

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YERÇEKİMİ ETKİLİ NEWTONYEN OLMAYAN DÜŞEN FİLM AKIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf YEĞİNER

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YERÇEKİMİ ETKİLİ NEWTONYEN OLMAYAN DÜŞEN FİLM AKIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Yusuf YEĞİNER
(511111145)**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511111145 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Yusuf YEĞİNER**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **“YERÇEKİMİ ETKİLİ NEWTONYEN OLMAYAN DÜŞEN FİLM AKIŞI”** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin Orhan Kaya**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. Erol Uzal
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : **5 Mayıs 2014**
Savunma Tarihi : **27 Mayıs 2014**

Aileme,

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince; bilgisi, deneyimi, hiç bitmeyen çalışma azmi ve disiplinliyle bana yol göstererek her türlü olanağı sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL'a anlayış ve sabrından dolayı en içten dileklerle teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim sırasında bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren çok kıymetli hocam Doç. Dr.Güven KÖMÜRGÖZ'e ve fikirlerini paylaşan ve özellikle programlama ilgili çok yardımcı olan Öğr. Gör. Dr.Aytaç ARIKOĞLU'na gösterdiği her türlü destekten dolayı en içten dileklerle teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca beni her konuda destekleyen ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli aileme, değerli dostum Mehmet'e ve kaynak kitap için yardımcı olan Oğuz ağabeyime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2014

Yusuf YEĞİNER
(Uçak Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. AKIŞ VE AKIŞKAN TÜRLERİ	6
2.1 Newtonyen Akışkanlar	7
2.2 Newtonyen Olmayan Akışkanlar	9
2.2.1 Zamandan Bağımsız Akış	9
2.2.1.1 Kesme İncelmesi (Sanki-Plastik)	10
Power-law ya da Ostwals de Waele Modeli.....	11
Carreau Modeli	12
Cross Modeli	12
Ellis Modeli	13
2.2.1.2 Kesme Kalınlaşması (Dilatant Davranış).....	13
2.2.1.3 Viskoplastik Akışkan (Viscoplastic Fluid)	13
Bingham Plastik Modeli	14
Herschel-Bulkley Modeli	14
Casson Modeli	15
2.2.2 Zamana Bağlı Akış.....	15
2.2.2.1 Tiksotropik	15
2.2.2.2 Antitiksotropik ve Reopektif	16
Weltman Modeli	17
Tiu ve Boger Modeli	17
3. DÜŞEN FİLM AKIŞI	19
3.1 Fiziksel model ve Denklem Oluşturulması	20
3.2 Yeni Benzerlik Dönüşümü	22
4. ÇÖZÜM YÖNTEMİ.....	31
4.1 Diferansiyel Quadrature Yöntemi (DQ).....	31
4.1.1 Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ).....	33
4.1.2 Düğüm Nokta Tipi ve Seçimi	34
4.2 Diferansiyel Transform (DT) Yöntemi	38
4.2.1 DTM Teoremleri ve Uygulanması	38
5. GDQM VE DTM YÖNTEMLERİYLE DÜŞEN FİLM AKIŞI ANALİZİ.....	43
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	61

KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	67

KISALTMALAR

DQM	: Differential Quadrature Method
GDQM	: Generalized Differential Quadrature Method
DTM	: Differential Transform Method
kay.	: Kaynak

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : DTM Dönüşümü [48,49].....	39
Çizelge 5.1 : Boyutsuz hızın Power-law indeksine göre değişimi	45
Çizelge 5.2 : Boyutsuz hız alanının (n=0.5) benzerlik çözümü.....	49
Çizelge 5.3 : Boyutsuz hız alanının (n=0.5) GDQM ve DTM benzerlik çözümü.....	50
Çizelge 5.4 : Boyutsuz hız alanını ve sıcaklığın ($Pr_x = 10$ ve n=0.5) benzerlik çözümü.....	53
Çizelge 5.5 : Boyutsuz hız alanının ($Pr_x = 1$ ve n=1.5) benzerlik çözümü.....	55
Çizelge 5.6 : Boyutsuz hız alanının (n=1.5) GDQM ve DTM benzerlik çözümü.....	58
Çizelge 5.7 : Sıcaklığın ($Pr_x = 1$ ve n=1.5) benzerlik çözümü	59

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Akışkan türleri.....	3
Şekil 2.1 : Akışkan modeli.	7
Şekil 2.2 : Zamandan bağımsız akışkanlar	10
Şekil 2.3 : Kesme İncelmesi Davranışı.....	11
Şekil 2.4 : Power-law Modeli (Ostwald de Waele Modeli) [21]	11
Şekil 2.5 : Tiksotropik Akış Davranışı [21].....	16
Şekil 3.1 : Hızlanan film akış modeli	21
Şekil 4.1 : Eşit aralıklı düğüm noktaları tek yön için ($N_x = 10$).....	35
Şekil 4.2 : Eşit aralıklı düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$).....	35
Şekil 4.3 : Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları tek yön için ($N=10$)	35
Şekil 4.4 : Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$)....	36
Şekil 4.5 : Üretilen ilk düğüm noktaları tek yön için ($N=10$).....	36
Şekil 4.6 : Üretilen ilk düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$)	37
Şekil 4.7 : Üretilen ikinci düğüm noktaları tek yön için ($N=10$).....	37
Şekil 4.8 : Üretilen ikinci düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$)	37
Şekil 5.1 : Hızın x yönündeki bileşeninin farklı Power-law indeksine göre boyutsuz η ile değişimi (a) GDQM ile elde edilen (b) Kaynak sonucu [35].....	44
Şekil 5.2 : Boyutsuz hız gradyanının Power-law indeksine göre değişimi	46
Şekil 5.3 : Kritik momentum kalınlığının $\eta_{\delta 1}^*$ ile Power-law indeksi değişimi[37] ..	47
Şekil 5.4 : Kritik bölgesel Prandtl sayısı Pr_x ile Power-law indeksi değişimi[37] ...	47
Şekil 5.5 : Kritik momentum ve termal sınır tabaka kalınlığının Power-law indeksi n ile değişimi (1-5: $Pr_x = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ ve 6: $\eta_{\delta 1}^*$) [52]	48
Şekil 5.6 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 2.5$ aralığındaki değerleriyle değişimi.....	51
Şekil 5.7 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 2$ aralığındaki değerleriyle değişimi.....	51
Şekil 5.8 : Boyutsuz sıcaklığın Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 2.5$ aralığındaki değerleriyle değişimi.....	54
Şekil 5.9 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 5.6$ aralığındaki değerleriyle değişimi	57
Şekil 5.10 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 2$ aralığındaki değerleriyle değişimi.....	57
Şekil 5.11 : Boyutsuz sıcaklığın Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 5.6$ aralığındaki değerleriyle değişimi	60

YERÇEKİMİ ETKİLİ NEWTONYEN OLMAYAN DÜŞEN FİLM AKIŞI

ÖZET

Akış temelde komşu akışkan parçacıklarının hareketi ile birbirlerinden uzağa ve yakına giderek uzama, birbiri üzerinden ve yakınından geçerek kesme, şeklinde iki türde gerçekleşir. Akış ve bu davranışı sergileyen akışkanı irdeleyen akışkanlar mekaniği, akışkan statikini ve dinamiğini bütünlemesine inceleyerek hava hareketlerinin sebep olduğu iklimsel durumları, ulaşım araçlarının tasarımını, özel olarak tasarlanan yapıları, hidrolik özellikte makineleri, canlılara ait çoğu sayılamayacak sıvı ve gazlar ile ilgili mühendislik uygulamalarını kapsar. Akışkanlar mekaniği açısından bütün maddeler katı ve akışkan olmaları bakımından iki halde bulunmaktadır. Teknik açıdan bakıldığında bu iki hal arasındaki farklılık kesme gerilmesi veya teğetsel gerilme karşısında sergiledikleri tepkilerle belirlenebilmektedir. Katıya uygulanmakta olan kayma gerilmesi düşünüldüğünde bir nebze şekil değişimi ile karşılaşılır. Oysa akışkana bir gerilme uygulandığı takdirde harekete geçme ve şekil değişimi gözlenir. Newtonyen akışkanlar viskoziteyi oluşturan kesme gerilimi ile kesme hızı oranının doğrusal olduğu, Newtonyen olmayan akışkanlar ise sıfır ya da doğrusal olmadığı akışkan türüdür. Newtonyen olmayan durumda viskozite belirli bir sıcaklık ve basınç değerinde sabit olmazken akışkanın kesme hızı, akış geometrisi ve akışkan elemanın kinematik geçmişine bağlı olur. Maddenin akış özelliklerini inceleyen Reoloji, Newtonyen olmayan akışkanları sınıflandırmıştır. Newtonyen olmayan akışkanların davranışlarını ifade etmek üzere birçok model oluşturulmuştur. Bu modellerden biri olan ve birçok çalışmada kullanılan Newtonyen olmayan ve viskoziteyi hız değişiminin üssel bir ifadesi olarak ele alan Power-law modelidir. Power-law akış modelinde Newtonyen olmayan problemler içinde düşen film akışıyla alakalı çalışmalar da mevcuttur. İlk çalışmalar daha çok deneysel olarak ilerlerken, düşen film akış hidrodinamiği ile ilgili Power-law akış modelinde çalışmalar yapmıştır. Power-law modeline uyan tipte film akışlarıyla alakalı yer çekimi etkisindeki durumlar için integral metodu ve benzerlik çözümleri kullanılarak yapılan çalışmalar da mevcuttur.

Bu çalışmada Power-law modeline uygun Newtonyen olmayan film tipi akış için süreklilik, momentum, enerji denklemleri ile sınır koşulları verilmiştir. Yeni tanımlanan benzerlik yaklaşımıyla denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Az grid ile kısa zamanda yeterli hassasiyette doğru sonuç verebilen yöntemler den biri olan DQ (Differential Quadrature) ile doğrusal olan ya da olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesiyle daha basit şekilde çözüm arayan DT (Differential Transform) yöntemine çalışmada yer verilmiştir. Sınır şartlarına uygun olarak çözülen denklemler kaynak çalışma ile kıyaslanmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

GRAVITY-DRIVEN NON-NEWTONIAN FALLING FILM FLOW

SUMMARY

Basically, the fluid particles move away from each other or come closer to each other. It is called *elongating*. Additionally they can move above the other or pass by each other so shear occurs. The study of fluids either in motion (fluid dynamics) or at rest (fluid statics) defines fluid mechanics. Both liquid and gas are capable of flowing freely so they are fluids because they can be made to move or flow.

Lots of different fields can be thought which are related to fluid mechanics such as blood flow, swimming, pumps, fans, turbines, airplanes, ships, rivers, windmills, pipes, engines, filters, jets etc. Almost everything on this planet is a fluid or moves near or within a fluid.

All matter have two states from the view of fluid mechanics as solid and fluid. The obvious difference between solid and fluid lies with their reaction to an applied tangential or shear stress. While any shear stress, no matter how small, applied to fluid a motion happens, a solid resists by a static deflection under the effect of shear stress. The fluid deformation and motion do not stop until the stress is stop.

Viscous-flow theory was unexploited, since Newtonian viscous terms had been added by Navier (1785–1836) and Stokes (1819–1903) to the equations of motion successfully. For arbitrary flows the resulting Navier-Stokes equations were too difficult to analyze. In 1904, a very important paper was written by a German engineer, Ludwig Prandtl (1875–1953). He stated that fluid flows which have small viscosity can be divided into a thin viscous or boundary layer, near solid surfaces and interfaces, closed to the nearly inviscid outer layer, so the Euler and Bernoulli equations could be used. In modern flow analysis, boundary-layer theory, supplying better understanding about many flow phenomena, was a very important tool. Many different texts were written about boundary-layer theory.

Rheology is the study of deformation and flow of fluids in response to stress. As mentioned before fluids include both gases and liquids. If the stress versus strain rate curve is linear and passes through the origin, then the fluid is Newtonian fluid. A non-Newtonian fluid is a fluid, not obeying Newton's law of viscosity, whose flow properties differ in any way from those of Newtonian fluids. Therefore, shear stress cannot be defined as a linear function of the shear rate, or shear stress versus shear rate does not pass through the origin.

The apparent viscosity, defined as shear stress divided by shear rate, depends on flow geometry shear rate, kinematics of fluid element etc. It is not constant at a given temperature and pressure.

There has been an immense amount of study performed on Non-Newtonian power-law fluids. While the first studies were carried out experimentally, numerical calculation techniques for non-Newtonian fluid flow have been also studied.

Hydrodynamics of falling film flow of power law fluids was reviewed. Similarity analysis and integral method approach have been applied in the theoretical studies of the hydrodynamics of gravity-driven power-law films. The accelerating film flow was divided into three regions as the boundary layer region, the fully viscous region, and the developed flow region by applying similarity transformations.

In this research, the objective is to gain a better understanding of the behavior of a gravity-driven non-Newtonian Power-law film flow on an inclined plane. For this project, first, power law non-Newtonian fluids characteristics are introduced and then the equations of motion are driven. Moreover, by applying the new similarity approach, the equations are nondimensionalized. Then, the boundary conditions have been changed to solve the new equations.

In order to solve these partial differential equations previous researchers have used numerical method, a standard shooting technique based on classical 4th-order Runge–Kutta integration, in combination with a Newton iteration procedure. Also they have written the partial equations as a system of first order differential equations and solved again adopting the shooting method means of fifth-order Runge–Kutta integration which utilize variable grid spacing . After that a Newton iteration procedure has been applied to satisfy the boundary conditions. In this research, to solve the equations of the problem two different methods have been investigated.

Differential quadrature method was developed to provide solutions to differential equations of any systems. Then, for boundary or initial value conditions for engineering problems DQM became an alternative approach to the standard methods like finite elements or finite difference. The main point in DQM is, the partial derivative of a function on a discrete point respect to a variable can be approximated as a weighted linear sum of unknown function values at specific region which contains all discrete points of this variable. The most important part is to define the weighted coefficients.

The method varies according to the function which is chosen for calculation of weight coefficients. The function is approximated by a $(n-1)th$ degree polynomial in Polynomial Differential Quadrature (PDQ), a Fourier series expansion in the Fourier Expansion Base Differential Quadrature (FDQ), employing harmonic functions named the Harmonic Differential Quadrature (HDQ).

DQM performance is dependent on not only the sampling grid points but also boundary conditions. Without restricting the choice of grid meshes to find simple algebraic expressions for the weighting coefficients, the Generalized Differential Quadrature Method (GDQM) has also been developed. Moreover, in the previous researches, it can be seen that proper grid points and weighting coefficients effect the results. In the problems having linear equations and homogenous boundary conditions, for solution, equal grids are adequate.

Grid points through the Chebyshev-Gauss-Lobatto method is appropriate for vibration problems. For the problem in this research a nonuniform mesh like in Chebyshev-Gauss-Lobatto method have been thought. But the boundary of variables are on one side so the density of grid points had to be high near only the boundary. Therefore, it has been necessary to define new grid types which dense near only the boundary conditions. For this purpose two different grid types have been formulated.

The differential transform method (DTM) is an efficient technique, having a considerable accuracy and easiness, for solving differential equations. The concept of

DTM was first introduced in 1980s. It applied to electrical circuit analysis solving not only linear but also non-linear initial value problems. At a point in terms of known and unknown boundary conditions, the differential transform method gives exact values of the n th derivative of an analytical function. DTM constructs an analytical solution in a polynomial form for differential equations.

Differential transform is a simulation method, depending on on Taylor Series expansion, contrary to higher order Taylor series, this method does not need the symbolic calculation of derivatives. For large orders The Taylor series method is computationally taken long time. Obtaining analytical Taylor series solutions of differential equations by iteration, desired results can be found with great accuracy.

The nondimensionalized equations for the problem in tihs work are solved by using Generalized Differential Quadrature Method and results are compared with the reference work. Also Differential transform method results are obtained for the problem and compared with GDQM results.

1. GİRİŞ

Gelişmekte olan teknoloji, bununla birlikte artan bilgi birikimi kuşkusuz hayatın en önemli parçalarından biri olan akışkana dair çok önemli veriler elde edilmesini sağlamıştır. Doğal olarak, akışkanlar mekaniği denilen akışkan statikini ve dinamiğini bütünlemesine ele alan bir konunun ne denli önem arz ettiği ortaya çıkmaktadır. Günümüzde hızı yüksek hava hareketlerinin sebep olduğu iklimsel olayları (hortum, kasırga vb.), ulaşım araçlarının tasarımı (hava ve uzay araçları, denizin üstü ve altı ile karada kullanılan araçlar vb.), özel olarak tasarlanan yapılar (köprüler, binalar vb.), hidrolik özellikte makineler, canlılara ait solunum, kan akışı gibi daha sayılamayacak sıvı ve gazlar ile ilgili mühendislik uygulamaları akışkanlar mekaniğinin ilgi alanına girmektedir. Dünya üzerinde yer almakta olan çoğu şeyin akışkan özellikte olduğunu ve akışkan içinde ya da akışkan civarında hareket ettiğini söylemek kuşkusuz hatalı olmaz.

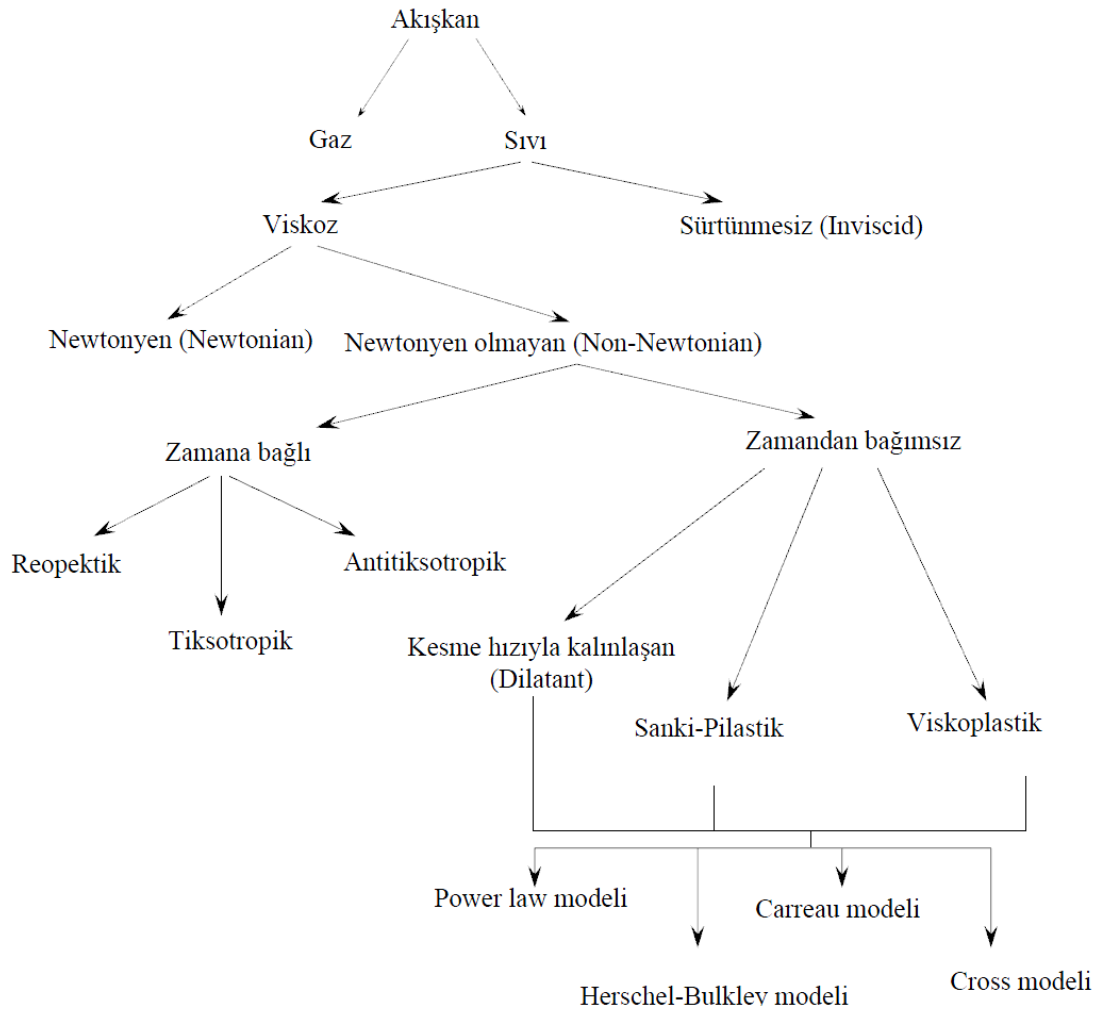
Akışkanlar mekaniği açısından bütün maddeler katı ve akışkan olmaları bakımından iki halde bulunmaktadırlar. Teknik açıdan bakıldığında bu iki hal arasındaki farklılık kayma gerilmesi veya teğetsel gerilme karşısında sergiledikleri tepkilerle belirlenebilmektedir. Katıya uygulanmakta olan kayma gerilmesi düşünüldüğünde bir nebze şekil değişimi ile karşılaşılır. Oysa akışkana küçük ölçekte bir gerilme uygulandığı takdirde harekete geçme ve şekil değişimi gözlenir[1].

Akışkanlar mekaniği bilimine katkı sağlamış önemli çalışmalar ve şahsiyetlere değinilmek istenirse öncelikle akışkana ait bilinen ilk çalışma sıvıların kaldırma kuvvetini keşfeden Archimedes (MÖ 285-212) tarafından olmuştur. Tek boyutlu-sürekli akış için süreklilik denklemini çıkaran Leonardo da Vinci (1452-1519) dalga hareketleri, jet akışları, sürüklenme kuvvetleri vb. hakkında bilgiler vermiştir. Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ve Pier Simon Laplace (1749-1827) sürtünmesiz akışlarla alakalı yaptıkları çalışmalar önemlidir. Henri Pitot (1695-1771), Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), James Bicheno Francis (1815- 1892), Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869) akışkanlar mekaniği için önemli çalışmalara imza atmışlardır. Lord Rayleigh (1842-

1919) boyut analizi tekniğini geliştirirken Osborne Reynolds (1842-1912) klasik boru deneyini (1883) gerçekleştirerek akışkanlar mekaniğine çok önemli boyutsuz sayıları kazandırmışlardır. Kesme gerilimi ile hız değişiminin doğrusal olmadığına dair birçok bilim adamları çalışma yapmıştır. Newtonyen olmayan akışkanlar için önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Navier-Stokes denklemleri olarak da bilinen Henri Navier (1785-1836) ve George Stokes (1819-1903) tarafından bulunan, sürtünme terimleri Newtonyen akışkanlara eklenerek momentum denklemleri oluşturulmuştur. Ludwig Prandtl (1875-1953) sınır tabakanın yüzeye yakın yerlerde de etkili olduğunu haricinde sürtünme kuvvetinin olmadığı durumda da Bernoulli denkleminin uygulanabileceğini göstermiş, bunu destekler mahiyette başta Theodore von Karman (1881-1963) ve Sir Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975)'un olmak üzere deneysel ve teorik birçok çalışma kaydedilmiştir [2].

Yukarıda da bahsedildiği üzere 1904 yılında Ludwig Prandtl sınır tabakası yaklaşımını ortaya atmıştır. Bu çalışma hiç şüphesiz belirli bir geometri etrafındaki hareket eden akışkanlarla ilgili araştırmaları ivmelendirmiştir. Nitekim Schlichting sınır tabakayla alakalı birçok temel çalışma örneklerini kitabında toplamıştır [3]. Sınır tabaka, polimerler üzerinde moleküler yapı ile akan madde özellikleri arasında ilgi kurmaya çalışan fiziksel kimya dalındaki araştırmacıları hareketlendirmiştir. Polimer malzemenin son yüzyılda özellikle ön plana çıkması girişimleri daha da artırmıştır.

Newtonyen akışkanlara hava, su, benzin, süt örnek olarak verilebilir. Newtonyen olmayan akışkanlar günlük hayatta sıklıkla karşılaşılabilen akışkan tipleridir. Yumurta akı, bal, bitkisel yağlar, ketçap, boya, tutkal vb. örnek verilebilir. Maddenin akış özelliklerini inceleyen Reoloji, Newtonyen olmayan akışkanları sınıflandırmıştır. Newtonyen olmayan akışkan yukarıdan döküldüğünde yerdeki çap artarken, momentumun korunumu prensibiyle açıklanan Newtonyen akışkanın yerdeki çapı küçülmektedir. Newtonyen olmayan akışkanların davranışlarını ifade etmek üzere birçok kayma gerilmesi modeli oluşturulmuştur. Power-law yada Ostwald de Walde), Cross, Ellis ve Sisko modelleri örnek olarak verilebilir.



Şekil 1.1 : Akışkan türleri.

Viskoziteyi hız değişiminin üssel bir ifadesi olarak tanımlayan Power-law modeli Newtonyen olmayan akışkanlarda sıklıkla uygulanmış ve geliştirilmiştir. Power-law modelinin uygulandığı birçok sınır tabakası çalışması yapılmıştır. Acrivos vd. ısı transferi içeren yatay düz bir plakadan akan akışı detaylı olarak ele almışlardır [4]. Schowalter iki ve üç boyutlu sınır tabakası denklemlerini geliştirerek bazı benzerlik çözümlerini elde etmiştir [5]. Lee ve Ames Power-law modelini de kullanarak kararlı yapıdaki sınır tabakası denklemlerini Lie Grup dönüşümü kullanarak kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denkleme indirgemiş ve bu denklemleri nümerik çözmüşlerdir [6]. Na ve Hansen Power-law akışkanlarına ait üç boyutlu sınır tabakası denklemlerinin benzerlik çözümlerini ayrıntılarıyla incelemişlerdir [7]. Mansutti ve Rajagopal Power-law akışkanları için gerilme bünye denklemini oluşturmuşlardır [8].

Power-law akış modelinde Newtonyen olmayan problemler içinde düşen film akışıyla alakalı çalışmalar da yapılmıştır. Bu çalışmalar ilk başlarda daha çok deneysel olarak ilerlemiştir [9-11]. Düşen film akış hidrodinamiği ile ilgili Power-law akış modelinde çalışmalar yapmıştır bu çalışmalar Andersson ve Irgens tarafından gözden geçirilmiştir [12]. Düşen film yatay akış durumunda mevcut literatürün evaporatörler hakkındaki kısmını kapsayan aynı zamanda tek düz boru, genişletilmiş yüzeyler, boru demetleri üzerindeki ısı transfer performansını etkileyen akış model çalışmalarını ve deneysel parametreleri de içeren çalışmalar da mevcuttur [13]. Power-law modeline uyan tipte film akışlarıyla alakalı yer çekimi etkisindeki durumlar için integral metodu ve benzerlik çözümleri kullanılarak yapılan çalışmalar da mevcuttur [14-19]. Sınır tabakası bölgesi, tamamıyla viskoz bölge ve gelişmiş akış olmak üzere üç temel bölgeye bölerek Andersson ve Irgens hızlanan film akışını incelemiştir [19, 20].

Bu çalışmada öncelikle Newtonyen olmayan film tipi akış için gerekli süreklilik, momentum, enerji denklemleri ve buna bağlı sınır koşulları verilmiştir. Akış Power-law modeline uygun olarak belirlenmiştir. Ardından yeni tanımlanan benzerlik yaklaşımıyla [35] denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Sınır koşullarında da yine gerekli dönüşüm uygulanmıştır.

Bilindiği gibi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar gibi farklı sayısal çözüm yöntemleri birçok farklı problem tipinde uygulanmışlardır. Kullanım oranı diğerlerine göre daha sık olan sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesi fazla sayıda elemana bölünerek çözüm hassasiyeti artmaktadır. Lakin artan sayı daha iyi bir sistem gereksinimi ve daha fazla hesap süresine neden olur. Çoğu mühendislik probleminde belli noktalardaki değerlerin gerçeğe yakın olması istenir.

Tüm bunlar hesaba katıldığında daha az grid ile kısa zamanda yeterli hassasiyette doğru sonuç verebilen yöntemler den biri olan DQ (Differential Quadrature) yöntemi çalışmada uygulanmıştır. DQ yönteminde fonksiyonun belli bir değişkene göre türevi, çözüm bölgesinde ağ oluşturarak bilinmeyen fonksiyon değerleriyle doğrusal bir toplam şeklinde ifade edilerek belirtilir. Sınır şartları da yöntemine uygun hale getirilerek oluşturulan denklem takımları çözülür.

Bunun yanında doğrusal olan ya da olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülerek daha basit şekilde çözüm arayan DT (Differential Transform) yöntemine çalışmada yer verilmiştir.

DQ ve DT yöntemleri ile elde edilen boyutsuz doğrusal ve doğrusal olmayan denklem takımları sınır şartlarına uygun olarak çözülmüş ve kaynak çalışma olan [35] ile kıyaslanmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

2. AKIŞ VE AKIŞKAN TÜRLERİ

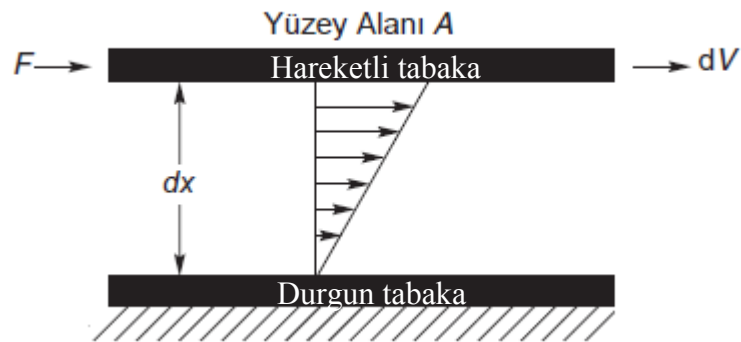
Temel olarak kesme ve uzama akışı denilen akışkanların komşu parçacıklarının hareketi ile alakadar akma çeşidi vardır. Komşu parçacıklar birbirlerinden uzağa ya da yakına akışıyla uzama, birbirlerinin üzerinden, yakınından geçerekse kesme akışı meydana getirirler.

Hareketli akışkan temasta olduğu akışkan ya da katıya enerji kaybederse yavaşlar, bu tip sürtünme kaynaklı enerji kaybı sebebiyle hız azalır, buna viskozite (ağdalılık, akmazlık) sebep olur. Viskozite akışkanını tüm parçacıkları için aynı mertebede etkilidir.

Akışkanın akması için kuvvet uygulanabilir bu da hız kazandırılması demektir. Hız sabitken viskozite artarsa kuvvet artar, hız azalıyorsa ve kuvvet sabitse yine viskozite artıyordur.

2.1 Newtonyen Akışkanlar

Aralarında belirli bir dx mesafesi olan iki ince tabaka arasında akışkan olduğu düşünülerek bir F kuvvetiyle kesmeye maruz bırakılırsa bu kesmeye eşit ve ters yönde bir iç sürtünme kuvvetiyle denge oluşur.



Şekil 2.1: Akışkan modeli.

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi üst kısımdaki alana etkiyen kuvvet kesme gerilimine (shear stress) sebep olacaktır. Yani hareketi başlatmak için birim alana etkiyen kuvvet;

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

τ : Kesme gerilimi (N / m^2)

F : Kuvvet (N)

A : Alan (m^2)

Şeklinde ifade edilir. Hız ve plakalar arasındaki mesafenin birbirlerine oranı ise kesme hızı (shear rate) olarak ifade edilir ve

$$\dot{\gamma} = \frac{dV}{dx} \quad (2.2)$$

$\dot{\gamma}$: Kesme hızı ($1 / s$)

dV : Hız (m / s)

dx : Tabalar arası mesafe (m)

olarak belirtilir. Elde edilen kesme gerilimi ve kesme hızının orantılı olarak artışı viskozite olarak tanımlanır, yani akışa karşı akışkanın göstermiş olduğu eğilim olarak nitelendirilir. Viskozite en yaygın ifadesiyle;

$$\eta_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.3)$$

Bağıntısıyla verilir. Newtonyen olmayan akışkanlar için şayet akışkan kesme hızıyla ilişkili ise η_a kesme hızından bağımsız ise η olarak sembolize edilir. Yukarıda tanımlanan viskozite ifadesi, mutlak viskozite (dinamik viskozite) olarak da tanımlanabilirken, kinematik viskozite ise dinamik viskozitenin (ρ) aynı sıcaklıktaki yoğunluğuna (ρ) bölünmesiyle;

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır [21].

2.2 Newtonyen Olmayan Akışkanlar

Newtonyen olmayan akışkanlar yukarıda irdelenen viskoziteyi oluşturan kesme gerilimi ile kesme hızı oranı değişiminin sıfır ya da doğrusal olmadığı akışkan türüdür. Viskozite belirli bir sıcaklık ve basınç değerinde sabit olmazken akışkanın kesme hızı, akış geometrisi ve akışkan elemanının kinematik geçmişine bağlı olur. Bu noktadan hareketle temel olarak üç sınıfta değerlendirme yapılması mümkündür.

- i) Belirli bir andaki kesme değeri sayesinde kesme hızının herhangi bir noktada belirlenebildiği akışkanlar zamandan bağımsız olarak nitelendirilirler. Elastik olmayan, Genelleştirilmiş Newtonyen, Tamamıyla Viskoz gibi adlandırmalar da yapılabilir.
- ii) Zamana bağlı olan akışkanlar kesme hızı ile kesme gerilimi arasındaki ilişki, kesme süresi ve kinematik özelliklere bağlı daha karmaşık akışkanlar olarak ifade edilebilirler.
- iii) Elastik katı ve ideal akış özelliklerini gösteren ve deformasyondan sonra kısmi elastikliğin geri kazanılabildiği yapılar viskoelastik akışkan olarak tanımlanmaktadır [21].

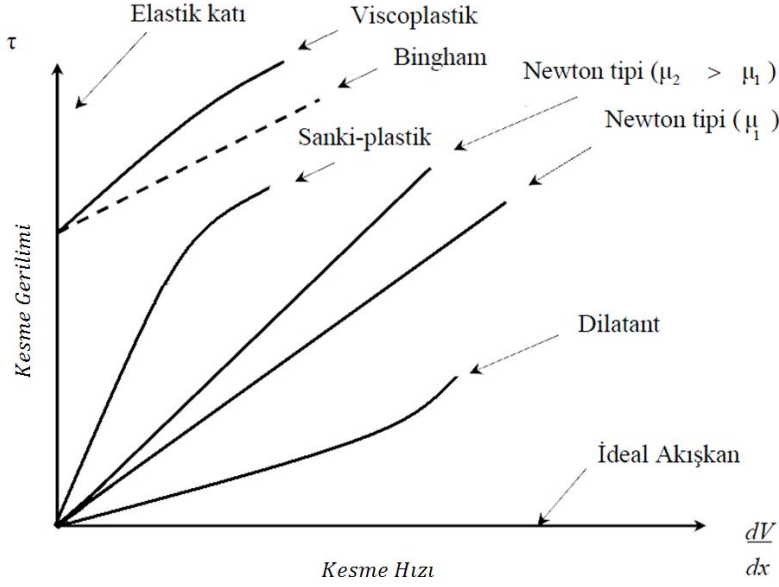
2.2.1 Zamandan Bağımsız Akış Davranışı

Bu tipte malzemelerin akış davranışı basit bir kesme kuvvetine maruz bırakıldığında şu şekilde ifade edilebilir;

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \text{ veya tersi olarak } \tau = g(\dot{\gamma}) \quad (2.5)$$

İfadeye bakıldığında belirli bir noktadaki $\dot{\gamma}$ yani kesme hızı değeri yine bu noktadaki τ yani kesme gerilimi ile belirlenebilir şeklinde çıkarım yapılabilir. Bu türe uyan akışkanlar ise üç gruba ayrılabilir [21]:

- i) Kesme İncelmesi (Sanki-Plastik)
- ii) Kesme Kalınlaşması (Dilatant)
- iii) Viskoplastik Akışkan (Viscoplastic Fluid)



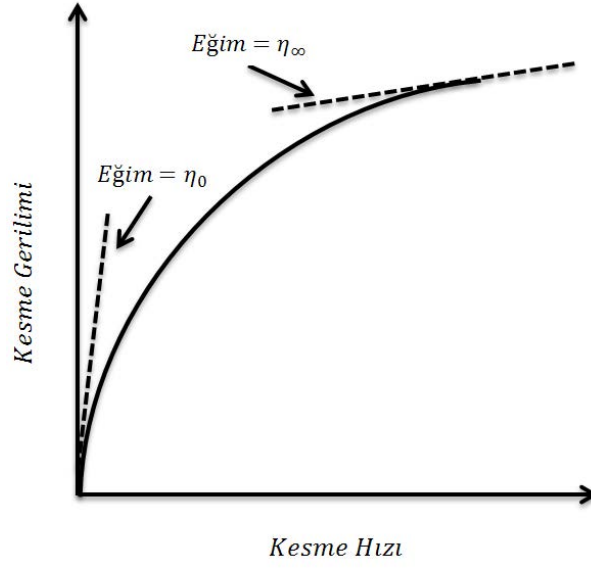
Şekil 2.2 : Zamandan bağımsız akışkanlar.

2.2.1.1 Kesme İncelmesi (Sanki-Plastik)

Zamana bağlı olmayan en yaygın Newtonyen olmayan akışkan sanki-plastik ya da yalancı plastik (pseudoplastik) olarak adlandırılan kesme incelmesi olarak da nitelenen tipidir. Azalan bir viskozite ve artan bir kesme gerilimi ile ifade edilir. Kesme incelmesi davranışı sergileyen çoğu polimer çözeltisi ve eriyik yüksek mertebelerde kesme hızına maruz kalınca Newtonyen davranış gösterirler. Kesme incelmesi davranışlı akışkanın viskozitesi artan kesme hızıyla azalır. Doğal ve sentetik zamlar örnek olarak verilebilir.

Ayrıca bu tip akışkan davranışlarında kritik bir kesme değeri vardır ve bu nedenle viskoplastik olarak adlandırılmıştır. Bu davranışta olan malzemeye bu kritik değerden düşük gerilim uygulandığında katı, büyük gerilimde ise akış görülür.

- i) Kesme hızının sıfır olduğu yerde limit viskozite (η_0) kesme hızıyla ile sabit değişim gösterir.
- ii) Viskozitenin kesme hızı ile değiştiği ve Power-law modelinin uygulanabildiği bölge orta kısım
- iii) Kesme hızının sonsuza gittiği yerde limit viskozite (η_∞) kesme hızıyla ile sabit değişim gösterir [21].

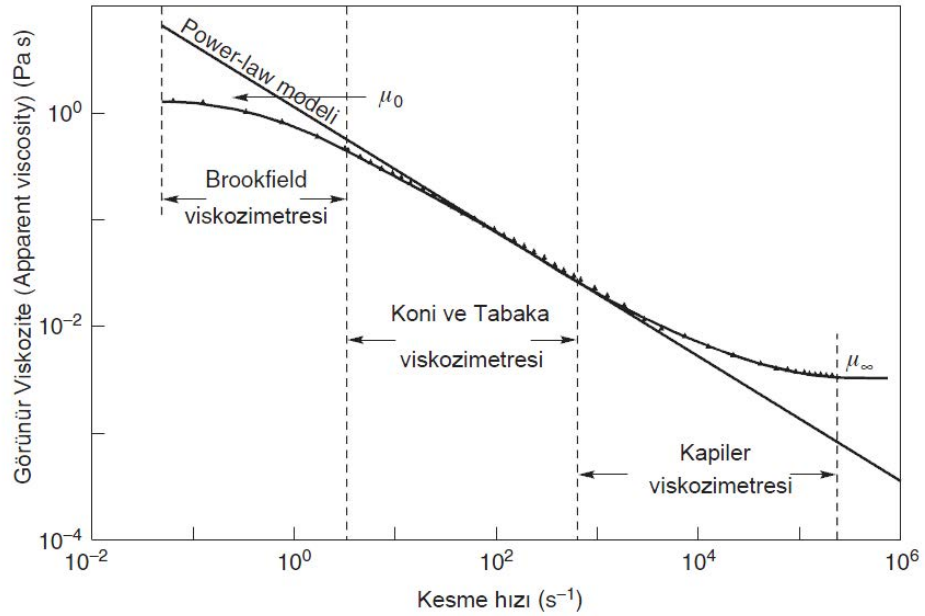


Şekil 2.3 : Kesme İncelmesi Davranışı.

Bu tip akış davranışlarının modellenmesinde çeşitli matematiksel modeller kullanılmıştır.

Power-law yada Ostwals de Waele Modeli

Kesme incelmesi davranışındaki bir akışkan kesme gerilimi ile kesme hızı grafiğinin logaritmik formunda belirli bölgede doğrusal olarak yer alır, bu kısımda Power-law eşitliği geçerli olabilir.



Şekil 2.4 : Power-law Modeli (Ostwald de Waele Modeli) [21].

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \quad (2.6)$$

K : kıvamlılık parametresi (büyükse daha viskoz) ($N / m^2 s^n$)

n : Power-law üssel sabiti

Eşitlikte yer alan üssel sabit Newtonyen akışkandaki sapmanın bir derecesidir. Newtonyen akışkan için değeri 1 olmakla birlikte sanki-plastik olanlar için 0 ile 1 arasında, kesme kalınlaşması için 1'den daha yüksek olarak tanımlanır.

Kesme incelmesi davranışındaki akışkanlar için basit bir model olan bu model belirli aralıktaki kesme hızlarında kullanılır. Sıfır veya sonsuz değerlerindeki kesme hızlarında bulunan limit viskozitelerinin belirlenmesinde kullanılmaz [21].

Carreau Modeli

Power-law modeline göre daha geniş bir kesme hızı aralığında polimer akış davranışlarını temsil eden bir modeldir. Düşük kesme hızlarında polimer eriyik viskozitelerini ifade etmektedir.

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.7)$$

η_0 : Kesme hızının sıfır olduğu yerde limit viskozite

η_{∞} : Kesme hızının sonsuza gittiği yerde limit viskozite

λ : Doğal zaman (natural time) viskozitenin azalmaya başladığı kesme hızının (-1). kuvveti yani tersidir.

Ayrıca yukarıdaki ifade viskozite bölgesi ile kuvvet yasası bölgesi arasındaki geçişi ifade eden a parametresini kullanan Carreau-Yasuda modelinin özel hali olarak düşünülebilir. Geçiş bölgesi $a < 1$ iken uzarken, $a > 1$ iken kısalmır [21].

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right)^{\frac{n-1}{a}} \quad (2.8)$$

Cross Modeli

Newtonyen akışkanları $k \rightarrow 0$ temsil ederken, yüksek kesme hızlarında ise Power-Law modeline yaklaşmaktadır [21].

$$\eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + k(\dot{\gamma})^2} \quad (2.9)$$

η_0 : Kesme hızının sıfır olduğu yerde limit viskozite

η_{∞} : Kesme hızının sonsuza gittiği yerde limit viskozite

Ellis Modeli

Düşük kesme hızlarında Power-law modelinden fark edilir derecede ayrılır, bu nedenle bu modelin tercih edilmesi uygun olabilir [21].

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + k \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}} \quad (2.10)$$

α : Kesme incelmesinin ölçüsü (büyükse, yüksek kesme incelmesi)

$\tau_{1/2}$: Kesme hızının sıfır olduğu, viskozite değerinin yarısındaki ($\eta_0 / 2$) kesme değeri

2.2.1.2 Kesme Kalınlaşması (Dilatant Davranış)

Sanki-plastik akış davranışının tersini sergilemektedir. Kesme gerilimi arttığı takdirde viskozite de artmaktadır. Akışa karşı direnç artmakta olan hız ile artar, yani karıştırdıkça direncin artacağı görülür denilebilir. Süspansiyonlar, yağlı boyalar örnek olarak verilebilir. Bu akış tipinde akışkan elemanları arasında sıkı bir yerleşme vardır. Parçacıklar arasındaki boşluk kesme hızının artışıyla artmaktadır. Bu akış grafiği incelenirse kesme gerilimi ile kesme hızı grafiği içbükey bir görünümündedir. Kesme kalınlaşması esasen uygulanan kesmeden dolayı oluşan bir sonuçtur yani kesme ile yapısal birimlerin büyüklüklerindeki artmadan ötürü oluşur. Dilatant davranış hacmindeki artışı da içerdiğinden dolayı kesme kalınlaşması davranışını tanımlamak için kullanmak doğru değildir [23].

2.2.1.3 Viskoplastik Akışkan (Viscoplastic Fluid)

Bu akış tipinde akışkan akmaya başlamadan veya deforme olmadan önce gerekli bir başlangıç akma gerilimi varlığıyla ifade edilir. Uygulanan gerilim bu başlangıç geriliminden daha düşükse katı, daha yüksekse doğrusal veya doğrusal olmayan bir davranış sergilerler. Eğer doğrusal bir ilerleme varsa Bingham Plastik, doğrusal değilse sanki-plastik davranış görülmektedir [21].

Bingham Plastic Modeli

Malzeme akmaya başlamadan evvel gerekli belli bir başlangıç gerilim değerine sahip akışkan davranışını tanımlamak için kullanılır.

$$\tau = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma} \quad \tau > \tau_0 \text{ için} \quad (2.11)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \tau < \tau_0 \text{ için}$$

Kesme gerilimi ile kesme hızına ait grafikten eğrinin ekstrapolasyon değerleri vasıtasıyla Bingham plastik viskozitesi ve kritik kesme gerilimi değerleri belirlenebilir [21, 22].

τ_0 : Kritik kesme gerilimi

η_p : Bingham plastik viskozitesi

Herschel-Bulkley Modeli

Bu model Newtonyen, Bingham Plastik ve Power-law akışkanlarını tanımlayan üç parametreye dayalı bir modeldir:

$$\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n \quad \tau > \tau_0 \text{ için} \quad (2.12)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \tau < \tau_0 \text{ için}$$

τ_0 : Kritik kesme gerilimi (başlangıç gerilimi)

K : kıvamlılık parametresi (büyükse daha viskoz) ($N / m^2 s^n$)

n : akış davranış sabiti

$\dot{\gamma}$: Kesme hızı ($1 / s$)

K ve n değerleri $\log(\tau - \tau_0)$ ile $\log \dot{\gamma}$ eğrisinin ekstrapolasyon ve eğim değerleri vasıtasıyla belirlenebilir. Bu model yukarıda da belirtildiği gibi $\tau_0 = 0$ iken Power-Law modelini $n = 1$ iken Bingham Plastik modelini temsil eder. Bingham başlangıç gerilimi ile $n = 1$ ile indirgenmiş bu modelin başlangıç gerilim değerleri farklıdır [21].

Casson Modeli

Yazıcı mürekkeplerinin davranışlarını ifade etmek için geliştirilen bu iki parametrelili yapı esaslı model farklı dispersiyon sistemleri için de kullanılır.

$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + (\eta_\infty \dot{\gamma})^{1/2} \quad \tau > \tau_0 \text{ için} \quad (2.13)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \tau < \tau_0 \text{ için}$$

τ_0 : Kritik kesme gerilimi (başlangıç gerilimi)

η_∞ : Kesme hızının sonsuza gittiği yerde limit viskozite

$\dot{\gamma}$: Kesme hızı ($1/s$)

Kesme gerilimi ile kesme hızının kareköklerinin grafiğinde, limit viskozite eğimli ve ekstrapolasyonu başlangıç gerilimi karekökü olan bir doğru elde edildiğinde bu modele uygun davranışlı bir malzemedir. Kan, yoğurt, domates püresi, erimiş çikolata örnek olarak gösterilebilir [21].

2.2.2 Zamana Bağlı Akış Davranışı

Zamana bağlı kesme incelmesi ve kesme kalınlaşması davranışını gösteren akışkanlarda görülmektedir.

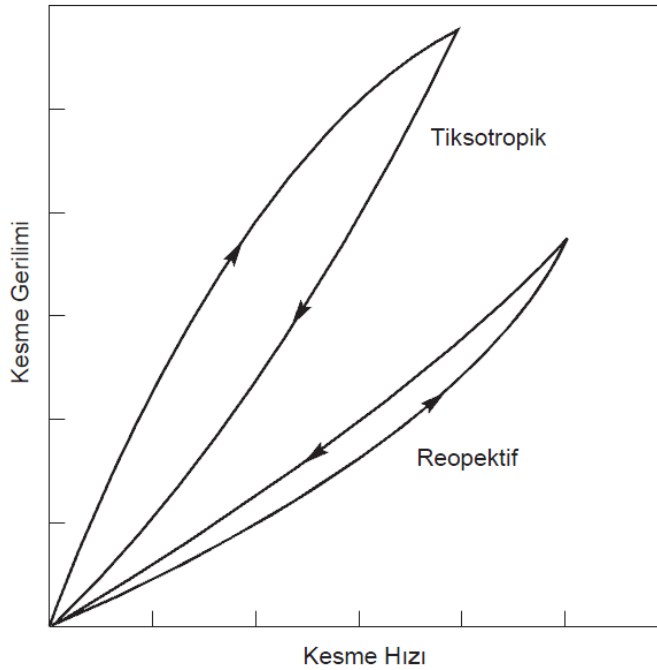
2.2.2.1 Tiksotropik

Tiksotropik akış davranışı zamana bağlı kesme incelmesi davranışını gösteren akışkanlarda görülmektedir. Kolloid biriminde tiksotropi en eski reolojik olaylardan biri olarak belirtilir. Tiksotropide gerilim ile viskoz özelliğin geri dönüşümlü bir biçimde azaldığı kaydedilmektedir. Kalkan gerilimle eski hale geri dönüşüm yaşanır. Bu davranışta olan akışkan disperse faz içeren heterojen yapılardır. Endüstride ve doğal sistemlerde oldukça yaygın olan Tiksotropik sistemlerde parçacıkların silindir,

çubuk, disk tiplerinde olabileceği düşünülür. Tiksotropi terim olarak Peterfi'nin hücrede protoplazmanın sıvılaşabileceğini tespit etmesiyle Freundlich tarafından önerilmiştir. Thixis (Yunanca sallama, çalkalama) ve trepo (Yunanca dönme, değişme) kelimelerinin birleşmesinden oluşmuştur.

Bu özellikte olan sistemler jel-sol-jel dönüşüme sahip dispersiyonlardır. Gerilim durduğunda katı, uygulandığı zaman akış başlar jelden sole doğru bir gidiş vardır gerilme uygulaması sonlandırılırsa yapı eski hale döner.

Boşluk dolgulu bir ağ yapısında flokların oluşumuna sebep olan zayıf çekim kuvvetiyle bağlı tanecikler arası bağlar gerilimlerle akış boyunca kırılabilir kadar zayıf özelliktedir. Gerilme hızı artınca boyutta azalma ile floklarda kırılmalar oluşur, bu da viskozitenin azalarak tiksotropik davranışı ortaya çıkarır. Azalan kesme hızı ise flokları büyütecek ve durgun hale gelen akışta ise ağın yeniden oluşması sağlanarak eski hale dönüş gerçekleşecektir [21].



Şekil 2.5 : Tiksotropik Akış Davranışı [21].

2.2.2.2 Antitiksotropik ve Reopektif

Yukarıda irdelenen Tiksotropi kesme incelmesi davranışı olarak nitelenirken, antitiksotropik ise kesme kalınlaşması olarak ortaya çıkmaktadır. Reopektif davranış olarak önceden bilinmekte olan davranış artık anti tiksotropi olarak nitelenmektedir.

Reopeksi ile anti tiksotropi bazı durumlarda birbirleriyle karıştırılabilmektedir, ama reopekside çalkalama uygulandığında solden jele doğru gidiş kendi halinde olan sistemdeki jele doğru gidişten daha hızlı olarak görülmektedir [21,22].

Weltman Modeli

Bu model tiksotropik ve antitiksotropik davranışını karakterize etmek için kullanılmaktadır.

$$\tau = A - B \log t \quad (2.14)$$

τ : Kesme gerilimi

A ve B : $t=1$ sn deki gerilim değeri olan sabitler

t : Süre (s)

Weltman modeline göre kesme geriliminin zamanın logaritma değerine karşılık eğrisi, $-B$ eğimli ve ekstrapolasyonu A olan doğru vermektedir. Tiksotropik davranış için B negatif, antitiksotropik içinse B pozitif olur [22].

Tiu ve Boger Modeli

Tiu ve Boger tarafından kritik kesme gerilimine sahip tiksotropik davranışını incelemek için daha ayrıntılı bir model geliştirilmiştir. Modifiye edilmiş Herschel-Bulkley modelinin değiştirilmiş halinden yararlanarak oluşturulan bu model kesme gerilimini zamana bağlı olarak [22];

$$\tau = \lambda \left[\tau_0 + K(\dot{\gamma})^n \right] \quad (2.15)$$

τ_0 : Kritik kesme gerilimi (başlangıç gerilimi)

K : kıvamlılık parametresi (büyükse daha viskoz) ($N / m^2 s^n$)

n : akış davranış sabiti

$\dot{\gamma}$: Kesme hızı ($1 / s$)

λ : Zamana bağlı bir parametre

3. DÜŞEN FİLM AKIŞI

Düşen film akışı günümüzde kullanımı yaygınlaşan evaporatif kondenserler ve kapalı tip soğutma kulelerinde, absorpsiyonlu soğutma başta olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır. Düşen film akışı bahsedilen sistemlerin ısı değiştiricilerinde, absorpsiyonlu soğutma sistemlerinin absorber ve evaporatör kısmında kullanılır. Islaklık alanını en az düzeyde su kullanarak sağlamak buharlaşan sıvı miktarını, ısı ve kütle transferini artırmaktadır. Benzer ifadesiyle düşen film akışta ısı ve kütle transfer alanını arttırmak ısı ve kütle transferini artırmakta, başka bir ifade ile en az sıvı miktarıyla, ıslaklık alanını arttırmak büyük önem taşımaktadır. Sonuç olarak da sistemin işletme maliyeti ve ilk yatırım maliyeti gibi konularda tasarruf edilmesi sağlanacaktır.

Isıya karşı duyarlı malzemelerde ısı transferi boyunca, kısa kalış süresi, yakın sıcaklık kontrolü ancak katı bir yüzey boyunca ince bir düşen film akışıyla sağlanabilir. Bu tarz bir soğutma yiyecek ve polimer işleme, damıtma, evaporator (buharlaştırıcı) sistemleri gibi birçok endüstriyel uygulamada karşılaşılabilecek bir durumdur. Düşük sıcaklık farkı ve kütle akışında yüksek ısı transfer oranı yakalamak birçok çalışmaya sebep olan bir konudur.

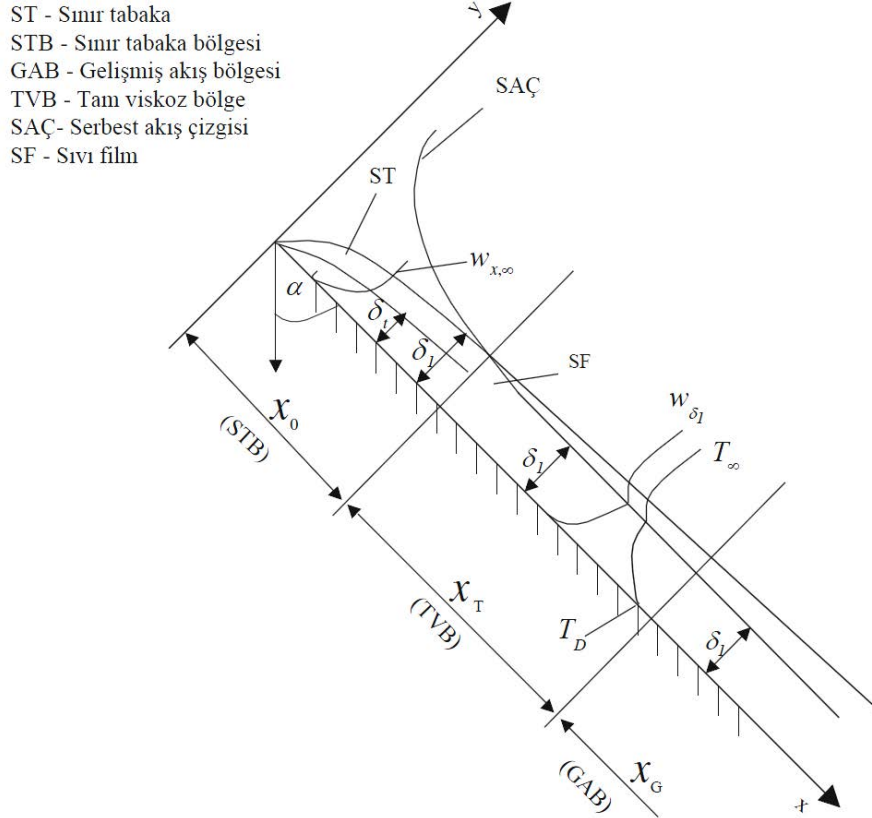
Newtonyen olmayan Power-law akış modeline uyan problemler birçok kitapta irdelenmiştir[24-28]. Sayısal yöntemlerin Newtonyen olmayan akışlarda uygulanmasıyla alakalı da alakalı yayınlar da mevcuttur[29,30]. Power-law akış modeline uyan düşen film akış hidrodinamiği ile ilgili Andersson ve Irgens yapılan çalışmaları gözden geçirmiştir[9]. Lakin Düşen film akışta ilk çalışmalar daha çok deneysel olarak yer almaktadır[10-12]. Ayrıca çalışmalarda kullanılan akışkana, boru malzemesine ve sayısına, dizilişine dair farklı incelemeler yapılmıştır. Birden fazla yatay boru üzerinden düşen sıvı film akışını damlama karakteristiği düşünülerek deneysel olarak incelenmiştir[31]. Yatay ve hareketli borular üzerine düşen laminar film akışı için İntegral metodunu kullanarak enerji denklemlerinin çözüp bir noktadaki laminar film kalınlığını Reynolds ve Arşimet sayısının (Ar) ve yatay

borudaki açısal pozisyonun fonksiyonu olarak çözüme kavuşturulmuştur [32]. Yatay tipte düşen film evaporatörler hakkındaki mevcut literatürü kapsayan aynı zamanda tek düz boru, genişletilmiş yüzeyler, boru demetleri üzerindeki ısı transfer performansını etkileyen akış model çalışmalarını ve deneysel parametreleri de içeren çalışma da mevcuttur[33]. Yüksek viskoziteli düşen film akışındaki su gliserin karışımı gibi akışkanların davranışını çalışılmıştır[34]. Yer çekimi etkili Power-law modeline uyan tipte film akışlarıyla alakalı integral metodu ve benzerlik çözümleri kullanılarak yapılan teorik çalışmalar da olmuştur[14-19]. Bunun yanında film akışının reolojik özelliklerinin hidrodinamik giriş uzunluğuna etkisi ortaya çıkarılmıştır[19]. Farklı bir yaklaşımsa Andersson ve Irgens tarafından hızlanan film akışını sınır tabakası bölgesi, tamamıyla viskoz bölge ve gelişmiş akış olmak üzere üç temel bölgeye bölerek inceleme yapmışlardır[19, 20]. Daha sonra Power-law modeli için sınır tabakası momentum denklemini Falkner-Skan tipinde adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek üzere bir benzerlik yaklaşımı önermişlerdir. Ardından üretilen bu denklemler Newton iterasyon yöntemiyle birlikte 4. Mertebeden klasik Runge–Kutta temelli shooting tekniği kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür.

Yakın bir zamanda ise yine Andersson ve Shang tarafından yeni bir benzerlik yaklaşımı hızlanan Newtonyen olmayan film akışı için geliştirilmiştir. Power-law modeline uyan eğik yüzey üzerindeki akış hareketinin hidrodinamiğini temsil eden kısmi diferansiyel denklemler hız bileşeni yaklaşımıyla iki adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüştür. Sıfır ile doksan derece arasında herhangi bir eğim değerinde geçerli olmasına rağmen tek parametrelili problem sadece Power-law modelin indeksine bağlıdır. Buna rağmen, yüzey sürtünme katsayısı ve hız bileşenleri gibi eğime bağlı parametreler düşey ve açılı durumlar arasında türetilenmiştir. Power-law indeksinin 0.1 ile 2 değeri arasında sayısal çözümlemelere yer verilmiştir. Bu yöntem sayesinde sınır tabakasına giren kütle debisi, sınır tabaka bölgesi uzunluğu gibi hesap güçlüğü yaşanan değerlerin saptanması sağlanmıştır[35].

3.1 Fiziksel model ve Denklem Oluşturulması

Eğimli bir yüzey üzerinde hızlanan Newtonyen olmayan Power-law modeline uygun laminar bir akış problemi için akışkanın sıkıştırılmaz ve elastik olmadığı kabul edilmiştir.



Şekil 3.1 : Hızlanan film akış modeli.

Şekil 3.1’ de gösterilen akış için temel kütle, momentum ve termal enerji denklemleri viskoz sınır tabaka için;

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = g \cos \alpha + n \frac{K}{\rho} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

Sınır koşulları ise:

$$\begin{aligned} y = 0; w_x &= 0, w_y = 0, T = T_D \\ y = \delta_l; w_x &= w_{x,\infty} \\ y = \delta_l; T &= T_{\infty} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada;

w_x, w_y : x ve y yönlerindeki hız bileşenleri

g : Yerçekimi ivmesi

α : Eğimli yüzeyin düşey eksenle yaptığı açı

δ_1, δ_t : Momentum ve termal sınır tabaka kalınlıkları

$w_{x,\infty}, T_\infty$: Sınır tabaka dışındaki hız ve sıcaklık değerleri

T_D : Eğimli yüzeydeki duvar sıcaklığı

K, ρ, n, C_p, λ : akış özelliklerini temsil eden büyüklükler sırasıyla (Katılık sabiti, yoğunluk, Power-law indeksi, özısı, ısı iletkenlik) ayrıca sabit oldukları varsayılmıştır.

Sınır tabakadaki w_x hız bileşeni dış akış hızına ulaştığında;

$$w_{x,\infty} = \sqrt{2gx \cos \alpha} \quad (3.5)$$

değerini alır.

Yukarıda verilen denklemdeki Power-law indeksi $n=1$ olduğu durum Newtonyen akışı temsil etmektedir. Eğer n değeri 1'den büyükse o zaman daha evvelde bahsedilen kesme kalınlaşması ya da dilatant akışkanı temsil etmektedir. Bu değer $n=1$ 'den küçük olduğu durum da kesme incelmesi yani sanki-plastik (yalancı plastik) akışkan tipini simgeler.

3.2 Yeni Benzerlik Dönüşümü

Bu benzerlik dönüşümü literatür araştırmalarında değinilen Anderson ve Irgens [20] tarafından öne sürülen dış akış hızı Falkner-Skan tipi $w_{x,\infty} \propto x^m$ dış akım hızı Power-law modeline uyan akışkan için bile momentum sınır tabakası denklemi dönüşümünde benzerlik çözümüne izin verir. Bundan ötürü daha genel bir Falkner-Skan tipi dönüşüm Anderson ve Irgens [20,36] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Shang ve Anderson tarafından Falkner-Skan tipindeki gibi bir akım fonksiyonu gerektirmeyen Newtonyen olmayan Power-law modeline uygun akışkanın kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümünde yeni bir dönüşüm yolu izlenmiştir [35]. Lakin bu dönüşümde de Power-law indeksinin $n=1$ olduğu durumda sıcaklık

benzerlik çözümüne gidilebildiği için sanki-benzerlik (pseudo-similarity) dönüşümü Newtonyen olmayan Power-law modeline uygun düşen film akışkana uygulanmıştır[37].

Kaynak [37]' de yer alan yeni boyutsuz değişkenler şu şekilde belirtilmiştir:

$$\eta = \frac{y}{x} Re_x^{1/(1+n)} \quad (3.6)$$

$$\epsilon = \frac{x}{x_0} \quad (3.7)$$

Burada x_0 sınır tabakası bölgesinin uzunluğunu temsil eder.

$$Re_x = \frac{x^n w_{x,\infty}^{2-n} \rho}{K} \quad (3.8)$$

Re_x Genelleştirilmiş bölgesel Reynolds sayısıdır. Boyutsuz hızlar ise sadece η ' ya bağlı olarak;

$$W_x(\eta) = \frac{w_x}{w_{x,\infty}} = \frac{w_x}{\sqrt{2gx\cos\alpha}} \quad (3.9)$$

$$W_y(\eta) = \frac{w_y}{w_{x,\infty}} = \frac{w_y}{\sqrt{2gx\cos\alpha}} Re_x^{1/(1+n)} \quad (3.10)$$

şeklinde verilmiştir. Boyutsuz sıcaklık ifadesi ise hem η hem de ϵ 'a bağlı olarak;

$$\theta(\eta, \epsilon) = \frac{T - T_\infty}{T_D - T_\infty} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Problem için daha önceden verilen kütle momentum ve enerji denklemlerinde boyutsuzlaştırma yapılmak istenirse öncelikle boyutsuz parametrelerin türevleri ele alınmalıdır;

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} Re_x^{1/(1+n)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \left(\frac{x^n w_{x,\infty}^{2-n} \rho}{K} \right)^{1/(1+n)} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{n}{2(n+1)} \frac{\eta}{x} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} R e_x^{1/(1+n)} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{1}{x_0} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \square}{\partial y} = \frac{\partial \square}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \square}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$$

$$;\square = \eta \text{ ve } \epsilon' \text{ a bağılı fonksiyon } (\theta \text{ gibi}) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \square}{\partial x} = \frac{\partial \square}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \square}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \bigcirc}{\partial x} = \frac{\partial \bigcirc}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$;\bigcirc = \text{Sadece } \eta' \text{ ya bağılı fonksiyon } (w_x, w_y \text{ gibi}) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \bigcirc}{\partial y} = \frac{\partial \bigcirc}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Elde edilen boyutsuz değişkenlerin türevleri sırasıyla denklemlerdeki her bir terim için kullanılacak ve nihai olarak boyutsuz kütle, momentum ve enerji ifadeleri elde edilecektir. Buradan hareketle Denklem (3.9) kullanılarak;

$$w_x = W_x(\eta) \sqrt{2gxcos\alpha}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} &= \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{2gxcos\alpha} + \sqrt{\frac{gcos\alpha}{2x}} W_x(\eta) \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} &= \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \left(-\frac{n}{2(n+1)} \frac{\eta}{x} \right) \sqrt{2gxcos\alpha} + \sqrt{\frac{gcos\alpha}{2x}} W_x(\eta) \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} &= -\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \left(\frac{n}{(n+1)} \eta \right) \sqrt{\frac{gcos\alpha}{2x}} + \sqrt{\frac{gcos\alpha}{2x}} W_x(\eta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Boyutsuz hızın x bileşeninin x'e göre türevi bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_x}{\partial y} &= \sqrt{2gxc\cos\alpha} \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{2gxc\cos\alpha} \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \\ \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}} \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} Re_x^{1/(1+n)}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Hızın x bileşeninin y'ye göre türevi bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}} \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} Re_x^{1/(1+n)} \right) \text{ olarak düşünülürse;} \\ \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}} Re_x^{1/(1+n)} \frac{d^2 W_x(\eta)}{d\eta^2} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \\ \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} &= \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}} \frac{1}{x} Re_x^{2/(1+n)} \frac{d^2 W_x(\eta)}{d\eta^2}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Hızın x bileşeninin y'ye göre ikinci mertebeden türevi bulunur. Denklem (3.10) kullanılarak;

$$w_y = W_y(\eta) \sqrt{2gxc\cos\alpha} Re_x^{-1/(1+n)}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_y}{\partial y} &= \sqrt{2gxc\cos\alpha} Re_x^{-1/(1+n)} \frac{dW_y(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial w_y}{\partial y} &= \sqrt{2gxc\cos\alpha} Re_x^{-1/(1+n)} \frac{dW_y(\eta)}{d\eta} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \\ \frac{\partial w_y}{\partial y} &= \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}} \frac{dW_y(\eta)}{d\eta}\end{aligned}\quad (3.21)$$

hızın y bileşeninin y'ye göre türevi bulunur.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \epsilon} = (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

olmak üzere;

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -(T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \frac{n}{2(n+1)} \frac{\eta}{x} + (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{1}{x_0} \quad (3.22)$$

Sıcaklığın x e göre türevi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial T}{\partial \epsilon} &= (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

sıcaklığın y'ye göre türevi bulunur.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \right)$$

olarak düşünülebilir.

$$\frac{\partial \square}{\partial y} = \frac{\partial \square}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \square}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$$

olarak verilmişti.

$$\square = (T_D - T_\infty) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)}$$

kabul edilirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} &= \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} (T_D - T_\infty) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{x} Re_x^{1/(1+n)} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} &= \frac{1}{x^2} Re_x^{2/(1+n)} (T_D - T_\infty) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Kısmi türevler alındıktan sonra denklemlerde yerlerine konulurlarsa İlk denklem olan (3.1) ifadesi:

$$\left(-\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}\left(\frac{n}{(n+1)}\eta\right)\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2x}}+\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2x}}W_x(\eta)\right)+\left(\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}}\frac{dW_y(\eta)}{d\eta}\right)=0 \quad (3.25)$$

İkinci Denklem olan (3.2) ifadesi:

$$\begin{aligned} & \left(W_x(\eta)\sqrt{2g\cos\alpha}\right)\left(-\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}\left(\frac{n}{(n+1)}\eta\right)\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2x}}+\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2x}}W_x(\eta)\right)+ \\ & \left(W_y(\eta)\sqrt{2g\cos\alpha}Re_x^{-1/(1+n)}\right)\left(\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}}\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}Re_x^{1/(1+n)}\right)=g\cos\alpha+ \\ & n\frac{K}{\rho}\left(\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}}\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}Re_x^{1/(1+n)}\right)^{n-1}\left(\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{x}}\frac{1}{x}Re_x^{2/(1+n)}\frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Üçüncü Denklem olan (3.3) ifadesi:

$$\begin{aligned} & \left(W_x(\eta)\sqrt{2g\cos\alpha}\right)\left(-(T_D-T_\infty)\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\eta}\frac{n}{2(n+1)}\frac{\eta}{x}+(T_D-T_\infty)\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\epsilon}\frac{1}{x_0}\right) \\ & +\left(W_y(\eta)\sqrt{2g\cos\alpha}Re_x^{-1/(1+n)}\right)\left((T_D-T_\infty)\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\eta}\frac{1}{x}Re_x^{1/(1+n)}\right) \\ & =\frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\frac{1}{x^2}Re_x^{2/(1+n)}(T_D-T_\infty)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\eta}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Şeklinde elde edilmiş olur. Denklem (3.25) düzenlenirse:

$$W_x(\eta)-\frac{n}{(n+1)}\eta\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}+2\frac{dW_y(\eta)}{d\eta}=0 \quad (3.28)$$

Denklem (3.26) düzenlenirse:

$$\begin{aligned} & W_x(\eta)\left(W_x(\eta)-\frac{n}{(n+1)}\eta\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}\right)+2W_y(\eta)\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \\ & =1+2n\left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta}\right)^{n-1}\frac{d^2W_x(\eta)}{d^2\eta} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Denklem (3.27) düzenlenirse:

$$\left(-\frac{n}{2(n+1)}\eta W_x(\eta)-W_y(\eta)\right)\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\eta}+\epsilon W_x(\eta)\frac{\partial\theta(\eta,\epsilon)}{\partial\epsilon}=\frac{1}{Pr_x}\frac{\partial^2\theta(\eta,\epsilon)}{\partial^2\eta} \quad (3.30)$$

Denklem (3.30) da Pr_x şu şekilde ifade edilir.

$$Pr_x = \frac{xw_{x,\infty}}{a} Re_x^{-2/(1+n)} \quad (3.31)$$

Burada a parametresi termal yayıcılık (thermal diffusivity):

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (3.32)$$

Sınır koşulları:

$$\begin{aligned} \eta = 0; W_x(\eta) = 0, W_y(\eta) = 0, \theta(\eta, \epsilon) = 1, \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} = 0 \\ \eta = \eta_{\delta_1}; W_x(\eta) = 1 \\ \eta = \eta_{\delta_1}; \theta(\eta, \epsilon) = 0, \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde verilir. Bakıldığında (3.33) denklemi yani enerji ifadesi η ve ϵ ' e bağlı iki boyutlu bir ifadedir. İfadeyi kaynak [37]'de yer aldığı gibi tek boyuta indirmek içinse şu işlemler yapılır;

$$f(\eta, \epsilon) = \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} \quad (3.34)$$

olarak tanımlanır, böylece nihai olarak verilen üçüncü denklem yeni boyutsuz parametreyle;

$$\left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + \epsilon W_x(\eta) f(\eta, \epsilon) = \frac{1}{Pr_x} \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \quad (3.35)$$

olarak yazılır ve ϵ 'a göre türev alınır;

$$\begin{aligned} \left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + W_x(\eta) f(\eta, \epsilon) + \epsilon W_x(\eta) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \\ = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{Pr_x} \right) \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} + \frac{1}{Pr_x} \frac{\partial^2 f(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \end{aligned} \quad (3.36)$$

haline dönüşür burada $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{Pr_x} \right)$ parametresinin türev alınmış hali yazılmamıştır,

ayrıca ifade etmek gerekirse;

$$\begin{aligned}
Pr_x &= \frac{x\sqrt{2gxcos\alpha}}{a} \left(\frac{x^n \left(\sqrt{2gxcos\alpha} \right)^{2-n} \rho}{K} \right)^{-2/(1+n)} \\
Pr_x &= \frac{x^{\frac{n-1}{2(n+1)}} \sqrt{2gxcos\alpha}}{a} \left(\frac{x^n \left(\sqrt{2gxcos\alpha} \right)^{2-n} \rho}{K} \right)^{-2/(1+n)} \\
\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{Pr_x} \right) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\left(\frac{x^{\frac{n-1}{2(n+1)}} \sqrt{2gxcos\alpha}}{a} \right)^{-1} \left(\frac{x^n \left(\sqrt{2gxcos\alpha} \right)^{2-n} \rho}{K} \right)^{2/(1+n)} \right) \\
\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{Pr_x} \right) &= -\frac{n-1}{2(n+1)} x_0 x^{\frac{1-3n}{2(n+1)}} \left(\frac{\sqrt{2gxcos\alpha}}{a} \right)^{-1} \left(\frac{x^n \left(\sqrt{2gxcos\alpha} \right)^{2-n} \rho}{K} \right)^{2/(1+n)} \\
\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{Pr_x} \right) &= -\frac{n-1}{2(n+1)} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{Pr_x}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

olarak tespit edilir ve yerine konursa;

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + W_x(\eta) f(\eta, \epsilon) + \epsilon W_x(\eta) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{n-1}{2(n+1)} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{Pr_x} \right) \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} + \frac{1}{Pr_x} \frac{\partial^2 f(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \\
&\left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + W_x(\eta) f(\eta, \epsilon) + \epsilon W_x(\eta) \frac{f(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{1}{Pr_x} \right) \left(-\frac{n-1}{2(n+1)} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} + \frac{\partial^2 f(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Burada yeni bir boyutsuz değişken tanımlanırsa

$$g(\eta, \epsilon) = \epsilon f(\eta, \epsilon) = \epsilon \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \epsilon} \tag{3.39}$$

$\partial / \partial \epsilon$ içeren terimler düşürüldüğünde yeni bir denklem daha elde edilmiş olur enerji ifadesi için;

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{g(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + W_x(\eta) g(\eta, \epsilon) \\
& = \left(\frac{1}{Pr_x} \right) \left(-\frac{n-1}{2(n+1)} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} + \frac{\partial^2 g(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ayrıca ilk yola çıkılan denklemde $g(\eta, \epsilon)$ yerine yazılıp sınır koşulları tanımına geçilebilir.

$$\left(-\frac{n}{2(n+1)} \eta W_x(\eta) - W_y(\eta) \right) \frac{\partial \theta(\eta, \epsilon)}{\partial \eta} + W_x(\eta) g(\eta, \epsilon) = \frac{1}{Pr_x} \frac{\partial^2 \theta(\eta, \epsilon)}{\partial^2 \eta} \tag{3.41}$$

Yukarıdaki denklemler için sınır şartı

$$\begin{aligned}
\eta = 0; g(\eta, \epsilon) &= 0 \\
\eta = \eta_{\delta_i}; g(\eta, \epsilon) &= 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

4. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Tez kapsamında elde edilen boyutsuz denklemler sınır şartları dâhilinde iki farklı yöntemle çözülmüştür. Yöntemlerin en önemli özelliği doğruluklarının gayet yüksek olması ve çözüm süresinin de uzun olmamasıdır.

4.1 Diferansiyel Quadrature Yöntemi (DQ)

Diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi bir fonksiyonun verilen ayırık bir noktadaki belli bir değişkene göre kısmi türevinin, o değişken bölgesinde yer alan tüm ayırık noktalardaki fonksiyona ait değerlerin ağırlıklı lineer toplamı şeklinde ifade edilmesini temel alır [39]. Uygun görülen bir yaklaşıklıkta sonuç eldesi için az sayıda grid (ağ, ızgara) kullanılmaktadır. Özellikle mühendislik problemlerinde sık sık karşılaşılabilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde etkili ve farklı bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir.

Tek boyuta sahip bir $u(x)$ fonksiyonunun birinci türevi yazılmak istenirse;

$$u_x(x_i) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N c_{ij} u(x_j); \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.1)$$

x_j : Değişken bölgesinde yer alan ayırık noktalar

$u(x_j)$: Ayırık noktalara ait fonksiyon değerleri

c_{ij} : Ayırık noktaların tümündeki fonksiyon değerlerini, fonksiyonun birinci mertebeden türevine bağlamak için lineer toplamda yer alan ağırlık katsayıları

N : Ayırık nokta sayısı olmak üzere;

u fonksiyonun i .nci ayırık noktaya ait birinci mertebeden türevi Denklem (4.1)'deki gibi ifade edilir.

Burada dikkat çeken en önemli kısım ağırlık katsayılarıdır. Ağırlık katsayılarının nasıl belirleneceği koordinatlar yönünde, süreklilik şartını ihmal etmeyen

fonksiyonlarla yaklaşımlar uygulanmaktadır. Ağırlık katsayıları seçilen fonksiyona bağlıdır ve fonksiyon tipine göre yöntem Polynomial Differential Quadrature (PDQ), Fourier Expansion Base Differential Quadrature (FDQ), Harmonic Differential Quadrature (HDQ) gibi isimler almaktadır [40]. Bu katsayılarının belirlenmesinde önemli çalışmalar yapılarak çözüm önerilerinde bulunulmuştur [40-43]. Belmann vd. ağırlık katsayılarını hesaplamak için iki farklı yöntem önermişlerdir [44]. İlk yaklaşımda test fonksiyonu olarak:

$$g_k(x) = x^k; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

Bu denklem N tane test fonksiyonu verir. Denklem (4.1)' de $g_k(x)$ yazıldığı takdirde i ve j 1'den N' e kadar alınarak N x N kadar ağırlık katsayısı elde edilmiş olur. Bu katsayıların hesabı için N adet test fonksiyonu N adet grid noktasına uygulanmalıdır.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N c_{ij} &= 0 \\ \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j &= 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j^k = k x_j^{k-1}; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \text{ ve } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Lakin bu denklem sisteminin matris determinantı Vandermonde formunda olduğu için tekil bir çözümü bulunmaktadır. N büyük ise matrisin tersini almak zorlaşır ve genel olarak N değeri 13'ten küçük alınır. Hamming' in önerdiği yöntemle analitik, Bjorck ve Pareyra'nın önermiş olduğu özel algoritmalarla da sayısal çözülebilir [45,46].

İkinci yaklaşım ilkin benzemekle beraber farklı bir test fonksiyonuna sahiptir. Denklem (4.1)'i sağlayacak biçimde x_k kadar ötelenmiş Legendre Polinomu'nun kökleri olan fonksiyon test fonksiyonu olarak belirlenir.

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.4)$$

N : Grid nokta sayısı

$L_N(x)$: N. Dereceden Legendre Polinomu

$L_N^{(1)}(x)$: N. Dereceden Legendre Polinomu'nun birinci mertebeden türevi olmak üzere;

N grid noktasında $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ Denklem (4.3) uygulandığında Belmann vd. ağırlık katsayılarını hesaplamak için;

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}; & i \neq j \\ c_{ii} &= \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)}; & i = j \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde basit cebirsel ifadeler elde etmişlerdir [44].

4.1.1 Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ)

Diferansiyel Quadrature yukarıda temel olarak irdelenirken, ağırlık katsayılarının önemi ve hesabındaki güçlükler üzerinde duruldu. İlk yaklaşımda denklem katsayı matrisi Vardermonde sistemi olduğundan determinant hesabında zorluklar meydana gelmiştir ve çözümün tekliği vurgulanmıştır. NxN'lik denklem takımı çözme gerekliliği de buna ek olarak düşünülebilir. Bunun yanında artan grid sayısı sonucu ciddi şekilde etkilemektedir. Özellikle 20' den daha büyük grid sayısı çözümün güvenilirliğini olumsuz etkilemektedir. İkinci yaklaşıma bakıldığında farklı sınır şartları ve geometri düşünüldüğünde metodun uygulanması zorlaşmaktadır. Az grid noktası sayısı ile her adımda lineer denklem sistemi çözümünü gerektiren ilk yaklaşımla, Legendre Polinomu'na bağlı kısıtlanan düğüm noktalarını gerektiren ikinci yaklaşım genel manada metodun uygulanabilirliğini olumsuz etkilemektedir. Bu bağlamda metodun uygulanabilirliğini kolaylaştıran ve kullanım yelpazesini genişletmekle birlikte tüm bu karşılaşılan sorunları ortadan kaldırmaya yönelik çalışmalar olmuştur. Farklı grid noktaları ve yüksek mertebeden türevler için uygun olan ağırlık katsayısı hesabı elde edilip Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ) metodu ortaya çıkarılmıştır. Ağırlık katsayıları için tekliğe sebebiyet vermeyen ve çok sayıda lineer denklem takımı çözmek zorunda bıraktırmayan analitik ifadeler Shu ve Richards tarafından önerilmiştir ve Navier-Stokes

denklemlerinin çözümünde GDQ metodunun uygulanışını dairesel bir silindiri geçen akım problemi için göstermişlerdir [41]. Bu metotta ağırlık katsayıları için;

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(1)} &= \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}; & i, j = 1, 2, 3, \dots, N_X, \quad i \neq j \\ B_{ij}^{(1)} &= \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}; & i, j = 1, 2, 3, \dots, N_Y, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada;

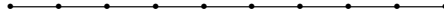
$$\begin{aligned} M^{(1)}(x_i) &= \prod_{j=1, i \neq j}^{N_X} (x_i - x_j) \text{ ve } P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^{N_Y} (y_i - y_j) \\ A_{ij}^{(r)} &= r \left[A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right]; i, j = 1, 2, 3, \dots, N_X, i \neq j \text{ ve } r = 2, 3, \dots, N_X - 1 \\ B_{ij}^{(s)} &= s \left[B_{ij}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(s-1)}}{(y_i - y_j)} \right]; i, j = 1, 2, 3, \dots, N_Y, i \neq j \text{ ve } s = 2, 3, \dots, N_Y - 1 \quad (4.7) \\ A_{ii}^{(r)} &= - \sum_{j=1, i \neq j}^{N_X} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_X \text{ ve } r = 2, 3, \dots, N_X - 1 \\ B_{ii}^{(s)} &= - \sum_{j=1, i \neq j}^{N_Y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_Y \text{ ve } s = 2, 3, \dots, N_Y - 1 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

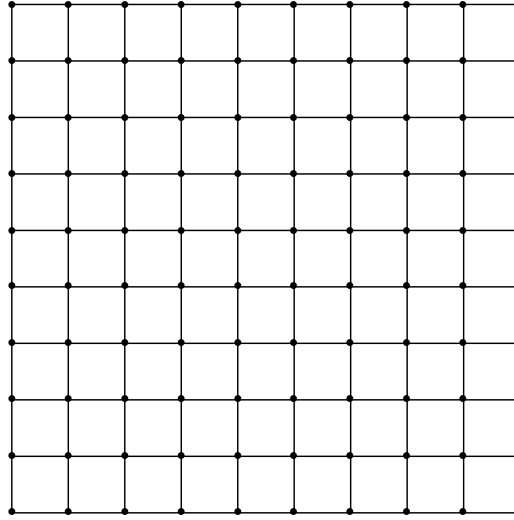
4.1.2 Düğüm Nokta Tipi ve Seçimi

Diferansiyel quadrature (DQ) metodunda çözümün hassasiyeti bir kısım problemler için her ne kadar sınır koşullarına bağlı olsa da genellikle düğüm nokta sayısı ve nasıl seçildikleri de çok etkilidir. Literatürde önceden yapılmış çalışmalarda homojen sınır koşullarına sahip lineer karakterli denklemlerin çözümü için eşit aralıklı grid yapısı yani eşit aralıklı düğüm noktaları bahsedilen hassasiyet için yeterli olmuştur. Bununla birlikte titreşim problemlerinde (Chebyshev-Gauss-Lobatto) grid yapısı daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Eşit aralıklı olmayan düğüm noktası seçiminin zamana bağlı ve başlangıç değer problemlerinde en uygun çözümler sunduğu belirtilmiştir. Ele alınan problem için en etkili seçimin bilinmesi zaman açısından fayda sağlayacaktır. Çalışmada düğüm aralıkları için eşit aralıklı olmayan grid noktaları tercih edilecektir. Her bir koordinat doğrultusunda eşit grid aralığı kullanılmak istenirse:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{i-1}{N_x-1}; & i &= 1, 2, 3, \dots, N_x \\ y_j &= \frac{j-1}{N_y-1}; & j &= 1, 2, 3, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.8)$$



Şekil 4.1 : Eşit aralıklı düğüm noktaları tek yön için ($N_x = 10$).



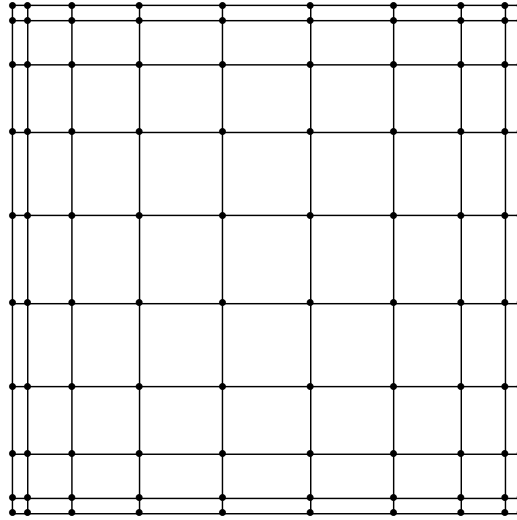
Şekil 4.2 : Eşit aralıklı düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$).

Biçiminde düğüm noktaları seçilir[41]. Eşit aralıklı olmayan grid aralığı tercih edilirse (Chebyshev-Gauss-Lobatto) noktaları için:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right]; & i &= 1, 2, \dots, N_x \\ y_j &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right]; & j &= 1, 2, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.9)$$



Şekil 4.3 : Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları tek yön için ($N=10$).



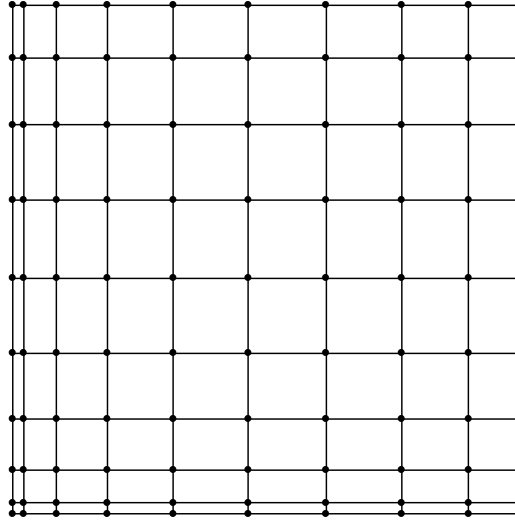
Şekil 4.4 : Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y=10$).

düğüm noktaları olmaktadır. Düğüm noktalarının seçiminde en önemli husus sınır değerlerine yaklaşıldığında daha sık gridler oluşturmaktır. Buradan hareketle eğer sınır koşullarımız değişken için tek taraflı ise her iki ucu sıklaşan Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları kullanmak bir avantaj sağlamayacaktır. Bu çalışmada düğüm aralıkları için eşit aralıklı olmayan (Chebyshev-Gauss-Lobatto) noktalarından farklı düğüm noktaları oluşturulmuş ve kullanılmıştır. Bu üretilen düğüm noktalarından ilki;

$$\begin{aligned} x_i &= 1 - \cos \left[\frac{(i-1)}{2(n-1)} \pi \right] \cos \left[\frac{(i-1)}{3(n-1)} \pi \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \\ y_j &= 1 - \cos \left[\frac{(j-1)}{2(n-1)} \pi \right] \cos \left[\frac{(j-1)}{3(n-1)} \pi \right]; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.10)$$



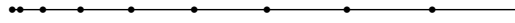
Şekil 4.5 : Üretilen ilk düğüm noktaları tek yön için ($N=10$).



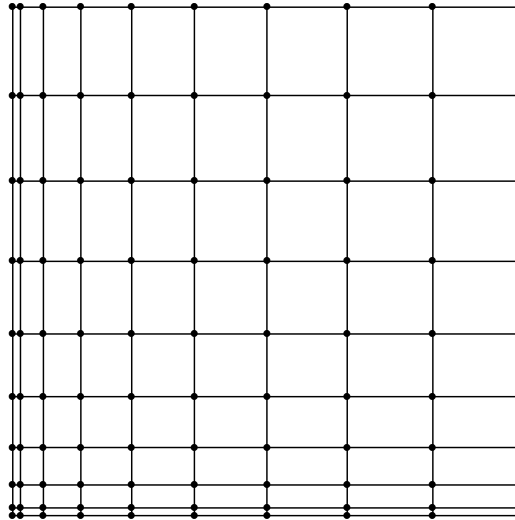
Şekil 4.6 : Üretilen ilk düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$).

Üretilen düğüm noktalarından ikincisi;

$$\begin{aligned} x_i &= 1 - \cos \left[\frac{(i-1)}{2(n-1)} \pi \right]; & i &= 1, 2, \dots, N_x \\ y_j &= 1 - \cos \left[\frac{(j-1)}{2(n-1)} \pi \right]; & j &= 1, 2, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.11)$$



Şekil 4.7 : Üretilen ikinci düğüm noktaları tek yön için ($N=10$).



Şekil 4.8 : Üretilen ikinci düğüm noktaları iki yönde ($N_x, N_y = 10$).

4.2 Diferansiyel Transform (DT) Yöntemi

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi DTM (Differential Transform Metod) ilk olarak elektrik devreleri için Zhou tarafından doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç problemlerine uygulanmıştır[47]. Yöntem, Taylor Serisi açılımını esas alarak polinom tipi çözüm öngörüsüne dayalı yarı analitik özellik taşır. DTM bu analitik Taylor Serisi yaklaşımını yinelemeli (iterative) bir yöntem izleyerek çözüme imkânı sağlamaktadır. Bu sayede birçok durumda analitik olarak çözülmesi karışık olan denklemlere Laplace, Fourier gibi integral dönüşümleri uygulanarak diferansiyel ifadeleri cebirsel hale getirmede karşılaşılabilecek integrallerin zor alınması veya ters dönüşümünde sorun yaşanılması gibi durumlar ortadan kalkmış olmaktadır. Ayrıca DTM bazı süreksizlik ve tekilliklerin ortadan kaldırılmasında da gayet başarılı olmasının yanı sıra basitliği ve doğruluğunun yüksek olması önemli ölçüde avantaj sağlamaktadır. Nihai olarak DTM sayesinde doğrusal olan veya olmayan problemlerin çözümü gibi, sürekli sınır şartını sağlamayan problemlerde de olumlu sonuç alınmaktadır.

4.2.1 DTM Teoremleri ve Uygulanması

Tez çalışmasında irdelenen problem tek boyutta incelendiği için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi'ne ait bir boyutlu dönüşümlerden çalışmada kullanılan kadarı ile iktifa edilecektir.

Tek değişkenli $w(x)$ fonksiyonuna ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k)$ ise, $w(x)$ ' nin bir boyutlu diferansiyel transformu

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} \quad (4.12)$$

olarak tanımlanmaktadır.

$W(k)$ transform fonksiyonunun tersi bulunmak istenirse, diferansiyel ters transform fonksiyonu da,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k W(k) \quad (4.13)$$

biçiminde tanımlanır.

(4.12) ve (4.13) dikkate alındığında

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k w(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.14)$$

ifadesine ulaşılmış olur [48].

Dönüşüm denklemleri sayesinde matematiksel dönüşümler uygulandığında bir boyuttaki diferansiyel dönüşüm ifadelerinin elde edildiği temel teoremlerden bir kısmı tablo olarak verilebilir.

Çizelge 4.1 : DTM Dönüşümü [48,49].

Fonksiyon	Transform Fonksiyonu
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = cu(x)$	$W(k) = cU(k)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$w(x) = u(x)v(x)s(x)$	$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t)$

Kısaca tanımı yapılan ve teoremlerinden bahsedilen yarı-analitik bir yöntem olma özelliği taşıyan DTM için incelenen problem ait denklemler (3.28) ve (3.29)'dur. Bu ifadeler tekrardan hatırlanırsa;

$$W_x(\eta) - \frac{n}{(n+1)} \eta \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} + 2 \frac{dW_y(\eta)}{d\eta} = 0$$

$$W_x(\eta) \left(W_x(\eta) - \frac{n}{(n+1)} \eta \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right) + 2W_y(\eta) \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} = 1 + 2n \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{n-1} \frac{d^2W_x(\eta)}{d^2\eta}$$

Sınır şartları ise Denklem (3.30) da;

$$\begin{aligned} \eta = 0; W_x(\eta) = 0, W_y(\eta) = 0 \\ \eta = \eta_{\delta}; W_x(\eta) = 1 \end{aligned}$$

ifadesiyle verilmiştir.

Denklemlere bakıldığında $(dW_x(\eta)/d\eta)^{n-1}$ terimi hariç diğer terimlere Diferansiyel Transform Yöntemi uygulamada sorun olmamaktadır. Çünkü problemin yapısı ele alındığında Power-law indeksi olan n değeri sadece tamsayı olarak ele alınmayacaktır. Aynı zamanda rasyonel ifadeler de alacaktır. Bundan ötürü dönüşüm için ek bir işlem gerekmektedir.

$$F = \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{n-1} \quad (4.15)$$

Olmak üzere yeni bir fonksiyon tanımlansın. O takdirde yeni denklem;

$$W_x(\eta) \left(W_x(\eta) - \frac{n}{(n+1)} \eta \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right) + 2W_y(\eta) \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} = 1 + 2nF \frac{d^2W_x(\eta)}{d^2\eta} \quad (4.16)$$

şeklinde oluşacaktır. Elbette yeni tanımlanan fonksiyonun sınır şartı da belirlenmelidir. Buradan hareketle öncelikle F fonksiyonunun türevi yazılırsa;

$$\begin{aligned} F' &= (n-1) \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{n-2} \frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2} \\ F' &= (n-1) \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{n-1} \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{-1} \frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2} \\ F' &= F \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right)^{-1} \frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2} \\ F' \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right) &= F \frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2} \\ F' \left(\frac{dW_x(\eta)}{d\eta} \right) - F \frac{d^2W_x(\eta)}{d\eta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Şeklinde yazılabilir. Sınır koşulu;

$$\begin{aligned}\eta &= 0; \\ W_x'(\eta) &= p \\ F(\eta) &= p^{n-1}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Olarak ifade edilebilir.

İlk denklem olan süreklilik denklemine Diferansiyel Transform Yöntemi uygulanırsa;

$$W_x[k] - \frac{n}{(n+1)} \sum_{l=0}^k (l+1) W_x[l+1] \delta[k-l-1] + 2(k+1) W_y[k+1] = 0 \tag{4.19}$$

İkinci denklem olan F fonksiyonu için yazılan ifade;

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{l=1}^k (l+1) W_x[l+1] (k-l+1) F[k-l+1] + W_x[1] (k+1) F[k+1] \right) \\ & - (n-1) \left(\sum_{l=1}^k F[l] (k-l+1) (k-l+2) W_x[k-l+2] \right. \\ & \left. + (1+k)(2+k) F[0] W_x[2+k] \right) = 0\end{aligned}\tag{4.20}$$

Üçüncü ve son denklem momentum ifadesi de;

$$\begin{aligned}& \frac{-n}{1+n} \sum_{l=0}^k \sum_{t=0}^l W_x[t] \delta[l-t-1] (k-l+1) W_x[k-l+1] \\ & + \sum_{l=0}^k W_x[l] W_1[k-l] + 2 \sum_{l=0}^k W_y[l] (k+1-l) W_x[k+1-l] - \delta[k] \\ & 2n \left(\sum_{l=1}^k (k-l+1) (k-l+2) W_x[k-l+2] F[l] \right. \\ & \left. + (1+k)(2+k) F[0] W_x[2+k] \right) = 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

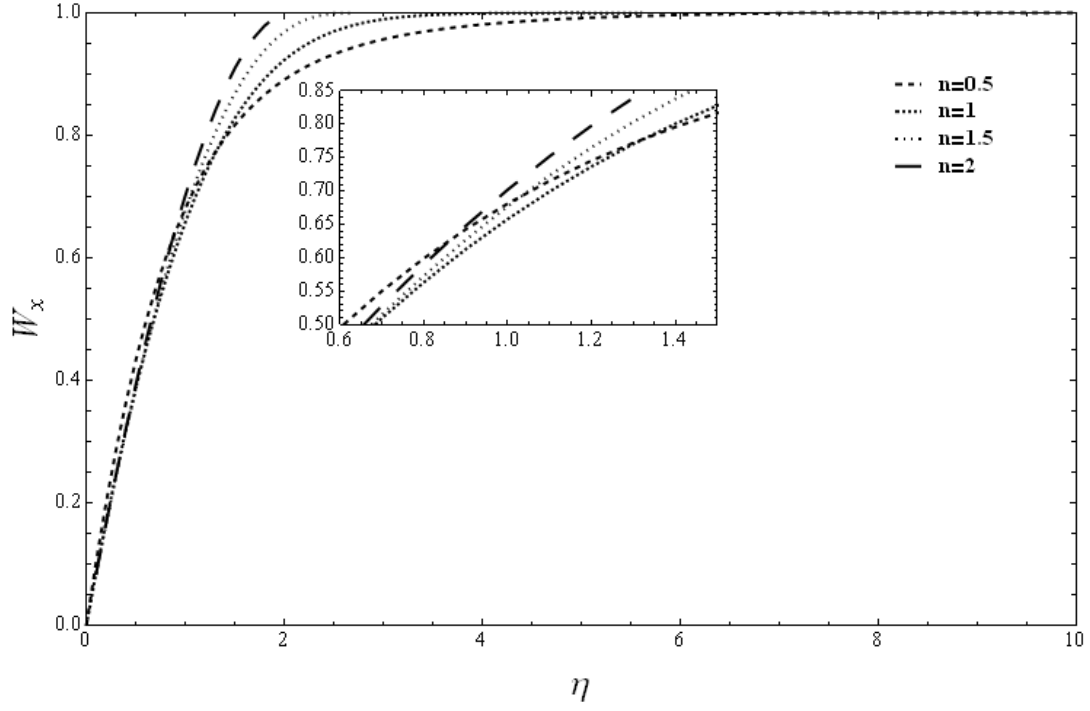
şeklinde olup dönüşümler tamamlanır.

5. GDQM VE DTM YÖNTEMLERİYLE DÜŞEN FİLM AKIŞI ANALİZİ

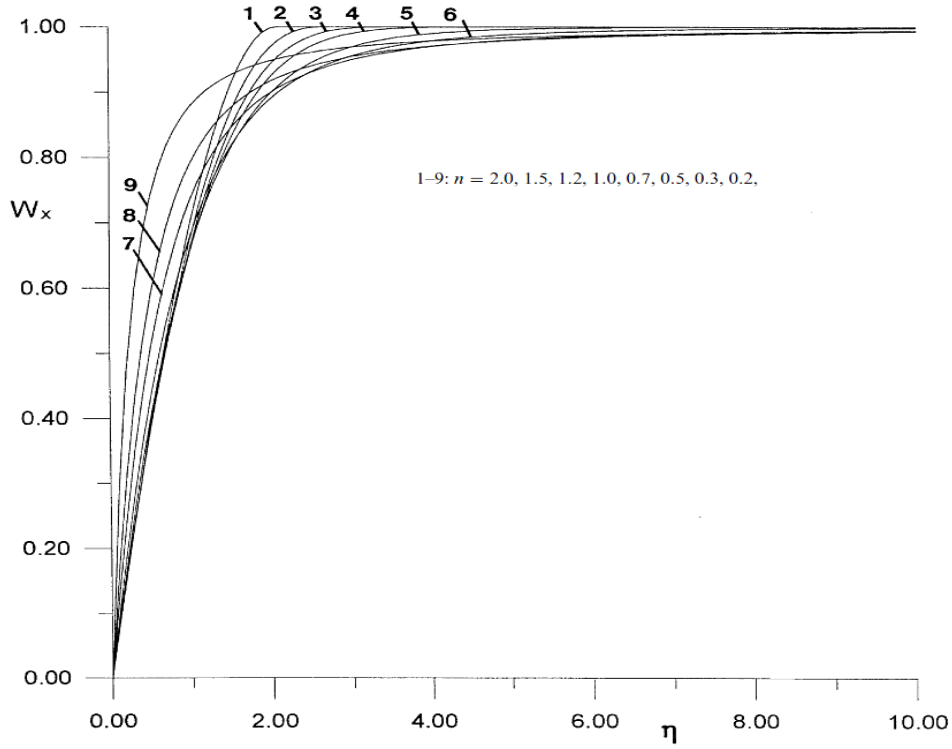
Yerçekimi etkili Newtonyen olmayan düşen film akışı için Andersson ve Shang tarafından daha evvel Shang ve Wang ile Shang vd. tarafından kullanılan shooting tekniği adapte edilip sayısal olarak çözümlemeler elde edilmiştir [50,51]. Doğrusal olmayan iki-noktada sınır koşuluyla tanımlı problem öncelikle Denklem (3.1) ve (3.2)'den üç adet adi diferansiyel denkleme indirgenmiş, ardından 5. Mertebeden klasik Runge–Kutta yöntemi uygulanarak çözülmüş ve Newton iterasyon yöntemiyle dış sınır koşulları sağlanmaya çalışılmıştır. Çalışmanın temel farklılığı Andersson ve Irgens tarafından eşit grid aralıklı 4. Mertebeden Runge-Kutta yöntemi yerine değişken grid aralığına sahip 5. Mertebeden Runge-Kutta kullanılarak sonuca gidilmesidir [35].

Bu çalışmada ise sayısal yöntemler yerine yarı analitik Diferansiyel Transform ve Diferansiyel Quadrature yöntemleri kullanılmıştır. Ve elde edilen sonuçlar kaynak çalışmayla kıyaslanarak değerlendirilmeler yapılacaktır.

Öncelikli olarak Şekil 5.1'de Hızın x yönündeki bileşeninin farklı Power-law indeks değerlerine göre boyutsuz η ile değişimi verilmiştir.



(a)



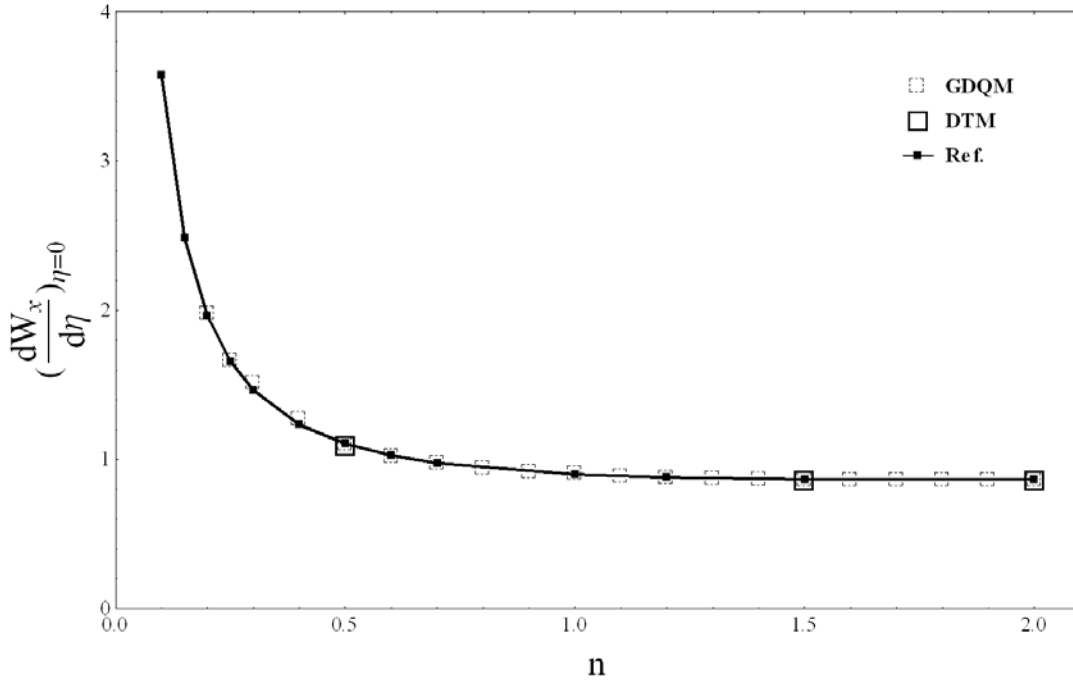
(b)

Şekil 5.1 : Hızın x yönündeki bileşeninin farklı Power-law indeksine göre boyutsuz η ile değişimi (a) GDQM ile elde edilen (b) Kaynak sonucu [35].

Elde edilen çözümle kaynak sonucunun uyumlu olduğu açıkça görülmektedir. Artan n değerleriyle birlikte boyutsuz hız değerinin 1 e ulaşması η değerinin daha küçük olduğu yerlerde gözlemlenmektedir.

Çizelge 5.1 : Boyutsuz hız gradyanının Power-law indeksine göre değişimi.

n	Kaynak [35]	GDQM	DTM
0.2	1.9602	1.97616	-
0.25	1.65736	1.66233	-
0.3	1.46275	1.51242	-
0.4	1.23218	1.2724	-
0.5	1.10437	1.10524	1.09435
0.6	1.02613	1.02233	-
0.7	0.97519	0.97628	-
0.8	-	0.940673	-
0.9	-	0.916623	-
1	0.89972	0.908542	-
1.1	-	0.890576	-
1.2	0.87902	0.878411	-
1.3	-	0.871854	-
1.4	-	0.868243	-
1.5	0.86592	0.865977	0.865909
1.6	-	0.864818	-
1.7	-	0.863844	-
1.8	-	0.863696	-
1.9	-	0.863671	-
2	0.86361	0.863623	0.863626



Şekil 5.2 : Boyutsuz hız gradyanının Power-law indeksine göre değişimi.

Şekil 5.2’de boyutsuz hız gradyanının Power-law indeksine göre değişimi duvar üzerinde yani $\eta=0$ için verilmiştir. Çizelge 5.1 de incelendiğinde kesme kalınlaşması yani $n>1$ durumu için GDQM ile kaynak çalışmada yer almayan veriler de bulunmuştur.

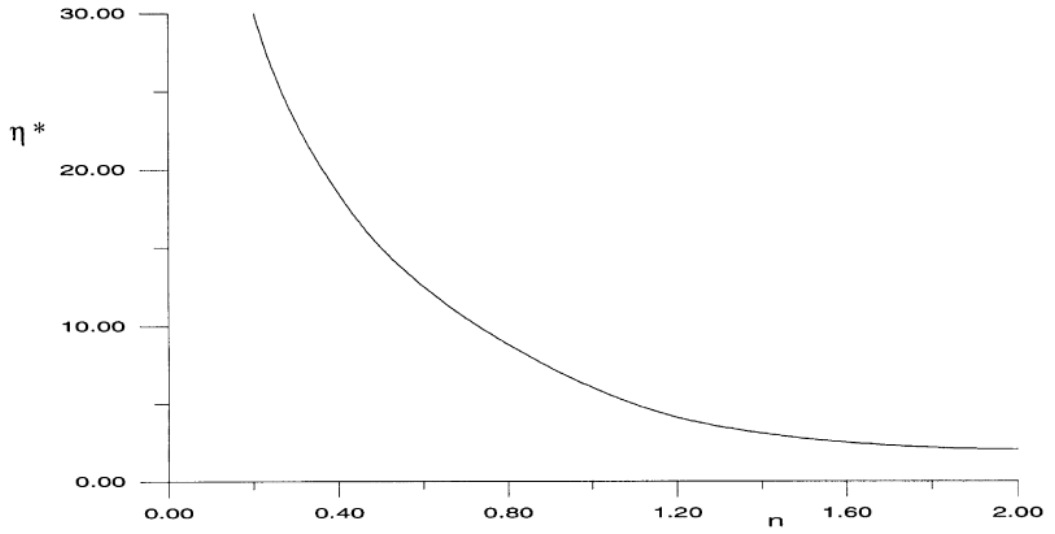
$$C_f = \frac{\tau_D}{1/2 \rho w_{x,\infty}^2} = 2Re_x^{-1/(1+n)} \left[\left(\frac{dW_x}{d\eta} \right)_{\eta=0} \right]^n$$

Boyutsuz hız gradyanı duvar üzerindeki kesme geriliminin boyutsuz ifadesi olan C_f değerinin hesabında kullanılması sebebiyle önem arz etmektedir.

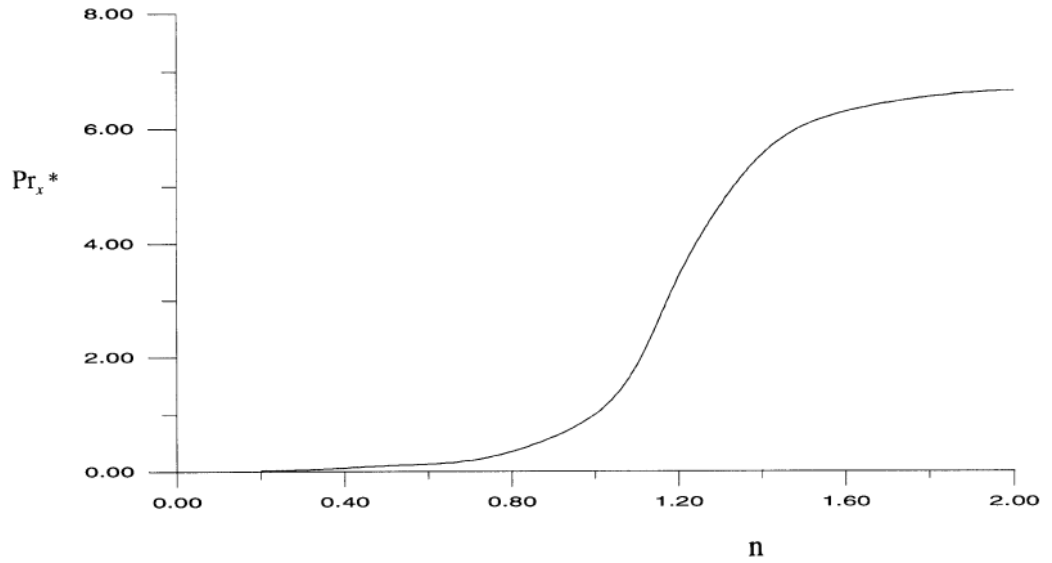
Bununla birlikte kaynak çalışmada kütle debisi sınır tabakası bölgesi uzunluğu ve kritik film kalınlıkları için denklemler türetilmiştir.

Momentum sınır tabaka kalınlığı ile termal sınır tabaka kalınlığı birçok Power-law modeli düşen film akışında farklılık göstermektedir. Boyutsuz hızın aerodinamik sınır tabaka teorisinden bilindiği üzere 0.99’a eşit olduğu η değeri momentum sınır tabaka kalınlığı olarak değerlendirilmektedir. Kaynak çalışmada $\%10^{-4}$ hata payıyla boyutsuz hızın 1’e eşit olduğu kabul edilerek $0.1 \leq \eta \leq 2$ için çözümleme yapılmıştır. Termal momentum kalınlığının ise sadece Power-law indeksine değil aynı zamanda

bölgesel Prandtl Pr_x sayısı ile değiştiği görülmüştür. Termal momentum kalınlığının azalan bölgesel Prandtl Pr_x sayısı ile ve artan Power-law indeksi n ile arttığı saptanmıştır [37,38]. Belirli bir n değeri için kritik bir bölgesel Prandtl Pr_x sayısı olması gerektiği ve değerinin ise momentum sınır tabası kalınlığı ile termal sınır tabakası kalınlığının eşit olduğu durumda tespit edileceği belirtilmiştir. Kritik bölgesel Prandtl sayısı Pr_x^* ile kritik momentum kalınlığı ise $\eta_{\delta 1}^*$ simgelenmiştir ve değişimleri grafiklerle gösterilmiştir.

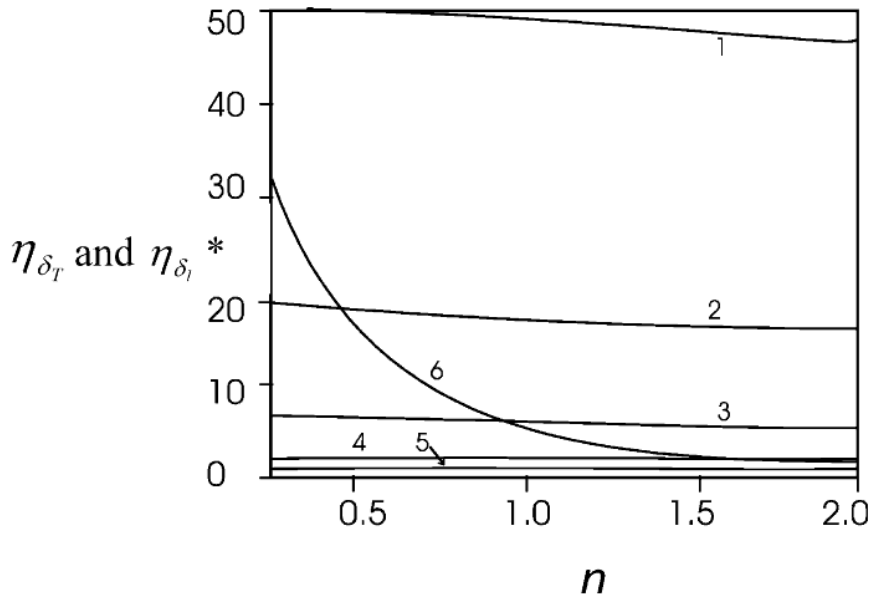


Şekil 5.3 : Kritik momentum kalınlığı $\eta_{\delta 1}^*$ ile Power-law indeksi değişimi[37].



Şekil 5.4 : Kritik bölgesel Prandtl sayısı Pr_x^* ile Power-law indeksi değişimi[37].

Bunun yanında Shang ve Gu [52] tarafından termal sınır tabaka kalınlığı η_{δ_t} , $\partial\theta(\eta, \epsilon)/\partial\eta = 0.00001$ değeri için farklı bölgesel Prandtl sayılarına ve Power-law indeksi n 'e göre nasıl değiştiği belirlenmiştir. Şekil 5.5'te Shang ve Gu tarafından verilen grafikte belirli bir Power-law indeksi n için kritik bölgesel Prandtl sayısı Pr_x^* bölgesel Prandtl sayısından Pr_x küçükken termal sınır tabaka kalınlığının momentum sınır tabaka kalınlığından daha ince olduğu görülmektedir. Pr_x sayısı arttıkça bu fark daha da açılmaktadır.



Şekil 5.5 : Kritik momentum ve termal sınır tabaka kalınlığının Power-law indeksi n ile değişimi (1-5: $Pr_x = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ ve 6: $\eta_{\delta_t}^*$) [52].

Bu sebeple Sıcaklık gradyanları sadece en içteki hız sınır tabakası bölgesiyle sınırlandırılır. Eğer iki sınır koşulu duvardan ($\eta = 0$) momentum sınır tabakasına ($\eta = \eta_{\delta_t}$) kadar belirlenerek çözüm yapılırsa, doğruluk payı azalacaktır. Buradan hareketle sıcaklık gradyanlarının yok olduğu yerdeki hız değerini sınır koşulu olarak atamak uygun olmaktadır.

Çizelge 5.2 : Boyutsuz hız alanının ($n=0.5$) benzerlik çözümü.

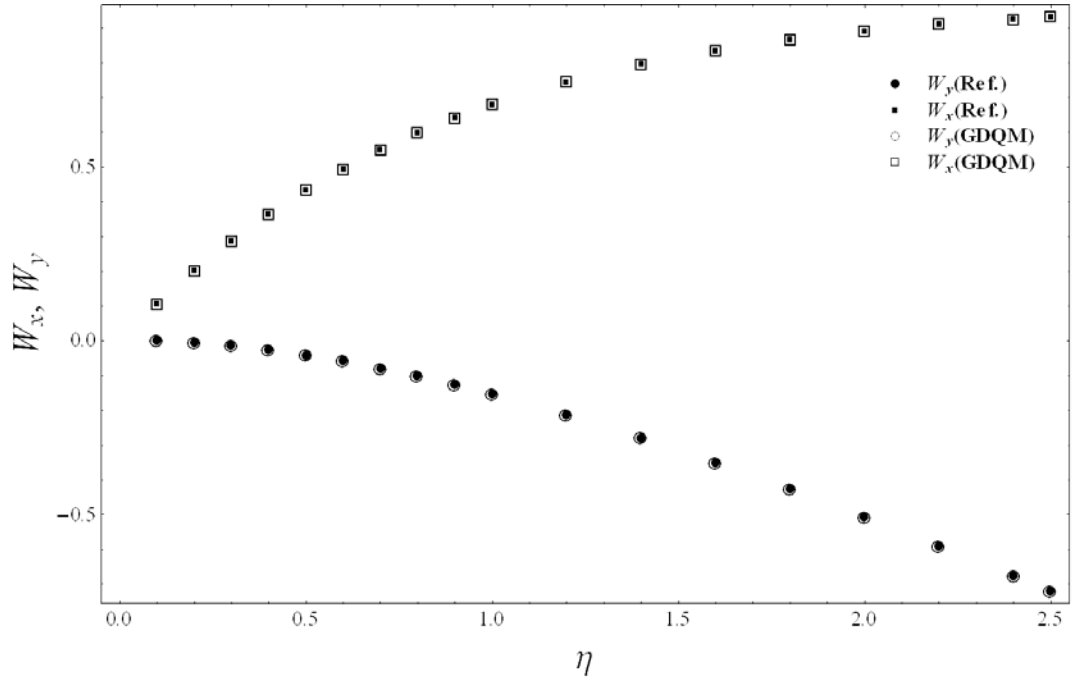
η	Wy (kay. [37])	Wx (kay. [37])	Wy (GDQM)	Wx (GDQM)	(%Fark) Wy	(%Fark) Wx
0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.00181	0.10527	-0.0018151	0.105366052	0.22637	0.08839
0.2	-0.00713	0.20058	-0.007136778	0.200767861	0.10910	0.09316
0.3	-0.01578	0.28652	-0.015790805	0.286791935	0.09385	0.09421
0.4	-0.02758	0.36374	-0.027600211	0.364078637	0.09143	0.09365
0.5	-0.04235	0.43289	-0.042386197	0.433294644	0.09256	0.09371
0.6	-0.05991	0.49464	-0.059969414	0.495111555	0.09249	0.09493
0.7	-0.08010	0.54966	-0.080171407	0.550189651	0.09290	0.09727
0.8	-0.10272	0.59856	-0.102816099	0.599165901	0.09258	0.10089
0.9	-0.12761	0.64197	-0.127731211	0.642645467	0.09185	0.10522
1.0	-0.15461	0.68045	-0.154749556	0.681196039	0.09156	0.10993
1.2	-0.21426	0.74469	-0.214459188	0.745575109	0.09203	0.11939
1.4	-0.28048	0.79499	-0.280746939	0.796008423	0.09410	0.12785
1.6	-0.35221	0.83441	-0.352547054	0.83553935	0.09712	0.13535
1.8	-0.42850	0.86537	-0.428933731	0.866607378	0.10052	0.14264
2.0	-0.50859	0.88979	-0.509118798	0.89113086	0.10319	0.15092
2.2	-0.59182	0.90914	-0.592442	0.910597	0.10561	0.16070
2.5	-0.72136	0.93108	-0.722144966	0.932731927	0.10854	0.17785
3.0	-0.94650	0.95502	-0.947581148	0.957013943	0.11444	0.20931
3.5	-1.17942	0.96948	-1.180873327	0.971781916	0.12322	0.23775
4.0	-1.41735	0.97857	-1.419242878	0.981155222	0.13355	0.26429
4.5	-1.65860	0.98450	-1.660963841	0.987388842	0.14252	0.29313
5.0	-1.90210	0.98851	-1.904973922	0.991711253	0.15109	0.32415
6.0	-2.39335	0.99328	-2.397535492	0.996943959	0.17488	0.36887
8.0	-3.38444	0.99729	-3.39221396	0.997894	0.22970	0.06056
10.0	-4.38037	0.99879	-4.393085901	0.9989943	0.29029	0.02035
12.0	-5.37828	0.99949	-5.398538959	0.9993183	0.37668	0.01698
15.0	-6.87681	1	-6.885000802	1	0.11911	0.00000

Boyutsuz hız bileşenlerinin Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemi ile Power-law indeks değeri 0.5 için boyutsuz η ile değişimi Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Yüzdelik farklılıklara bakıldığında da görülmektedir ki, % 0,4'ten daha az bir farkla sonuçlar birbirleriyle uyumludur.

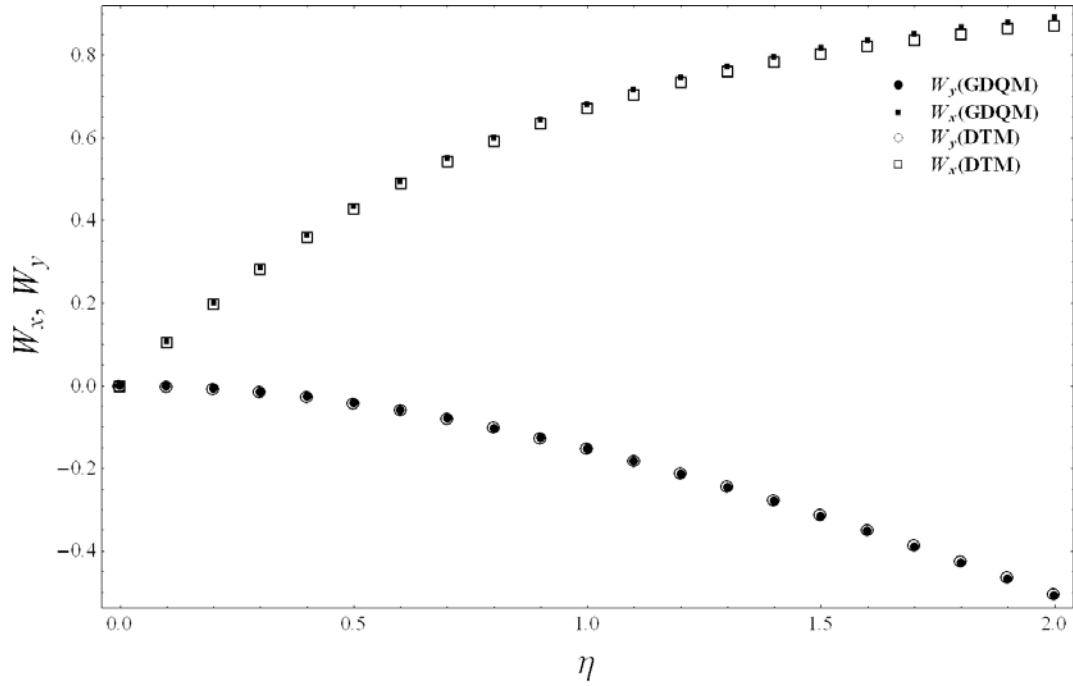
Çizelge 5.3 : Boyutsuz hız alanının ($n=0.5$) GDQM ve DTM benzerlik çözümü.

η	Wy (GDQM)	Wx (GDQM)	Wy (DTM)	Wx (DTM)	(%Fark) Wy	(%Fark) Wx
0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.0018151	0.105366	-0.00179	0.104291	1.12804	1.03046
0.2	-.00713678	0.200768	-0.00706	0.198665	1.04577	1.05875
0.3	-0.0157908	0.286792	-0.01563	0.283716	1.03748	1.0841
0.4	-0.0276002	0.364079	-0.02732	0.360083	1.04288	1.10966
0.5	-0.0423862	0.433295	-0.04195	0.428422	1.05117	1.13728
0.6	-0.0599694	0.495112	-0.05934	0.489396	1.05972	1.16788
0.7	-0.0801714	0.55019	-0.07932	0.543656	1.06803	1.20175
0.8	-0.102816	0.599166	-0.10172	0.591834	1.07627	1.23881
0.9	-0.127731	0.642645	-0.12636	0.634531	1.08473	1.27878
1	-0.15475	0.681196	-0.15308	0.672313	1.09369	1.32133
1.1	-0.18371	0.715344	-0.18171	0.705704	1.10332	1.36613
1.2	-0.214459	0.745575	-0.2121	0.735187	1.11371	1.41294
1.3	-0.246851	0.77233	-0.24411	0.761204	1.12487	1.46161
1.4	-0.280747	0.796008	-0.27759	0.784152	1.13674	1.51204
1.5	-0.316019	0.816971	-0.31243	0.804389	1.14925	1.56421
1.6	-0.352547	0.835539	-0.3485	0.822234	1.16233	1.61814
1.7	-0.390219	0.852	-0.38568	0.837974	1.17588	1.67386
1.8	-0.428934	0.866607	-0.42389	0.851858	1.18985	1.73142
1.9	-0.468596	0.879585	-0.46302	0.864111	1.20419	1.7908
2	-0.509119	0.891131	-0.50352	0.873468	1.11175	2.02219



Şekil 5.6 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nın $0 \leq \eta \leq 2.5$ aralığındaki değerleriyle değişimi.

Ayrıca verilmiş olan GDQM sonuçları ile Diferansiyel Transform Yöntemi (DTM) ile elde edilen sonuçlar da birbiriyle uyumludur.



Şekil 5.7 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nın $0 \leq \eta \leq 2$ aralığındaki değerleriyle değişimi.

Çizelge 5.3'e bakıldığında DTM sonuçlarının yüzde 1-2 civarında farklılık sergilediği görülmektedir.

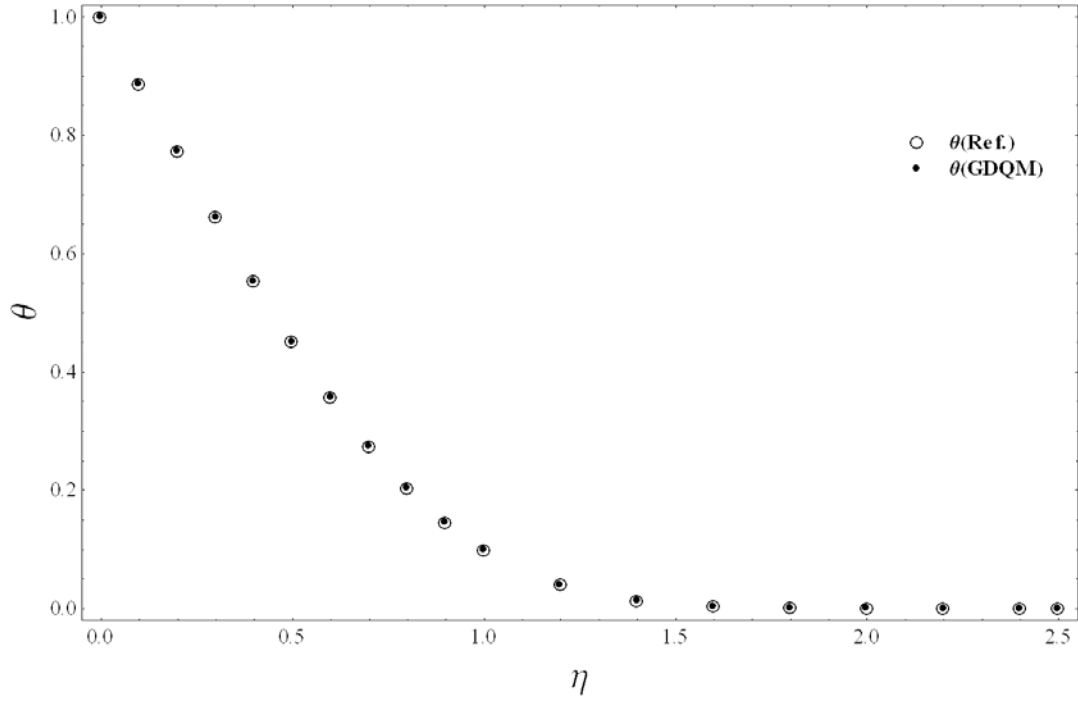
Bu farklılığa kuşkusuz sınır değerlerinin yani η değerinin 0 ile 15 arasındaki farklılığın sebep olduğu düşünülmektedir. Daha yakın sınır değerleri arasında DTM sonuçlarının doğruluğu ciddi düzeyde artar.

Boyutsuz hız alanı çözümlerinin yanında sıcaklık çözümlerinin değişimi de Çizelge 5.4'te gösterildiği şekliyle elde edilmiştir. Sonuçlara geçmeden evvel bahsedilen momentum sınır tabakası kalınlığı ile termal sınır tabakası kalınlığına yönelik sonuçlara bakılırsa öncelikli olarak elde edilen momentum sınır tabaka kalınlığı $\eta = 15$ iken hesaplanmıştır.

Ayrıca $\eta = 2.5$ için elde edilen $W_x(\eta) = W_x(2.5) = 0.93108$ değeri sıcaklık gradyanını Shang ve Gu tarafından önerilen 0.00001 değerinden daha düşük bir değere taşıdığından sınır hız değeri olarak kullanılmıştır. Yani boyutsuz hız alanının yer aldığı çizelge $W_x(2.5) = 0.93108$ değerinde kesilmiştir. Bu doğrultuda elde edilen sonuçlar ile kaynak [37] çalışma sonuçlarına Çizelge 5.4 yardımıyla bakılabilir.

Çizelge 5.4 : Boyutsuz hız alanını ve sıcaklığın ($Pr_x = 10$ ve $n=0.5$) benzerlik çözümü.

η	W_y (kay. [37])	W_x (kay. [37])	θ (kay. [37])	W_y (GDQM)	W_x (GDQM)	θ (GDQM)	(%Fark) θ
0	0	0	1	0	0	1	0
0.1	-0.0018	0.1053	0.8861	-0.0018	0.1054	0.8861	0.0011
0.2	-0.0071	0.2006	0.7727	-0.0071	0.2008	0.7728	0.0126
0.3	-0.0158	0.2865	0.6611	-0.0158	0.2868	0.6613	0.0318
0.4	-0.0276	0.3637	0.5531	-0.0276	0.3641	0.5534	0.0500
0.5	-0.0423	0.4329	0.4511	-0.0424	0.4333	0.4514	0.0627
0.6	-0.0599	0.4946	0.3574	-0.0600	0.4951	0.3577	0.0689
0.7	-0.0801	0.5497	0.2743	-0.0802	0.5502	0.2745	0.0692
0.8	-0.1027	0.5986	0.2032	-0.1028	0.5992	0.2033	0.0689
0.9	-0.1276	0.6420	0.1449	-0.1277	0.6426	0.1450	0.0761
1.0	-0.1546	0.6804	0.0991	-0.1547	0.6812	0.0992	0.1089
1.2	-0.2143	0.7447	0.0406	-0.2145	0.7456	0.0407	0.3885
1.4	-0.2805	0.7950	0.0136	-0.2807	0.7960	0.0137	0.5077
1.6	-0.3522	0.8344	0.0037	-0.3525	0.8355	0.0037	0.5101
1.8	-0.4285	0.8654	0.0008	-0.4289	0.8666	0.0008	0.7435
2.0	-0.5086	0.8898	0.0001	-0.5091	0.8911	0.0001	0.8086
2.2	-0.5918	0.9091	0.0000	-0.5924	0.9106	0.0000	0.9183
2.4	-0.6776	0.9246	0.0000	-0.6784	0.9261	0.0000	0.9411
2.5	-0.7214	0.9311	0.0000	-0.7221	0.9327	0.0000	0.0000



Şekil 5.8 : Boyutsuz sıcaklığın Power-law indeksi $n=0.5$ için boyutsuz η 'nın $0 \leq \eta \leq 2.5$ aralığındaki değerleriyle değişimi.

Belirli bir Power-law indeksi n için bölgesel Prandtl sayısı (Pr_x) kritik bölgesel Prandtl sayısı (Pr_x^*) büyükken termal sınır tabaka kalınlığının momentum sınır tabaka kalınlığından daha ince olduğunun üzerinde durulmuştur.

GDQM ile elde edilen sıcaklık dağılımı ile kaynak [37] sonuçlarının uyumlu olduğu görülmektedir. Yüzde 1'den daha az bir yaklaşım elde edilmiştir. Şekil 5.8 yardımıyla da görülebileceği üzere sıcaklık artan η ile yani duvar yüzeyinden uzaklaştıkça azalmaktadır.

Çizelge 5.5 : Boyutsuz hız alanının ($Pr_x = 1$ ve $n=1.5$) benzerlik çözümü.

η	W_y (kay. [37])	W_x (kay. [37])	W_y (GDQM)	W_x (GDQM)	θ (GDQM)	(%Fark) W_y	(%Fark) W_x
0	0	0	0	0	1	0	0
0.1	-0.00087	0.08479	-0.00086	0.08481	0.95170	1.43781	0.02256
0.2	-0.00351	0.16592	-0.00349	0.16596	0.90351	0.57237	0.02300
0.3	-0.00796	0.24334	-0.00796	0.24340	0.85541	0.09840	0.02427
0.4	-0.01427	0.31697	-0.01427	0.31705	0.80740	0.03409	0.02607
0.5	-0.02246	0.38677	-0.02247	0.38688	0.75957	0.04724	0.02768
0.6	-0.03260	0.45268	-0.03261	0.45282	0.71203	0.03040	0.02963
0.7	-0.04472	0.51468	-0.04472	0.51484	0.66492	0.00760	0.03103
0.8	-0.05887	0.57272	-0.05886	0.57291	0.61842	0.01188	0.03231
0.9	-0.07510	0.62679	-0.07508	0.62700	0.57271	0.02241	0.03323
1	-0.09344	0.67689	-0.09342	0.67712	0.52799	0.02358	0.03409
1.2	-0.13662	0.76517	-0.13660	0.76545	0.44239	0.01021	0.03618
1.4	-0.18865	0.82780	-0.18867	0.83814	0.36321	0.01238	1.23351
1.6	-0.24964	0.89526	-0.24971	0.89570	0.29182	0.02778	0.04839
1.8	-0.31951	0.93841	-0.31959	0.93898	0.22917	0.02764	0.06096
2	-0.39788	0.96846	-0.39793	0.96920	0.17573	0.01125	0.07641
2.2	-0.48405	0.98712	-0.48399	0.98799	0.13147	0.01202	0.08860
2.4	-0.56679	0.99660	-0.57666	0.99746	0.09589	1.71106	0.08534
2.6	-0.67432	0.99974	-0.67437	0.99999	0.06814	0.00860	0.02440
2.7	-0.72411	1.00000	-0.72450	1.00000	0.05687	0.05337	0.00000
2.8	-0.77411	1.00000	-0.77422	1.00000	0.04715	0.01447	0.00000
3	-0.87411	1.00000	-0.87422	1.00000	0.03177	0.01281	0.00000
3.4	-1.07411	1.00000	-1.07422	1.00000	0.01329	0.01043	0.00000
3.8	-1.27411	1.00000	-1.27422	1.00000	0.00499	0.00879	0.00000
4	-1.37411	1.00000	-1.37422	1.00000	0.00294	0.00815	0.00000
4.4	-1.57411	1.00000	-1.57422	1.00000	0.00092	0.00711	0.00000
4.8	-1.77411	1.00000	-1.77422	1.00000	0.00024	0.00631	0.00000
5	-1.87411	1.00000	-1.87422	1.00000	0.00012	0.00598	0.00000
5.4	-2.07411	1.00000	-2.07422	1.00000	0.00002	0.00540	0.00000
5.6	-2.17411	1.00000	-2.17422	1.00000	0.00000	0.00515	0.00000

Kritik bölgesel Prandtl sayısının (Pr_x^*), bölgesel Prandtl sayısından (Pr_x) büyükken bu defa da momentum sınır tabaka kalınlığının termal sınır tabaka kalınlığından daha ince olduğu görülmektedir. Bu durumda sıcaklık gradyanı sürtünmesiz akış içine kadar genişleyebilecektir. Belirli bir hız değeri (sıcaklık gradyanının 0.00001 den daha düşük olduğu) sınır değeri olarak kabul edilip daha evvel çözüm yapılmıştı. Burada da bu boyutsuz hız değeri momentum sınır tabakasının aştığında 1 değeriyle sabit kalacaktır. Ve hızın türevi sıfıra gidecektir.

Bundan dolayı;

$$\begin{aligned} W_x(\eta) &= 1 \\ \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

kabulleriyle (3.28) de ifade edilen boyutsuz hızlarla süreklilik denklemi tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned} W_x(\eta) - \frac{n}{(n+1)}\eta \frac{dW_x(\eta)}{d\eta} + 2\frac{dW_y(\eta)}{d\eta} &= 0 \\ \frac{dW_y(\eta)}{d\eta} &= \frac{-1}{2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

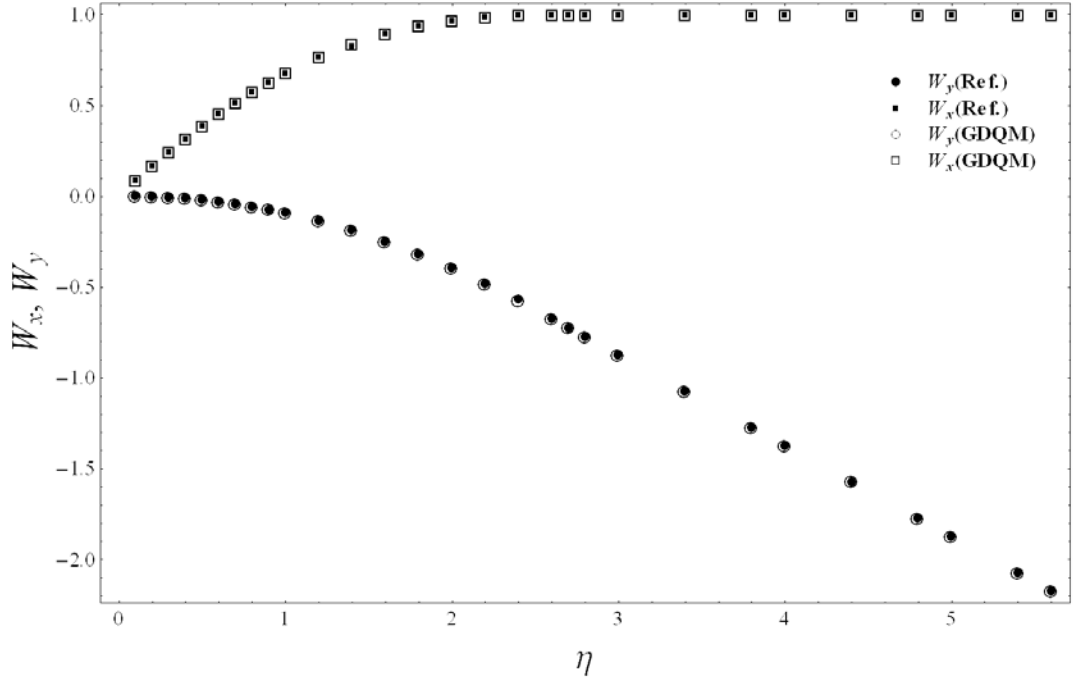
olur ve buradan C sabit bir sayı olmak koşuluyla;

$$W_y(\eta) = \frac{-1}{2}\eta + C \quad (5.3)$$

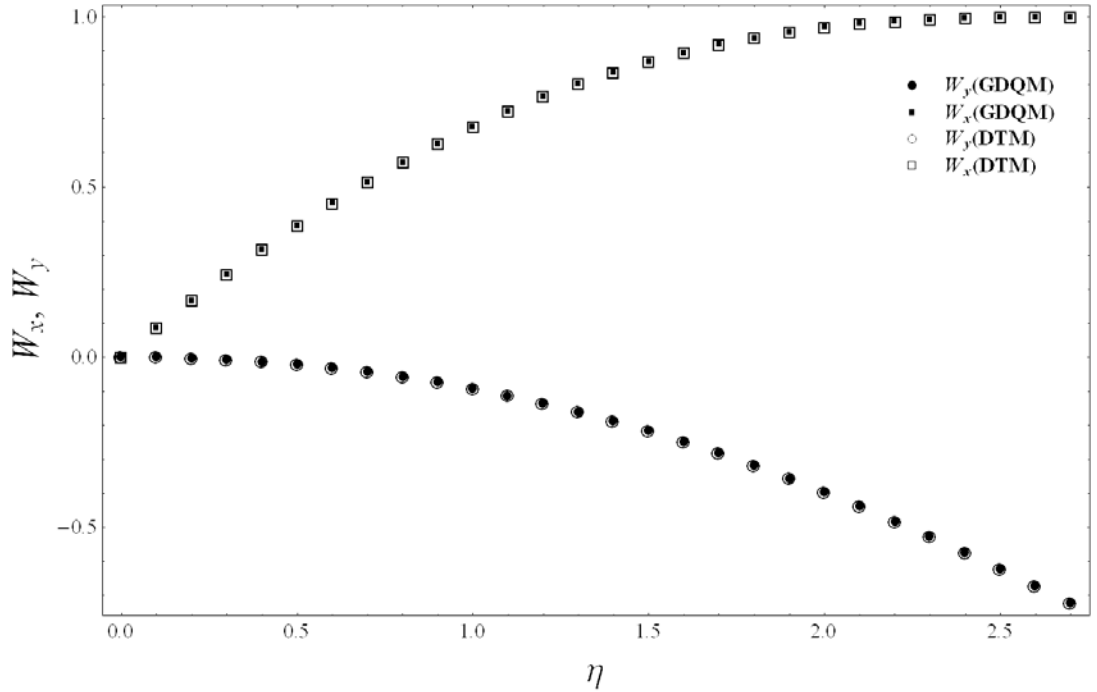
şeklinde boyutsuz hızın diğer bileşeni yazılabilir. Denklemden geçen C ifadesi momentum sınır tabakası değerinden elde edilip sınır tabakayı geçtikten sonra (5.3) eşitliğinde yerine koyarak ta ki termal sınır tabakaya kadar $W_y(\eta)$ değerlerinin hesabında kullanılacaktır. $W_x(\eta)$ ise belirtildiği gibi sabit 1 değeriyle ilerleyecektir. Tüm bu bahsedilenleri Çizelge 5.5'te görmek mümkündür.

Denklem (5.3)' te verilen C sabit değeri 0.62578 olarak hesaplanmıştır. Ve ardından Çizelge 5.5'te de görüldüğü üzere $W_y(\eta)$ hız dağılımı momentum sınır tabakası olan 2.7 değerinden sonra termal sınır tabakası 5.6 değerine kadar (5.3)'te belirtilen şekilde sürdürülmüştür. $W_x(\eta)$ değeri de momentum sınır tabakasından sonra

sabitlenerek devam ettirilmiştir. Bu şekilde ilerletilen değerler sıcaklık hesabı için doğacak hatayı gidermek amaçlıdır.



Şekil 5.9 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nın $0 \leq \eta \leq 5.6$ aralığındaki değerleriyle değişimi.



Şekil 5.10 : Boyutsuz hız bileşenlerinin Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nın $0 \leq \eta \leq 2$ aralığındaki değerleriyle değişimi.

Hesaplanan GDQM sonuçları ile DTM ile elde edilen sonuçlar yine birbiriyle uyumludur. Çizelge 5.3'e bakıldığında DTM sonuçlarının yüzde 1'den daha az farklılık vardır.

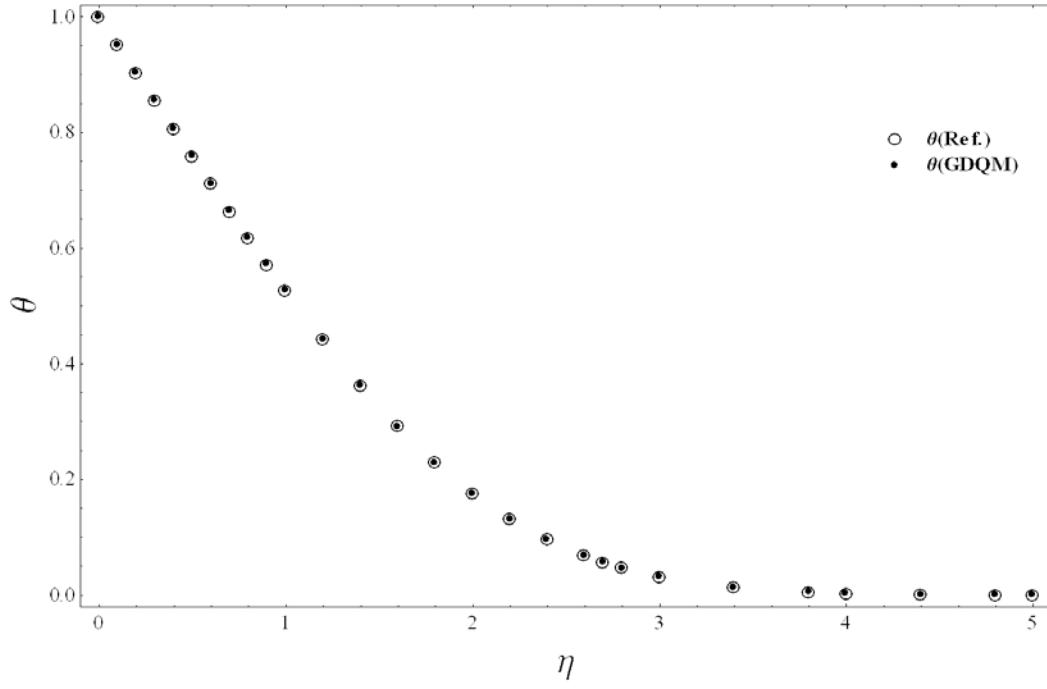
Sınır değerlerinin yani η değerinin 0 ile 15 olmasından dolayı DTM çözümünün Power-law indeksi $n=0.5$ için yüzde 1-2 civarlarında farklı olduğundan bahsedilmiştir. Bunu doğrular mahiyette $n=1.5$ için yapılan çözüm değerlendirilebilir. Yani η değerinin 0 ile 5.6 sınır değerlerindedir ve görüldüğü üzere Çizelge 5.6'da fark büyük ölçüde azalmıştır.

Çizelge 5.6 : Boyutsuz hız alanının ($n=1.5$) GDQM ve DTM benzerlik çözümü.

η	Wy (GDQM)	Wx (GDQM)	Wy (DTM)	Wx (DTM)	(%Fark) Wy	(%Fark) Wx
0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.0008596	0.084807	-0.000865	0.084787	0.61965	0.0229824
0.2	-0.0034930	0.16596	-0.003513	0.165922	0.57709	0.0230863
0.3	-0.0079561	0.243395	-0.007963	0.243336	0.094201	0.0242227
0.4	-0.0142699	0.317052	-0.014265	0.31697	0.0327345	0.0258892
0.5	-0.0224726	0.386875	-0.022461	0.386768	0.0490591	0.0277118
0.6	-0.0326079	0.452817	-0.032597	0.452684	0.0311075	0.0294364
0.7	-0.0447224	0.514838	-0.044719	0.514679	0.0073149	0.0309197
0.8	-0.058864	0.572906	-0.058870	0.572722	0.011478	0.0321182
0.9	-0.0750802	0.627002	-0.075096	0.626795	0.0219042	0.0330771
1	-0.093416	0.677119	-0.093438	0.676889	0.0240079	0.0339168
1.1	-0.113912	0.723261	-0.113934	0.72301	0.0193891	0.034817
1.2	-0.136604	0.765451	-0.136618	0.765175	0.0102703	0.0359996
1.3	-0.161518	0.803725	-0.161517	0.803422	0.0010072	0.0377078
1.4	-0.188672	0.838138	-0.188649	0.837801	0.0122723	0.0401818
1.5	-0.218072	0.868764	-0.218025	0.868385	0.0216943	0.0436315
1.6	-0.24971	0.895697	-0.249641	0.895266	0.0278877	0.0482031
1.7	-0.283564	0.919055	-0.283479	0.91856	0.0299764	0.0539411
1.8	-0.319594	0.938977	-0.319506	0.938407	0.0276343	0.0607437
1.9	-0.357742	0.955628	-0.357667	0.954975	0.0211108	0.0683104
2	-0.397929	0.969197	-0.397884	0.96846	0.0112491	0.0760826
2.1	-0.440053	0.979902	-0.440055	0.979088	0.0004981	0.0831744
2.2	-0.483988	0.98799	-0.484046	0.987119	0.0120517	0.0882963
2.3	-0.529583	0.993739	-0.529692	0.992848	0.0206835	0.0896698
2.4	-0.576657	0.997455	-0.57679	0.996609	0.0229839	0.0849379
2.5	-0.625001	0.999481	-0.625094	0.998771	0.0148144	0.071074
2.6	-0.674374	0.999998	-0.674315	0.99975	0.0087591	0.0248761
2.7	-0.724501	1.	-0.724113	1.	0.0535608	0.0000000

Çizelge 5.7 : Sıcaklığın ($Pr_x = 1$ ve $n=1.5$) benzerlik çözümü.

η	W_y (kay. [37])	W_x (kay. [37])	θ (kay. [37])	W_y (GDQM)	W_x (GDQM)	θ (GDQM)	(%Fark) θ
0	0	0	1	0	0	1	0
0.1	-0.00087	0.08479	0.95148	-0.00086	0.08481	0.95170	0.02312
0.2	-0.00351	0.16592	0.90298	-0.00349	0.16596	0.90351	0.05886
0.3	-0.00796	0.24334	0.85455	-0.00796	0.24340	0.85541	0.10039
0.4	-0.01427	0.31697	0.80625	-0.01427	0.31705	0.80740	0.14259
0.5	-0.02246	0.38677	0.75820	-0.02247	0.38688	0.75957	0.18135
0.6	-0.03260	0.45268	0.71051	-0.03261	0.45282	0.71203	0.21384
0.7	-0.04472	0.51468	0.66334	-0.04472	0.51484	0.66492	0.23801
0.8	-0.05887	0.57272	0.61686	-0.05886	0.57291	0.61842	0.25270
0.9	-0.07510	0.62679	0.57123	-0.07508	0.62700	0.57271	0.25778
1	-0.09344	0.67689	0.52666	-0.09342	0.67712	0.52799	0.25298
1.2	-0.13662	0.76517	0.44143	-0.13660	0.76545	0.44239	0.21719
1.4	-0.18865	0.82780	0.36265	-0.18867	0.83814	0.36321	0.15490
1.6	-0.24964	0.89526	0.29160	-0.24971	0.89570	0.29182	0.07676
1.8	-0.31951	0.93841	0.22918	-0.31959	0.93898	0.22917	0.00517
2	-0.39788	0.96846	0.17588	-0.39793	0.96920	0.17573	0.08352
2.2	-0.48405	0.98712	0.13167	-0.48399	0.98799	0.13147	0.15203
2.4	-0.56679	0.99660	0.09609	-0.57666	0.99746	0.09589	0.21133
2.6	-0.67432	0.99974	0.06832	-0.67437	0.99999	0.06814	0.26106
2.7	-0.72411	1.00000	0.05703	-0.72450	1.00000	0.05687	0.28196
2.8	-0.77411	1.00000	0.04730	-0.77422	1.00000	0.04715	0.30199
3	-0.87411	1.00000	0.03187	-0.87422	1.00000	0.03177	0.32909
3.4	-1.07411	1.00000	0.01332	-1.07422	1.00000	0.01329	0.28309
3.8	-1.27411	1.00000	0.00497	-1.27422	1.00000	0.00499	0.22925
4	-1.37411	1.00000	0.00291	-1.37422	1.00000	0.00294	0.91796
4.4	-1.57411	1.00000	0.00091	-1.57422	1.00000	0.00092	1.23295
4.8	-1.77411	1.00000	0.00024	-1.77422	1.00000	0.00024	1.34078
5	-1.87411	1.00000	0.00012	-1.87422	1.00000	0.00012	1.86795
5.4	-2.07411	1.00000	0.00002	-2.07422	1.00000	0.00002	1.91872
5.6	-2.17411	1.00000	0.00000	-2.17422	1.00000	0.00000	0.00000



Şekil 5.11 : Boyutsuz sıcaklığın Power-law indeksi $n=1.5$ için boyutsuz η 'nin $0 \leq \eta \leq 5.6$ aralığındaki değerleriyle değişimi.

Sıcaklık çözümlerinin değişimi de Çizelge 5.10'da gösterildiği şekliyle elde edilmiştir. Boyutsuz sıcaklık değişimi kaynak sonucuyla örtüşmekte, duvar yüzeyinden uzaklaştıkça azalmaktadır.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Düşen film akışı evaporatif kondenserler ve kapalı tip soğutma kulelerinde, absorpsiyonlu soğutma başta olmak üzere sistemlerin ısı değiştiricilerinde, absorpsiyonlu soğutma sistemlerinin absorber ve evaporatör kısmında kullanılır. Isıya karşı duyarlı malzemelerde ısı transferi boyunca, kısa kalış süresi, yakın sıcaklık kontrolü ancak katı bir yüzey boyunca ince bir düşen film akışıyla sağlanabilir.

Çalışmada öncelikle yerçekimi etkili Power-law modeline uygun Newtonyen olmayan film tipi akış için süreklilik, momentum, enerji denklemleri ile sınır koşulları verilmiştir. Yeni tanımlanmış olan benzerlik yaklaşımıyla denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Daha sonra az grid sayısı ile kısa zamanda yeterli hassasiyette doğru sonuç verebilen yöntemlerden biri olan DQ (Differential Quadrature) ile doğrusal olan ya da olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesiyle daha basit şekilde çözüm arayan DT (Differential Transform) yöntemi detaylı şekilde ele alınarak özelliklerinden bahsedilmiştir.

Son olarak kaynak çalışma ile elde edilen sonuçlar kıyaslanmış ve hız ve sıcaklık çözümlerinin farklı Power-law indeks değerlerinde (ki bu akışkan karakterini belirten bir kriterdir) değerlerinin kaynak çalışmayla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca çalışmada Diferansiyel Quadrature ve Diferansiyel Dönüşüm yöntemleriyle elde edilen sonuçlar da birbirleriyle kabul edilebilir benzerliktedir. Bunun yanında kaynak çalışmada yer almayan farklı Power-law indeks değerleri için boyutsuz hız türevleri de Diferansiyel Quadrature yöntemi sayesinde bulunmuştur. Bu değer yüzey geriliminin boyutsuz ifadesinde kullanılmasından dolayı önem taşımaktadır.

Probleme başarılı şekilde uygulanan yöntemler farklı sınır şartları altındaki çalışmaların çözümleri için uygulanabilir ve problem geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **White, Frank M.**, 1998. “Fluid Mechanics”, Fourth Edition, McGrawHill, 3-10.
- [2] **Yeşilata B.**, 2010, “Akışkanlar Mekaniği I ”, Ders Notu, Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü.
- [3] **Schlichting, H.**,1951. Boundary-Layer Theory. McGraw Hill, New York.
- [4] **Acrivos, A.M., Shah, J., Petersen, E.**, 1960. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces. American Institute of Chemical Engineers, 6 (2), 312-317.
- [5] **Schowalter, W.R.**, 1960. The application of boundary layer theory to power-law pseudoplastic fluids: Similarity solutions. American Institute of Chemical Engineers, 6 (1), 24-28.
- [6] **Lee, S.Y., Ames, W.F.**, 1966. Similarity solutions for non-Newtonian fluids. American Institute of Chemical Engineers, 12 (4), 700-708.
- [7] **Na ,T.Y., Hansen, A.G.**, 1967. Similarity solutions of a class of laminar three dimensional boundary layer equations of power-law fluids. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2 (4), 373-385.
- [8] **Mansutti, D., Rajagopal, K.R.**, 1991. Flow of a shear thinning fluid between intersecting planes. International Journal of Non-Linear Mechanics, 26, (5) 769-775.
- [9] **G. Astarita, G. Marrucci, G. Palumbo**, Non-Newtonian gravity flow along inclined plane surface. Ind. Eng. Chem. Fundam. 3, 333–339 (1964).
- [10] **N. Therien N.B. Coupal, J.L. Corneille**, Verification experimente de l'epaisseur du film pour des liquides non-Newtoniens s'écoulant par gravite sur un plan incline, Can. J. Chem. Eng. 48, 17–20 (1970)
- [11] **N.D. Sylvester, J.S. Tyler, A.H.P. Skelland**,Non-Newtonian film fluids: theory and experiment. Can. J. Chem. Eng. 51, 418–429 (1973).
- [12] **H.I. Andersson, F. Irgens**, Film flow of power law fluids. Encyclopaedia of Fluid Mechanics, vol. 3. (Gulf Publishing Company, Houston, 1990), pp. 617–648.
- [13] **Ribastski, G, Jacobi, A M**, Falling-film evaporation on horizontal tubes – a critical review, International Journal of Refrigeration, 28, 635-653, 2005.
- [14] **T.M.T. Yang, D.W. Yarbrough**, A numerical study of the laminar flow of non-Newtonian fluids along a vertical wall. ASME J. Appl. Mech. 40, 290–292 (1973)

- [15] **T.M.T. Yang, D.W. Yarbrough**, Laminar flow of non-Newtonian liquid films inside a vertical pipe. *Rheol. Acta* 19, 432–436 (1980).
- [16] **V. Narayana Murthy, P.K. Sarma**, A note on hydrodynamics entrance length of non-Newtonian laminar falling films. *Chem. Eng. Ser.* 32, 566–567 (1977).
- [17] **V. Narayana Murth, P.K. Sarma**, Dynamics of developing laminar non-Newtonian falling liquid films with free surface. *ASME J. Appl. Mech.* 45, 19–24 (1978).
- [18] **M.N. Tekic, D. Posarac, D.A. Petrovic**, A note on the entrance region lengths of non-Newtonian laminar falling films. *Chem. Eng. Ser.* 41, 3230–3232 (1986).
- [19] **H.I. Andersson, F. Irgens**, Hydrodynamic entrance length of non-Newtonian liquid films. *Chem. Eng. Sci.* 45, 537–541 (1990).
- [20] **H.I. Andersson, F. Irgens**, Gravity-driven laminar film flow of power-law fluids along vertical walls. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 27, 153–172 (1988).
- [21] **Chhabra, R.P. and Richardson, J.F.**, (2008). *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*. International of Chemical Engineering, 1–23
- [22] **Rao, M. A.**, *Rheology of Fluid and Semisolid Foods*, An Aspen Publication, Aspen Publishers, Inc. Gaithersburg, Maryland, (1999).
- [23] **Barnes H. A.**, *A Handbook of Elementary Rheology*, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, University of Wales, (2000), s. 1.
- [24] **G. Astarita, G. Marrucci**, *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics* (McGraw-Hill, London, 1974)
- [25] **R. Darby**, *Viscoelastic Fluids: An Introduction to Their Properties and Behavior* (Marcel Dekker, New York, 1976).
- [26] **W.R. Schowalter**, *Mechanics of Non-Newtonian Fluids* (Pergamon Press, Oxford, 1978).
- [27] **R.I. Tanner**, *Engineering Rheology* (Clarendon Press, Oxford, 1985).
- [28] **R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager**, in *Dynamics of Polymetric Liquids* ed. by R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager. *Fluid Mechanics*, vol. 1, 2nd edn (Wiley, New York, 1987)
- [29] **M.J. Crochet, K. Walters**, Numerical methods in non-Newtonian fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15, 241 (1983).
- [30] **M.J. Crochet, A.R. Davies, K. Walters**, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow* (Elsevier, Amsterdam, 1984).
- [31] **Maron–Moalem, D, Sideman, S , Dukler, A E**, Dripping Characteristics in a Horizontal Tube Film Evaporator, *Desalination*, 27, 117–127, 1978.
- [32] **Rogers,, J T**, Laminar falling film flow and heat transfer characteristics on horizontal tubes, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 59, 213–222, 1981.

- [33] **Ribastski, G, Jacobi, A M**, Falling-film evaporation on horizontal tubes – a critical review, *International Journal of Refrigeration*, 28, 635-653, 2005.
- [34] **Rogers, J, Goindi, S**, Experimental laminar falling film heat transfer coefficient on a large diameter horizontal tube, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 67, 560-568, 1989.
- [35] **H.I. Andersson, D.Y. Shang**, An extended study of hydrodynamics of gravity-driven film flow of power-law fluids. *Fluid Dyn. Res.* 22, 345–357 (1998)
- [36] **H.I. Andersson, F. Irgens**, Film flow of power law fluids, in *Encyclopaedia of FluidMechanics*, vol. 9, ed. by N.P. Cheremisinoff (Gulf Publishing Company, Houston, 1990), pp. 617–648.
- [37] **D.Y. Shang, H. Andersson**, Heat transfer in gravity-driven film flow of power-law fluids. *Int. J. Heat Mass Transf.* 42(11), 2085–2099 (1999).
- [38] **D.Y. Shang, J. Gu**, Analyses of pseudo-similarity and boundary layer thickness for non-Newtonian falling film flow. *Heat Mass Transf.* 41(1), 44–50 (2004).
- [39] **Bellman R. E. and Casti, J.** 1971. Differential Quadrature and Long-term Integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 235-238.
- [40] **Shu, C.**, “Differential Quadrature and Its Application in Engineering”, Springer-Verlag London Limited, 2000.
- [41] **Shu, C., ve Richards, B.E.**, “Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 15, 791-798, 1992.
- [42] **Shu, C., Ding, H. ve Yeo K.S.**, “Local Radial Basis Function-Based Differential Quadrature Method and Its Application to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier–Stokes Equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192, 941–954, 2003.
- [43] **Shu, C., ve Chew Y.T.**, “Fourier Expansion-Based Differential Quadrature and Its Application toHelmholtz Eigenvalue Problems”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13, 643–653, 1997.
- [44] **Bellman RE, Kashef BG, Casti J** (1972) Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *J Comput Phys*, Vol 10, pp 40-52.
- [45] **Björck A., Pereyra V.** (1970): “Solution of Vandermonde System of Equations”, *Math. Comput.*, Vol. 24, 893-903.
- [46] **Hamming R.W.** (1973): “Numerical Methods for Scientists and Engineers”, McGraw-Hill, New York.
- [47] **J. K. Zhou** 1986 *Diferential Transformation and its Application for Electrical Circuits* (in Chinese) Wuhan, P. R. China: Huazhong University Press.

- [48] **Chen, C. K., Ho, S. H.**; 1996 Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, 79, 173-188.
- [49] **Keskin Yıldırım**, 2005, Yüksek Lisans tezi, Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferensiyel denklemlerin çözülmesi, Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [50] **Shang. D.Y., Wang. B.X.**, 1990 Effect of variable thermophysical properties on laminar free convection of gas. *Int. J. Heat Mass Transfer* 33. 1387-1395..
- [51] **Shang. D.Y., Wang. B.X., Wang. Y., Quan. Y.**, 1993 Study on liquid laminar free convection with consideration of variable thermophysical properties. *Int. J. Heat Mass Transfer* 36. 3411-3419.
- [52] **D.Y. Shang, J. Gu**, Analyses of pseudo-similarity and boundary layer thickness for non-Newtonian falling film flow. *Heat Mass Transf.* 41(1), 44–50 (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf YEĞİNER



Kişisel Bilgiler:

Doğum Tarihi, yeri: 1988, Tokat/Türkiye

Eğitim : İstanbul Teknik Üniversitesi – Uçak ve Uzay Mühendisliği (2011-2014)
İstanbul Teknik Üniversitesi – Uçak Mühendisliği (2006-2011)
Tokat Fen Lisesi (2002-2006)

Telefon: (+90) 0212 285 3122

E-mail: yeginer@itu.edu.tr

Dil : İngilizce (İyi Derece)

Deneyimler:

- **İstanbul Teknik Üniversitesi (2011-)**
Araştırma Görevlisi
- **TEI (2008)**
Stajyer

Kişisel Yetenekler

Bilgisayar:

- Microsoft Office, Mathematica, Matlab

Katıldığı Seminerler ve Kongreler:

- 1) ICMAE 2013 Moskova / RUSYA
- 2) IEEE S6 Rize/ TÜRKİYE
- 3) Uçaklarda Kullanılan Ölçüm Sistemleri ve Göstergeler / Istanbul, Turkey

Bildiriler

- 1) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, "Ecological Performance Analysis of Irreversible Brayton Cycle". (The Sixth International Exergy, Energy and Environment Symposium, 1-4 July/2013, Rize-Turkey)
- 2) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, *ECOP Based Comparative Study of Thermodynamic Cycles*. (4th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, 20-21 July/2013, Moskova-Russia)
- 3) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, *Ecological Performance Analysis of Irreversible Rankine Cycle*. (4th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, 20-21 July/2013, Moskova-Russia)

Yayınlar

- 1) (Chapter 71) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, "Ecological Performance Analysis of Irreversible Brayton Cycle", Progress in Exergy, Energy and Environment (Springer, isbn: 978-3-319-04680-8), 31/03/2014
- 2) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, ECOP Based Comparative Study of Thermodynamic Cycles, Applied Mechanics and Materials Vol. 390 (2013) pp 655-659.
- 3) **Y. Yeğiner, S. Kenç, İ. Özkol, G. Kömürgöz**, Ecological Performance Analysis of Irreversible Rankine Cycle, Applied Mechanics and Materials Vol. 390 (2013) pp 596-600.

Bitirme Çalışmaları

- 1) Isı değıştiricilerinin optimizasyonunda genetik algoritma kullanımı / İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, 2011