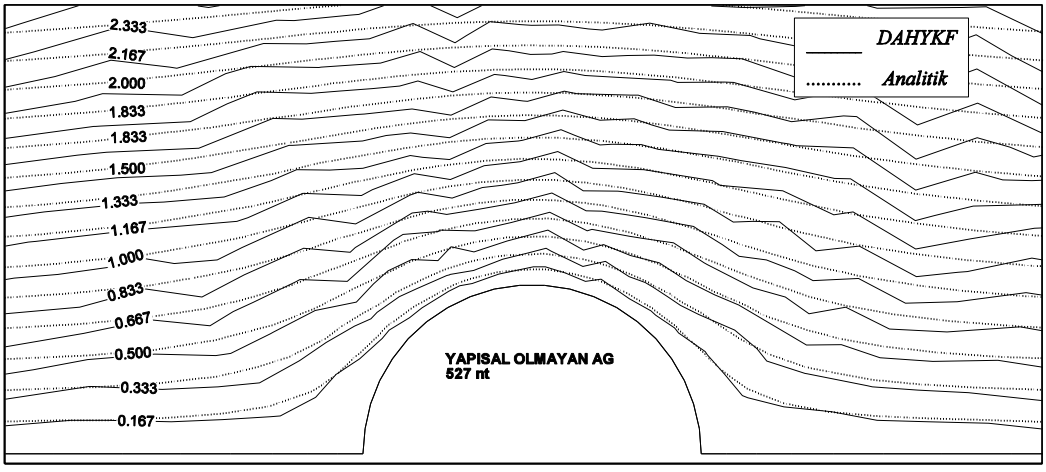
Şekil B.33 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



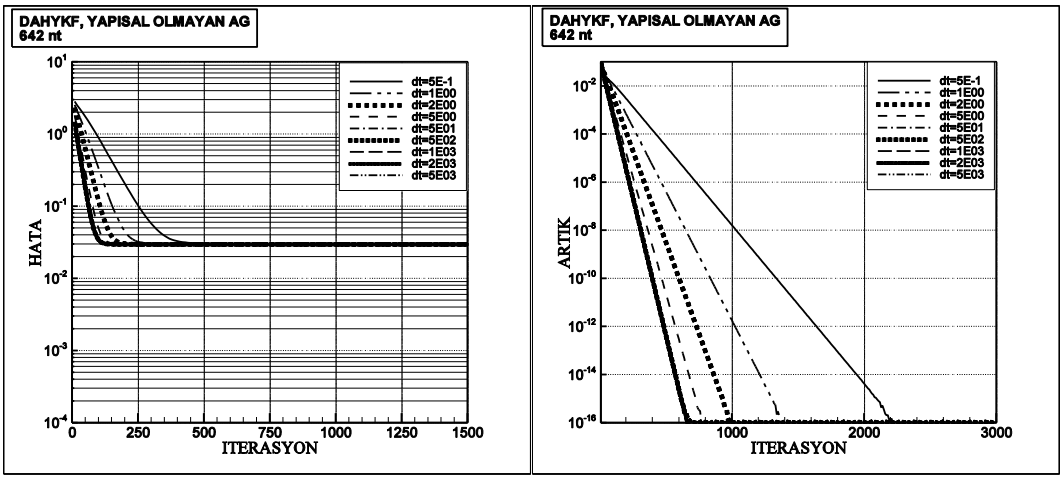
Şekil B.34 Burulmuş ve düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal ağlı halin DYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



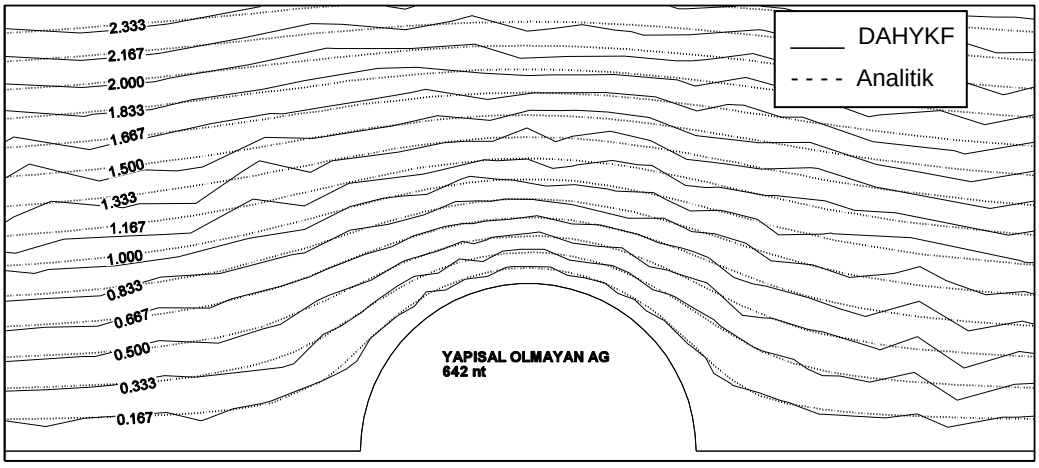
Şekil B.35 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



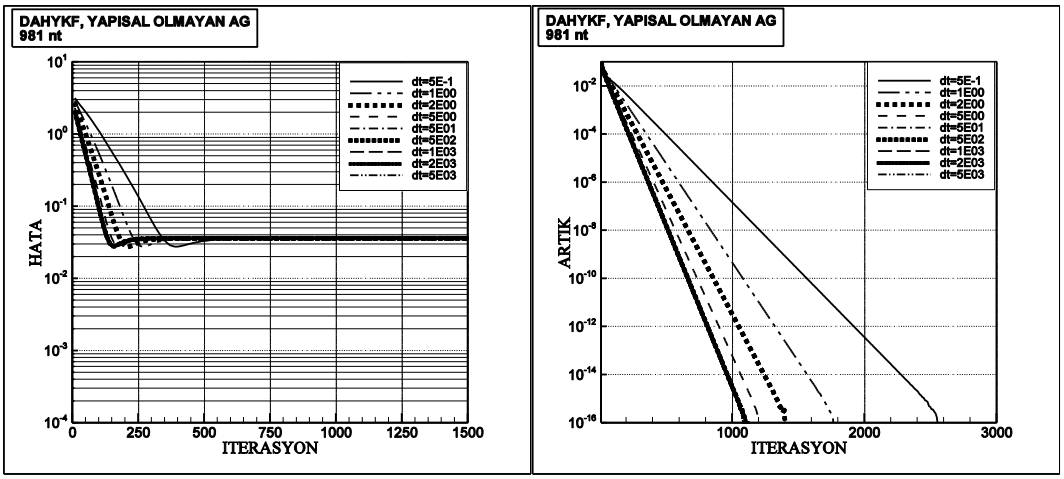
Şekil B.36 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



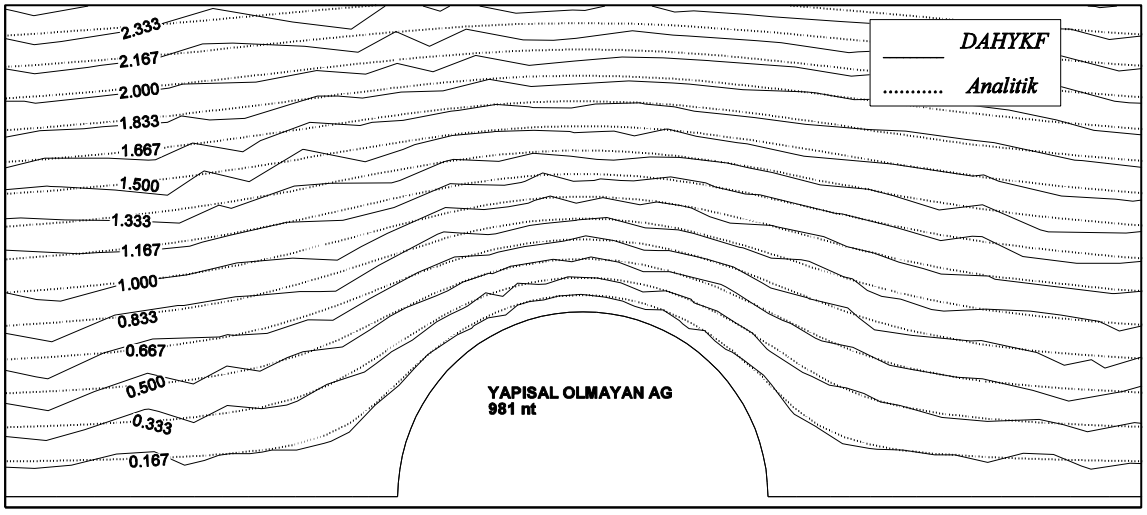
Şekil B.37 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



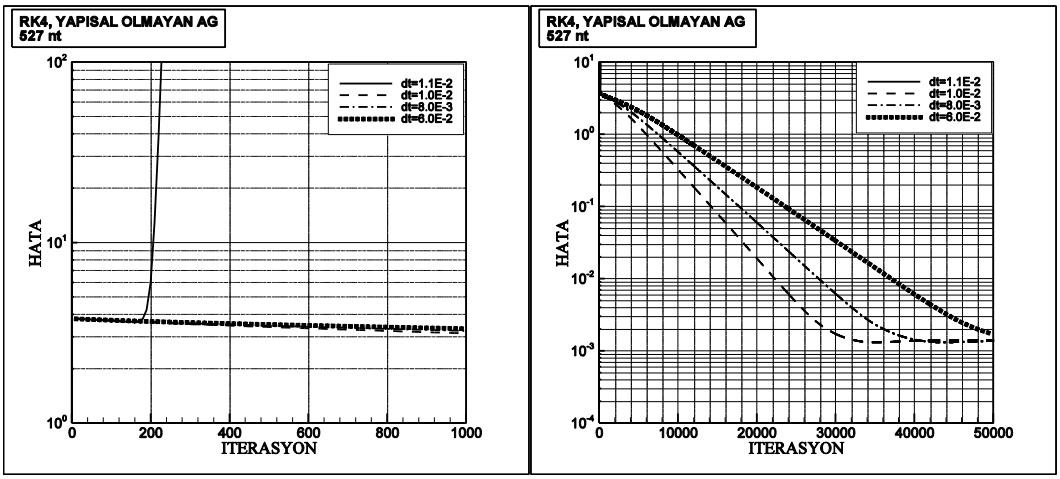
Şekil B.38 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



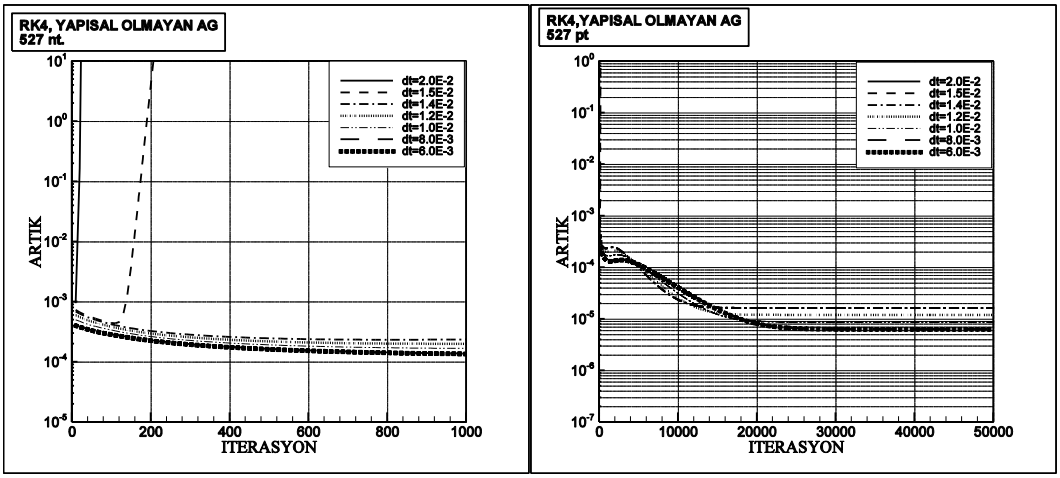
Şekil B.39 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



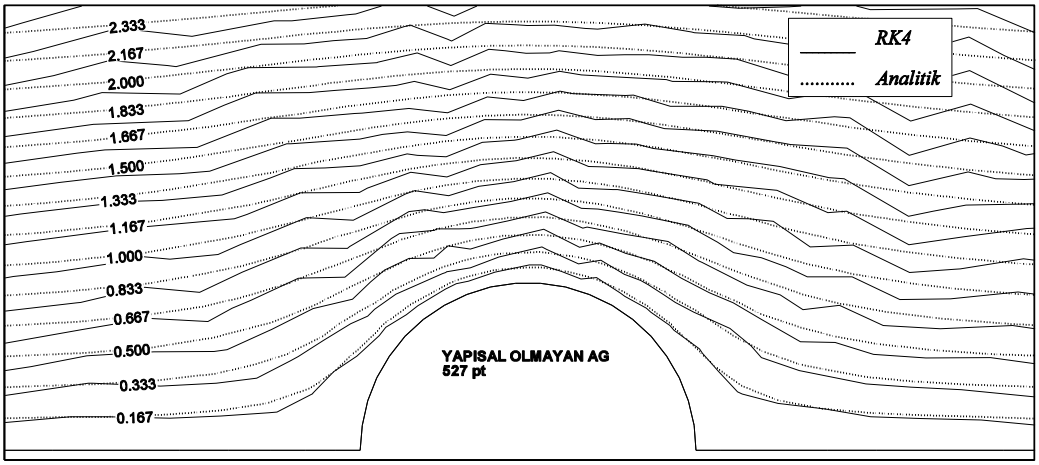
Şekil B.40 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



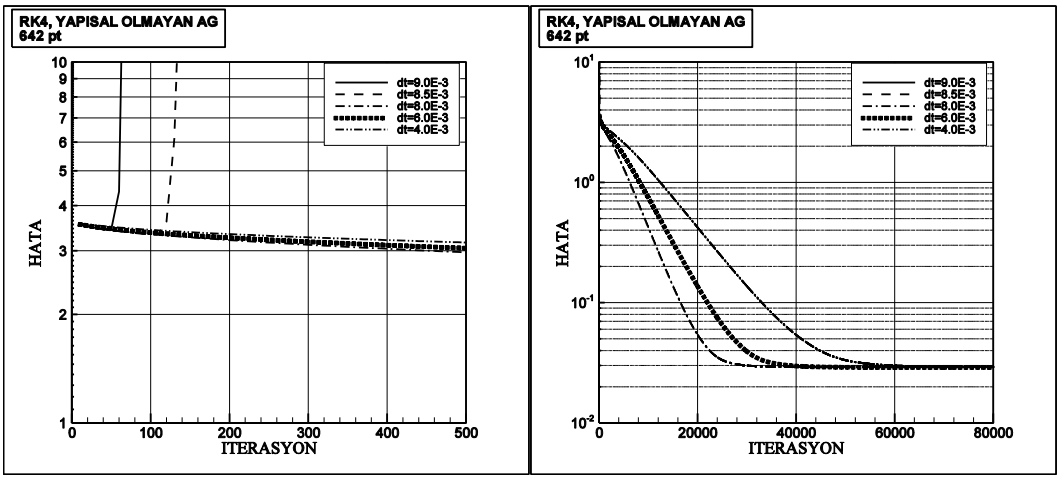
Şekil B.41 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



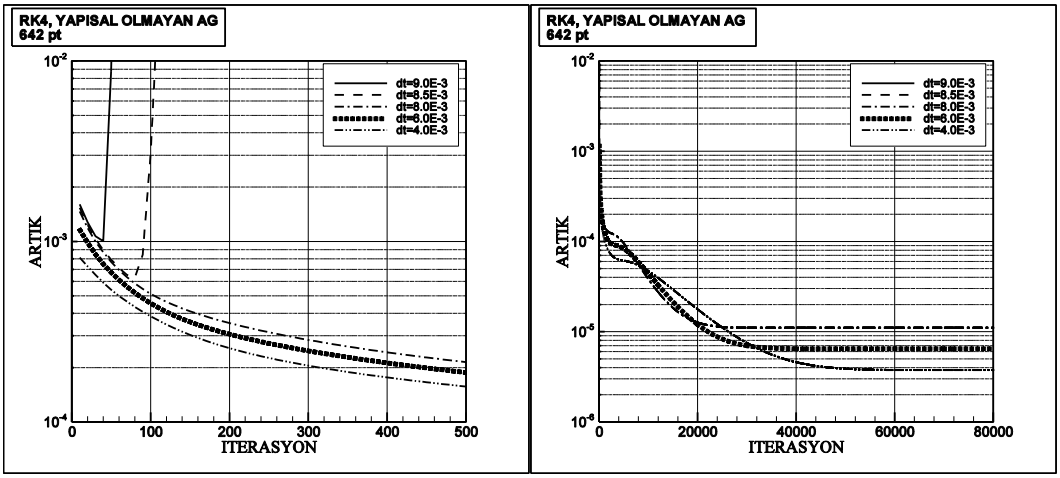
Şekil B.42 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



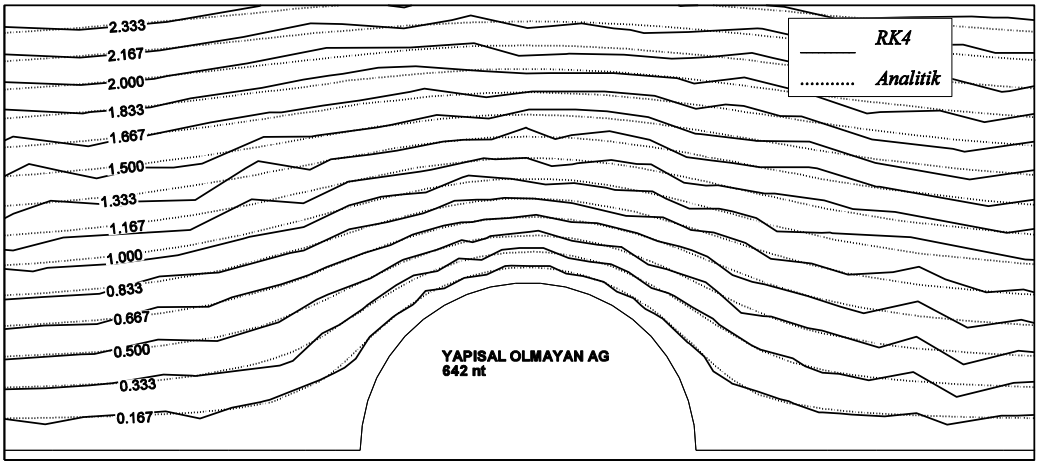
Şekil B.43 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



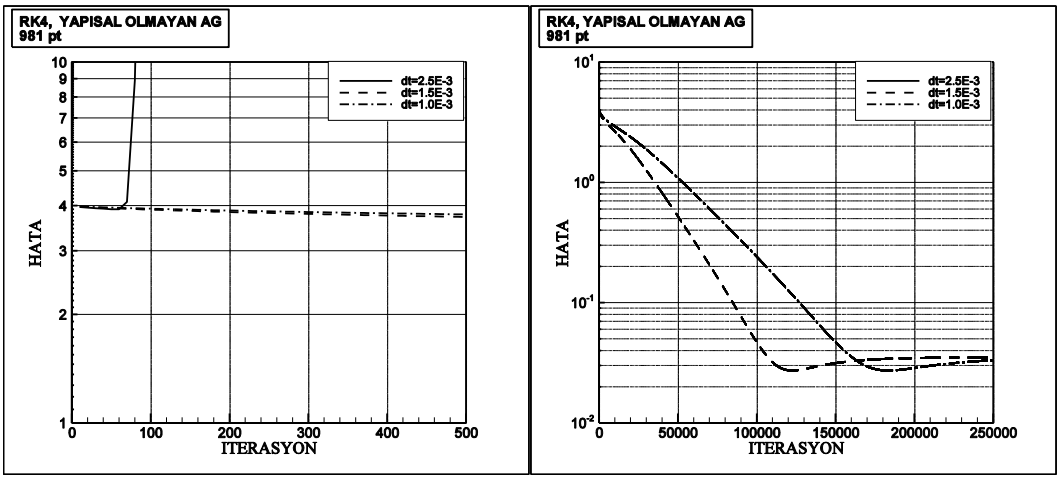
Şekil B.44 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



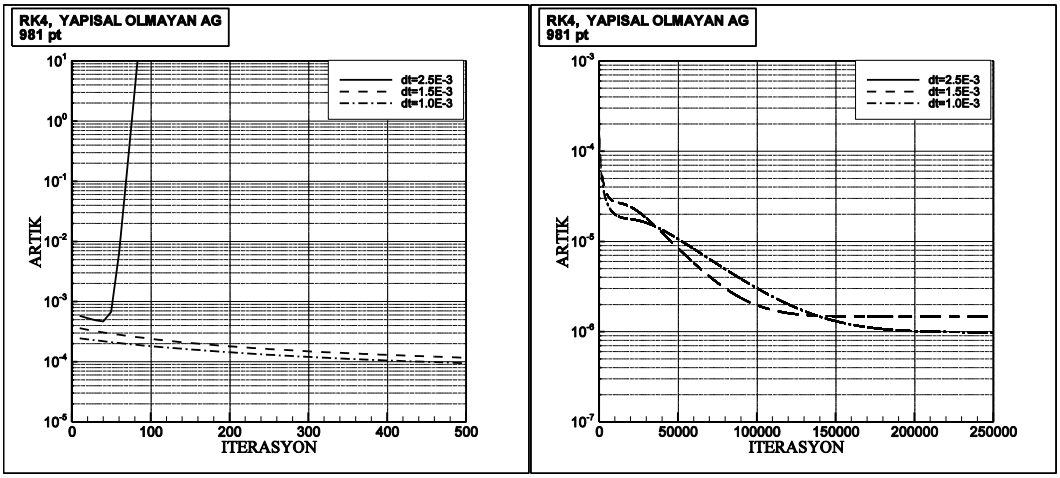
Şekil B.45 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



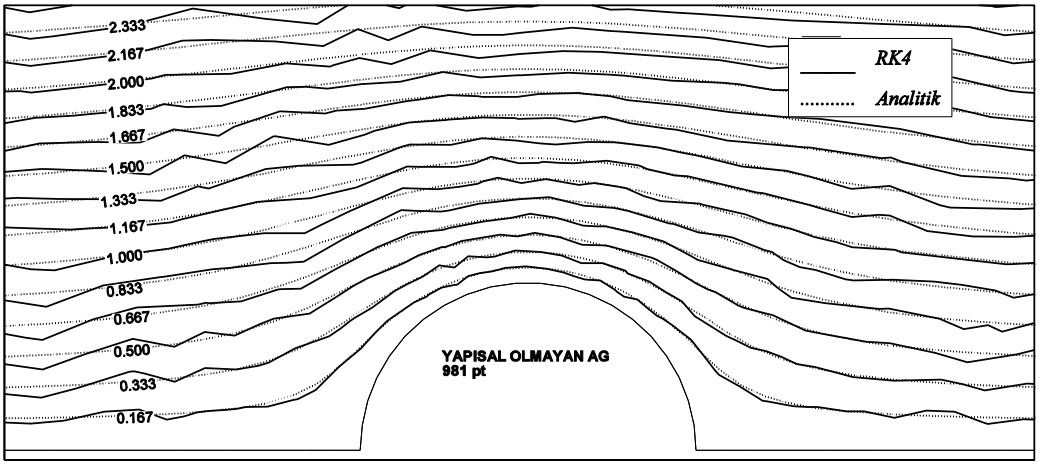
Şekil B.46 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



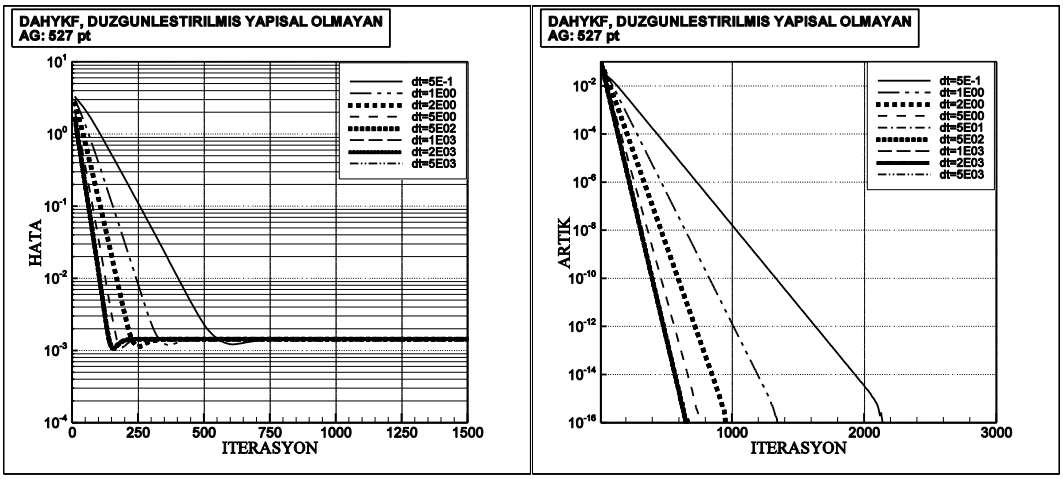
Şekil B.47 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



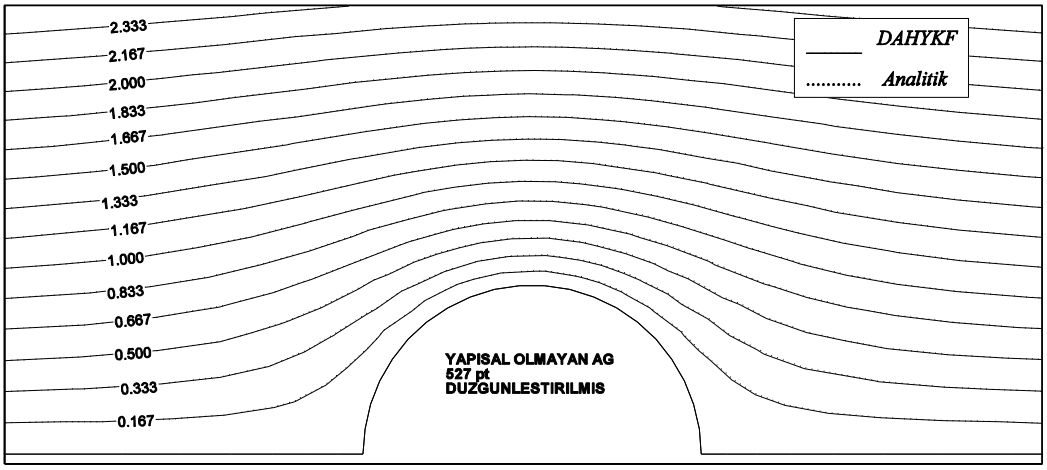
Şekil B.48 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



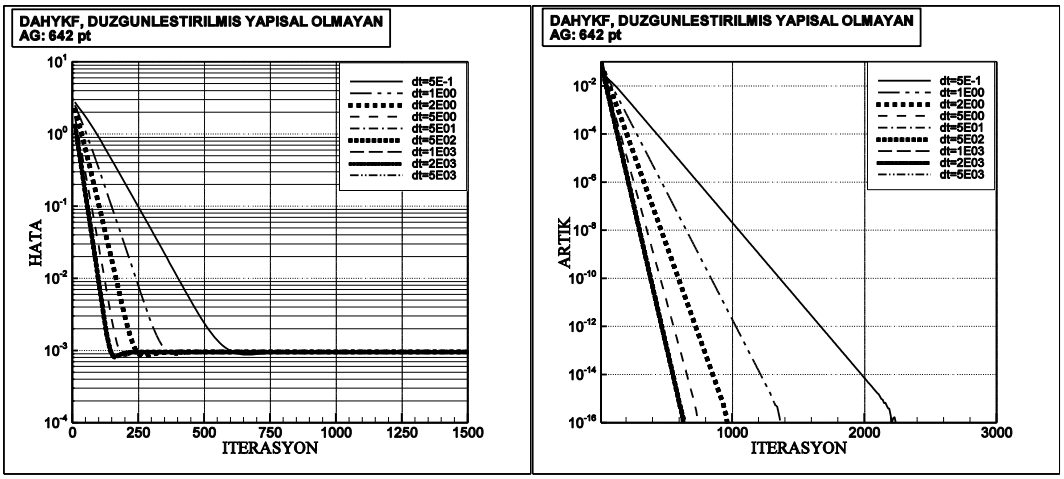
Şekil B.49 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



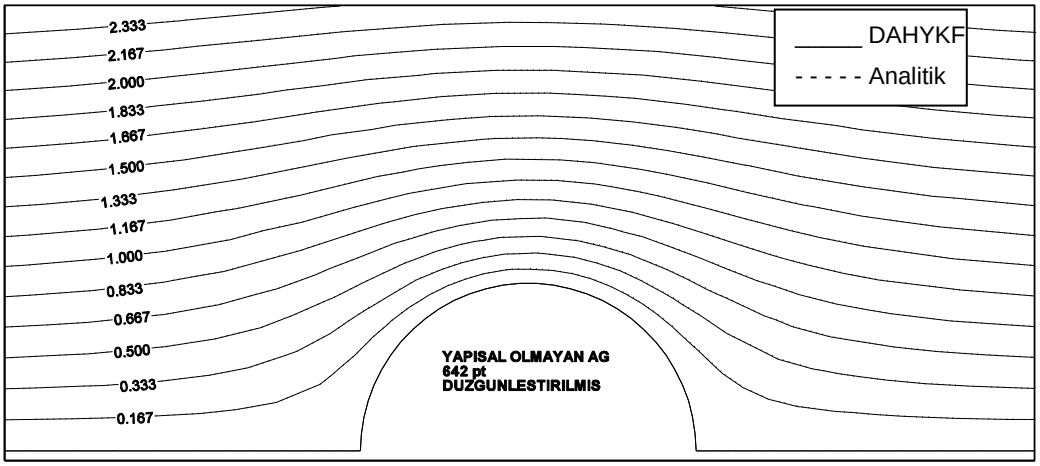
Şekil B.50 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



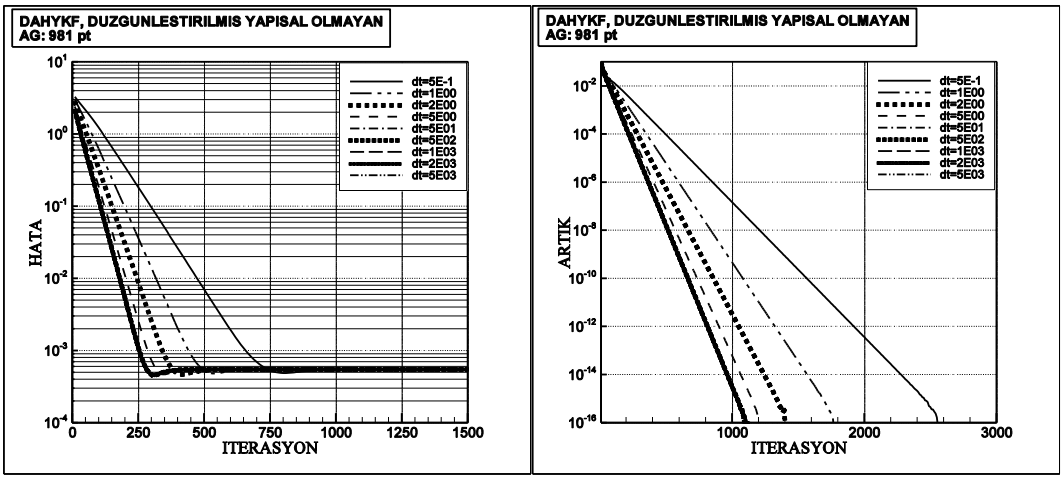
Şekil B.51 Düzgünleştirilmiş 527 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



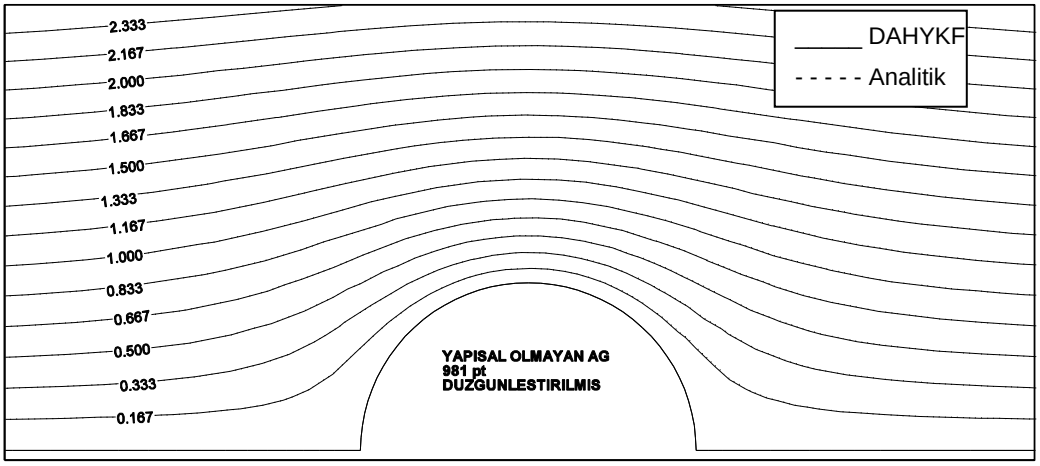
Şekil B.52 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



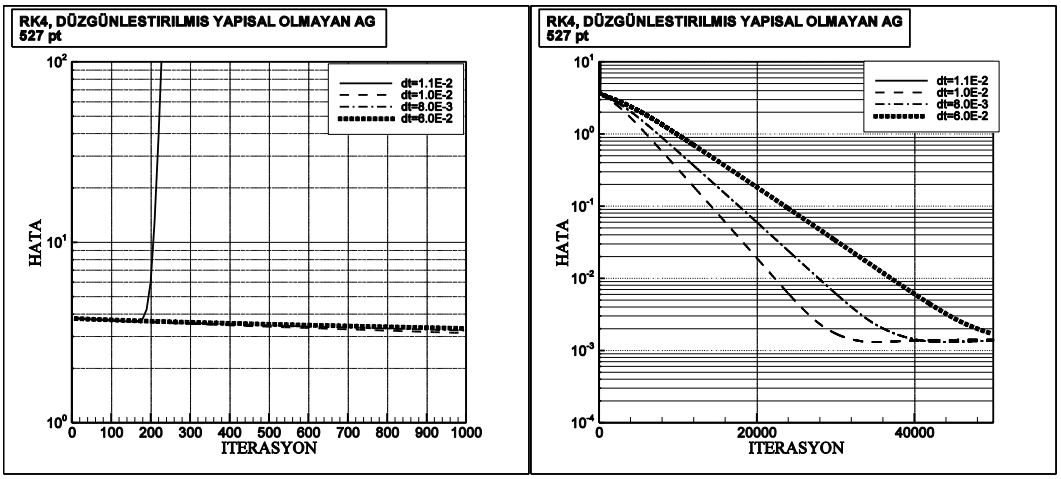
Şekil B.53 Düzgünleştirilmiş 642 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



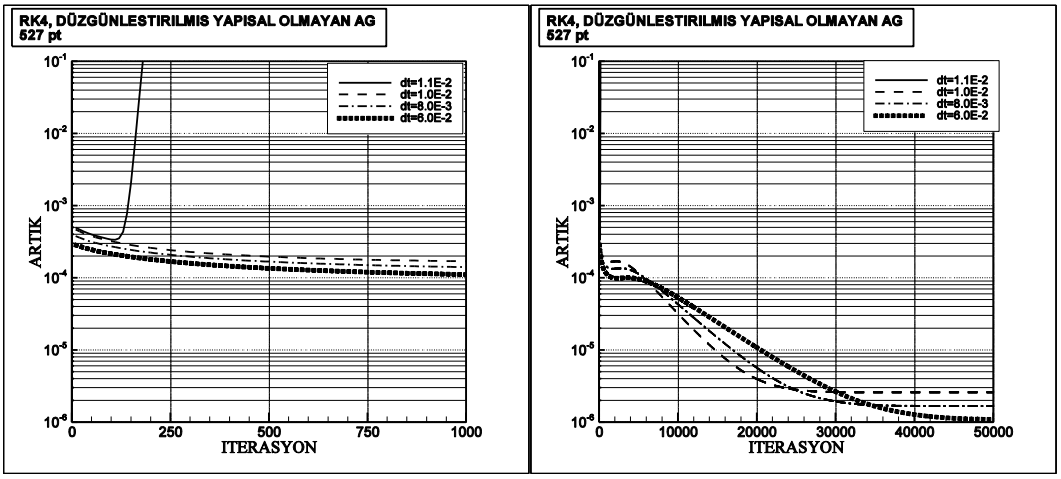
Şekil B.54 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün hata ve artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



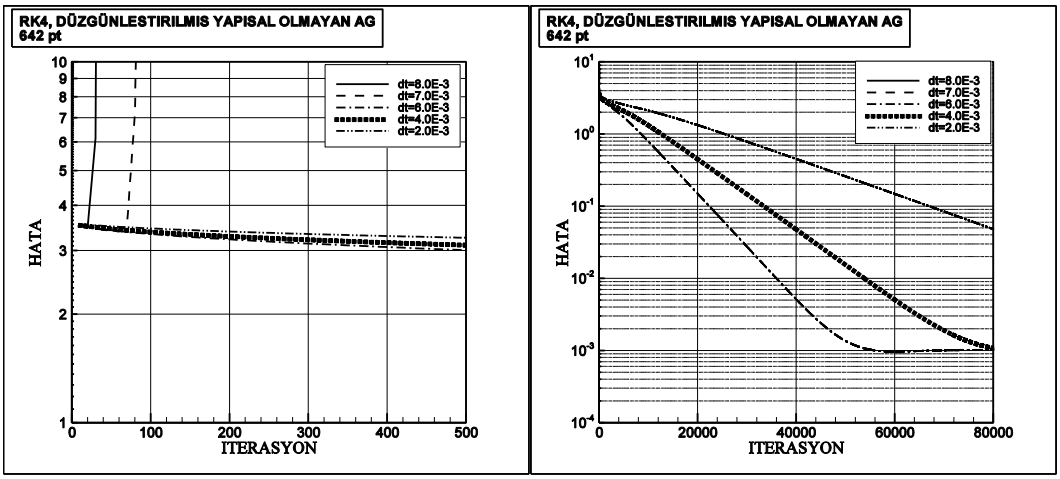
Şekil B.55 Düzgünleştirilmiş 981 noktalı yapısal olmayan ağlı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması.



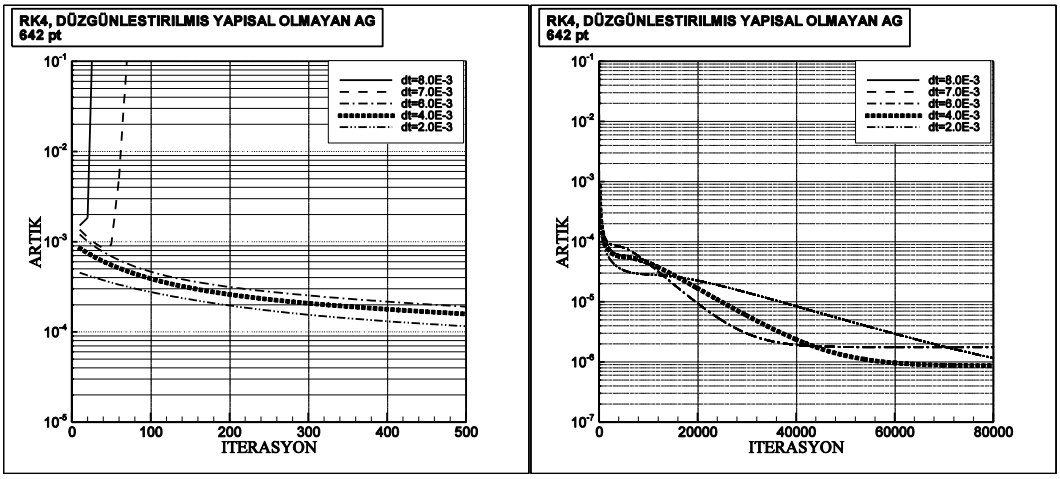
Şekil B.56 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



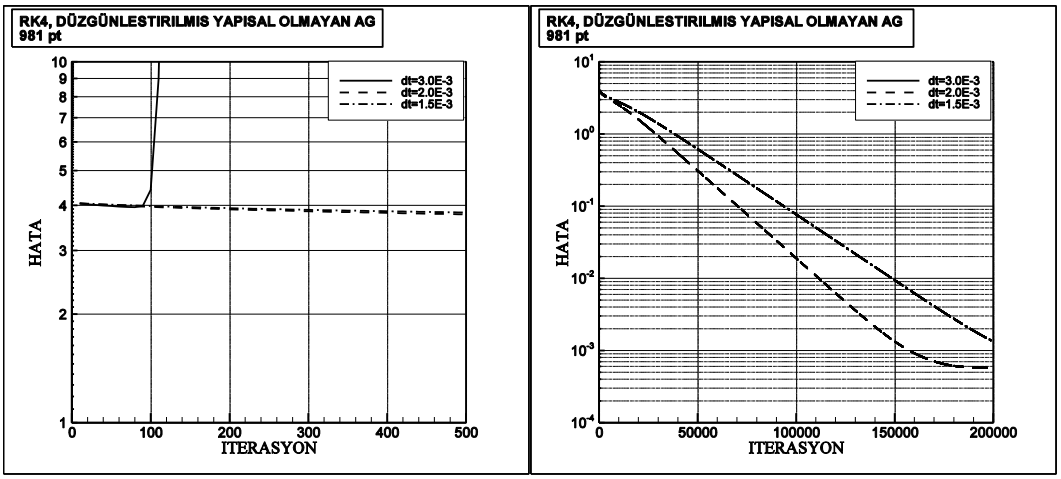
Şekil B.57 527 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



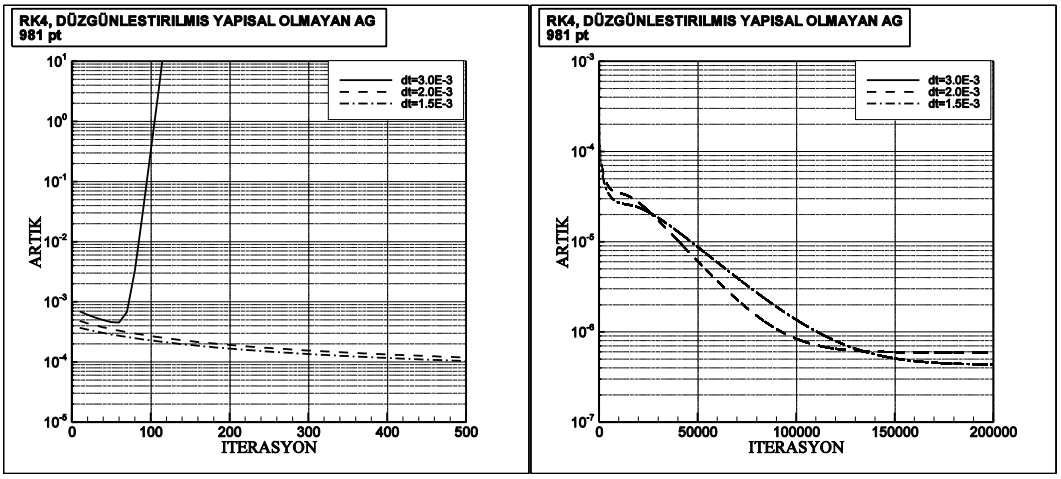
Şekil B.58 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



Şekil B.59 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



Şekil B.60 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün hata değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.



Şekil B.61 981 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan ağlı halin RK4 yöntemi ile çözümünün artık değerlerinin iterasyon sayılarına göre grafikleri.

Tablo B.1 Yapısal çözüm ağı ile RK4 yöntemi sonuçları.

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
RK4	21x21	yapısal	0.03	1.0E-8	2.9E-8	2.3E-3	1.0E-2	12130	1.2	1.E-4
RK4	21x21	yapısal	0.04	1.0E-8	2.9E-8	2.3E-3	1.0E-2	9310	1.0	1.E-4
RK4	21x21	yapısal	0.05	1.0E-8	2.9E-8	2.3E-3	1.0E-2	7580	0.8	1.E-4
RK4	21x21	yapısal	0.06	-	-	-	-	-	-	1.E-4
RK4	30x30	yapısal	0.01	1.0E-8	3.0E-8	9.4E-4	4.9E-3	37860	9.1	2.4E-4
RK4	30x30	yapısal	0.02	1.0E-8	3.0E-8	1.0E-3	4.9E-3	20140	4.8	2.4E-4
RK4	30x30	yapısal	0.03	-	-	-	-	-	-	2.4E-4
RK4	41x41	yapısal	0.0075	1.0E-8	3.0E-8	4.8E-4	2.8E-3	52720	23.7	4.5E-4
RK4	41x41	yapısal	0.010	1.0E-8	3.0E-8	4.9E-4	2.8E-3	40630	18.3	4.5E-4
RK4	41x41	yapısal	0.015	-	-	-	-	-	-	4.5E-4

Tablo B.2 Yapısal çözüm ağı ile DAHYKF yöntemi sonuçları.

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL.ÇÖZ. ZAMANI
DAHYK	21x21	yapısal	0.5	1.0E-7	3.0E-7	2.5E-3	8.7E-3	810	0.12	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	1.0	1.0E-7	3.0E-7	2.5E-3	8.7E-3	480	0.07	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	2.0	1.0E-7	3.4E-7	2.5E-3	8.7E-3	310	0.04	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	5.0	1.0E-7	3.0E-7	2.5E-3	8.7E-3	210	0.05	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	50.0	1.0E-7	2.3E-7	2.5E-3	8.7E-3	160	0.03	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	500.0	1.0E-7	3.4E-7	2.5E-3	8.7E-3	160	0.03	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	1000.0	1.0E-7	3.4E-7	2.5E-3	8.7E-3	160	0.03	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	2000.0	1.0E-7	3.0E-7	2.5E-3	8.7E-3	160	0.03	1.5E-4
DAHYK	21x21	yapısal	5000.0	1.0E-7	3.4E-7	2.5E-3	8.7E-3	160	0.03	1.5E-4
DAHYK	31x31	yapısal	0.5	1.0E-7	3.0E-7	1.0E-3	4.2E-3	1070	0.39	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	1.0	1.0E-7	3.0E-7	1.0E-3	4.2E-3	690	0.25	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	2.0	1.0E-7	3.0E-7	1.0E-3	4.2E-3	510	0.18	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	5.0	1.0E-7	2.7E-7	1.0E-3	4.2E-3	410	0.15	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	50.0	1.0E-7	2.5E-7	1.0E-3	4.2E-3	310	0.11	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	500.0	1.0E-7	2.8E-7	1.0E-3	4.2E-3	310	0.11	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	1000.0	1.0E-7	2.7E-7	1.0E-3	4.2E-3	310	0.11	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	2000.0	1.0E-7	2.6E-7	1.0E-3	4.2E-3	310	0.11	3.6E-4
DAHYK	31x31	yapısal	5000.0	1.0E-7	2.6E-7	1.0E-3	4.2E-3	310	0.11	3.6E-4
DAHYK	41x41	yapısal	0.5	1.0E-7	3.0E-7	6.0E-4	2.5E-3	1340	0.85	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	1.0	1.0E-7	2.8E-7	6.0E-4	2.5E-3	950	0.60	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	2.0	1.0E-7	2.9E-7	6.0E-4	2.5E-3	770	0.50	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	5.0	1.0E-7	2.8E-7	6.0E-4	2.5E-3	670	0.43	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	50.0	1.0E-7	3.0E-7	6.0E-4	2.5E-3	610	0.39	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	500.0	1.0E-7	3.2E-7	6.0E-4	2.5E-3	610	0.39	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	1000.0	1.0E-7	3.1E-7	6.0E-4	2.5E-3	610	0.39	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	2000.0	1.0E-7	3.1E-7	6.0E-4	2.5E-3	610	0.39	6.4E-4
DAHYK	41x41	yapısal	5000.0	1.0E-7	3.0E-7	6.0E-4	2.5E-3	610	0.39	6.4E-4

Tablo B.3 Yapısal çözüm ağı ile DYKF yöntemi sonuçları.

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DYKF	21x21	yapısal	0.5	1.0E-7	3.1E-7	1.6E-3	4.0E-3	640	0.064	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	1.0	1.0E-7	3.5E-7	1.6E-3	4.0E-3	330	0.033	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	2.0	1.0E-7	3.4E-7	1.6E-3	4.0E-3	200	0.02	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	5.0	1.0E-7	3.0E-7	1.6E-3	4.0E-3	80	0.008	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	50.0	1.0E-7	5.0E-8	1.6E-3	4.0E-3	80	0.008	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	500.0	1.0E-7	5.0E-7	1.6E-3	4.0E-3	460	0.046	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	1000.0	1.0E-7	4.5E-7	1.6E-3	4.0E-3	830	0.083	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	2000.0	1.0E-7	4.5E-7	1.6E-3	4.0E-3	1470	0.147	1.0E-4
DYKF	21x21	yapısal	5000.0	1.0E-7	4.5E-7	1.6E-3	4.0E-3	3100	0.31	1.0E-4
DYKF	31x31	yapısal	0.5	1.0E-7	3.5E-7	7.3E-4	1.8E-3	720	0.173	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	2.0	1.0E-7	3.2E-7	7.3E-4	1.8E-3	200	0.048	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	5.0	1.0E-7	5.0E-7	7.3E-4	1.8E-3	80	0.019	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	50.0	1.0E-7	5.5E-7	7.3E-4	1.8E-3	65	0.015	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	500.0	1.0E-7	5.0E-7	7.3E-4	1.8E-3	460	0.110	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	1000.0	1.0E-7	4.6E-7	7.5E-4	1.8E-3	830	0.199	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	2000.0	1.0E-7	4.5E-7	7.3E-4	1.8E-3	1470	0.353	2.4E-4
DYKF	31x31	yapısal	5000.0	1.0E-7	4.5E-7	8.03E-4	2.0E-3	3050	0.732	2.4E-4
DYKF	41x41	yapısal	0.5	1.0E-7	3.0E-7	4.3E-4	1.0E-3	780	.327	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	2.0	1.0E-7	2.9E-7	4.3E-4	1.0E-3	210	0.088	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	5.0	1.0E-7	2.8E-7	4.3E-4	1.0E-3	90	0.038	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	50.0	1.0E-7	3.0E-7	4.3E-4	1.0E-3	80	0.033	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	500.0	1.0E-7	3.2E-7	4.3E-4	1.0E-3	460	0.193	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	1000.0	1.0E-7	4.5E-7	4.3E-4	1.0E-3	830	0.3486	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	2000.0	1.0E-7	4.5E-7	4.5E-4	1.1E-3	1460	0.6132	4.2E-4
DYKF	41x41	yapısal	5000.0	1.0E-7	4.5E-7	4.5E-4	1.1E-3	3200	1.34	4.2E-4

Tablo B.4 Deforme edilmiş yapısal çözüm ağı ile DAHYKF yöntemi sonuçları

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKIN. İTER. SAYISI	ÇÖZÜM ZAMANI	İTR.İÇİN BİL.ÇZ.ZAM
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.5	1.0E-7	2.8E-7	2.5E-2	6.5E-2	1070	0.39	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	1.0	1.0E-7	2.9E-7	2.5E-2	6.5E-2	690	0.25	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	2.0	1.0E-7	2.7E-7	2.5E-2	6.5E-2	510	0.18	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	5.0	1.0E-7	2.6E-7	2.5E-2	6.5E-2	410	0.15	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	50.0	1.0E-7	2.7E-7	2.5E-2	6.5E-2	310	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	500.0	1.0E-7	3.1E-7	2.5E-2	6.5E-2	310	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	1000	1.0E-7	2.9E-7	2.5E-2	6.5E-2	310	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	2000.	1.0E-7	2.9E-7	2.5E-2	6.5E-2	310	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	5000.	1.0E-7	2.9E-7	2.5E-2	6.5E-2	310	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	0.5	1.0E-7	3.5E-7	1.7E-2	1.2E-1	1050	0.38	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	1.0	1.0E-7	3.5E-7	1.7E-2	1.2E-1	685	0.25	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	2.0	1.0E-7	3.4E-7	1.7E-2	1.2E-1	500	0.18	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	5.0	1.0E-7	2.9E-7	1.7E-2	1.2E-1	400	0.15	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	50.0	1.0E-7	3.5E-7	1.7E-2	1.2E-1	290	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	500.0	1.0E-7	2.7E-7	1.7E-2	1.2E-1	290	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	1000.	1.0E-7	2.7E-7	1.7E-2	1.2E-1	290	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	2000.	1.0E-7	2.7E-7	1.7E-2	1.2E-1	290	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	5000.	1.0E-7	2.7E-7	1.7E-2	1.2E-1	290	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	0.5	1.0E-7	3.8E-7	8.7E-4	5.3E-3	1060	0.38	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	1.0	1.0E-7	3.6E-7	8.7E-4	5.3E-3	680	0.25	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	2.0	1.0E-7	3.4E-7	8.7E-4	5.3E-3	500	0.18	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	5.0	1.0E-7	3.6E-7	8.7E-4	5.3E-3	400	0.15	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	50.0	1.0E-7	3.0E-7	8.7E-4	5.3E-3	300	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	500.0	1.0E-7	3.6E-7	8.7E-4	5.3E-3	300	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	1000.	1.0E-7	3.6E-7	8.7E-4	5.3E-3	300	0.11	3.6E-4
DAHYKF	31x31	Yapısal-burulmuş-düzgün.	5000.	1.0E-7	3.6E-7	8.7E-4	5.3E-3	300	0.11	3.6E-4

Tablo B.5 Deforme edilmiş yapısal çözüm ağı ile DYKF yöntemi sonuçları

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL.ÇÖZ. ZAMANI
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.01	1.0E-7	3.0E-7	3.2E-3	9.0E-3	26150	6.27	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.02	1.0E-7	3.0E-7	3.2E-3	9.2E-3	14000	3.36	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.03	1.0E-7	3.0E-7	3.5E-3	9.3E-3	9690	2.32	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.05	1.0E-7	3.0E-7	3.4E-3	9.3E-3	6080	1.46	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.15	1.0E-7	3.0E-7	3.5E-3	9.3E-3	2220	0.533	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.25	1.0E-7	3.0E-7	3.5E-3	9.3E-3	1380	0.33	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	0.5	1.0E-7	3.0E-7	3.5E-3	9.3E-3	730	0.1752	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	1.0	1.0E-7	7.3E-7	3.5E-3	9.3E-3	720	0.17	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Bozuntulu	2.0	IRAKSAK						
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	0.01	1.0E-7	4.0E-7	4.0E-4	2.4E-3	25140	6.0	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	0.015	1.0E-7	4.0E-7	4.3E-4	2.4E-3	17470	4.19	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	0.020	1.0E-7	4.0E-7	4.5E-4	2.4E-3	13480	3.23	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş	0.025	IRAKSAK						
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş-Düzgün.	0.01	1.0E-7	4.0E-7	4.0E-4	2.4E-3	25140	6.0	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş-Düzgün.	0.015	1.0E-7	4.0E-7	4.3E-4	2.4E-3	17470	4.19	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş-Düzgün.	0.020	1.0E-7	4.0E-7	4.5E-4	2.4E-3	13480	3.23	2.4E-4
DYKF	31x31	Yapısal-Burulmuş-Düzgün.	0.025	IRAKSAK						

Tablo B.6 Yapısal çözüm ağları ile DAHYKF yöntemi çözümleri

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL.ÇZ. ZAMANI
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn.	0.5	1.0E-7	2.8E-7	5.0E-2	3.1E-1	1000	0.3	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn.	1.0	1.0E-7	2.8E-7	5.0E-2	2.9E-1	630	0.19	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	2.0	1.0E-7	2.8E-7	5.0E-2	3.1E-1	460	0.14	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	5.0	1.0E-7	2.5E-7	5.0E-2	3.1E-1	370	0.11	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	50.0	1.0E-7	2.7E-7	5.0E-2	3.1E-1	320	0.096	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	500.	1.0E-7	3.6E-7	5.0E-2	3.1E-1	320	0.096	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	1000	1.0E-7	3.6E-7	5.0E-2	3.1E-1	320	0.096	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	2000	1.0E-7	3.6E-7	5.0E-2	3.1E-1	320	0.096	3.0E-4
DAHYK	527 pt	yapısal olmyn.	5000	1.0E-7	3.6E-7	5.0E-2	3.1E-1	320	0.096	3.0E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	0.5	1.0E-7	3.6E-7	2.9E-2	3.1E-1	1030	0.34	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	1.0	1.0E-7	3.6E-7	2.9E-2	3.1E-1	650	0.21	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	2.0	1.0E-7	3.5E-7	2.9E-2	3.1E-1	460	0.15	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	5.0	1.0E-7	3.6E-7	2.9E-2	3.1E-1	360	0.12	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	50.0	1.0E-7	3.6E-7	2.9E-2	3.1E-1	310	0.10	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	500.	1.0E-7	4.0E-7	2.9E-2	3.1E-1	310	0.10	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	1000	1.0E-7	4.0E-7	2.9E-2	3.1E-1	310	0.10	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	2000	1.0E-7	4.0E-7	2.9E-2	3.1E-1	310	0.10	3.3E-4
DAHYK	642 pt	yapısal olmyn.	5000	1.0E-7	3.9E-7	2.9E-2	3.1E-1	310	0.10	3.3E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	0.5	1.0E-7	3.0E-7	3.6E-2	2.0E-1	1150	0.63	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	1.0	1.0E-7	3.1E-7	3.6E-2	2.0E-1	800	0.44	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	2.0	1.0E-7	3.1E-7	3.6E-2	2.0E-1	640	0.35	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	5.0	1.0E-7	3.0E-7	3.6E-2	2.0E-1	550	0.30	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	50.0	1.0E-7	3.6E-7	3.6E-2	2.0E-1	500	0.27	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	500.	1.0E-7	3.0E-7	3.6E-2	2.0E-1	500	0.27	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	1000	1.0E-7	2.9E-7	3.6E-2	2.0E-1	500	0.27	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	2000	1.0E-7	3.1E-7	3.6E-2	2.0E-1	500	0.27	5.5E-4
DAHYK	981 pt	yapısal olmyn.	5000	1.0E-7	3.0E-7	3.6E-2	2.0E-1	500	0.27	5.5E-4

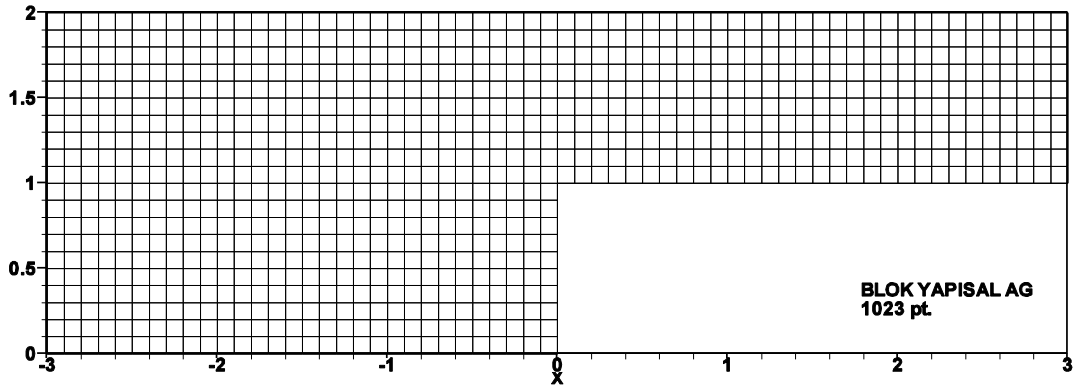
Tablo B.7 Düzgünleştirilmiş yapısal çözüm ağları ile DAHYKF yöntemi çözümleri

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL.ÇZ. ZAMANI
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.5	1.0E-7	2.7E-7	1.4E-3	1.0E-2	1030	0.3	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1.0	1.0E-7	2.2E-7	1.4E-3	1.0E-2	640	0.19	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2.0	1.0E-7	2.7E-7	1.4E-3	1.0E-2	460	0.14	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5.0	1.0E-7	2.5E-7	1.4E-3	1.0E-2	360	0.11	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	50.0	1.0E-7	2.7E-7	1.4E-3	1.0E-2	310	0.093	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	500.	1.0E-7	3.3E-7	1.4E-3	1.0E-2	300	0.093	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1000	1.0E-7	3.6E-7	1.4E-3	1.0E-2	300	0.093	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2000	1.0E-7	3.6E-7	1.4E-3	1.0E-2	300	0.093	3.0E-4
DAHYK	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5000	1.0E-7	3.6E-7	1.4E-3	1.0E-2	300	0.093	3.0E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.5	1.0E-7	3.6E-7	9.5E-4	7.7E-3	1050	0.35	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1.0	1.0E-7	3.6E-7	9.5E-4	7.7E-3	650	0.21	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2.0	1.0E-7	3.5E-7	9.5E-4	7.7E-3	460	0.15	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5.0	1.0E-7	3.6E-7	9.6E-4	7.7E-3	350	0.12	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	50.0	1.0E-7	3.6E-7	9.6E-4	7.7E-3	300	0.099	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	500.	1.0E-7	4.0E-7	9.6E-4	7.7E-3	290	0.099	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1000	1.0E-7	4.0E-7	9.6E-4	7.7E-3	290	0.099	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2000	1.0E-7	4.0E-7	9.6E-4	7.7E-3	290	0.099	3.3E-4
DAHYK	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5000	1.0E-7	4.0E-7	9.6E-4	7.7E-3	290	0.099	3.3E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.5	1.0E-7	2.9E-7	5.3E-4	4.2E-3	1200	0.66	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1.0	1.0E-7	2.9E-7	5.3E-4	4.2E-3	830	0.46	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2.0	1.0E-7	2.7E-7	5.3E-4	4.2E-3	660	0.36	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5.0	1.0E-7	3.1E-7	5.4E-4	4.2E-3	570	0.31	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	50.0	1.0E-7	3.6E-7	5.5E-4	4.2E-3	510	0.28	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	500.	1.0E-7	2.9E-7	5.5E-4	4.2E-3	510	0.28	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	1000	1.0E-7	2.9E-7	5.5E-4	4.2E-3	510	0.28	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	2000	1.0E-7	3.1E-7	5.5E-4	4.2E-3	510	0.28	5.5E-4
DAHYK	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	5000	1.0E-7	3.0E-7	5.5E-4	4.2E-3	510	0.28	5.5E-4

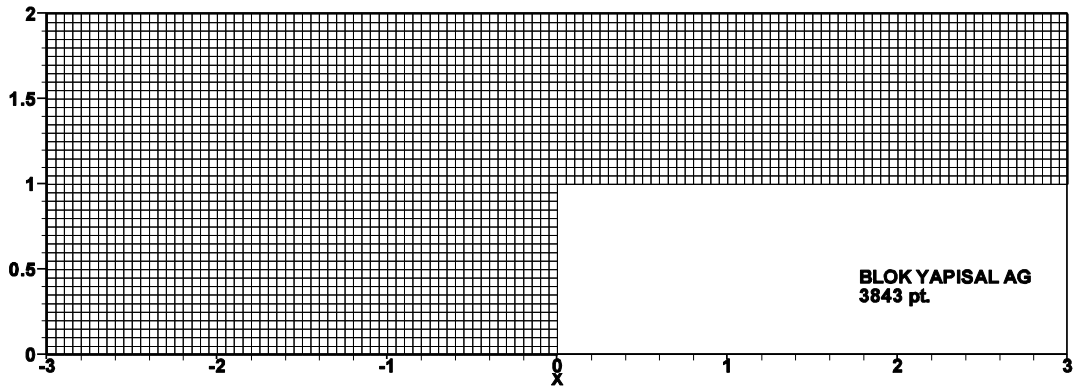
Tablo B.8 Düzgünleştirilmiş ve normal yapısal çözüm ağları ile RK4 yönteminin çözümleri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
RK4	527 pt	Yapısal olmyn.	0.008	6.3E-6	2.2E-4	4.9E-2	3.0E-1	100000	20	4.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn.	0.010	8.6E-6	3.7E-4	4.9E-2	3.0E-1	100000	20	4.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn.	0.012	1.2E-5	6.5E-4	4.9E-2	3.0E-1	100000	20	4.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn.	0.014	1.6E-5	1.0E-3	4.9E-2	3.0E-1	50000	10	4.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn.	0.015	IRAKSAK						
RK4	642 pt	Yapısal olmyn.	0.002	1.8E-6	5.3E-4	2.9E-2	3.0E-1	250000	55	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn.	0.004	3.7E-6	1.3E-4	2.9E-2	3.0E-1	250000	55	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn.	0.006	6.5E-6	3.8E-4	2.9E-2	3.0E-1	100000	22	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn.	0.008	1.1E-5	1.0E-3	2.9E-2	3.0E-1	100000	22	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn.	0.0085	IRAKSAK						
RK4	981 pt	Yapısal olmyn.	0.0010	9.8E-7	1.8E-5	3.3E-2	2.0E-1	250000	94	3.7E-4
RK4	981 pt	Yapısal olmyn.	0.0015	1.5E-6	2.7E-5	3.5E-2	2.0E-1	250000	94	3.7E-4
RK4	981 pt	Yapısal olmyn.	0.0020	1.9E-6	3.7E-5	3.5E-2	2.0E-1	250000	94	3.7E-4
RK4	981 pt	Yapısal olmyn.	0.0025	IRAKSAK						
RK4	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.006	1.0E-6	4.5E-5	1.4E-3	1.0E-2	80000	16	2.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.008	1.6E-6	8.7E-5	1.3E-3	1.0E-2	50000	10	2.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.010	2.5E-6	1.9E-4	1.4E-3	1.0E-2	50000	10	2.0E-4
RK4	527 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.011	IRAKSAK						
RK4	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.002	4.0E-7	1.4E-5	1.3E-3	7.5E-3	150000	33	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.004	8.7E-7	5.4E-5	1.0E-3	7.5E-3	80000	18	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.006	1.7E-6	2.2E-4	1.0E-3	7.6E-3	80000	18	2.2E-4
RK4	642 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.007	IRAKSAK						
RK4	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.0015	4.3E-7	1.3E-5	1.32E-	4.1E-3	200000	75	3.7E-4
RK4	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.0020	5.9E-7	1.9E-5	5.7E-4	4.1E-3	200000	75	3.7E-4
RK4	981 pt	Yapısal olmyn. düzgün.	0.0030	IRAKSAK						

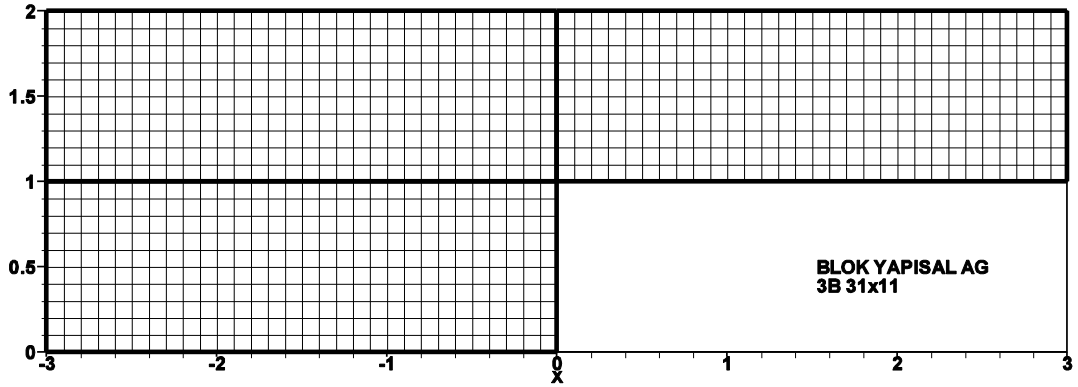
EK. C Basamak Akışı Detay Grafikleri



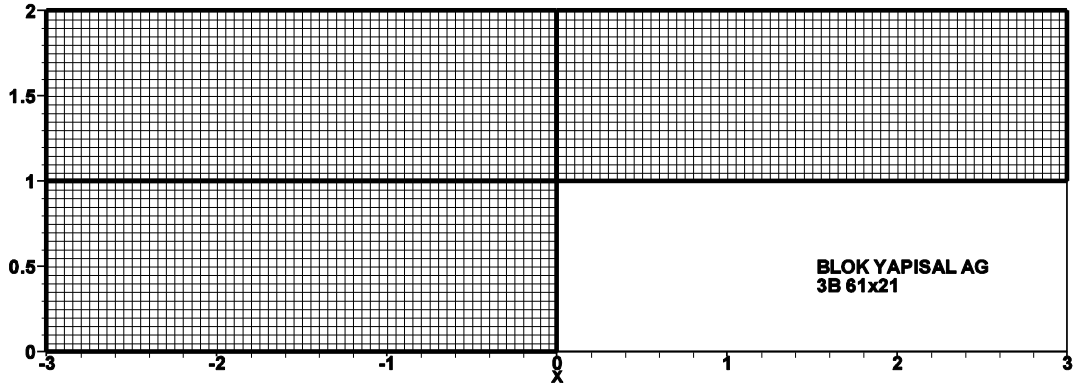
Şekil C.1 DAHYKF yöntemi için basamak etrafındaki 1023 noktalı (31x11 3 blok) blok yapısal çözüm ağı.



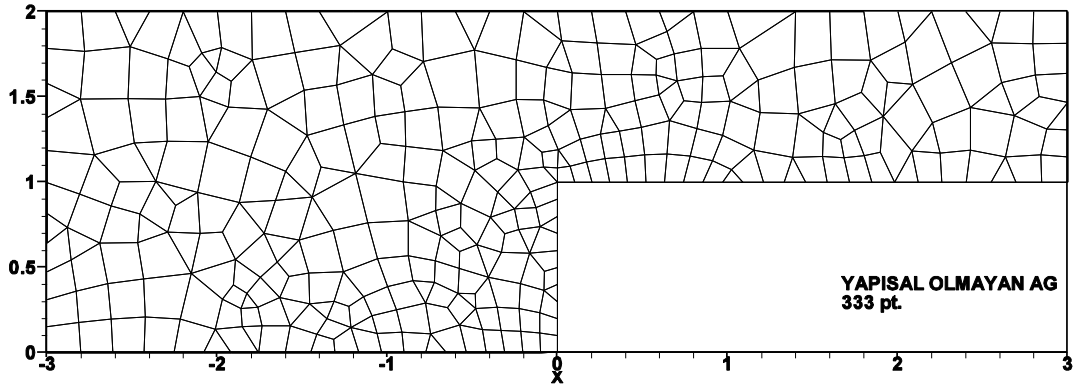
Şekil C.2 DAHYKF yöntemi için basamak etrafındaki 3843 noktalı (61x21 3 blok) blok yapısal çözüm ağı.



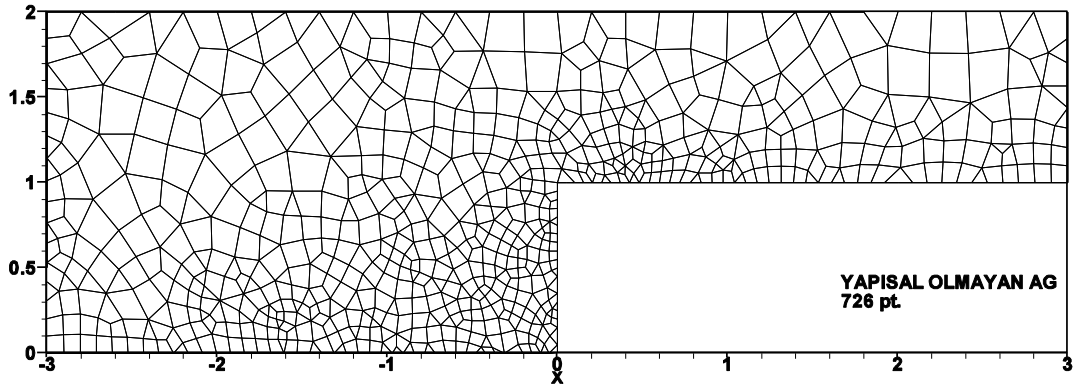
Şekil C.3 DYKF yöntemi için basamak etrafındaki 31x11 boyutlu 3 blok yapısal bloklu çözüm ağı.



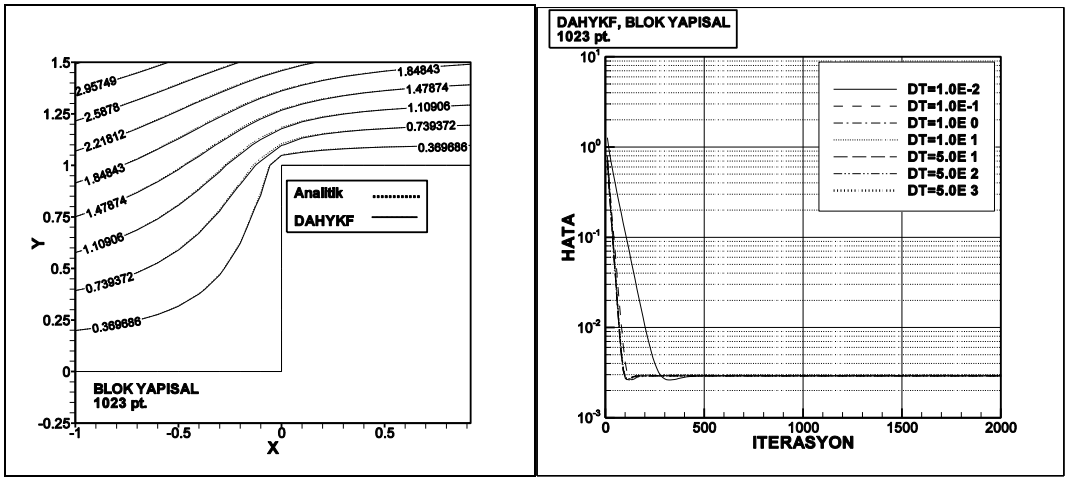
Şekil C.4 DYKF yöntemi için basamak etrafındaki 61x21 boyutlu 3 blok yapısal bloklu çözüm ağı.



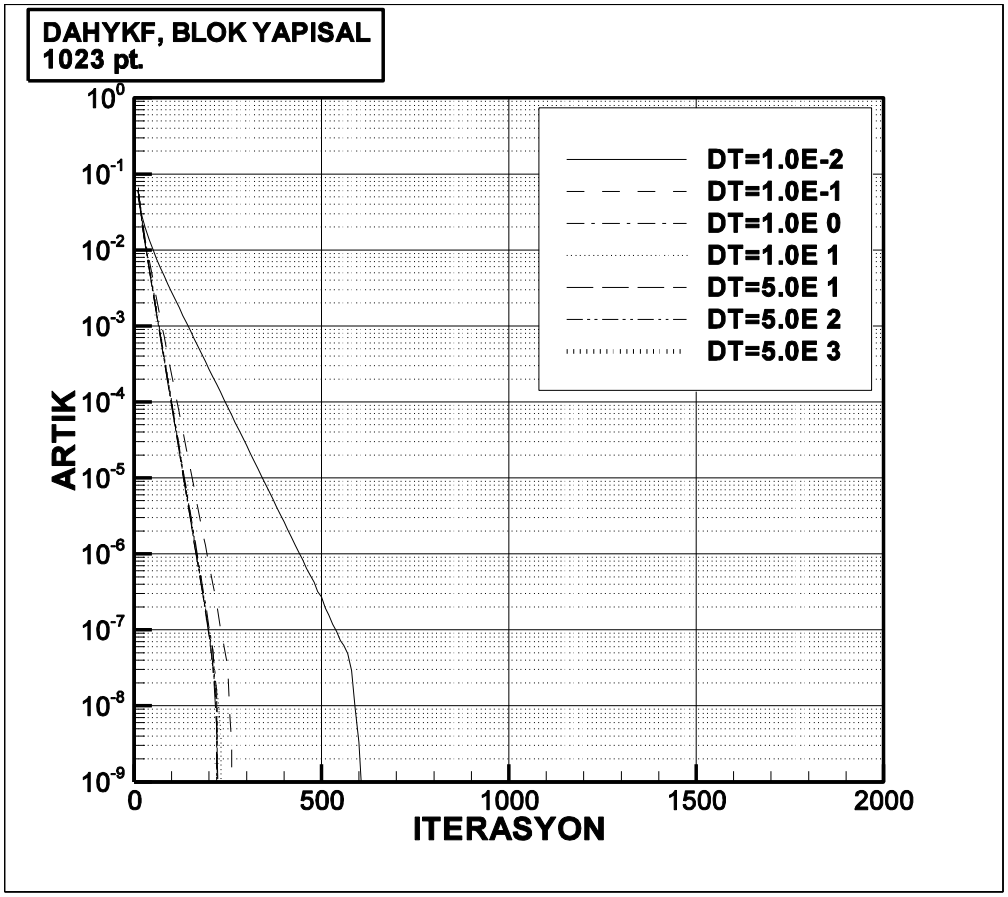
Şekil C.5 DAHYKF ve RK4 yöntemi için basamak etrafındaki 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı.



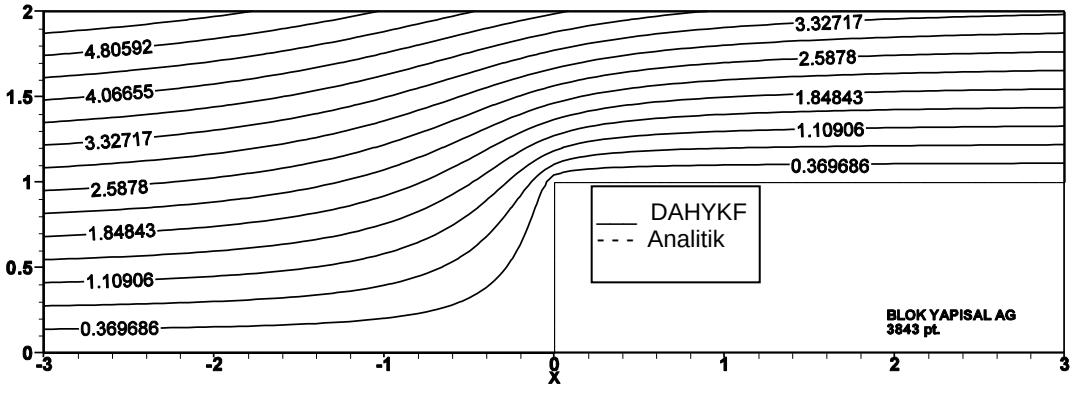
Şekil C.6 DAHYKF ve RK4 yöntemi için basamak etrafındaki 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı.



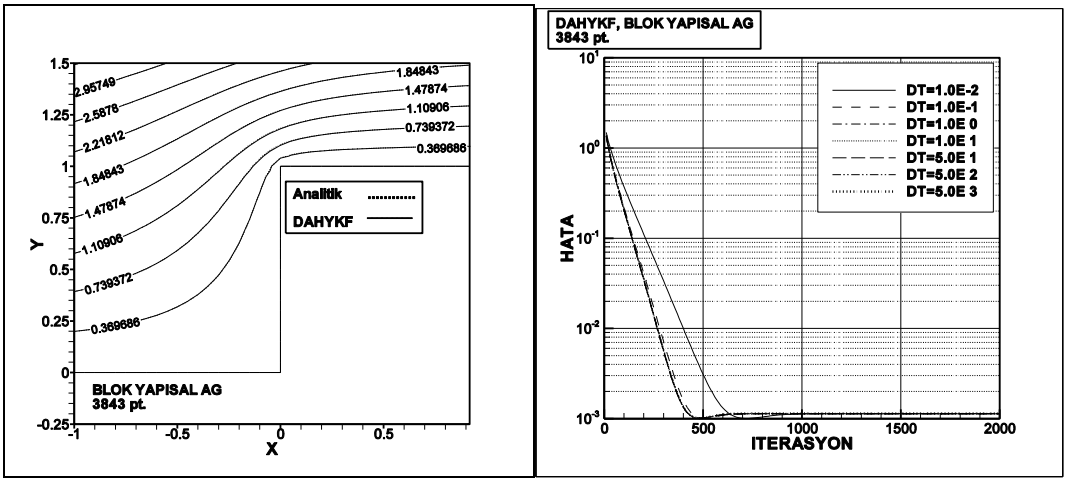
Şekil C.7 DAHYKF yöntemi ve 1023 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



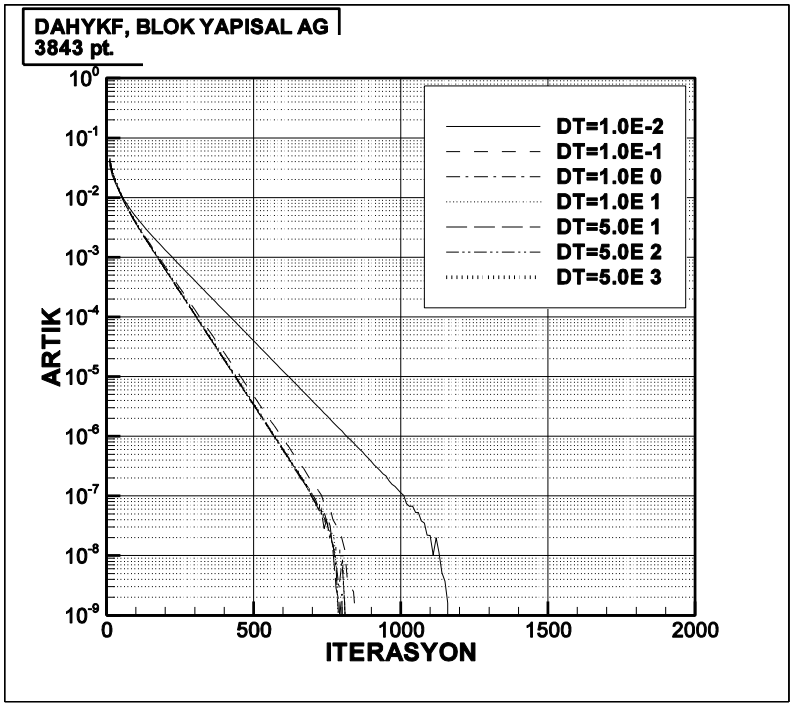
Şekil C.8 DAHYKF ve 1023 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



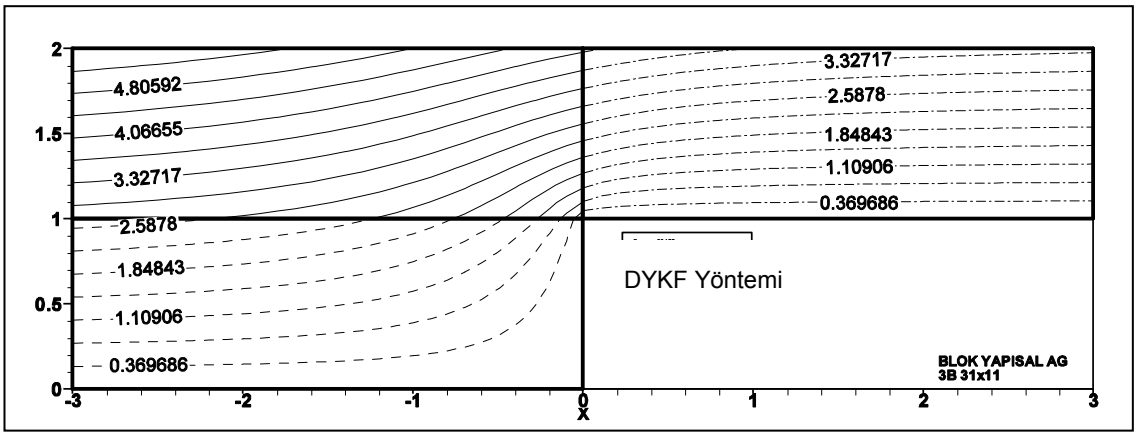
Şekil C.9 DAHYKF Yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri.



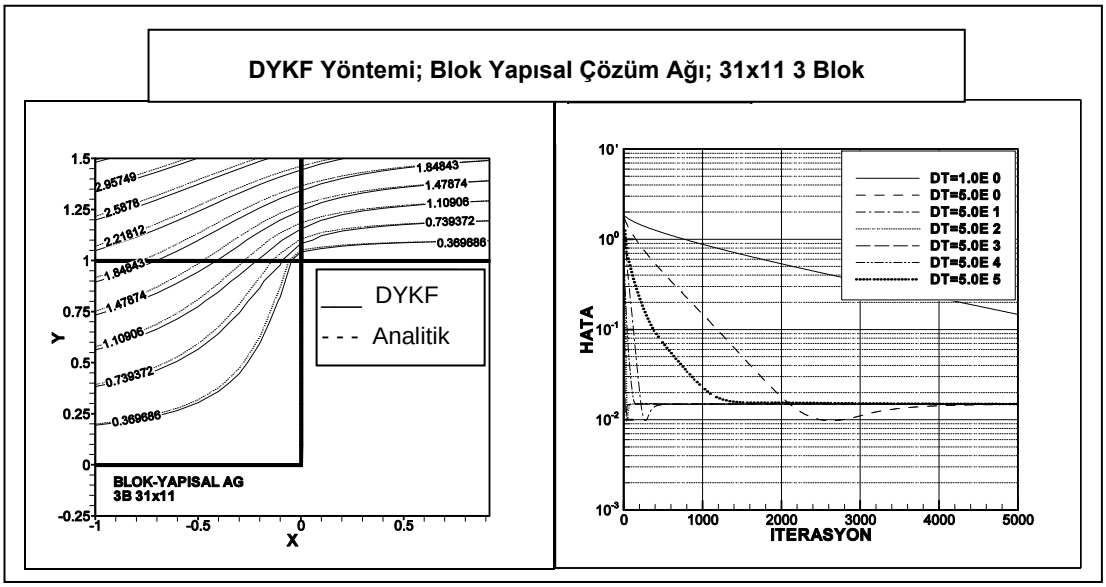
Şekil C.10 DAHYKF yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



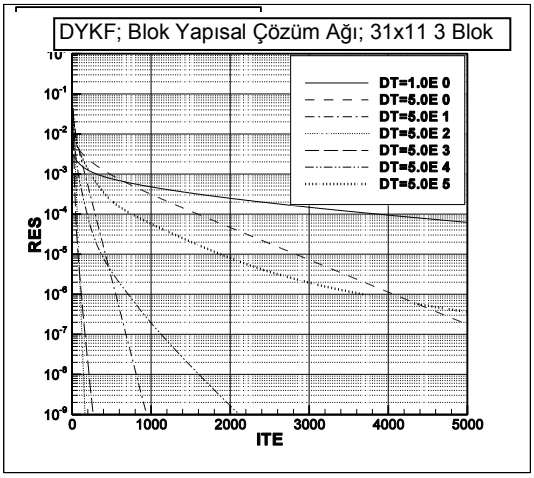
Şekil C.11 DAHYKF yöntemi ve 3843 noktalı blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



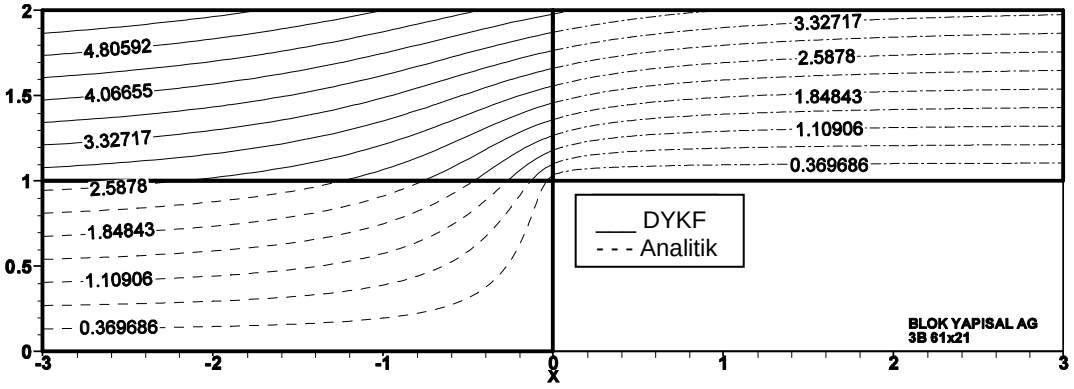
Şekil C.12 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri.



Şekil C.13 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.

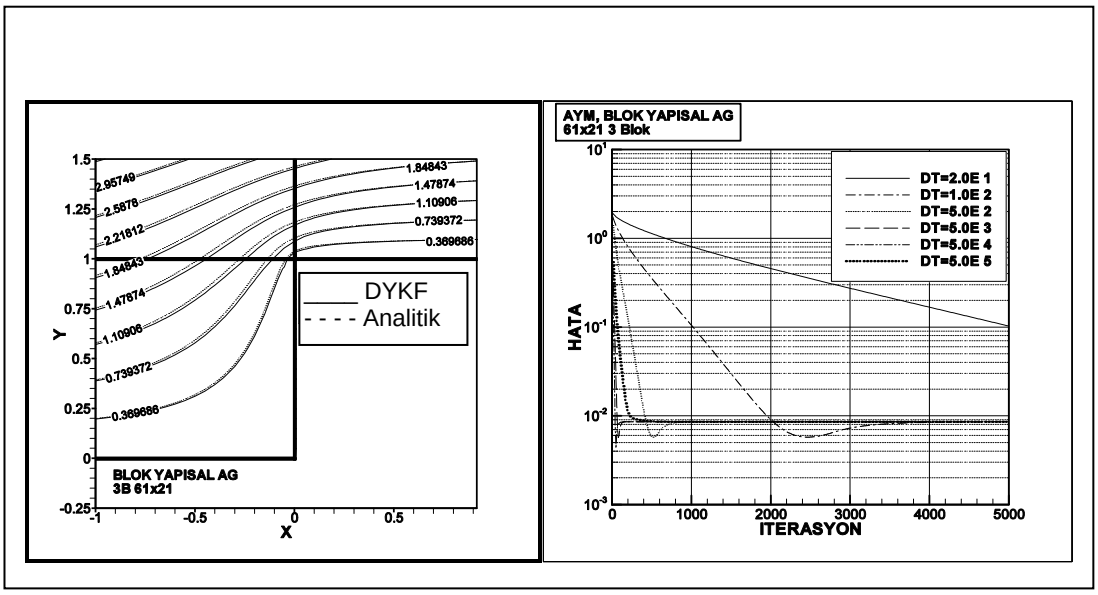


Şekil C.14 DYKF yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.

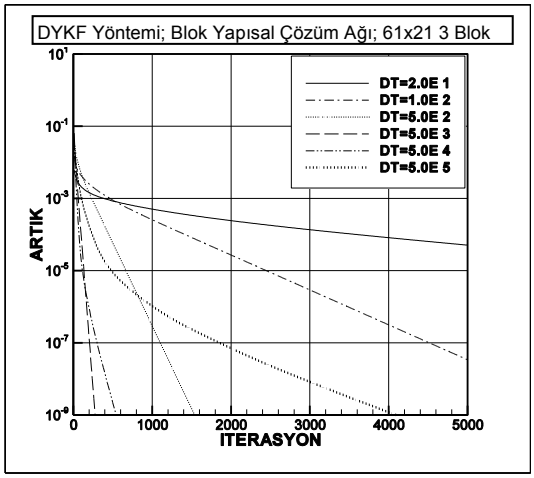


Şekil C.15 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri.

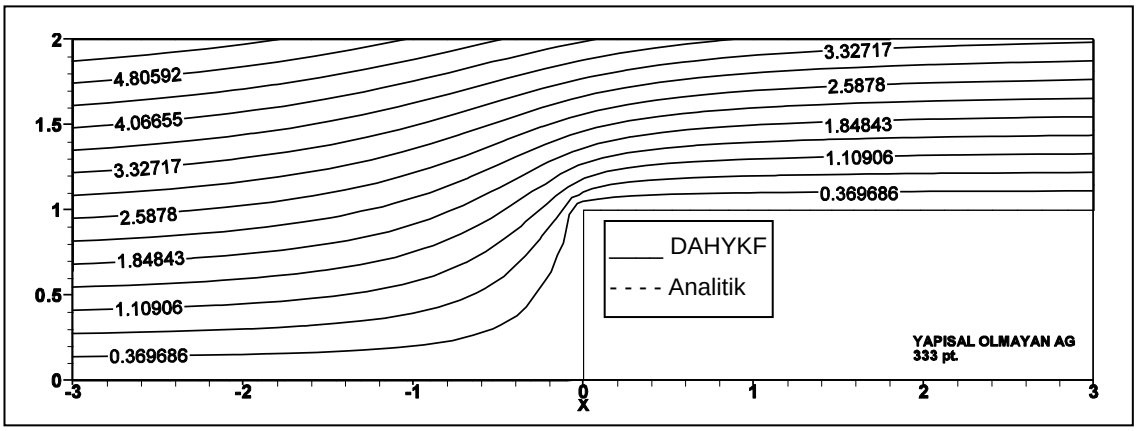
DYKF Yöntemi; Blok Yapısal Çözüm Ağı; 61x21 3 Blok



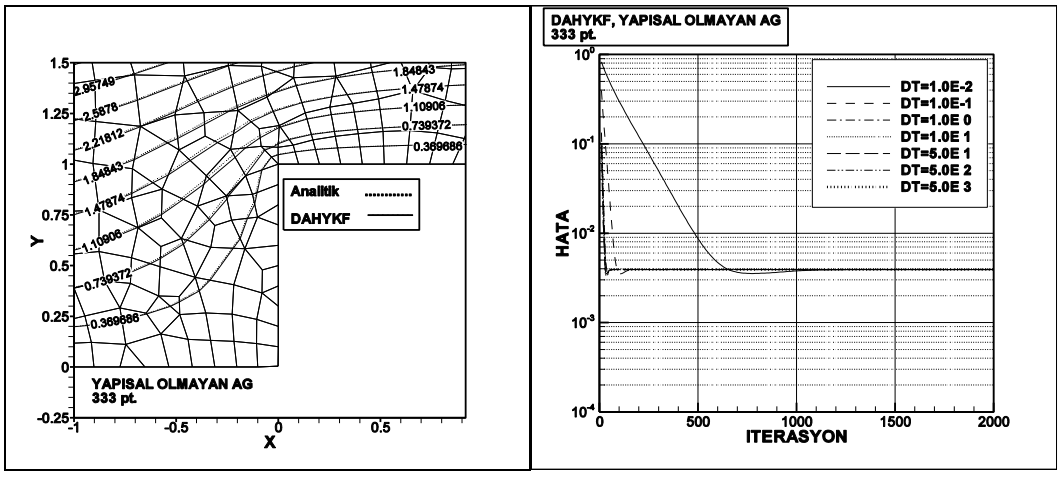
Şekil C.16 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



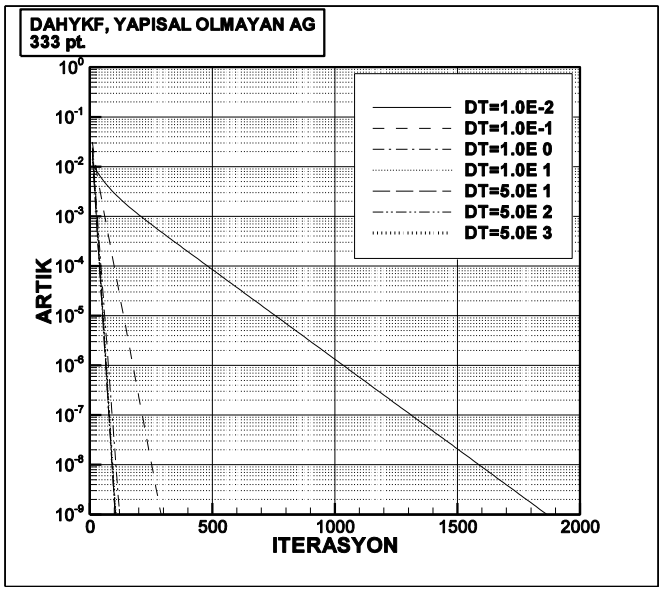
Şekil C.17 DYKF yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



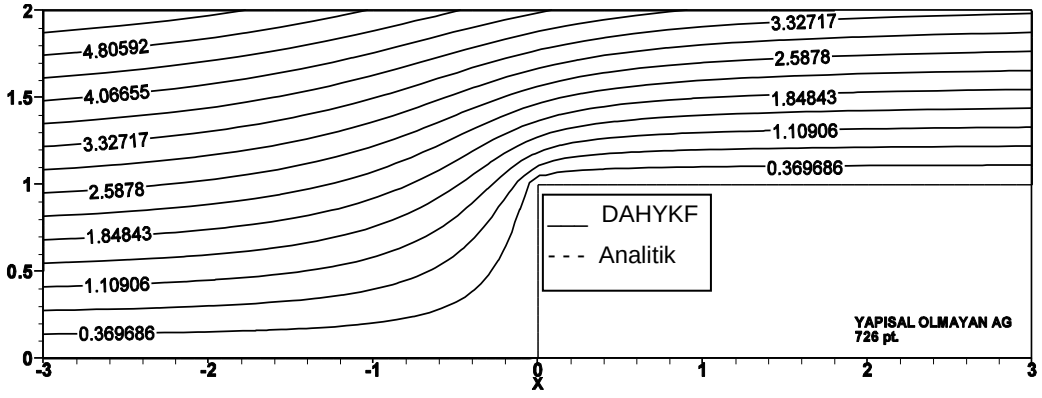
Şekil C.18 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



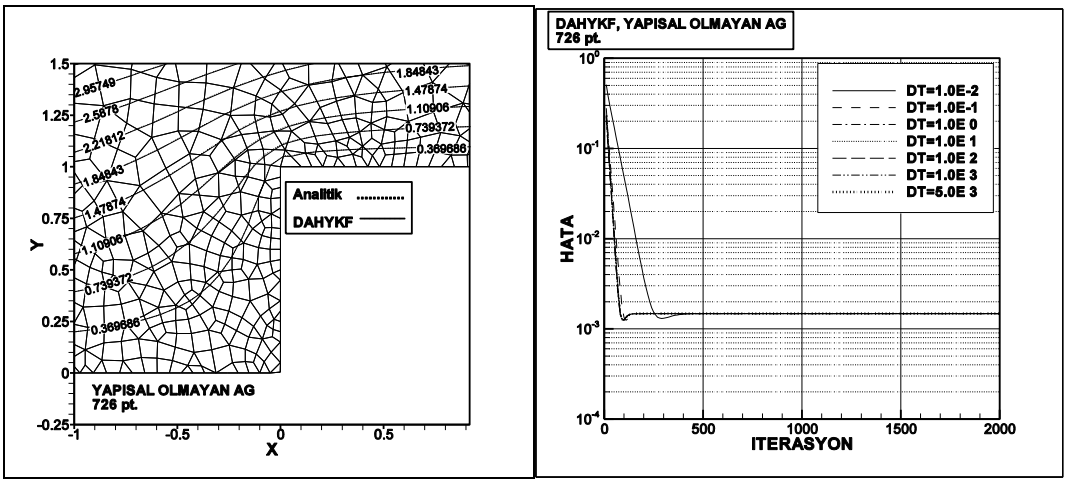
Şekil C.19 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



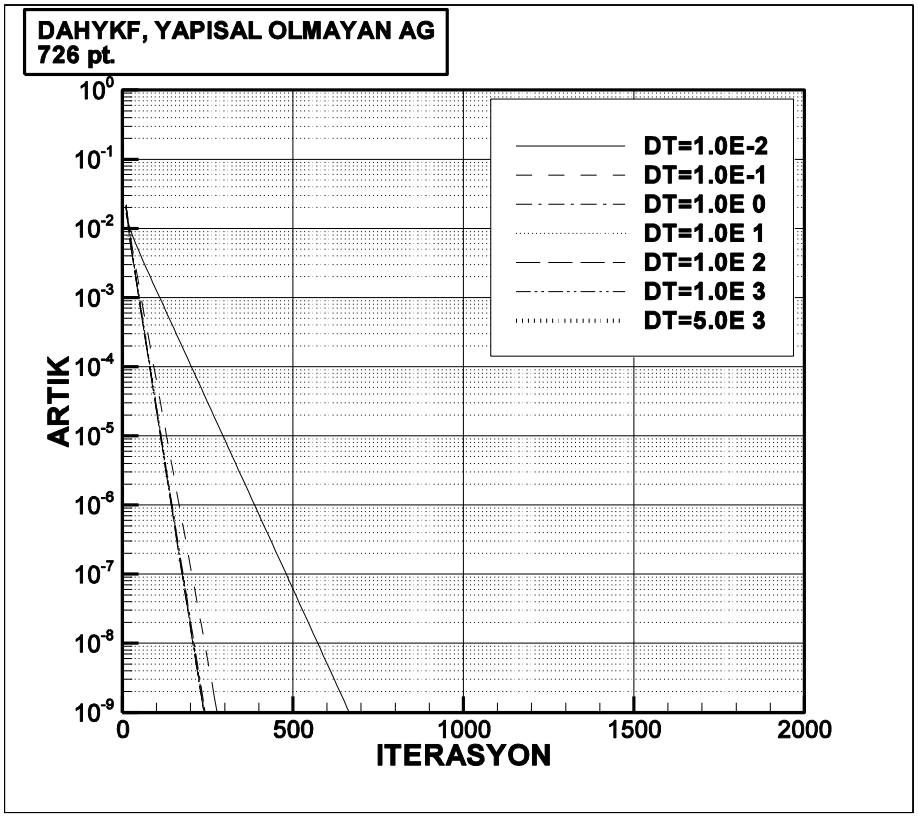
Şekil C.20 DAHYKF yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



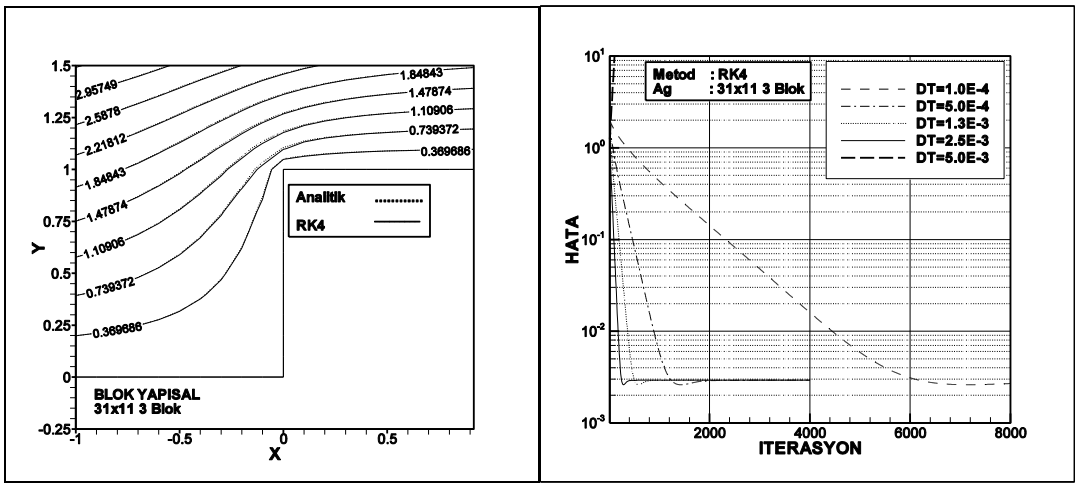
Şekil C.21 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



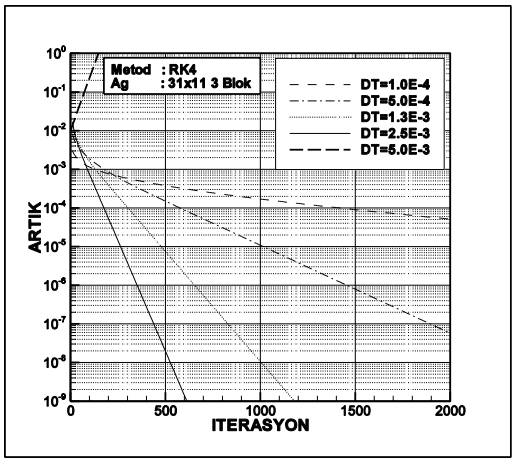
Şekil C.22 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün akım fonksiyonu eşçizgileri ve değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama hatanın iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



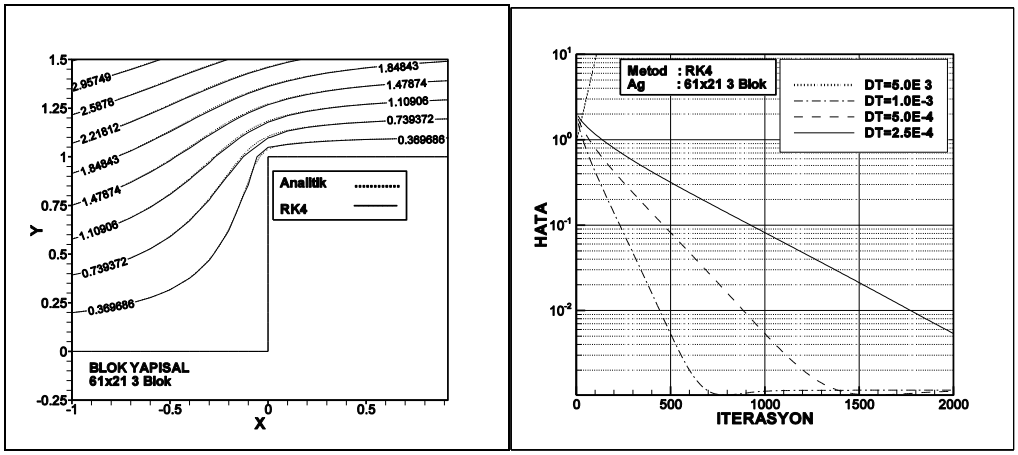
Şekil C.23 DAHYKF yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



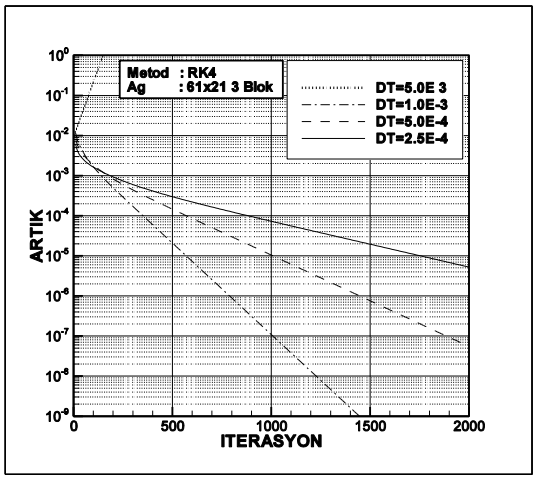
Şekil C.24 RK4 yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



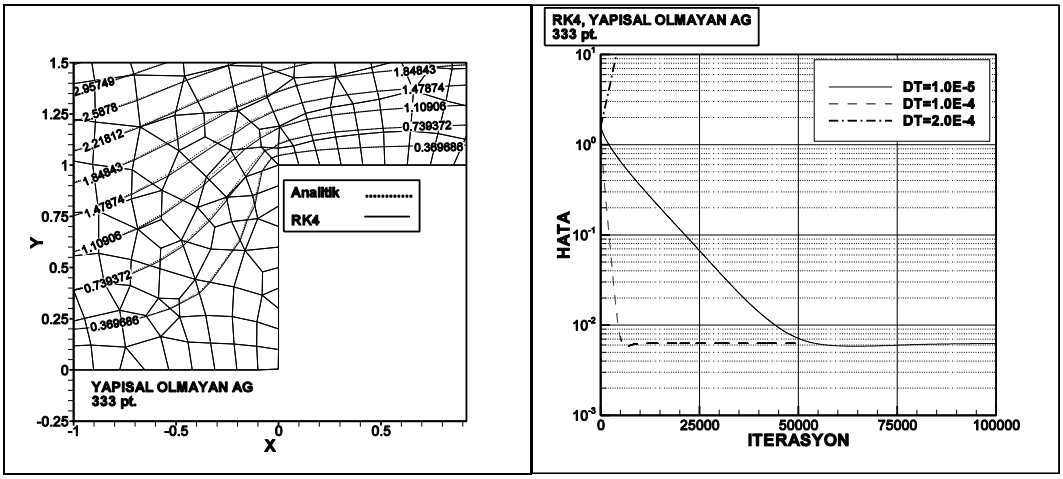
Şekil C.25 RK4 yöntemi ve 31x11 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



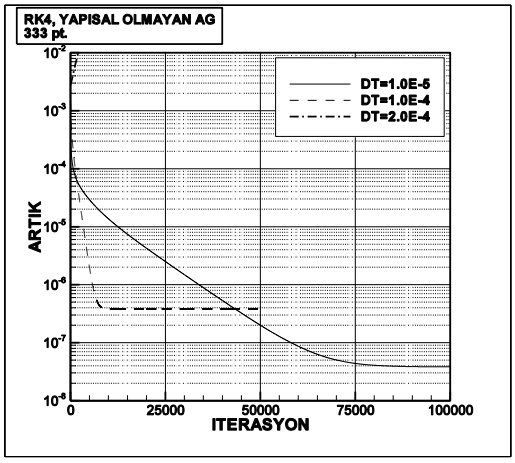
Şekil C.26 RK4 yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



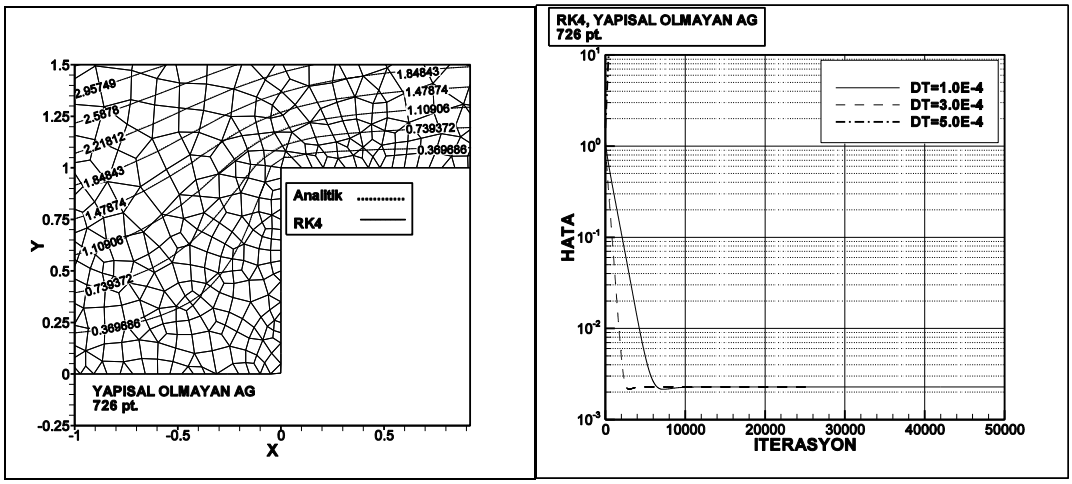
Şekil C.27 RK4 yöntemi ve 61x21 3 bloklu blok yapısal çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



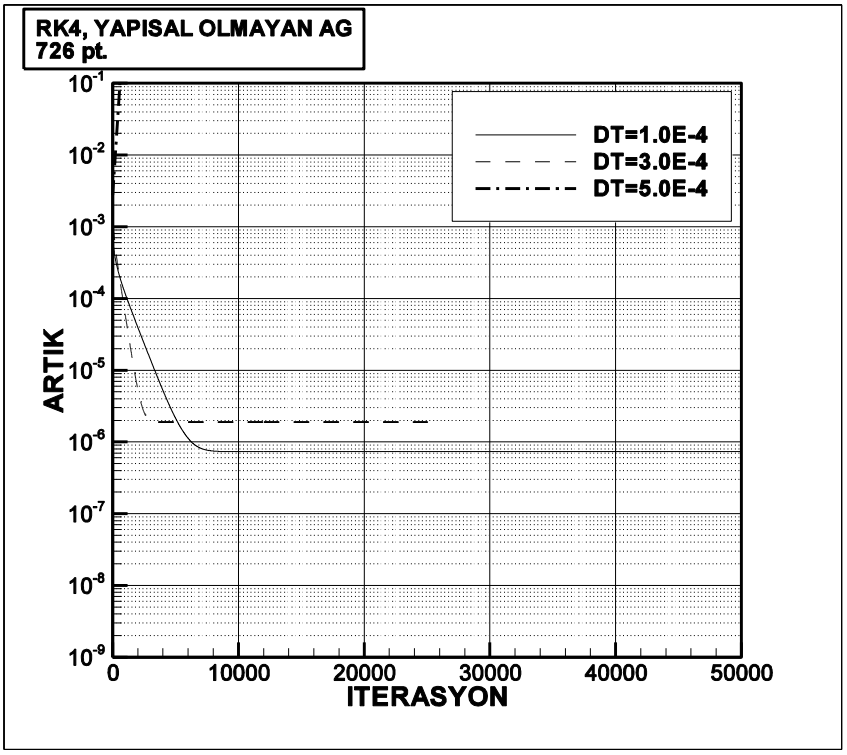
Şekil C.28 RK4 yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



Şekil C.29 RK4 yöntemi ve 333 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



Şekil C.30 RK4 yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.



Şekil C.31 RK4 yöntemi ve 726 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile basamak etrafındaki potansiyel akış çözümünün değişik çözüm zaman aralıkları ile ortalama artık değerlerinin iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir.

Tablo C.1 DAHYKF yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.E-02	1.0E-8	5.0E-07	2.91E-03	5.34E-02	580	0.261	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.E-01	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	260	0.117	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.E+00	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.E+01	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	5.E+01	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	5.E+02	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	2.E+03	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	5.E+03	1.0E-8	4.7E-07	2.91E-03	5.34E-02	220	0.099	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	1.E-02	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	1130	2.034	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	1.E-01	1.0E-8	7.2E-07	1.16E-03	3.42E-02	810	1.458	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	1.E+00	1.0E-8	7.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E+00	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	1.E+01	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E+01	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	2.E+02	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E+02	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E+03	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E+04	1.0E-8	4.7E-07	1.16E-03	3.42E-02	770	1.386	1.80E-3
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E-02	1.0E-8	5.6E-07	3.92E-03	6.70E-02	1590	0.2623	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E-01	1.0E-8	3.8E-07	3.92E-03	6.70E-02	250	0.0412	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E+00	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E+01	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	5.E+01	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	2.E+02	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	5.E+02	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	5.E+03	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	5.E+04	1.0E-8	1.3E-07	3.92E-03	6.70E-02	100	0.0165	1.65E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E-03	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	3670	1.6515	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E-01	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E+00	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E+01	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E+02	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E+03	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E+04	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4
DAHYKF	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	5.E+04	1.0E-8	5.8E-07	1.47E-03	3.39E-02	570	0.2565	4.50E-4

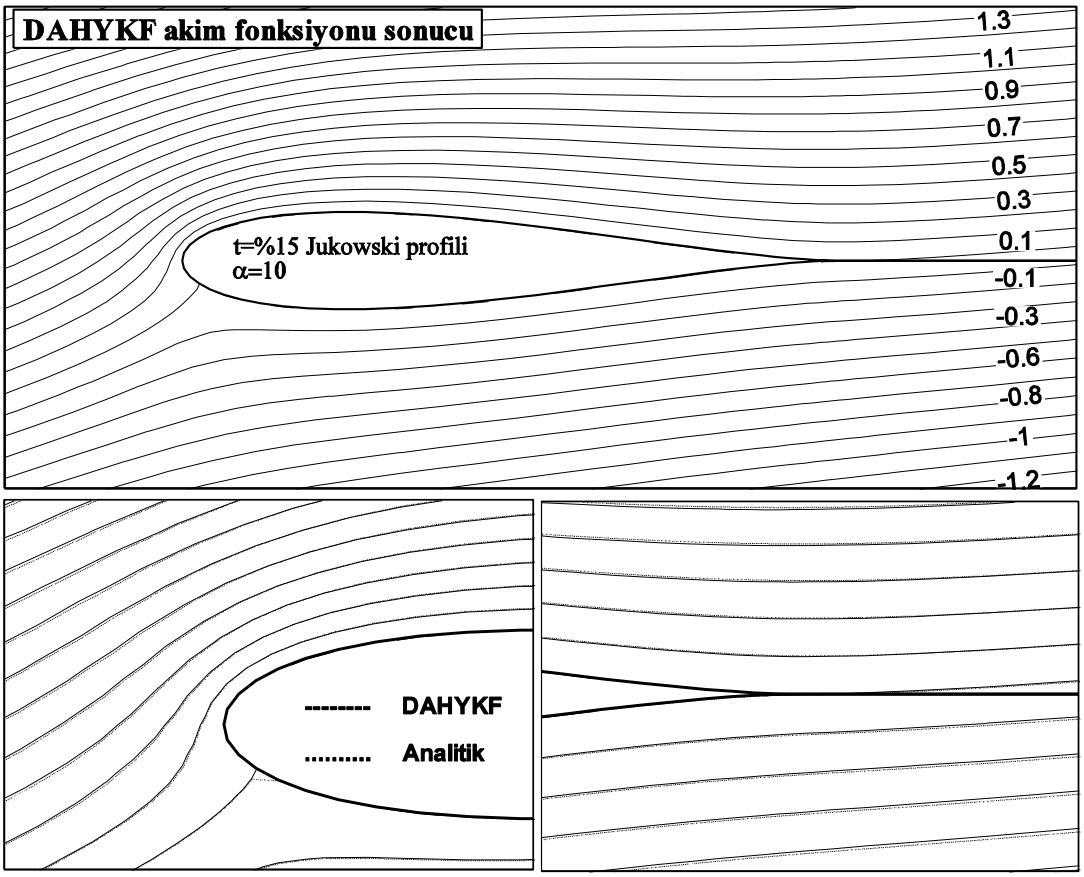
Tablo C.2 DYKF yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x11	1.E+00	4.20E-11	1.00E-10	1.48E-02	1.68E-01	40000	11.68	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x12	2.E+00	4.50E-11	1.60E-10	1.48E-02	1.68E-01	22330	6.5204	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x13	5.E+00	1.10E-10	4.10E-10	1.48E-02	1.68E-01	8960	2.6163	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x14	1.E+01	2.20E-10	8.10E-10	1.48E-02	1.68E-01	4510	1.3169	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x15	5.E+01	1.00E-09	3.90E-09	1.48E-02	1.68E-01	940	0.2745	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x16	1.E+02	1.67E-09	6.30E-09	1.48E-02	1.68E-01	500	0.146	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x17	2.E+02	2.30E-09	8.90E-09	1.48E-02	1.68E-01	280	0.0818	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x18	5.E+02	2.70E-09	1.10E-08	1.48E-02	1.68E-01	150	0.0438	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x19	1.E+03	2.60E+00	1.00E-08	1.48E-02	1.68E-01	110	0.0321	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x20	5.E+03	5.38E-09	1.59E-08	1.48E-02	1.68E-01	230	0.0672	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x21	1.E+04	4.62E-09	1.55E-09	1.48E-02	1.68E-01	430	0.1256	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x22	2.E+04	2.45E-09	8.60E-08	1.48E-02	1.68E-01	850	0.2482	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x23	5.E+04	1.10E-09	4.00E-08	1.48E-02	1.68E-01	2090	0.6103	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 31x24	5.E+05	1.60E-10	6.20E-09	1.48E-02	1.68E-01	20000	5.84	2.92E-04
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x21	2.E+01	2.40E-13	8.80E-13	8.50E-03	1.15E-01	47470	52.217	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x22	1.E+02	1.20E-12	4.30E-12	8.50E-03	1.15E-01	9600	10.56	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x23	1.E+03	9.30E-12	3.50E-11	8.50E-03	1.15E-01	1080	1.188	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x24	2.E+03	1.50E-11	5.80E-11	8.50E-03	1.15E-01	610	0.671	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x25	5.E+03	3.00E-11	1.20E-10	8.50E-03	1.15E-01	330	0.363	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x26	1.E+04	2.60E-11	1.10E-10	8.50E-03	1.15E-01	250	0.275	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x27	2.E+04	4.20E-11	2.70E-09	8.50E-03	1.15E-01	320	0.352	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x28	5.E+04	2.60E-11	2.60E-09	8.50E-03	1.15E-01	750	0.825	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x29	2.E+05	1.10E-11	1.20E-09	8.50E-03	1.15E-01	2190	2.409	1.10E-03
DYKF	YAPISAL BLOKLU	3B 61x30	5.E+05	3.60E-11	4.0E-101	8.50E-03	1.15E-01	7240	7.964	1.10E-03

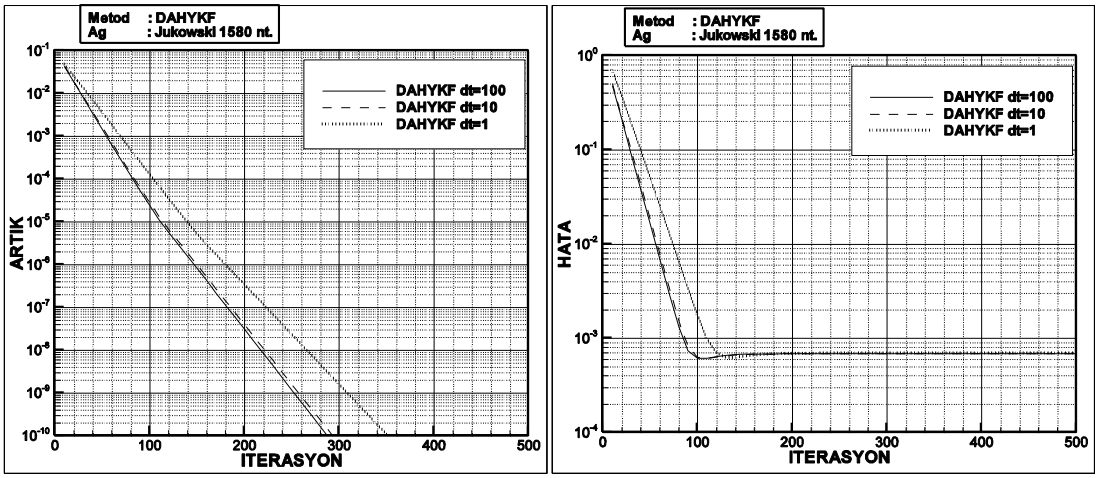
Tablo C.3 RK4 yöntemi ile basamak etrafındaki akış çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
RK4	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.E-04	1.0E-8	3.0E-07	2.68E-03	5.32E-02	8000	3.5200	4.40E-4
RK4	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	5.E-04	1.0E-8	4.9E-08	2.90E-03	5.34E-02	2330	1.0252	4.40E-4
RK4	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	1.25E-03	1.0E-8	3.3E-08	2.91E-03	5.34E-02	1000	0.4400	4.40E-4
RK4	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	2.5E-03	1.0E-8	3.7E-08	2.91E-03	5.34E-02	520	0.2288	4.40E-4
RK4	YAPISAL BLOKLU	1023 pt.	5.E-03	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	2.5E-04	2.8E-8	9.1E-08	1.13E-03	3.42E-02	4000	7.2000	1.80E-3
RK4	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	5.E-04	1.0E-8	3.3E-08	1.16E-03	3.42E-02	2320	4.1760	1.80E-3
RK4	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	1.E-03	1.0E-8	3.5E-08	1.16E-03	3.42E-02	1220	2.1960	1.80E-3
RK4	YAPISAL BLOKLU	3823 pt.	2.E-03	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E-05	3.8E-8	6.1E-07	6.2E-03	2.0E-02	100000	16.500	1.65E-4
RK4	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	1.E-04	3.8E-7	6.1E-06	6.2E-03	1.3E-01	15000	2.4750	1.65E-4
RK4	YAPISAL OLMAYAN	333 pt.	2.E-04	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	1.E-04	7.3E-6	2.6E-05	2.20E-03	5.3E-02	50000	22.500	4.50E-4
RK4	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	2.5E-04	1.8E-6	6.8E-05	2.20E-03	5.3E-02	25000	11.250	4.50E-4
RK4	YAPISAL OLMAYAN	726 pt.	5.E-04	IRAKSAK						

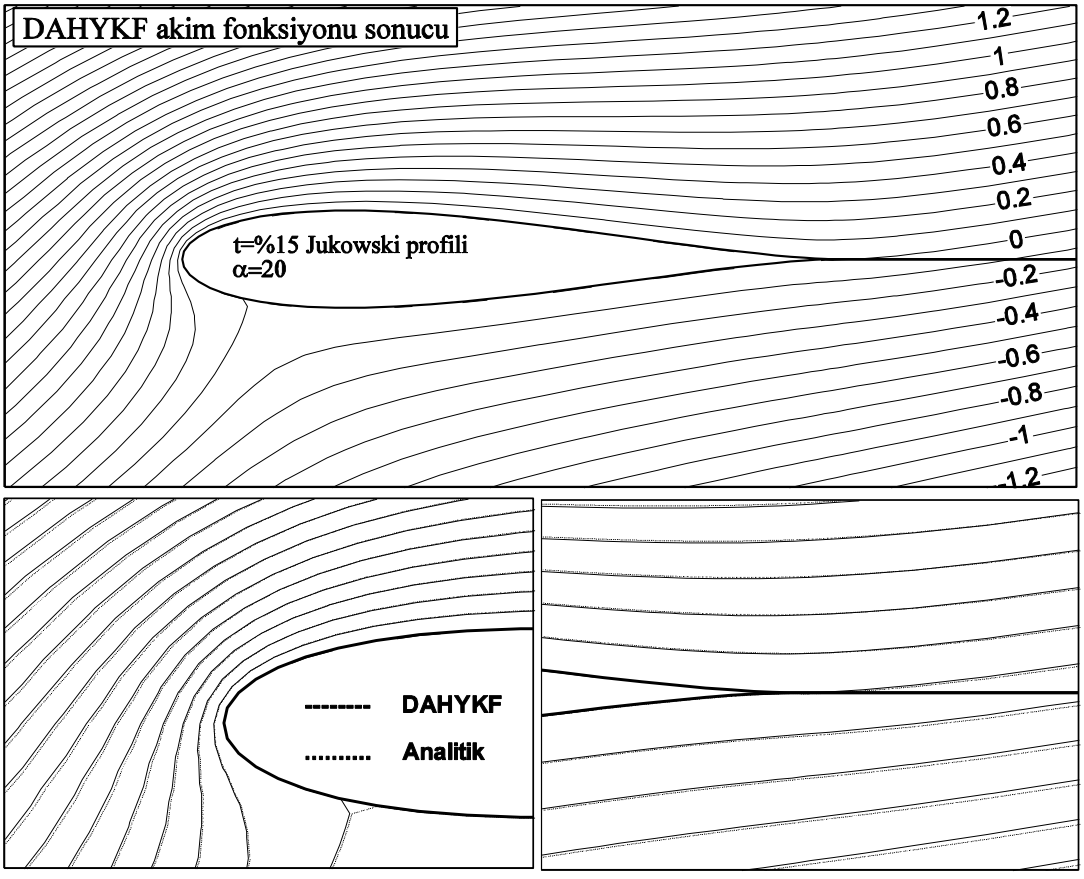
EK. D Simetrik Jukowski Profili Etrafındaki Akışın Detay Grafik ve Tabloları



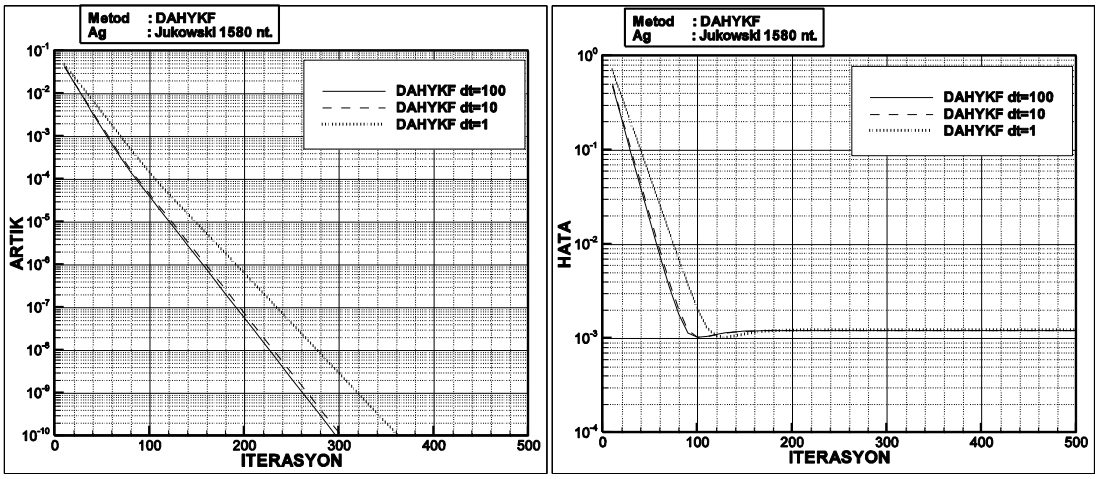
Şekil D.1 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



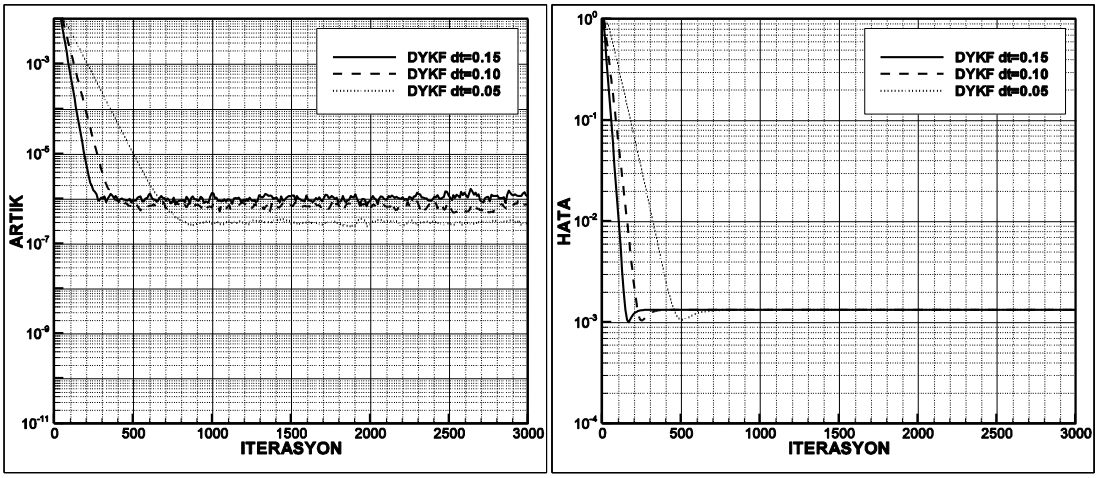
Şekil D.2 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



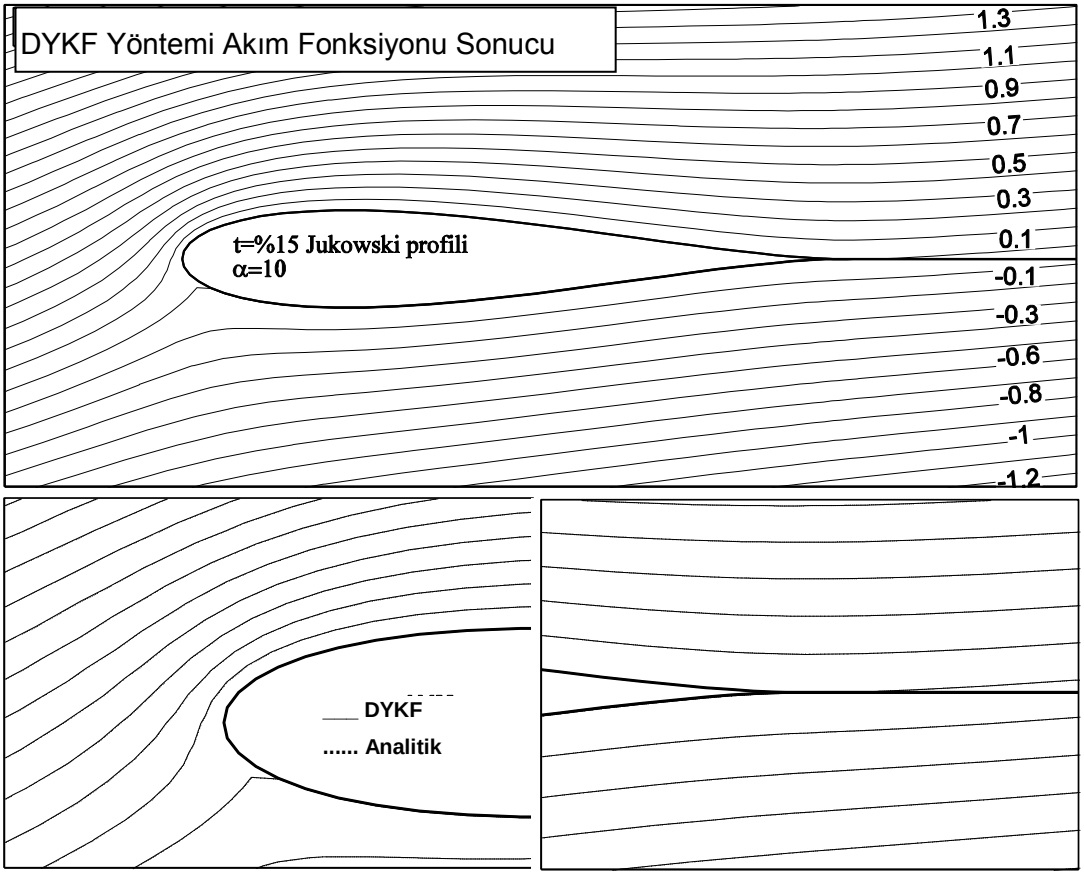
Şekil D.3 DAHYKF yöntemi ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



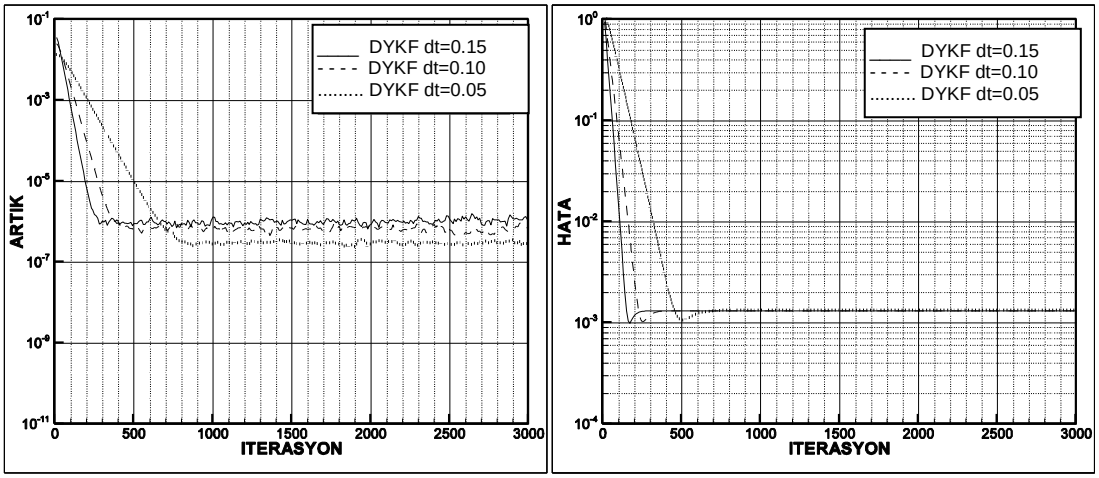
Şekil D.4 DAHYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



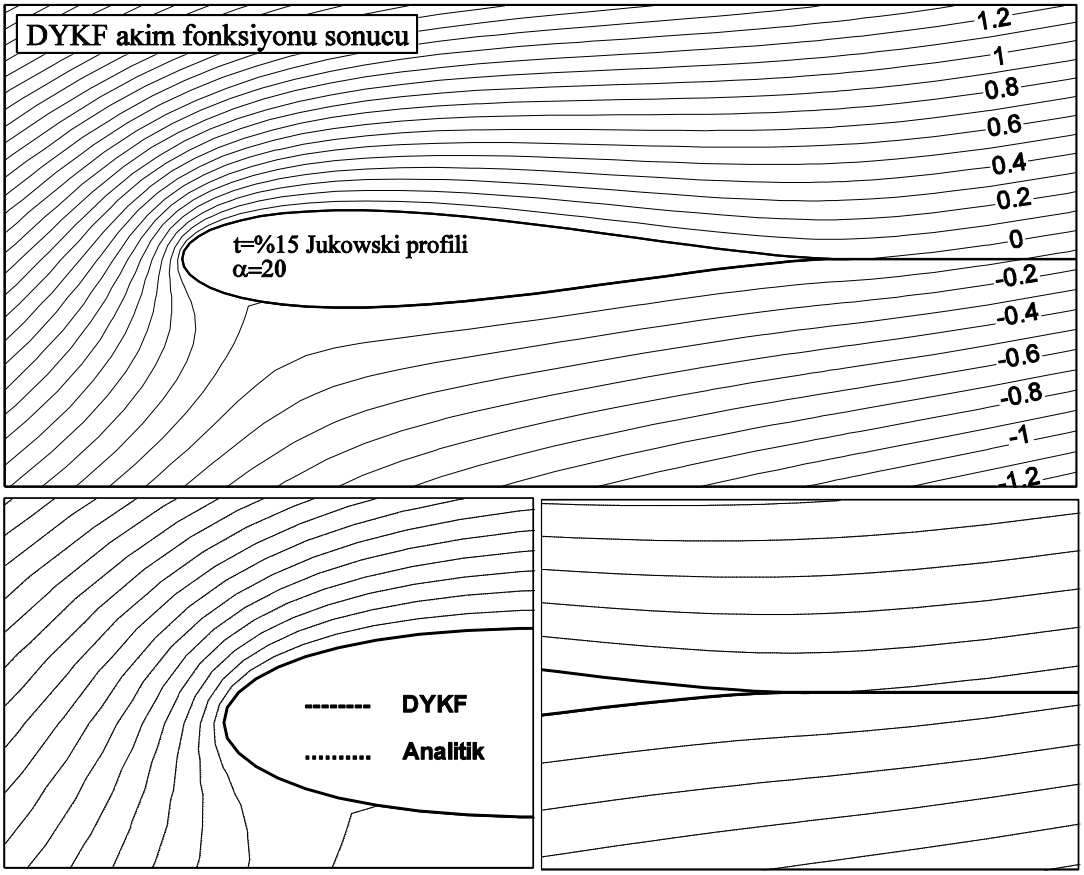
Şekil D.5 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



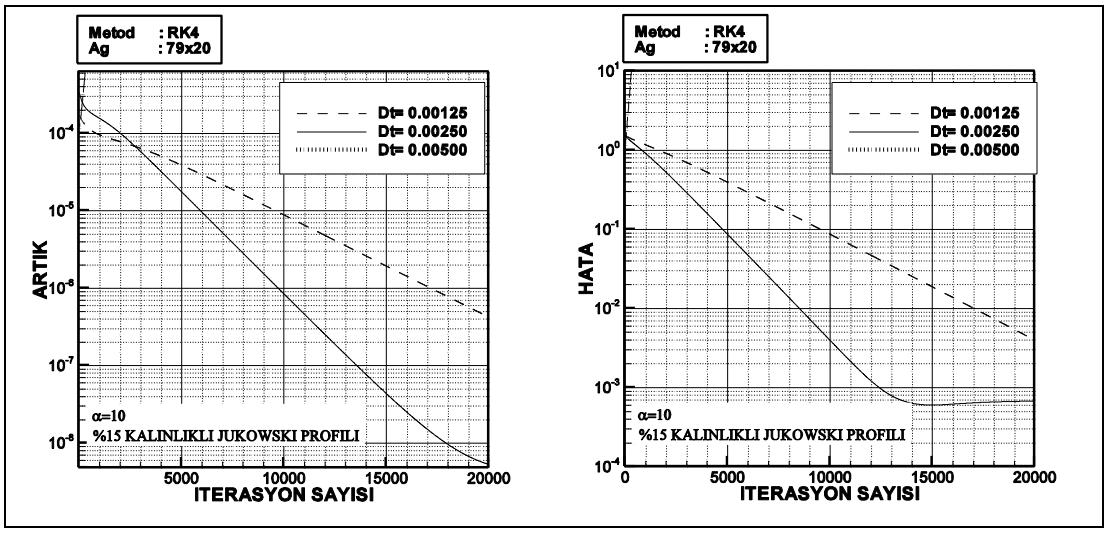
Şekil D.6 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



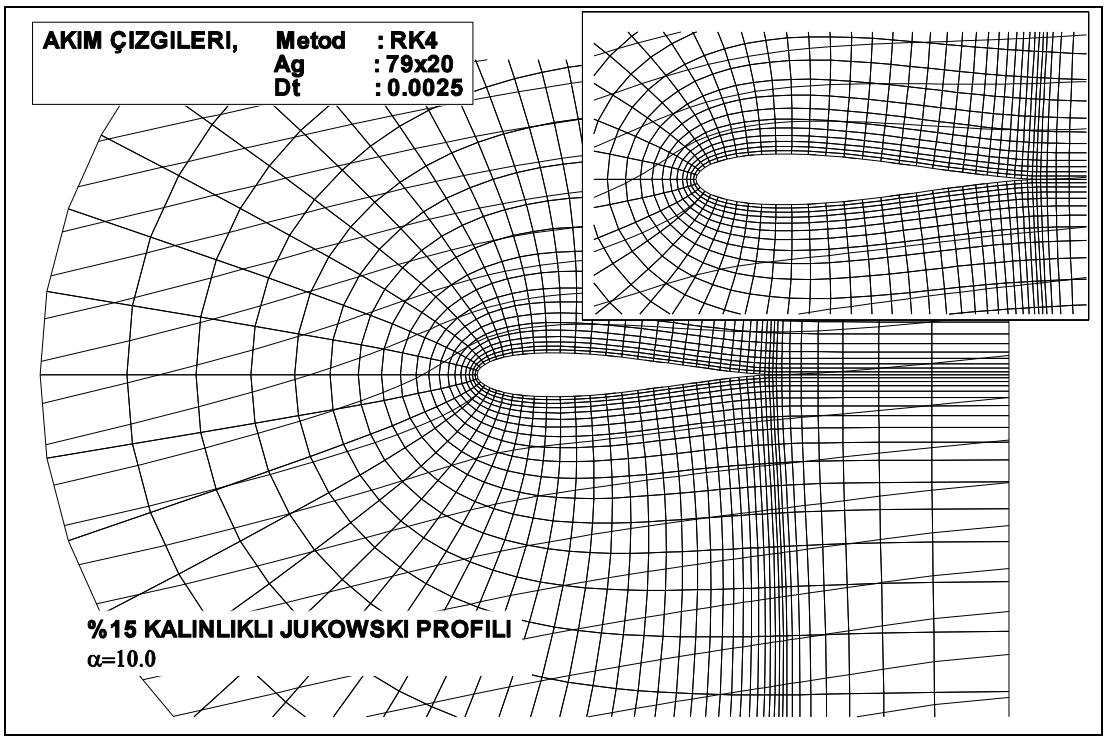
Şekil D.7 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



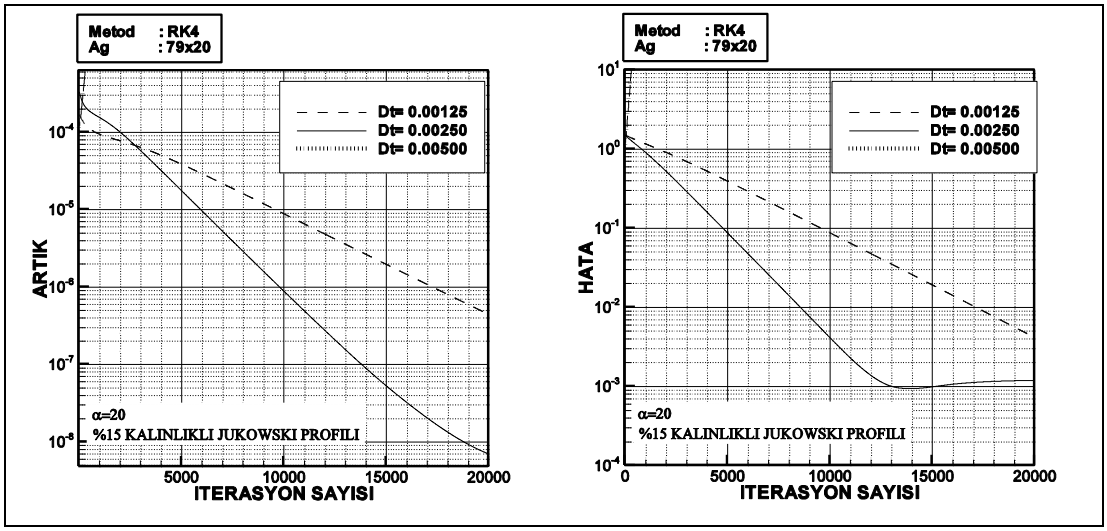
Şekil D.8 DYKF yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



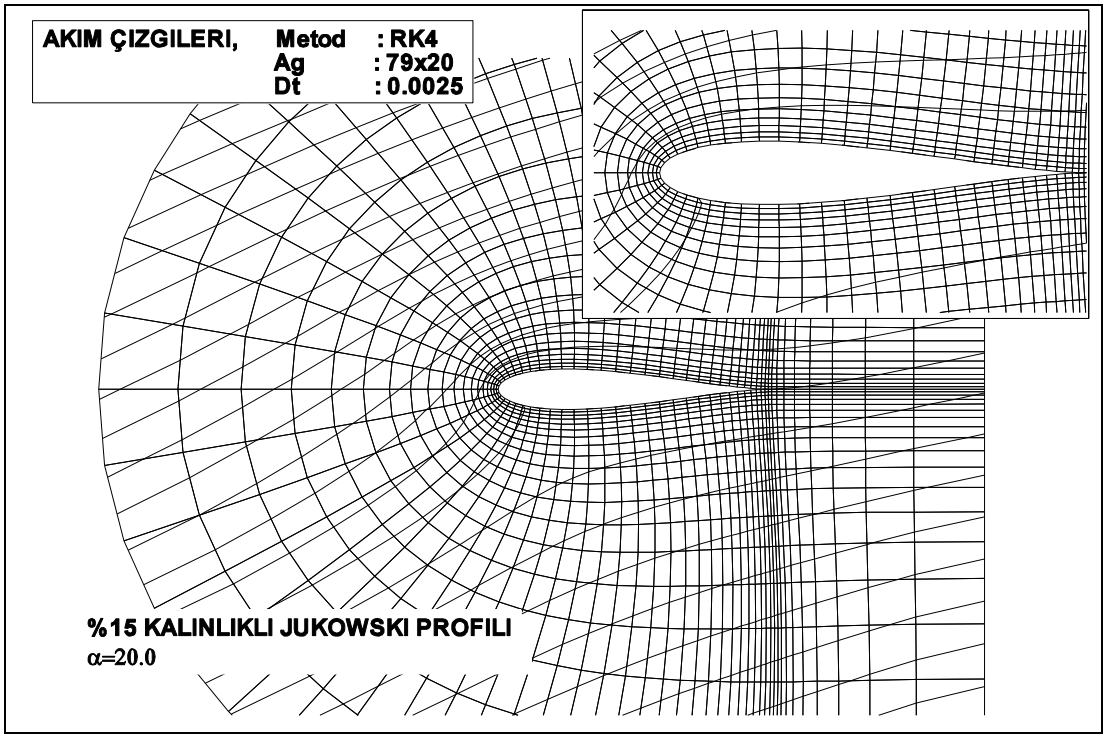
Şekil D.9 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



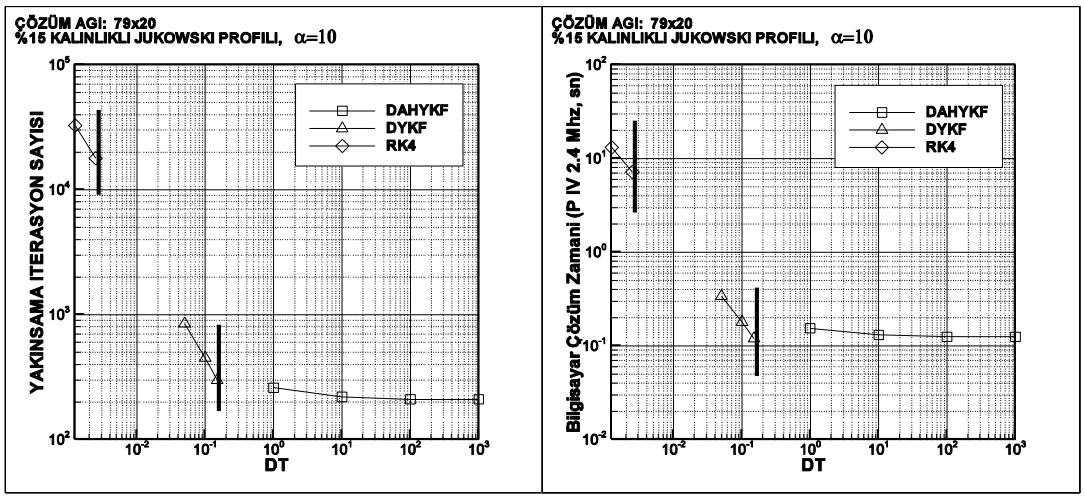
Şekil D.10 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



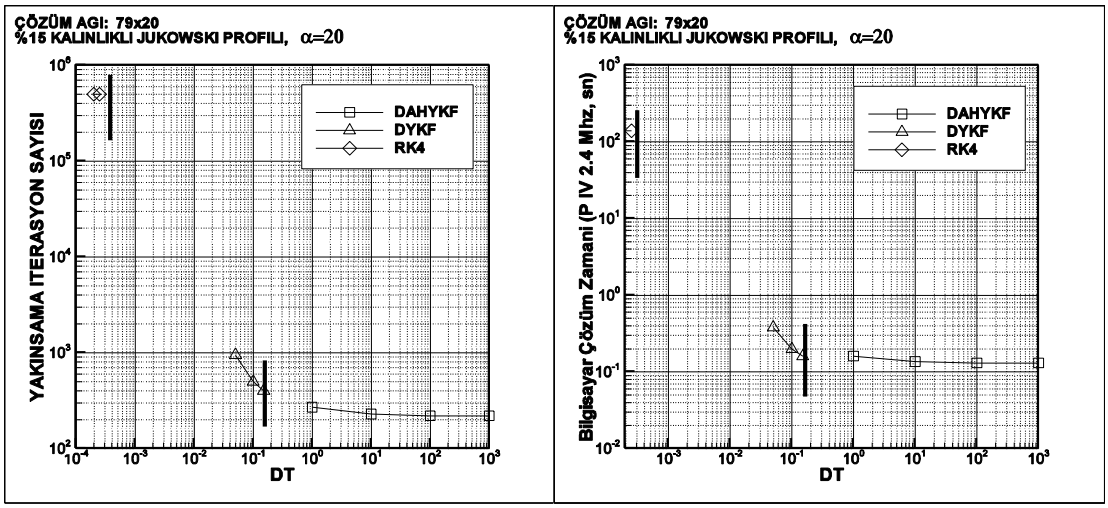
Şekil D.11 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



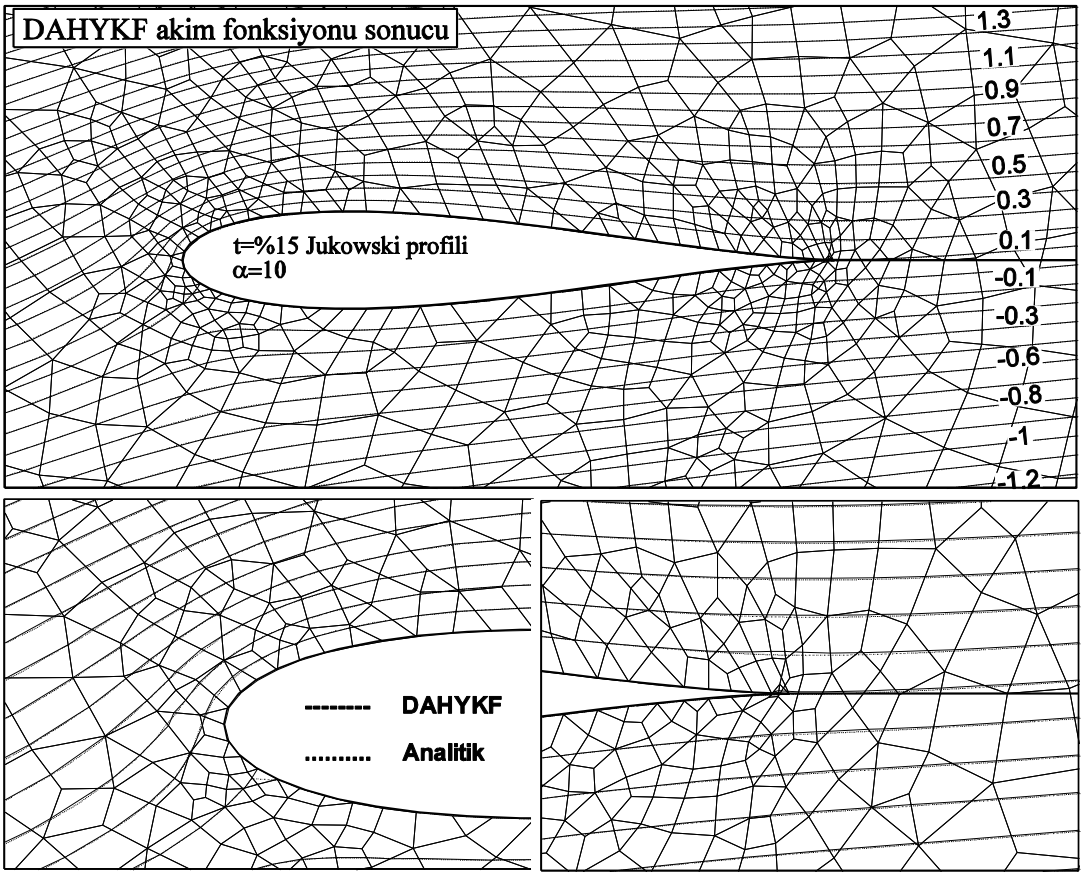
Şekil D.12 RK4 yöntemi ve yapısal C tipi 79x20 boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



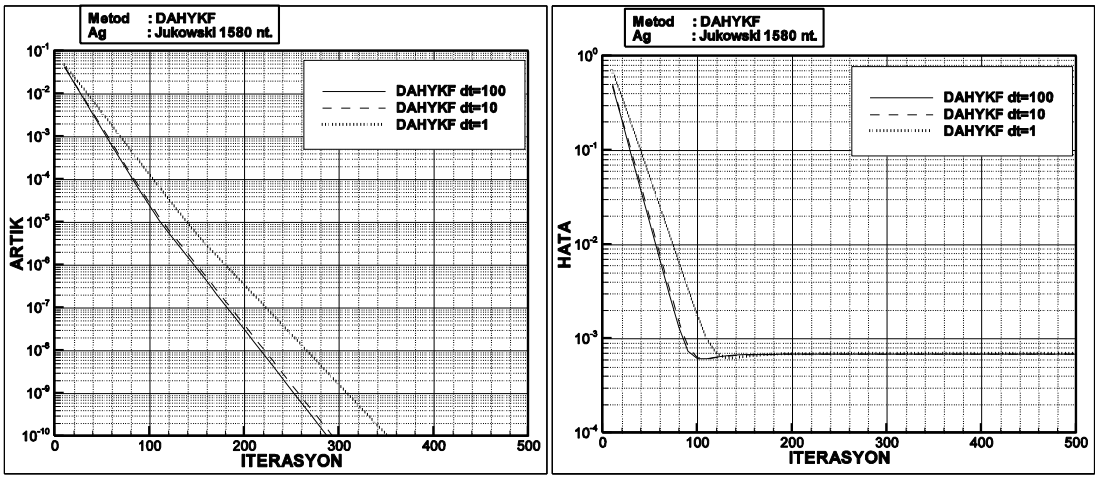
Şekil D.13 10° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



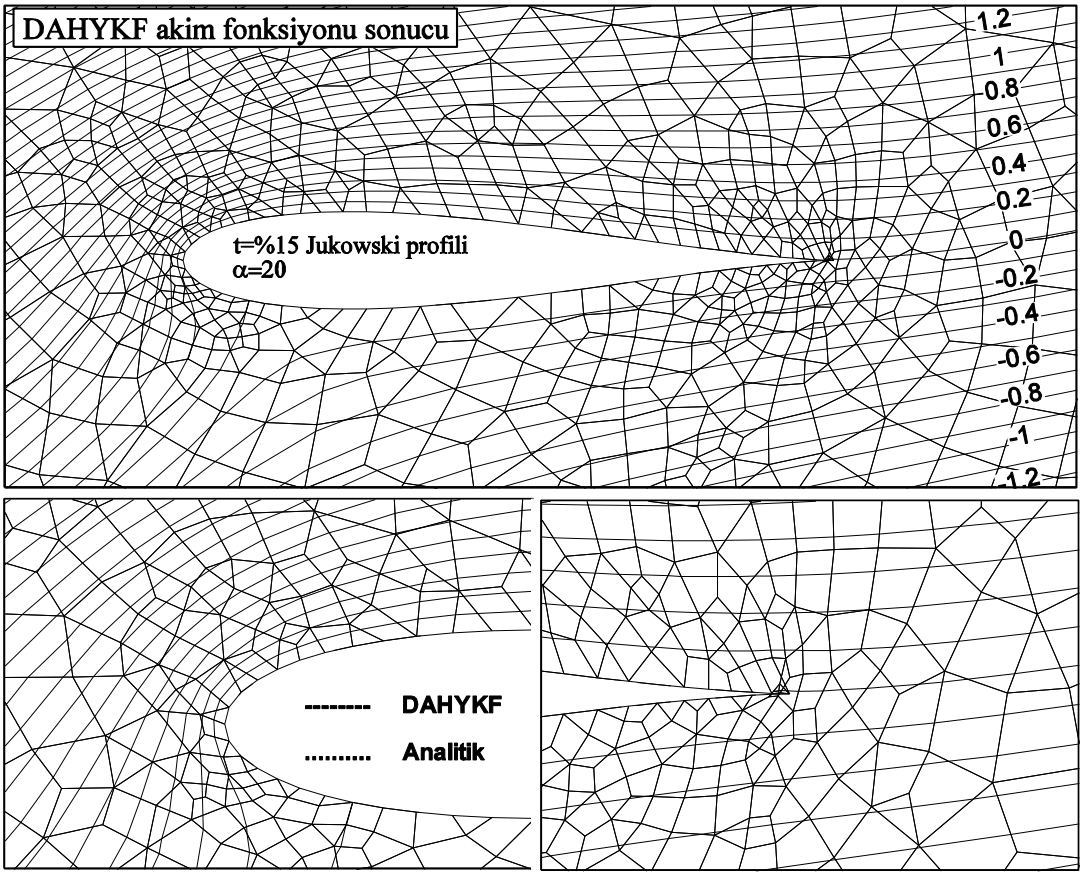
Şekil D.14 20° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 79x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ile DAHYKF, DYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



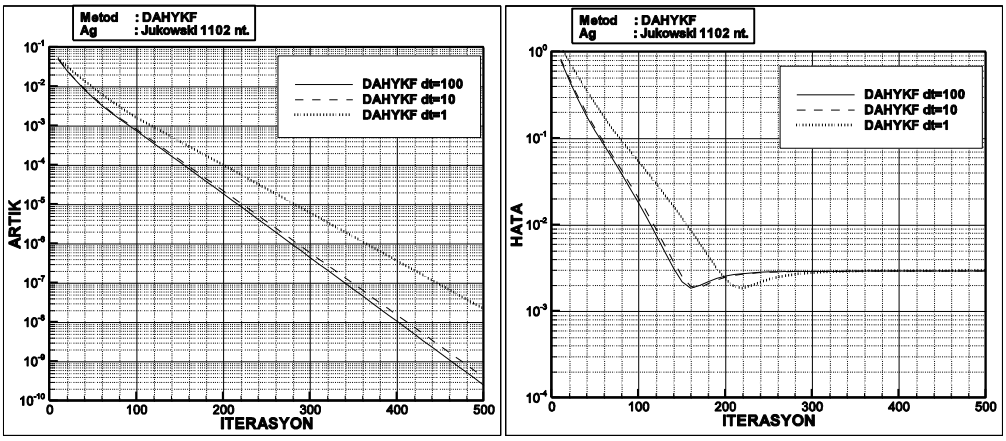
Şekil D.15 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



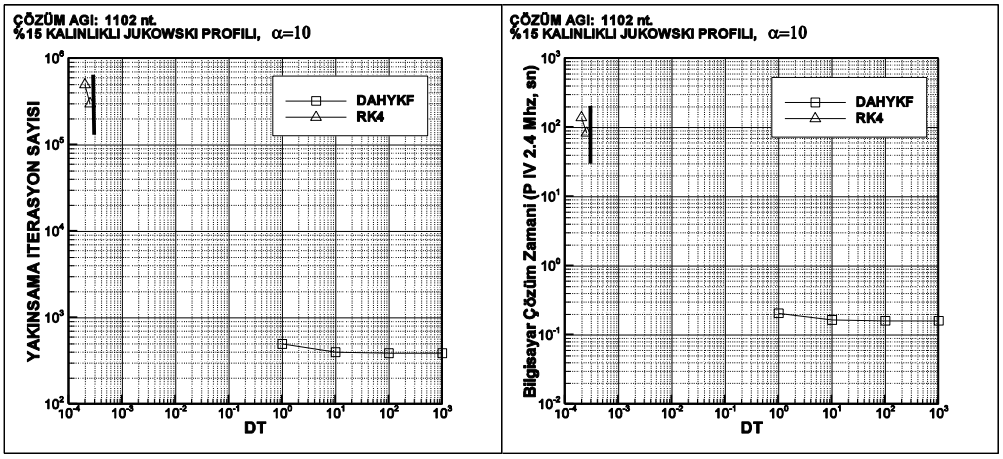
Şekil D.16 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 10° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



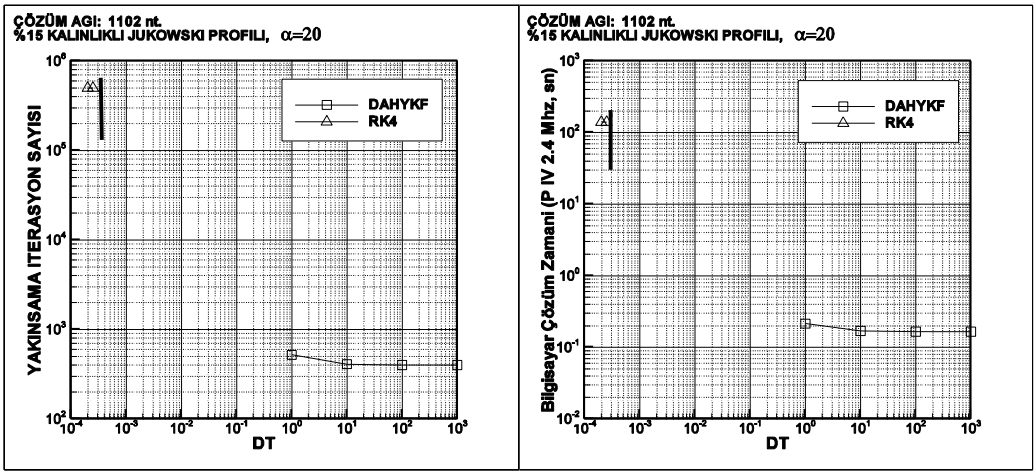
Şekil D.17 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı boyutlu çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün akım çizgileri.



Şekil D.18 DAHYKF yöntemi ve yapısal olmayan 1102 noktalı çözüm ağı ile simetrik %15 kalınlıklı Jukowski profili etrafındaki hücüm açısı 20° için potansiyel akış çözümünün artık ve hata terimlerinin iterasyon sayılarına göre değişimi.



Şekil D.19 10° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.



Şekil D.20 20° hücum açısındaki simetrik Jukowsky profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akış için 1102 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ile DAHYKF ve RK4 yöntemleri ile elde edilen çözümlerin yakınsama karekterleri.

Tablo D.1 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 0° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	4.9E-08	3.00E-04	2.8E-03	290	0.173	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	3.5E-08	3.00E-04	2.8E-03	250	0.149	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	4.8E-08	3.00E-04	2.8E-03	240	0.143	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	4.7E-08	3.00E-04	2.8E-03	240	0.143	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	2.9E-08	8.48E-04	1.61E-02	460	0.191	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	3.4E-08	8.48E-04	1.61E-02	370	0.154	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	3.6E-08	8.48E-04	1.61E-02	360	0.149	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	3.5E-08	8.48E-04	1.61E-02	360	0.149	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	3.3E-7	1.5E-05	3.2E-04	8.5E-04	800	0.320	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	6.6E-7	3.0E-05	3.1E-04	8.5E-04	400	0.160	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	3.3E-7	4.4E-05	3.1E-04	8.6E-04	300	0.120	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	4.7E-07	7.26E-04	2.12E-03	27540	11.071	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	1.59E-07	2.74E-04	2.80E-03	18320	7.364	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.4E-7	4.0E-05	8.23E-03	2.49E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.2E-7	7.7E-05	1.29E-03	1.62E-02	300000	84	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

Tablo D.2 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 10° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	2,9E-8	6,86E-4	6,11E-3	260	0,154	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	2,4E-8	6,86E-4	6,11E-3	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	3,5E-8	6,86E-4	6,11E-3	210	0,125	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	3,4E-8	6,86E-4	6,11E-3	210	0,125	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	3,14E-8	1,66E-3	1,61E-2	500	0,207	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	2,60E-8	1,66E-3	1,61E-2	400	0,166	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	2,60E-8	1,66E-3	1,61E-2	390	0,161	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	2,54E-8	1,66E-3	1,61E-2	390	0,161	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	2.6E-7	1,4E-5	1.3E-3	5.2E-3	850	0.340	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	7.9E-7	3,0E-5	1.3E-3	5.2E-3	450	0.180	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	1.0E-6	4,4E-5	1.3E-3	5.2E-3	300	0.120	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	1.0E-07	6.28E-04	6.10E-03	32630	13.117	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	7.6E-07	6.58E-04	6.10E-03	17920	7.203	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.4E-7	3.9E-05	1.06E-02	4.63E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.2E-7	7.9E-05	1.39E-03	1.82E-02	300000	84	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

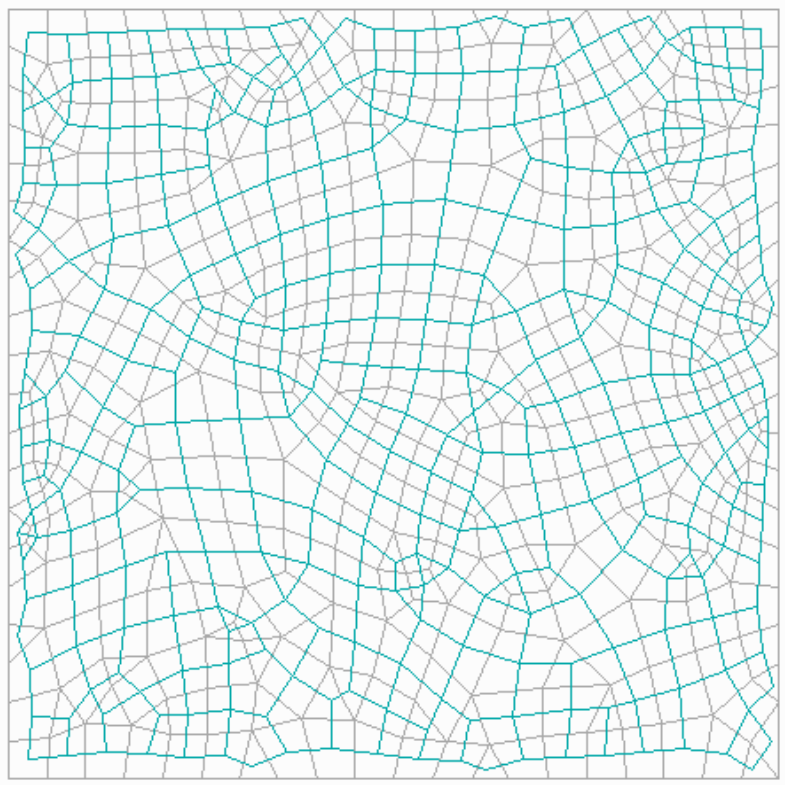
Tablo D.3 RK4 yöntemi %15 jukowski profilinin 20° hucüm açısındaki çözümlerinin detay bilgileri.

METOD	ÇÖZÜM AĞI TİPİ	ÇÖZÜM AĞI BÜYÜKLÜĞÜ	ZAMAN ARALIĞI	ARTIK	MAKSİMUM ARTIK	HATA	MAKSİMUM HATA	YAKINSAMA İTER. SAYISI	BİLGİSAYAR ÇÖZÜM ZAMANI (PIV 2.4 Mhz, sn)	HER İTER. İÇİN BİL. ÇÖZ. ZAMANI
DAHYKF	YAPISAL	79x20	1.E+00	1.0E-8	2,8E-8	1,2E-3	1,1E-2	270	0,161	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+01	1.0E-8	2,2E-8	1,2E-3	1,1E-2	230	0,137	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+02	1.0E-8	3,2E-8	1,2E-3	1,1E-2	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL	79x20	1.E+03	1.0E-8	3,1E-8	1,2E-3	1,1E-2	220	0,131	5.96E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+00	1.0E-8	2,9E-8	2,9E-3	2,1E-2	520	0,215	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+01	1.0E-8	2,8E-8	2,9E-3	2,1E-2	410	0,170	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+02	1.0E-8	2,8E-8	2,9E-3	2,1E-2	400	0,166	4.15E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	1.E+03	1.0E-8	2,6E-8	2,9E-3	2,1E-2	400	0,166	4.15E-4
DYKF	YAPISAL	79x20	5.0E-2	2.5E-7	1.1E-5	2.6E-3	1.0E-2	950	0.380	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.0E-1	6.7E-7	2,7E-5	2.6E-3	1.0E-2	500	0.200	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	1.5E-1	1.1E-6	2,9E-5	2.6E-3	1.0E-2	400	0.160	4.00E-4
	YAPISAL	79x20	2.0E-1	IRAKSAK						
RK4	YAPISAL	79x20	1.25E-3	1.0E-8	1.0E-07	1.12E-03	1.12E-02	33740	13.563	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	2.50E-3	1.0E-8	8.0E-07	1.18E-03	1.12E-02	18780	7.549	4.02E-4
	YAPISAL	79x20	5.00E-3	IRAKSAK						
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.0E-4	1.6E-7	3.6E-05	2.36E-03	1.95E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	2.5E-4	2.3E-7	6.7E-05	2.29E-03	2.05E-02	500000	140	2.80E-4
	YAPISAL OLMAYAN	1102 pt.	5.0E-4	IRAKSAK						

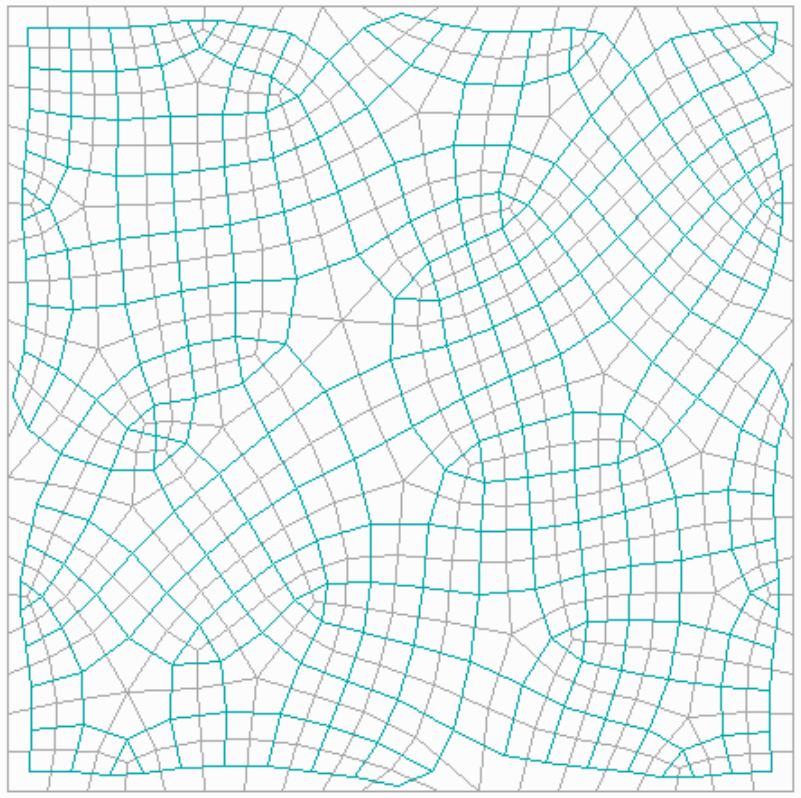
EK. E Daimi Olmayan Isı Yayınımı Uygulaması

Tablo E.1 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin yapısal çözüm ağı ile elde edilen çözümlerinin detayları.

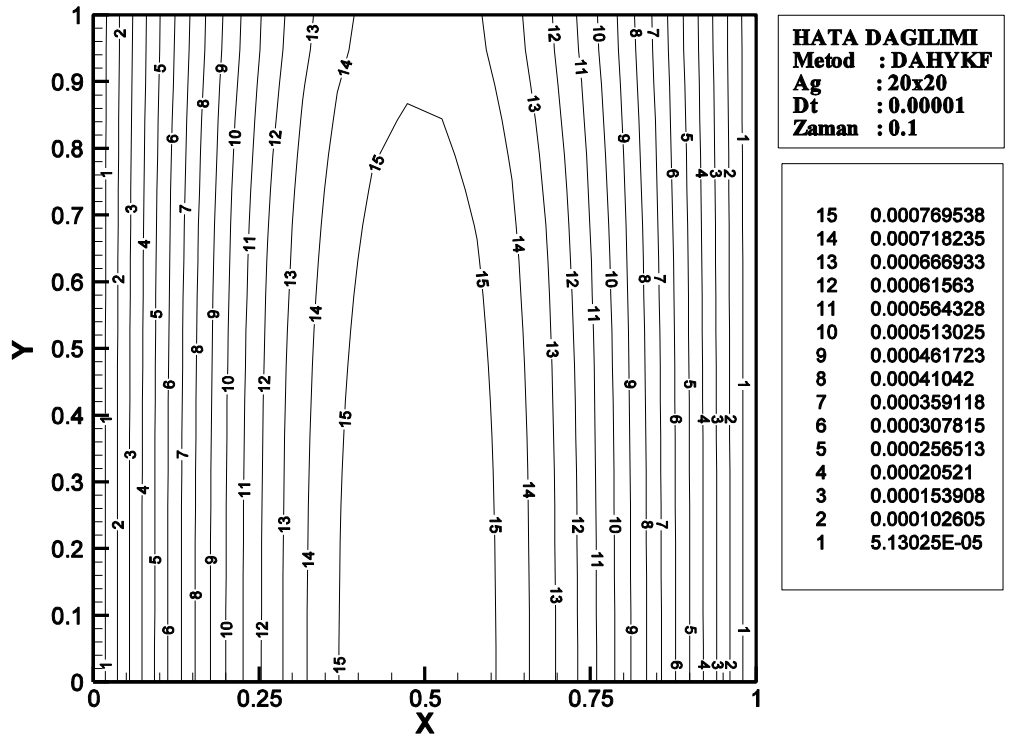
METOD		ÇÖZÜM AĞI	Δt	t=0.1				t=0.5		t=2.0		
				Hata	Mak. Hata	Artık	Mak. Artık	Hata	Artık	İteras.	CPU	1 it. CPU
SFM	DYKF	20x20	1e-4	3.1e-3	5.5e-3	2.8e-4	4.6e-4	4.3e-5	5.5e-6	20000	2.35	1.1e-4
			1e-5	3.2e-4	5.7e-4	2.8e-5	4.6e-5	4.3e-5	5.8e-7	200000	23.5	1.1e-4
		40x40	1e-4	3.5e-3	6.4e-3	2.9e-4	4.7e-4	5.6e-5	5.6e-6	20000	10.91	5.5e-4
			1e-5	3.5e-4	6.3e-4	2.9e-5	4.6e-5	5.3e-6	8.6e-6	200000	110	5.5e-4
	LGS	20x20	1e-4	4.8e-3	8.3e-3	2.8e-4	4.6e-4	5.9e-4	5.8e-6	20000	2.4	1.1e-4
			1e-5	6.6e-4	1.0e-3	2.8e-5	4.6e-5	8.0e-4	5.4e-7	200000	24	1.1e-4
		40x40	1e-4	2.0e-2	3.4e-2	2.9e-4	4.6e-4	2.4e-3	7.4e-6	20000	11	5.5e-4
			1e-5	1.8e-3	3.1e-3	2.9e-5	4.7e-5	8.6-4	5.8e-7	200000	111	5.5e-4
SHM	PGS	20x20	1e-4	4.0e-2	6.4e-2	3.0e-4	4.6e-4	5.0e-3	9.4e-6	20000	1.2	6.0e-5
			1e-5	5.2e-3	8.2e-3	3.0e-5	4.7e-5	4.9e-4	6.1e-7	200000	11.7	6.0e-5
		40x40	1e-4	1.4e-1	2.1e-1	2.7e-4	4.2e-4	3.1e-2	2.3e-5	20000	14	7.0e-4
			1e-5	1.8e-2	2.8e-2	3.0e-5	4.7e-5	1.9e-3	7.2e-7	200000	139	7.0e-4
	RK4	20x20	1e-4	1.0e-3	1.5e-3	3.0e-4	4.7e-4	7.3e-5	5.8e-6	20000	2.35	1.1e-4
			1e-5	1.0e-3	1.6e-3	3.0e-5	4.7e-5	7.3e-5	5.8e-7	200000	23.5	1.1e-4
		40x40	1e-4	2.4e-4	3.8e-4	3.0e-4	4.7e-4	1.7e-5	5.8e-6	20000	10.91	5.5e-4
			1e-5	2.4e-4	3.8e-4	3.0e-5	4.7e-5	1.7e-5	5.8e-7	200000	110	5.5e-4
	DAHYKF	20x20	1e-4	3.3e-3	5.3e-3	3.0e-4	4.7e-4	5.4e-4	6.2e-6	20000	3.8	1.9e-4
			1e-5	1.3e-3	2.0e-3	3.0e-5	4.7e-5	1.2e-4	5.9e-7	200000	38	1.9e-4
		40x40	1e-4	1.89e-2	3.0e-2	3.0e-4	4.7e-4	2.4e-3	7.6e-6	20000	17.1	8.6e-4
			1e-5	2.2e-3	3.5e-3	3.0e-5	4.7e-5	2.3e-4	5.9e-7	200000	171	8.6e-4
	İTER. DAHYKF	20x20	5e-4	1.0e-3	2.5e-3	1.5e-3	2.3e34	6.0e-5	2.9e56	4000	3.68	9.2e-4
			1e-4	9.8e-4	1.7e-3	3.0e-4	4.7e-4	6.9e-5	5.8e-6	20000	15.98	8.0e-4
		40x40	5e-4	1.0e-3	4.9e-3	1.5e-3	2.3e-3	3.8e-5	1.6e-4	4000	38.49	9.6e-3
			1e-4	2.8e-4	1.0e-3	3.0e-4	4.7e-4	8.0e-6	5.7e-6	20000	113	5.6e-3
			5e-5	1.9E-4	4.8E-4	1.2E-4	2.2E-4	9.2E-6	2.8E-6	40000	205	5.1E-3



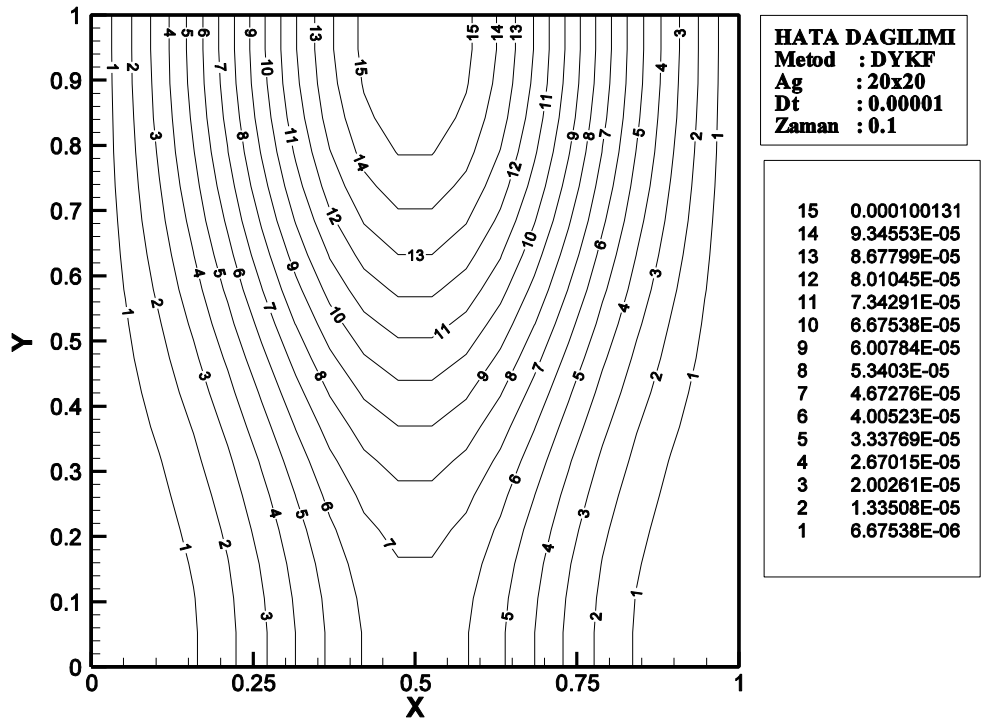
Şekil E.1 327 noktalı üçgen ve dörtgen elemanlardan oluşan çözüm ağı (açık renk) ve çözüm bantları (koyu renk)



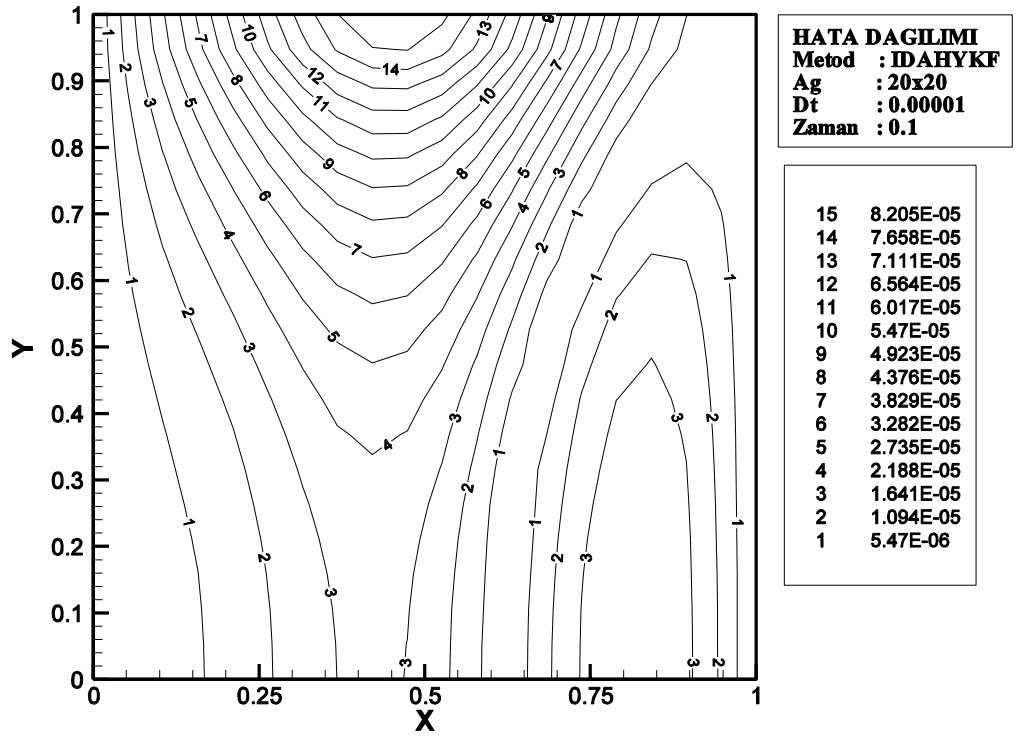
Şekil E.2 297 noktalı sadece dörtgen elemanlardan oluşan çözüm ağı (açık renk) ve çözüm bantları (koyu renk).



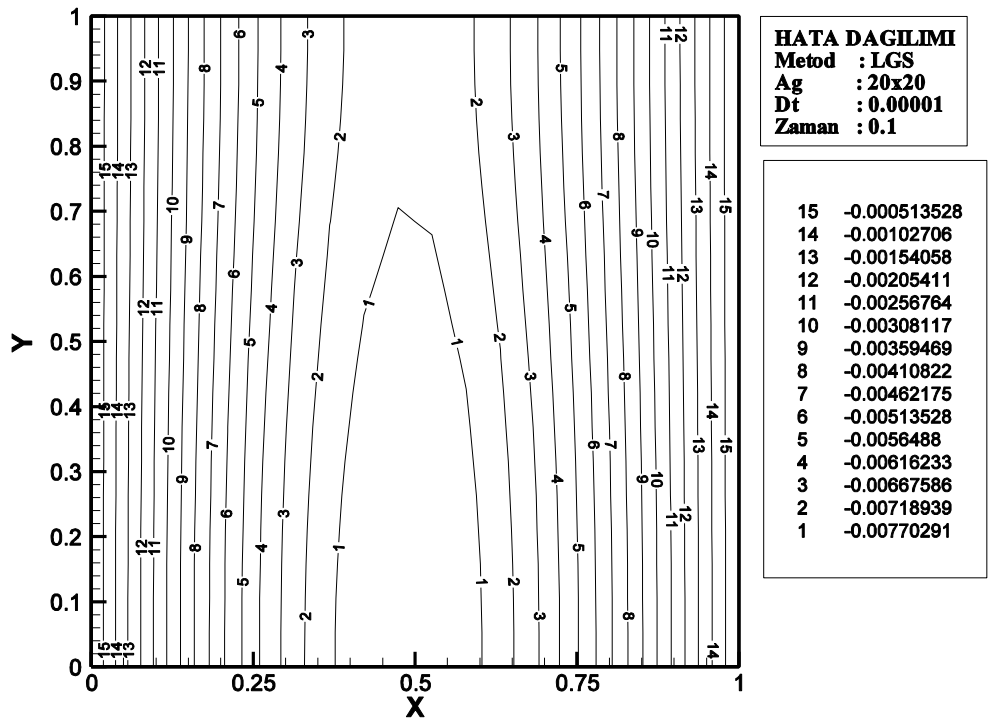
Şekil E.3 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerinin çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



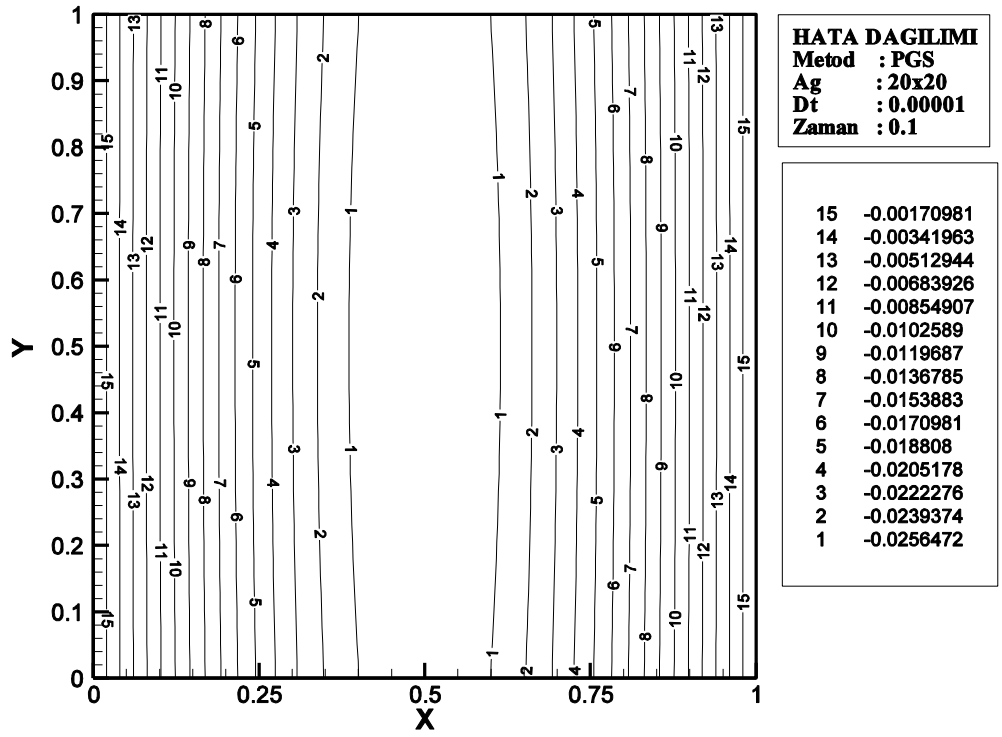
Şekil E.4 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, DYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



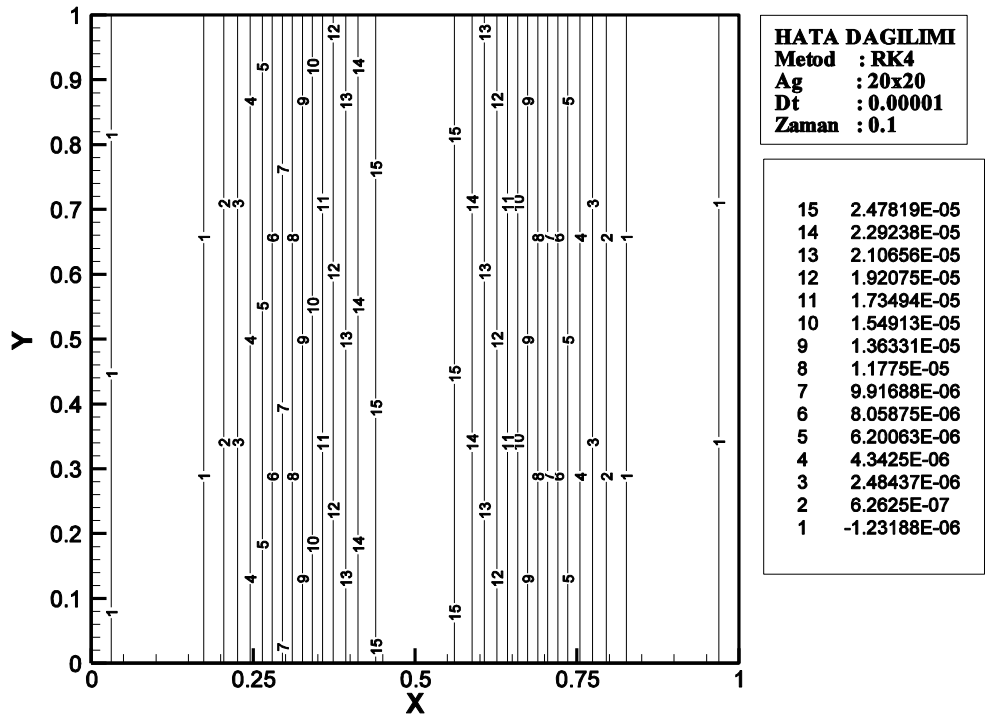
Şekil E.5 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



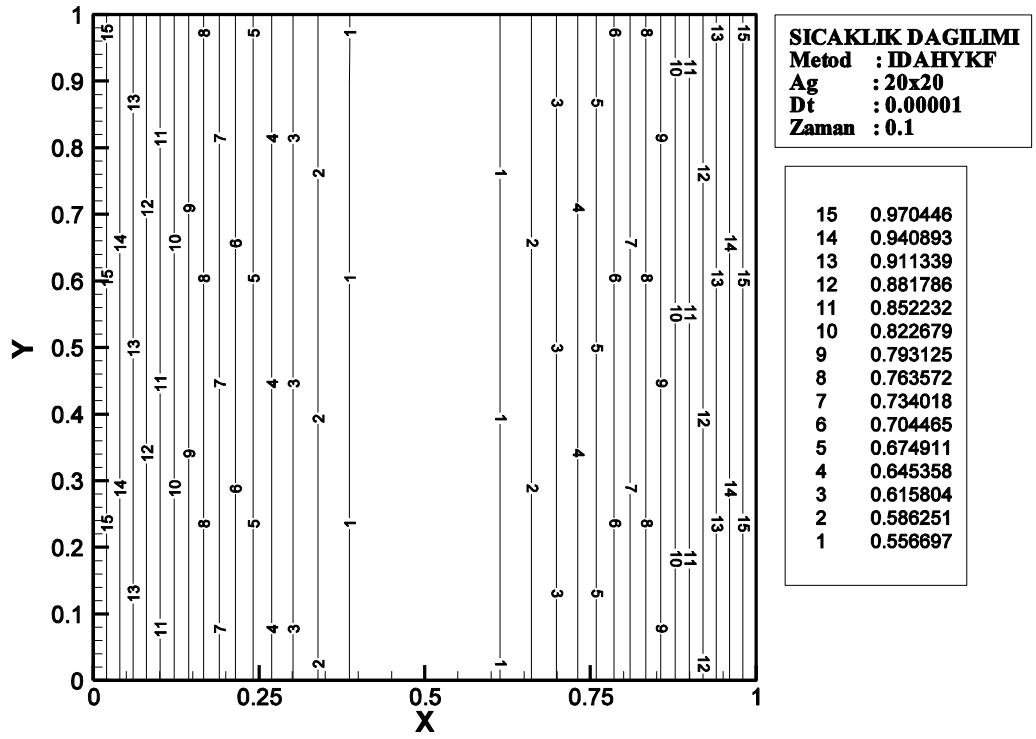
Şekil E.6 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, LGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



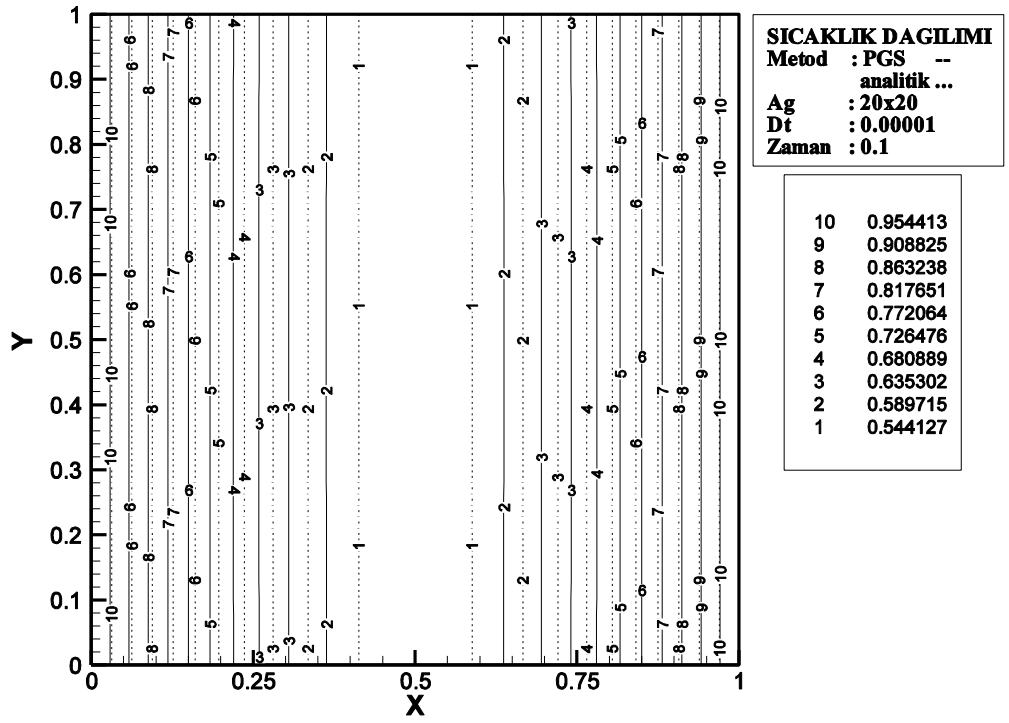
Şekil E.7 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



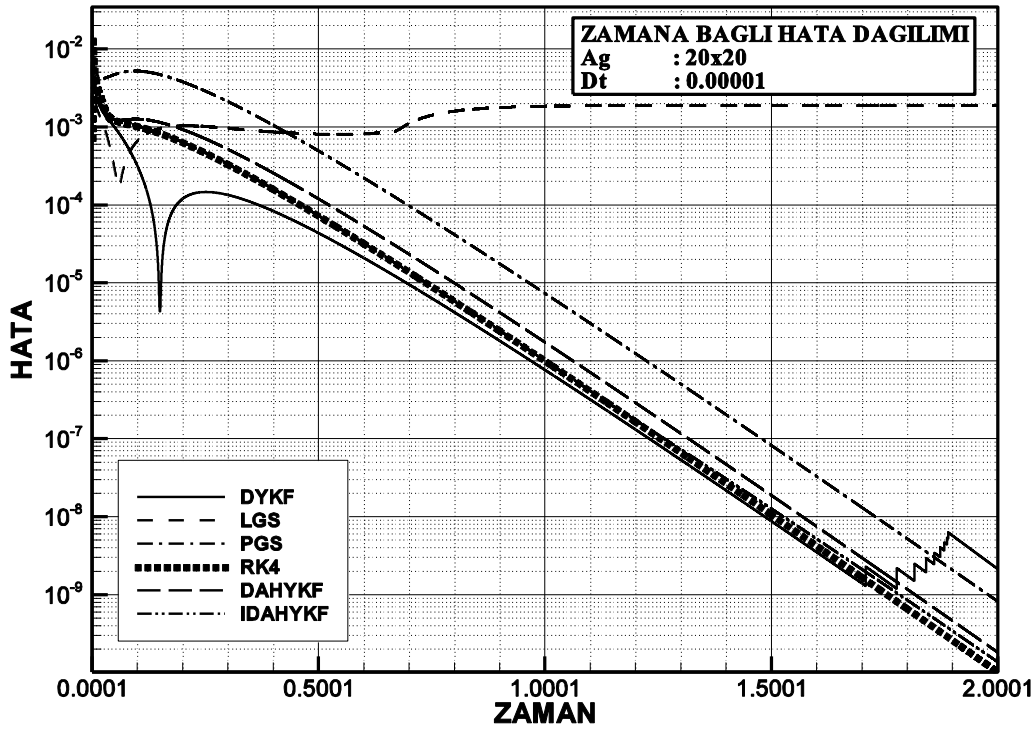
Şekil E.8 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



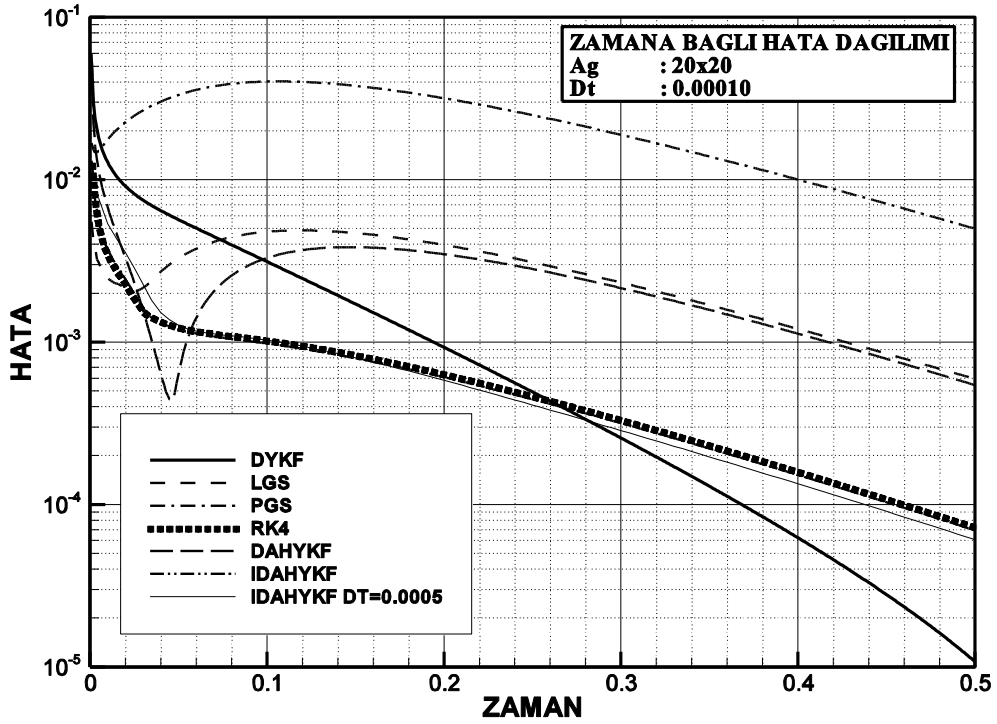
Şekil E.9 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



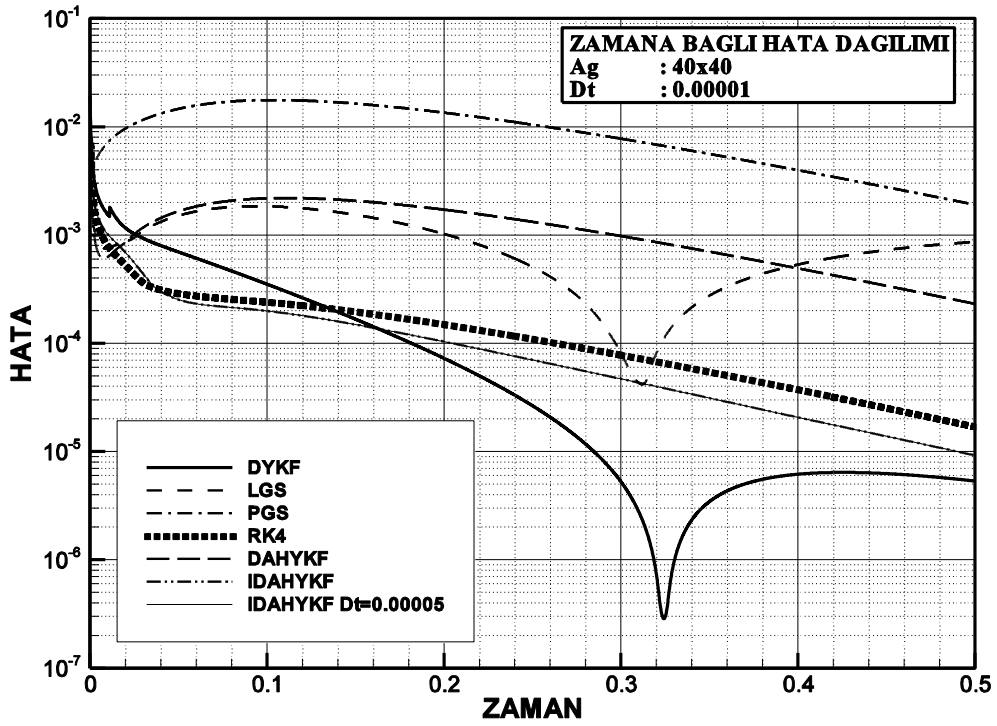
Şekil E.10 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



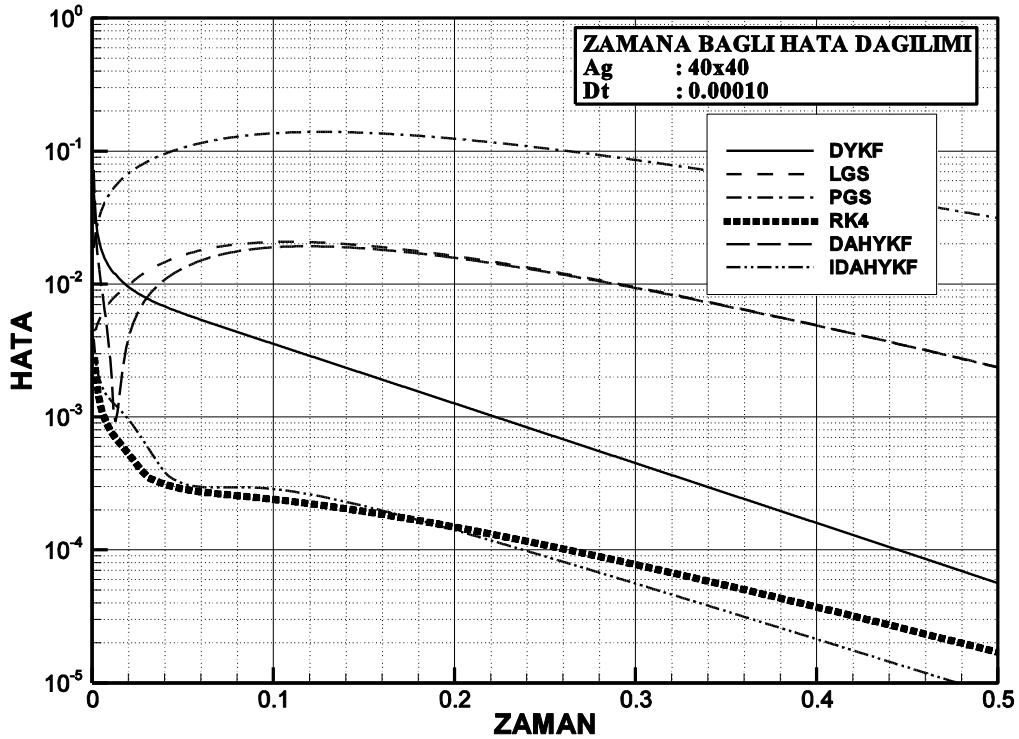
Şekil E.11 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin zamana bağlı hata dağılımı.



Şekil E.12 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 20x20 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerinin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı.



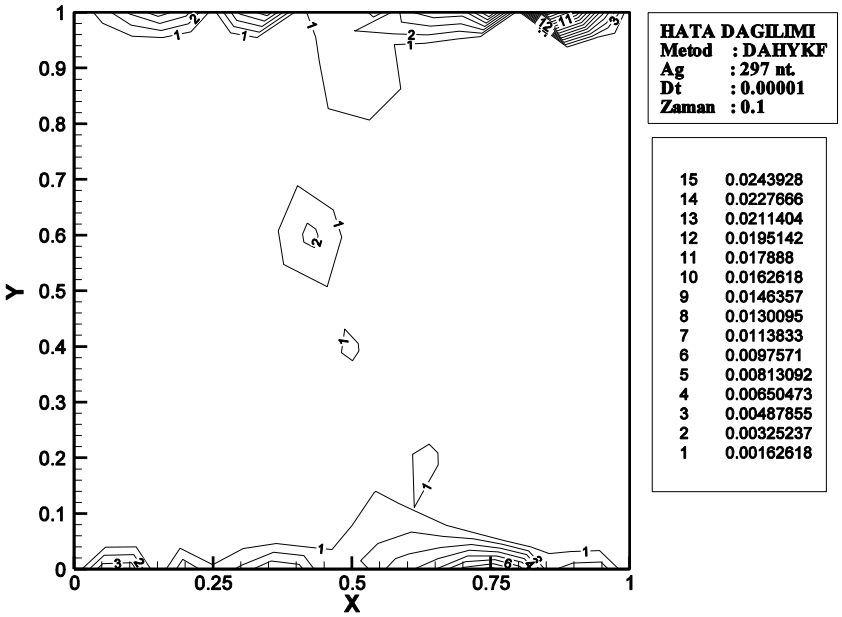
Şekil E.13 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 40x40 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı.



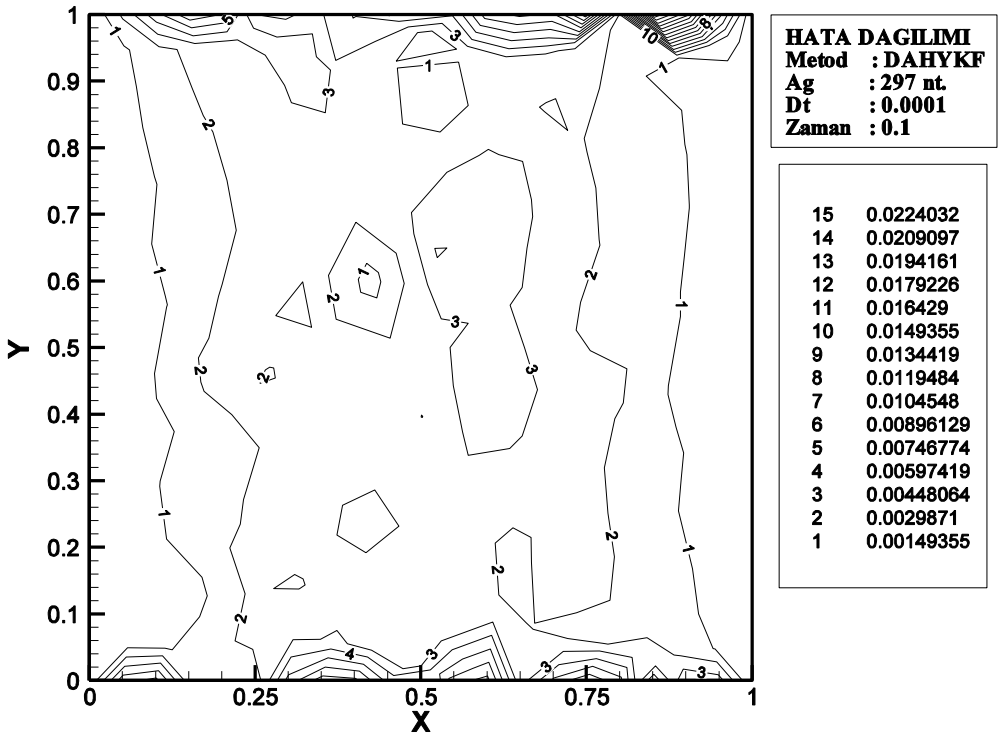
Şekil E.14 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 40x40 boyutlu yapısal çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı.

Tablo E.2 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin yapısal olmayan çözüm ağı ile elde edilen çözümlerinin detayları.

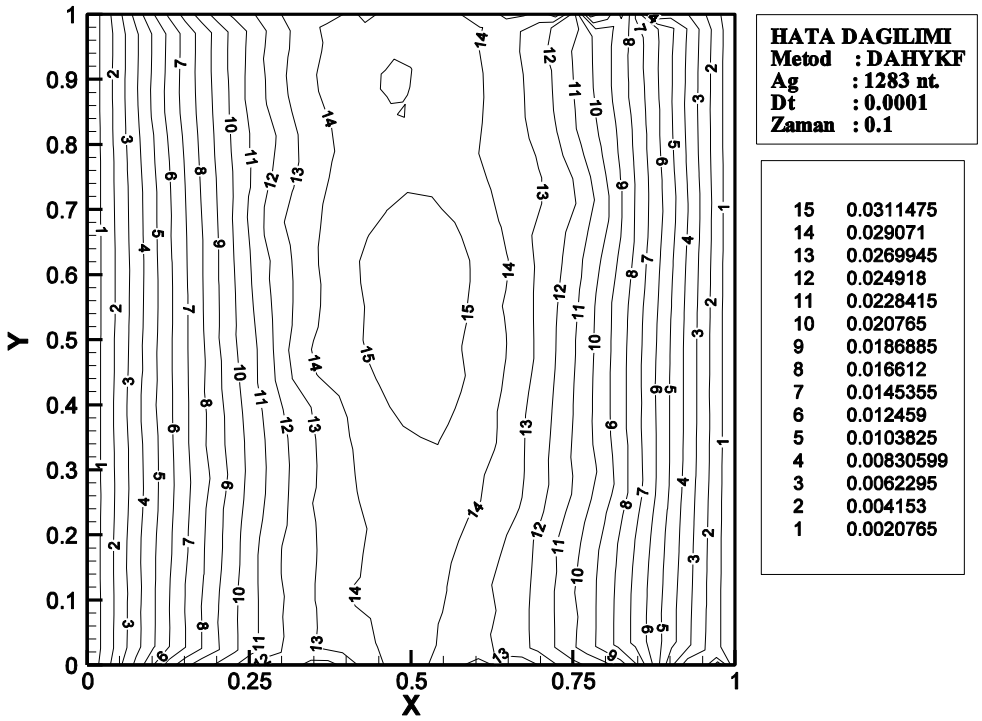
METOD	ÇÖZÜM AĞI	Δt	t=0.1				t=0.5		t=2.0		
			Hata	Mak. Hata	Artık	Mak. Artık	Hata	Artık	İteras.	CPU	1 it. CPU
PGS	297 nt.	1e-4	2.6e-2	4.5e-2	2.8e-4	4.7e-4	2.8e-3	7.4e-6	20000	1.0	5.0e-5
		1e-5	3.0e-3	6.4e-3	2.8e-5	4.7e-5	2.6e-4	5.5e-7	200000	10.9	5.0e-5
	1283 nt.	1e-4	1.0e-1	1.7e-1	2.6e-4	4.4e--4	1.9e-2	1.7e-5	20000	23.8	1.2e-3
		1e-5	1.2e-2	2.1e-2	2.7e-5	4.6e-5	1.3e-3	6.3e-7	200000	238	1.2e-3
RK4	297 nt.	1e-4	7.0e-4	4.4e-3	2.8e-4	4.7e-4	1.9e-5	5.3e-6	20000	6.4	3.2e-4
		1e-5	7.0e-4	4.4e-3	2.8e-5	4.7e-5	8.1e-5	5.3e-7	200000	64.3	3.2e-4
	1283 nt.	1e-4	IRAKSAK								
		1e-5	1.5e-4	6.7e-4	2.8e-5	4.7e-5	7.4e-5	5.3e-7	200000	779	3.9e-3
DAHYKF	297 nt.	1e-4	1.4e-3	3.7e-3	2.8e-4	4.7e-4	3.0e-4	5.6e-6	20000	3.4	1.7e-4
		1e-5	9.5e-4	3.4e-3	2.8e-5	4.7e-5	6.1e-5	5.4e-7	200000	32	1.6e-4
	1283 nt.	1e-4	1.6e-2	3.0e-2	2.8e-4	4.7e-4	1.9e-3	6.9e-6	20000	37.2	1.9e-3
		1e-5	4.6e-3	1.0e-2	2.8e-5	4.7e-5	4.5e-4	5.7e-7	200000	387	1.9e-3
	327 nt.	1e-5	7.4e-4	3.7e-3	2.8e-5	4.7e-5	3.0e-4	5.7e-7	200000	124	6.2e-4
İTER. DAHYKF	297 nt.	2e-4	1.0e-3	5.7e-3	5.5e-4	9.4e-4	1.3e-4	1.0e-5	10000	5.5	5.5e-4
		1e-4	4.5e-4	4.4e-3	2.8e-4	4.7e-4	4.9e-5	5.3e-6	20000	11.7	5.9e-4
		1e-5	8.2e-4	3.4e-3	2.8e-5	4.7e-5	2.7e-5	5.3e-7	200000	86	4.3e-4
	1283 nt.	2e-4	4.5e-3	1.1e-2	5.5e-4	9.4e-4	4.5e-4	1.0e-5	10000	75.5	7.6e-3
		1e-4	1.2e-3	4.8e-3	2.8e-4	4.7e-4	1.3e-4	5.2e-6	20000	148	7.4e-3
		1e-5	2.8e-3	7.9e-3	2.8e-5	4.7e-5	2.4e-4	5.5e-7	200000	984	4.9e-3



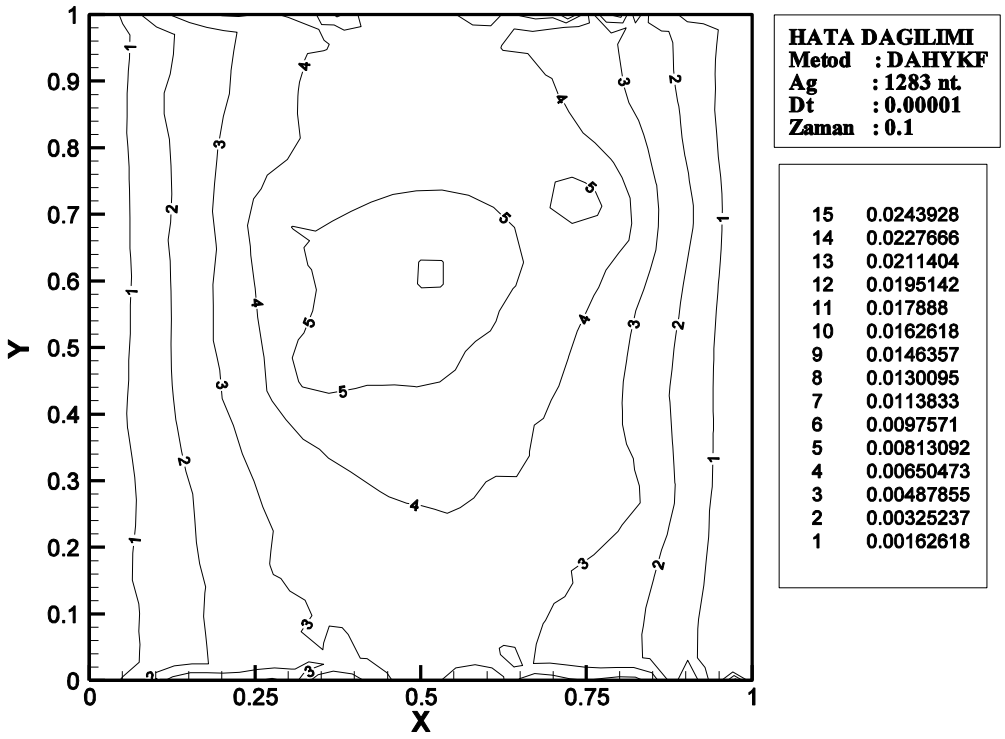
Şekil E.15 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



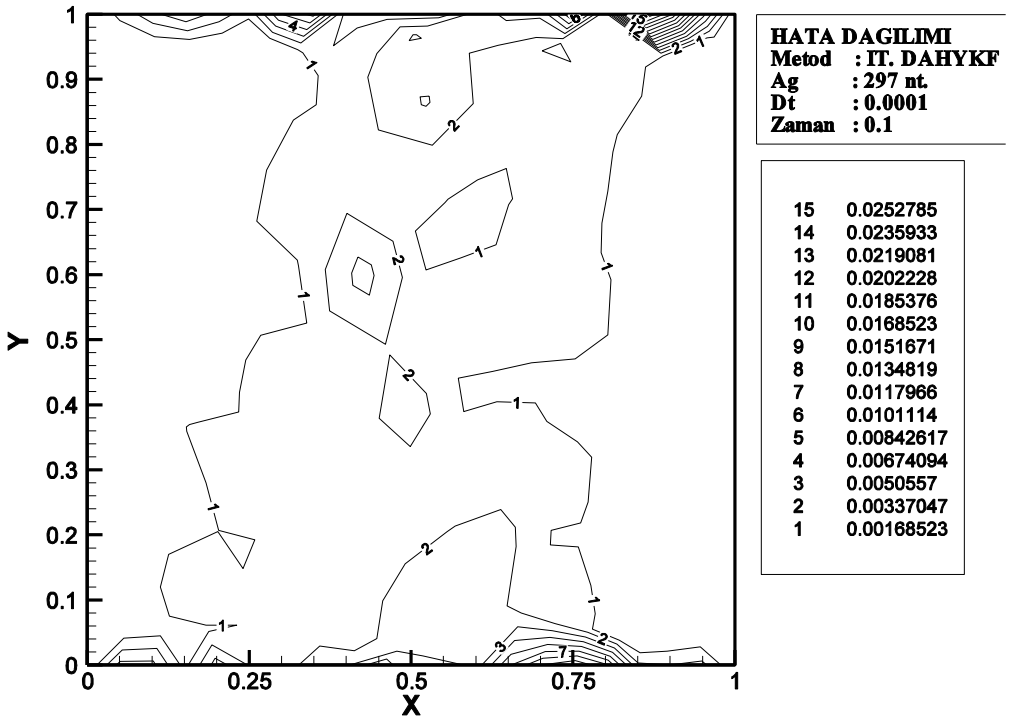
Şekil E.16 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



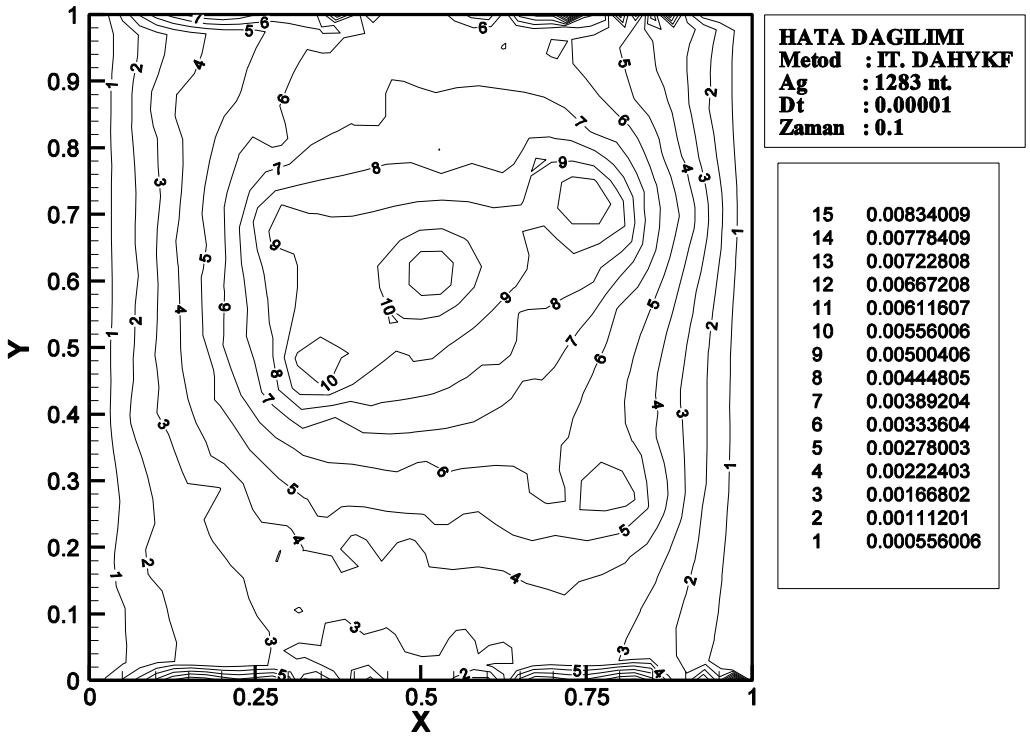
Şekil E.17 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



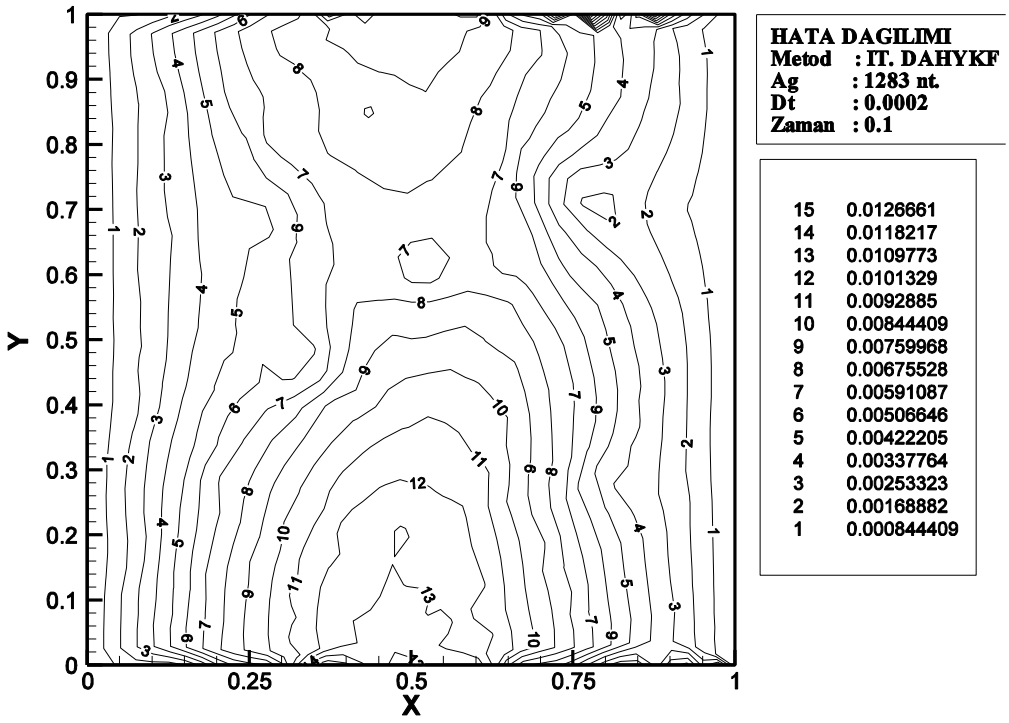
Şekil E.18 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



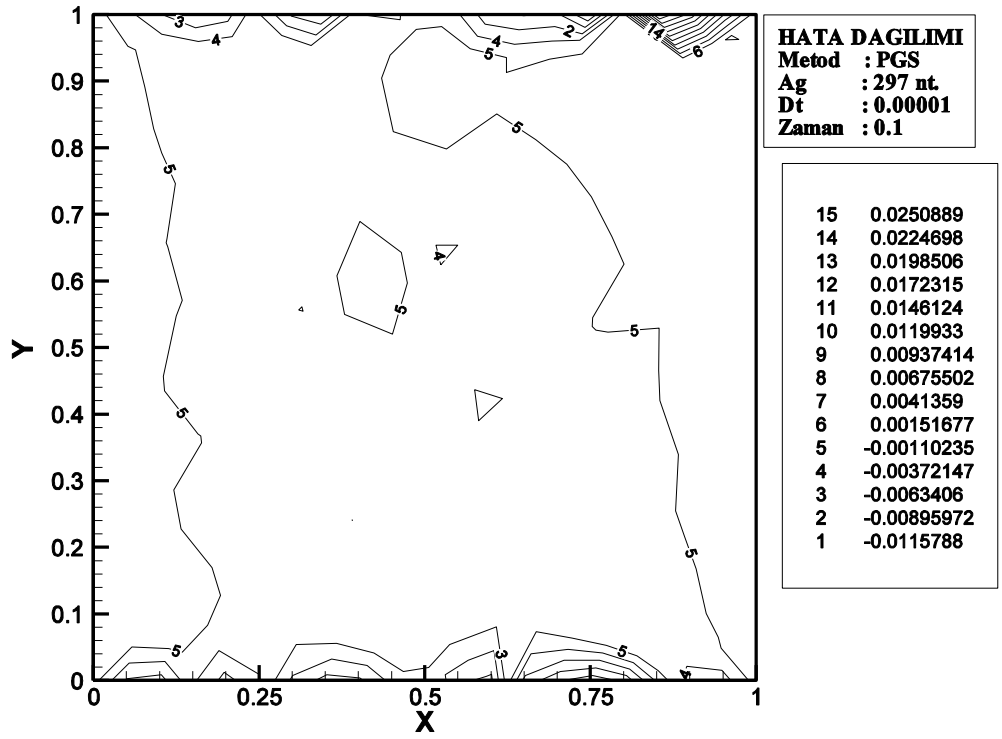
Şekil E.19 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



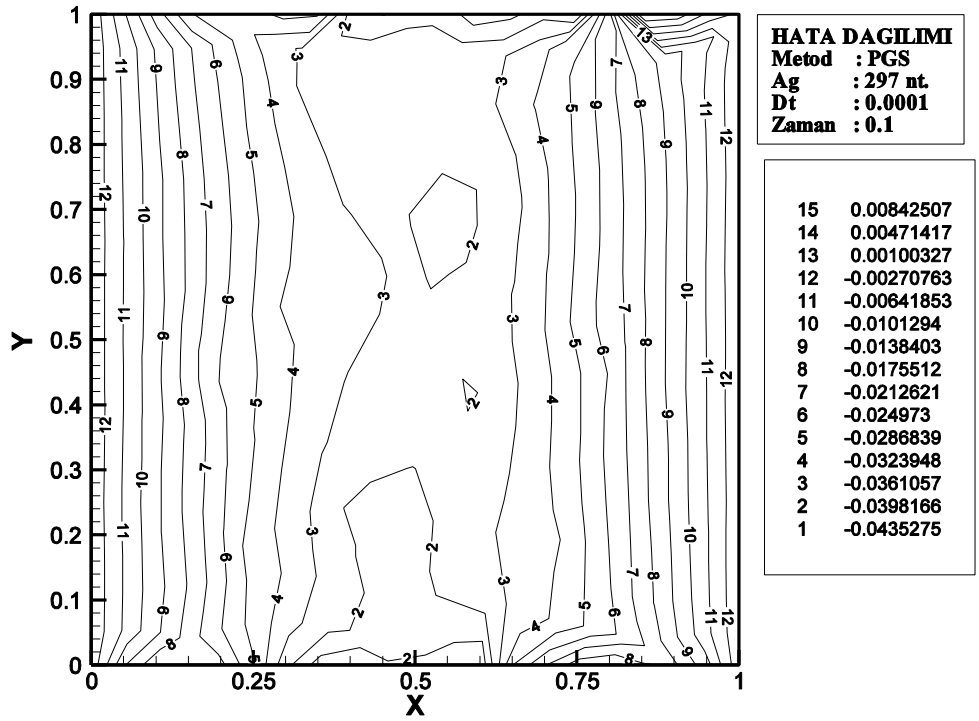
Şekil E.20 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



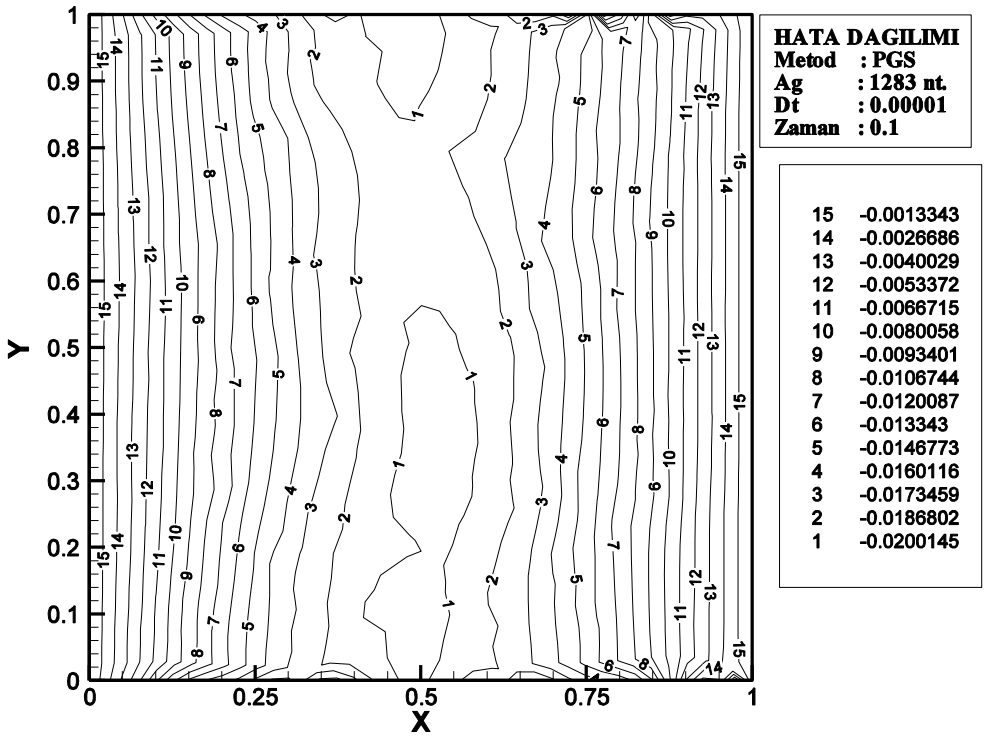
Şekil E.21 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0002 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



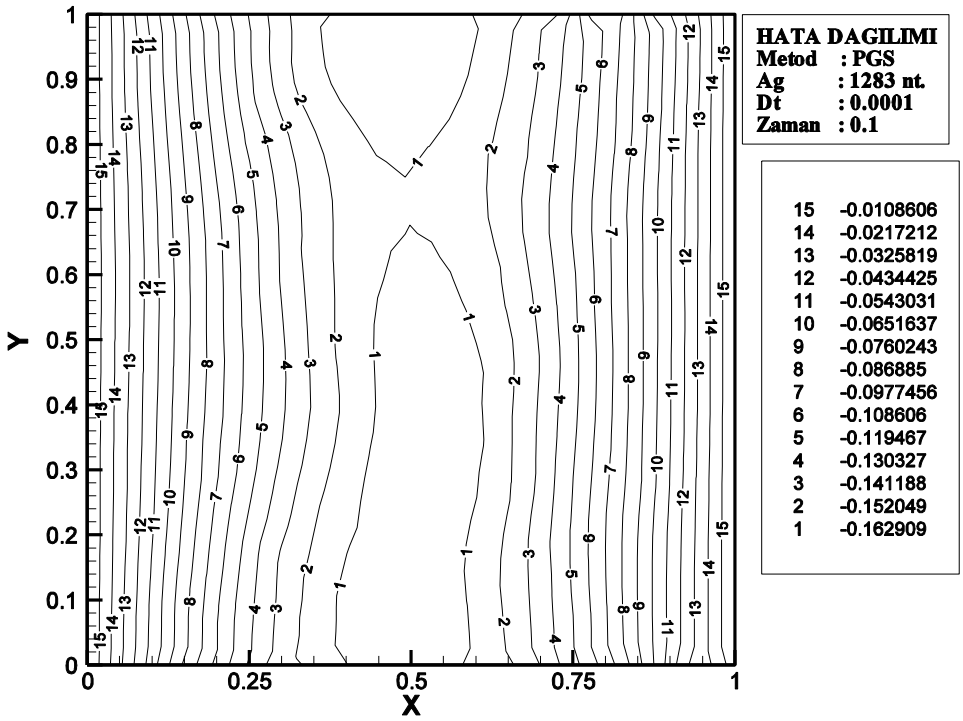
Şekil E.22 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



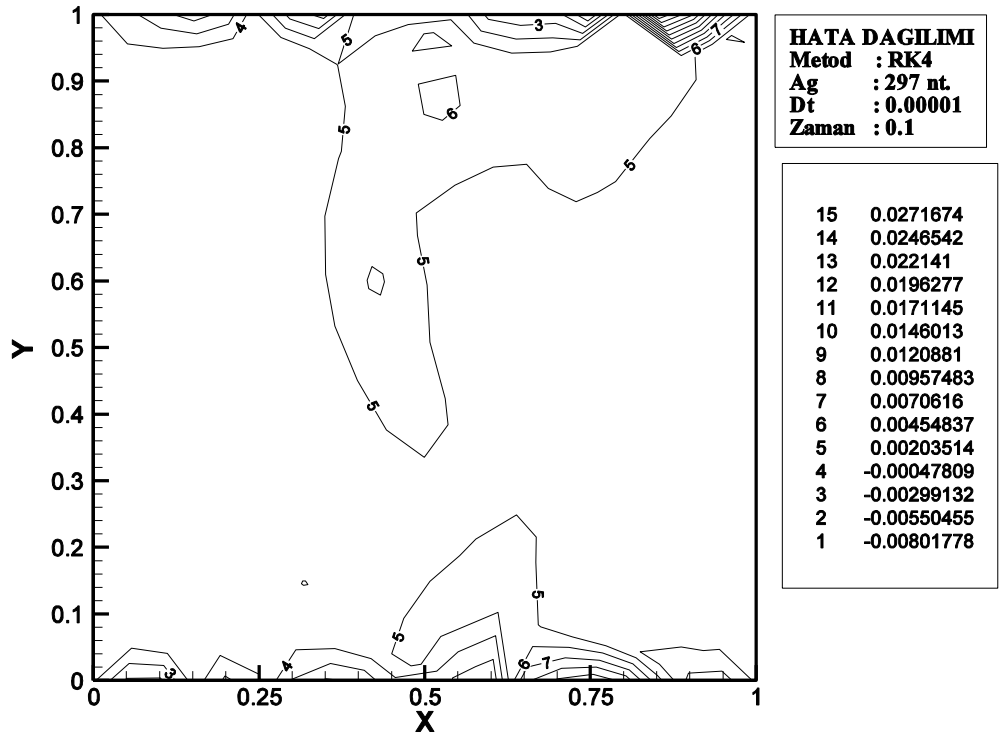
Şekil E.23 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



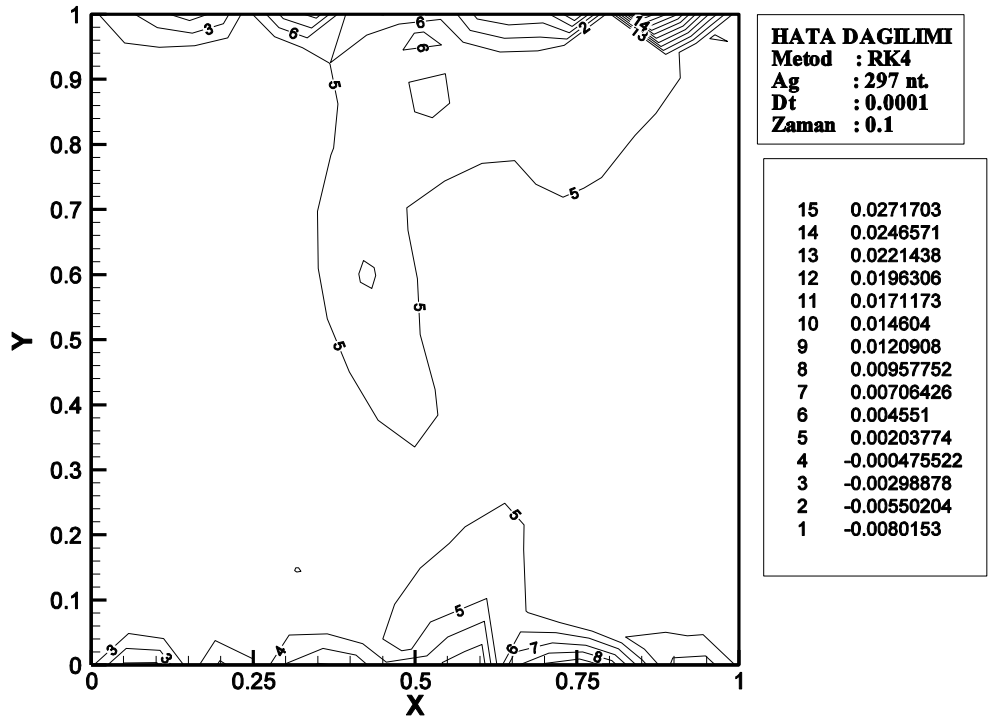
Şekil E.24 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



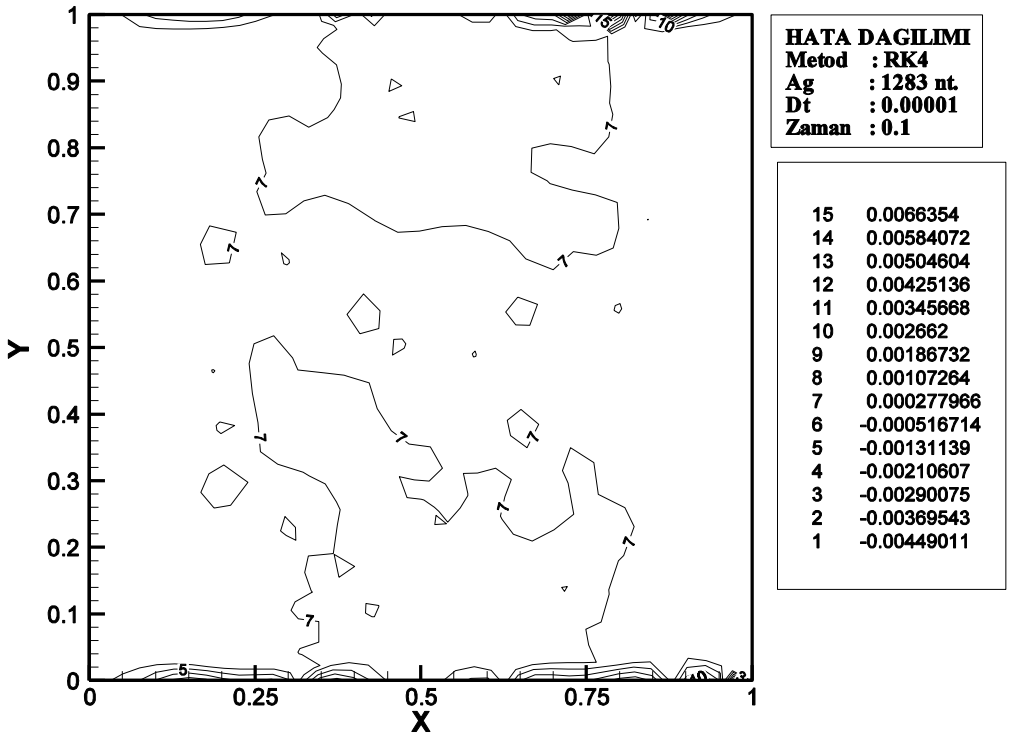
Şekil E.25 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



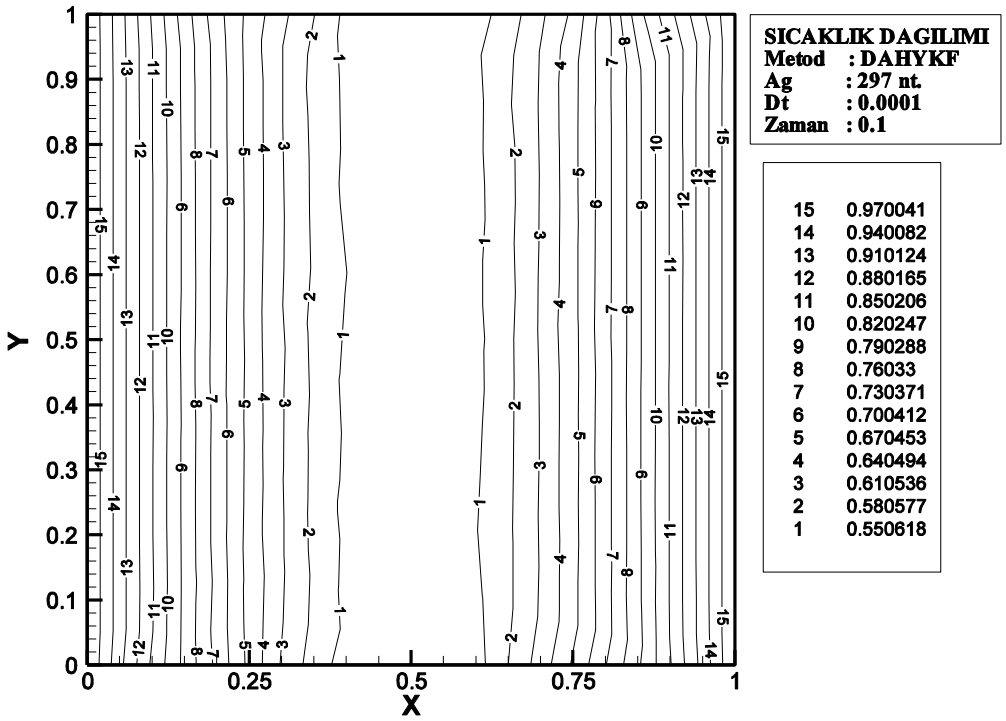
Şekil E.26 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



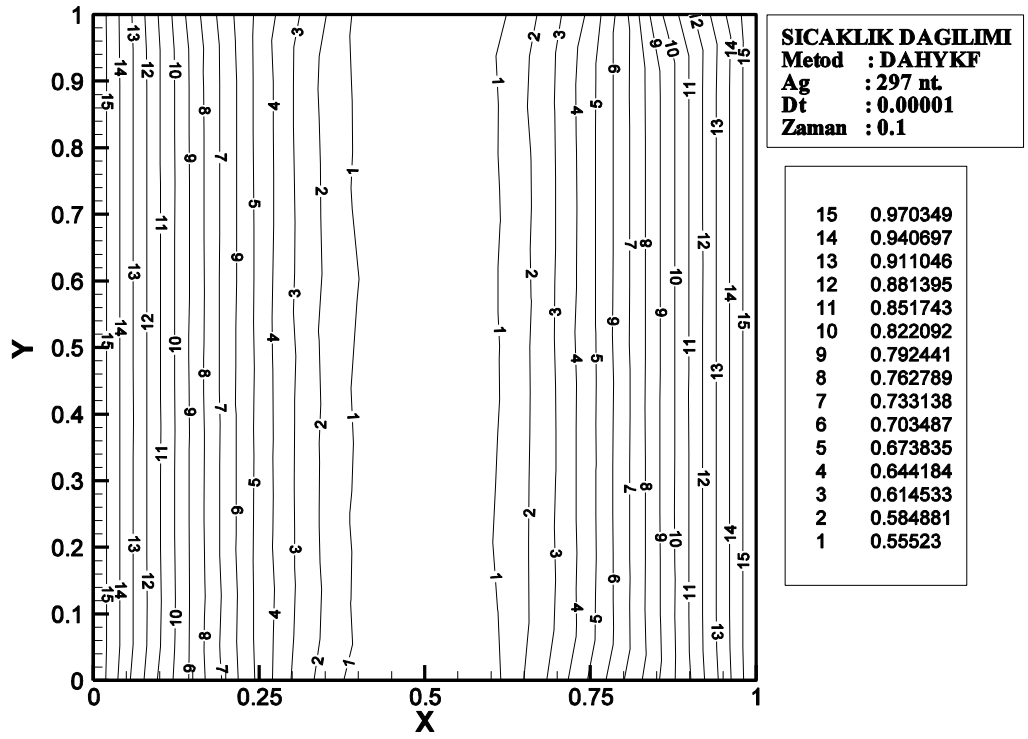
Şekil E.27 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



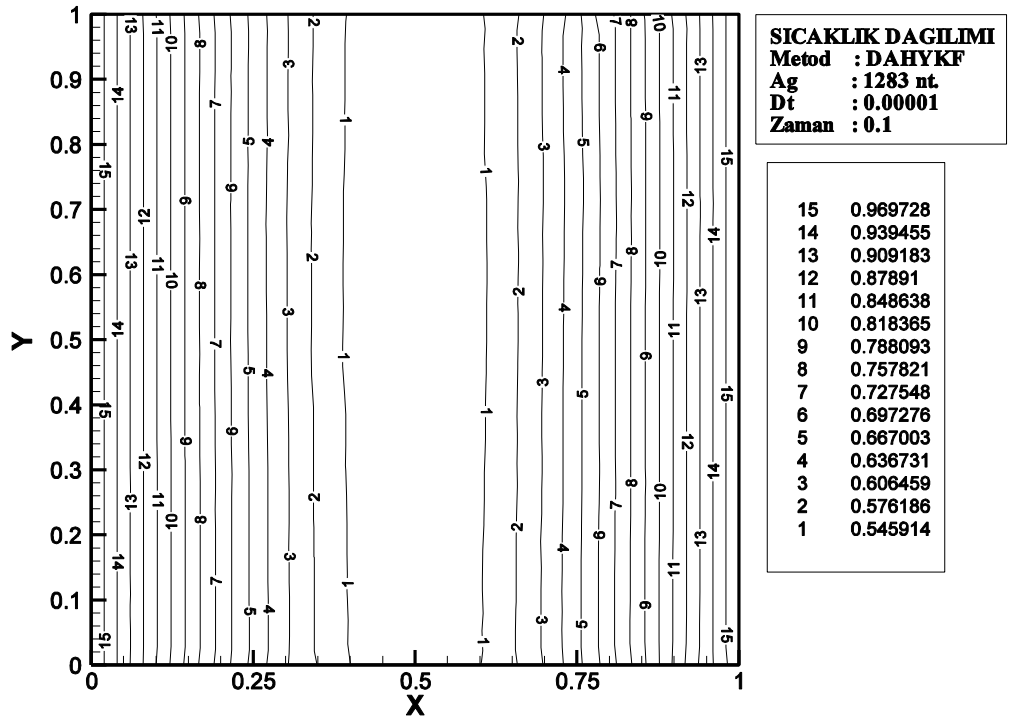
Şekil E.28 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde hata dağılımı.



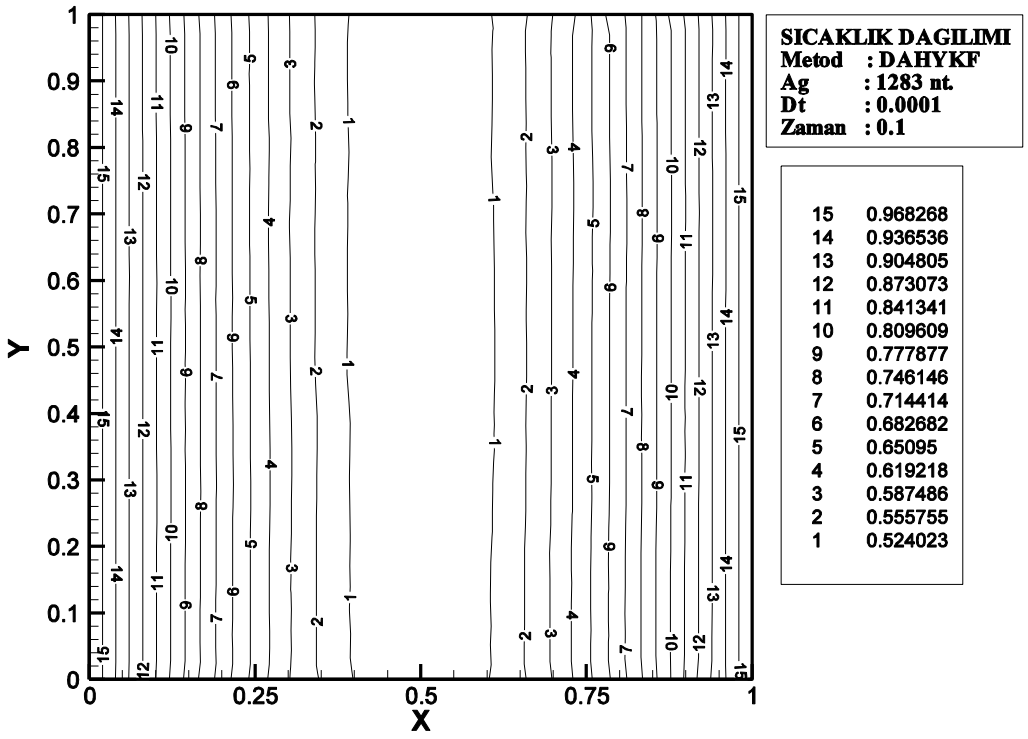
Şekil E.29 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



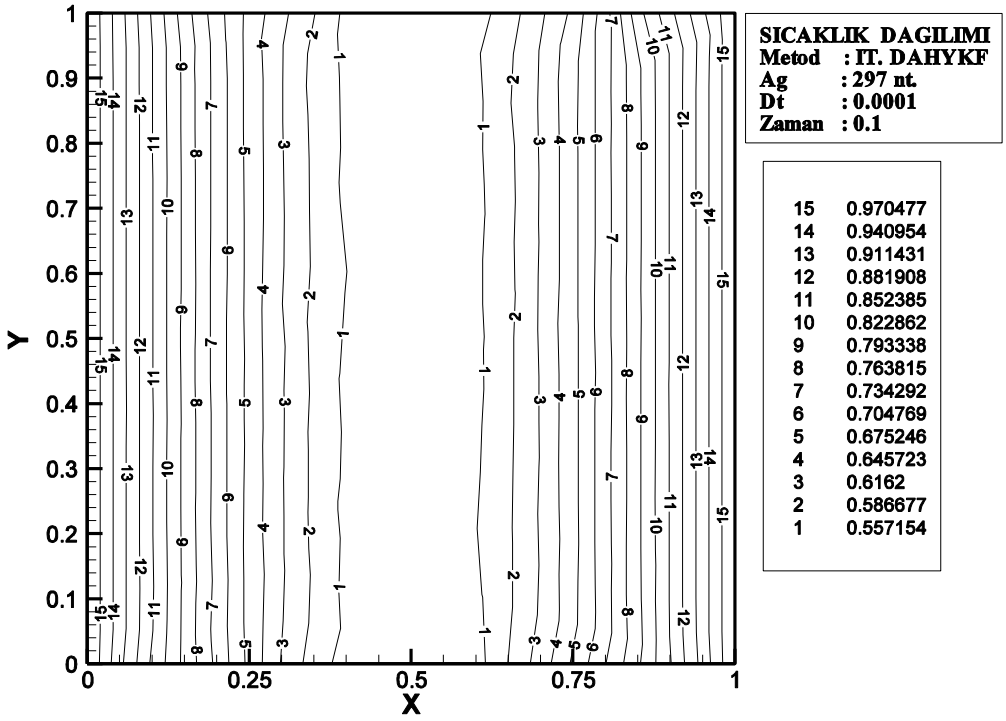
Şekil E.30 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



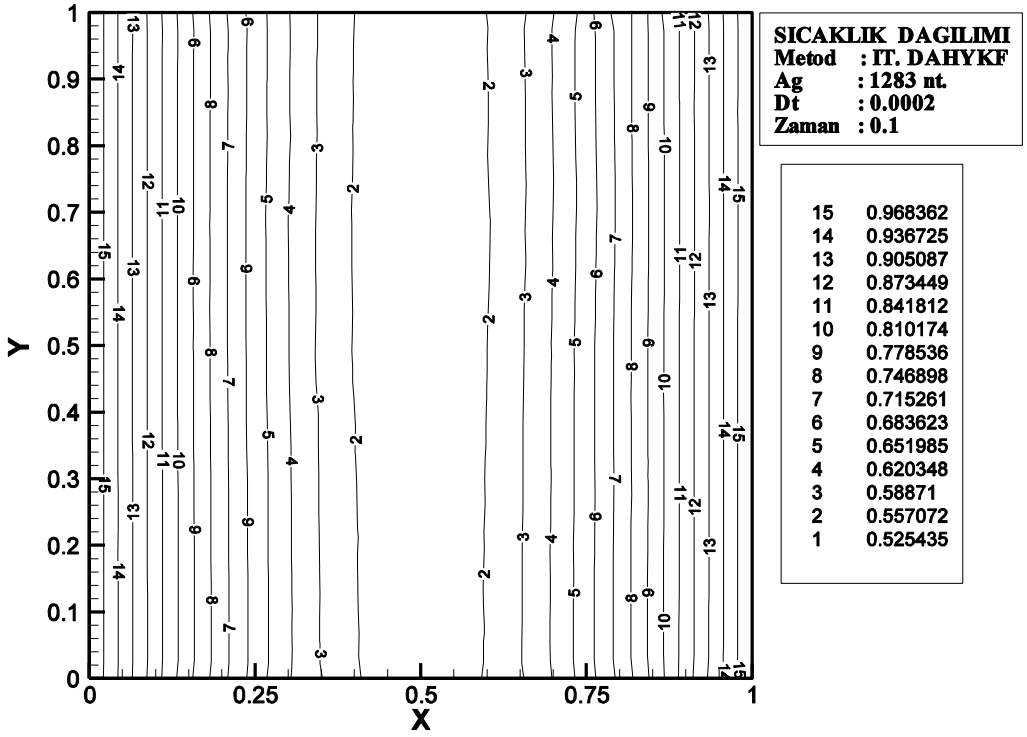
Şekil E.31 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



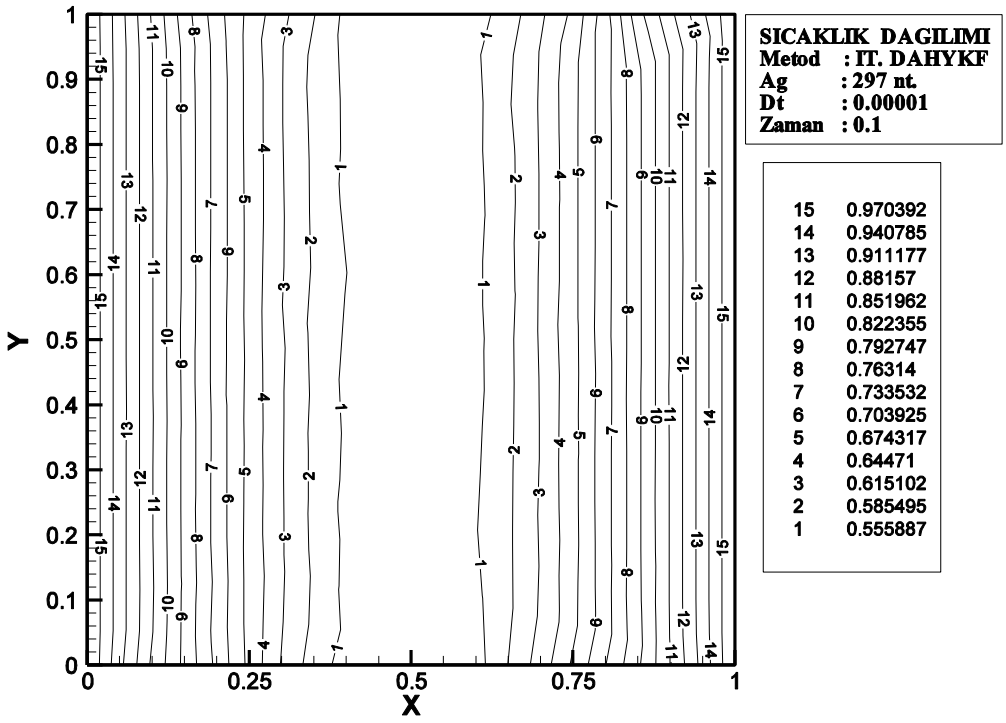
Şekil E.32 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, DAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



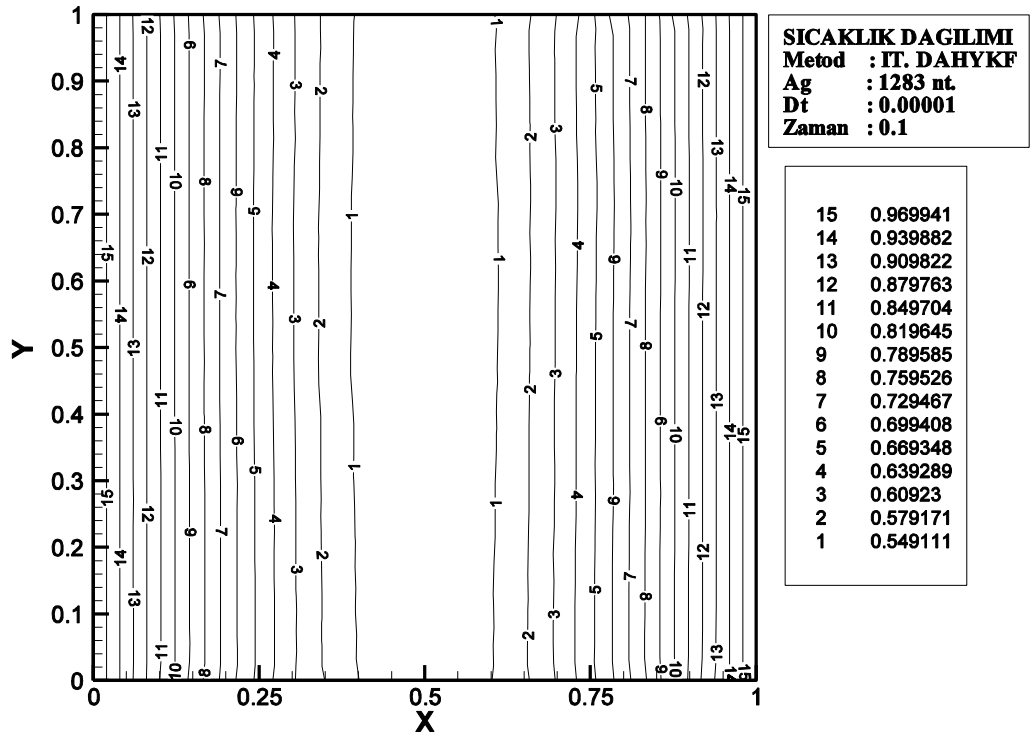
Şekil E.33 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



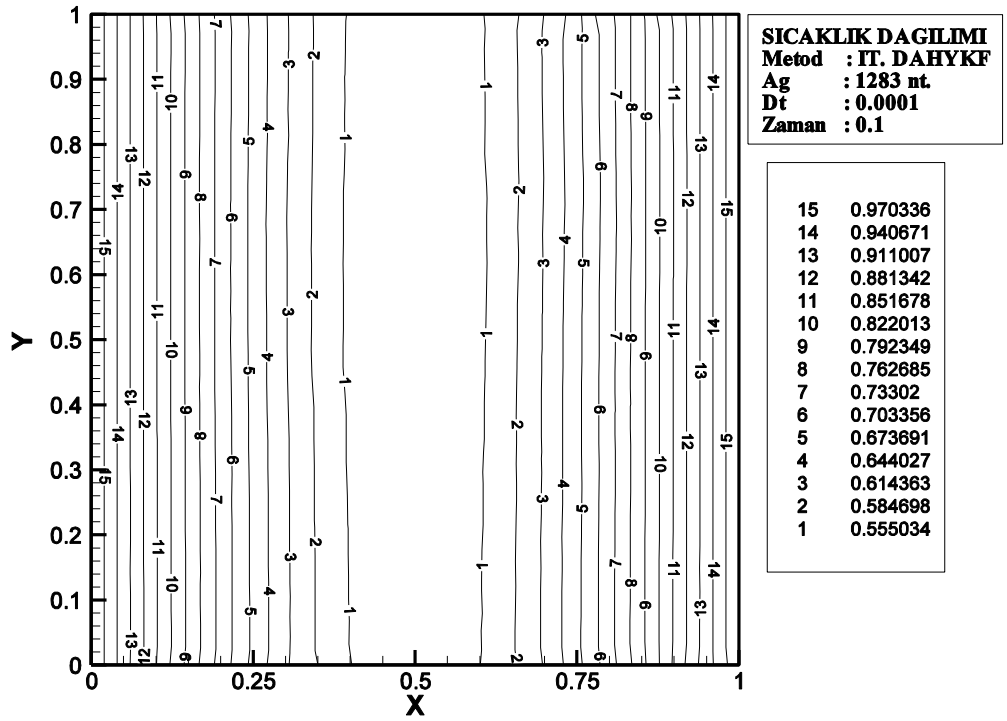
Şekil E.34 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0002 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



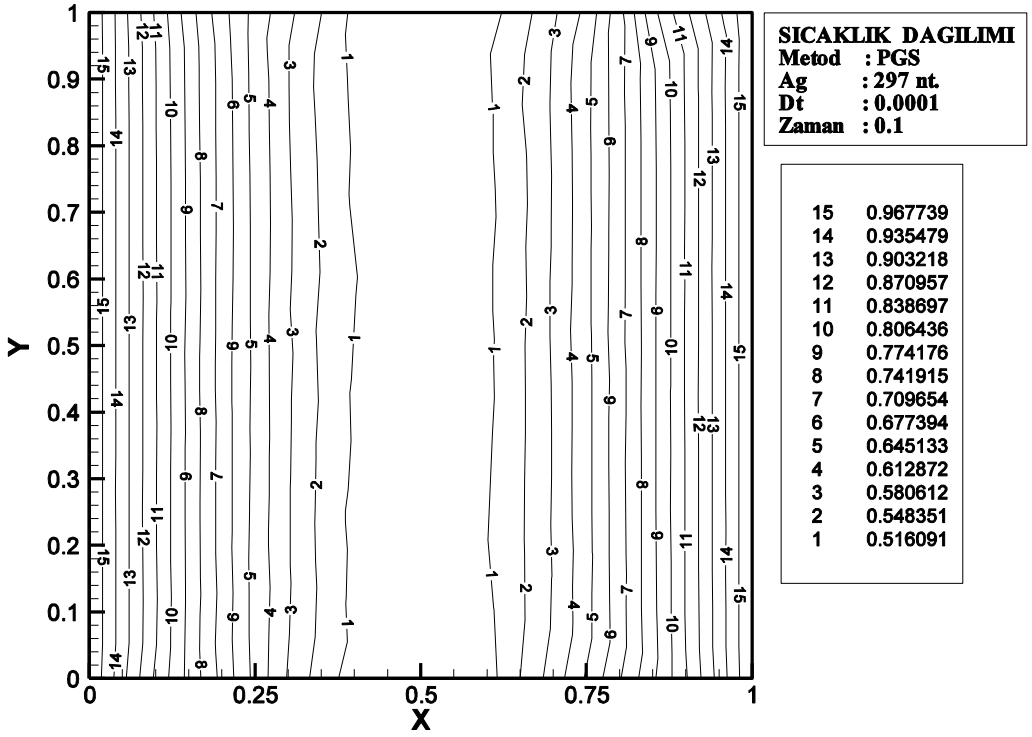
Şekil E.35 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



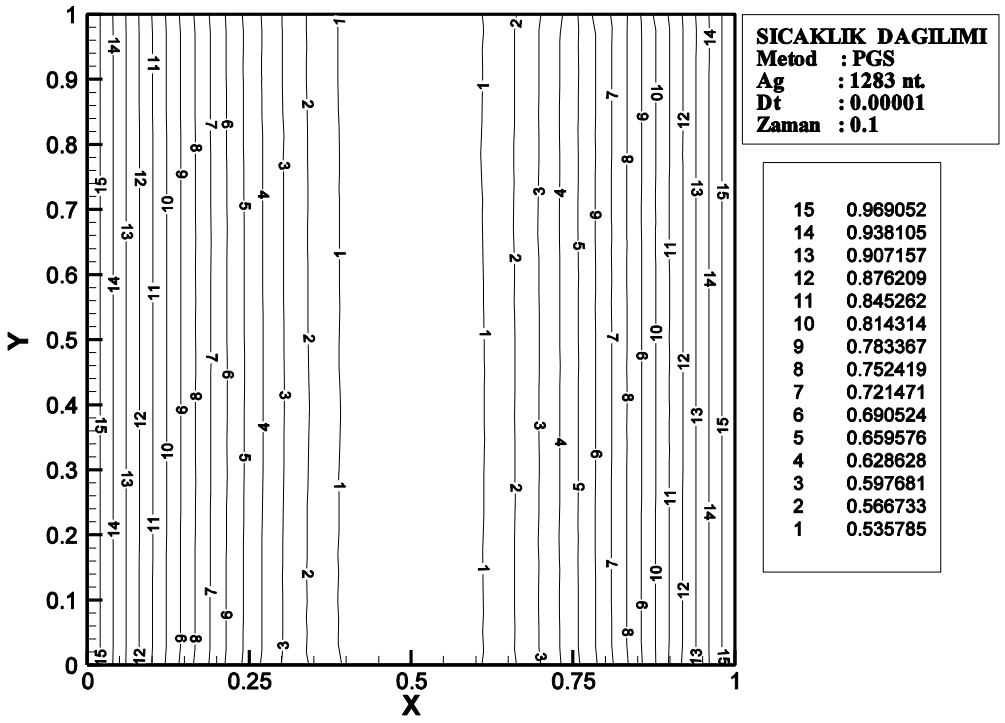
Şekil E.36 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



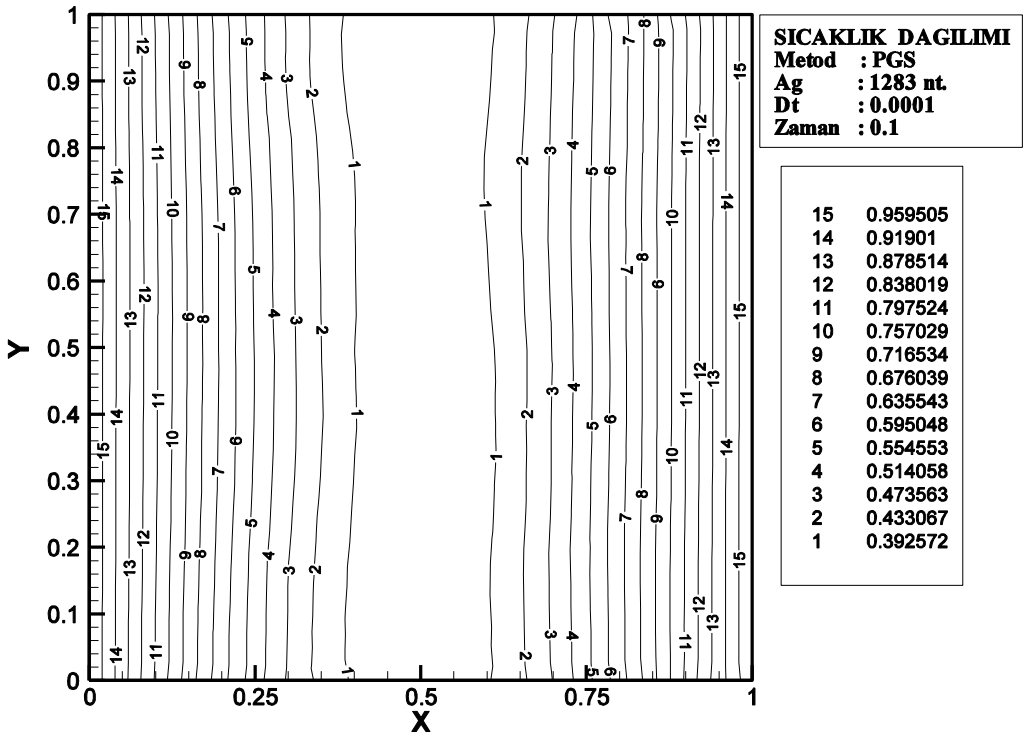
Şekil E.37 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, IDAHYKF yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



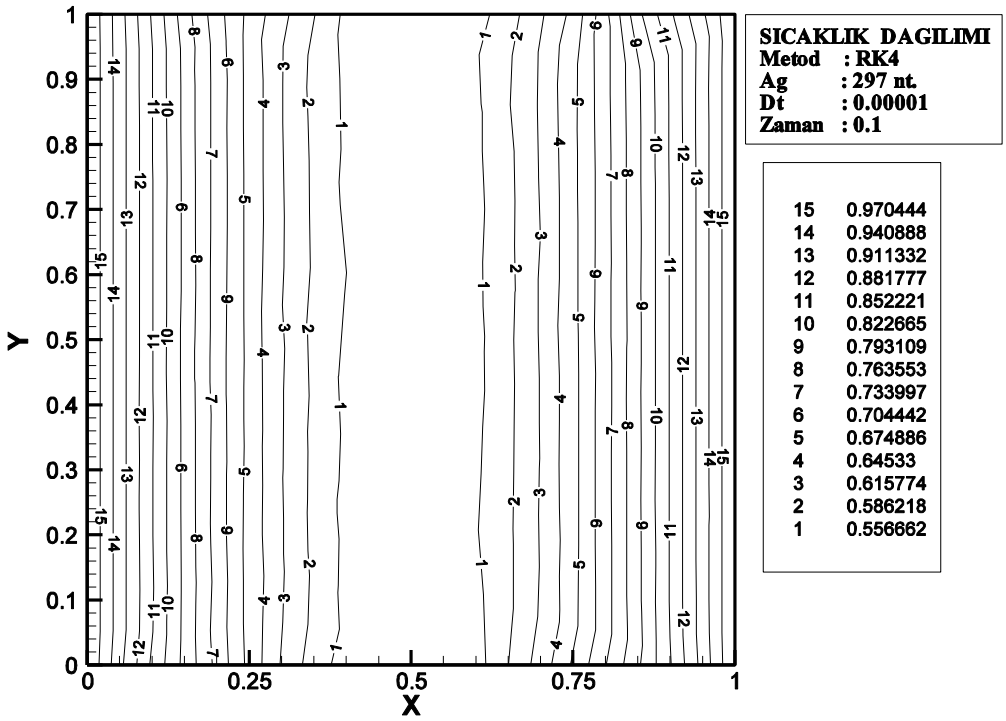
Şekil E.38 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



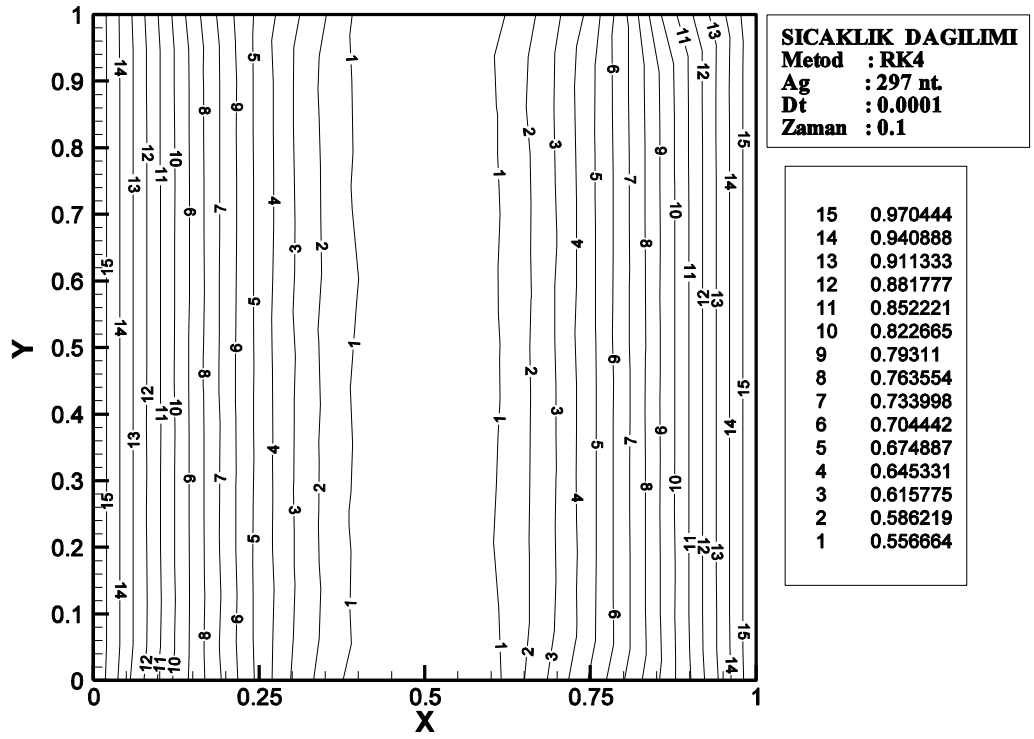
Şekil E.39 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



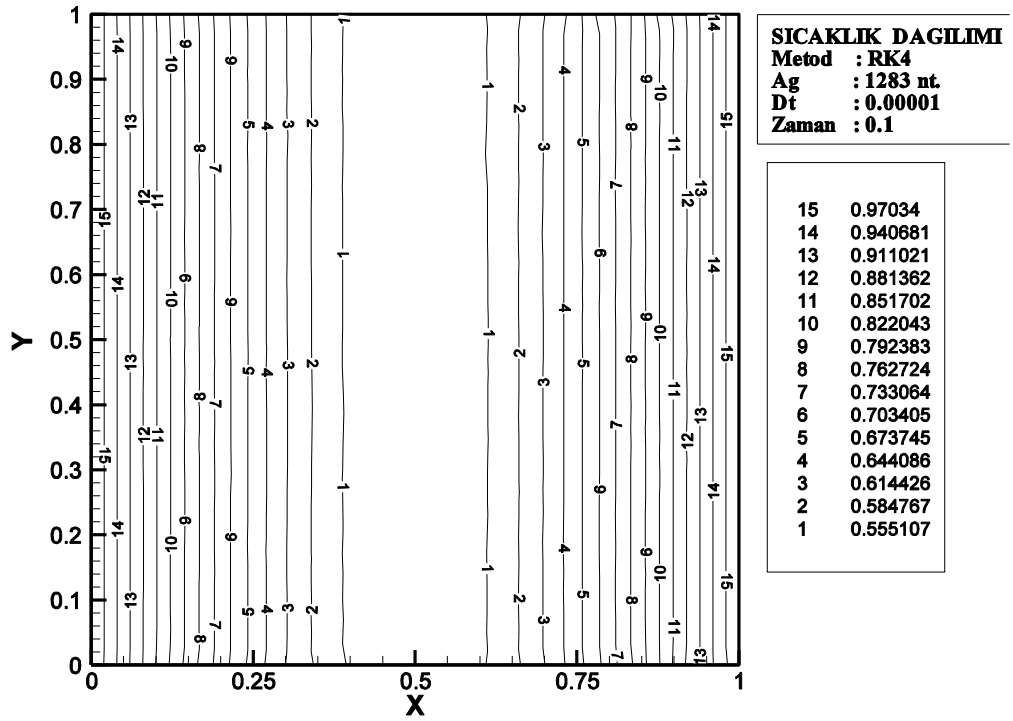
Şekil E.40 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, PGS yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



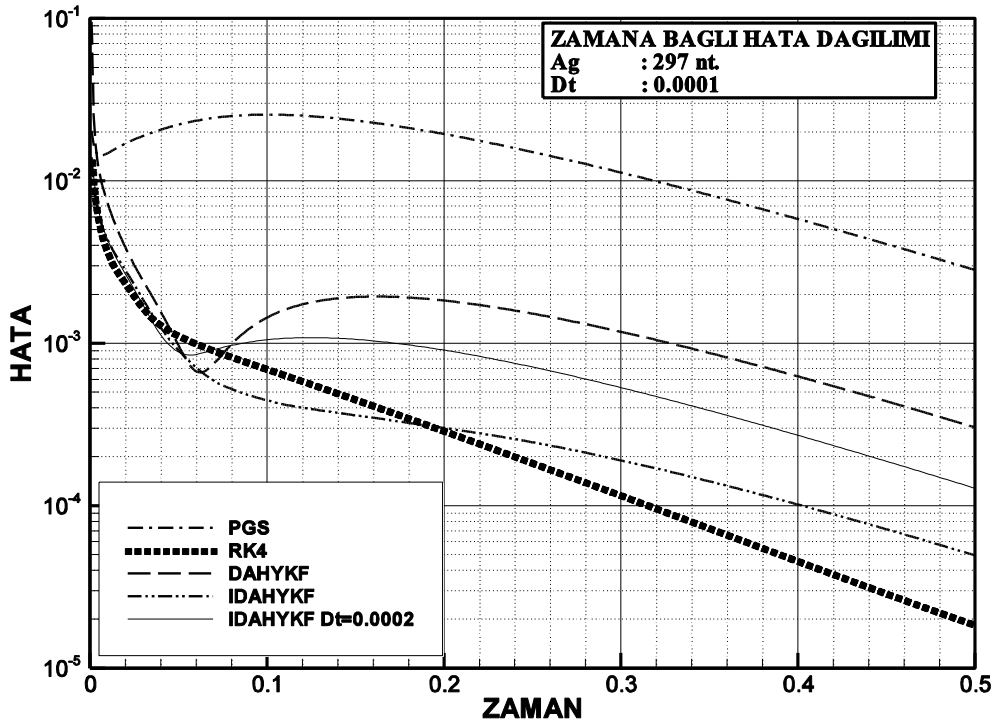
Şekil E.41 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



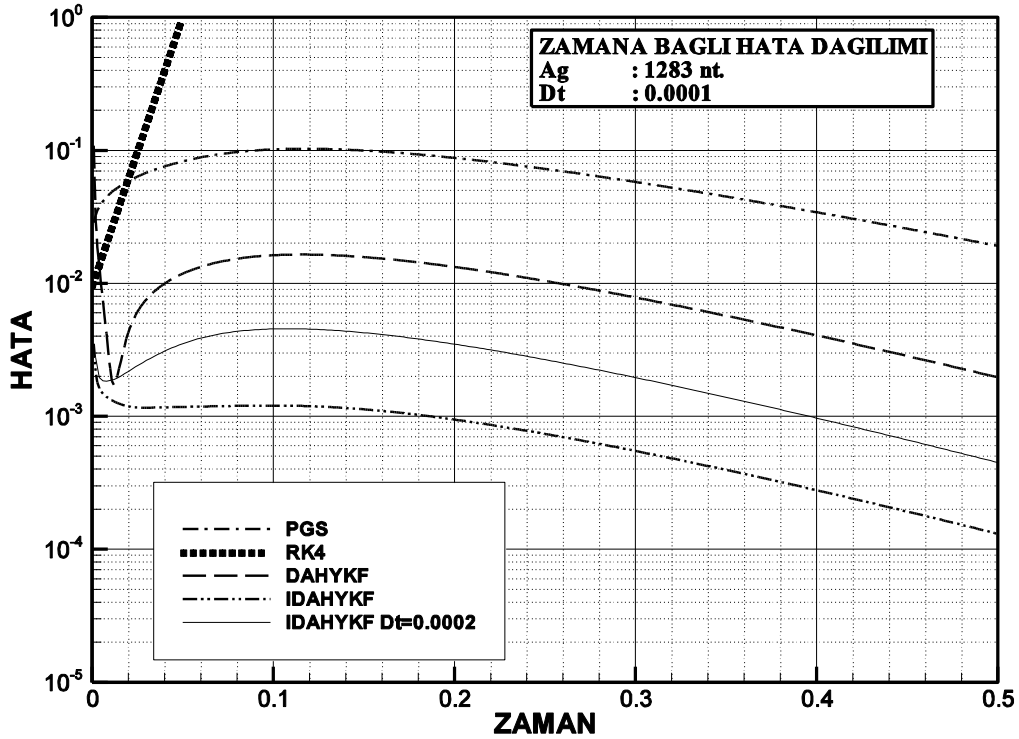
Şekil E.42 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



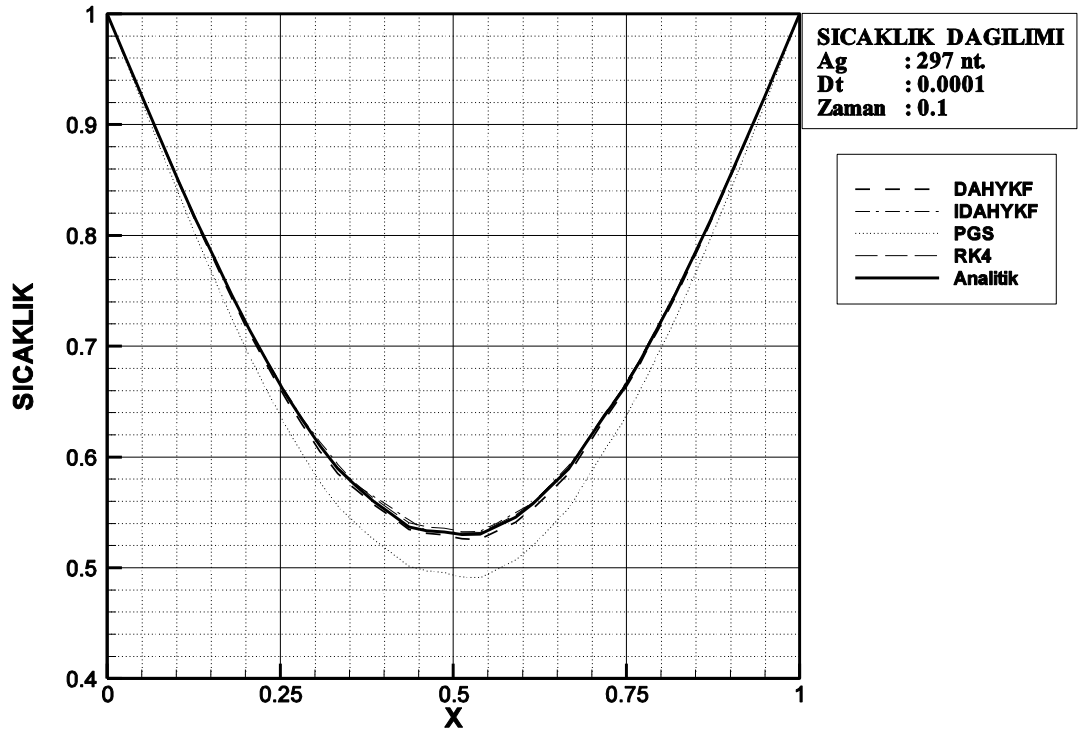
Şekil E.43 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı, RK4 yöntemi ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün çözüm alanı üzerinde sıcaklık dağılımı.



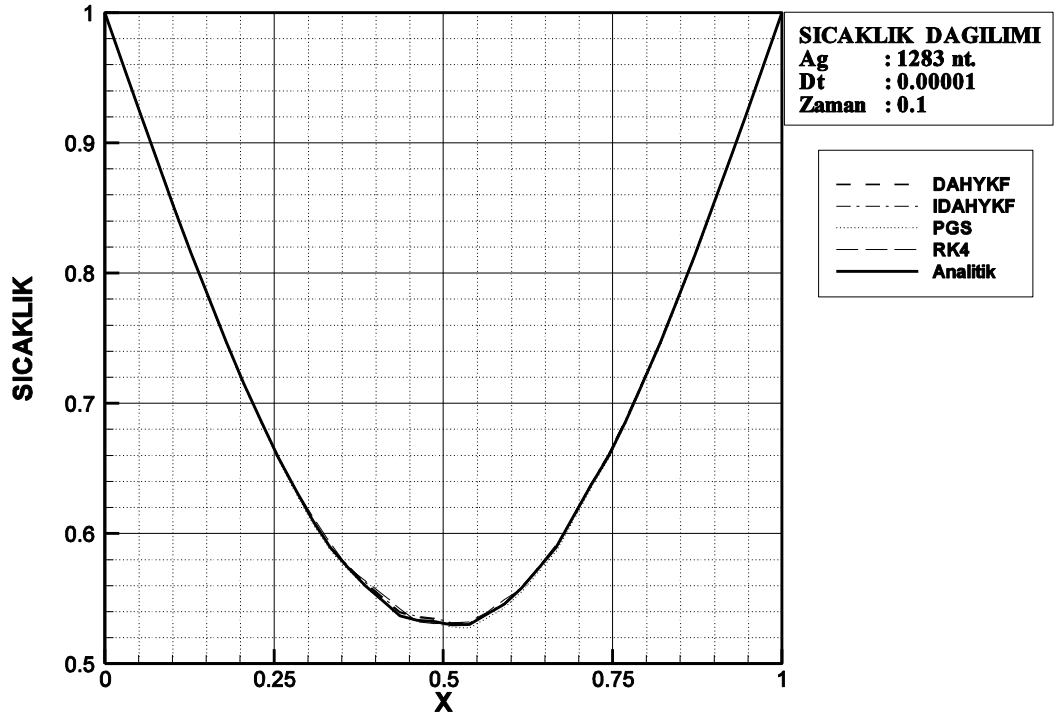
Şekil E.44 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı.



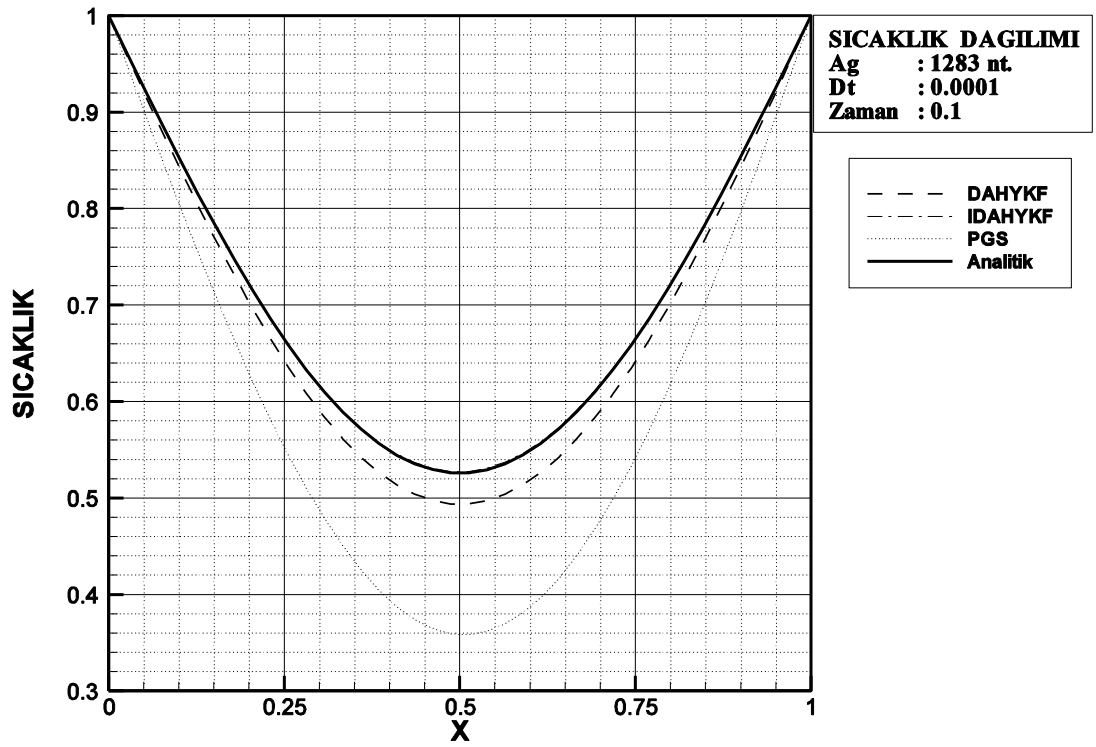
Şekil E.45 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen çözümlerin birimsiz zaman boyunca hata dağılımı.



Şekil E.46 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 297 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı.



Şekil E.47 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.00001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı.



Şekil E.48 Aynı sıcaklıktaki paralel iki levha arasındaki ısı yayınımı probleminin 1283 noktalı yapısal olmayan çözüm ağı ve 0.0001 birimsiz zaman adımı ile elde edilen, birimsiz zaman 0.1'de ki çözümünün x ekseni boyunca sıcaklık dağılımı.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Ruhşen Çete, 1966 yılında Gaziantep'de doğdu. İlk, Orta ve Lise eğitimini Gaziantep'de yaptı. 1983 yılında Gaziantep Lisesinden, 1989 yılında da İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uçak Mühendisliği bölümünden mezun oldu. Uçak Yüksek Mühendisliği ünvanını 1989 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsünden aldı.

1990-1999 yılları arasında İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinde Araştırma Görevlisi ünvanı ile çalışmıştır. 1999-2000 yılları arasında asteğmen olarak askerlik görevini yapmıştır ve 2000 yılından beri TAI firmasında tasarım mühendisi olarak çalışmaktadır. Evlidir ve bir kız çocuğu babasıdır.