

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİNAMİK MATRİS KONTROL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖNGÖRÜLÜ
KONTROL ALGORİTMALARININ KARŞILAŞTIRILMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Savaş OK**

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Sistem Dinamiği ve Kontrol

MAYIS 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİNAMİK MATRİS KONTROL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖNGÖRÜLÜ
KONTROL ALGORİTMALARININ KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Savaş OK
(503051613)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Nisan 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Mayıs 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Can ÖZSOY (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Ayhan Kural (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Semih Sezer (YTÜ)

MAYIS 2009

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, teşvik ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Can ÖZSOY' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Mayıs 2009

Savaş Ok
Makina Mühendisi

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KISALTMALAR.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
SİMGE LİSTESİ	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY.....	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	5
1.2 Literatür Özeti.....	5
1.2.1 Model öngörülü kontrolün tarihi.....	5
1.2.2 Kararlılık.....	7
1.3 Model Öngörülü Kontrol: Optimal Kontrol Problemi	8
2. MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROLÜN PRENSİPLERİ	9
2.1 MPC Elemanları.....	12
2.1.1 Öngörü modelleri	12
2.1.1.1 Basamak cevabı modeli	13
2.1.1.2 Darbe cevabı modeli	13
2.1.1.3 Transfer fonksiyonu modeli	14
2.1.1.4 Durum uzayı modeli	15
2.1.2 Amaç fonksiyonu	15
2.1.3 Kontrol kanununun elde edilmesi	17
2.2 Serbest ve Zorlanmış Cevap	17
3. İKİ ÖNEMLİ MPC ALGORİTMASI: DMC ve GPC	19
3.1 Dinamik Matris Kontrolü	19
3.1.1 Sistem modeli kullanılarak öngörü prametrelerinin bulunması.....	19
3.1.2 Ölçülen bozucuların ele alınması	21
3.1.3 Kontrol kuralının elde edilmesi.....	22
3.2 Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol	23
3.2.1 Zaman serisi modeline dayanan genelleştirilmiş öngörülü kontrol	23
3.2.1.1 Kontrol kuramının elde edilmesi	27
3.2.1.2 Genelleştirilmiş öngörülü kontrolün kapalı çevrim eşdeğeri	29
3.2.2 Durum uzay modeli kullanılarak öngörücünün bulunması	32
4. DMC ve GPC’NİN KARŞILAŞTIRILMASI	39
4.1 MPC’nin Avantajları	39
4.2 MPC’nin Dezavantajları	39
4.3 DMC ve GPC’nin Aralarındaki Farklar ve Benzerlikler.....	40
5. SİMÜLASYONLAR VE SONUÇLAR	43
5.1 Dinamik Sistem Modelleri.....	43
5.1.1 Az sönümlü minimum faz sistem.....	43
5.1.2 Az sönümlü minimum faz olmayan sistem.....	44
5.1.2.1 Minimum fazlı ve minimum fazlı olmayan sistemler.....	45
5.1.3 Aşırı sönümlü minimum faz sistem.....	47

5.1.4 Ayırık zamanlı stokastik sistem.....	48
5.1.4.1 Beyaz gürültü	49
5.1.5 Model derecesi yanlış olan Sistemler.....	50
5.1.6 Zaman ile değişen sistem	51
5.1.7 Referans yörüngesi ve bozucu modeli	51
5.2 Simülasyonlar	52
5.2.1 Az sönümlü minimum faz sistemin simülasyonu	53
5.2.1.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu = bozucu modeli	53
5.2.1.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli.....	55
5.2.1.3 Sistem $\neq$ sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli	56
5.2.2 Az sönümlü minimum faz olmayan sistemin simülasyonu.....	58
5.2.2.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu= bozucu modeli	58
5.2.2.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli.....	60
5.2.2.3 Sistem $\neq$ sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli	61
5.2.3 Aşırı sönümlü minimum faz sistemin simülasyonu.....	62
5.2.3.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu = bozucu modeli	62
5.2.3.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli.....	64
5.2.3.3 Sistem = modelinin ve bozucu = bozucu modeli	64
5.2.4 Ayırık zamanlı stokastik sistemin simülasyonu	65
5.2.5 Model derecesi yanlış olan sistemlerin simülasyonu.....	68
5.2.6 Zaman ile değişen sistem	69
5.3 DMC ve GPC’de Referansın Öngörüldüğü ve Öngörülmediği Durum	74
5.4 Sonuçlar ve Öneriler	75
KAYNAKLAR.....	79
EKLER	81
ÖZGEÇMİŞ.....	85

KISALTMALAR

ARMA	: Auto Regressive Moving Average
ARMAX	: Auto Regressive Moving Average with Exogenous Input
ARX	: Auto Regressive with Exogenous Input
CARIMA	: Control Auto Regressive Moving Average
DMC	: Dynamic Matrix Control
EHAC	: Extended Horizon Adaptive Control
EPSAC	: Extended Prediction Self Adaptive Control
GPC	: Generalized Predictive Control
LS	: Least Square
LQR	: Linear Quadratic Regulator
MAC	: Model Algorithmic Control
MIMO	: Multi Input – Multi Output
MPC	: Model Predictive Control
QDMC	: Quadratic Dynamic Matrix Control
PID	: Proportional Integration Derivative
SISO	: Single Input – Single Output
SSMPC	: State – Space Model Predictive Control

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Öngörülü kontrol stratejisi	2
Şekil 2.2 : Model öngörülü kontrolün ana prensibi.....	10
Şekil 2.3 : MPC ana yapısı	12
Şekil 2.4 : Darbe ve basamak cevabı.....	14
Şekil 2.5 : Referansın daha düzgün çıkış için ayarlanması	17
Şekil 2.6 : Serbest ve zorlanmış cevap	17
Şekil 3.1 : GPC kanunu	29
Şekil 3.2 : Klasik kutup atama yapısı	29
Şekil 4.1 : DMC algoritmasının yapısı	41
Şekil 4.2 : GPC algoritmasının yapısı	42
Şekil 5.1 : Basamak cevabı	44
Şekil 5.2 : Köklerin yer eğrisi	44
Şekil 5.3 : Basamak cevabı	45
Şekil 5.4 : Köklerin geometrik yeri	45
Şekil 5.5 : Basamak cevabı	48
Şekil 5.6 : Köklerin geometrik yeri	48
Şekil 5.7 : Stokastik sistemin basamak cevabı.....	50
Şekil 5.8 : Referans yörüngesi	52
Şekil 5.9 : Bozucu girişi	52
Şekil 5.10 : Az sönümlü minimum faz sisteminin DMC ile kontrolü.....	53
Şekil 5.11 : Az sönümlü minimum faz sisteminin GPC ile kontrolü.....	54
Şekil 5.12 : Az sönümlü min. faz sisteminin DMC ile kontrolü – bozucu etkisi	56
Şekil 5.13 : Az sönümlü min. faz sisteminin DMC ile kontrolü – model belirsizlik.....	57
Şekil 5.14 : Az sönümlü minimum faz olmayan sisteminin DMC ile kontrolü	59
Şekil 5.15 : Az sönümlü minimum faz olmayan sisteminin GPC ile kontrolü.....	60
Şekil 5.16 : Az sönümlü min. faz olmayan sisteminin kontrolünde bozucu etkisi	61
Şekil 5.17 : Az sön. min. faz olmayan sisteminin kontrolünde model belirsizlik	62
Şekil 5.18 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin DMC ile kontrol	63
Şekil 5.19 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin GPC ile kontrolü.....	64
Şekil 5.20 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin kontrolünde bozucu etkisi	64
Şekil 5.21 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin kontrolünde model belirsizlik	65
Şekil 5.22 : DMC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi.....	66
Şekil 5.23 : DMC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi.....	67
Şekil 5.24 : GPC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi	68
Şekil 5.25 : Model derecesi yanlış olan sistemin kontrolü	68
Şekil 5.26 : Model derecesi yanlış olan minimum faz olmayan sistemin kontrolü ...	69
Şekil 5.27 : T değiştiğindeki basamak cevabı.....	70
Şekil 5.28 : K değiştiğindeki basamak cevabı	70
Şekil 5.29 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin basamak cevabı	71
Şekil 5.30 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin DMC ile kontrolü.....	71
Şekil 5.31 : DMC ile kontrolde zaman gecikmesinin etkisi	72
Şekil 5.32 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin GPC ile kontrolü	73

Şekil 5.33 : GPC ile kontrolde zaman gecikmesinin etkisi	73
Şekil 5.34 : Referansın öngörüldüğü ve öngörülmediği durumun	74

SİMGE LİSTESİ

$\tilde{A}(z^{-1})$	$(1 - z^{-1})A(z^{-1})$
e	Hata değeri
f_r	Serbest cevap
f_o	Zorlanmış cevap
g_i	Basamak cevabından elde edilen katsayılar
K	Kazanç faktörü
$\hat{n}(t+k/t)$	k adım sonraki öngörülen bozucu değeri
N_1	Minimum öngörü ufku
N_2	Maksimum öngörü ufku
N_u	Kontrol ufku
$\bar{Q}$	$\text{diag}(Q, \dots, Q)$
$\bar{R}$	$\text{diag}(R, \dots, R)$
$r(t+k)$	k adım sonraki referans değeri
$\hat{u}$	Öngörülen kontrol sinyali
$\hat{y}(t+k/t)$	k adım sonraki öngörülen çıkış değeri
Δ	$1 - z^{-1}$
Δu	kontrol sinyalindeki artım
∇V	Gradient
λ	Ağırlık katsayısı
δ	Ağırlık katsayısı
$\ u\ _R^2$	$u^T R u$
$\ u\ _Q^2$	$u^T Q u$

DİNAMİK MATRİS KONTROL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖNGÖRÜLÜ KONTROL ALGORİTMALARININ KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

Son yıllarda öngörülü kontrol bakış açısının gelişmesiyle Modele Dayalı Öngörülü Kontrol algoritmaları hem akademik çalışmalarda hem de endüstriyel uygulamalarda sık tercih edilen yöntemlerdir. Bu çalışmada da görüleceği üzere, birbirinden farklı dinamik yapılarıdaki bir çok sistemde, bu algoritmalar çok iyi sonuçlar vermektedir.

Bu çalışmada, Model Öngörülü Kontrol'ün alt dallarından biri olan Dinamik Matris Kontrol ile bu alanda geline en son nokta olan Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritmaları karşılaştırılmıştır. DMC endüstride en yaygın kullanılan algoritma olmasına karşın GPC, üzerinde akademik olarak en çok çalışılıp geliştirilen ve endüstride DMC'nin yerini alması muhtemel olan daha üstün bir algoritmadır. Bu nedenle bu iki algoritmanın karşılaştırılması yapılmıştır. Avantajları ve dezavantajları ortaya konmuştur.

İlk olarak, bu algoritmalar hakkında literatür araştırması yapılarak, algoritmaların doğuşu ve gelişimi hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir. Model Öngörülü Kontrol'ün prensipleri incelenmiştir. Daha sonra, algoritmaların matematiksel ifadeleri çıkartılmıştır. Dinamik matris kontrol'ün basamak cevabı modeline dayanan, öngörücüsünün oluşumu adım adım incelenmiştir. Aynı şekilde, Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol'ün zaman serisi ve durum uzay modeline dayanan, öngörücülerin oluşumu da adım adım incelenmiştir. Bu öngörücüler amaç fonksiyonu içinde kullanarak optimal kontrol kanunu elde edilmiştir.

DMC ve GPC ile, tezin içeriğinde ayrıntıları verilen birbirinden farklı dinamiğe sahip modellerin MATLAB yardımıyla kontrolü gerçekleştirilmiştir. Kontrol sırasında, model belirsizliğin, bozucuların ve beyaz gürültünün etkisi göz önünde bulundurulmuştur. Elde edilen simülasyonların incelenmesi sonucunda, DMC ve GPC'nin, sistemlere etki eden bozuculara karşı duyarsız kaldığı görülmüştür. Yani bozucu etkisi yok edilebilmektedir. Ayrıca bu kontrolcülerin, minimum faz olmayan sistemleri, yanlış model dereceli sistemleri ve zaman ile değişen sistemleri kontrol etmede çok başarılı olduğu görülmüştür. GPC'nin DMC'ye karşı bir üstünlü olan; kararsız sistemleri kontrol edebildiği de görülmüştür.

COMPARISON BETWEEN DYNAMIC MATRIX CONTROL AND GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL

SUMMARY

Last decades, development of aspect of the predictive approach in control, Model Predictive Control (MPC) is often preferred in both industry and academia. As shown in this study, MPC is very successful with controlling to several systems.

In this study, Dynamic Matrix Control (DMC) that is one of the subset of the MPC and Generalized Predictive Control (GPC) that is the latest development in MPC are compared each other. Although DMC is very popular in industry, GPC that has been studied mostly by academia and will probably be replaced with DMC in industry has a powerful algorithm compared to DMC. Therefore, these algorithms are compared each other considering advantages and disadvantages.

Firstly, a literature review has been done about these algorithms explaining detailly earlier times of them and development in years. Principle of MPC was analysed. After that, Mathematical representations of them were explained. Predictor of DMC, based on step response model was explained. In the same way, predictor of GPC, based on time series and state space models was also explained. Finally, the optimal control law are derived using these predictors.

DMC and GPC were applied to models those of different dynamic details are given in the study. Model uncertainty, disturbance and white noise were considered during the control. It is understood that both DMC and GPC can cancel the load disturbance by analysing the results of simulation. They are also very successful while controlling nonminimum phase systems, systems with wrong model order and time varying systems. Additionally, It is observed that GPC can control unstable systems opposite to DMC.

1. GİRİŞ

Günümüzde, ürün kalitesin gittikçe daha da önemli hale gelmesi, artan verimlilik talepleri, yeni çevre kanunların uygulanmaya başlanması ve pazarlardaki hızlı ekonomik değişimler, endüstrinin şekillenmesinde önemli rol oynamaktadır. Geçen 20 yıllık süreçte, model öngörülü kontrolün, teori ile birlikte pratikte de, çok başarılı bir kontrol stratejisi olduğu kanıtlandı. Bu kabulün ana sebebi, MPC'nin, zorlu ve yüksek dereceden ve çok değişkenli proseslere çok kolayca uygulanabilen, yüksek performanslı bir kontrolcü sağlamasıdır. Proses kısıtlamaları basit ve sistematik bir yolla ele alınır.

Öngörülü kontrol, gelecek zaman anlarındaki sistem çıkışının öngörölmüş değerlerini üretmek için, proses modelinin açık bir şekilde kullanılmasına dayanan bir kontrol stratejisidir. Bu öngörölmüş değerler, sistemin gelecekteki davranışını en uygun hale getirecek bir kontrol değişimleri dizisini hesaplamak için kullanılır. Öngörülü kontrol tek bir teknikten ziyade bir metodolojidir. Çeşitli metotlar arasındaki başlıca fark, matematik formülasyonunun değişik yollarla yapılmasından kaynaklanmaktadır.

Model öngörülü kontrolde modelin açık bir şekilde kullanılması, öngörülü kontrol ve klasik PID kontrol arasındaki başlıca farkı oluşturmaktadır. Kontrolcü davranışının detaylı bir şekilde incelenebilmesi, simülasyon yapılabilmesi ve performansın değerlendirilebilmesi MPC'nin bazı avantajlarıdır. Bununla birlikte, bazı kusurlar da vardır. Kusurlardan biri ise sistemin uygun bir modeline ihtiyaç duyulmasıdır. Elde edilen yararlar, gerçek sistem ile modeli arasındaki farklılıklardan oldukça etkilenmektedir. Diğer bir kusur ise, her ne kadar kontrol kanunu uygulamak kolay ve biraz hesap gerektirse de, MPC'nin elde edilmesi PID'e göre daha karmaşıktır. Eğer sistem dinamiği değişmiyor ise kontrolcü önceden elde edebiliriz ama, uyarlamalı kontrol durumunda bütün hesaplamalar her örnekleme anında yapılmalıdır. Sınırlamalar da göz önünde bulundurulduğunda, hesaplamaların miktarı çok artar [1].

Öngörülü kontrolün öncülüğü eş zamanlı olarak, 1978'de Richalet [2] ve Cutler ve Ramarker tarafından da 1980'de [1] yapılmıştır. Açık çevrim kararlı sistemlerden

The figure shows a time axis with markers at $t-3$, $t-2$, $t-1$, t , $t+1$, $t+2$, $\dots$, and $t+Ny$. A vertical line is drawn at t . The input signal $u(t)$ is a step function that is low for $t < t-1$, high for $t-1 \leq t < t+1$, and low for $t \geq t+1$. The output signal $y(t)$ is a smooth curve that starts at a low value, rises to a peak at t , and then falls. The predicted output signal $\hat{y}(t+i|t)$ is a dashed curve that follows $y(t)$ for $t < t+1$ and then diverges, staying higher than $y(t)$ for $t \geq t+1$.

Bütün öngörülü kontrolcülerdeki metodoloji, her bir örnekleme anında, belirlenen N_y öngörü ufku için gelecek sistem çıkışlarını öngörme esasına dayanır. $\hat{y}(t+i)$ $i=1...N_y$ öngörü çıkışları, sistem modeline, t anına kadarki geçmişteki bilinen sistem girişlerine ve çıkışlarına dayanır.

Amaç fonksiyonları genelde öngörülen çıkış sinyali ile öngörülen referans yörüngesi arasındaki hatanın ikinci dereceden fonksiyonu şeklinde tanımlanır. Bazı algoritmalar sistemin çıkışı yerine sistemin durum değişkenlerini kullanır. Çoğu durumda, kontrol eforu amaç fonksiyonunun içerisinde yer alır. Ağırlık faktörleri fonksiyonun içerisindeki her bir terimin etkisini ayarlamak için kullanılır. Problemin çözümü amaç fonksiyonunu en aza indiren gelecek kontrol dizisidir. Bunun için gelecek çıkışları veya durum değişkenlerini öngörmek için bir model kullanılır.

2

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1.1)$$

gibidir. Bu fonksiyon, $u(t+i)$ gelecek girişlerin ve $r(t+i)$ referansın gelecek değerleri ile $\hat{y}(t+i|t)$ öngörölmüş çıkışların arasındaki hataların ikinci dereceden fonksiyonudur. δ ve λ ağırlık faktörleri sırasıyla hata ve girişlerin etkilerini ayarlamak için kullanılır.

Öngörülen çıkışların ve gelecek girişlerin dizisi sırasıyla N ve N_u ufukları ile sınırlanır. $u(t+i)$ giriş dizisindeki sınırlama kontrol hareketinin N_u adım ilerisi sonra sabit olduğu kabulünden gelir. Diğer taraftan öngörü ufku, amaç fonksiyonu içinde göz önünde bulundurulmuş, öngörülen çıkış dizisini sınırlar. Kontrol ufku öngörü ufkundan daha küçük olmalıdır. Ağırlık faktörleri ve ufuklar kontrolcünün ayar katsayılarıdır. Amaç fonksiyonun optimizasyonu gelecek çıkışların öngörülmesini gerektirir. Öngörülen çıkışlar iki sinyalin toplamıdır:

$$\hat{y}(t+i|t) = y^0(t+i|t) + G\Delta u(t+i) \quad (1.2)$$

İlk terim serbest cevap ikinci terim ise zorlanmış cevaptır. $y^0(t+i|t)$ serbest cevabı prosesin, gelecek girişlerinin sabit olduğu göz önüne alınarak değerlendirilmesiyle ilgilidir. $G\Delta u(t+i)$ zorlanmış cevap, G sistemin dinamik matrisi ise, kontrol dizisinin, amaç fonksiyonunun minimize edildiği çözüme eşit olduğu zaman, çıkışın öngörülmesiyle ilgilidir.

Öngörülen çıkışlar için olan ifade amaç fonksiyonu içinde yerine konulabilir ve en küçük kareler probleminin çözümü arzu edilen kontrol dizisine yol gösterir. Elde edilen kontrol dizisinin sadece birinci kontrol hareketi sisteme uygulanır. Daha sonra, ufuk bir adım ileri kaydırılır ve bütün değerler güncellenir ve optimizasyon problemi tekrar çözülür. Buna kayan ufuk prensibi denir ve bütün öngörülü kontrol stratejileri tarafından benimsenir. N_u 'ya kadarki bütün dizinin sisteme uygulanması tavsiye edilmez çünkü, gerçek çıkışın öngörülenden farklı olmasına sebep olan önlenemeyen bozucuların mükemmel bir şekilde kestirilmesi mümkün değildir. Dahası N_u boyunca ayar noktalarının değiştirilmesine de karar verilebilir.

Çeşitli öngörülü kontrol algoritmaları birbirlerinden sadece, sistemi temsil etmekte kullanılan modeller, gürültü ve amaç fonksiyonu modelleri yönünden farklılık gösterir. Kullanılan bu modeller darbe/basamak cevabı modelleri, transfer fonksiyonu modelleri veya durum uzay modelleri olabilir.

- Darbe/basamak cevabı modelleri: Detaylı dinamik modellerin nadir kullanıldığı proses endüstrisinde darbe/basamak cevabı modelinin, öngörülü kontrolün kaynağındaki payı büyüktür. Fiziksel kanunlara dayalı proseslerin güvenilir dinamik modellerinin elde edilmesi zordur bu nedenle darbe/basamak cevabı modeli kullanılır. Bu modelin basit deneyler ile elde edilmesi oldukça kolaydır. Dezavantajı ise çok miktarda parametreye ihtiyaç duymasıdır.
- Transfer fonksiyonu modelleri: Bazı prosesler için, fiziksel kanunlara veya parametrik sistem tanılamaya dayalı iyi modeller elde edilebilir. Bu durumda bir transfer fonksiyonu modeli tercih edilir. Darbe/basamak cevabı modeline göre daha az parametre kullanılır.
- Durum uzay modeli: Bu model zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin ifade edilmesinde en genelidir ve en ayrıntılı ve oluşturulması en zor olanıdır.

Genelleştirilmiş öngörülü kontrol (GPC), 1987’de Clarke [3] tarafından önerilen, öngörülü kontrolün bir sınıfıdır. Analitik bir çözüm sağlar (sınırlama olduğunda da) ve kararsız ve minimum olmayan faz sistemler ile başa çıkabilir. Azaltılmış dereceden olan tasarımlara öncülük eden sistemler için transfer fonksiyonu modeli kullanır.

Kontrolcü özbağlanımlı tülemeli yürüyen ortalama (CARIMA), Kontrolcü özbağlanımlı yürüyen ortalama (CARMA) gibi transfer fonksiyonu modelleri GPC tarafından kullanılır.

Çoğu endüstriyel sistemler ve prosesler bir çok çıkış ve ayarlanmış değişkene (giriş) sahiptir. Kesin durumda, bir ayarlanmış değişken başlıca ilgili kontrol edilen değişkeni etkiler ve her bir giriş çıkış çifti tek girişli tek çıkışlı (SISO) sistem olarak ele alınabilir ve bağımsız çevrimler ile kontrol edilebilir. Farklı değişkenler arasındaki etkileşim ihmal edilemediği durumlarda sistem çok girişli çok çıkışlı (MIMO) sistem olarak ele alınmalıdır. Eğer MIMO bir sistem SISO olarak ele alınırsa, bu etkileşim belki düşük performans ve hatta kararsızlık ile sonuçlanır.

Pratikte bütün sistemler kısıtlamalara maruz kalır ve bu, amaç fonksiyonu içerisinde, giriş ve çıkış üzerindeki kısıtlamalar şeklinde ele alınabilir. Bir çok endüstriyel sistemde, kontrol sistemi çalışma şartları yüzünden kısıtlara çok yakın yerlerde çalışacaktır. Bu, optimizasyon çözümünün kısıtlar civarında olduğu şeklinde çok yaygın bir inanişö öncülük etmektedir. Diğer taraftan çok değışkenli öngörölü kontrolcü tasarımımda, tüm girişler ve çıkışlar için ağırlık faktörlerinin ve öngörölü ufukların belirtilmesi gerekmektedir. Bundan dolayı, çok sayıda parametre seçilmelidir. Kötü ayarlanmış öngörölü kontrolcü, valf açıklığı, maksimum debi gibi fiziksel kısıtlamaların sıklıkla göze çarpmamasından dolayı sistemi uç noktalara bazen de kararsız şartlara almaya eğilimlidir.

1.1 Tezin Amacı

Model öngörölü kontrolün alt dallarından biri olan dinamik matris kontrol, en çok bilinen ve en yaygın kullanılan bir kontrol çeşitidir. Bununla birlikte, genelleştirilmiş öngörölü kontrol ise akademik olarak üzerinde yoğun bir şekilde çalışılan ve bu konuda geline en son nokta olan ve endüstride DMC kadar yaygın kullanılmamasına karşın, DMC'nin yerini alması muhtamel olan daha üstün bir kontrol çeşitidir. Bu tez ile birlikte, dinamik matris kontrol ile genelleştirilmiş öngörölü kontrol algoritmaları karşılaştırılmıştır. DMC ve GPC'nin aralarındaki benzerlikler ve farklar incelenmiştir.

Bu iki kontrolcü tek girişli tek çıkışlı ve farklı dinamik karakteristiklere sahip çeşitli modellere uygulanmıştır. Bu modeller, endüstride sıklıkla karşımıza çıkabilmektedir. Uygulamalarda, kısıtlamasız DMC ve GPC kullanılmıştır.

1.2 Literatür Özeti

Model öngörölü kontrolün (MPC), son 20 yıl boyunca endüstriye muazzam etkisi olmuştur. MPC'nin çok değışkenli sınırlamalı kontrol problemlerin üstesinden gelmesi bunda etkili olmuştur. Ayrıca bir çok olumlu rapor MPC'nin popülaritesini teyit etmektedir.

1.2.1 Model öngörölü kontrolün tarihi

Model öngörölü kontrolün gelişim kavramı, Kalman'nın 1960'ların başlarındaki, sınırlamasız durum değışkeni ve girişleri amaç fonksiyonunun minimize edilmesi için tasarlanmış doğrusal ikinci dereceden regülatör (LQR) ile çalışmalarına

dayandırılabilir. Sonsuz ufuk LQR algoritmasına güçlü ve dayanıklı bir özellik bahsetmektedir. Fakat, bu, endüstrideki kontrol teknolojisi gelişimini çok az etki etmiştir. Bunun sebebi formülün içerisinde sınırlamanın olmaması, gerçek sistemlerin doğrusal olmaması ve yukarıdaki optimal kontrol kavramının teknik yetersizlikler ve kontrol mühendisleri tarafından uygulanamaz olarak görülmesi verilebilir. Bundan dolayı, MPC'yi ilk savunular endüstrideki ihtiyaçları belirleyerek bağımsız bir şekilde devam ettiler [2].

1970'lerin sonuna doğru, model öngörülü kontrolün endüstrideki başarılarını anlatan çeşitli makaleler yayımlandı. Bu MPC prensip olarak 1978'de Richalet'in [2] model öngörülü deneye dayalı kontrol (daha sonra model algoritmik kontrol olarak bilinen) ve 1980'de Cutler ve Ramarker'ın [1] dinamik matris kontrol algoritmalarını sunmaktaydı. Onların stratejisinin genel teması, hareket sınırlamasına maruz kalan öngörülen hatanın minimize edilmesi ile belirlenen gelecek kontrol hareketlerinin gelecekteki etkisini öngörmek için prosesin dinamik matrisini (önceki impuls cevap sonraki basamak cevabı) kullanmaktır. Sistemden güncellenen bilgilerle birlikte her bir örnekleme anında optimizasyon tekrarlanmaktadır. Bu formüller algoritmik olmak ile birlikte aynı zamanda deneye de dayalıdır (heuristic) ve dijital bilgisayarların gittikçe artan potansiyel avantajına da sahiptir. Kararlılık teorik olarak konuşulmadı ve MPC'nin ilk versiyonları otomatik olarak dengede tutamıyordu. Fakat, kararlı sistemlere odaklanarak ve ufku sistemin oturma zamanıyla karşılaştırıldığında daha geniş tutarak ve amaç fonksiyonunun ağırlık faktörleri ile oynayarak kararlılık elde edildi [3].

Daha sonra ikinci dereceden dinamik matris kontrol gibi ikinci nesil MPC'ler sistemin doğrusal olduğu bölgede sınırlamalı açık çevrim optimal kontrol problemini çözmek için ikinci dereceden programlar kullandı [4].

Kontrol ve durum değişkenlerin sınırlamaları doğrusal eşitsizlikler ile tanımlanır. Başka bir çalışma uyarlamalı kontrol fikri etrafında bağımsız olarak doğdu. Esasında, transfer fonksiyonu modelleriyle (model tanılama için daha az parametre gerektirenler) formüle edilen tek değişkenli prosesler için bir strateji geliştirdi ve gelecekteki inputu hesaplamak için Diafontin (Diophantine) eşitliği kullanıldı. İlk adım 1970'de Astron [5] tarafından minimum varyans kontrol ile geldi. Algoritmanın minimize edilen performans indeksi en son çıkışlar ile referans (öngörü ufku $N_y=1$) arasındaki hatanın ikinci dereceden fonksiyonuydu. Minimum olmayan faz sistemler

ile başa çıkmak için cezalandırılmış bir çıkış, amaç fonksiyonu içinde yer aldı ve geliştirilmiş minimum varyans (GVM) kontrol olarak adlandırıldı. Ufkun limit koymasının üstesinden gelmek için, 1984'te Peterka [5] öngörüye dayalı kendi kendini ayarlayan kontrolü geliştirdi. 1985'te De Keyser [5] tarafından sunulan genişletilmiş öngörülü öz uyarlamalı kontrol (EPSAC) diofontin denklemi çözmek yerine bir suboptimal öngörme kullanarak şimdiki zamandan başlayan sabit bir kontrol sinyali sunar. Daha sonra giriş sıfır sürekli durum hatasını garanti etmek için kontrol sinyalindeki artış ile yer değiştirdi. GVM'e dayanarak 1987'de Clarke [3] bugünde en popüler metodlardan biri olan Genelleştirilmiş öngörülü kontrolü (GPC) geliştirdi. GPC için kapalı bir form Soeterboek tarafından verildi. Sınırlamalı GPC'in durum uzay versiyonları ayrıca geliştirildi.

1.2.2 Kararlılık

Öngörülü kontrol ile ilgili çalışmalarda kararlılık her zaman önemli bir mesele olmuştur. Sonlu ufuktan dolayı kararlılık garanti edilememektedir ve ağırlık faktörlerini ve ufuklar ayarlanarak kararlılık ancak başarılabilir. Mohtadi, durum uzay ilişkisini kullanarak GPC için özel kararlılık teoremlerini kanıtladı ve gürbüzlük iyileştirmesi üzerine filtre polinomlarının etkisini çalıştı. Fakat, öngörülü kontrol için genel bir kararlılık özelliği sonlu bir ufuk için hala bulunamamıştır. Bu, 1990'lı yıllarda araştırmacıları kararlılığı garanti edilmiş, yeni bir kontrol metodunun peşinden koşmaya itti. Bu amaçla, terminal sınırlamaların kullanımı, çift modun (dual mode) tanıtılması ve sonsuz öngörü ufuklarının kullanılması ve diğerleri gibi çok sayıda tasarım değişiklikleri önerildi [5]. 1991'de Clarke ve Scattolini ve 1990'da Mosca birbirlerinden bağımsız olarak, sonlu bir ufuktan sonra çıkış üzerinde son nokta eşitlik sınırlamalarını etkileyerek kararlı bir öngörülü kontrolcü geliştirdiler [5]. 1992'de Kouvaritakis GPC için, amaç fonksiyonunun minimizasyonundan önce prosesi dengeleyerek kararlı bir formül sundu [5]. Bu tekniklerin çoğu kontrol edilen sistemin durum uzay gösterimi için özelleştirildi ve ek sınırlamalar ve tasarımın yapısı değiştirilerek kararlılık büyük ölçüde başarıldı. Fakat, mühendisler, problemin yapısını değiştirmeyi önlediler ve kontrolcüyü ayarlayarak kararlılığın üstesinden gelmeyi seçtiler. Bunun için deneye dayalı yöntem kullanıldı.

1.3 Model Öngörülü Kontrol: Optimal Kontrol Problemi

Son zamanlarda, MPC için teorik esaslar ortaya çıkmaya başladı. Araştırmacılar LQR'ye geri dönerek model öngörülü kontrolün aslında kayar ufuklu standart optimal kontrol problemini çözdüğünü tartışmaya başladılar. Bu fikir ta 1960 kadar gitmekteydi. MPC, yavaş dinamikli endüstri proseslerinin açık çevrimli problemler için online çözüme izin vermesinden beri matematiksel programlama problemi olarak tanımlanıyordu. Bu durumda başlangıç durumları kontrol edilen sistemin şimdiki durumları idi. Diğer taraftan, geri besleme çözümünü belirleme, çözümü zor olan Hamilton Jacobi Bellman (dinamik programlama problemi) diferansiyelinin çözümünü gerektirmektedir. Riccati denklemi bazı optimal kontrol problemleri için özel bir durumu göstermektedir. Onunla gösterilen MPC yaklaşımı ile dinamik programlamanın kullanımı arasındaki fark yalnızca bir uygulama olduğuydu. Bu çizgideki araştırmalar 1983'te Kwon ve Pearson'un ve 1988'de Keerthi ve Gilbert'in çalışmalarıyla ilk örneklerine kavuştu ve son zamanlarda 1993'te Muske ve Rawlings'in çalışmaları popülerite kazandı [5].

Çok yakın geçmişte, kontrol problemlerine iki ana yaklaşım çok popülerdir. İlk olanı, Lyapunov fonksiyonu gibi sabit bir ufuk için optimal amaç fonksiyonu kullanmaktadır. İkinci yaklaşım ise çeşitli ufuklar için optimal amaç fonksiyonu dizisinin monoton özelliklerinden yararlanmaktadır. Dikkat edilmelidir ki doğrusal sistemler için sıkı sınırlamaların olması kontrolcünün tasarımını doğrusal olmayan bir problem yapmaktadır. Böylece kararlılığı kurmak için doğal araç Lyapunov teorisidir.

MPC'nin parametrelerini kararlılık ve performans için ayarlamakla ilgili formüllerin bulunması bu çizgideki çalışmaların ana amacıdır ve son ilerlemeler gelecek vaat etmektedir. Fakat, dinamik problemin çözümü pratik değildir ve bu da, endüstride bu yeni metotları kabul etmede bir direnç olarak sayılabilir.

2. MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROLÜN PRENSİPLERİ

Literatürde MPC ; “belirgin yada olası sistem çıkışlarının gözlemleri sonucunda, bir sistemin gelecekteki çıkışlarını önceden kestirebilme” olarak tanımlanmıştır.

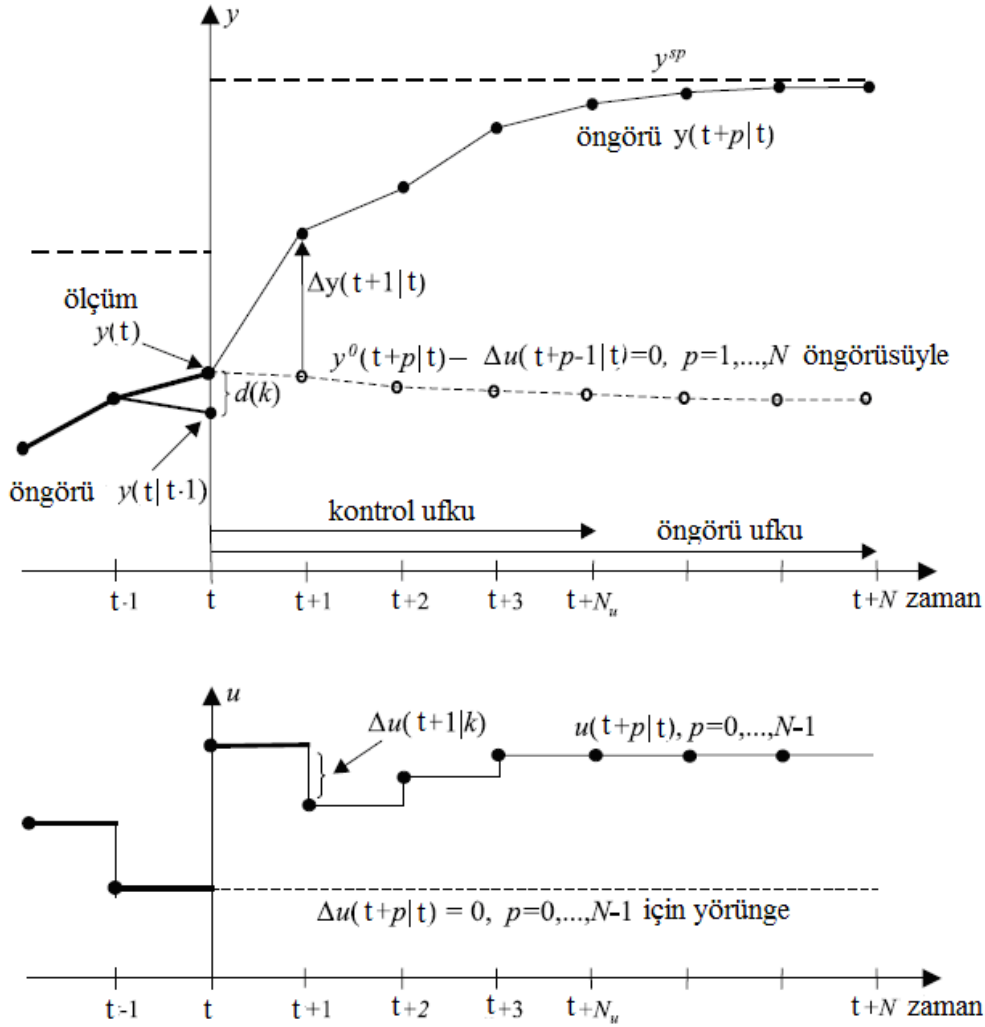
Model öngörülü kontrolün prensipleri aşağıdaki gibi tarif edilebilir:

Ardışık her t örnekleme anında (tT_p sürekli zamanda, T_p örnekleme periyodu) ve $t=0,1,...$, olduğunda:

- Varsayılan bir bozucu modeliyle (kontrol edilemeyen proses girişi) birlikte dinamik bir proses ve model kısıtlamaları.
- Geçmişteki kontrol girişlerinin (ayarlanmış değişkenler) değerleri ile birlikte şimdiki ve geçmişteki proses çıkışlarının ölçümleri.
- Kabul edilen bir öngörü ufku için bilinen veya varsayılan yörüngeler.

$u(t + p/k) = u(t + N_u - 1/t)$ farzedilerek ve N_u kontrol ufku olmak üzere $u(t) = u(t/t)$, $u(t+1/t)$, $u(t+1/t), ..., u(t + N_u - 1/t)$ kontrol girişleri hesaplanır. $u(t + p/t)$, şimdiki t örnekleme anında belirlenen $t+p$ gelecek örnekleme anı için kontrol öngörüsü anlamındadır. Kontrol girişleri, öngörülen ve kontrol edilen $y(t + p/t)$ çıkışları ile referans değerleri arasındaki farkı minimize etme yoluyla hesaplanır. Buradaki referans değerleri öngörü ufku boyunca olan gelecek $y^{sp}(t + p/t)$ ayar noktalarıdır. Minimize etmeden kasıt seçilen bir kontrol kriterinin minimize edilmesidir. Ondan sonra, sadece hesaplanan kontrol girişleri dizisinin ilk elemanı prosese uygulanır ($u(t/t)$). Gelecek $t+1$ örnekleme anında, yeni bir proses çıkışı ölçümü yapılır ve bütün aynı uzunluktaki N öngörü ufkuyula birlikte, prosedür tekrarlanır Fakat N öngörü ufku bir adım ileri kaydırılır. Buna kayan ufuk prensibi denir.

SISO bir sistemin öngörülü kontrol prensibi Şekil 2.1’de gösterilmektedir. Yatay eksen ayrık zamanı göstermektedir. Resimde iki adet kontrol edilen çıkış ve iki adet de kontrol girişi ve bir referans görülmektedir [6].



Şekil 2.2 : Model öngörülü kontrolün ana prensibi

- $y^o(t+p|t)$, $p=1,2,...,N$ öngörülen çıkışı, öngörü ufku boyunca sabit tutulan ve önceki örnekleme anında hesaplanan $u(t-1)$ proses girişi durumuyla ilgilidir (ör. $u(t+p-1) = u(t-1)$). Bu durumdaki giriş ve çıkış yörüngeleri, kesikli çizgi ile belirtilmiştir. $y^o(t+p|t)$ yörüngeleri, gelecek çıkışların sadece önceki girişlere bağlı durumdaki gibi tanımlanır. Şimdiki t anında bu yörünge üzerinde hiçbir etkimiz yoktur. Bundan dolayı, bu, sıklıkla öngörülen çıkış yörüngesinin serbest bileşeni olarak tanımlanır.
- $y(t+p|t)$ öngörülen çıkış yörüngesi geçmiş ve gelecek kontrol girişlerinin ikisine de bağlıdır ($u(t-1)$ 'e kadar olan geçmiş girişler ve t örnekleme anında hesaplanan $u(t+p-1|t)$, $p=1, 2, ..., N-1$ gelecek girişleri). N_u kontrol ufku, N kontrol ufkundan daha kısa alınır. Sürekli çizgiler proses yörüngelerini belirtmektedir. İnce olanlar giriş ve çıkış yörüngelerinin

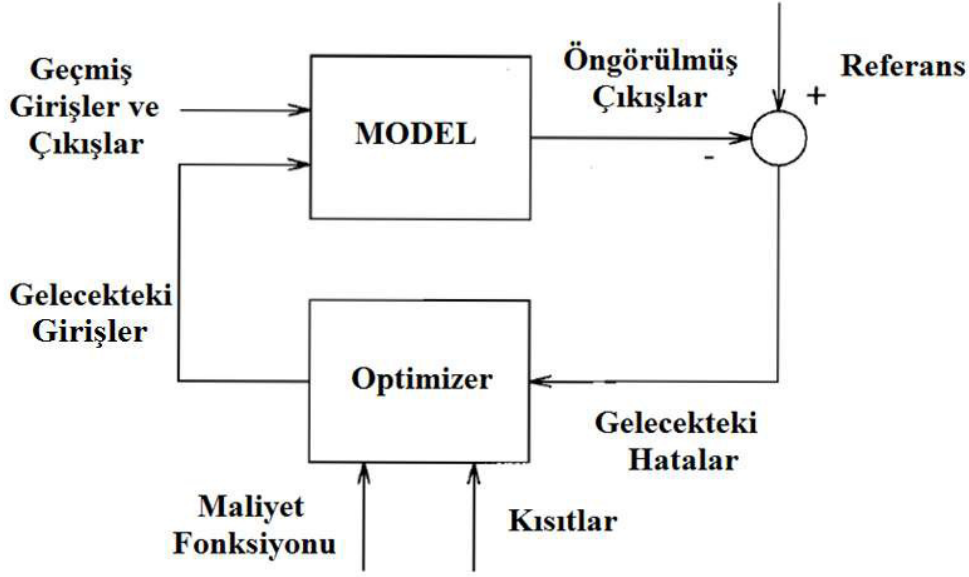
öngörölmüş parçaları, kalın olanlar ise ölçölmüş çıkış değeri ve prosese uygulana geçmiş girişleri ile şimdiki zamanda prosese uygulanan girişi temsil etmektedir.

- $y^{sp} = y^{sp}(t + p|t)$, $p = 1, 2, \dots, N$ ayar noktalarını göstermektedir. t örnekleme anında bir basamak değışikliğı vardır.

Gelecekteki kontrol girişlerinin hesaplanması için kullanılan proses modeli genellikle gerçeğın bir tahminidir. Dahası, kontrol edilemeyen girişlerin (bunlar hatalı ölçümler veya hiçbir biçimde ölçülemeyen girişlerdir.) içinde bir belirsizlik vardır. Bundan dolayı, çıkış öngöröleri genellikle (sonra) ölçölen değerilerden farklı olur. Bu gerçek, resim 1’de proses çıkışındaki t örnekleme anında, $d(t) = y(t) - y(t|t-1)$, şeklinde ölçülemeyen bozucu olarak gösterilmiştir. $y(t|t-1)$, k örnekleme anı için $(t-1)$ anında öngörölen proses çıkışıdır.

Gelecek kontrol sinyali, prosesi $w(t+i)$ referans yörüngesine mümkün olduğunca yakın tutmak için belirli bir kriterin optimizasyonu ile hesaplanır. Bu kriter, genellikle öngörölü referans yörünge ve öngörölü çıkış sinyali arasındaki hataların karesel bir fonksiyonu şeklindedir. Giriş sinyalinin etkisi bir çok durumda amaç fonksiyonu içerisinde yer alır. Kesin bir çözüm ancak, model doğrusal ise, kısıtlar yoksa ve kriter hataların karesinden oluşan ikinci dereceden bir fonksiyonsa elde edilebilir. Bu durumun aksinde iteratif optimizasyon yöntemi kullanılmalıdır.

Kontrol sinyali $u(t | t)$, hesaplanan gelecek kontrol sinyalleri alınmadığı halde, prosese gönderilir; çünkü gelecek örnekleme anında $y(t+1)$ zaten bilinmektedir ve 1.adım bu yeni değeri tekrarlanır ve tüm diziler yenilenerek alınır. Böylece $u(t+1|t+1)$ kayan ufuk stratejisi kullanılarak hesaplanabilir (prensipte mevcut yeni bilgiden dolayı $u(t+1|t)$ ’den farklı olacaktır). Bu kavram aşağıdaki şekil 2.2’de gösterilmiştir [7].



Şekil 2.3 : MPC ana yapısı

2.1 MPC Elemanları

- **Öngörü Modeli** : Belirli bir zaman aralığında sistem çıkışı öngörülür.
- **Amaç Fonksiyonu**: Gelecekteki istenen sistem çıkışının bilindiği varsayımıyla, bu çıkışla öngörülen gelecek çıkışı arasındaki farkı minimum yapacak şekilde bir gelecek giriş dizisi seçilir.
- **Kontrol Sinyali** : Seçilen giriş dizisinin ilki sisteme uygulanır ve bu adımlar bir sonraki örnekleme anında tekrarlanır.

2.1.1 Öngörü modelleri

MPC'nin temel taşıdır. Öngörülen çıkışları hesaplamak için kullanılır. Bu yüzden eksiksiz bir dizayna sahip, süreç dinamiklerini tam olarak yakalayabilen en iyi olası modelin kullanılması zorunludur. Sistemin doğrusal olup olmamasına, kısıtlara, bozucu etkiye göre farklı tipte öngörü modelleri mevcuttur [7].

Doğrusal modeller

- Basamak Cevapı Modeli,
- Darbe Cevapı Modeli,
- Transfer fonksiyonu Modeli,
- Durum uzayı Modeli,
- Polinom modelleri (ARX,ARMAX)

Doğrusal olmayan modeller:

- Yapay Sinir Ağları
- Bulanık Modeller,...

Yukarıda listelenen bazı modellerin matematiksel ifadeleri aşağıda kısaca açıklanmaktadır.

2.1.1.1 Basamak cevabı modeli

Modele Dayalı Öngörülü Kontrol algoritmalarında yaygın olarak kullanılan modellerden biri basamak cevabı modelidir. Dinamik Matris Kontrol yöntemi bu modeli kullanmaktadır. Giriş çıkış ilişkisi (2.1) ile verilir. Buradaki g_i ' ler sisteme basamak giriş uygulandığında elde edilen çıkışın örneklenmiş değerleridir. Görüldüğü gibi sistem çıkışına ilişkin N değer göz önüne alınmış, sonsuz toplam yapılmamıştır. Bu nedenle bu model integrator içermeyen ve kararlı doğrusal sistemler için uygundur. $G(z^{-1})$ sistemin ayrık transfer fonksiyonu ve z^{-1} geciktirme operatörüdür.

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) = y_0 + G(z^{-1})(1-z^{-1})u(t) \quad (2.1)$$

Bu model kullanılarak öngörü ifadesi (2.2) şeklinde yazılabilir (Camacho ve Bordons, 2004).

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-i|t) \quad (2.2)$$

2.1.1.2 Darbe cevabı modeli

Bu modeli, Model Algoritmik Kontrol algoritması kullanmaktadır. Giriş çıkış ilişkisi (2.3) ile verilir. h_i 'ler sisteme darbe giriş uygulandığında elde edilen çıkışın örneklenmiş değerleridir [7].

$$y(y) = \sum_{i=1}^N h_i u(t-i) = H(z^{-1})u(t) \quad (2.3)$$

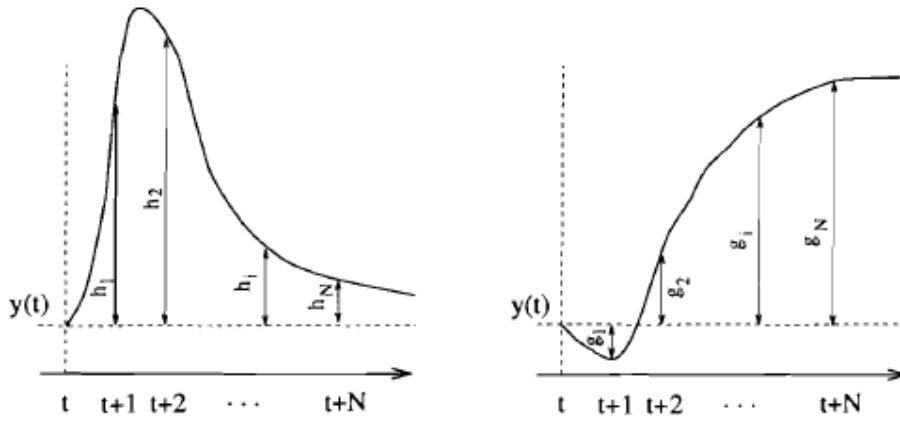
Darbe cevabının katsayıları ile basamak cevabının katsayıları arasında (2.4) ve (2.5)'de verilen ilişkiler bulunmaktadır.

$$h_i = g_i - g_{i-1} \quad (2.4)$$

$$g_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (2.5)$$

Bu model kullanılarak öngörü ifadesi (2.6) şeklinde yazılabilir.

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(t+k-i|t) = H(z^{-1})u(t+k|t) \quad (2.6)$$



Şekil 2.4 : Darbe ve basamak cevabı

2.1.1.3 Transfer fonksiyonu modeli

Parametre sayısı az olması ve her türlü lineer sisteme uygunluk avantajları sebebiyle yaygın olarak kullanılan bir modeldir. Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritması bu modeli kullanmaktadır [7].

Sistem çıkışı $y(t)$ ve sistem girişi $u(t)$ ve

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \quad (2.7)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \quad (2.8)$$

olmak üzere giriş çıkış ilişkisi (2.9) ile verilir.

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) \quad (2.9)$$

Bu modelin öngörü ifadesi ise (2.10) olarak yazılabilir [7].

$$\hat{y}(t+k|t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t+k|t) \quad (2.10)$$

2.1.1.4 Durum uzayı modeli

Durum uzayı modeli, çok değişkenli sistemlerin tanımlanmasında kolaylık sağladığından dolayı Öngörüsöl Fonksiyonel Kontrol (Predictive Function Control) gibi bazı Modele Dayalı Öngörölü Kontrol algoritmalarında kullanılmaktadır.

Gösterimi (2.11)'de ifade edildiği şekilde yapılmaktadır. [7].

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) \\ y(t) &= C(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bu denklemlerde x durum değişkeni, A , B ve C sırasıyla sistem matrisi, giriş matrisi ve çıkış matrisi olarak ifade edilmektedir. Öngörü modeli (2.12)'de gösterildiği şekilde ifade edilmektedir [7].

$$\hat{y}(t+k|t) = C \hat{x}(t+k|t) = C \left[A^k x(t) + \sum_{i=1}^k A^{i-1} Bu(t+k-i|t) \right] \quad (2.12)$$

2.1.2 Amaç fonksiyonu

Çeşitli MPC algoritmaları kontrol kuralını geçerli kılmak için farklı maliyet fonksiyonları (cost fuction) kullanır. Genel amaç, ilgili ufuktaki gelecek çıkışın (y) bir referans sinyalini (w) takip ederken, aynı zamanda kontrol etkisi (Δu) pratikteki kısıtlamalar ve maliyet açısından önemli olduğu için enerji terimi olarak ifade edilebilir olmasıdır. Amaç fonksiyonu, genel olarak aşağıdaki eşitlik ile tanımlamak mümkündür:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2.13)$$

Maliyet fonksiyonunda ifade edilen N_1 ve N_2 sırasıyla minimum ve maksimum öngörü ufuklarına karşılık gelmekte olup, N_u ise kontrol ufku olarak adlandırılmaktadır. $\delta(j)$ ve $\lambda(j)$ katsayıları ise maliyet fonksiyonunda gelecekteki sistem davranışını belirleyen ağırlık katsayılarıdır. Bu katsayılar genellikle sabit değerler veya üstel ifadeler olarak seçilebilirler. Örnek olarak, (2.14)'de gösterildiği şekilde $\delta(j)$ seçildiğinde bu durumda üstel bir ağırlık katsayısı seçilmiş olur.

$$\delta(j) = a^{N_2-j} \quad (2.14)$$

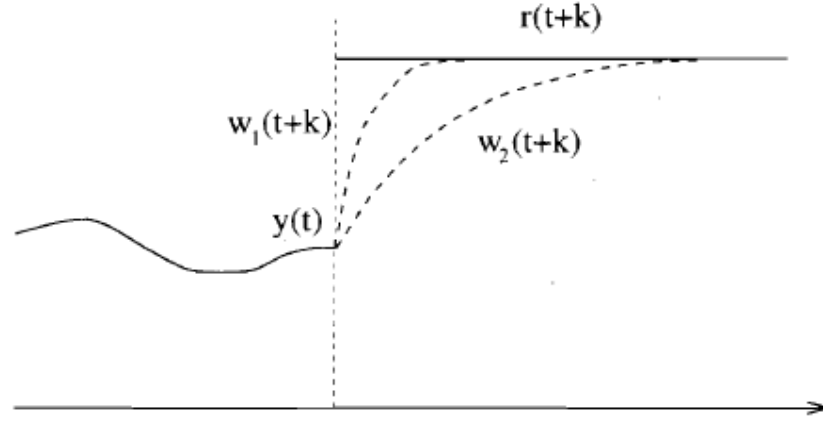
Eğer $0 < a < 1$ seçilirse bu durumda t anından en uzaktaki hatalar, t anına daha yakın hatalara göre daha fazla cezalandırılırken sistem cevabının istenilen referans değerine yükselmesine daha düz bir şekil verir ve daha az bir kontrol sinyali uygulanmasını sağlar. Öte yandan, eğer $a > 1$ seçilirse bu durumda ilk hatalar daha fazla cezalandırılıp daha sıkı bir kontrol sinyali uygulanmış olur. Anlatılan katsayıların tamamı, standart bir kontrol sinyalinden özel prosesler için ölçüm yapılarak hesaplanan tüm kontrol sinyallerine kadar endüstride kullanılan tüm model öngörülü kontrol algoritmaları için ayar parametreleri olarak kullanılabilirler [7].

Tüm prosesler, pratikte belirli kısıtlamalar içerir. Bu bakımdan bazı durumlarda optimal kontrol problemini kısıtlamalı optimizasyon problemi olarak ele almamız gerekmektedir.

Öngörü kontrolün algoritmalarının avantajlarından biri de eğer gelecekteki referans değerleri biliniyorsa, referans değişikliği sistemin cevabını etkilemeden sistem bu değişikliğe kendini adapte ederek sistem cevabında olabilecek gecikmelerin önüne geçilecektir. Robot çalışmaları, servolar ve kesikli prosesler gibi pek çok uygulamada referansın gelecekteki durumu olan $r(t+k)$ daha önceden bilinmektedir. Model öngörülü kontrol algoritmalarının büyük bölümünde, sistemin o andaki çıkış değerinden istenilen referansa doğru düzgün yaklaşım olan $w(t+k)$ kullanılır.

$$w(t) = y(t) \quad w(t+k) = \alpha w(t+k-1) + (1-\alpha)r(t+k) \quad k = 1 \dots N \quad (2.15)$$

$0 < a < 1$ değeri ayarlanabilen bir değer olup, sistemin dinamik cevabını etkilemektedir. Şekilde görüldüğü üzere $r(t+k)$ referans değeri sabit seçilmiş olup a parametresinin iki farklı değeri için durum incelenmiştir. Şekil 2.4’de gösterildiği gibi a parametresinin küçük değerleri için referansı hızlı takip edebilme yeteneği (w_1) ön plandayken, daha büyük a değerlerinde referans yörüngesine daha düzgün bir yükselme cevabı (w_2) sağlamaktadır [7].



Şekil 2.5 : Referansın daha düzgün çıkış için ayarlanması

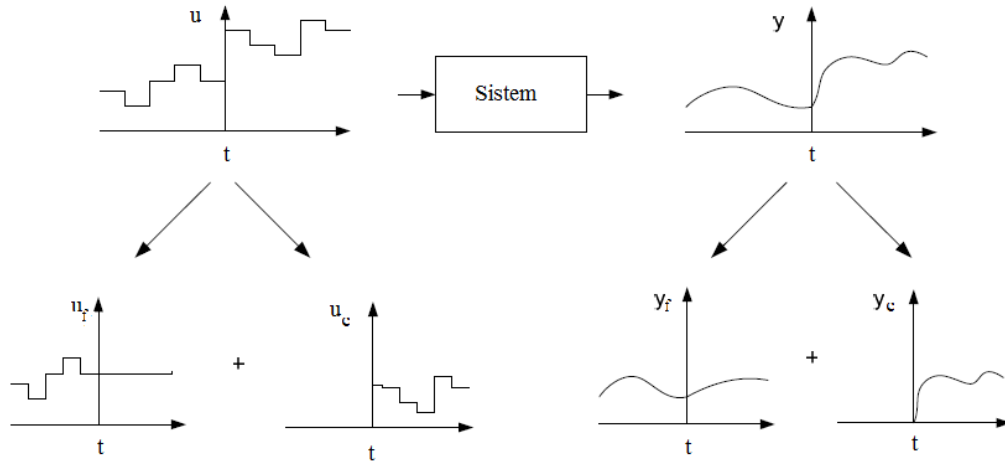
2.1.3 Kontrol kanununun elde edilmesi

$u(t+k | t)$ değerlerini elde edebilmek için J maliyet fonksiyonunu minimize edilir. Bunun için öngörülü model çıkışlarına, referans sinyali ve kontrol sinyalinin geçmiş değerlerine ihtiyaç vardır.

Analitik bir çözüm, eğer model doğrusal ise ve kısıtlama yoksa elde edilebilir, diğer durumlarda iteratif optimizasyon algoritmaları kullanılır. Belirli bir aralıktan sonra $N_u < N_2$ önerilen kontrol sinyalleri içinde değişim yoktur:

$$\Delta u(t+i-1) = 0 \Leftrightarrow i > N_u \quad (2.16)$$

2.2 Serbest ve Zorlanmış Cevap



Şekil 2.6 : Serbest ve zorlanmış cevap

Şekil 2.5’de ifade edilen serbest ve zorlanmış cevap, pek çok Model Öngörülü Kontrol yönteminde kullanılan parametrelerdir. Bu parametrelerin kullanılmasındaki asıl amaç, kontrol sinyalinin (2.13)’de olduğu gibi iki farklı sinyalin toplamı olarak ifade etmektir.

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t) \quad (2.17)$$

sinyali geçmişteki giriş sinyallerine karşılık gelmektedir. Gelecek zamanlarda ayarlanan değişkeninin son değerine eşit olur ve bu değerinde sabit tutulur.

$$u_f(t - j) = u(t - j) \quad j=1,2,\dots \quad (2.18a)$$

$$u_f(t + j) = u(t - 1) \quad j=0,1,2,\dots \quad (2.18b)$$

$u_c(t)$ sinyalinin ise geçmiş zamanlardaki değeri sıfırdır, gelecek zamanlarda ise bir sonraki kontrol sinyalinin değişim değerini alır.

$$u_c(t - j) = 0 \quad j=1,2,\dots \quad (2.19a)$$

$$u_c(t + j) = u(t + j) - u(t - 1) \quad j=0,1,2,\dots \quad (2.19b)$$

Sistemin çıkış sinyalinin öngörüsü de şekilden görüleceği üzere ikiye ayrılmıştır. Serbest cevabı olan $y_f(t)$; sistemin ayarlanan değişkeni, $u_f(t)$ ’ye eşit olduğu zaman elde edilen çıkış öngörüsüdür. Zorlanmış cevap olan $y_c(t)$ ise kontrol dizisi $u_c(t)$ ’ye eşit olduğu zaman elde edilen proses çıkış öngörüsüdür. Serbest cevap, prosesin o andaki durumuna göre değişimine karşılık gelirken zorlanmış cevap, prosesin gelecekteki kontrol hareketleriyle birebir ilgilidir [7].

3. İKİ ÖNEMLİ MPC ALGORİTMASI: DMC ve GPC

Bu bölümde, tezde ele alınan, Model Öngörülü kontrolün iki önemli farklı algoritması incelendi. İlki, Sistem basamak cevabı modeline dayanan ve endüstride yaygın bir biçimde kullanılan, yapısı ve uygulanması oldukça kolay olan dinamik matris kontrolüdür (Dynamic Matrix Control). İkincisi ise, DMC'den sonra ortaya konulan ve daha geniş yelpazedeki sistem ve prosesleri kontrol edebilen, transfer fonksiyonu modeline dayanan Genelleştirilmiş Öngörülü kontroldür (Generalized Predictive Control). GPC'nin aynı kapağa çıkan iki farklı matematiksel yaklaşımı incelendi. İlk olarak Diophantine yaklaşımı ikinci olarak matris yaklaşımı incelendi.

3.1 Dinamik Matris Kontrolü

Dinamik Matris Kontrolü, Shell Petrol şirketinin gereksinimleri üzerine Cutler ve Ramaker tarafından yetmişli yılların sonuna doğru geliştirilmiştir. ilerleyen yıllarda petrokimya endüstrisi başta olmak üzere endüstri dünyasında kabul görmüştür [7].

3.1.1 Sistem modeli kullanılarak öngörü prametrelerinin bulunması

Sistem modeli (3.1)'da ifade edildiği gibi oluşturulur.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (3.1)$$

Öngörü değerleri ise (3.2)'de ifade edildiği şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k|t) &= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i|t) + \hat{n}(t+k|t) \\ &= \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i|t) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i|t) + \hat{n}(t+k|t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bozucu; (2.21)'de gösterildiği üzere sistem çıkışı ile model çıkışı arasındaki fark olarak modellenir ve ufuk boyunca sabit kabul edilir.

$$\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t) = y_m(t) - \hat{y}(t|t) \quad (3.3)$$

(3.3)'de kullanılan $y_m(t)$, ölçülen sistem çıkışıdır.

Burada görülüyor ki, bozucunun sabit olarak kabul edilmesi, sistem çıkışına eklenen beyaz gürültünün (white noise) optimal öngörüsüne karşılık gelir. Yani, $n(t)$ bozucusuna, entegre edilmiş beyaz gürültü gibi muamele edilir (Wiener Process).

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+k|t) &= \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + y_m(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \\ &= \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k)\end{aligned}\quad (3.4)$$

Serbest sistem yanıtı; (3.5) ifadesi ile hesaplanabilir.

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i) \quad (3.5)$$

Eğer sistem asimptotik olarak kararlı ise, basamak cevabının g_i katsayıları, N örnekleme periyodu sonunda, sabit bir sayıya yakınsayacaktır. Böylece $g_{k+i} - g_i \approx 0 \quad i > N$ düşünülebilir. Bundan dolayı serbest cevap aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^N (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i) \quad (3.6)$$

Ufuk boyunca öngörü değerleri, (3.7)'de ifade edildiği üzere m kontrol işareti kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1|t) &= g_1 \Delta u(t) + f(t+1) \\ \hat{y}(t+2|t) &= g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+p|t) &= \sum_{i=1}^m g_i \Delta u(t+p-i) + f(t+p)\end{aligned}\quad (3.7)$$

Sistemin dinamik matrisi G ; (3.8)'deki biçiminde tanımlanır.

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & & & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \cdots & \cdots & g_{p-m+1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\hat{y} = Gu + f \quad (3.9)$$

(4.9) kullanılarak öngörü denklemi elde edilir. G matrisi m (kontrol ufku boyutu) sütundan, p (öngörü ufku boyutu) satırdan oluşmaktadır. Her sütuna sistemin basamak cevabı aşağıya birer kaydırılarak yerleştirilmiştir. $\hat{y}$, sistemin öngörü değerlerinden oluşan p boyutlu vektör; $\hat{u}$, m boyutlu kontrol artımları vektörü ve f serbest yanıt vektörüdür. (3.9) ifadesi kontrol artımları ile gelecekteki sistem yanıtlarını ilişkilendirmektedir. Bu nedenle istenilen sistem davranışını oluşturmak için gerekli kontrol davranışını elde etmekte kullanılabilir.

3.1.2 Ölçülen bozucuların ele alınması

Ölçülebilen bozucular kolayca öngörü denklemlerine eklenebilmektedirler. Ölçülebilen bozucular sistem girişleri olarak düşünülebilirler ve bozucu öngörüsü ifadesi (3.10) kullanılarak hesaplanabilir [7].

$$\hat{y}_d = Dd + f_d \quad (3.10)$$

(3.10) ifadesinde $\hat{y}_d$ ölçülebilen bozucunun sistem çıkısına etkisi, D bozucudaki basamak tipi bir değişime ilişkin sistem cevabının katsayılarını içeren G matrisine benzer bir matris, d bozucu artımları vektörü ve f_d cevabın bozucuya bağlı olmayan kısmıdır. Ölçülebilen ve ölçülemeyen bozucuların bulunduğu en genel durumda sistemin serbest cevabının (sistem cevabının gelecekteki kontrol girişlerine bağlı olmayan kısmı) dört etkinin toplamından oluştuğu düşünülebilir. O andaki u(t) girişi,

ölçülebilen bozucu $d(t)$, ölçülemeyen bozucu ve sistemin gerçek durumudur. Bu durumda öngörü (3.11) ile gösterilebilir.

$$f = f_u + Dd + f_d + f_n \quad (3.11)$$

3.1.3 Kontrol kuralının elde edilmesi

Dinamik Matris Kontrol algoritması kısıtlamalar içeren yüksek boyutlu çok değişkenli sistemlerdeki uygulamalardan gelmektedir. Bu çalışmada ise tek değişkenli ve kısıtlamaları değerlendirmeyen kontrol algoritması incelenmiştir.

Dinamik Matris Kontrolünde amaç ölçütü en küçük kareler yöntemini kullanarak sistem çıkışı ile referans değeri arasındaki farkı mümkün olduğunca azaltmaktır. Bu nedenle kontrol değişkenleri; (3.11) kullanılarak gelecekteki hataların karesel toplamı olan bir amaç ölçütünü ya da (3.12) kullanılarak hataya ek olarak kontrol gücünü de içeren bir amaç ölçütünü minimize edecek biçimde seçilir.

$$J = \sum_{j=1}^p \left[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j) \right]^2 \quad (3.12a)$$

$$J = \sum_{j=1}^p \left[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j) \right]^2 + \sum_{j=1}^m \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (3.12b)$$

Eğer kısıtlama yok ise, $J = ee^T + \lambda uu^T$ amaç fonksiyonunun minimize edilmesi için çözüm J 'nin türevi alınarak 0'a eşitlenmesiyle analitik olarak sağlanabilir. Burada e , öngörü ufku boyunca gelecek hataların vektörü ve u ise gelecek kontrol artımlarıdır ($\Delta u(t), \dots, \Delta u(t+m)$). Bu genel bir sonuç sağlar:

$$\Delta u = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f) \quad (3.13)$$

Tüm öngörü stratejilerinde Δu vektörünün sadece ilk elemanı $u(t)$ sisteme uygulanır. Kontrol ufku boyunca hesaplanan tüm dizi sisteme uygulanmaz çünkü bozucu vektörünü hatasız olarak elde etmek ve sistem çıkışını model çıkışından farklı kılacak kaçınılmaz bozucuları engellemek olanaklı değildir. Ayrıca izleyen m örnekleme aralığı içinde referans değişebilir [1].

3.2 Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol

Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritması, 1987’de D. W. Clarke tarafından önerilmiştir. Birçok endüstriyel prosese uygulanmış olup, iyi bir basarım ve belli ölçülerde dayanıklılık elde edilmiştir [3].

3.2.1 Zaman serisi modeline dayanan genelleştirilmiş öngörülü kontrol

Tek girişli tek çıkışlı sistemler bir denge noktası etrafında doğrusallaştırarak (3.13) biçiminde ifade edilebilir. Bu denklemde $e(t)$ beklenen değeri sıfır olan beyaz gürültü, d ise sistemin ölü zamanıdır.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t) \quad (3.13)$$

A, B ve C polinomları ise (4.14a), (4.14b) ve (4.14c) olarak verilmiştir.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na} \quad (3.14a)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb} \quad (3.14b)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{nc}z^{-nc} \quad (3.14c)$$

Bu model özbağımlı tümlemeli yürüyen ortalama (“Controller Auto-Regressive Moving-Average”(CARMA)) olarak bilinmektedir. Endüstride kullanılan sistemlerin çoğu durağan olmadığından dolayı entegre edilmiş CARMA(CARIMA) modelinin daha uygun olacağı düşünülmüştür. CARIMA modeli, (3.15)’da ifade edildiği şekilde oluşturulmuştur.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta}, \quad \Delta = 1 - z^{-1} \quad (3.15)$$

Basitlik amacıyla bozucuya ilişkin modelde $C(z^{-1})$ farklı seçilebilir. Bu durum renkli gürültü durumu olarak adlandırılmaktadır.

Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol algoritması, verilen amaç ölçütünü minimize edecek kontrol işareti dizisini saptamaya çalışır [3].

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (3.16)$$

(4.16)'da $\hat{y}(t+j|t)$, t anındaki bilgilerden ve modellerden yararlanarak elde edilen j adım ilerideki optimum sistem çıkışı öngörüsü, N_1 minimum ölçüt ufku, N_2 maksimum ölçüt ufku, $\delta(j)$ ve $\lambda(j)$ ağırlık parametreleri, $w(t+j)$ ise gelecekteki referans yörüngesidir [4].

Optimum $\hat{y}(t+j|t)$ öngörü değerleri elde edilirken $j \geq N_1$ ve $j \leq N_2$ aralığı kullanılır.

Yukarıdaki amaç fonksiyonunu çözmeye yardımcı olan Diophantine eşitliği; (3.17)'de verilmiştir.

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad \tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1}) \quad (3.17)$$

E_j ve F_j polinomları sırası ile $j-1$ ve na dereceli polinomlardır ve tek olarak belirlenebilirler. Bu polinomlar 1 sayısının, kalan $z^{-j}F_j(z^{-1})$ olana dek $\tilde{A}(z^{-1})$ 'e bölünmesiyle elde edilebilirler. Bu bölmenin bölümü $E_j(z^{-1})$ polinomudur.

Eğer (3.15) $\Delta E_j(z^{-1})z^j$ ile çarpılırsa ($C(z^{-1})=1$):

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (3.18)$$

(3.18); (3.19) olarak yazılabilir.

$$(1 - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (3.19)$$

(3.19) tekrar düzenlendiğinde (3.20) elde edilebilir.

$$y(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (3.20)$$

$E_j(z^{-1})j$ polinomunun derecesi $j-1$ olduğundan yukarıdaki eşitlikteki gürültü terimi geleceğe ilişkindir. $y(t+j)$ için en iyi öngörü ifadesi (3.21) olacaktır.

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(z^{-1})\Delta(t+j-d-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (3.21)$$

(3.21) ifadesinde

$$G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1}) \quad (3.22)$$

olarak seçilmiştir.

E_j ve F_j polinomlarını elde etmek için özyinelemeli (recursive) yöntemler vardır. Burada ise basit bir yöntem ele alınacaktır.

E_j ve F_j polinomları, 1 sayısı $z^{-j}F_j(z^{-1})$ kalanın çarpanı olana kadar $\tilde{A}(z^{-1})$ 'e bölünerek elde edilir. Bu polinomları (3.23) ve (3.24) şeklinde tanımlanabilir.

$$F_j(z^{-1}) = f_{j,0} + f_{j,1}z^{-1} + \dots + f_{j,na}z^{-na} \quad (3.23)$$

$$E_j(z^{-1}) = e_{j,0} + e_{j,1}z^{-1} + \dots + e_{j,j-1}z^{-(j-1)} \quad (3.24)$$

Aynı E_{j+1} ve F_{j+1} 'i elde etmek için de kullanılır. Bu durumda ise 1 sayısı

$z^{-(j+1)}F_{j+1}(z^{-1})$ kalanın çarpanı olana dek $\tilde{A}(z^{-1})$ 'e bölünsün. Bu durumda $F_{j+1}(z^{-1})$ (3.25)'de gösterildiği şekilde elde edilir.

$$F_{j+1}(z^{-1}) = f_{j+1,0} + f_{j+1,1}z^{-1} + \dots + f_{j+1,na}z^{-na} \quad (3.25)$$

Bu durumda E_j ve F_j elde edilip E_{j+1} ve F_{j+1} 'nin elde edilmesi için bölmenin bir adım daha yapılması yeterli olacaktır. E_{j+1} polinomu ise (3.26)'de ifade edilen şekilde olacaktır.

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + e_{j+1,j}z^{-j} \quad (3.26)$$

$e_{j+1,j} = f_{j,0}$ olacağından dolayı F_{j+1} polinomunun katsayıları (3.27)'de belirtilen ifade gibi elde edilecektir.

$$f_{j+1,i} = f_{j,j+1} - f_{j,0}\tilde{a}_{i+1}, \quad i = 0 \dots na - 1 \quad (3.27)$$

Bu denklemler kullanılarak (3.28) ve (3.29) ile ifade edilen eşitlikler elde edilir.

$$G_{j+1} = E_{j+1}B = (E_j + f_{j,0}z^{-j})B \quad (3.28)$$

$$G_{j+1} = G_j + f_{j,0}z^{-j}B \quad (3.29)$$

Bu yöntem kullanılarak bir Matlab algoritması yazılarak Diophantine denklemi çözümü yapılabilir.

$$g_{j+1,j+1} = g_{j,j+1} + f_{j,0}b_i, \quad i = 0, \dots, nb \quad (3.30)$$

Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol probleminin çözülebilmesi için (3.31) ifadesinde gösterilen ölçütü minimize edecek kontrol işareti dizisinin bulunması gerekmektedir. Eğer sistemin ölü zamanı d örnekleme zamanına eşit ise sistem çıkışı $u(t)$ sistem girişinden $d+1$ örnekleme zamanı sonra etkilenecektir. Bu nedenle minimum öngörü ufku $d+1$ 'den küçük seçmek anlamlı olmayacaktır. Bu şartlar altında $N_1=d+1$, $N_2=d+N$ ve $N_u=N$ seçilebilir [3].

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (3.31)$$

Öngörü ufku boyunca öngörü değerlerini (3.32)'deki şekilde elde edelim.

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+d+1|t) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ \hat{y}(t+d+2|t) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+d+N|t) &= G_{d+N}\Delta u(t+N-1) + F_{d+N}y(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Bu değerler toplu bir ifade olarak (3.33)'de gösterildiği şekilde yazılabilir.

$$y = Gu + F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta(t-1) \quad (3.33)$$

Bu toplu ifadedeki elemanlar ise (3.34), (3.35), (3.36) ve (3.37)'de gösterilen açık ifadeleriyle verilmiştir.

$$y = \begin{bmatrix} y(t+d+1|t) \\ y(t+d+2|t) \\ \vdots \\ y(t+d+N|t) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1} - \dots - g_{N-1} z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Burada, (3.33)'ün son iki terimi sadece geçmişe dayanmaktadır ve aşağıdaki gibi f ile gruplandırılabilir.

$$y = Gu + f \quad (3.38)$$

Dikkat edilmelidir ki, eğer tüm ilk başlangıç şartları sıfır ise, serbest cevap f 'de sıfırdır. Eğer t zamanında birim basamak girişi uygulanırsa;

$$\Delta u(t) = 1, \Delta u(t+1) = 0, \dots, \Delta u(t+N-1) = 0$$

çıkışın beklenen değerleri $\left[\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N) \right]^T$, G matrisinin birinci

sütununa eşit olacaktır. Yani, ayarlanmış değişkene bir birim basamak uygulandığı zaman, G matrisinin birinci sütunu, sistemin basamak cevabı şeklinde hesaplanabilir. Serbest cevap terimi özyinelemeli bir şekilde aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$f_{j+1} = z(1 - \tilde{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t-d+j), \quad f_0 = y(t) \text{ ve } \Delta y(t+j) \quad j \geq 0$$

3.2.1.1 Kontrol kuramının elde edilmesi

$y = Gu + f$ genel ifadesi kullanılarak amaç ölçütü (3.39) gibi yazılabilir.

$$J = (Gu + f - w)^T (Gu + f - w) + \lambda u^T u \quad (3.39)$$

(3.39)'u daha sade bir ifade ile yazmak istersek aşağıdaki (4.40) denklemi elde edilir.

$$J = \frac{1}{2} u^T H u + b^T u + f_0 \quad (3.40)$$

(3.40)'da, (3.41)'deki ifadelere yer verilmiştir.

$$\begin{aligned} H &= 2(G^T G + \lambda I) \\ b^T &= 2(f - w)^T G \\ f_0 &= (f - w)^T (f - w) \end{aligned} \tag{3.41}$$

J ölçütünü minimum yapmak için gereken kontrol kuralı, kısıtlamaların bulunmadığı durumlarda J 'nin türevi alınıp sıfıra eşitlenerek (3.42) ifadesi olarak bulunabilir.

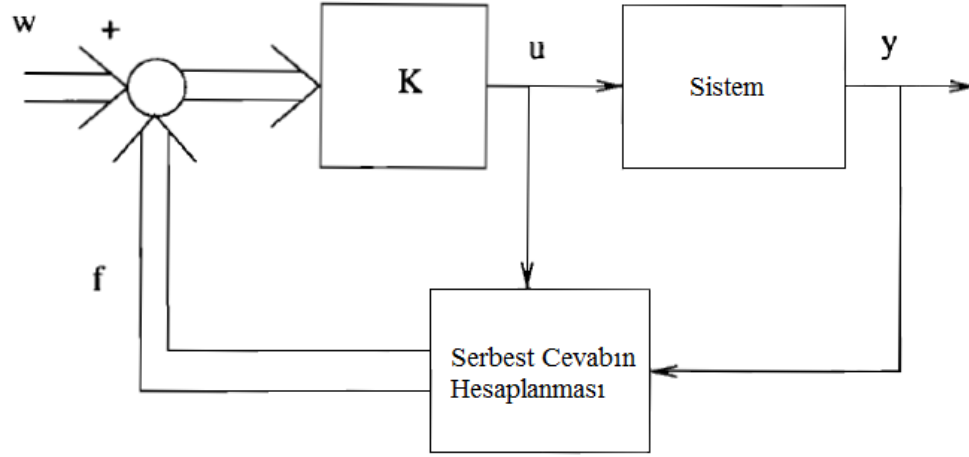
$$u = -H^{-1}b = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f) \tag{3.42}$$

Bu durumda, (3.42) elde edilen u vektörünün sadece ilk elemanı sisteme uygulanır.

$(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ ifadesinde elde edilen matrisin ilke elemanı K olmak üzere $\Delta u(t)$, aşağıdaki (3.43) şeklinde ifade edilir.

$$\Delta u(t) = K(w - f) \tag{3.43}$$

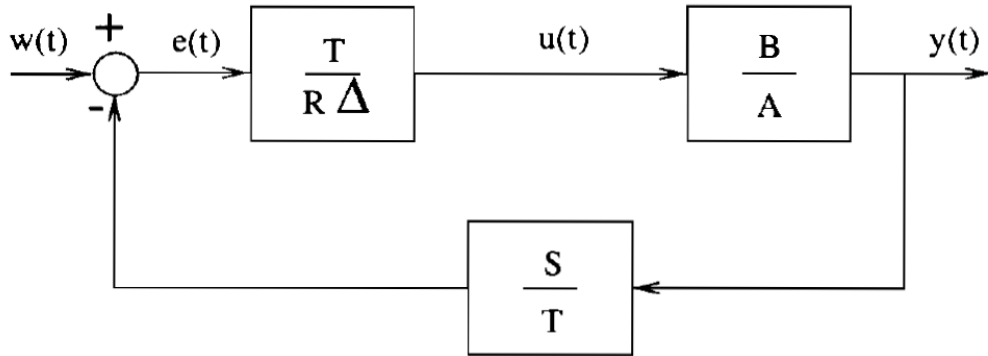
(3.43)'den anlaşılabacağı üzere, eğer gelecekte sistemin serbest cevabı ile referans arasında öngörü hatası yoksa ($w - f = 0$) bu durumda sistemin serbest cevabıyla istenilen durum sağlandığından dolayı sisteme kontrol sinyali uygulanmayacaktır. Aksi takdirde, yani sistemde öngörülen bir hata varsa bu durumda gelecekteki bu hataya bağlı olarak kontrol sinyalinde K vektörüne bağlı olarak bir artım olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta; sisteme uygulanan kontrol hareketinin geçmişteki sistem hatalarından değil, gelecekteki öngörülen sistem hatalarından etkilenmesidir. Bu durum ise model öngörülü kontrol algoritmalarını diğer algoritmalarından ayıran en önemli özelliklerden biridir.



Şekil 3.1 : GPC kanunu

3.2.1.2 Genelleştirilmiş öngörülü kontrolün kapalı çevrim eşdeğeri

Kısıtlamasız Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrolün kapalı çevrim eşdeğeri şekildeki gibi elde edilebilir [4].



Şekil 3.2 : Klasik kutup atama yapısı

Kontrol kuralı yeniden yazılırsa (3.44)'de belirtilen şekilde yazılabilir. Bu denklemde R, T ve S polinomlardır. Bu kontrol kuralı bir geri besleme bileşeni (S/T) ve bir ileri yol bileşeninden (T/R) oluşmuştur.

$$\Delta u(t) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})} w(t) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} y(t) \quad (3.44)$$

Bu durumda, kontrol kuralı düzenlenerek (3.45)'deki şekilde tekrar yazılabilmektedir.

$$\Delta u(t) = K(w - f) = \sum_{i=N_1}^{i=N_2} k_i [w(t+i) - f(t+i)] \quad (3.45)$$

Genel durumda serbest cevabı elde etmek için kullanılan $C(z^{-1})$ polinomu sıfırdan farklı seçilir. Ancak genellikle bu polinom bir sistem tanıma yöntemi ile elde edilmez. Bozucuların zamanla değişen karakteristiklerini modellemek kolay olmadığından dolayı bu durum için bu polinoma sabit gözleyici ya da ön filtre olarak nitelendirilen T polinomu atanacaktır.

Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol için CARIMA modelini tekrar yazılırsa (3.46) elde edilir.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + T(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (3.46)$$

T polinomunu içeren (4.47)'deki Diophantine denklemi ile (3.48)'deki Diophantine denklemi çözülüp f serbest cevap olan I , F ve T polinomları cinsinden elde edilir.

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (3.47)$$

$$E(z^{-1})B(z^{-1}) = H(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-j}I(z^{-1}) \quad (3.48)$$

Eşitliği yeniden yazmak gerekirse (3.49) ifadesi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= K(w - f) = \sum_{i=N_1}^{i=N_2} k_i [w(t+i) - f(t+i)] \\ &= \sum_{i=N_1}^{i=N_2} k_i w(t+i) - \sum_{i=N_1}^{i=N_2} k_i \frac{I_i(z^{-1})}{T(z^{-1})} \Delta u(t-1) - \sum_{i=N_1}^{i=N_2} k_i \frac{F_i(z^{-1})}{T(z^{-1})} y(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

(3.49)'da z^{-1} terimi çıkarılıp, denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left[T + z^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i \right] \Delta u(t) = T \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i w(t) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i F_i y(t) \quad (3.50)$$

burada gelecek referans yörüngesi ufuk boyunca sabit olduğu göz önünde bulundurulmuş veya $w(t+i)$ bilinmediğinde $w(t)$ alınmıştır.

R ve S polinomları ise eşitlikteki kontrol kuralı sistem modeli ifadesinde yerine konulursa referansın ve bozucunun fonksiyonu olarak çıkış ifadesi elde edilir. Bu

çıkış ifadesinden karakteristik polinom elde edilerek bilinen yöntemlerle kararlılık incelemesi yapılabilir [12].

R ve S polinomlarının değerleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$R(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1}) + z^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i} \quad (3.51a)$$

$$S(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i F_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i} \quad (3.51b)$$

$$R(z^{-1})\Delta u(t) = T(z^{-1})w(t) - S(z^{-1})y(t) \quad (3.52)$$

Kapalı çevrim karakteristik denklemi, sistem içinde (3.52) tarafından verilen kontrol hareketinden gelmektedir. Sistem modeli (3.53) gibi ifade edilir.

$$A\Delta y(t) = B\Delta u(t-1) + Te(t) \quad (3.53)$$

Bundan dolayı (3.54) kontrol hareketi sistem modeli ile yer değiştirilir ve (3.55) denklemi elde edilir.

$$\Delta u(t) = \frac{T}{R} w(t) - \frac{S}{R} y(t) \quad (3.54)$$

$$A\Delta y(t) = Bz^{-1} \left(\frac{T}{R} w(t) - \frac{S}{R} y(t) \right) + Te(t) \quad (3.55)$$

Bu denklemden $y(t)$ 'yi çekmek, referans ve bozucuların bir fonksiyonu olan bir çıkışı veren kapalı çevrim sağlar.

$$y(t) = \frac{BTz^{-1}}{RA\Delta + BSz^{-1}} w(t) + \frac{TR}{RA\Delta + BSz^{-1}} e(t) \quad (3.56)$$

ve sonuç olarak karakteristik denklem aşağıdaki gibidir:

$$RA\Delta + BSz^{-1} = 0$$

Küçük değişikliklerle, karakteristik denklem,

$$RA\Delta + BSz^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i} (T \tilde{A} + T \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i z^{i-1} (B - \tilde{A} H_i)) = TP_c \quad (3.57)$$

Bundan dolayı denklem (3.56) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y(t) = \frac{Bz^{-1}}{P_c} w(t) + \frac{R}{P_c} e(t) \quad (3.58)$$

Gözlemleyicilerdeki durum gibi, T polinomu çıkış ve giriş arasındaki kapalı çevrim transfer fonksiyonunda yok olmaktadır. Yani, kararlılık ve performans P_c ' nin kökleri ile koşullanmaktadır. Fakat, burada önemli bir nokta ise karakteristik polinomun kökleri ile kontrol parametreleri olan N_1 , N_2 , N_u ve λ arasında doğrudan ilişki kurmak zordur [7].

Bu noktada T polinomunun seçimi önemlidir. Bu polinomun kapalı çevrim sistemin dayanıklılığına etkisi üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır [10].

3.2.2 Durum uzay modeli kullanılarak öngörücünün bulunması

Herhangi bir sisteme ait durum – uzay gösterimini en kapsamlı olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz [10];

$$x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + P \cdot v(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + w(t) \quad (3.59)$$

Burada x , durum vektörü, u , giriş vektörü, y , ölçülen çıkışların vektörü, v , bozucuların vektörü ve w , ölçülebilir gürültünün vektörüdür. t indeksi ise zaman adımlarını göstermektedir.

Öngörü modelini kullanarak gelecekteki $t+1$ anında çıkış aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} y(t+1|t) &= C \cdot x(t+1|t) + w(t+1|t) \\ &= C \cdot A \cdot x(t|t) + C \cdot B \cdot u(t|t) + C \cdot P \cdot v(t|t) + w(t+1|t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Bu öngörülen çıkış bağıntısından (4.60), $t+1$, $t+2, \dots, t+N_2$ anlarındaki çıkışlar durum gözlemleyicisi tarafından aşağıdaki biçimde tanımlanır [14]:

$$x(t+1|t) = A \cdot x(t|t) + B \cdot u(t|t) + P \cdot v(t|t) \quad (3.61)$$

Gelecek için öngörülen durumlar;

$$x(t+1|t) = A \cdot x(t|t) + B \cdot u(t|t) + P \cdot v(t|t)$$

$$\begin{aligned} x(t+2|t) &= A \cdot x(t+1|t) + B \cdot u(t+1|t) + P \cdot v(t+1|t) \\ &= A^2 \cdot x(t|t) + A \cdot B \cdot u(t|t) + B \cdot u(t+1|t) + A \cdot P \cdot v(t|t) + P \cdot v(t+1|t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+3|t) &= A \cdot x(t+2|t) + B \cdot u(t+2|t) + P \cdot v(t+2|t) \\ &= A^3 \cdot x(t|t) + A^2 \cdot B \cdot u(t|t) + A \cdot B \cdot u(t+1|t) + B \cdot u(t+2|t) \\ &\quad + A^2 \cdot P \cdot v(t|t) + A \cdot P \cdot v(t+1|t) + P \cdot v(t+2|t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+N_2|t) &= A \cdot x(t+N_2-1|t) + B \cdot u(t+N_2-1|t) + P \cdot v(t+N_2-1|t) \\ &= A^{N_2} \cdot x(t|t) + A^{N_2-1} \cdot B \cdot u(t|t) + \dots + B \cdot u(t+N_2-1|t) \\ &\quad + A^{N_2-1} \cdot P \cdot v(t|t) + A^{N_2-2} \cdot P \cdot v(t+1|t) + \dots + P \cdot v(t+N_2-1|t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Yukarıdaki bağıntıda, girişin $t, (t+1), \dots, (t+N_u-1)$ anında değiştiği bundan sonraki adımlarda sabit olduğu varsayılmıştır. Bu yüzden, $N_u \leq i \leq N_2-1$ için $u(t+i|t)=u(t+N_u-1)$ eşitliği sağlanacaktır. t anındaki $u(t-1)$ girişi bilindiğinden dolayı öngörülecek kontrol sinyali dizisinin zamanla değişimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \Delta u(t|t) &= u(t|t) - u(t-1) \\ \Delta u(t+1|t) &= u(t+1|t) - u(t|t) \\ &\vdots \\ \Delta u(t+N_u-1|t) &= u(t+N_u-1|t) - u(t+N_u-2|t) \end{aligned}$$

Buradan öngörülen kontrol sinyali dizisi;

$$\begin{aligned} u(t|t) &= \Delta u(t|t) + u(t-1) \\ u(t+1|t) &= \Delta u(t+1|t) + \Delta u(t|t) + u(t-1) \\ &\vdots \\ u(t+N_u-1|t) &= \Delta u(t+N_u-1|t) + \dots + \Delta u(t|t) + u(t-1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bir sonraki adım olarakta bu kontrol sinyali dizisi öngörülen durum dizisinin içine yerleştirilir.

$$x(t+1|t) = A \cdot x(t|t) + B \cdot [\Delta u(t|t) + u(t-1)] + P \cdot v(t|t)$$

$$\begin{aligned} x(t+2|t) &= A^2 \cdot x(t|t) + A \cdot B \cdot [\Delta u(t|t) + u(t-1)] + B \cdot [\Delta u(t+1|t) + \Delta u(t|t) + u(t-1)] \\ &\quad + A \cdot P \cdot v(t|t) + P \cdot v(t+1|t) \\ &= A^2 \cdot x(t|t) + (A+I) \cdot B \cdot \Delta u(t|t) + B \cdot \Delta u(t+1|t) + (A+I) \cdot B \cdot u(t-1) \\ &\quad + A \cdot P \cdot v(t|t) + P \cdot v(t+1|t) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+N_u|t) &= A^{N_u} \cdot x(t|t) + (A^{N_u-1} + \dots + A + I) \cdot B \cdot \Delta u(t|t) + \dots + B \cdot \Delta u(t+N_u-1|t) \\ &\quad + (A^{N_u-1} + \dots + A + I) \cdot B \cdot u(t-1) + A \cdot P \cdot v(t|t) + P \cdot v(t+1|t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+N_u+1|t) &= A^{N_u+1} \cdot x(t|t) + (A^{N_u} + \dots + A + I) \cdot B \cdot \Delta u(t|t) + \dots \\ &\quad + (A+I) \cdot B \cdot \Delta u(t+N_u-1|t) + (A^{N_u} + \dots + A + I) \cdot B \cdot u(t-1) \\ &\quad + A^{N_u} \cdot P \cdot v(t|t) + A^{N_u-1} \cdot P \cdot v(t+1|t) + \dots + P \cdot v(t+N_u|t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+N_2|t) &= A^{N_2} \cdot x(t|t) + (A^{N_2-1} + \dots + A + I) \cdot B \cdot \Delta u(t|t) + \dots \\ &\quad + (A^{N_2-N_u} + \dots + A + I) \cdot B \cdot \Delta u(t+N_u-1|t) \\ &\quad + (A^{N_p-1} + \dots + A + I) \cdot B \cdot u(t-1) \\ &\quad + A^{N_2-1} \cdot P \cdot v(t|t) + A^{N_2-2} \cdot P \cdot v(t+1|t) + \dots + P \cdot v(t+N_2-1|t) \end{aligned}$$

Yukarıda elde ettiğimiz durum öngörüsü aşağıdaki gibi matris – vektör biçiminde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} x(t+1|t) \\ x(t+2|t) \\ \vdots \\ x(t+N_u|t) \\ x(t+N_u+1|t) \\ \vdots \\ x(t+N_2+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_u} \\ A^{N_u+1} \\ \vdots \\ A^{N_2} \end{bmatrix} \cdot x(t|t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ A \cdot B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B \end{bmatrix}}_{\text{GEÇMİŞ}} \cdot u(t-1) \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ A \cdot B + B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B & \dots & A \cdot B + B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B & \dots & \sum_{i=0}^{N_2-N_u} A^i \cdot B \end{bmatrix}}_{\text{GELECEK}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(t|t) \\ \Delta u(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N_u-1|t) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ A \cdot P & P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_u-1} \cdot P & A^{N_u-2} \cdot P & \dots & 0 \\ A^{N_u} \cdot P & A^{N_u-1} \cdot P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_2} \cdot P & A^{N_2-1} \cdot P & \dots & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t|t) \\ v(t+1|t) \\ \vdots \\ v(t+N_u-1|t) \\ v(t+N_u|t) \\ \vdots \\ v(t+N_2-1|t) \end{bmatrix} \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Buradan $t, (t+1), \dots, (t+N_u-1)$ anındaki öngörülen çıkış değerleri kolaylıkla bulunabilir:

$$\begin{aligned}
y(t+1|t) &= C \cdot x(t+1|t) + w(t+1|t) \\
y(t+2|t) &= C \cdot x(t+2|t) + w(t+2|t) \\
&\vdots \\
y(t+N_2|t) &= C \cdot x(t+N_2|t) + w(t+N_2|t) \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Buradan çıkışın öngörüsü aşağıdaki gibi matris – vektör biçiminde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y(t+1|t) \\ y(t+2|t) \\ \vdots \\ y(t+N_u|t) \\ y(t+N_u+1|t) \\ \vdots \\ y(t+N_2+1|t) \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_u} \\ A^{N_u+1} \\ \vdots \\ A^{N_2} \end{bmatrix} \cdot x(t|t) + C \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ A \cdot B + B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B \end{bmatrix}}_{GEÇMİŞ} \cdot u(t-1)$$

$$+ C \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ A \cdot B + B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B & \dots & A \cdot B + B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B & \dots & \sum_{i=0}^{N_2-N_u} A^i \cdot B \end{bmatrix}}_{GELECEK} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(t|t) \\ \Delta u(t+1|t) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N_u-1|t) \end{bmatrix}$$

$$+ C \cdot \begin{bmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ A \cdot P & P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_u-1} \cdot P & A^{N_u-2} \cdot P & \dots & 0 \\ A^{N_u} \cdot P & A^{N_u-1} \cdot P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_2} \cdot P & A^{N_2-1} \cdot P & \dots & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t|t) \\ v(t+1|t) \\ \vdots \\ v(t+N_u-1|t) \\ v(t+N_u|t) \\ \vdots \\ v(t+N_2-1|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(t+1|t) \\ w(t+2|t) \\ \vdots \\ w(t+N_u-1|t) \\ w(t+N_u|t) \\ \vdots \\ w(t+N_2-1|t) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

(3.65)' teki ifade daha kısa şekilde yazılacak olursa;

$$F = C \cdot \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_u} \\ A^{N_u+1} \\ \vdots \\ A^{N_2} \end{bmatrix},$$

$$H_p = C \cdot \begin{bmatrix} B \\ A \cdot B + B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B \end{bmatrix},$$

$$H_n = C \cdot \begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ A \cdot B + B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_u-1} A^i \cdot B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{N_u} A^i \cdot B & \dots & A \cdot B + B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A^i \cdot B & \dots & \sum_{i=0}^{N_2-N_u} A^i \cdot B \end{bmatrix},$$

$$H_d = C \cdot \begin{bmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ A \cdot P & P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_u-1} \cdot P & A^{N_u-2} \cdot P & \dots & 0 \\ A^{N_u} \cdot P & A^{N_u-1} \cdot P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_2} \cdot P & A^{N_2-1} \cdot P & \dots & P \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Y(t+j|t) &= [y(t+1|t), \dots, y(t+N_2|t)]^T \\
X(t+j|t) &= [x(t+1|t), \dots, x(t+N_2|t)]^T \\
\Delta U(t+j-1|t) &= [\Delta u(t|t), \dots, \Delta u(t+N_u-1|t)]^T \\
V(t+j-1|t) &= [v(t|t), \dots, v(t+N_2-1|t)]^T \\
W(t+j|t) &= [w(t+1|t), \dots, w(t+N_2-1|t)]^T
\end{aligned}$$

Sistemin çıkışının öngörüsü en genel halde aşağıdaki gibi yazılır:

$$Y(t+j|t) = F \cdot x(t|t) + H_p \cdot u(t-1) + H_n \cdot \Delta U(t+j-1|t) + H_d \cdot V(t+j-1|t) + W(t+j|t) \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
Y^*(t+j|t) &= F \cdot x(t|t) + H_p \cdot u(t-1) + H_n \cdot \Delta U(t+j-1|t) \\
\mathcal{E}(t+j|t) &= H_d \cdot V(t+j-1|t) + W(t+j|t) \\
Y(t+j|t) &= Y^*(t+j|t) + \mathcal{E}(t+j|t)
\end{aligned} \quad (3.67)$$

Amaç fonksiyonunun yapısı [15],

$$J(N_1, N_2) = E \left\{ \sum_{i=N_1}^{N_2} \delta(j) \cdot [Y(t+j|t) - Y_r(t+j|t)]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda(j) \cdot [\Delta u \cdot (t+j-1|t)]^2 \right\} \quad (3.68)$$

Amaç fonksiyonu minimize edildiğinde optimal kontrol kuralı aşağıdaki bağıntıda gösterildiği gibi elde edilir [14]:

$$U = (H_n^T \cdot q(j) \cdot H_n + \lambda(j))^{-1} \cdot H_n^T \cdot [Y_r(t+j|t) - (F \cdot x(t|t) + H_p \cdot u(t-1))] \quad (3.69)$$

4. DMC ve GPC’NİN KARŞILAŞTIRILMASI

GPC ve DMC günümüzde en çok tercih edilen MPC türleridir. İkisinin birbirine karşı üstünlükleri olmakla birlikte, kontrol edilecek sistemin yapısına göre, uygun olanının seçilmesi doğru bir yaklaşımdır.

4.1 MPC’nin Avantajları

MPC ileri bir kontrolcüdür. Klasik kontrolcülere göre çeşitli avantajları vardır:

- MPC özellikle, çok az bir bilgi ile çok etkileyici bir yöntemdir çünkü, MPC kavramı sezgiye dayalıdır ve ayrıca ayarlaması çok kolaydır.
- Çok çeşitli sistemlerin kontrolünde kullanılabilir. Örnek olarak; basit dinamikli olanlardan karmaşık dinamikli olanlara kadar, uzun zaman gecikmesi olan prosesler veya kararsız sistemler verilebilir.
- Çok değişkenli durumlar kolaylıkla üstesinden gelinebilir.
- MPC’nin doğasında, sistemlerin ölü zamanını yok etme özelliği vardır.
- Ölçülebilen bozucuları kompanze edebilen doğal bir ileri beslemeli kontrol sunar.
- Sonuçta oluşan kontrolcünün doğrusal kontrol kanununa uygulanması kolaydır.
- Kısıtlanmalı sistemlere uygulanan genişletilmiş olanı kavramsal olarak basittir ve proses tasarımı esnasında sistematik olarak yer alır.
- Gelecekteki referans bilindiği taktirde oldukça kullanışlıdır (Robotlar).
- Geliştirilmeye açık, kesin, basit bir prensibe dayanan tamamen yalın bir metodolojidir [16].

4.2 MPC’nin Dezavantajları

- Kontrol kanunun uygulanması kolay ve az hesaplama gerektirmesine rağmen, MPC’nin elde edilmesi klasik PID kontrole göre daha karmaşıktır.

- Eğer sistemin dinamiği değişmiyorsa, kontrolcünün tasarlanması önceden yapılabilir fakat uyarlamalı kontrol durumunda, bütün hesaplamalar her bir örnekleme anında yapılmalıdır.
- Kısıtlamalar göz önüne alındığında, hesaplamalar daha da artmaktadır.
- Günümüzde bilgisayarların hesaplama gücü çok artmasına rağmen, endüstride kullanılanlar hala çok yavaştır. Bununla birlikte bu bilgisayarlar endüstriyel proseslerde, eforunu iletişim, haberleşme, alarm ve kayıt gibi işlemler için de harcamak zorundadır. Bu da hesaplama performansını oldukça düşürmektedir.
- En büyük dezavantajı prosesin bir modelinin olması gerektiğidir. Tasarlanan algoritmalar öncelikli olarak bu modellere dayanır. Dolayısıyla kontrol, model ile proses arasında olan farklardan etkilenmektedir.

4.3 DMC ve GPC'nin Aralarındaki Farklar ve Benzerlikler

- GPC, kararlı olup, değişken parametrelili, ölü zamanlı ve model derecesi aniden değişen sistemleri kontrol edebilir. Dahası, aynı anda minimum olmayan faz ve kararsız sistemlerde de etkilidir.
- DMC açık çevrim bir kontrolcüdür. GPC ise kapalı çevrim bir kontrolcüdür.
- GPC kararsız sistemleri de kontrol edebilmesine rağmen, DMC sadece kararlı sistemleri kontrol edebilir.
- İkisine bozucuları yok edebilir ve kararlı rejimde hatayı sıfırlayabilir.
- İkisi de SISO ve MIMO sistemlere kolayca uygulanabilir.
- DMC, Basamak ve Darbe cevabi gibi sarmal (convolution) modeller kullanır. GPC bu modellere ek olarak, lineer olmayan durum uzayı modelleri, bulanık mantık modelleri, sinir ağ yapıdaki modeller, zaman serisi modelleri de kullanır.
- GPC ve DMC doğrusal modeller kullanırlar. DMC algoritması, basamak cevabı katsayılarını içeren parametrik olmayan bir model kullanır. Endüstride bu model kolayca çıkarılabilir. Fakat, bir prosesi tam olarak tanımlayabilmek için çok fazla katsayıya ihtiyaç vardır. Buna karşın GPC, ayrık fark denklemleri şeklinde parametrik modeller kullanır. Genellikle bu tip modeller

basamak cevabı olanına göre parametre sayısı bakımından önemli derecede daha az karmaşıktır.

- DMC, FIR modelleri kullanır. FIR modeller genellikle, gürültüye karşı çok az hassasiyet gösterir ve herhangi bir gözlemciye (observer) ihtiyaç duymaz. Bu endüstri için çok önemli bir kazançtır.
- DMC, model derecesi seçimi ve ölü zamanın belirlenmesindeki problemlerin önüne geçebilir.

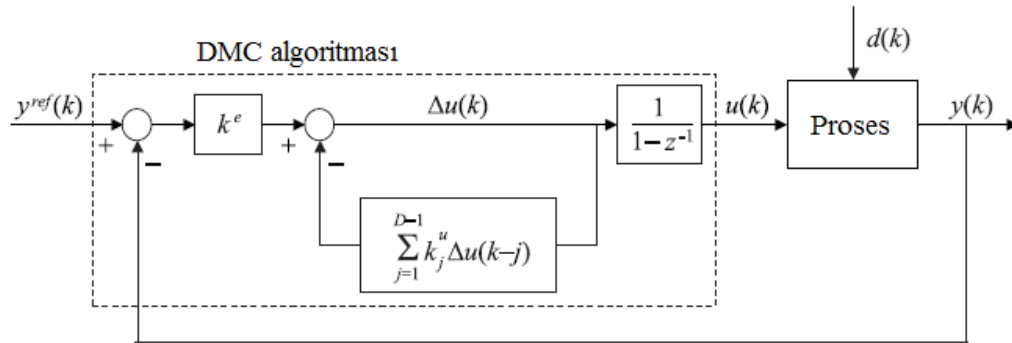
GPC ve DMC algoritmalarını aşağıdaki gibi diyagramlar ile karşılaştırmasını yapabiliriz [17].

DMC ayrık zamanlı, sonlu basamak cevabı modelini kullanır [1].

$$y(k) = y(0) + \sum_{j=1}^D g_j \Delta u(k-j) \quad (4.1)$$

DMC kontrol kanunun aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Delta u(k) = \Delta u(k|k) = k^e (y^{ref}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^{D-1} k_j^u \Delta u(k-j) \quad (4.2)$$



Şekil 4.1 : DMC algoritmasının yapısı

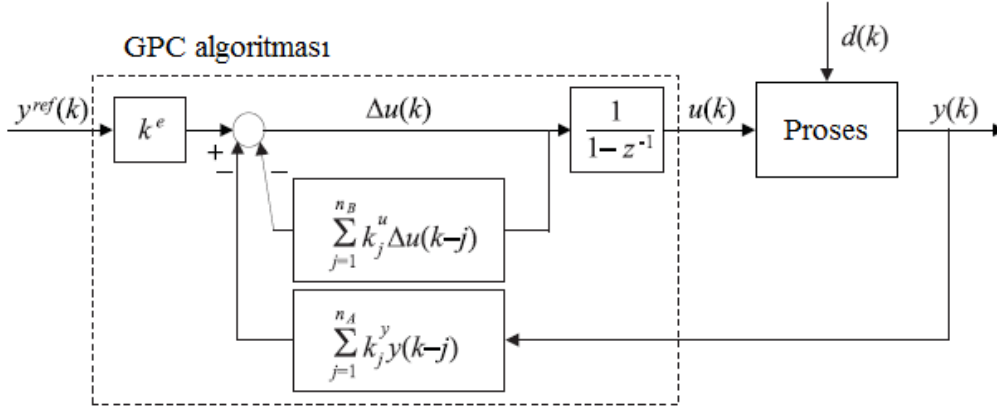
k^e , k_j^u , $j=1, \dots, D-1$ çevrimdışı hesaplanan katsayılarıdır. Toplam parametre sayısı D'dir. Referans yörüngesi ve şimdiki örnekleme anında hesaplanan giriş değerleri arasındaki farktan kesin bir şekilde elde edilen kontrol kanunu doğrusal bir geribeslemedir.

GPC algoritması prosesin giriş çıkış ilişkisini tanımlayan bir ayrık fark denklemi şeklinde bir proses modeli kullanır.

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-j) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i) \quad (4.3)$$

GPC kontrol kanununu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Delta u(k) = \Delta u(k|k) = k^e y^{ref} - \sum_{j=1}^{n_B} k_j^u u(k-j) - \sum_{j=0}^{n_A} k_j^y y(k-j) \quad (4.4)$$



Şekil 4.2 : GPC algoritmasının yapısı

k^e , k_j^u , $j=1, \dots, n_B$ ve k_j^y , $j=1, \dots, n_A$ çevrimdışı hesaplanan katsayılarıdır. $n_A + n_B + 2$ toplam parametre sayısıdır. Şimdiki zamanda hesaplanan giriş ile ölçülen giriş ve referans yörüngesinden elde edilen kesin GPC kanunu doğrusal bir geribeslemedir. Her iki algoritma karşılaştırıldığında, DMC algoritması içinde sadece proses çıkış değişkenlerinden bir geribesleme ve geçmiş proses giriş artımlarından $D-1$ adet geri besleme vardır. GPC algoritmasında ise, şimdiki proses çıkış değerlerinden ve çıkış artımlarının son n_A geçmiş değerlerinden ve proses giriş artımlarının son n_B geçmiş değerlerinden geribeslemeler vardır [2].

Basamak cevabı genellikle çok sayıda eleman içerir. Aynı zamanda, proses yeterince hassas bir şekilde rölatif bir düşük derece ayrık fark denklemiyle tanımlanabilir. Böylece, GPC algoritmasında kullanılan model büyük ölçüde DMC algoritmasında kullanılanlardan daha az parametreye sahiptir ($D \gg n_A$, $D \gg n_B$). Fakat şu da var ki, parametrik olmayan basamak cevabı modeli basit bir deney yaparak kolayca elde edilebilirken, parametrik model tam bir tanılama deneyinin yapılmasını gerektirmektedir [10].

5. SİMÜLASYONLAR VE SONUÇLAR

Bu tez ile birlikte, iki önemli model öngörülü kontrol algoritması kabul edilen dinamik matris kontrol (DMC) ve genelleştirilmiş öngörülü kontrolün (GPC), birbirinden farklı dinamik yapılara sahip çeşitli sistem modellerine uygulandı. Bu sistemler seçilirken endüstride daha önceden karşılaşılan sistemler göz önünde bulunduruldu ve bu sistemleri temsil eden modeller seçildi. Bu modellerin bazı parametreleri veya model derecesi değiştirilerek, kontrolcülerin performansı incelendi. Ayrıca, bu modellere yükleme bozucusu ve gürültü eklenerek, DMC ve GPC'nin davranışı ve performansı ele alındı.

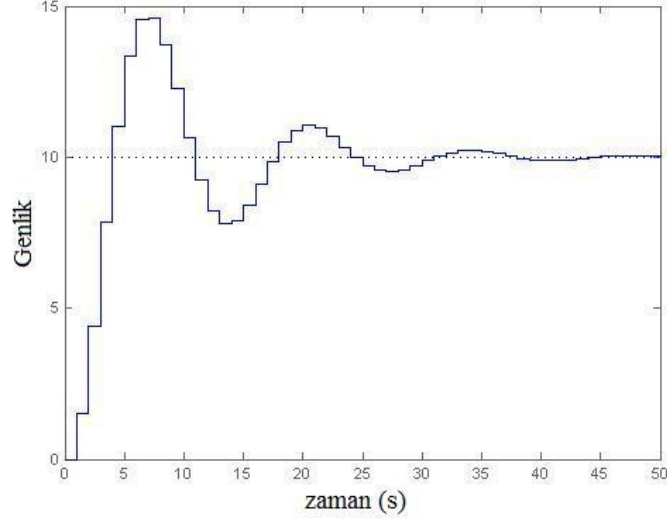
5.1 Dinamik Sistem Modelleri

5.1.1 Az sönümlü minimum faz sistem

Az sönümlü minimum faz sistem (Underdamped minimumphase) kararlı bir sistemdir. Belli bir sabit referans yörüngesine salınarak yakınsar. Kutupları z -düzleminde birim çemberin içindedir. Minimum faz olmasından dolayı ise bütün sıfırları birim çemberin içindedir. Ele alınan sistem (5.1) ikinci dereceden bir sistem olup zaman gecikmelidir.

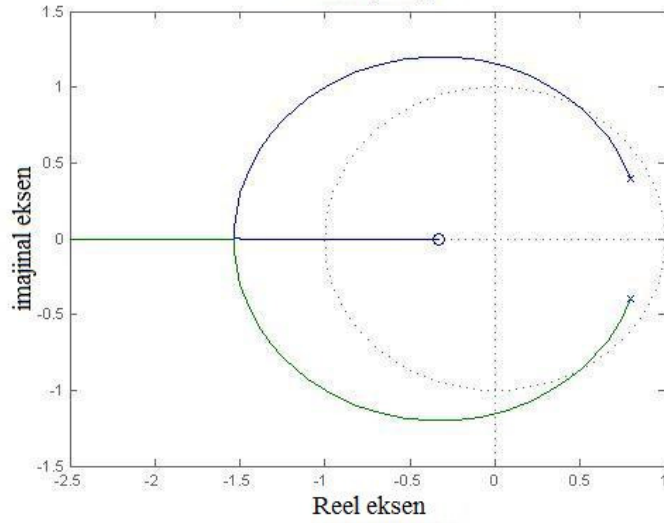
$$y(t) - 1.6y(t-1) + 0.8y(t-2) = 1.5u(t-1) + 0.5u(t-2) + s(t) \quad (5.1)$$

Şekil 5.1 de bu sistemin birim basamak cevabı gösterilmektedir. $s(t)$ sisteme uygulanan bozucuyu temsil etmektedir.



Şekil 5.1 : Basamak cevabı

(5.1)'deki sistemin kök yer eğrisi şekil 5.2'deki gibidir. Görüldü gibi sistemin $0.8 \pm 0.4i$ olan çift katlı kökü ve 0.333 de ise bir tane sıfırı vardır.



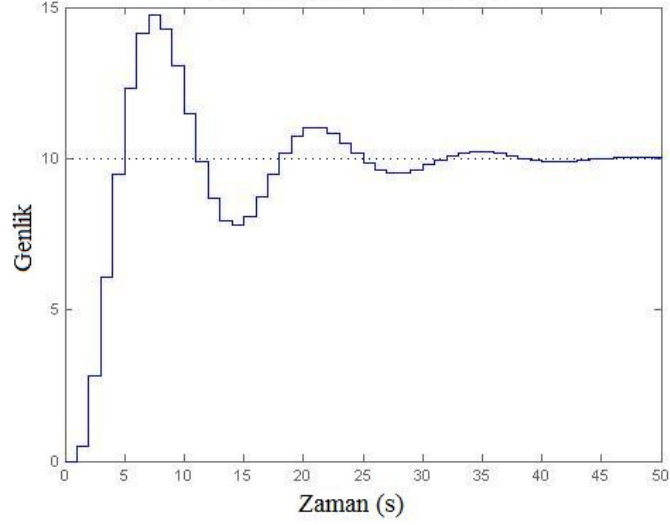
Şekil 5.2 : Köklerin yer eğrisi

5.1.2 Az sönümlü minimum faz olmayan sistem

Az sönümlü minimum faz olmayan sistem (Underdamped nonminimumphase) kararlı bir sistemdir. Belli bir sabit referans yörüngesine salınarak yakınsar. Kutupları z-düzleminde birim çemberin içindedir. Minimum faz olmamasından dolayı ise bütün sıfırları birim çemberin dışındadır. Ele alınan sistem (5.2) ikinci dereceden bir sistem olup zaman gecikmelidir.

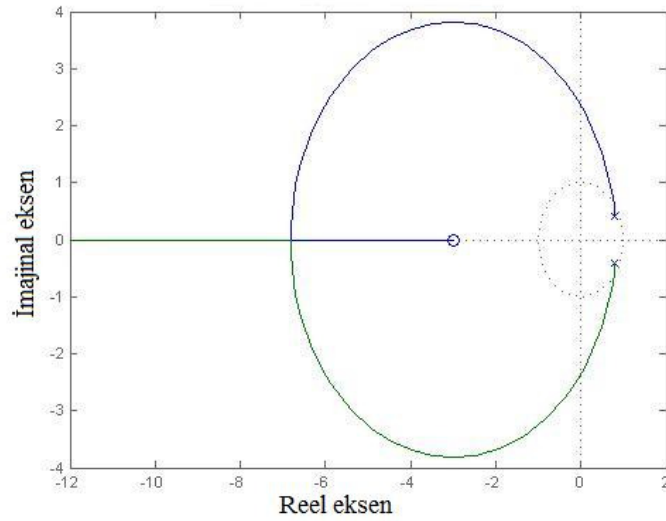
$$y(t) - 1.6y(t-1) + 0.8y(t-2) = 0.5u(t-1) + 1.5u(t-2) + s(t) \quad (5.2)$$

Şekil 5.3 de bu sistemin birim basamak cevabı gösterilmektedir. $s(t)$ sisteme uygulanan bozucuyu temsil etmektedir.



Şekil 5.3 : Basamak cevabı

(5.2)'deki sistemin kök yer eğrisi şekil 5.4'deki gibidir. Görüldüğü gibi sistemin $0.8 \pm 0.4i$ olan çift katlı kökü ve -3 de ise bir tane sıfırı vardır.



Şekil 5.4 : Köklerin geometrik yeri

5.1.2.1 Minimum fazlı ve minimum fazlı olmayan sistemler

Doğrusal kontrol sistemlerinde karşılaşılan transfer fonksiyonlarının çoğunda sağ yarı s-düzleminde kutup yada sıfır bulunmaz. Bu tür transfer fonksiyonlarına

minimum fazlı transfer fonksiyonları denir. Bir transfer fonksiyonunun sağ yarı s- düzleminde bir kutup ya da sıfır bulunması halinde ise buna minimum fazlı olmayan bir transfer fonksiyonu denir. Aynı genlik karakteristikli sistemler için, minimum fazlı transfer fonksiyonlarının faz açısı değişimi minimum iken, minimum fazlı olmayan transfer fonksiyonlarının faz açısı değişimi minimumdan daha büyüktür [21].

Minimum fazlı transfer fonksiyonlarının genlik ve faz eğrilerinin birbiriyle birebir ilişkili olması gibi önemli bir özelliği vardır. Diğer bir deyişle bir minimum fazlı $G(s)$ transfer fonksiyonunun $|G(j\omega)|$ genlik eğrisinin verilmesi halinde, $\angle G(j\omega)$ fazı da tamamen belirlenmiş olur. Bulunan birlikte, $\angle G(j\omega)$ 'nun verilmesi halinde $|G(j\omega)|$ da tamamen belirlidir.

Minimum fazlı olmayan sistemler iki ayrı yolla meydana çıkar. Birincisi bir sistem minimum olmayan faz eleman veya elemanları içeriyorsa, ikincisi ise, bir küçük ilmi (minor loop) kararsız (unstable) ise, sistem minimum olmayan bir sistemdir. Bu sistemlerde, transfer fonksiyonun en az bir sıfırı z- düzlemine göre birim çemberin dışında (s-düzlemine göre sağ yarı düzlemde) en az bir sıfır vardır. Minimum fazlı olmayan transfer fonksiyonlarında genlik-faz ilişkisi birebir karşı düşmez. Örneğin verilmiş olan bir

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega T}$$

Transfer fonksiyonu için pozitif T (minimum fazlı olmayan) ya da negatif T (minimum fazlı) değerleri için $G(j\omega)$ genliği aynıdır. Ancak $G(j\omega)$ 'nun fazı pozitif ve negatif T değerleri için farklıdır. Minimum fazlı olmayan sistemler, cevabın başında hatalı davrandığından, cevap vermeleri yavaştır. Başka bir ifadeyle, sistemin yapısından dolayı basamak girişine zıt yönde bir ilk ters cevap verirler. Bir sopanın hızlıca hareket ettirildiğinde, başlangıçta, harekete ters yönde yamulması minimum olmayan sistemlere güzel bir örnektir. Bu sistemlerin kontrolünde, aşırı faz gecikmeleri dikkatli bir şekilde önlenmelidir. Hızlı cevabın önemli olduğu sistemlerin tasarımında minimum fazlı olmayan komponentler (transport, lag dead time, etc.) kullanılmamalıdır. MPC, minimum olmayan sistemlerde kararsızdır. MPC'de kontrolcü optimal çıkışı, sistem çıkışlarını etkisiz hale getirerek (cancelling)

başarır. Eğer sistem kararsız sıfırlar içerirse, bu geri beslemenin iç kararlılığında kayıplara yol açar [18].

Minimum fazlı transfer fonksiyonlarının diğer özellikleri şunlardır:

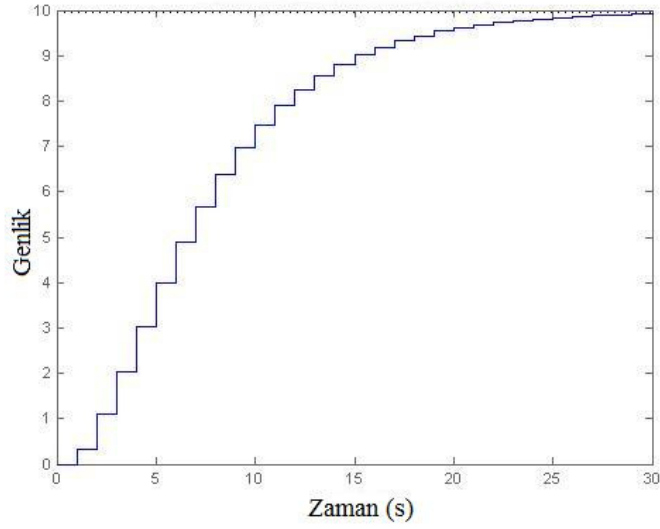
- Bir minimum fazlı $G(s)$ transfer fonksiyonunun, $s=0$ 'daki kutuplar hariç m adet sıfırı ve n adet kutbu var ise, $s=jw$ için w frekansı ∞ 'dan 0 'a değiştiğinde, $G(jw)$ 'nin toplam faz değişimi $(n - m)\pi / 2$ kadardır.
- Minimum fazlı bir transfer fonksiyonu sıfır dışındaki sonlu bir w frekansı için sıfır ya da sonsuz değer almaz.
- w frekansı ∞ 'dan 0 'a değişirken, minimum fazlı olmayan transfer fonksiyonunun fazı, minimum fazlı transfer fonksiyonuna göre fazı hep daha fazla pozitif kayıktır.

5.1.3 Aşırı sönümlü minimum faz sistem

Aşırı sönümlü minimum faz olmayan sistem (Overdamped minimumphase) kararlı bir sistemdir. Belli bir sabit referans yörüngesine salınım yapmadan yakınsar. Kutupları z -düzleminde birim çemberin içindedir. Minimum faz olmasından dolayı ise bütün sıfırları birim çemberin dışındadır. Ele alınan sistem (5.3) ikinci dereceden bir sistem olup zaman gecikmelidir.

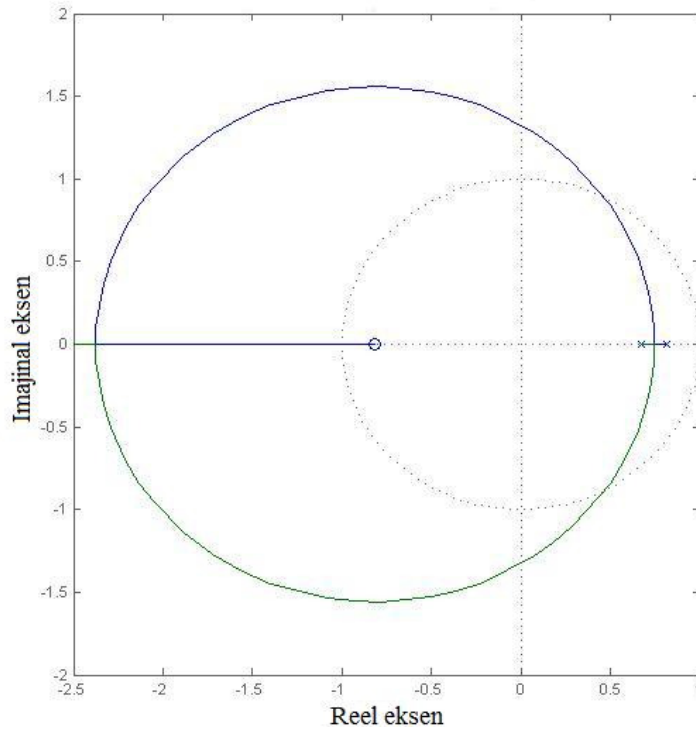
$$y(t) - 1.489y(t-1) + 0.549y(t-2) = 0.329u(t-1) + 0.269u(t-2) + s(t) \quad (5.3)$$

Şekil 5.5 de bu sistemin birim basamak cevabı gösterilmektedir. $s(t)$ sisteme uygulanan bozucuyu temsil etmektedir.



Şekil 5.5 : Basamak cevabı

(5.3)'deki sistemin kök yer eğrisi şekil 5.5'deki gibidir. Görüldü gibi sistemin 0.8172 ve 0.6718 olan kökleri ve -0.8176 da ise bir tane sıfırı vardır.



Şekil 5.6 : Köklerin geometrik yeri

5.1.4 Ayrık zamanlı stokastik sistem

Ayrık zamanlı sistem aşağıdaki gibidir:

$$y(t) - 1.6y(t-1) + 0.8y(t-2) = 1.5u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t) + 0.7e(t-1) \quad (5.4)$$

$e(t)$ stokastik bozucusu matlab tarafından üretilen beyaz (ilintisiz: uncorrelated) bir gürültüdür. ($E\{e(t)\} = 0$; $E\{e^2(t)\} = 10^{-4}$). Bütün deneylerde stokastik gürültü olarak bu kullanılacaktır.

Stokastik prosesler zaman serisi olarak bilinen rastgele değişkenler dizisi anlamına gelmektedir. Stokastik proses, tanım kümesi (domain) uzay olan rastgele bir alandır. Diğer bir deyişle, bağımsız değişkenleri sürekli değişen değerler sınıfı tarafından sürülen bir rastgele fonksiyondur. Stokastik proseslere diğer bir yaklaşım ise, değeri (çıkış) rastgele değişkenler olan bir veya birden fazla bağımsız değişkenli (çoğu zaman “zaman” t olarak sayılan giriş) fonksiyonlar şeklindedir. Bununla birlikte stokastik proseslerde bir gereklilik vardır. Bu da; farklı rastgele niceliklerin hepsi aynı tipte olması gerekliliğidir. Farklı zamanlarda bir stokastik sistemin rastgele değerleri bağımsız rastgele değişkenler olmasına rağmen, bu bağımsız değişkenlerin karmaşık statik korelasyon sergiler. Stokastik proseslere örnek olarak, menkul kıymetler borsası döviz kuru dalgalanmaları, konuşma audio ve video verilebilir. Genel olarak sistem içerisinde gürültü (noise) var ise sistem stokastik sistem olur.

5.1.4.1 Beyaz gürültü

Beyaz gürültü özel bir gürültüdür. Her bir frekans bandında sabit bir enerjiye sahip, rastgele bir gürültüdür. Diğer bir deyişle, gücü bütün frekanslara düzgün bir şekilde dağılan ve her birim band aralığında ortalama bir gücü olan bir gürültüdür. Gerçekte beyaz bir gürültünün var olması imkansız olduğundan band aralığı kısıtlaması uygulanır [21].

Sonsuz band aralıklı beyaz gürültü sinyali sadece teorik bir yapıdır. Her bir frekansa bir gücün olması demek, toplam gücün sonsuz olması demektir. Pratikte, bir sinyal tanımlı frekans bandında düz bir spektrum ile “beyaz” olabilir.

Sadece 0 ve 1 değerini alan ikili bir sinyalin beyaz olabilmesi için, bir ve sıfırların dizileri istatistiksel olarak ilintisiz (uncorrelated) olması gerekir.

Sürekli zamanlı rastgele bir prosesin $e(t)$ beyaz gürültü olabilmesi için sadece ve sadece onun ortalaması ve otokorelasyon fonksiyonu aşağıdakilerini sağlamalıdır:

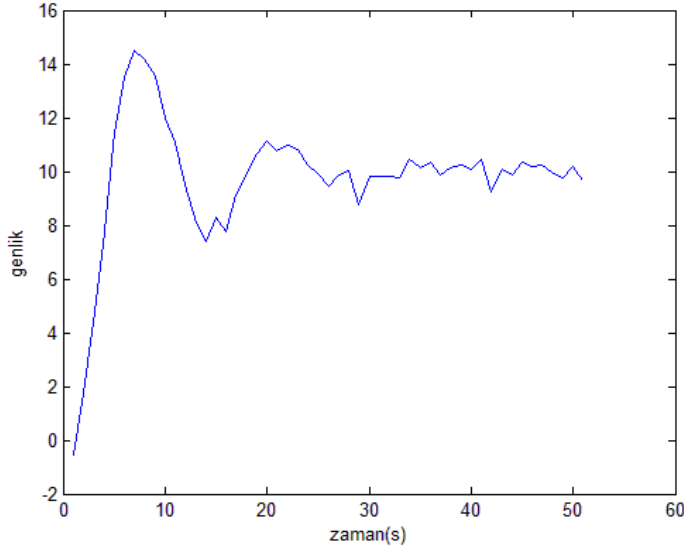
$$\mu_e(t) = E\{e(t)\} = 0$$

$$R_{ee}(t_1, t_2) = E\{e(t_1)e(t_2)\} = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

Yukarıdaki otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki spektral güç yoğunluğu anlamına gelmektedir.

$$S_{xx}(e) = \sigma^2$$

Delta fonksiyonun fourier dönüşümü bire eşittir. Bu spektral güç yoğunluğu her bir frekansta aynıdır.



Şekil 5.7 : Stokastik sistemin basamak cevabı

5.1.5 Model derecesi yanlış olan Sistemler

DMC ve GPC'nin hatalı modelleme durumunda performansını görmek için, (5.1), (5.2), ve (5.3)'teki sistem modellerinin derecesi 1 artırılarak 4 dereceden yapılmıştır. Kontrol edilecek sistem 4. dereceden olmasına rağmen, kontrol algoritmalarında 3. dereceden olan modeller kullanılmıştır. Burada kontrolcülerin modelleme hatalarına karşı olan performansı gözlenmiştir. Derecesi 4 olan modeller aşağıdaki gibidir:

$$y(t) - 1.4y(t-1) + 0.48y(t-2) + 0.16y(t-3) = 0.5u(t-1) + 1.5u(t-2) + s(t) \quad (5.5)$$

$$y(t) - 1.4y(t-1) + 0.48y(t-2) + 0.16y(t-3) = 1.5u(t-1) + 0.5u(t-2) + s(t) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} y(t) - 1.289y(t-1) + 0.2512y(t-2) + 0.1098y(t-3) \\ = 0.329u(t-1) + 0.269u(t-2) + s(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Algoritmaların, yanlış model derecesine karşı gürbüz olmasına ek olarak, zaman gecikmesi de incelenmiştir.

5.1.6 Zaman ile değişen sistem

Bu bölümde zaman ile değişen (time varying) sistemlerin kontrolünde MPC'nin performansını incelemektir. Bunun için parametreleri zaman ile değişen bir bir sistem modeki ele alınmıştır. Bu model (5.8)'de ifade edilmiştir.

$$[Tz^2 + (3+T)z + 4]Y(z) = KU(z)z^{-T_d} \quad (5.8)$$

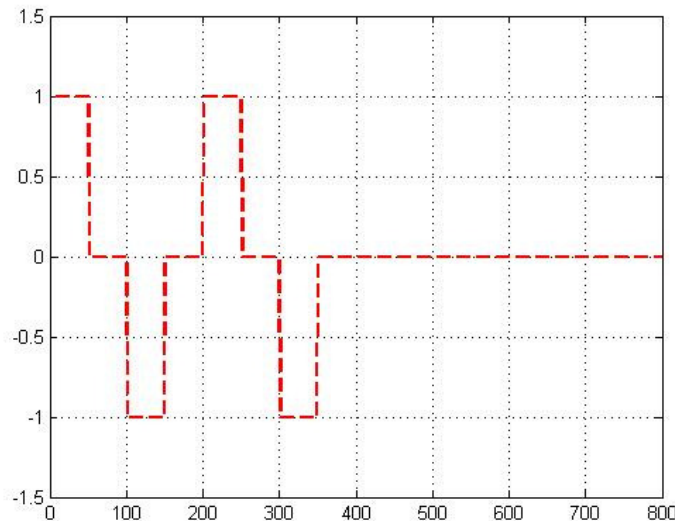
Algoritmada kullanılan modelin parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$T=5, K=1, T_d=1$$

Bu sistem modellendikten sonra kontrol esnasında, zamanla değiştiği varsayılmıştır. Kontrolcünün bu değişime karşı adaptasyonu olmadığı için, bir kontrol zafiyeti ortaya çıkacaktır. Bunu inceleyebilmek için sistem parametreleri $T=5 \rightarrow 10$, $K=1 \rightarrow 5$, $T_d=1 \rightarrow 4$ 'e kadar, belli zaman aralıklarında basamak şeklinde değişmesiyle sistem kontrol edilip, kontrolcünün performansı gözlenmiştir. Kontrolcülerin kullandığı model $T=5, K=1, T_d=1$ olduğu zamanki modeldir. Bu model ile parametreleri değişen sistem kontrol edilmiştir.

5.1.7 Referans yörüngesi ve bozucu modeli

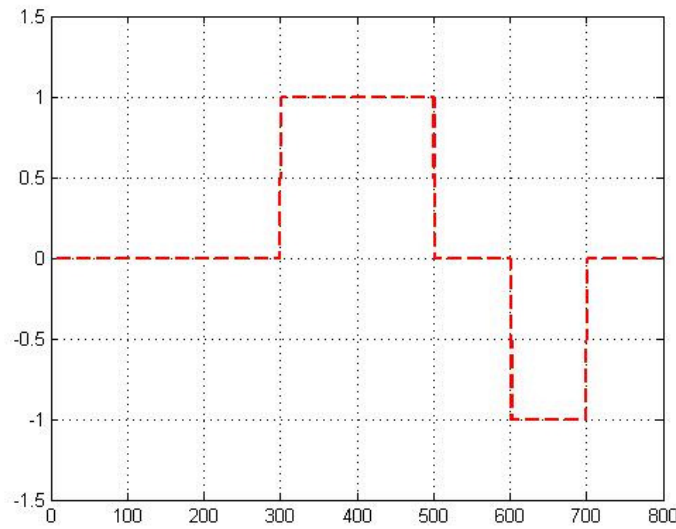
Sistemlerin kontrolünde, sistemin belli bir referans yörüngesini takip etmesi istenmiştir. Bu referans yörüngesi basamak şeklinde şekil 5.8'deki gibi seçilmiştir.



Şekil 5.8 : Referans yörüngesi

Referans yörüngesiyle birlikte, sistem çıkışına bir de bozucu eklenmiştir. Eklenen bozucunun kontrolcü performansına olan etkisi ile birlikte sürekli ve geçici sistem hataları incelenmiştir. Bozucu olarak (5.9)'daki gibi sürekli zamanda, birinci dereceden aşırı sönümlü ve gecikmeli bir bozucu modeli kullanılmıştır bu bozucu modeline ise d girişi olarak, şekil 5.9'deki sinyal gönderilmiştir.

$$G_d = \frac{1.52}{25s+1} e^{-15s} \quad (5.9)$$



Şekil 5.9 : Bozucu girişi

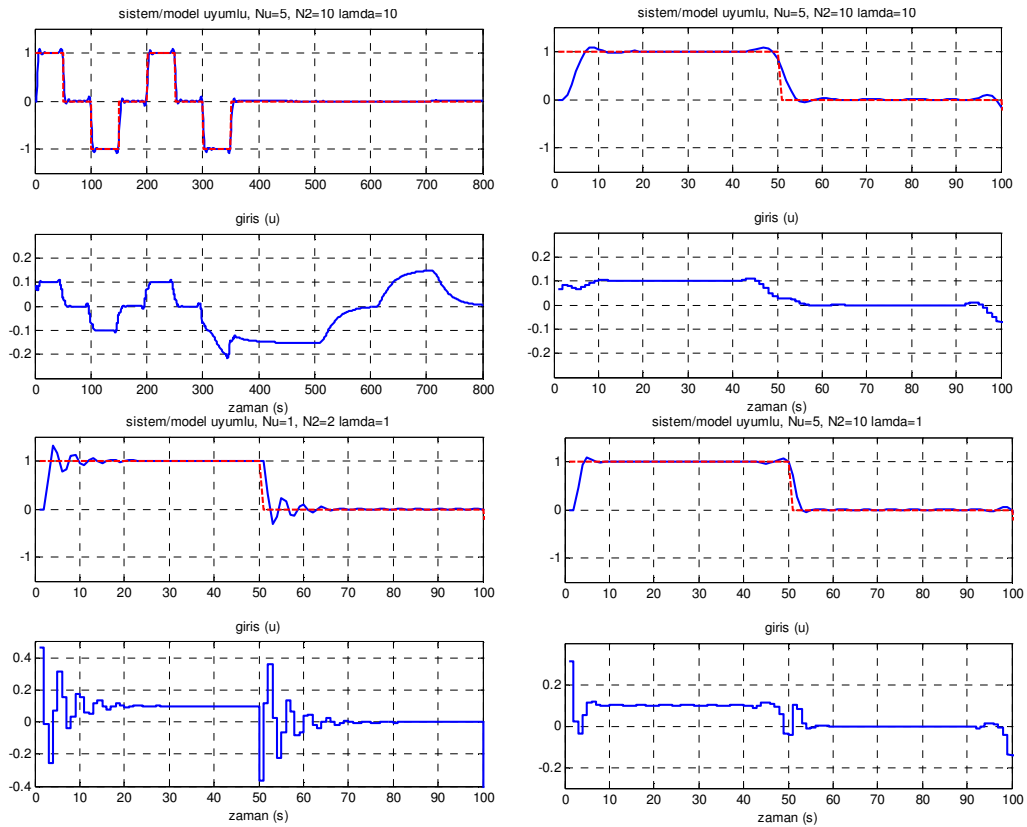
5.2 Simülasyonlar

Bu bölümde, 6.1'deki sistemlerin Matlab yardımıyla dinamik matris kontrolü ve geliştirilmiş öngörülü kontrolü yapılmıştır. λ ağırlık faktörünü, N_1 minimum ve N_2 maksimum öngörü ufukları ile N_u kontrol ufkunun (N_1, N_2, N_u ayar parametreleridir.) kontrol üzerindeki etkileri incelenmiştir. DMC ve GPC algoritmaların sistemler üzerindeki performansları karşılaştırılmıştır. Buna ek olarak, kontrol algoritmasında, referans öngörüsünün olduğu ve olmadığı durumlar da incelenmiştir ve sonuçları irdelenmiştir (*with and without set point prediction*).

5.2.1 Az sönümlü minimum faz sistemin simülasyonu

Bu sistemin simülasyonunda bölüm 5.2.1’de olduğu gibi üç senaryo ele alınmıştır. İlk olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin tamamen aynı olduğu durumdur incelenmiştir (model=plant ve dmodel=dplant). İkincisinde ise, sistem ile sistem modelinin aynı olduğu fakat, bozucu ile bozucu modelin farklı olduğu durum incelenmiştir (model=plant ve dmodel $\neq$ dplant). Bu senaryoda, ölçülen ve ölçülemeyen bozucuların kontrolcü performansı üzerindeki etkisi ele alınmıştır. Son olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin aynı olmadığı durumdur (model $\neq$ plant ve dmodel $\neq$ dplant). Bu durumda ise, model belirsizlik (model uncertainty) ve onun kontrolcü performansına olan etkileri ele alınmıştır.

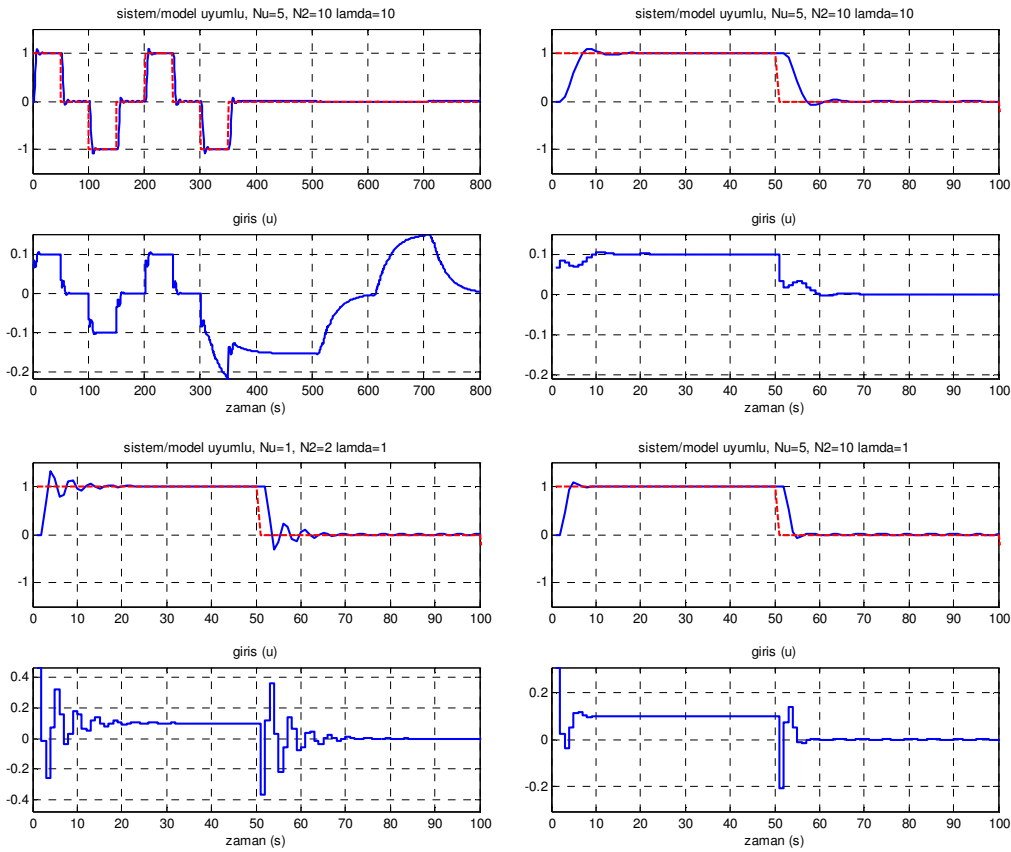
5.2.1.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu = bozucu modeli



Şekil 5.10 : Az sönümlü minimum faz sisteminin DMC ile kontrolü

Şekil 5.10’de Dinamik matris kontrol ile sistem çok iyi bir şekilde yörüngeyi takip etmiştir. Sistem ile model ve bozucu ile bozucu modeli tamamen aynıdır. Sisteme bölüm 5.1.6’da tanımlanan bozucu da etki etmiştir. Bunun sonucunda mavi renk ile

çizilen çıkış, kırmızı renkli ve kesikli çizgi ile ifade edilen yörüngeyi mükemmel bir şekilde takip etmeye devam etmiştir. Bu demek oluyor ki; dinamik matris kontrolünde, kontrolcü, bozucuyu yok edebilmektedir (Disturbance Rejection). Dikkat edilirse, sistem girişi u , sisteme bozucu etki ettiğinde, bozucunun etkisini kompanse etmek için değişmiştir. Zaman 500, 600 ve 700’de iken değişim açıkça görülmektedir ve çıkış değeri bozucuya rağmen değişmemektedir. $\lambda = 10$ ’dan $\lambda = 1$ ’e düştüğünde, çıkışın yörüngeye oturma zamanı azalmıştır fakat, u girişindeki salınımlar artmıştır. Bu çok doğaldır çünkü, λ amaç fonksiyonunda Δu değerlerinin ağırlık faktörüdür. λ arttırdığımızda Δu artık miktarındaki değişimleri kısıtlarız. Bu da çıkışın, daha ağır bir şekilde yörüngeye oturmasına sebep olur. N_u kontrol horizonu ve N_2 öngörü ufukları optimum şekilde seçilmesi gerekir. Eğer seçilmez ise Şekil 5.10 de $N_u = 1$ ve $N_2 = 2$ durumda olduğu gibi, kontrolcünün performansı azalır. Oturma zamanı ve salınımlar artar. Kontrol ve öngörü ufuklarının uygun seçilmemesi sistemin dinamik özelliklerine göre kimi zaman kararsızlığa da sebep olmaktadır.



Şekil 5.11 : Az sönümlü minimum faz sisteminin GPC ile kontrolü

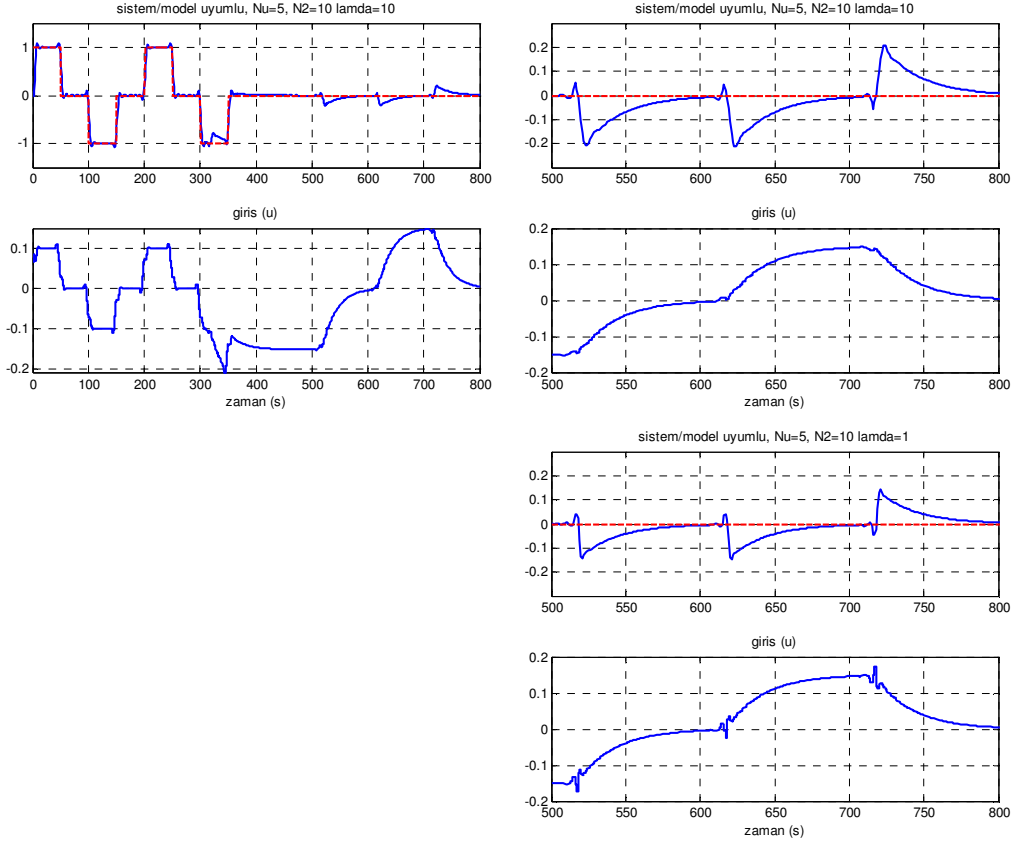
Şekil 5.11’de Genelleştirilmiş öngörülü kontrol ile sistem mükemmel bir şekilde yörüngeye oturmuştur. Sistem ile model ve bozucu ile bozucu modeli birbirleriyle uyumludur. Sisteme bölüm 5.1.6’da tanımlanan bozucu da etki etmiştir. Bunun sonucunda mavi renk ile çizilen çıkış, kırmızı renkli ve kesikli çizgi ile ifade edilen yörüngeyi mükemmel bir şekilde takip etmeye devam etmiştir. Bu demek oluyor ki; Genelleştirilmiş öngörülü kontrolde, kontrolcü bozucuyu yok edebilmektedir (Disturbance Rejection). Dikkat edilirse, sistem girişi u , sisteme bozucu etki ettiğinde, bozucunun etkisini kompanse etmek için değişmiştir. Zaman 500, 600 ve 700’de iken değişim açıkça görülmektedir ve çıkış değeri bozucuya rağmen ilk zamanlarda sapma yapmasına rağmen bir süre sonra kararlı rejimde değişmemektedir. $\lambda = 10$ ’dan $\lambda = 1$ ’e düştüğünde, çıkışın yörüngeye oturma zamanı azalmıştır fakat, u girişindeki salınımlar artmıştır. N_u kontrol horizonu ve $N_2 =$ öngörü ufukları optimum şekilde seçilmesi gerekir. Eğer seçilmez ise şekil 5.11’de $N_u = 1$ ve N_2 durumunda olduğu gibi, kontrolcünün performansı azalır. Oturma zamanı ve salınımlar artar.

Az sönümlü bir sistemin kontrolünde eğer model ve sistem uyumlu ve bozucu mükemmel bir şekilde modellenmiş ise kontrol performansı DMC ve GPC’de büyük ölçüde aynıdır ve performans oldukça yüksektir.

5.2.1.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli

Bu bölümde sisteme bozucu olarak 5.1.6’daki bozucu etkimesine karşın, kontrolcünün tasarımında (5.10)’daki bozucu modeli kullanılmıştır. Yani sisteme etkiyen bozucuda bir belirsizlik vardır. Bu belirsizliğin kontrolcünün performansına etkisi aşağıdaki gibi olmuştur.

$$G_d = \frac{3.52}{25s+1} e^{-15s} \quad (5.10)$$



Şekil 5.12 : Az sönümlü min. faz sisteminin DMC ile kontrolü – bozucu etkisi

Bu bölümde bozucunun etkisi incelendi. Bölüm 5.2.1.1’de bozucu modeli tamamen bilindiğinden, çıkıştaki sapmalar çok azdı fakat, burada bozucu modeli tamamen bilinmiyor. Başka bir ifadeyle sisteme ölçülen ve ölçülemeyen bozucular birlikte etki etmiştir. Bu durumda ise şekil 5.12 açıkça görülmektedir. Bozucunun etki ettiği anda çıkış referanstan sapmıştır ve bir süre sonra bozucu etki devam etmesine rağmen çıkış tekrar yörüngeye oturmuştur. Bozucu etkinin, kontrolcüdeki ayar parametreleri değiştirilerek azaltılabilir. Nitekim şekil 5.12’da görüldüğü gibi, $\lambda = 10$ ’dan $\lambda = 1$ ’de düşürüldüğünde yörüngeden sapma azalmıştır. DMC ve GPC’nin bozucuya karşısındaki performansları büyük ölçüde aynıdır. İkisi de bozucu etkiyi yok etmede çok başarılıdır.

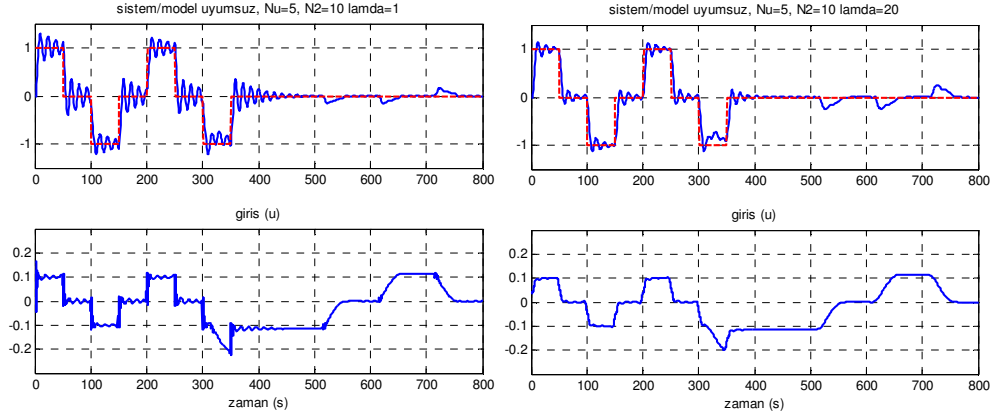
5.2.1.3 Sistem $\neq$ sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli

Endüstriyel sistemlerin modellenirken, sistemi tamamen temsil eden modellerin ortaya çıkarılması çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Ayrıca doğrusallaştırma işleminden dolayı da model hataları ortaya çıkabilmektedir. Bu bölümde sistem ile

modelin aynı olmadığı durumda, kontrolcünün davranışını incelendi. Bunun için öngörü algoritması içerisinde kullanılan modelin (5.11) kutupları ve sıfırının yeri değiştirildi.

$$y(t) - 1.45y(t-1) + 0.8y(t-2) = 5u(t-1) + 0.5u(t-2) + s(t) \quad (5.11)$$

Böylece (5.1)'deki sistemin kontrolü (5.11)'daki model kullanılarak gerçekleştirildi.



Şekil 5.13 : Az sönümlü min. faz sisteminin DMC ile kontrolü – model belirsizlik

Kontrolcüde kullanılan model, gerçek sistemi temsil etmekten ne kadar uzaklaştıkça model öngörülü kontrolcünün performansı da o kadar düşer. Şekil 5.13'da görüldüğü gibi performans düşmesine rağmen ayar parametrelerinin çok iyi ayarlanmasıyla tatmin edici bir performans elde edildi. Çıkış yörüngeye oturdu. Bozucu çok iyi bir şekilde yok edildi. Sistem kararlı rejimde iken, u giriş değeri bölüm 5.2.1.1'de elde edilen u girişinden farklıdır. Bu farklılık model ile sistemin farklılığından meydana gelmektedir. Yani, Model belirsizliğini sisteme etkileyen bozucu şeklinde düşünebiliriz.

Model belirsizlik

Yanlış ölçülen sistem çıkışların veya hiçbir şekilde ölçülemeyen çıkışların ve kontrol edilemeyen bazı girişlerin içinde belirsizlik (uncertainty) vardır. Bundan dolayı çıkış öngörüsü genellikle, sonraki ölçülen proses değerinden farklı olur.

$$d(k) = y(k) - y(k|k-1)$$

Pratikte hiçbir matematik model, fiziksel prosesi tam olarak ifade edemez. Model hatalarının kontrol sistemini olumsuz etkilediği her zaman aklımızda tutmamalıdır.

Amacımız kontrolcünün bu belirsizliğe karşı duyarsız olmasını sağlamaktır. Buna kontrolcünün dayanıklı veya gürbüz olması da denir. Belirsizlik çoğu durumda yapısal bir yol ile açıklanabilir. Yani transfer fonksiyonunda göz önünde bulundurulmuş parametrelerin fonksiyonu ile ifade edilir. Fakat çoğu zaman modellenemeyen hatalar kalır. Özellikle yüksek frekanslarda baskın olan ve bu yol ile modellenemeyen hatalar. Bunlar da yapısal olmayan belirsizlikleri teşkil eder.

İki tip yapısal belirsizlik vardır: parametrik belirsizlikler ve modellenmemiş dinamik belirsizlikler. İlk durumda model derecesi prosesin derecesine eşit olması beklenir fakat model parametreleri, nominal parametrelerin civarında ve belirsizlik sınırı içerisinde olması gerekir. (Bu parametreler: kutup, kazanç, ölü zaman ...). Bu koşullar sağlanmadığında parametrik belirsizlikler ortaya çıkar. İkinci durum ise, model içerisinde, sistemin dinamiğini ifade eden kutup gibi parametrelerin yer almaması ile modellenmemiş dinamik belirsizlikler ortaya çıkar.

5.2.2 Az sönümlü minimum faz olmayan sistemin simülasyonu

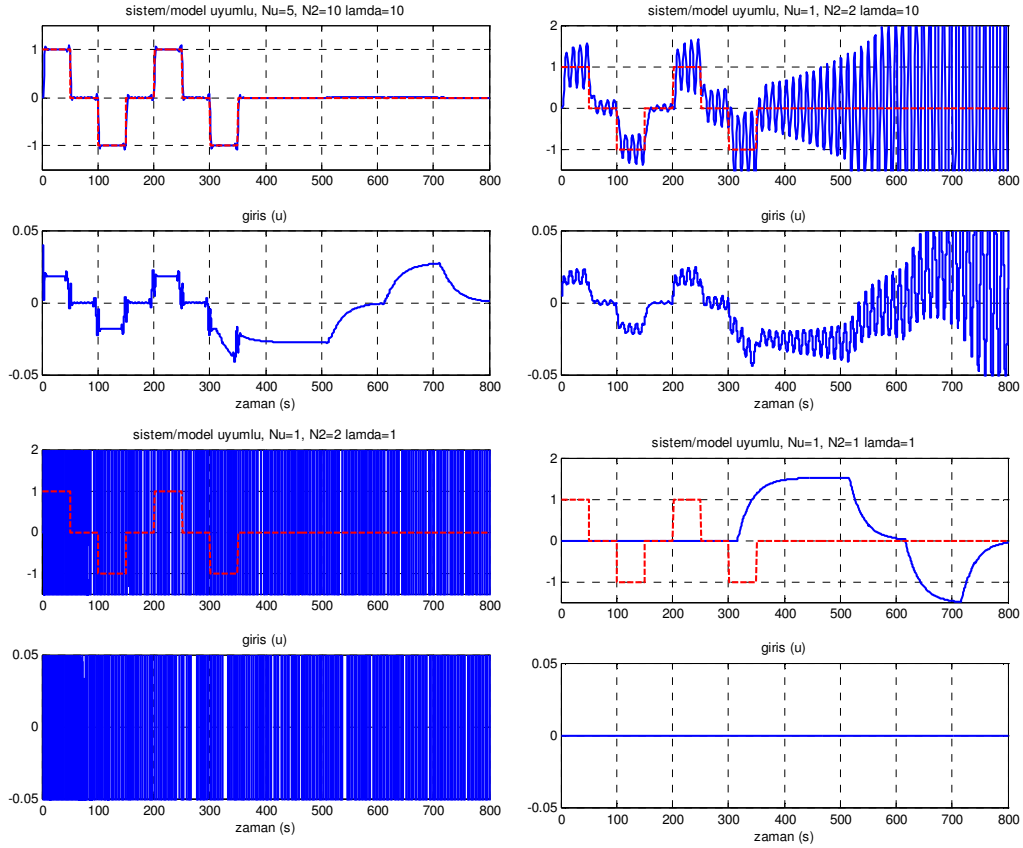
Bu sistemin simülasyonunda bölüm 5.2.1’de olduğu gibi üç senaryo ele alınmıştır. İlk olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin tamamen aynı olduğu durum incelenmiştir (model=plant ve dmodel=dplant). İkincisinde ise, sistem ile sistem modelinin aynı olduğu fakat, bozucu ile bozucu modelin farklı olduğu durum incelenmiştir (model=plant ve dmodel≠dplant). Bu senaryoda, ölçülen ve ölçülemeyen bozucuların kontrolcü performansı üzerindeki etkisi ele alınmıştır. Son olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin aynı olmadığı durumdur (model≠plant ve dmodel≠dplant). Bu durumda ise, model belirsizlik (model uncertainty) ve onun kontrolcü performansına olan etkileri ele alınmıştır.

5.2.2.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu= bozucu modeli

Şekil 5.14’de olduğu gibi N_u kontrol ufku 5, N_2 öngörü ufku 10 ve Δu ağırlık faktörü $\lambda=10$ olduğunda minimum faz olmayan sistem DMC tarafında mükemmel bir şekilde kontrol edilmiştir. Ayrıca, sisteme etkiyen bozucu da, bozucu modeli kontrolcü tarafından tamamen bilindiği için iyi bir şekilde yok edilmiştir.

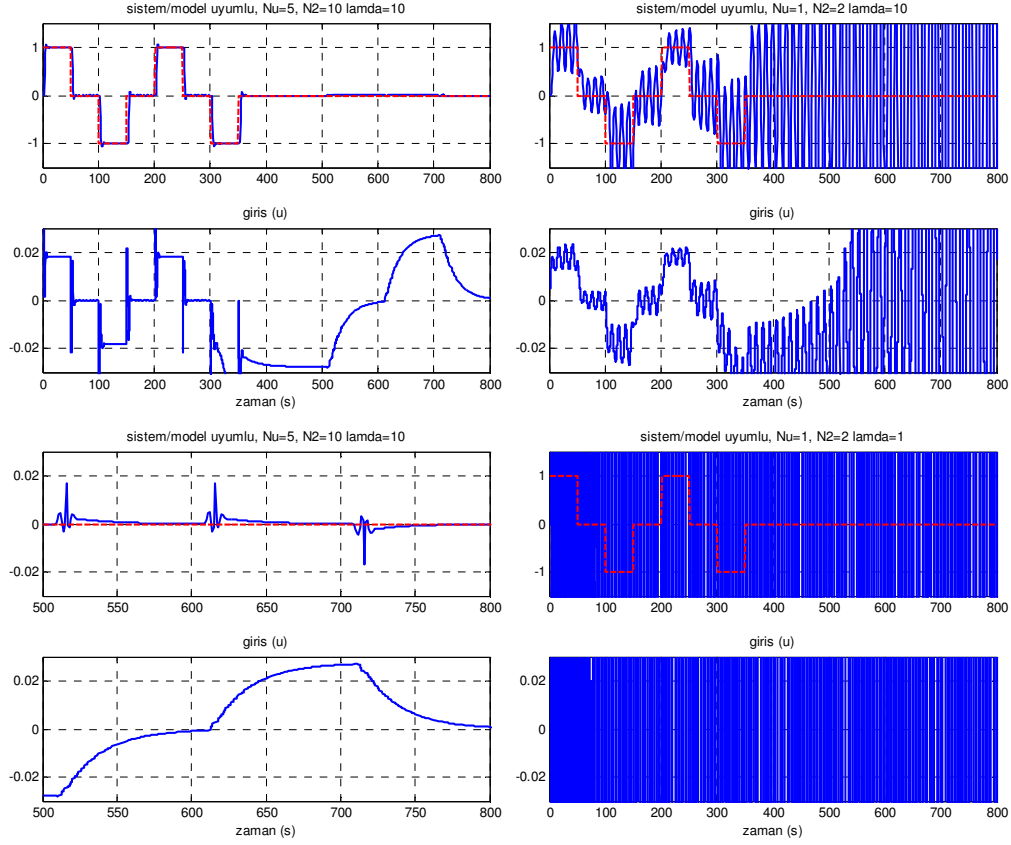
$\lambda=10$ olarak bırakılıp, kontrol ufku 1’e ve öngörü ufku da 2’ ayarlandığında şekil 5.11’de görüldüğü gibi DMC sistemi kontrol edemiyor ve sistem kararsız oluyor. kontrol ufku 1’e ve öngörü ufku da 2 iken λ ağırlık faktörü 10’dan 1’e indirildiğinde

kararsızlık daha da artmaktadır. Şekil 5.14'deki son simülasyon ise kontrol ve öngörü ufukları 1'e eşitlendiğindeki durumu göstermektedir. Sistemin gecikmesi 1 olduğundan N_2 maksimum öngörü ufkı gecikmeden büyük olması gerekmektedir. Aksi halde, u kontrol sinyali üretilemez ve daima sıfıra eşit olur.



Şekil 5.14 : Az sönümlü minimum faz olmayan sisteminin DMC ile kontrolü

Şekil 5.15'de az sönümlü minimum faz olmayan sistemin genelleştirilmiş öngörülü kontrol ile kontrolü gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar DMC ile karşılaştırıldığında aynı sonucu vermektedir. GPC, uygun kontrol ve öngörü ufkı ile birlikte u ağırlık faktörünün uygun seçilmesiyle sistemi kontrol etmiştir ve bozucuyu yok etmiştir.

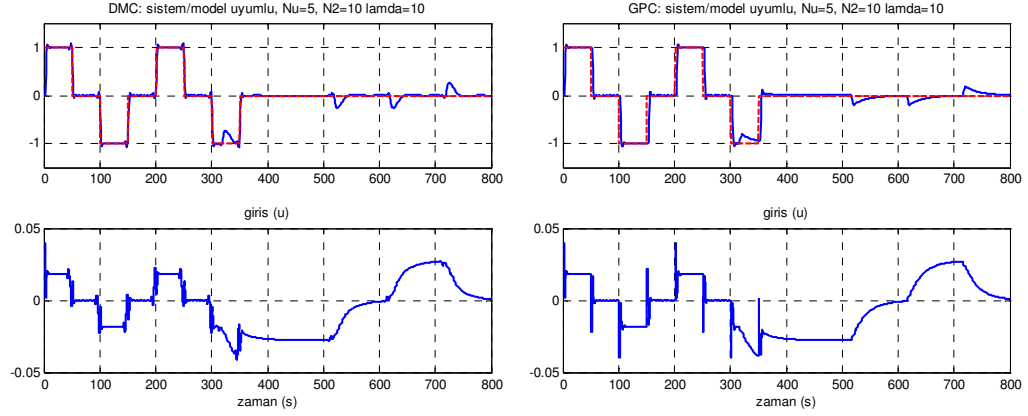


Şekil 5.15 : Az sönümlü minimum faz olmayan sisteminin GPC ile kontrolü

Minimum faz olmayan sistemlerin kontrolünde dikkat edilmesi gereken husus, öngörü parametresinin büyük seçilmesi gereklidir. Minimum faz olmayan sistemin karakteristiğinden dolayı, öngörü ufku küçük seçilirse kontrol kararsız olabilir. Maksimum performans alabilmek için, kontrol ufku ile öngörü ufku arasındaki fark çok olmalı ve öngörü ufku büyük seçilmelidir.

5.2.2.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli

Bu bölümde sisteme bozucu olarak 5.1.6'daki bozucu etkimesine karşın, kontrolcünün tasarımında (5.10)'daki bozucu modeki kullanılmıştır. Yani sisteme etkileyen bozucuda bir belirsizlik vardır. Bu belirsizliğin kontrolcünün performansına etkisi aşağıdaki gibi olmuştur.



Şekil 5.16 : Az sönümlü min. faz olmayan sistemin kontrolünde bozucu etkisi

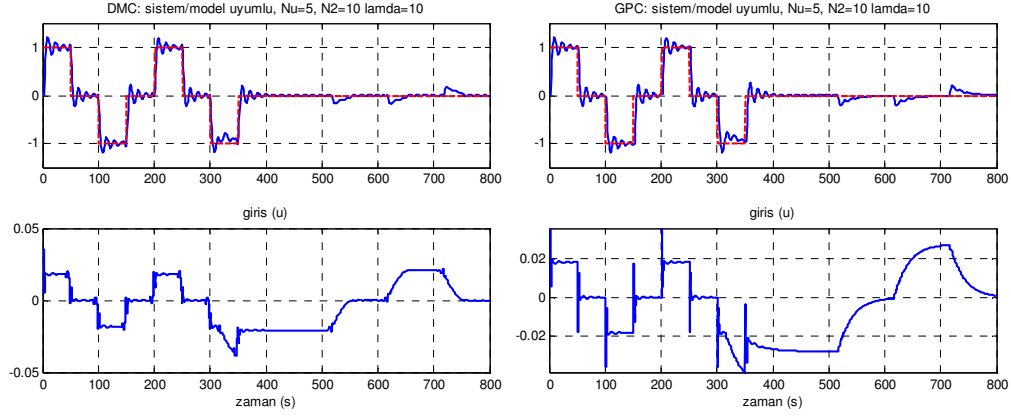
DMC ve GPC az sönümlü minimum faz olmayan sistemlerin kontrolünde, sisteme ölçülen ve ölçülemeyen bozucu etki etse dahi bir sistemi kontrol edebilmektedir. Etki eden bozucuyu da mükemmel bir şekilde yok edebilmektedir.

5.2.2.3 Sistem $\neq$ sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli

Endüstriyel sistemlerin modellenirken, sistemi tamamen temsil eden modellerin ortaya çıkarılması çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Ayrıca doğrusallaştırma işleminden dolayı da model hataları ortaya çıkabilmektedir. Bu bölümde sistem ile modelin aynı olmadığı durumda, kontrolcünün davranışı incelendi. Bunun için öngörü algoritması içerisinde (5.12)'deki model kullanıldı. ((5.2)'deki sistemin kutupları ve sıfırının yeri değiştirilerek elde edildi.).

$$y(t) - 1.55y(t-1) + 0.8y(t-2) = 5u(t-1) + 10.5u(t-2) + s(t) \quad (5.12)$$

Böylece (6.2)'deki sistemin kontrolü (6.12)'daki model kullanılarak gerçekleştirildi. Kontrolcünde kullanılan model, gerçek sistemi temsil etmekten ne kadar uzaklaştıkça model öngörülü kontrolcünün performansı da o kadar düşer. Şekil 5.17'da görüldüğü gibi performans düşmesine rağmen ayar parametrelerinin çok iyi ayarlanmasıyla tatmin edici bir performans elde edildi. Çıkış yörüngeye oturdu. Bozucu çok iyi bir şekilde yok edildi.



Şekil 5.17 : Az sön. min. faz olmayan sisteminin kontrolünde model belirsizlik

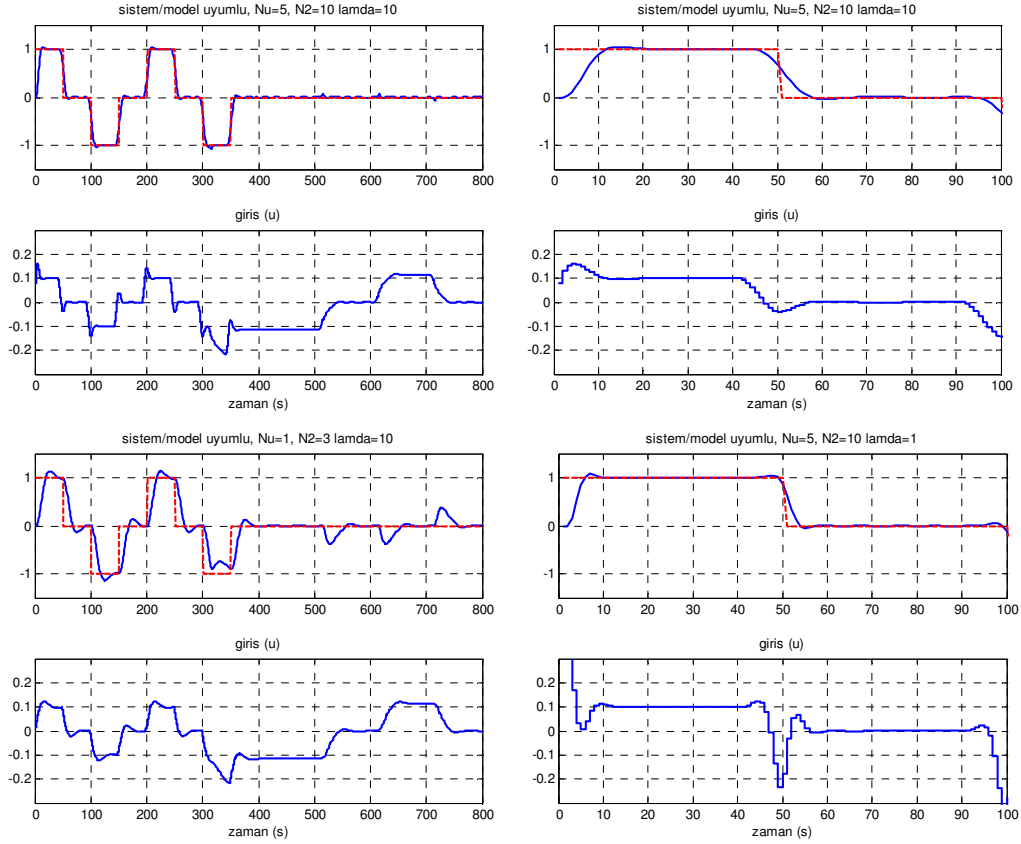
5.2.3 Aşırı sönümlü minimum faz sistemin simülasyonu

Bu sistemin simülasyonunda bölüm 5.2.1’de olduğu gibi üç senaryo ele alınmıştır. İlk olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin tamamen aynı olduğu durum incelenmiştir (model=plant ve dmodel=dplant). İkincisinde ise, sistem ile sistem modelinin aynı olduğu fakat, bozucu ile bozucu modelin farklı olduğu durum incelenmiştir (model=plant ve dmodel≠dplant). Bu seneryoda, ölçülen ve ölçülemeyen bozucuların kontrolcü performansı üzerindeki etkisi ele alınmıştır. Son olarak, sistem ile sistem modelinin ve bozucu ile bozucu modelinin aynı olmadığı durumdur (model≠plant ve dmodel≠dplant). Bu durumda ise, model belirsizlik (model uncertainty) ve onun kontrolcü performansına olan etkileri ele alınmıştır.

5.2.3.1 Sistem = sistem modeli ve bozucu = bozucu modeli

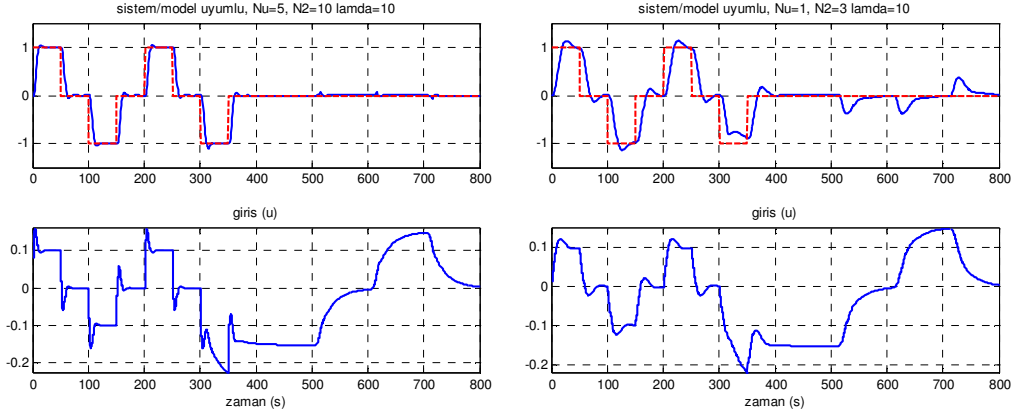
Şekil 5.18’de Dinamik matris kontrol ile sistem çok iyi bir şekilde yörüngeyi takip etmiştir. Sistem ile model ve bozucu ile bozucu modeli tamamen aynıdır. Sisteme bölüm 5.1.6’da tanımlanan bozucu da etki etmiştir. Bunun sonucunda mavi renk ile çizilen çıkış, kırmızı renkli ve kesikli çizgi ile ifade edilen yörüngeyi mükemmel bir şekilde takip etmeye devam etmiştir. Bu demek oluyor ki; dinamik matris kontrolünde, kontrolcü, bozucuyu yok edebilmektedir (Disturbance Rejection). Dikkat edilirse, sistem girişi u , sisteme bozucu etki ettiğinde, bozucunun etkisini kompanse etmek için değişmiştir. Zaman 500, 600 ve 700’de iken değişim açıkça görülmektedir ve çıkış değeri bozucuya rağmen değişmemektedir. $\lambda = 10$ ’dan $\lambda = 1$ ’e düştüğünde, çıkışın yörüngeye oturma zamanı azalmıştır fakat, u girişindeki salınımlar artmıştır. Bu çok doğaldır çünkü, λ amaç fonksiyonunda Δu değerlerinin

ağırlık faktörüdür. λ arttırdığımızda Δu artık miktarındaki değişimleri kısıtlarız. Bu da çıkışın, daha ağır bir şekilde yörüngeye oturmasına sebep olur. Kontrol ve öngörü ufukları azaldığında ($N_u = 5 \rightarrow 1$ ve $N_2 = 10 \rightarrow 3$) kontrolcünün performansı düşmüştür. Geçici rejimdeki sapmalar artmıştır. Bozucu yok edilmiştir fakat, bozucu ilk etki ettiği zamanda sistem referanstan sapma göstermiştir.



Şekil 5.18 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin DMC ile kontrol

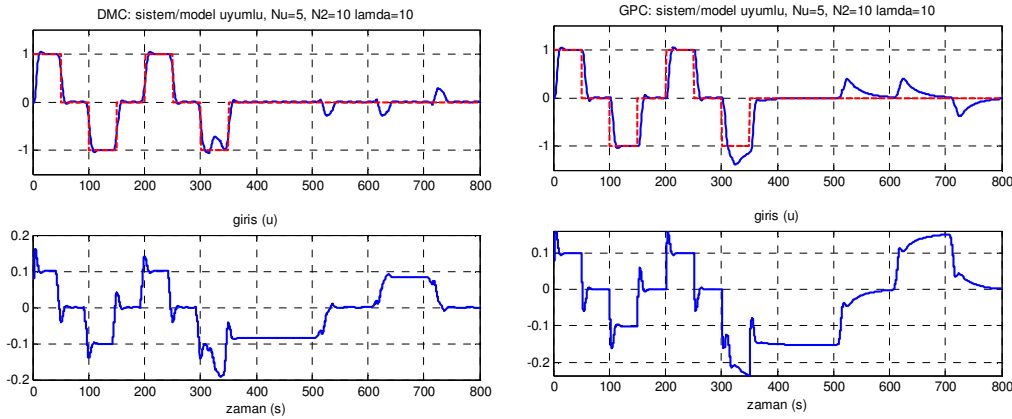
Aşırı sönümlü minimum faz sistemlerin kontrolünde, sistem ve sitem modeli uyumlu ise, DMC ile GPC performans açısından aynı özellikler göstermektedir. Yukarıda DMC için yapılan yorumlar GPC için de geçerlidir.



Şekil 5.19 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin GPC ile kontrolü

5.2.3.2 Sistem = sistem modeli ve bozucu $\neq$ bozucu modeli

Bu bölümde sisteme bozucu olarak 5.1.6'daki bozucu etkimesine karşın, kontrolcünün tasarımında (5.10)'daki bozucu modeli kullanılmıştır. Bu sayede sisteme ölçülen ve ölçülemeyen bozucu etki ettirilmiştir.



Şekil 5.20 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin kontrolünde bozucu etkisi

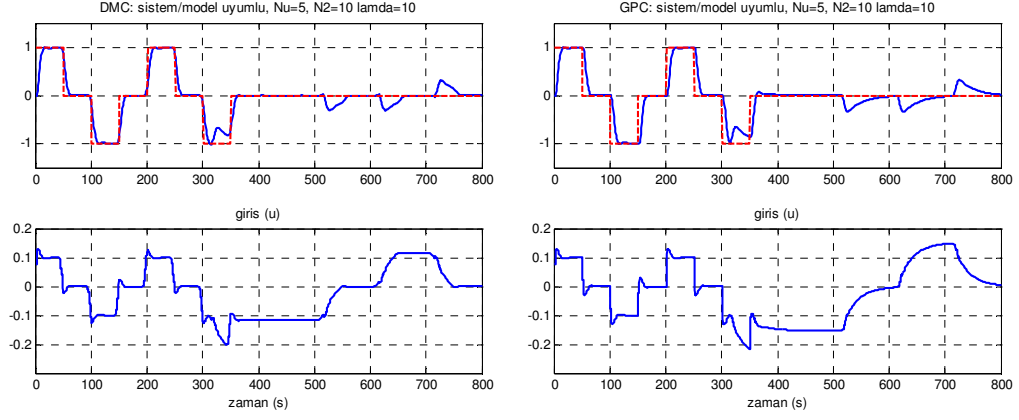
DMC ve GPC ölçülen ve ölçülemeyen bozucuları etkin bir şekilde yok edebilmektedir (Şekil 5.20). Ölçülemeyen bozucu nedeniyle, bozucu ilk etki ettiğinde sistem çıkışı referanstan sapmıştır fakat, kısa süre sonra tekrar hata yok edilmiştir.

5.2.3.3 Sistem = modelinin ve bozucu = bozucu modeli

Bu bölümde sistem ile modelin aynı olmadığı durumda, kontrolcünün davranışını incelendi. Bunun için (5.3)'teki sistemin kutup ve sıfırlarının yeri değiştirildi ve (5.13)'teki model elde edildi. Bu model öngörülü kontrol algoritması içinde kullanıldı.

$$y(t) - 1.3y(t-1) + 0.38y(t-2) = u(t-1) + 0.269u(t-2) + s(t) \quad (5.13)$$

Böylece (5.3)'teki sistemin kontrolü (5.13)'daki model kullanılarak gerçekleştirildi.

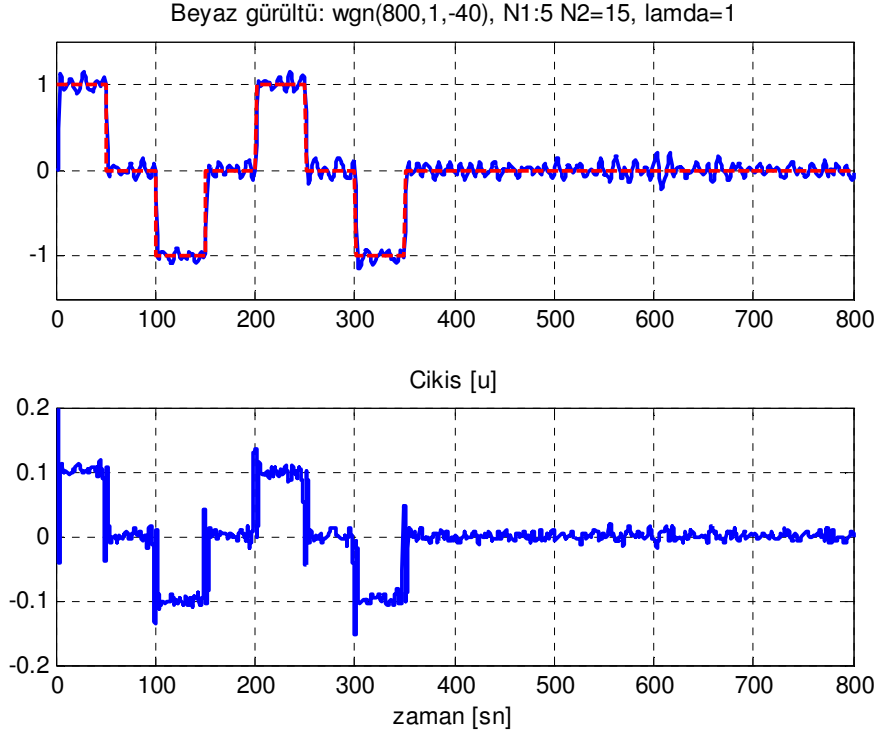


Şekil 5.21 : Aşırı sönümlü minimum faz sisteminin kontrolünde model belirsizlik

Şekil 5.21'de görüldüğü gibi, DMC ve GPC, model parametrelerindeki sapmadan doğan belirsizliğin üstesinden gelebilmektedir. Model parametrelerindeki sapma arttıkça kontrolcünün performansı düşmektedir. Model öngörülü kontrol, model tabanlı bir kontrolcü olduğundan, model, sisteme ne kadar yakın ise kontrolcü o kadar başarılı olacaktır.

5.2.4 Ayrık zamanlı stokastik sistemin simülasyonu

Bu bölümde (5.4)'belirtilen sisteme varyansı $\sigma^2 = 10^{-4}$ olan bir beyaz gürültü ($e(t)$) sisteme bozucu girişi olarak etki ettirilmiştir. Bu bozucu girişi (5.4)'teki bozucu dinamiğinden geçirilmiştir. Elde edilen sonuç şekil 5.22'deki gibi olmuştur.

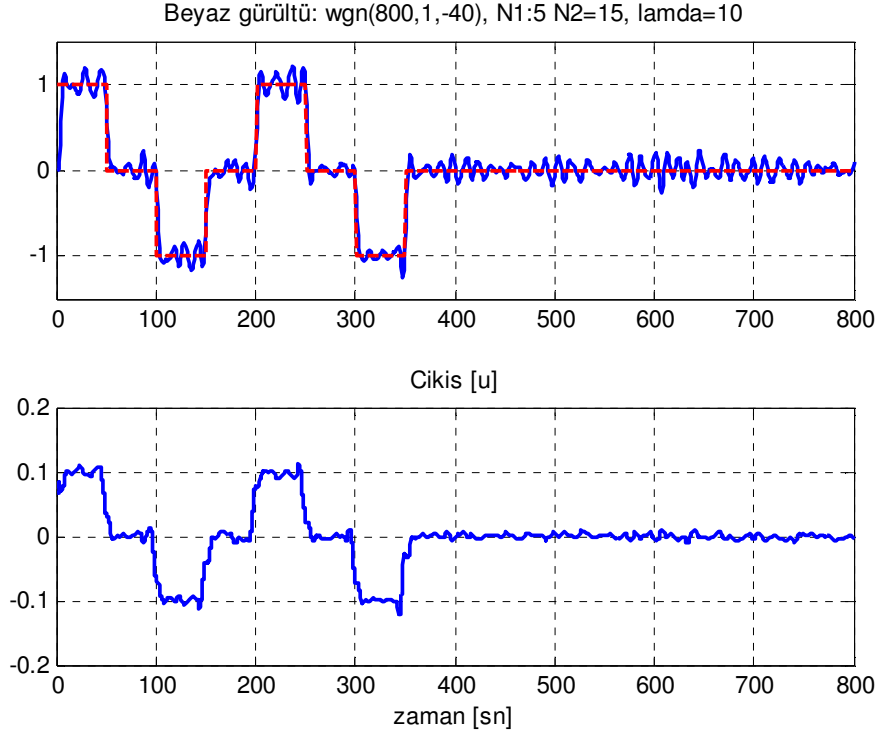


Şekil 5.22 : DMC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi

λ ağırlık faktörü 1'e eşit alındığında kontrol eforu çok olmuştur. Çıkışın varyansı $\sigma^2 = 120 \times 10^{-4}$ olarak elde edilmiştir. Bu beyaz gürültüden 120 kat daha fazladır. Bunun nedeni, basamak referans değişikliklerinde çıkışın referanstan sapması ve beyaz gürültünün sistem (5.4)'teki gibi bir gürültü dinamiğinden de geçirilmesidir.

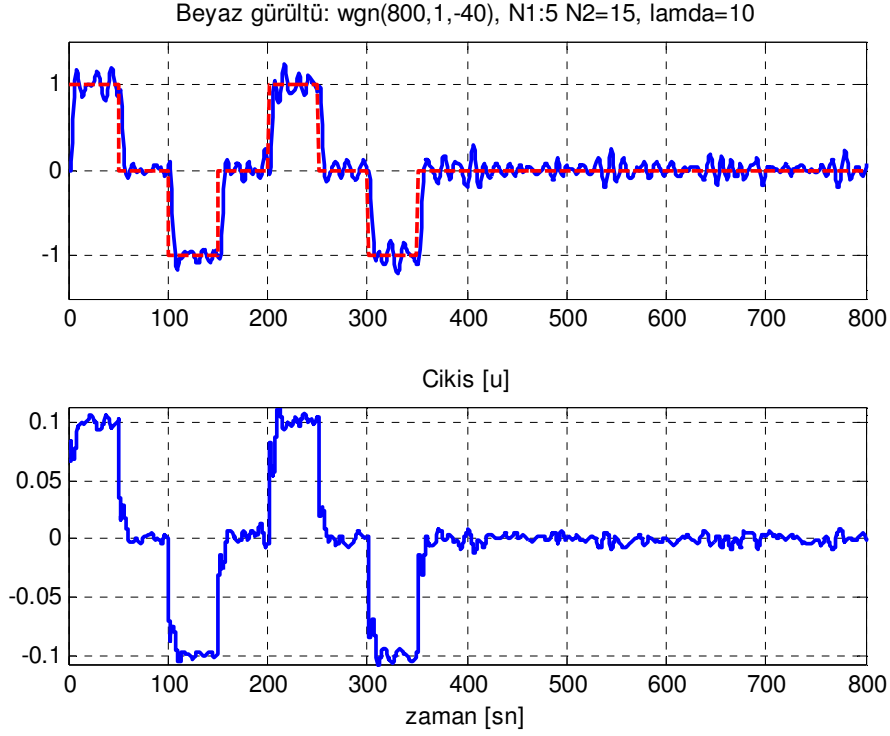
Şekil 5.23'te λ ağırlık faktörü 10' çıkarılmıştır. Bunun sonucunda y çıkışı daha fazla salınım yapmıştır çünkü u girişindeki efor azalmıştır. Bunun sonucunda elde edilen varyans beklendiği gibi artmıştır ve $\sigma^2 = 176 \times 10^{-4}$ olarak elde edilmiştir.

Beyaz gürültüyü denklem (5.4)'teki dinamikten geçirmeyip direk sisteme etki ettirdiğimizde y çıkışındaki salınımlar azalmıştır ve varyans $\sigma^2 = 82 \times 10^{-4}$ elde edilmiştir. Bu da beyaz gürültünün 82 katıdır. Nedeni ise sadece ve sadece basamak referans değişikliklerinde çıkışın referanstan sapmasıdır. Nitekim Şekil 5.22 görüldüğü gibi referans sabitlendiğinde ve y çıkışı kararlı rejime geçtiğinde (t=400-800) çıkışın varyansı $\sigma^2 = 1,13 \times 10^{-4} \approx 10^{-4}$ olarak elde edilmiştir. Bu da beyaz gürültünün varyansına eşittir.



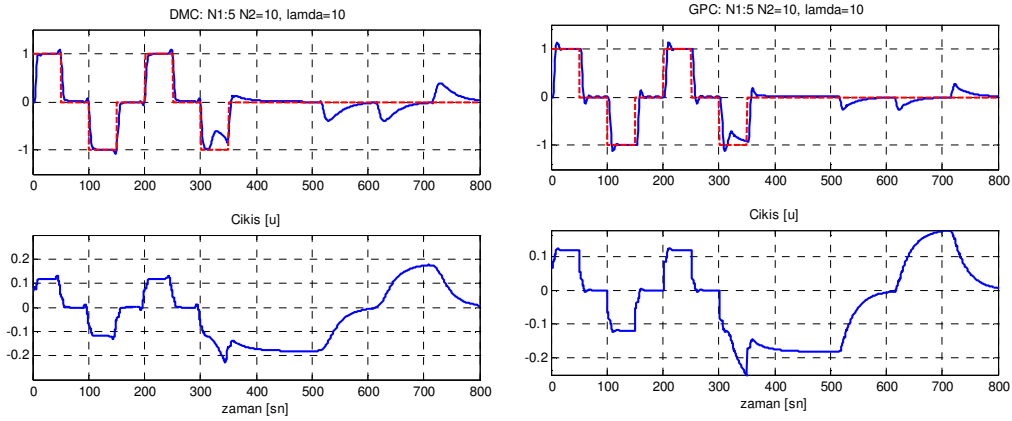
Şekil 5.23 : DMC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi

Şekil 5.24'te ise Beyaz gürültünün GPC üzerindeki etki görülmektedir. DMC'de olduğu gibi y çıkışı salınımlar yapmaktadır. y çıkışının varyansı, beyaz gürültünün varyansından büyüktür. GPC'de hesaplanan varyans değerleri DMC de elde edilenler ile aynıdır. Genel olarak, MPC, y çıkış hatasını varyansını, bozucunun varyansından daha küçük yapamaz. Bozucunun varyansı çıkışta aynen kalır. Çıkışta elde edilen bozucu varyansını yok etmek için Kalman filtresi kullanılabilir.



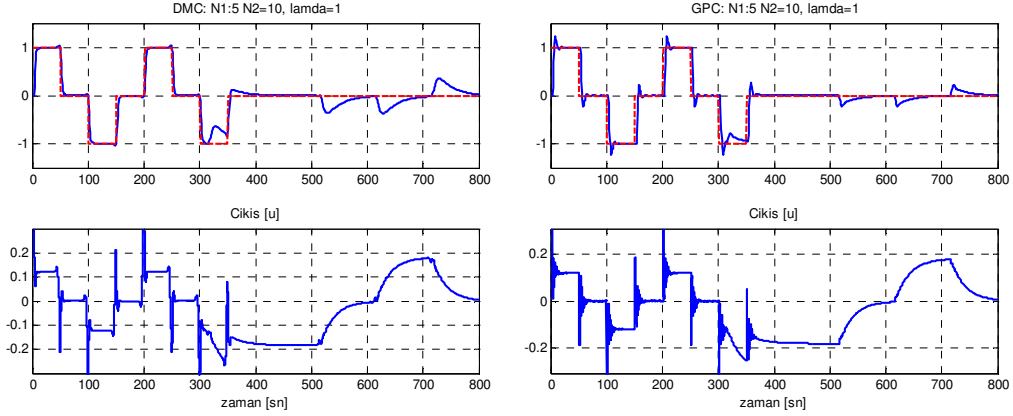
Şekil 5.24 : GPC ile kontrol edilen sistemde beyaz gürültünün etkisi

5.2.5 Model derecesi yanlış olan sistemlerin simülasyonu



Şekil 5.25 : Model derecesi yanlış olan sistemin kontrolü

Şekil: 5.25'te (5.5)'teki 3. dereceden olan sistemin kontrolü, (5.1)'deki 2. dereceden olan model ile gerçekleştirilmiştir. DMC ve GPC, model belirsizliklerden biri olan model derecesinin yanlış olduğu durumlarda dahi, sistemi iyi bir şekilde referansa yakınlıştırmıştır. Ayrıca sisteme etkiyen bozucuları da mükemmel bir şekilde yok etmiştir. MPC model belirsizliklere karşı oldukça duyarsızdır.



Şekil 5.26 : Model derecesi yanlış olan minimum faz olmayan sistemin kontrolü

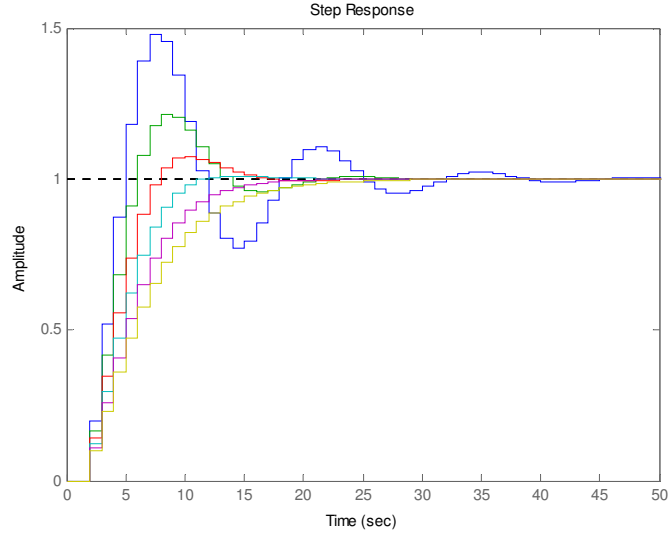
Şekil 5.26’da Model derecesi yanlış olan minimum faz olmayan bir sistemin (5.6), DMC ve GPC ile kontrolü görülmektedir. $\lambda = 1$ alındığından kontrol eforu vardır. Sistem mükemmel bir şekilde kontrol edilebilmiştir. Sisteme uygulanan bozucular yok edilmiştir. Bununla birlikte bir önceki simülasyonda da görüldüğü gibi kontrol performansı biraz düşmüştür. Model ile sistem arasındaki farklılık arttıkça kontrol performansı düşer. (5.7)’deki sistem de DMC ve GPC ile kontrol edildiğinde aynı sonuçlar bulunacaktır.

5.2.6 Zaman ile değişen sistem

Bu bölümde, model parametreleri zaman ile değişen bir sistem incelenmiştir. Bunun için bölüm 5.1.6’daki (5.8) modeli kullanılmıştır. Bu model aşağıdaki gibidir.

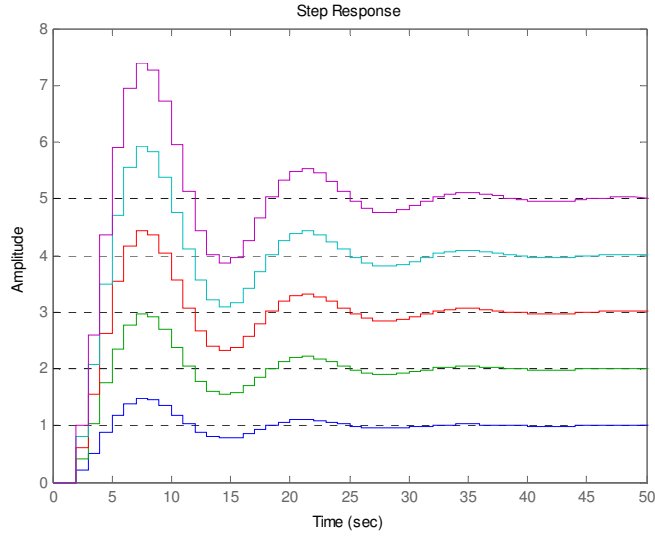
$$[Tz^2 + (3+T)z + 4]Y(z) = KU(z)z^{-T_d}$$

Bu model de $K=1$ olduğunda, T parametresi 5’ten 10 kadar değiştirildiğinde sistemin dinamiği Şekil 5.27’deki gibi değişmektedir. $T=5$ iken sistem en fazla salınım yapmaktadır ve T artarken sistemin sönümü artmaktadır. K sabit kaldığından sistemin basamak cevabı T değişse bile değişmemektedir ve kararlı rejimde daima 1’e eşit olmaktadır.



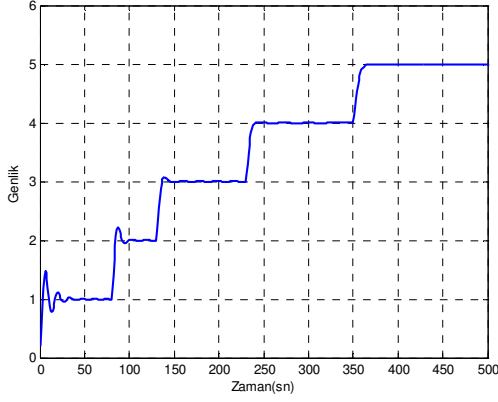
Şekil 5.27 : T değiştiğindeki basamak cevabı

Parametre değişimlerinin sistem üzerinde ne tür bir değişiklik yaptığını daha iyi anlayabilmek için bu sefer T parametresini 5'te sabitleyip K parametresini 1'den 5'e kadar artırıldı. Bu durumda sistemin basamak cevabı Şekil 5.28'de görülmektedir. Sistemin karakteristiği değişmeden kararlı rejim cevabı K ile birlikte değişmektedir.



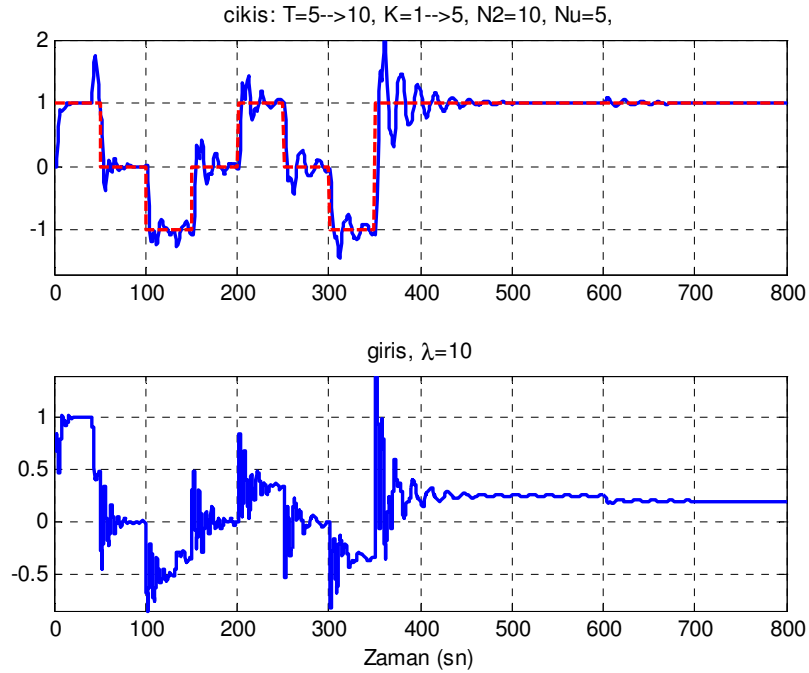
Şekil 5.28 : K değiştiğindeki basamak cevabı

T ve K parametresi aynı anda yukarıdaki gibi değiştirildiğinde sistemin basamak cevabı aşağıdaki gibi olmaktadır.



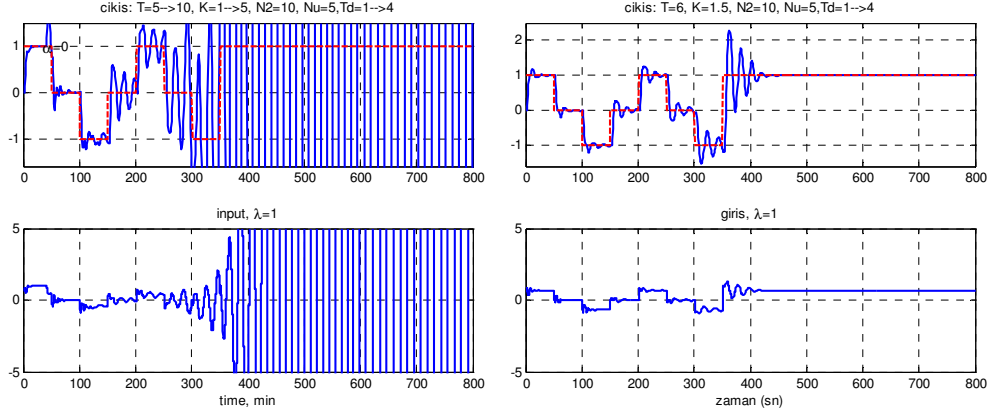
Şekil 5.29 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin basamak cevabı

Zaman ile değişen sistemini dinamik matris ile kontrol edildiğinde Şekil 5.30'da da görüldüğü gibi T ve K parametreleri değiştikçe kontrolcünün performansı azalmıştır. K, 1'den başlayarak 5'e kadar ve T, 5'ten başlayarak 10'a kadar örnekleme zamanı 40, 130, 230, 350, 600'de değişmektedir. Açıkça görüldüğü gibi çıkış bu örnekleme zamanlarında sapma göstermiştir fakat, çıkış yine de referansa yakınsamıştır. Sonuç olarak, DMC, zaman ile değişen sistemleri kontrol edebilmektedir. Burada bir ayrıntı vermek gerekirse o da şudur ki; eğer sistemdeki değişme yavaş olursa DMC kararlı kalabilmektedir fakat hızlı bir değişim kontrolü kararsız yapabilmektedir.



Şekil 5.30 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin DMC ile kontrolü

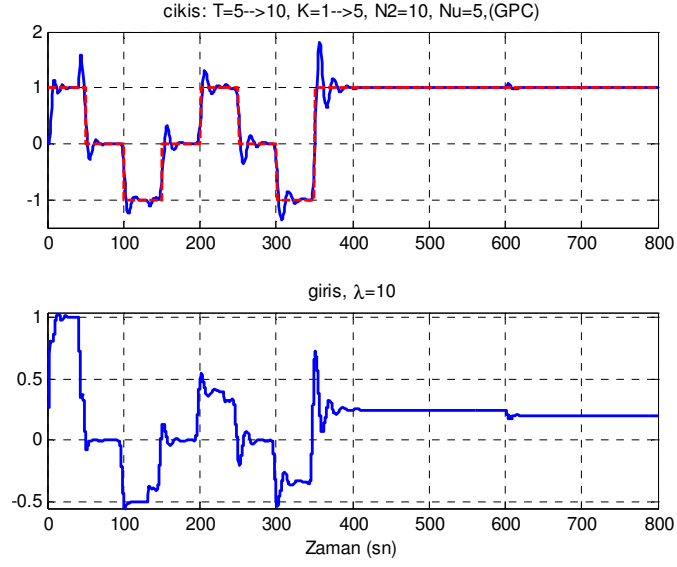
Şekil 5.30'da zaman gecikmesi değiştiğinde sistemin kararsız olması doğaldır çünkü, sistemdeki parametre değişikliği çok fazladır. Nitekim Şekil 6.31'de $T=6$ ve $K=1.5$ alındığında, zaman gecikmesi kontrol performansı düşse de de sistem kararlı kalmaktadır ve çıkış referansa yakınsamaktadır. Zaman gecikmesi artınca sistem çıkışındaki salınım artar.



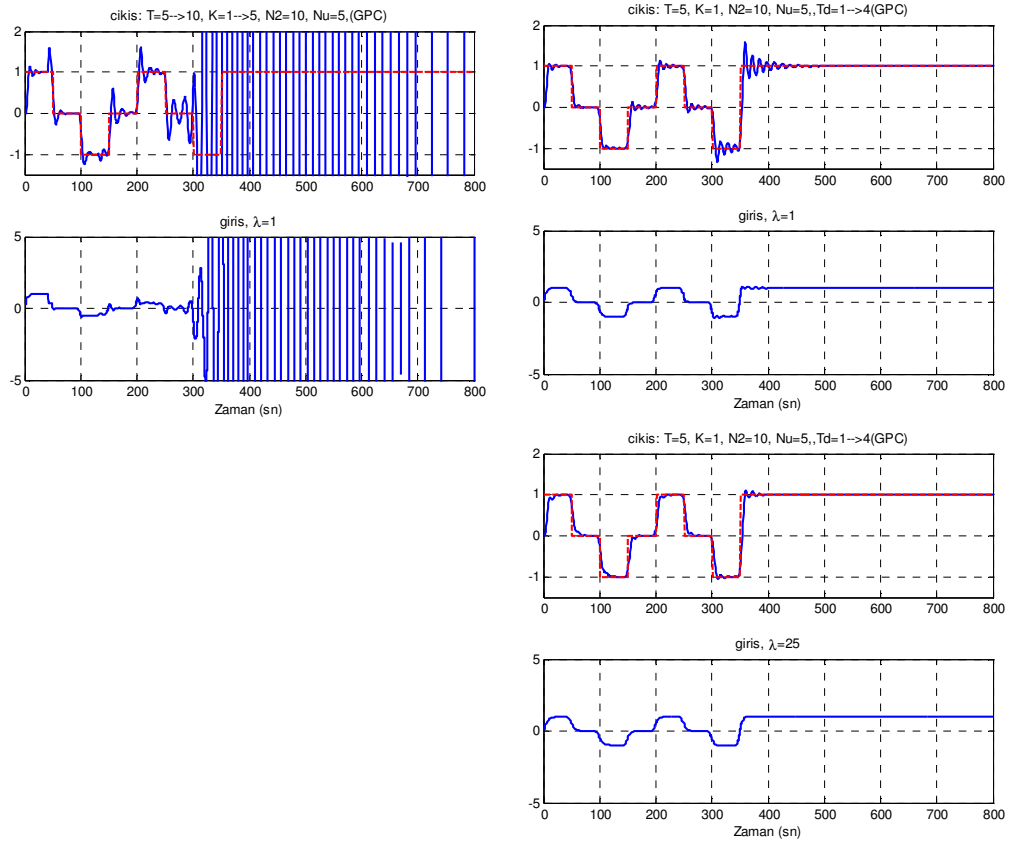
Şekil 5.31 : DMC ile kontrolde zaman gecikmesinin etkisi

Parametreleri zaman ile değişen sistem, GPC ile kontrol edildiğinde, sistemin dinamiği değiştiğinde sistem kararlı olmaya devam ettiği için, sonuçlar DMC ile aynı olmuştur. K , 1'den başlayarak 5'e kadar ve T , 5'ten başlayarak 10'a kadar örnekleme zamanı 40, 130, 230, 350, 600'de değişmektedir. Görüldüğü gibi, bu örnekleme anlarında sistem parametreleri değiştiğinden y çıkışında sapma meydana gelmiştir. Bu sapma, kontrolcü yapısında serbest cevabın değişmesiyle yoluyla belirlenip, gerekli u girişi üretilmiştir ve sistem tekrar, referansa oturması sağlanmıştır.

Şekil 5.33'de zaman gecikmesinin etkisi görülmektedir. Zaman gecikmesi 4'e kadar çıkartılmıştır. Sistemin parametreleri değiştiğinde, zaman gecikmesi 3'ü geçince, sistem kararsız olmaktadır çünkü sistem ile model arasında çok fazla değişim vardır. Bir de buna zaman gecikmesi eklenince kontrolcünün performansı oldukça düşmüştür. Bununla birlikte sistemde sadece zaman gecikmesinin olduğu durum ele alınırsa, GPC kontrolcüsü zaman gecikmesine karşı oldukça dayanıklıdır ve sitem kararlı kalmaktadır fakat zaman gecikmesi arttıkça kontrolcünün performansı düşmüştür ve salınımlar başlamıştır.



Şekil 5.32 : Parametreleri zaman ile değişen sistemin GPC ile kontrolü



Şekil 5.33 : GPC ile kontrolde zaman gecikmesinin etkisi

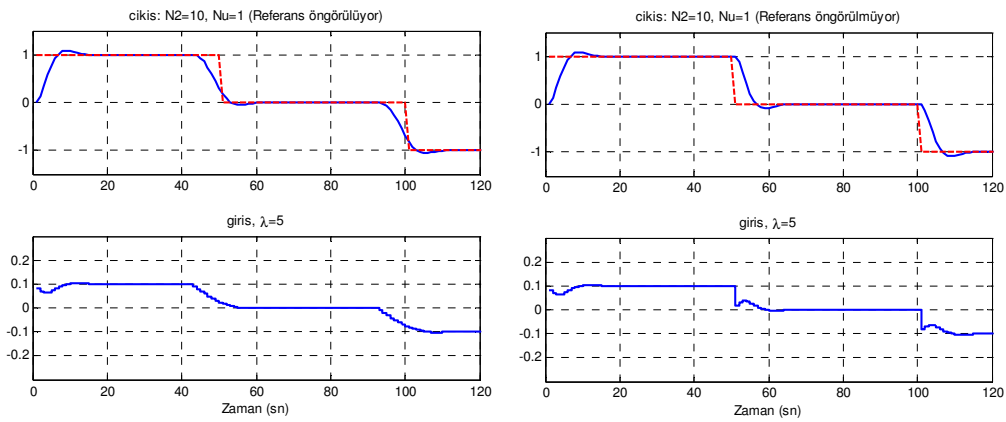
5.3 DMC ve GPC’de Referansın Öngöröldüğü ve Öngörölmediği Durum

Bir sistemin kontrolünde, eğer sistemin takip etmesi istenilen referans önceden biliniyor ise (with set point prediction), bu referansın gelecekteki değerleri amaç fonksiyonu içerisinde yer alır. Öngörücü ile gelecekteki referans arasındaki hataların karesinin toplamı sıfıra doğru küçültülmeye çalışılır. Böylece, öngörücü referanstaki değişiklikleri önceden bilir ve optimum çıkışı, referans değişikliği henüz gerçekleşmeden öngörebilir. U girişi referans değişmeye başlamadan, öngörü ufku uzunluğu kadar önce değişmeye başlar ve y çıkışını gelecekteki referans değişikliğine göre değiştirir. (5.1)’deki maliyet fonksiyonunda görüldüğü gibi w referansının gelecekteki değerleri mevcuttur. Bu referansın öngöröldüğü durumdur.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (5.1)$$

Eğer sistemin gelecekteki referansı bilinmiyorsa (without set point prediction), kontrolcü gelecekteki u girişlerini hesaplarırken sadece $w(t)$ yi kullanır. Diğer bir ifade ile $w(t+j)$ gelecek referans bilgisi maliyet fonksiyonunun içinde yer almaz. Bu durumdaki amaç fonksiyonu (5.2)’deki gibi olur. U girişi ancak ve ancak referans değiştiği anda değişmeye başlar. Bu durumda, y çıkışında referansa göre belli bir gecikme olabilir.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (5.2)$$



Şekil 5.34 : Referansın öngöröldüğü ve öngörölmediği durumun

Şekil 6.34 Referans 50 ve 100 örnekleme anlarında basamak şeklinde değişmiştir. y çıkışı, referansın öngörüldüğü durumda, 42. örnekleme anında değişmeye başlamıştır. Böylece referanstaki değişiklik 8 adım önceden öngörülmüş oldu. Diğer taraftan, referansın öngörülmediği durumda, y çıkışı 52. örnekleme anında (1 örnekleme gecikme ve 1 örnekleme de kontrolcünün yapısından kaynaklanmaktadır.) değişmeye başlamıştır. Yani gecikmeli olarak referansı takip etmiştir.

Simülasyonda, referans değişikliği olduğunda, çıkışta oluşan hata referans öngörüsü yapıldığı için oluşmaktadır. $U=K(w-f)$, yani w'daki değişim u girişini p ufku örnekleme adımı kadar önceden etkilemeye başlar. Bu da öngörünün iyileşmesine ve çıkışın referansı daha iyi takip etmesine yol açacaktır. Referans öngörüsü, ani referans değişikliğinden önce (zaman gecikmesinin az olduğu sistemlerde), çıkışta dalgalanmaya sebep olacaktır. Bu dalgalanmayı azaltmak için öngörü ufku olabildiğince kısa tutulmalıdır. Böylece dalgalanma daha geç başlayacaktır. Öte taraftan, referans öngörüsü yapılmadığında, ani referans değişikliklerinden önce dalgalanma veya sapma olmamaktadır. Diğer bir ifade ile, zaman gecikmesi az olduğunda, referans öngörüsüne gerek yoktur. Zaman gecikmesinin çok olduğu bir sistemin kontrolünde referans öngörülmez ise, ani referans değişikliklerinde, çıkış referansı zaman gecikmesi kadar geriden takip edecektir (Sadece geçici rejimde) çünkü öngörü ufku hangi uzunlukta olursa olsun, referans değişikliğinin olduğu ana kadar u kesinlikle kontrolcü tarafından değiştirilemeyecektir. Burada önemli bir nokta ortaya çıkmaktadır: Referans öngörüsü yapılmadığında, ani bir referans değişiminde (u ağırlık faktörü yeterince büyük değil ise), u girişini aniden ve çok miktarda değiştirecektir. Öte yandan, referans öngörü yapıldığında u girişi aniden değişmez ve çıkıştaki sapmalar azalır.

5.4 Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada dinamik matris kontrol ve genelleştirilmiş öngörülü kontrol algoritmaları karşılaştırılmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçlarına göre; her iki kontrolcü de, gerçek şartlarda karşılaşılabilecek karmaşık dinamiklere sahip olan az sönümlü minimum faz sistemi, az sönümlü minimum faz olmayan sistemi, aşırı sönümlü minimum faz sistemi, ayırık zamanlı stokastik sistemi, model derecesi yanlış olan sistemi ve dinamik yapısı zaman ile değişen sistemi, ayar ve tasarım parametreleri uygun seçildiğinde mükemmel bir şekilde kontrol etmiştir. Bu

kontrolcüler aynı zamanda, sistemlerin hepsine ayrı ayrı uygulanan bozucu ile başa çıkmıştır ve çıkışı başarılı bir şekilde istenen yörüngede tutmuştur. Bozucu modelinin bilindiği ve bozucunun ölçülebildiği durumda, daha iyi sonuç alınmıştır.

Model öngörülü kontrol kavramsal olarak model belirsizlikler ile başa çıkabilmektedir. Bu çalışmada bu sonuç görülmekle birlikte, model belirsizlik arttıkça, DMC ve GPC'nin performansının düştüğü de görüldü. DMC ve GPC, model derecesinin yanlış olmasına, doğru kestirilmeyen model parametrelerine ve sistemdeki değişken ölü zamana karşı oldukça duyarsızdır. Burada, $N=N_2-N_1$ öngörü ufkunun büyük olması önerilir. Nu kontrol ufku ve λ giriş ağırlık faktörleri sistemin yapısına uygun ve bilgisayarın hesaplama kabiliyetine uygun seçilir. Zaman gecikmesi bilinmiyor veya değişken ise N_1 minimum öngörü ufku $N_1=1$ olmalıdır. Zaman gecikmesi biliniyor ise minimum öngörü ufkunun zaman gecikmesine eşit alınması önerilir. Eğer küçük alınırsa, bilgisayar gereksiz hesaplama yapar çünkü $d-N_1$ adım kadar u girişi hesaplanmaz.

DMC ve GPC minimum faz olmayan sistemlerin kontrolünde çok başarılıdır. Minimum faz olmayan sistemlerin karakteristiğinden dolayı öngörü ufku uzun seçilmelidir. Öngörü ve kontrol ufukları arasındaki fark uygun olmalıdır. Giriş ağırlık faktörünün küçük seçilmesi önerilir.

DMC ve GPC sistemdeki beyaz gürültüyü yok edemez. Beyaz gürültü çıkışta görülür. Çıkıştaki gürültünün varyansını azaltmak için giriş ağırlık faktörü azaltılmalıdır. Çıkışta görülen beyaz gürültüyü yok etmek için ikinci bir optimizasyona ihtiyaç vardır.

DMC ve GPC parametreleri zaman ile değişen sistemlere karşı duyarsızdır fakat, belirsizlik arttıkça belli bir yerden sonra kontrolcü performansı simülasyon sonuçlarında görüldüğü gibi çok fazla düşer hatta kontrol kararsız olabilir. Bu durumda, öngörü ufkunun büyütülmesi ve giriş ağırlık faktörünün artırılması önerilir.

DMC, sadece kararlı sistemleri kontrol edebilir. GPC kararlı sistemleri kontrol etmenin yanında, kararsız olanları da kontrol edebilir. DMC basamak cevabı modeli kullanır dolayısıyla parametre sayısı çoktur. Burada incelenen sistemlerin modellenmesinde yaklaşık 50-60 parametre kullanılmıştır. Buna karşın GPC çok

daha az parametreye ihtiyaç duyar. GPC için kullanılan parametrik modellerde 6 adet parametre kullanılmıştır.

GPC'nin yapısı bozucuyu bastırma performansı iyileştirmek için uygundur. Çoğu sistemde bozucu ölçülemediğinde, bozucuyu gözlemlemek için T polinomu kullanılır. Böylece GPC'nin referans değişikliği performansı ve gürültüyü bastırma performansı iyileşir. DMC'de gürültü sabit kabul edildiğinden T polinomu uygulanamaz.

Bu çalışmada tek girişli tek çıkışlı (SISO) sistemler incelenmiştir ve kısıtlama yoktur. Bu çalışmanın devamı olarak sonraki çalışmalarda SISO sistemler kısıtlama olduğu halde incelenebilir. Ayrıca bu çalışmalar çok girişli çok çıkışlı (MIMO) sistemler için genelleştirilebilir. Çıkışta görülen beyaz gürültü hatasını yok etmek için Kalman filtresi kullanılan MPC tasarımı yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Cutler D.W. and Ramaker B.C.**, 1980. Dynamic Matrix Control – A Computer Control Algorithm. In *Automatic Control Conference*, San Francisco.
- [2] **Richalet, J., Rault, A., Testud, L., Papon, J.**, 1978. Model Heuristic Control: Application to Industrial Processes, *Automatica*, **14**, 413 – 428.
- [3] **Clarke D. W., Mohtadi C. and Tuffs P.S.**, 1987. Generalized Predictive Control, Part I, The Basic Algorithm, *Automatica*, **23(2)**, 137 – 148.
- [4] **Garcia, C.E. and Morshedi A.M.**, 1986. Quadratic Programming Solution of Dynamic Matrix Control, (QDMC), *Chem. Eng. Commun.*, **46**, 73-87
- [5] **Morari M. and Lee J. H.**, 1999. Model Predictive Control: Past, Present, Future, *Comp. Chem. Eng.*, **23**, 667-682
- [6] **Morari M.**, 1994. Advances in Model – Based Predictive Control, Chapter Model Predictive Control: Multivariable Control Technique of Choice, In *the 1990s Oxford University Press*, Oxford.
- [7] **Camacho E. F. and Bordons C.**, 2004. Model Predictive Control Second Edition, *Springer Verlag*, London, England.
- [8] **Morari M. and Lee J. H.**, 1999. Model Predictive Control: Past, Present, Future, *Comp. Chem. Eng.*, **23**, 667 – 682.
- [9] **Clarke D. W.**, 1988. Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes, *IEEE Control Systems Magazine*, **122**, 49 – 55.
- [10] **Clarke D. W. and Scattolini R.**, 1991. Constrained Receding-horizon Predictive Control, *Proceedings IEEE*, **138(4)**, 347 – 354.
- [11] **Lee, J.H., M. Morari and Garcia C.E.**, 1994. State-Space Interpretation of Model Predictive Control, *Automatica*, **30(4)**, 707-717
- [12] **Clarke D. W., Mohtadi C. and Tuffs P.S.**, 1987b. Generalized Predictive Control, Part II, Extensions and Interpretations, *Automatica*, **23(2)**, 137 – 148.
- [13] **Muske K.R. and Rawlings J.**, 1993. Model Predictive Control with Linear Models *AIChE Journal*, **39**, 262-287
- [14] **Maciejowski, J.M.**, 2002. Predictive Control with Constraints, *Prentice Hall*, London, England.
- [15] **Landau I. D. and Zito C.**, 2004. Digital Control Systems Third Edition, *Springer – Verlag* London Berlin Heidelberg.
- [16] **Clarke D. W., Mohtadi C.**, 1989. Properties of Generalized Predictive Control *Automatica*, **25(6)**, 859-875
- [17] **Garcia C. E., Prett D. M. and Morari M.**, 1989. Model Predictive Control: Theory and Practice Survey, *Automatica*, **25(3)**, 335-348

- [18] **Rossiter, J. A.**, 2003. Model – Based Predictive Control A Practical Approach, *CRC Press*, Boca Raton, Florida, USA.
- [19] **Morari M., Ricker N.L.**, 1999. Model Predictive Control Toolbox User's Guide, *The Mathworks Inc.*, London, England.
- [20] **URL -1** <http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/toolbox/mpc/cmpc.html>, alındığı tarih 18.02.2009
- [21] **URL -2** <http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/toolbox/mpc/cmpc.html>, alındığı tarih 15.03.2009
- [22] **Ogata K.**, 2003. Modern Control Engineering, *Prentice Hall*, New Jersey, USA.

EKLER

EK A.1: Transfer Matris Gösterimi

EK A.2: Karesel Form

EK A.1

Transfer matrisi, çok degiskenli sistemlerin gösterilmesinde oldukça popüler olan bir metottur. Transfer matrislerinin; frekans analizi yapılarak veya Reaksiyon Egrisi(Reaction Curve) yönteminde olduğu gibi sisteme basamak veya darbe sinyal girişleri uygulanarak rahatlıkla elde edilmesi bu yöntemin çok kullanılmasına sebep olmuştur.

Sanayideki pek çok endüstriyel sistemde sistem transfer matrisinin herhangi bir sütunu, o sütuna karşılık gelen sistem girişine basamak sinyali uygulayarak ve her çıkış için statik kazanç, zaman sabiti, gecikme zamanı gibi değerler ölçülerek elde edilebilir. Eger tüm bu işlemler bütün girişler için uygulanırsa bu durumda transfer matrisinin tamamı elde edilebilmektedir (Camacho ve Bordons, 2004).

CARIMA çok degiskenli modelinde verilen $n \cdot m$ boyutlarındaki transfer matrisi şu şekildeydi:

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})^{-1} B(z^{-1})$$

$T(z^{-1})$ matrisi yukarıdaki denklemden de görüldüğü üzere $A(z^{-1})$ ve $B(z^{-1})$ polinom matrislerinden oluşmaktadır. Bu matrisleri elde etmenin en kolay yolu; $A(z^{-1})$ matrisini diyagonal matris olarak seçip, diyagonal üzerindeki elemanları $T(z^{-1})$ transfer matrisinin denk gelen satırındaki paydalardaki değerlerin OKEK'i(Ortak Katlarının En Küçüğü) olarak seçmektir. Bu durumda $B(z^{-1})$ yukarıdaki denklemden dolayı

$$B(z^{-1}) = A(z^{-1})^{-1} T(z^{-1}) z^{-1} \text{ elde edilecektir.}$$

EK A.2

$x^T Qx$ ve $u^T Ru$ gibi denklemler karesel form olarak adlandırılır. Genellikle $\|x\|_Q^2$ ve $\|u\|_R^2$ şeklinde yazılır. Bu tür denklemlere şu şekilde bir örnek verilebilir.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

Eğer her x değeri için $x^T Qx > 0$ ise bu karesel for kesin pozitifdir. Bir karesel formun kesin pozitif olduğu ancak ve ancak Q matrisinin öz değerlerinin hepsi 0'dan büyükse gösterebilir.

Bunu matematiksel ifade olarak yazmak gerekirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T Qx > 0 \\ Q > 0 \end{array} \right\} \text{ olarak ifade edilebilir.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x^T Qx \\ 0 \leq Q \end{array} \right\} \text{ olarak ifade yazılırsa bu durumda karesel ifade pozitif yarı tanımlı}$$

olarak adlandırılır.

Yukarıdaki örnekte; Q matrisinin her iki özdeğeri de pozitif degerdedir. Bu durumda karesel ifade kesin pozitif tanımlıdır. Bu durumda x_1 ve x_2 değişkenlerinin tüm değerleri için karesel ifadenin değerinin pozitif olduğu görülmektedir.

Eğer $Q=I$ ise $x^T Qx = x^T x = \|x\|^2$, bu durumda bu ifade karesel öklid normu olarak adlandırılır. Eğer $Q \neq I$ ($Q > 0$) ise bu durumda ifade, $x^T Qx = \|Q^{1/2}x\|^2$ olduğundan dolayı, ağırlaştırılmış norm'un karasi olarak düşünülebilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} V = x^T Qx \\ x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \end{array} \right\} \text{ ve } Q \text{ matrisi, } n \times n \text{ bir matris olarak ifade edilir.}$$

Bu durumda gradyen su sekilde yazılabilir:

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] = 2x^T Q$$

Burada gradyan satır vektörü olarak ifade edilmistir. Bazı durumlarda ise gradyan sütun vektör olarak ifade edilebilir. Bu durumda ise gradyan $2Qx$ olarak gösterilir.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Savaş OK
Doğum Yeri ve Tarihi: Yalova – 01/03/1982
Adres: Elmalık Köyü No:52
Merkez Yalova/TÜRKİYE
Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi