

**DAİRESEL KESİTLİ BORU İÇİNDEKİ HAVA AKIŞININ  
ÇALKANTI MODLARININ HİDRODİNAMİK  
KARARLILIK YAKLAŞIMIYLA İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Atilla ALTINTAŞ**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Temmuz 2007  
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Temmuz 2007**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. İ. Bedii ÖZDEMİR**

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Levent GÜVENÇ**

**Prof.Dr. A. Rüstem ASLAN**

**TEMMUZ 2007**

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana yol gösteren ve her konuda desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. İ. Bedii Özdemir'e en derin teşekkürlerimi sunarım.

Lise yıllarımdan bu yana her zaman yanımda olan ve zor anlarımda bana desteğini esirgemeyen kadim dostum Cihangir Özemer'e teşekkürü bir borç bilirim. Fikirleriyle beni daha iyiye yönlendiren Mücahit Özel'e teşekkür ederim. Akışkanlar Laboratuvarı araştırmacıları, arkadaşlarım Korcan, Dinçer, Özer, Cengizhan ve Ceren'e de ayrıca teşekkür etmek isterim. Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca tanıdığım tüm arkadaşlarıma bu uzun süreçte bana destek oldukları için teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak, bu çalışmayı, hayatımın her anında yanımda olan ve beni daha iyiye teşvik eden annem Nermin ve babam Mehmet Altıntaş'a adıyorum.

Temmuz 2007

Atilla Altıntaş

## İÇİNDEKİLER

|                                                                  |      |
|------------------------------------------------------------------|------|
| <b>ÖNSÖZ</b>                                                     | II   |
| <b>İÇİNDEKİLER</b>                                               | III  |
| <b>TABLO LİSTESİ</b>                                             | IV   |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b>                                             | V    |
| <b>SEMBOL LİSTESİ</b>                                            | VIII |
| <b>TÜRKÇE ÖZET</b>                                               | IX   |
| <b>İNGİLİZCE ÖZET</b>                                            | X    |
| <b>1 GİRİŞ</b>                                                   | 1    |
| <b>2 AKIŞ DİNAMİĞİNİN</b>                                        |      |
| <b>KARARLILIK AÇISINDAN İNCELENMESİ</b>                          | 3    |
| 2.1 Reynolds Ayırıklaştırması ve Doğrusallaştırılmış             |      |
| Navier-Stokes Denklemleri                                        | 3    |
| 2.2 Akış Dinamiği Denklemleri                                    | 8    |
| 2.3 Boyutsuzlaştırma                                             | 9    |
| 2.4 Sınır Tabaka Akışında Ortalama Akış Profili ve Sınır Şartlar | 12   |
| 2.5 Sayısal Çözüm Yöntemi                                        | 13   |
| 2.6 Paralel Kestirim Yöntemi                                     | 14   |
| <b>3 SONUÇLAR</b>                                                | 16   |
| 3.1 Akış Dinamiğinin İrdelenmesi                                 | 16   |
| <b>4 YORUMLAR</b>                                                | 40   |
| <b>KAYNAKÇA</b>                                                  | 41   |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                                  | 42   |

## **TABLO LİSTESİ**

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 3.1</b> Sınırlarda kullanılan ilk tahminler ..... | 17 |
|------------------------------------------------------------|----|

## ŞEKİL LİSTESİ

|                   |                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 3.1</b>  | Modlara ait hesaplama alanı .....                                                                                                                                                                       | 16 |
| <b>Şekil 3.2</b>  | Baskın dalga sayısının frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....                                          | 18 |
| <b>Şekil 3.3</b>  | Değişim oranının frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....                                                | 19 |
| <b>Şekil 3.4</b>  | Akış doğrultusundaki ( $z$ ) hızın rms değerlerinin boyutsuz $r^*$ ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.....       | 20 |
| <b>Şekil 3.5</b>  | $\phi$ doğrultusundaki çalkantı hızının rms değerlerinin boyutsuz $r^*$ ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. .... | 21 |
| <b>Şekil 3.6</b>  | $r$ doğrultusundaki çalkantı hızının rms değerlerinin boyutsuz $r^*$ ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....    | 22 |
| <b>Şekil 3.7</b>  | Basıncın rms değerlerinin boyutsuz $r^*$ ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....                                | 23 |
| <b>Şekil 3.8</b>  | $u_z$ genlik fonksiyonunun $k_r=10$ dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....           | 24 |
| <b>Şekil 3.9</b>  | $u_\phi$ modal fonksiyonunun $k_r=10$ dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....         | 25 |
| <b>Şekil 3.10</b> | $u_r$ genlik fonksiyonunun $k_r=10$ dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....           | 26 |
| <b>Şekil 3.11</b> | $p$ genlik fonksiyonunun $k_r=10$ dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış. ....             | 27 |
| <b>Şekil 3.12</b> | $u_z$ genlik fonksiyonunun $k_r=201$ dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış.                                                                                                  |    |

|            |                                                                                                                    |    |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 28 |
| Şekil 3.13 | $u_\phi$ genlik fonksiyonunun $k_r=201$ dalga sayısı için<br>frekans ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.      |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 29 |
| Şekil 3.14 | $u_r$ genlik fonksiyonunun $k_r=201$ dalga sayısı için<br>frekans ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.         |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 30 |
| Şekil 3.15 | $p$ genlik fonksiyonunun $k_r=201$ dalga sayısı için<br>frekans ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.           |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 31 |
| Şekil 3.16 | $u_z$ genlik fonksiyonunun $\omega = 1$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.     |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 32 |
| Şekil 3.17 | $u_\phi$ genlik fonksiyonunun $\omega = 1$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.  |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 33 |
| Şekil 3.18 | $u_r$ genlik fonksiyonunun $\omega = 1$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.     |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 34 |
| Şekil 3.19 | $p$ genlik fonksiyonunun $\omega = 1$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.       |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 35 |
| Şekil 3.20 | $u_z$ genlik fonksiyonunun $\omega = 63$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.    |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 36 |
| Şekil 3.21 | $u_\phi$ genlik fonksiyonunun $\omega = 63$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış. |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 37 |
| Şekil 3.22 | $u_r$ genlik fonksiyonunun $\omega = 63$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.    |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |
|            | d) Çalkantılı, döngüsel akış. ....                                                                                 | 38 |
| Şekil 3.23 | $p$ genlik fonksiyonunun $\omega = 63$ frekansı için<br>dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış.      |    |
|            | b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış                                                            |    |

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| d) Çalkantılı, döngüsel akış. .... | 39 |
|------------------------------------|----|

## SEMBOL LİSTESİ

|            |                                          |
|------------|------------------------------------------|
| $A_z$      | $z$ – yönündeki genlik fonksiyonu        |
| $A_r$      | $r$ – yönündeki genlik fonksiyonu        |
| $A_\phi$   | $\phi$ – yönündeki genlik fonksiyonu     |
| $A_p$      | Basınç için özfonksiyon                  |
| $k_z$      | $z$ – yönündeki dalga sayısı             |
| $k_r$      | $r$ – yönündeki dalga sayısı             |
| $k_\phi$   | $\phi$ – yönündeki dalga sayısı          |
| $P$        | Anlık basınç                             |
| $p'$       | Çalkantı basıncı                         |
| $\bar{P}$  | Ortalama Basınç                          |
| $U_r$      | $r$ – yönündeki anlık hız                |
| $u'_r$     | $r$ – yönündeki çalkantı hızı            |
| $U_z$      | $z$ – yönündeki anlık hız                |
| $u'_z$     | $z$ – yönündeki çalkantı hızı            |
| $U_\phi$   | $\phi$ – yönündeki anlık hız             |
| $u'_\phi$  | $\phi$ – yönündeki çalkantı hızı         |
| $\bar{U}$  | Ortalama Hız                             |
| $U_\infty$ | $z$ – yönündeki ortalama hızın maksimumu |
| $r$        | $r$ – yönündeki konum                    |
| $\phi$     | $\phi$ – yönündeki konum                 |
| $z$        | $z$ – yönündeki konum                    |
| $t$        | Zaman                                    |
| $\rho$     | Yoğunluk                                 |
| $r_o$      | Boru yarıçapı                            |
| $\nu$      | Ağdalılık                                |
| $\omega$   | Frekans                                  |



## **DAİRESEL KESİTLİ BORU İÇİNDEKİ HAVA AKIŞININ ÇALKANTI MODLARININ HİDRODİNAMİK KARARLILIK YAKLAŞIMIYLA İNCELENMESİ**

### **ÖZET**

Mühendislik uygulamalarında karşılaşılan akış problemlerinin genellikle çalkantılı olduğu ve hem zamana hem de konuma bağlı güçlü değişimler gösterdiği bilinmektedir. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeye paralel olarak LES (Large Eddy Simulation – Büyük Ölçekli Yapıların Benzetimi) ve DNS (Direct Numerical Simulation – Doğrudan Sayısal Benzetim) gibi benzetim yöntemleri yalnızca çalkantı ile ilgili temel araştırma alanlarında kullanılan araçlar olmaktan çıkarak pratik mühendislik uygulamalarında da kullanılmaya başlanmıştır. Ancak halen bu yöntemlerin kullanımı ile ilgili aşılması gereken problemler bulunmaktadır. Bunlardan başlıcası akış alanının girişinde uygulanması gereken sınır koşullarıdır. Akışaltı bölgede gelişen çalkantı yapıları girişte tanımlanan sınır değerlerinden etkilenmektedirler. Bu sorunun önüne geçebilmek için girişte verilen değerlerinin hem zamana hem de konuma bağlı olarak belirlenmesi gerekmektedir.

Bu çalışmanın amacı, LES ve DNS yöntemleri kullanılarak yapılacak olan Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) benzetimlerinde kullanılmak üzere, girişte akışın sahip olması gereken çalkantı değerlerini, hidrodinamik kararlılık yaklaşımını kullanarak yeter doğrulukta verebilmektir. Bu amaç doğrultusunda, dairesel kesitli boru içindeki akışın çalkantı modları hidrodinamik kararlılık ile irdelenmiştir. Bu süreçte ilk olarak akışta geliştiği varsayılan küçük tedirginlikler için doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemleri çıkarılmıştır. Söz konusu momentum denklemleri paralel kestirim yöntemi kullanılarak çözülmüş ve kayma tabaka akışına ait Fourier modları bulunmuştur. Daha sonra bulunan bu modlar kullanılarak, zamana bağlı ve uzaydaki faz ilişkileri doğru belirlenmiş anlık hız değerleri ve ilgili istatistiksel büyüklükler elde edilmiş ve incelenmiştir.

# **INVESTIGATION OF TURBULENT MODES OF AIR FLOW IN A PIPE USING HYDRODYNAMIC STABILITY ANALYSIS**

## **SUMMARY**

Most of the engineering flows, which we encounter in everyday applications, are turbulent. It is well known that turbulent flows are highly dependent on space coordinates and exhibit strong unsteady characteristics, which stems from energetic eddies of different scales. Thus, it is vital to capture the multi-scale characteristics of shear flows, and this happens to be a challenging modeling issue.

The advancements in the computer technology in recent years made it affordable to simulate turbulent flows with LES (Large Eddy Simulation) and DNS (Direct Numerical Simulation) models, whose accuracy largely suffers from inconsistent implementation of inflow boundary condition. In this study, the primary aim is to resolve this drawback of turbulent flow simulations. In order to achieve this goal a technique was developed which, by using the modal solutions of linearised Navier-Stokes equations, generates time dependent inlet boundary conditions for turbulent flow simulations. For that, hydrodynamic stability analysis was performed for a pipe flow, which allows solutions with space-time correlations and phase relations retained.

## 1 GİRİŞ

Gelişen teknolojinin açtığı birçok yeni uygulama alanı nedeniyle jet dinamiği, gündelik yaşamda kullandığımız – göreceli basit – yanma sistemlerinden havacılık uygulamalarına kadar birçok alanda sıklıkla karşılaşılan bir olgu olmuştur. Özellikle, bu tür akışlarda gelişen büyük ölçekli yapılar söz konusu uygulamanın kararlılığı, dayanımı ve gürültü düzeyini olumsuz etkilemektedirler. Buradaki temel fizik daimi olmayan akış etkileri ile ilintili olup, son yıllarda hızla yaygınlaşan LES (Large Eddy Simulation – Büyük Ölçekli Yapıların Benzetimi) ve DNS (Direct Numerical Simulation – Doğrudan Sayısal Benzetim) bu tür zamana bağlı etkileşimlerin gerçekleştirilebileceği ender ve güçlü yöntemler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Ancak DNS ve LES gibi benzetimlerde temel sorun zaman ve konum bağıntıları doğru tanımlanmış giriş koşullarını oluşturabilmektir. Akışa akış fiziğini göz ardı ederek yapay olarak yüklenen tedirginlikler sistemin doğal modları ile uyumlu olmadıklarında akıştaki ağdalılık ile girişten çok yakın uzaklıklarda sönümlenmekte ve akışın çalkantı tanımı eksik kalmaktadır. Bu nedenledir ki, belli bir bölgedeki çalkantı dinamiği akışın bu bölge yukarısındaki geçmişi ile yakından ilişkilidir. Eğer LES bölgesinde akışın çalkantı dinamiğinin düzgün gelişmesi isteniyorsa bu bölge yukarısından taşınan modlar doğru tanımlanmalıdır [1]. Bu açıdan jetlerin lüleden çıkış öncesi incelendiğinde, lüle geometrisi basit boru yapısına indirgenebilirken ve jet akışının geçmişinin boru içinde görülen çalkantı yapılarıyla ölçeklenebileceği gözlenecektir [2].

Akışın içinde gelişmesi olası kararsızlıkların zaman-ortalaması alınmış bir değer etrafında tanımlı küçük tedirginliklerle modellenmesi oldukça eskilere dayanan bir yöntemdir [3]. Bu yöntemin doğrusallaştırılmış denklemlere uygulanması sık rastlanmakla birlikte, doğrusal olmayan tedirginliklerle yapılan incelemeler son çeyrek yüzyılda gelişmektedir. Kaldı ki, ağdalılığın göz ardı edildiği çalışmalar çoklukları ile ters orantılı olarak kullanılabilir bilgi üretmektedirler.

Hidrodinamik kararlılık yöntemi LES ve DNS yöntemlerinin yaygınlaşması ile artan “doğru giriş koşullarının tanımı” gereksinimiyle yeniden keşfedilmiştir. Öyle ki, hidrodinamik kararlılık yaklaşımı, kullanılan birçok yöntem arasında zaman-konum uzayında doğru çapraz-benzeşimleri verebilmesi ile gelecek için umut vermektedir.

Bugüne kadar yapılan çalkantılı akış benzetimlerinde sınır şart probleminin üstesinden gelebilmek için çeşitli yöntemler uygulanmıştır [4]. Çalkantı yapılarını, benzetimi yapılacak olan bölgeye, doğru frekans ve genliklerde ulaştırabilmek için yapılabilecek en basit çözüm hesaplama alanının sınırlarını yeterince uzağa çekmektir. Ancak bu yöntemin, LES ve DNS gibi hesaplama maliyeti yüksek olan benzetimlerde hesaplama maliyetini büyük oranda artırdığı görülmüştür [5]. Ayrıca sınırların yeterince uzağa çekilemeyeceği çeşitli hesaplama alanlarında bu yöntem kullanılamamaktadır. Giriş sınırlarında yapay çalkantı yaratmak için kullanılan yöntemlerden bir diğeri de periyodik sınır şartlarıdır [6]. Ne kadar pratik ve kullanışlı bir yöntem olsa da, ana akış doğrultusu boyunca uzaydaki değişimler yeterince küçük değilse bu yöntem uygulanabilirliğini yitirmektedir ve sadece kanal akışı gibi basit akış uygulanabilmektedir [7].

Çalkantı benzetimlerinin giriş sınırlarında yapay çalkantı oluşturabilmek için denenmiş olan yöntemlerden biri de ortalama akış alanı üzerine bindirilen rastgele çalkantı terimleridir. Standart yöntemlerle elde edilen rastgele sinyallerin enerjisi bütün dalgaboyu aralığında eşit olarak dağıldığından, düşük dalgaboyu bölgesinde gerekli olan enerji yaratılamamakta ve verilen tedirginlikler kısa mesafede sönümlenerek laminar bir sınır şart verilmiş gibi davranmaktadırlar [8].

Bu çalışmanın amacı, LES ve DNS yöntemleri kullanılarak yapılacak olan Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) benzetimlerinde kullanılmak üzere, girişte akışın sahip olması gereken çalkantı değerlerini hidrodinamik kararlılık yaklaşımını kullanarak yeter doğrulukta verebilmektir. Bu amaç doğrultusunda, dairesel kesitli boru içindeki akışın çalkantı modları hidrodinamik kararlılık ile irdelenmiştir. Bu süreçte ilk aşama, akışta geliştiği varsayılan küçük tedirginlikler için doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemlerinin çıkarılmasıdır. Söz konusu momentum denklemleri paralel kestirim yöntemi kullanılarak çözülmüş ve Fourier modları bulunmuştur. Daha sonra bulunan bu modlar kullanılarak, zamana bağlı ve uzaydaki faz ilişkileri doğru belirlenmiş anlık hız değerleri ve ilgili istatistiksel büyüklükler elde edilmiştir.

## 2 AKIŞ DİNAMİĞİNİN KARARLILIK AÇISINDAN İNCELENMESİ

Bu bölümde, akış alanında gelişen kayma tabakası için kararlılık irdelenmesi yapılarak akışkan sistemine ait doğal modların nasıl bulunduğu anlatılacaktır.

Bu amaç doğrultusunda öncelikle akış dinamik sistemine ait denklemler çıkarılacak ve bu esnada yapılan kabuller ayrıntılandırılacaktır. Bunu takip eden bölümde özdeğer fonksiyonları tanımlanıp denklemlerde yerine konularak sistem çözüme hazır hale getirilecektir. Daha sonra bu sisteme etkiyen fiziksel ve sayısal sınır şartlar tanımlanarak sistem kapalı hale getirilecek ve çözüm için kullanılan sayısal yöntem anlatılacaktır. Son bölümde yapılan hesaplamalar fiziksel anlamları bakımından irdelenecektir.

### 2.1. Reynolds Ayrıklaştırması ve Doğrusallaştırılmış Navier Stokes Denklemleri

Dairesel koordinatlarda süreklilik ve momentum denklemleri şu şekilde verilmektedir.

Süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1a)$$

Momentum denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{U_\phi^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} - \frac{U_r}{r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (2.1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{U_r U_\phi}{r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + U_z \frac{\partial U_\phi}{\partial z} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{U_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (2.1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \phi} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.1d)$$

Anlık akış alanı zaman ortalaması alınmış büyüklükler ve bunların üzerine eklenmiş küçük artımlar olarak düşünülürse silindirik bir geometri için aşağıda verilen hız ve basınç tanımları yazılabilir,

$$U_r(r, \phi, z, t) = \bar{U}_r(r, \phi, z) + u'_r(r, \phi, z, t) \quad (2.2a)$$

$$U_\phi(r, \phi, z, t) = \bar{U}_\phi(r, \phi, z) + u'_\phi(r, \phi, z, t) \quad (2.2b)$$

$$U_z(r, \phi, z, t) = \bar{U}_z(r, \phi, z) + u'_z(r, \phi, z, t) \quad (2.2c)$$

$$P(r, \phi, z, t) = \bar{P}(r, \phi, z) + p'(r, \phi, z, t) \quad (2.2d)$$

Reynolds ayrıklaştırması olarak da adlandırılan söz konusu ayrıklaştırmada üstü çizgili terimler ortalama akış alanını, üslü terimler ise tedirginlik genliklerini ifade etmektedir. 2.2 ayrıklaştırmaları 2.1 denklemlerine uygulanırsa,

süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial r} + \frac{\bar{U}_r + u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.3a)$$

$r$  - momentum,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial t} + (\bar{U}_r + u'_r) \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial r} + \frac{(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{r} \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial \phi} \\
& - \frac{(\bar{U}_\phi + u'_\phi)^2}{r} + (\bar{U}_z + u'_z) \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial z} = \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p')}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial \phi^2} \right] \\
& + \nu \left[ - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial \phi} - \frac{(\bar{U}_r + u'_r)}{r^2} + \frac{\partial^2(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial z^2} \right], \tag{2.3b}
\end{aligned}$$

$\phi$  - momentum,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial t} + (\bar{U}_r + u'_r) \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial r} + \frac{(\bar{U}_r + u'_r)(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{r} \\
& + \frac{(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{r} \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial \phi} + (\bar{U}_z + u'_z) \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial z} = \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{P} + p')}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{\partial \phi^2} \right] \\
& \nu \left[ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial \phi} - \frac{(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{r^2} + \frac{\partial^2(\bar{U}_r + u'_r)}{\partial z^2} \right], \tag{2.3c}
\end{aligned}$$

$z$  - momentum,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial t} + (\bar{U}_r + u'_r) \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial r} + \frac{(\bar{U}_\phi + u'_\phi)}{r} \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial \phi} + \\
& (\bar{U}_z + u'_z) \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p')}{\partial z} \\
& + \nu \left[ \frac{\partial^2(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2(\bar{U}_z + u'_z)}{\partial z^2} \right] \tag{2.3d}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin yeterince uzun bir  $T$  süresi boyunca zaman ortalamaları alınırsa,

süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0, \quad (2.4a)$$

$r$  - momentum,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial t} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} + \overline{u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r}} + \frac{\bar{U}_\phi}{r} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial z} + \overline{u'_z \frac{\partial u'_r}{\partial z}} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} - \frac{\bar{U}_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (2.4b)$$

$\phi$  momentum,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial t} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial r} + \overline{u'_r \frac{\partial u'_\phi}{\partial r}} + \frac{\bar{U}_\phi}{r} \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial z} + \overline{u'_z \frac{\partial u'_\phi}{\partial z}} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial r} - \frac{\bar{U}_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_\phi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (2.4c)$$

$z$  - momentum,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} + \overline{u'_r \frac{\partial u'_z}{\partial r}} + \frac{\bar{U}_\phi}{r} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} + \overline{u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z}} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.4d)$$

ortalama akış alanına ait Navier-Stokes denklemleri elde edilir. 2.4a-d denklemleri 2.3a-d denklemlerinden çıkarılırsa tedirginlik terimlerini modelleyen denklemleri elde edilir,

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \quad (2.5a)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u'_r}{\partial t} - \overline{u'_r} \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \overline{U_r} \frac{\partial u'_r}{\partial r} + u'_r \frac{\partial \overline{U_r}}{\partial r} + u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{\overline{U_\phi}}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r} u'_\phi \frac{\partial \overline{U_r}}{\partial \phi} + \\
& \frac{u'_\phi}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} - \frac{\overline{u'_\phi}}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} - \frac{\overline{U_\phi^2}}{r} - 2 \frac{\overline{U_\phi u'_\phi}}{r} - \frac{u'^2_\phi}{r} + \overline{U_z} \frac{\partial u'_r}{\partial z} + u'_z \frac{\partial \overline{U_r}}{\partial z} + u'_z \frac{\partial u'_r}{\partial z} - \overline{u'_z} \frac{\partial u'_r}{\partial z} = \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} \frac{u'_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z^2} \right], \quad (2.5b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u'_\phi}{\partial t} + \overline{U_r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + u'_r \frac{\partial \overline{U_\phi}}{\partial r} + u'_r \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} - \overline{u'_r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + \frac{\overline{U_r} u'_\phi}{r} + \frac{u'_r \overline{U_\phi}}{r} \\
& + \frac{u'_r u'_\phi}{r} - \frac{1}{r} \overline{u'_r u'_\phi} + \frac{1}{r} \overline{U_\phi} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} u'_\phi \frac{\partial \overline{U_\phi}}{\partial \phi} + \frac{u'_\phi}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} - \frac{\overline{u'_\phi}}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} \\
& + \overline{U_z} \frac{\partial u'_\phi}{\partial z} + u'_z \frac{\partial \overline{U_\phi}}{\partial z} + u'_z \frac{\partial u'_\phi}{\partial z} - \overline{u'_z} \frac{\partial u'_\phi}{\partial z} = \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} - \frac{u'_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} \right], \quad (2.5c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u'_z}{\partial t} + \overline{U_r} \frac{\partial u'_z}{\partial r} + u'_r \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial r} + u'_r \frac{\partial u'_z}{\partial r} - \overline{u'_r} \frac{\partial u'_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \overline{U_\phi} \frac{\partial u'_z}{\partial \phi} + \frac{u'_\phi}{r} \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial \phi} \\
& + \frac{u'_\phi}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \phi} - \frac{\overline{u'_\phi}}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \phi} + \overline{U_z} \frac{\partial u'_z}{\partial z} + u'_z \frac{\partial \overline{U_z}}{\partial z} + u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z} - \overline{u'_z} \frac{\partial u'_z}{\partial z} = \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2} \right]. \quad (2.5d)
\end{aligned}$$

Bulunan bu denklemlerde ikinci dereceden terimler ihmal edilir,  $\overline{U_r} = 0$  olduğu göz önünde bulundurulur,  $\phi$  yönündeki türev terimleri simetriden dolayı sıfır olarak alınır, ortalama akışın z-yönünde tümüyle gelişmiş olduğu ( $\frac{\partial(\overline{\quad})}{\partial z} = 0$ ) kabul edilir ve

$u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial r}$  terimlerinin  $\overline{u'_i} \frac{\partial u'_j}{\partial r}$  terimleri ile yaklaşık aynı değere sahip oldukları varsayılırsa doğrusal Navier-Stokes denklemleri elde edilir :

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \frac{\bar{U}_\phi}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial u'_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} - \frac{u'_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z^2} \right], \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial u'_\phi}{\partial t} + u'_r \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} u'_r \bar{U}_\phi + \frac{1}{r} \bar{U}_\phi \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial u'_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \phi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial r} - \frac{u'_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u'_\phi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} \right], \quad (2.6c)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + u'_r \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{U}_\phi \frac{\partial u'_z}{\partial \phi} + \bar{U}_z \frac{\partial u'_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u'_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z^2} \right], \quad (2.6d)$$

## 2.2 Akış Dinamiği Denklemleri

Bağımlı değişkenlerin gelişen dalgalar formunda çözümleri olduğu varsayılırsa;

$$u'_r = A_r(r) e^{i(k_r r + k_\phi \phi + k_z z - \omega t)} + (*) \quad (2.7a)$$

$$u'_\phi = A_\phi(r) e^{i(k_r r + k_\phi \phi + k_z z - \omega t)} + (*) \quad (2.7b)$$

$$u'_z = A_z(r) e^{i(k_r r + k_\phi \phi + k_z z - \omega t)} + (*) \quad (2.7c)$$

$$p' = A_p(r) e^{i(k_r r + k_\phi \phi + k_z z - \omega t)} + (*) \quad (2.7d)$$

Burada (\*) karmaşık eşlenik ifadeleri göstermektedir. Yine  $A_r$ ,  $A_\phi$ ,  $A_z$  ve  $A_p$  karmaşık genlik fonksiyonları olup,  $k_r$ ,  $k_\phi$ ,  $k_z$ , ve  $\omega$  özdeğerleri için genliklerin uzaydaki dağılımını vermektedirler. Burada  $k_r$ ,  $k_\phi$ , ve  $\omega$  özdeğerleri gerçektir,  $k_z$  ise karmaşık sayıdır. Tedirginlik değerlerini (2.7a-d) denklemlerinde yerlerine yazdığımızda;

$$\frac{dA_r}{dr} + ik_r A_r + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} ik_\phi A_\phi + ik_z A_z = 0 \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega A_r + \frac{\bar{U}_\phi}{r} ik_\phi + \bar{U}_z A_r ik_z + \frac{1}{\rho} A_p ik_r + \frac{1}{\rho} \frac{dA_p}{dr} - \\
& \nu \left[ \frac{d^2 A_r}{dr^2} + 2 \frac{dA_r}{dr} ik_r - A_r k_r^2 + \frac{1}{r} \frac{dA_r}{dr} + \frac{1}{r} A_r ik_r - \frac{1}{r^2} A_r k_\phi^2 - \frac{2}{r^2} A_\phi ik_\phi - \frac{A_r}{r^2} - A_r k_z^2 \right], \quad (2.8b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega A_\phi + A_r \frac{\partial \bar{U}_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r \bar{U}_\phi + \frac{\bar{U}_\phi}{r} ik_\phi A_\phi + \bar{U}_z A_\phi ik_z + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} A_p ik_\phi \\
& - \nu \left[ \frac{d^2 A_\phi}{dr^2} + 2 \frac{dA_\phi}{dr} ik_r - A_\phi k_r^2 + \frac{1}{r} \frac{dA_\phi}{dr} + \frac{1}{r} A_\phi ik_r - \frac{1}{r^2} A_\phi k_\phi^2 + \frac{2}{r^2} A_r ik_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} - A_\phi k_z^2 \right], \quad (2.8c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega A_z + A_r \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} + \frac{\bar{U}_\phi}{r} ik_\phi A_z + \bar{U}_z A_z ik_z + \frac{1}{\rho} A_p ik_z \\
& - \nu \left[ \frac{d^2 A_z}{dr^2} + 2 \frac{dA_z}{dr} ik_r - A_z k_r^2 + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} + \frac{1}{r} A_z ik_r - \frac{1}{r^2} A_z k_\phi^2 - A_z k_z^2 \right], \quad (2.8d)
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.

### 2.3 Boyutsuzlaştırma

$z$  – yönündeki maksimum hızı ( $U_\infty$ ) tipik hız ölçeği ve yarıçapı da ( $r_0$ ) tipik uzunluk ölçeği olarak aşağıdaki boyutsuz değişkenler tanımlanır,

$$Y_1 = A_r^* = \frac{A_r}{U_\infty}, \quad Y_2 = A_\phi^* = \frac{A_\phi}{U_\infty}, \quad Y_3 = A_z^* = \frac{A_z}{U_\infty}, \quad Y_4 = A_p^* = \frac{2A_p}{\rho U_\infty^2}$$

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad \phi^* = \phi, \quad z^* = \frac{z}{r_0}, \quad \bar{U}_r^* = \frac{\bar{U}_r}{U_\infty},$$

$$k_r^* = k_r r_0, \quad k_\phi^* = k_\phi, \quad k_z^* = k_z r_0, \quad \omega^* = \frac{\omega r_0}{U_\infty}$$

Buna göre türev operatörleri,

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{dr^*} \frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{r_0} \frac{d}{dr^*}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r_0} \frac{d}{dr^*} \right) = \frac{1}{r_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr^*} \right) = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{d}{dr^*} \left( \frac{d}{dr^*} \right) \frac{dr^*}{dr} \right] = \frac{1}{r_0^2} \frac{d^2}{dr^{*2}}$$

olarak dönüştürülür. Bu durumda boyutsuz denklemler,

$$\frac{dY_1}{dr^*} + ik_r^* Y_1 + \frac{1}{r^*} Y_1 + \frac{1}{r^*} ik_\phi^* Y_2 + ik_z^* Y_3 = 0, \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} & -i\omega^* Y_1 + \frac{1}{r^*} \bar{U}^* ik_\phi^* Y_1 + ik_z^* \bar{U}_z^* Y_1 + \frac{1}{2} \frac{dY_4}{dr^*} + i \frac{k_r^*}{2} Y_4 \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{d^2 Y_1}{dr^{*2}} + i 2k_r^* \frac{dY_1}{dr^*} - k_r^{*2} Y_1 + \frac{1}{r^*} \frac{dY_1}{dr^*} \right] \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left[ + i \frac{k_r^*}{r^*} Y_1 - \frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} Y_1 - 2i \frac{k_\phi^*}{r^{*2}} Y_2 - \frac{1}{r^{*2}} Y_1 - Y_1 k_z^{*2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} & -i\omega^* Y_2 + Y_1 \frac{\partial \bar{U}_\phi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} Y_1 \bar{U}_\phi^* + \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi^* ik_\phi^* Y_2 + ik_z^* \bar{U}_z^* Y_2 + i \frac{k_\phi^*}{2r^*} Y_4 \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{d^2 Y_2}{dr^{*2}} + i 2k_r^* \frac{dY_2}{dr^*} - k_r^{*2} Y_2 + \frac{1}{r^*} \frac{dY_2}{dr^*} + i \frac{k_r^*}{r^*} Y_2 - \frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} Y_2 + 2i \frac{k_\phi^*}{r^{*2}} Y_1 - \frac{Y_2}{r^{*2}} - Y_2 k_z^{*2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9c)$$

$$\begin{aligned} & -i\omega^* Y_3 + Y_1 \frac{\partial \bar{U}_z^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi^* ik_\phi^* Y_3 + ik_z^* \bar{U}_z^* Y_3 + i \frac{k_z^*}{2} Y_4 \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{d^2 Y_3}{dr^{*2}} + 2ik_r^* \frac{dY_3}{dr^*} - k_r^{*2} Y_3 + \frac{1}{r^*} \frac{dY_3}{dr^*} + i \frac{k_r^*}{r^*} Y_3 - \frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} Y_3 - k_z^{*2} Y_3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.9d)$$

Öyle ki,  $\text{Re} = \frac{r_0 U_\infty}{\nu}$ . (2.9a-d) denklemlerindeki ikinci derece türevleri birinci dereceye indirmek için yeni değişkenler tanımlanır ve daha sonra türev ifadeleri denklemlerden çekilir [9], örneğin,

$$\frac{dY_1}{dr^*} = -(ik_r^* Y_1 + \frac{1}{r^*} Y_1 + \frac{1}{r^*} ik_\phi^* Y_2 + ik_z^* Y_3) \quad (2.10)$$

eşitliğini kullanarak  $Y_1$  in ikinci türev ifadesi elde edilir, bu ifadeler diğer denklemlerde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dY_1^2}{dr^{*2}} = -ik_r^* \frac{dY_1}{dr^*} + \frac{1}{r^{*2}} Y_1 - \frac{1}{r^*} \frac{dY_1}{dr^*} + \frac{1}{r^{*2}} ik_\phi^* Y_2 - \frac{1}{r^*} ik_\phi^* \frac{dY_2}{dr^*} - ik_z^* \frac{dY_3}{dr^*} \quad (2.11)$$

olacaktır. Yine

$$\frac{dY_2}{dr^*} = Y_6 \quad \text{alınırsa} \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 Y_2}{dr^{*2}} = \frac{dY_6}{dr^*} \quad (2.13)$$

ve

$$\frac{dY_3}{dr^*} = Y_7 \quad \text{alınırsa} \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 Y_2}{dr^{*2}} = \frac{dY_7}{dr^*} \quad \text{olacaktır.} \quad (2.15)$$

Bu türev ifadeleri (2.11) de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dY_1^2}{dr^{*2}} = -ik_r^* \frac{dY_1}{dr^*} + \frac{1}{r^{*2}} Y_1 - \frac{1}{r^*} \frac{dY_1}{dr^*} + \frac{1}{r^{*2}} ik_\phi^* Y_2 - \frac{1}{r^*} ik_\phi^* Y_6 - ik_z^* Y_7 \quad (2.11')$$

ifadesi elde edilir. (2.9b) denkleminde  $\frac{dY_4}{dr^*}$  ifadesini çekersek,

$$\begin{aligned} \frac{dY_4}{dr^*} = & \frac{2}{\text{Re}} \left[ Y_1 \left( -\frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} - k_z^{*2} \right) + Y_2 \left( \frac{k_r^* k_\phi^*}{r^*} - i \frac{k_\phi^*}{r^{*2}} \right) + Y_3 k_r^* k_z^* - Y_6 \frac{1}{r^*} ik_\phi^* - Y_7 ik_z^* \right] + \\ & 2 \left[ Y_1 \left( i\omega^* - \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi^* ik_\phi^* - ik_z^* \bar{U}_z^* \right) - \frac{i}{2} k_r^* Y_4 \right], \quad (2.16) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (2.9c) denkleminde  $\frac{dY_6}{dr^*}$  ifadesini çekersek,

$$\begin{aligned} \frac{dY_6}{dr^*} = \text{Re} \left[ -i\omega^* Y_2 + iY_2 \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi k_\phi^* + Y_1 \left( \frac{\partial \bar{U}_\phi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi^* \right) + ik_z^* \bar{U}_z Y_2 + \frac{i}{2} \frac{k_\phi^*}{r^*} Y_4 \right] - \\ 2ik_r^* Y_6 + k_r^{*2} Y_2 - \frac{1}{r^*} Y_6 - i \frac{k_r^*}{r^*} Y_2 + \frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} Y_2 - 2i \frac{k_\phi^*}{r^{*2}} Y_1 + \frac{Y_2}{r^{*2}} + Y_2 k_z^{*2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ifadesini elde ederiz. (2.9d) denkleminde  $\frac{dY_7}{dr^*}$  ifadesini çekersek,

$$\begin{aligned} \frac{dY_7}{dr^*} = \text{Re} \left[ -i\omega^* Y_3 + iY_3 \frac{1}{r^*} \bar{U}_\phi k_\phi^* + \frac{\partial \bar{U}_z^*}{\partial r^*} Y_1 + ik_z^* \bar{U}_z Y_3 + \frac{i}{2} k_z^* Y_4 \right] - \\ 2ik_r^* Y_7 + k_r^{*2} Y_3 - \frac{1}{r^*} Y_7 - i \frac{k_r^*}{r^*} Y_3 + \frac{k_\phi^{*2}}{r^{*2}} Y_3 + Y_3 k_z^{*2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ifadesini elde ederiz. 2.10, 2.12, 2.14, 2.16, 2.17 ve 2.18 denklemleri akıştaki dinamik tedirginlikleri modelleyen denklemlerdir.

#### 2.4 Sınır Tabaka Akışında Ortalama Akış Profili ve Sınır Şartlar

Yukarıdaki denklemlerde ortalama akışa ait terimlerin modellenmeleri gerekmektedir. Bu amaçla ortalaması alınmış  $z$ - doğrultusundaki hız profili olarak iki farklı rejime ait profiller kullanılmıştır. Laminer akış için,  $\bar{U}_z(r) = 1 - r^{*2}$  parabolü kullanılmıştır. Çalkantılı akış için ise  $\bar{U}_z(r) = (1 - r)^{1/7}$  profili alınmıştır [9]. Akıştaki olası döngü için  $\bar{U}_\phi(r) = r^3(1 - r)^{15}$  fonksiyonu kullanılmıştır. Sınır koşulları olarak duvarda hızlar sıfır alınmıştır, yani

$$Y_1(r_0^*, \phi^*, z^*, t) = 0, \quad (2.19a)$$

$$Y_2(r_0^*, \phi^*, z^*, t) = 0, \quad (2.19b)$$

$$Y_3(r_0^*, \phi^*, z^*, t) = 0. \quad (2.19c)$$

Boru merkezinde tedirginlik basıncının ağırlıklı olarak sürtünmesiz momentum etkileşimi ile geliştiği düşünülerek dinamik basınca eşit olduğu varsayılmıştır. Ayrıca merkezde  $u'_z$  ve  $u'_\phi$  hız türevleri sıfır alınmıştır,

$$Y_4(0, \phi^*, z^*, t) = \frac{1}{3}(Y_1^2 + Y_1^2 + Y_1^2), \quad (2.19e)$$

$$\frac{dY_3(0, \phi^*, z^*, t)}{dr^*} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dY_2(0, \phi^*, z^*, t)}{dr^*} = 0. \quad (2.24)$$

## 2.5 Sayısal Çözüm Yöntemi

2.10, 12, 14, 16, 17 ve 18 denklemleri ile tanımlanan fiziksel problem altı adet birbirine bağımlı adi diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Bu denklemler  $\omega$ ,  $k_r$ ,  $k_\phi$  ve  $k_z$ , özdeğer vektörleri ile ifade edilen özdeğer problemini ifade eder. Bu amaçla  $\omega$ ,  $k_r$  ve  $k_\phi$  özdeğervektör bileşenleri özdeğer uzayında önceden tanımlı olarak değiştirilirken bunlara karşı gelen  $k_z$  özdeğeri ve bununla ilintili özdeğer fonksiyonları aranacaktır [10]. Öncelikle özdeğer problemi iki noktalı sınırdeğer problemine indirgenecektir. Bu amaçla

$$Y_5 = k_z \text{ alınır.} \quad (2.20)$$

Bu özdeğerin çözüm uzayında sabit olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\frac{dY_5}{dr^*} = 0 \quad (2.21)$$

olacaktır. Elde edilen bu denklem diğer denklem kümesine eklenerek denklem sistemi genişletilmiştir. Fakat sistem bu durumda kapalı değildir. Sistemi kapalı hale getirebilmek için özdeğer fonksiyonlarının ortanormalizasyon koşulu kullanılır. Buna göre

$$\int_0^{r_0} \mathbf{Y}^T(r^*) \mathbf{Y}(r^*) dr^* = C. \quad (2.22)$$

Burada  $C$  herhangi bir sabit olabilir ki bu çalışmada 1 alınmıştır. 2.22 kullanılarak yeni bir değişken tanımlanabilir,

$$Y_8(r_a^*) = \int_0^{r_a^*} Y^T(r^*) Y(r^*) dr^* \quad (2.23)$$

$$\frac{dY_8}{dr^*} = Y^T(r^*) Y(r^*) \quad (2.29)$$

Açık olarak ifade etmek gerekirse,

$$\frac{dY_8}{dr^*} = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_6^2 + Y_7^2 \quad (2.25)$$

(2.25) ' e ait ve sistemi kapalı hale getirecek iki adet sınır koşulu

$$Y_8(0) = 0 \quad \text{ve} \quad (2.26a)$$

$$Y_8(1) = C \quad (2.26b)$$

olarak yazılır.

## 2.6 Paralel Kestirim Yöntemi

Bir önceki bölümde belirtildiği üzere, 2.10, 12, 14, 16, 17, 18, 21 ve 25 bir sınır değer problemi oluşturur. Bu eşitlikler (2.19a-d) ve (2.26a-b) ile verilen sınır koşullarını sağlamalıdır. Sınır değer problemi bir başlangıç değer problemine dönüştürülerek integrasyon işlemi yapılır. Ancak sınır koşullarının bazıları bir uçta diğer bazıları diğer uçta tanımlanmıştır. Kestirim yönteminde bir uçta eksik kalan sınır koşulları önce rastgele tanımlanarak bu değerlerle sistem diğer uca kadar ilkdeğer problemi gibi integre edilir [11]. Diğer uçta var olan değişken değerleri sağlanmalıdır. Bu sağlama gerçekleşene kadar rastgele atanan ilk uçtaki değerler değiştirilerek sonuca gidilir. Paralel kestirimde çözüm her iki uçtan başlatılarak ortada bir noktada sağlama gerçekleşene kadar çözüm yinelenir. Bu noktada elimizde çok boyutlu bir kök bulma problemi vardır ve başlangıç noktasındaki serbest parametreler Newton Raphson ile bulunmaktadır. Bu yöntem normal kestirim yöntemine göre daha güvenilir ve daha hızlıdır.

Söz konusu denklem sistemi karmaşık fonksiyonlar nedeniyle iki sınırdaki toplam 16 reel şarta sahiptir. Oysa ki, paralel kestirimde her iki sınırdaki 32 koşul gerekmektedir.



Bu nedenle eksik sınır koşulları tahmin edilerek  $V$  kestirim vektörü oluşturulur.  $V$  vektörü oluşturulduktan sonraki adımda her iki sınırdan belirlenen bir orta noktaya integrasyon yapılır. Bu çalışmada integrasyon için dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Her adımda çözüm bileşenleri bir  $E$  fark vektörü ile kontrol edilmektedir,

$$E = Y_i(y^*; V_1, \dots, V_n) - Y_i(y^*; V_{n+1}, \dots, V_8), \quad 1 \leq i \leq 16 \quad (2.27)$$

Çok boyutlu Newton-Rapson yöntemi ile başlangıçta değeri verilen 16 serbest değişken tekrar bulunur. Buna göre

$$J_{8 \times 8} \cdot \delta V = -E \quad (2.28)$$

oluşturulan yeni tahmin vektörü,

$$V_{yeni} = V_{eski} + \delta V \quad (2.29)$$

(2.28)'de kullanılan Jakobian matrisi  $J$

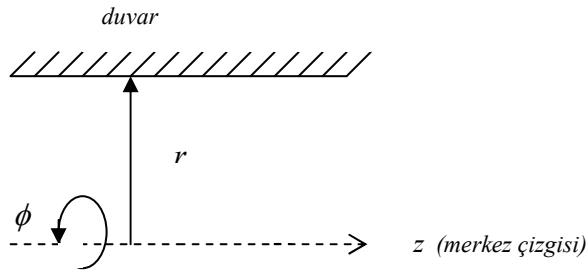
$$J_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial V_j} \approx \frac{E_i(V_1, \dots, V_j + \Delta V_j, \dots) - E_i(V_1, \dots, V_j, \dots)}{\Delta V_j} \quad (2.30)$$

Bu çalışmada paralel kestirim süreci  $E$  hata vektörü  $1 \times 10^{-12}$  lik bir hataya ulaşana kadar tekrar edilmiştir. Hesaplamalar 64 – bit işlemcili bir bilgisayarda tüm değişkenler çift – duyarlıklı tanımlanarak yapılmıştır.

### 3 SONUÇLAR

#### 3.1 Akış Dinamiğinin İrdelenmesi

Önceki bölümlerde anlatılan yöntem, 50 yarıçap uzunluğunda dairesel kesitli bir boru içinde, maksimum hızın 20 m/sn olduğu akış için hesaplamalar yapmak üzere kullanılmıştır. Bu noktada akış içinde gelişen tedirginlikleri tam olarak tanımlayabilmek için, dalgaların eksiksiz bir küme oluşturması gerekmektedir. Boru içindeki akışlarda gelişen dinamik modlar sürekli modlar olup, akış içindeki küçük çalkantı yapılarını temsil edebilmektedir [12]. Yapılacak olan kararlılık analizinde kullanılan hesaplama alanı şekil 3.1 de gösterilmektedir.



Şekil 3.1 Modlara ait hesaplama alanı.

Şekil 3.1 deki hesaplama alanında, bir önceki bölümde bahsedilen paralel tahmin yöntemi kullanılarak, 201 hesaplama noktasında 2.10, 12, 14, 16, 17, 18, 21 ve 25 numaralı denklemler çözülmüştür. Yakınsama kriteri olarak ardışık döngüler arasındaki fark  $10^{-12}$  den az olduğu durum için çözümün bulunmuş olduğu kabulü yapılmıştır. Hesaplamayı başlatmak için kullanılan ilk tahminler Tablo 3.1’de verilmiştir.

Yapılan kararlılık analizi sonucunda çeşitli  $\omega$  frekansları için bulunan sonuçlar takip eden sayfalarda verilmiş ve tartışılmıştır. Grafiklerden de görüleceği üzere, özfonksiyonların çözümünden elde ettiğimiz denklemlerde döngü etkisini içeren terimlerin çok küçük olmasından dolayı (bakınız denklemler 2.10,16,17 ve 18), döngülü ve döngüsüz akış alanlarına ait çözümler arasında büyük bir farklılık gözlemlenmemiştir. Bu nedenle her ne kadar döngülü ve döngüsüz veriler

sunulmakla birlikte genelde sonuçlar laminar ve çalkantılı akış rejimleri açısından tartışılmıştır.

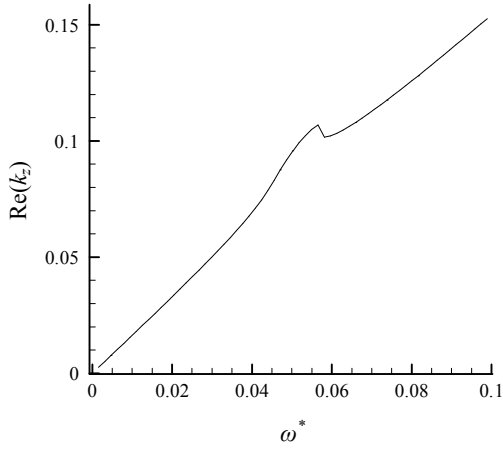
**Tablo 3.1** Sınırlarda kullanılan ilk tahminler

| Sınır     | Değişken         | $V$                                 | $\Delta V$                          |
|-----------|------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Üst Sınır | $\text{Re}(Y_6)$ | $-4.606728474739236 \times 10^{-1}$ | $4.606728543384840 \times 10^{-2}$  |
|           | $\text{Im}(Y_6)$ | $-1.533805845315795 \times 10^{-2}$ | $1.533805868171283 \times 10^{-3}$  |
|           | $\text{Re}(Y_7)$ | $-1.944235913640080 \times 10^{-8}$ | $1.944235942611453 \times 10^{-9}$  |
|           | $\text{Im}(Y_7)$ | $4.089587230217419 \times 10^{-9}$  | $4.089587291157017 \times 10^{-10}$ |
|           | $\text{Re}(Y_4)$ | $2.336262838489050 \times 10^{-7}$  | $2.336262873302079 \times 10^{-8}$  |
|           | $\text{Im}(Y_4)$ | $-5.717627379947398 \times 10^{-9}$ | $5.717627465146685 \times 10^{-10}$ |
|           | $\text{Re}(Y_5)$ | $2.565199944935720 \times 10^{-3}$  | $2.565199887599033 \times 10^{-5}$  |
|           | $\text{Im}(Y_5)$ | $7.738414932520961 \times 10^{-2}$  | $7.738414759553908 \times 10^{-4}$  |
| Alt Sınır | $\text{Re}(Y_1)$ | $2.971826961290401 \times 10^{-4}$  | $2.971827005574073 \times 10^{-5}$  |
|           | $\text{Im}(Y_1)$ | $-4.075944535036068 \times 10^{-5}$ | $4.075944595772375 \times 10^{-6}$  |
|           | $\text{Re}(Y_2)$ | $6.988301031184836 \times 10^{-4}$  | $6.988301135318636 \times 10^{-5}$  |
|           | $\text{Im}(Y_2)$ | $-2.483215984593990 \times 10^{-6}$ | $2.483216021596792 \times 10^{-7}$  |
|           | $\text{Re}(Y_3)$ | $-1.987592540730970 \times 10^{-6}$ | $1.987592570348407 \times 10^{-7}$  |
|           | $\text{Im}(Y_3)$ | $1.845545041503233 \times 10^{-7}$  | $1.845545069003997 \times 10^{-8}$  |
|           | $\text{Re}(Y_5)$ | $2.565199944935720 \times 10^{-3}$  | $2.565199887599033 \times 10^{-5}$  |
|           | $\text{Im}(Y_5)$ | $7.738414932520961 \times 10^{-2}$  | $7.738414759553908 \times 10^{-4}$  |

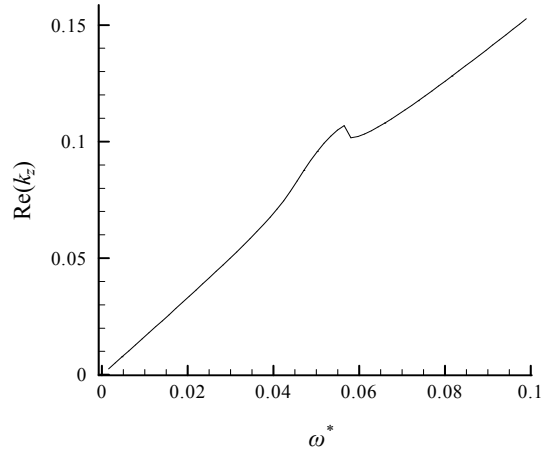
Şekil 3.2 ve 3.3 de gösterilen  $k_{z_{re}}$  ve  $k_{z_{im}}$  'nin boyutsuz frekans ( $\omega^*$ ) ile değişimi farklı  $k_r$  dalga sayıları için değişmediğinden yalnızca  $k_r=10$  için sunulmuştur. Şekil 3.2 de görüldüğü üzere akış yönünde baskın dalga sayısının her durumda frekans ile arttığı gözlemlenmektedir. Döngünün baskın dalga sayısının üzerinde açık bir etkisi görülmezken, akış rejiminin farklılığına neden olduğu görülmektedir. Laminer akışlarda parabolik artış biçimi, türbülanslı akışlarda doğrusal bir karakter kazanmaktadır. Bu durumda  $\omega/k_{z_{re}}$  olarak tanımlanan dalga faz hızı laminar akış için frekansla değişirken, çalkantılı akışlarda sabit kalmaktadır. Dalga faz hızının pozitif olması, dalgaların akış aşağısı yönünde ilerlediğini göstermektedir. İlginç olan laminar durumda boyutsuz frekansın 0.055 olduğu yerde bir süreksizlik görülmesidir. Laminer akışta görülen bu süreksizliğin Şekil 3.3'de verilmekte olan değişim oranının asimptotik yapısıyla ilişkili olduğu düşünülmektedir. Değişim oranının sıfırdan büyük değerler alması, 2.7a-d denklemlerinden anlaşılabacağı üzere dalgaların

akış aşağısı yönünde sönümlendiği anlamına gelmektedir. Laminer akışlarda  $\omega=0.05$  değerine kadar sönümlenmenin yavaş da olsa azaldığı bu değerden sonra hızlı bir şekilde arttığı gözlemlenmektedir. Çalkantılı akışlarda sönümlenme oranının frekansla düştüğü gözlemlenmiştir. Bu durum çalkantılı akışlarda kararsızlık yönündeki eğiliminin daha güçlü olduğunu göstermektedir.

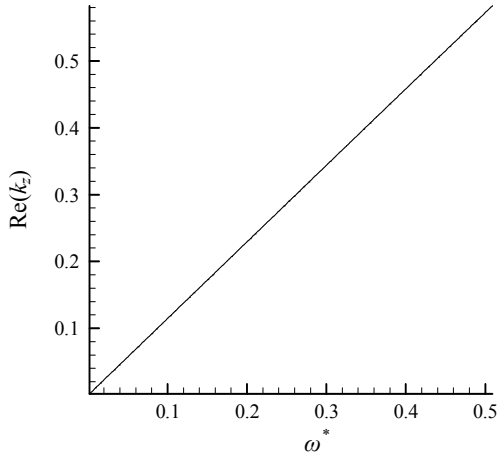
a)



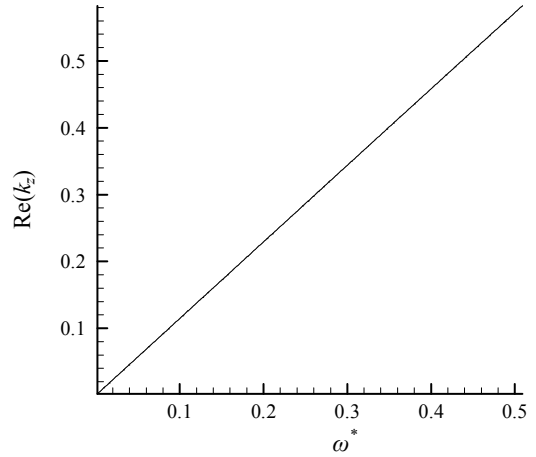
b)



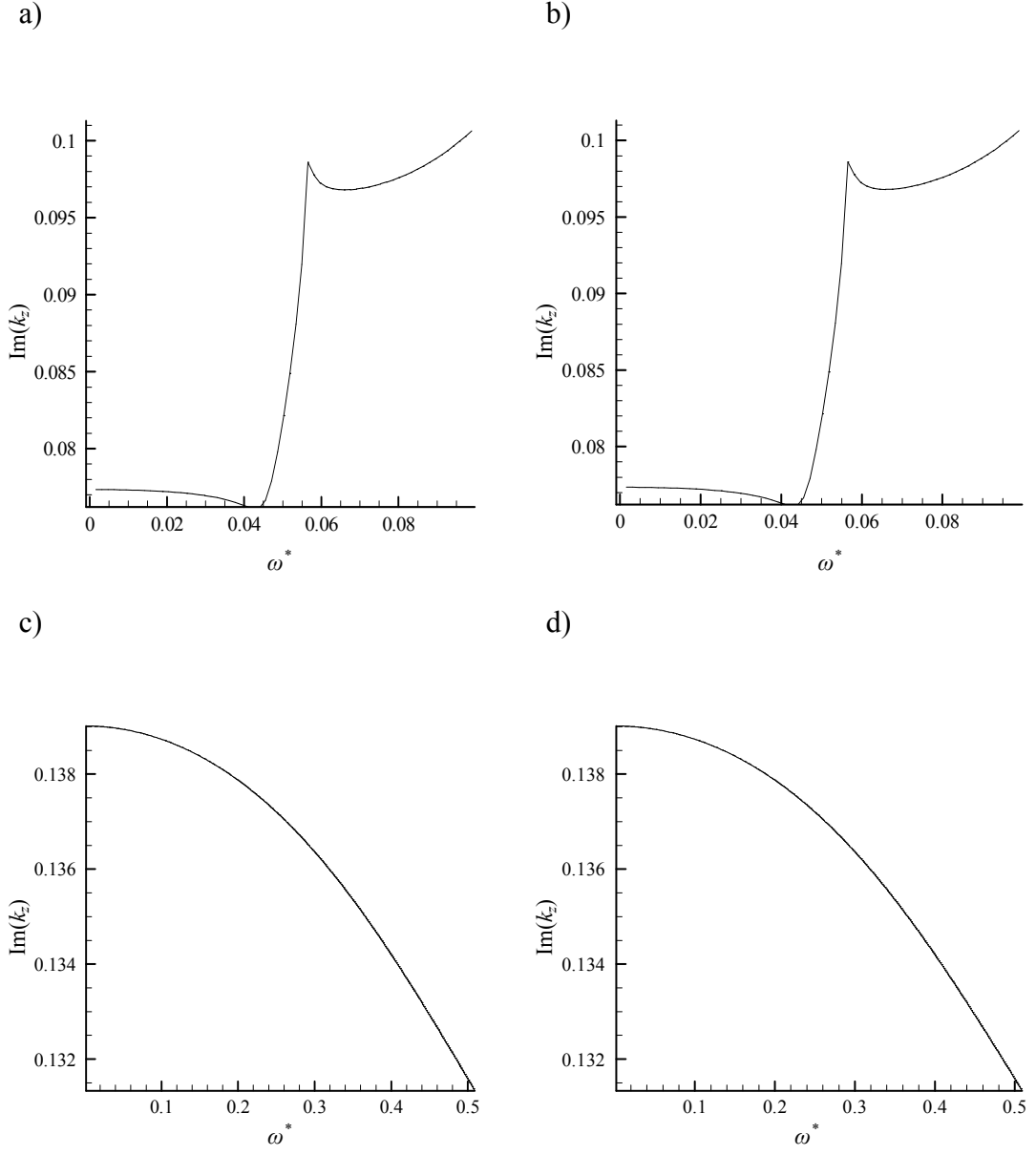
c)



d)

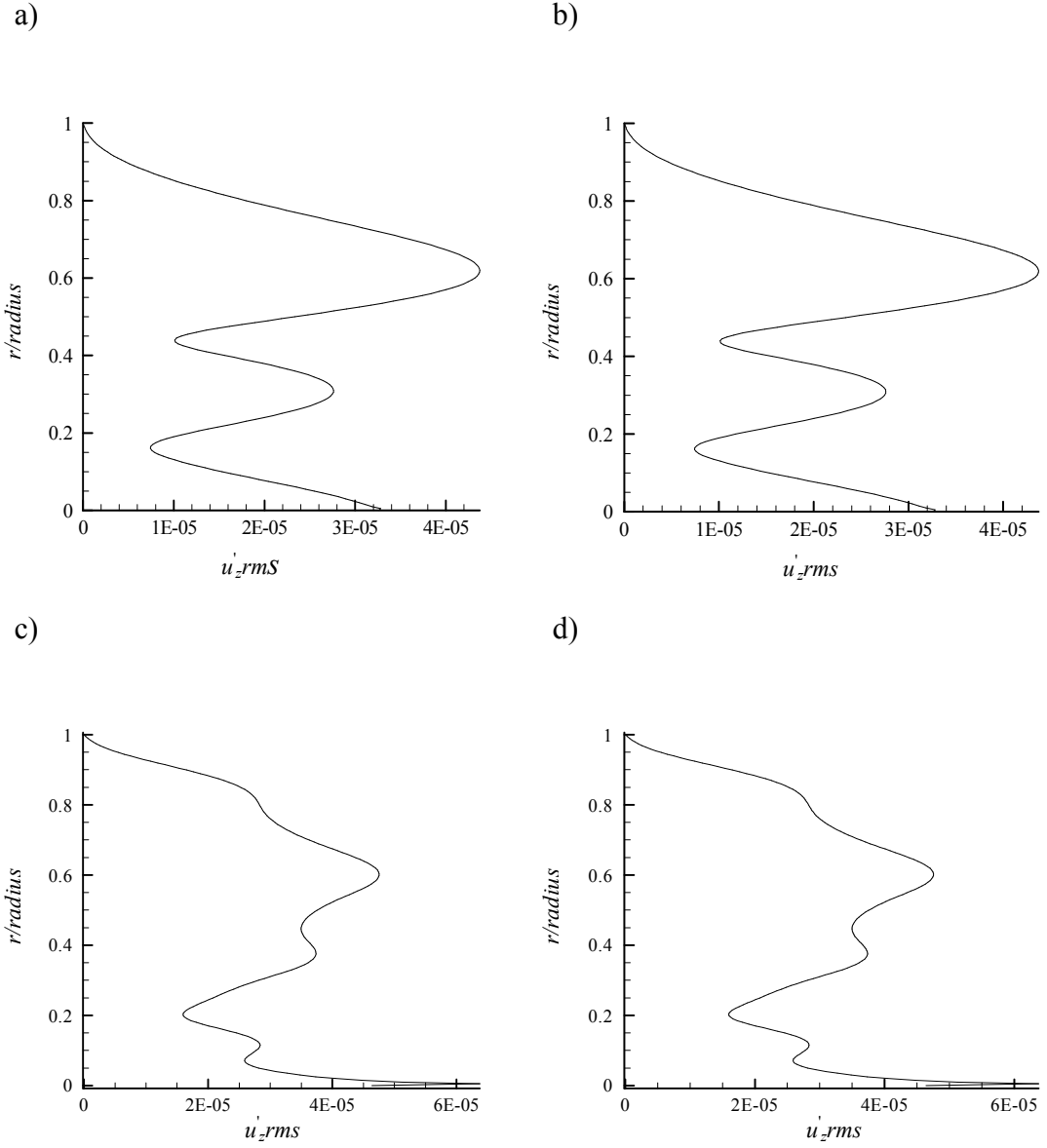


**Şekil 3.2** Baskın dalga sayısının frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış. d) Çalkantılı, dögüsel akış.



**şekil 3.3** Değişim oranının frekans ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış. b) Laminer, döngüsel akış. c)  alkantılı, döngüsüz akış. d)  alkantılı, döngüsel akış.

Bu eigen modlara karşılık gelen eigen fonksiyonlardan elde edilen standart sapmalar (rms) şekil 3.4-3.7 de verilmektedir.

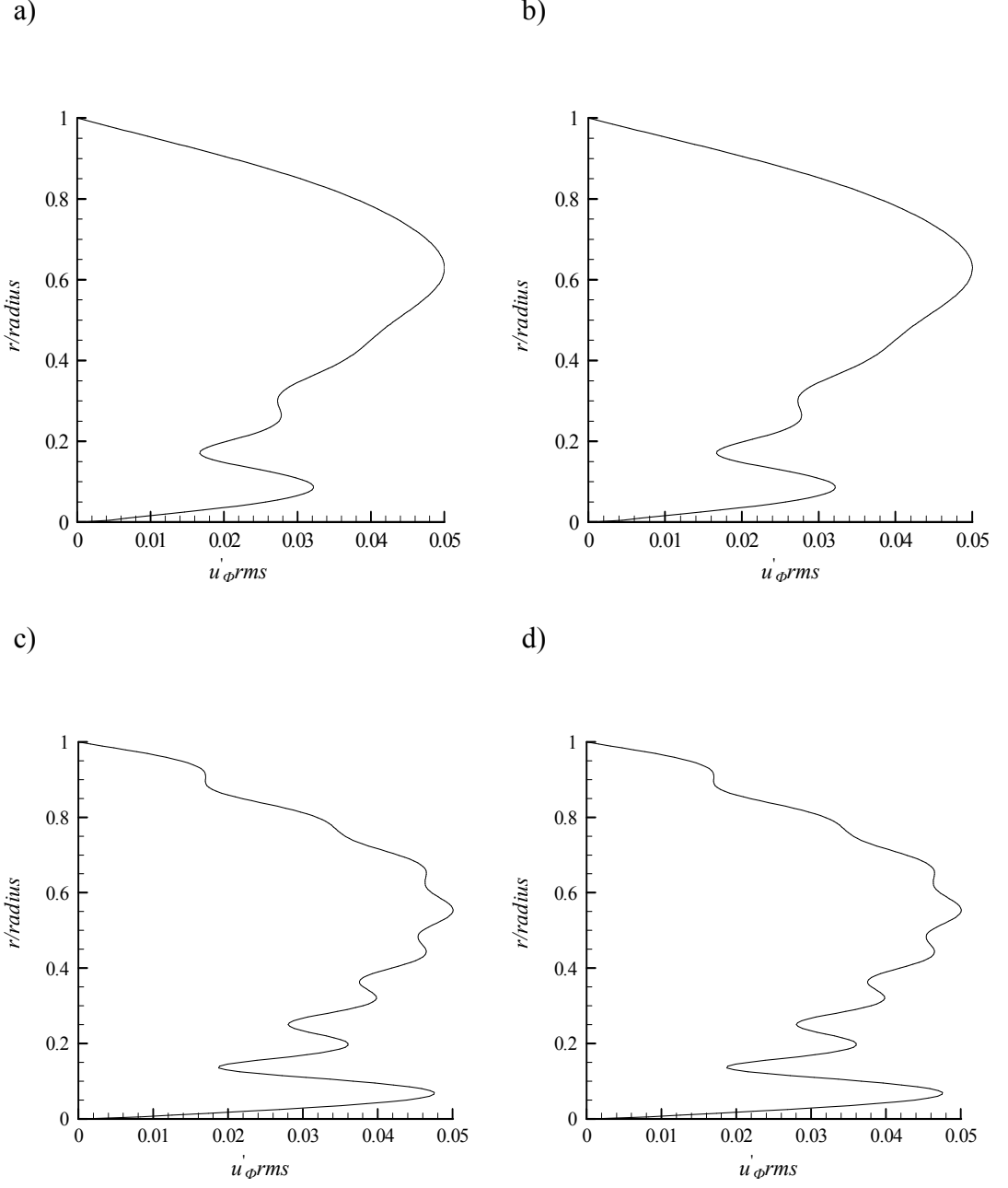


**Şekil 3.4** Akış doğrultusundaki ( $z$ ) hızın rms değerlerinin boyutsuz  $r^*$  ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış. d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Ana akış yönündeki çalkantı bileşeninin  $\sqrt{u_z'^2}/u_{z\max}$  değişimi daha önce belirtildiği gibi dögüden etkilenmemesine rağmen akışın laminer yada türbülanslı oluşumuyla ciddi farklılıklar göstermektedir. Laminer durumda ayrışık üç maksimumdan en büyüğü duvara yakın bölgede ( $r^*=0.6$ ) oluşurken, merkezde buna yakın bir büyüklük gözlemlenmiştir.  $r^*=0.3$  de gözlemlenen maksimum göreceli olarak daha küçüktür.

Çalkantılı durumda  $\sqrt{u_z'^2}/u_{z\max}$ 'ın daha karmaşık bir yapı sergilediği görülmektedir. Merkeze çok yakın bir yerde gerçekleşen dar bir maksimuma karşılık duvara yakın bir bölgede ( $r^*=0.6$ ) daha geniş baskın bir büyüklük gözlemlenmektedir. Özetle

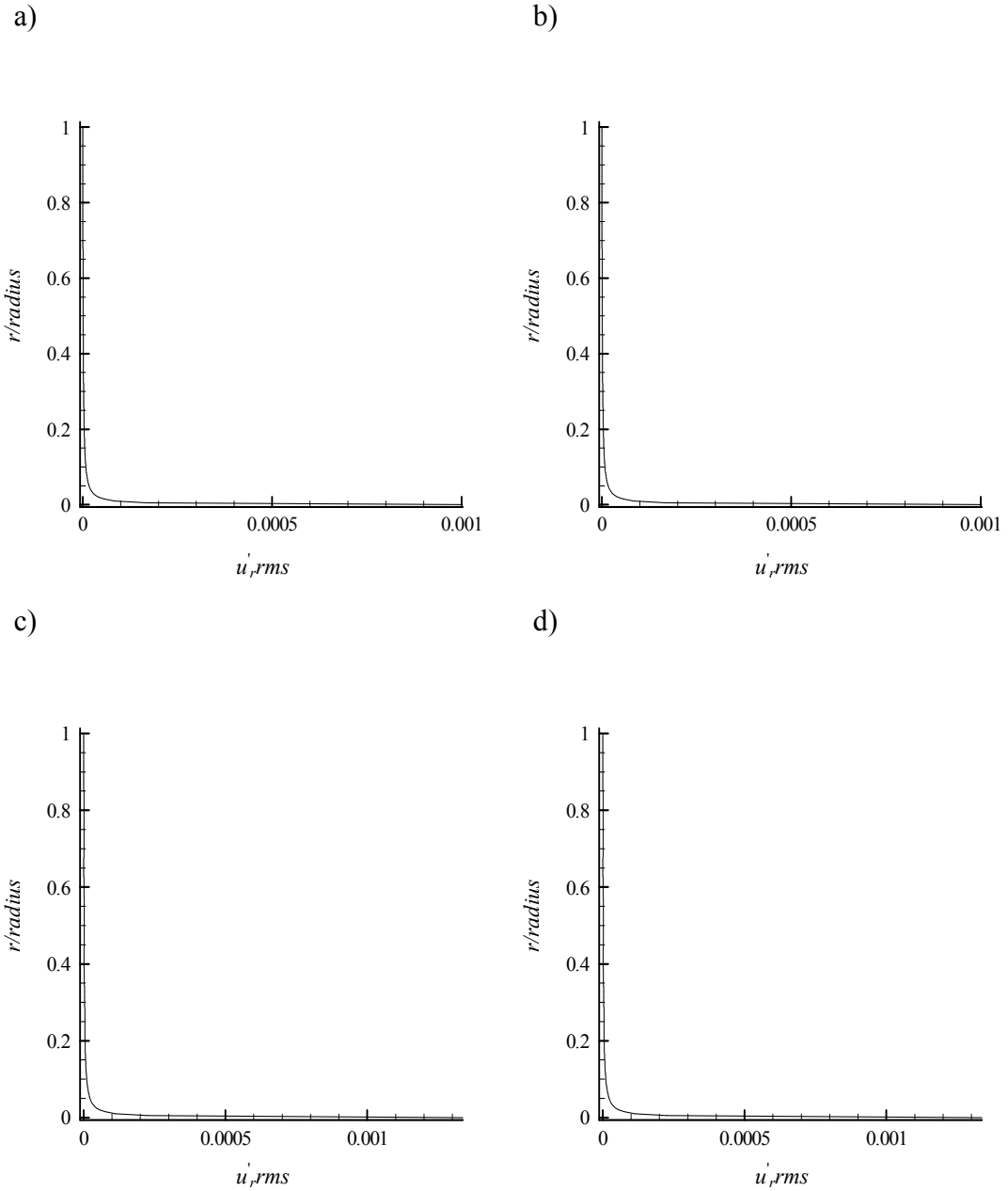
belirtmek gerekirse  $r^*=0.6$  da oluşan yapının hem laminar, hem de çalkantılı akıştaki enerjinin büyük bir bölümünü içerdiğini söylemek mümkündür.



Şekil 3.5  $\phi$  doğrultusundaki çalkantı hızının rms değerlerinin boyutsuz  $r^*$  ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış. b) Laminer, döngüsel akış. c) Çalkantılı, döngüsüz akış. d) Çalkantılı, döngüsel akış.

Şekil 3.5’de gösterilen  $\sqrt{u_{\phi'}^2}/u_{z_{\max}}$  çalkantılı rejimde biraz daha dalgalı olmasına rağmen nitelik olarak hem laminar hem de çalkantılı rejimlerde aynı karakteristiklere sahiptir: buradaki en dikkat çekici özellik  $r^*=0.075$  de ve 0.6 da görülen

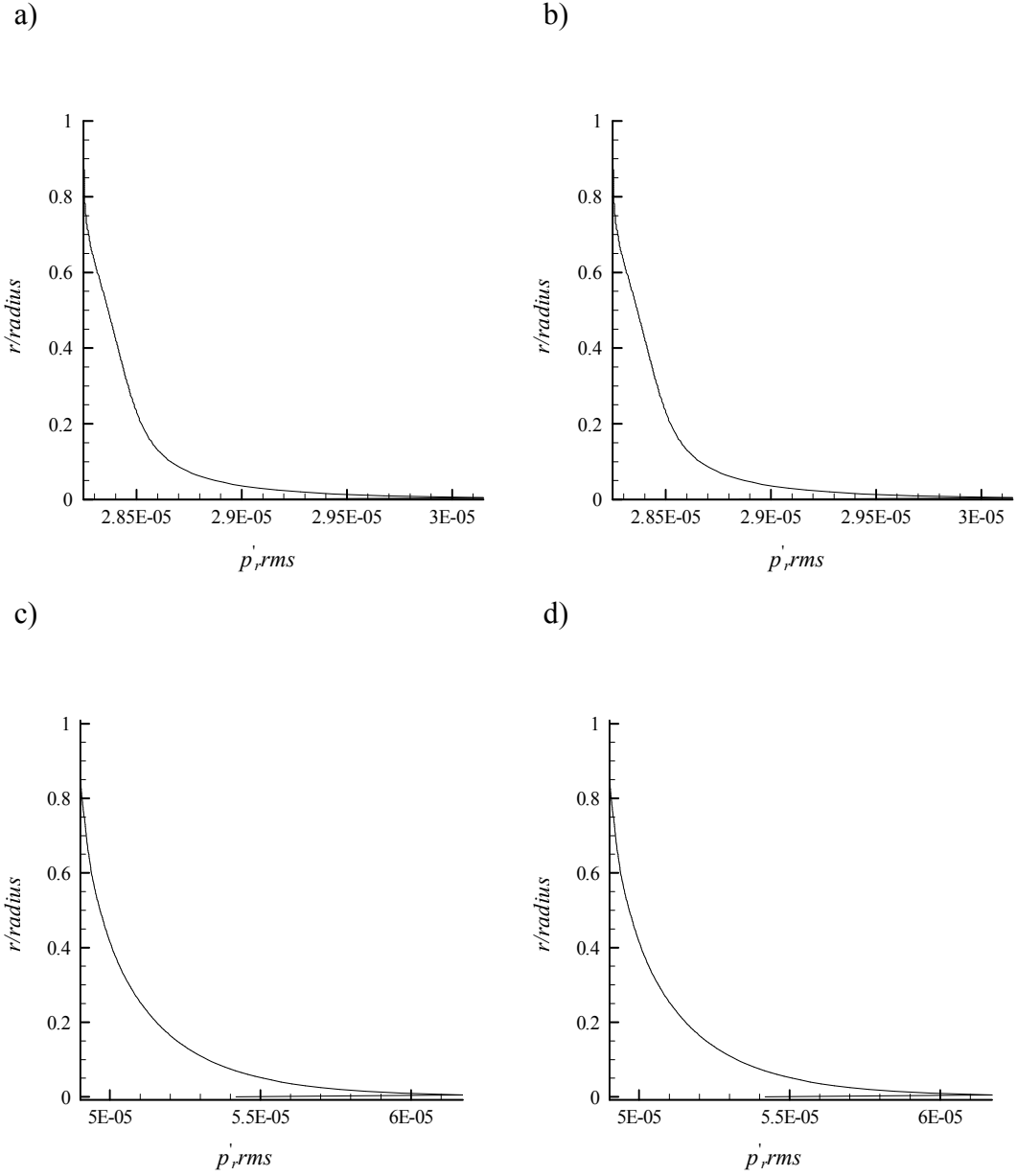
maksimumlardır. Bir önceki rms'lerde olduğu gibi burada da duvara yakın bölgedeki yapının merkeze yakın bölgelerdekinden daha baskın olduğu görülmektedir.



**Şekil 3.6**  $r$  doğrultusundaki çalkantı hızının rms değerlerinin boyutsuz  $r^*$  ile değişimi. Sırasıyla, a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Radyal yöndeki çalkantı bileşeni  $\sqrt{u_r'^2} / u_{z,max}$  merkezdeki büyük değerinden artan  $r^*$  ile hızla sıfıra düşmektedir (bakınız Şekil 3.6). Buradan da tedirginliğin radyal bileşeninin çalkantı enerjisine ciddi bir katkısının olmadığını söylenebilir.

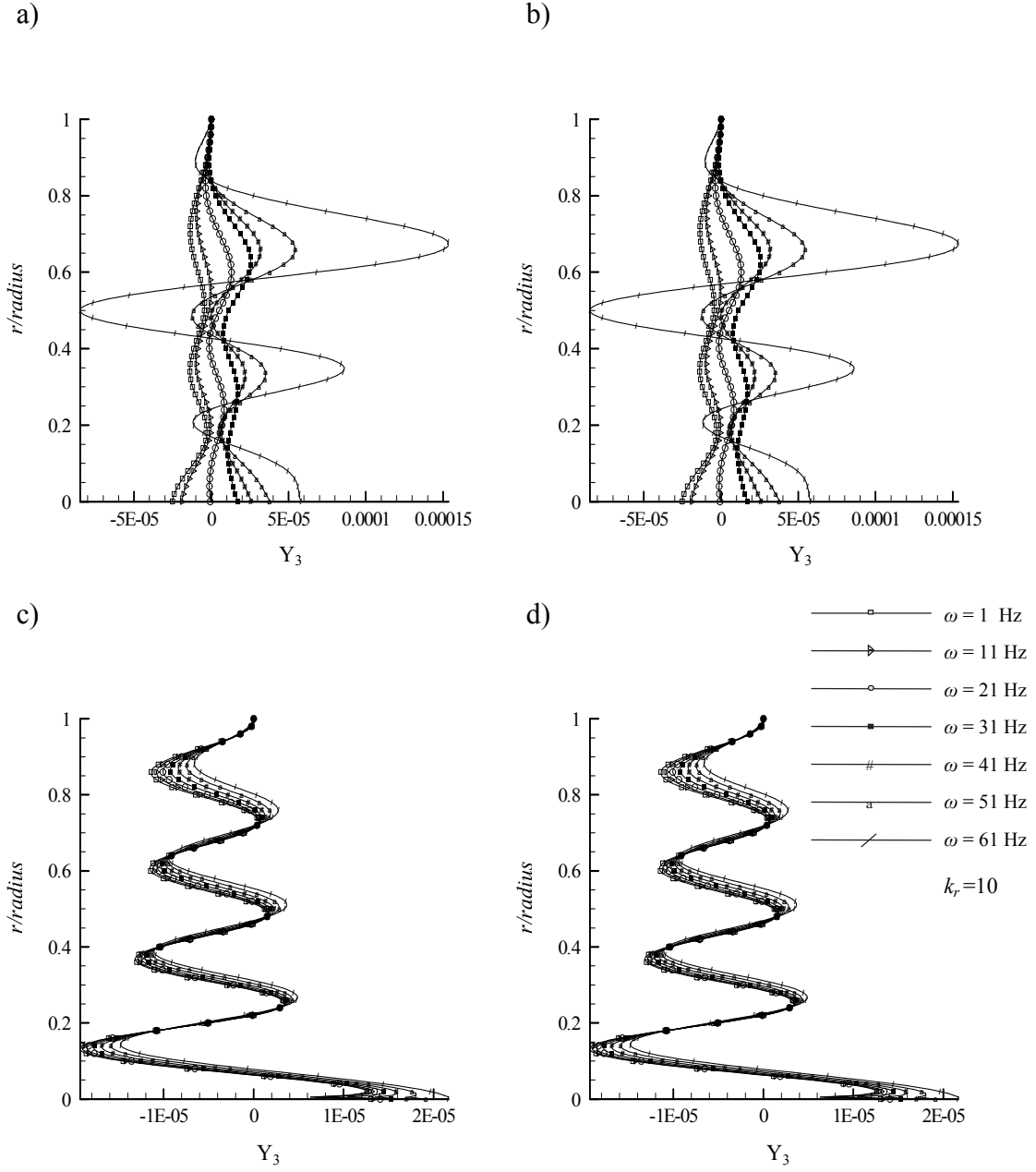




**Şekil 3.7** Basıncın rms değerlerinin boyutsuz  $r^*$  ile değişimi. Sırasıyla, a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

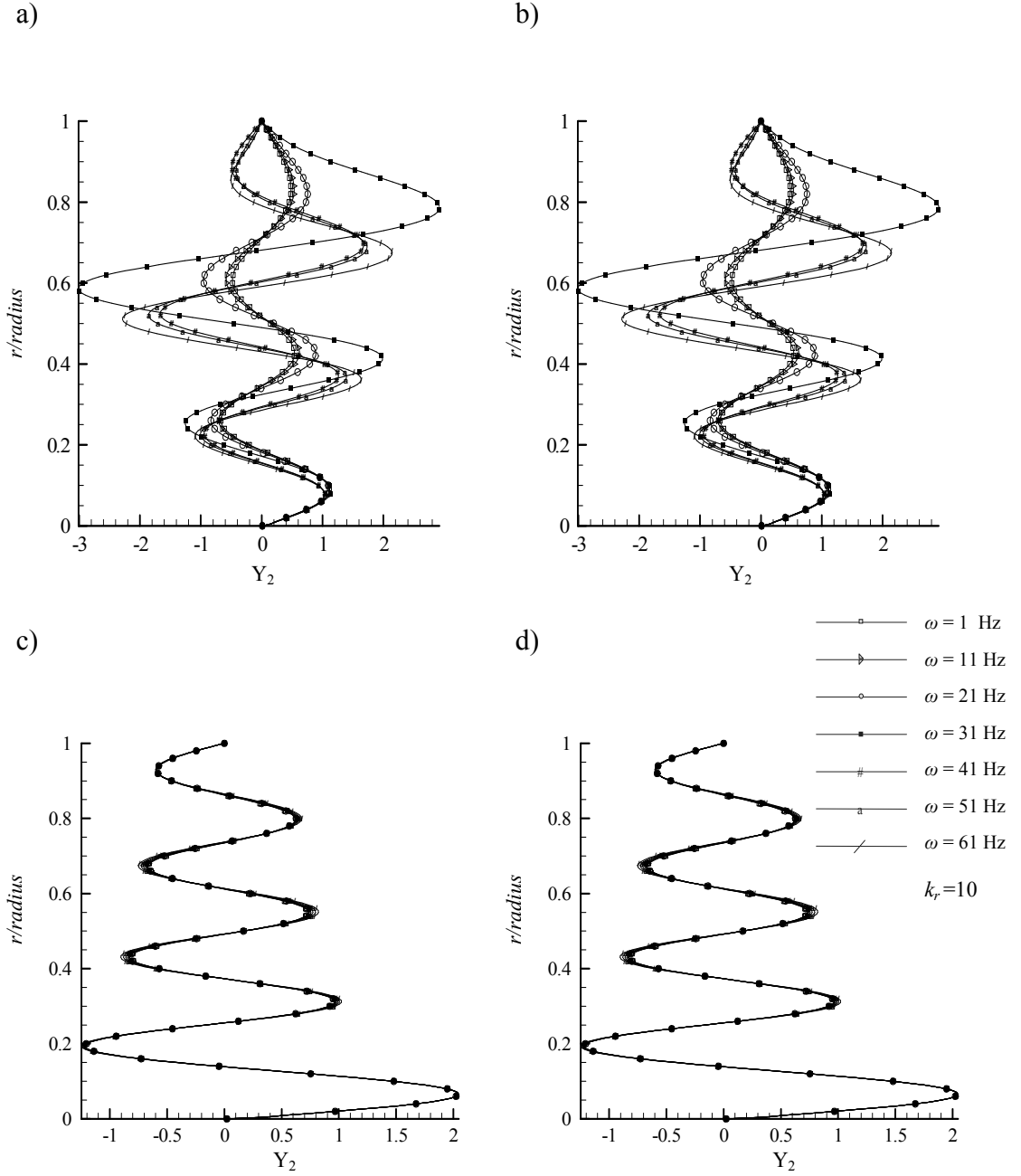
Şekil 3.7 de gösterilen basınç çalkantı değerleri merkezin hemen yakınındaki dar bir maksimum dışında  $r^*=0.8$ 'e kadar göreceli olarak düşük seyretmekte ve duvar yakınında neredeyse sıfırlanmaktadır. Basınç dağılımının akış rejiminden çok etkilenmediği söylenebilir.

Yukarıda anlatılan rms yapılarını oluşturan genlik fonksiyonların frekans ile değişiminin farklı  $k_r$  değerleri için daha ayrıntılı tartışılması gerekmektedir. Bu amaçla önce  $k_r=10$  için elde edilen sonuçlar daha sonra  $k_r=201$  için karşılaştırmalı olarak tartışılacaktır.



**Şekil 3.8**  $u_z'$  genlik fonksiyonunun  $k_r=10$  dalga sayısı için frekans ile değişimi a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış

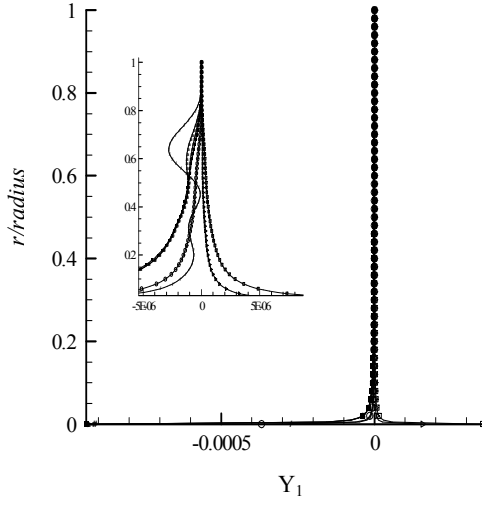
Şekil 3.8’de gösterilen  $u_z'$  genlik fonksiyonunun merkezde açık, duvarda sabit uçlu dalga yapısının radyal yönde laminer akış için yaklaşık olarak üç dalga, çalkantılı rejim için dört dalga boyu oluşturacak biçimde değiştiği gözlemlenmektedir. Söz konusu dalganın genliğinin laminer durumda frekans ile merkezden duvara doğru göreceli artış gösterdiği ve bu nedenle duvar yakınındaki çalkantının enerjisinin arttığını söylemek mümkündür ki, bu gözlem rms dağılımıyla uyumludur. Çalkantılı durumda, dalga genliğinin merkezden uzaklaştıkça sönümlendiği ve frekansla pek bir farklılık göstermediği açıktır.



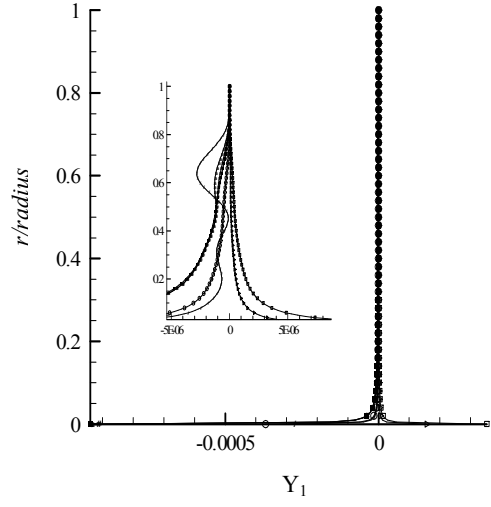
**Şekil 3.9**  $u'_\phi$  modal fonksiyonunun  $k_r=10$  dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış. c) Çalkantılı, dögüsüz akış. d) Çalkantılı, dögüsel akış.

$u'_\phi$  genlik fonksiyonları,  $u'_z$  genlik fonksiyonlarından farklı olarak hem merkezde hem de duvarda sabit dalga yapısı göstermektedir (Şekil 3.9). Burada genliklerin frekansla önce arttığı (41 Hz'e kadar), daha sonra ara bir seviyeye düşüp izleyen frekanslarda tekrar yükseldiği gözlemlenmektedir. Genliğin radyal yöndeki değişimi frekansa bağlı olup 31 Hz'de genliğin merkezden uzaklaştıkça hızla arttığı gözlemlenmiştir. Çalkantılı durumda genliğin frekansla değişmediği ve tüm frekanslar için radyal yönde sönümlendiğini söylemek mümkündür.

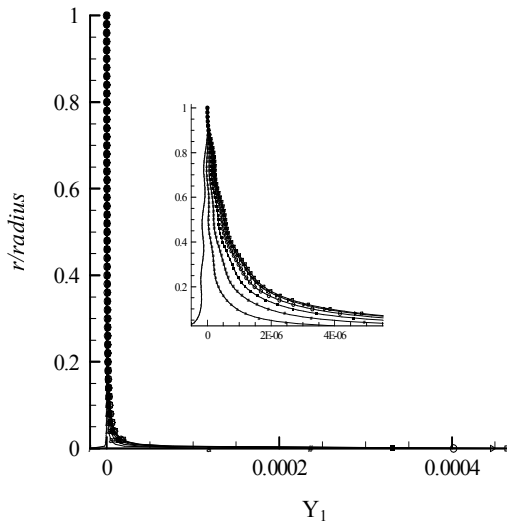
a)



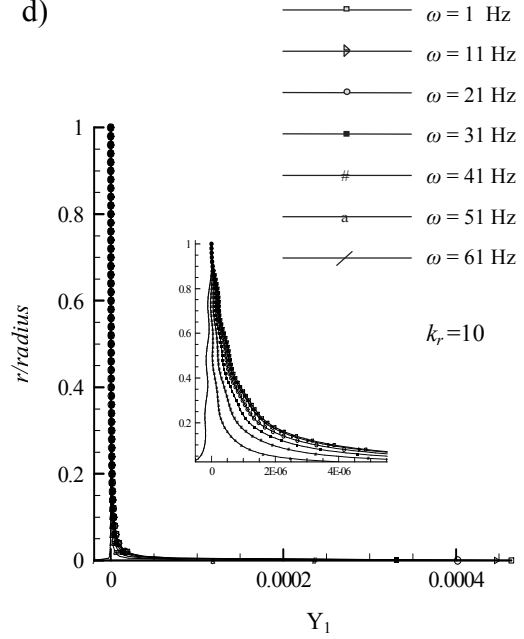
b)



c)

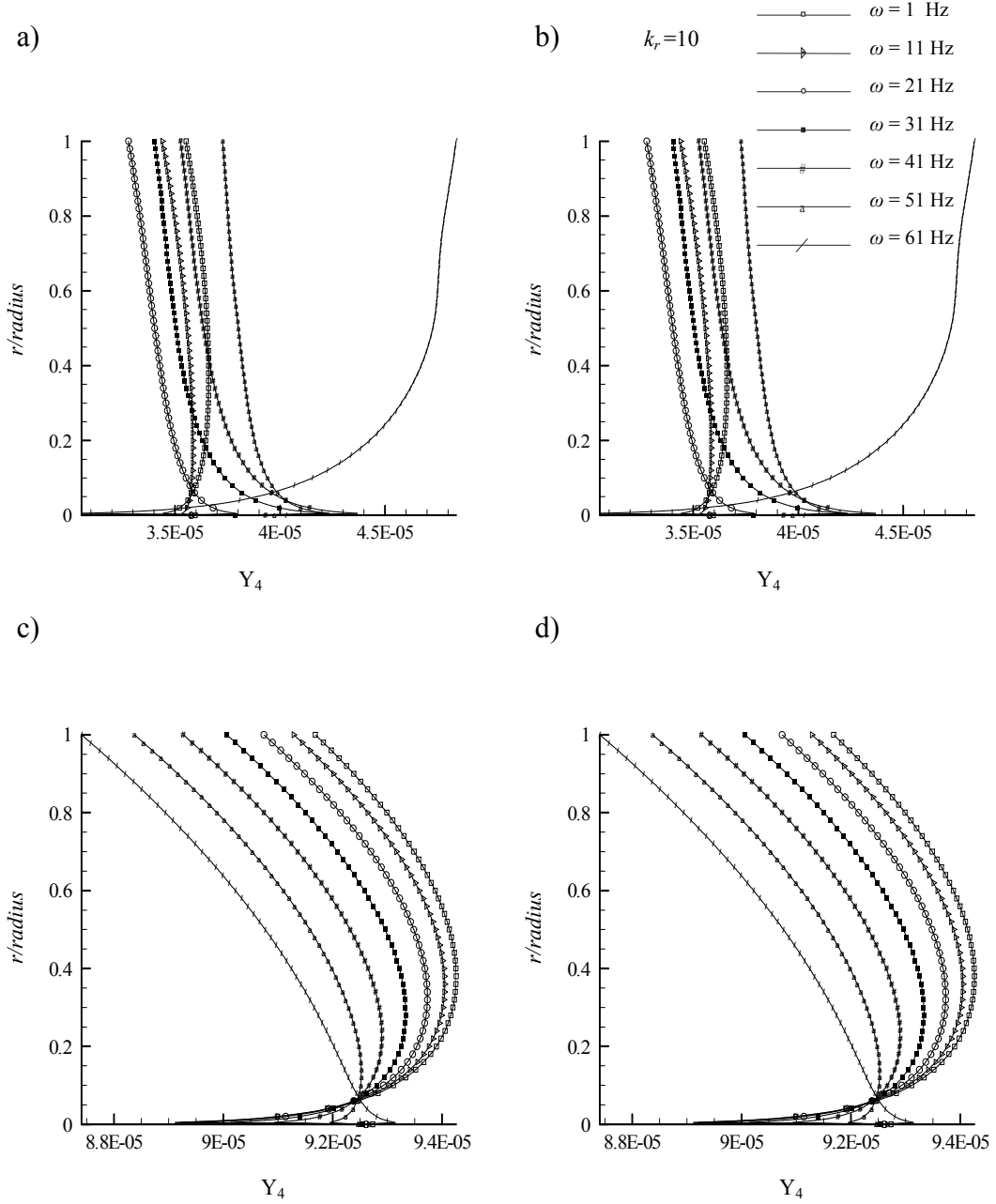


d)



**Şekil 3.10**  $u'_r$  genlik fonksiyonunun  $k_r=10$  dalga sayısı için frekans ile değişimi . (Küçük grafikler yakınlaştırılmış grafiklerdir). a) Laminer, döngüsüz akış. b) Laminer, döngüsel akış c) Çalkantılı, döngüsüz akış d) Çalkantılı, döngüsel akış.

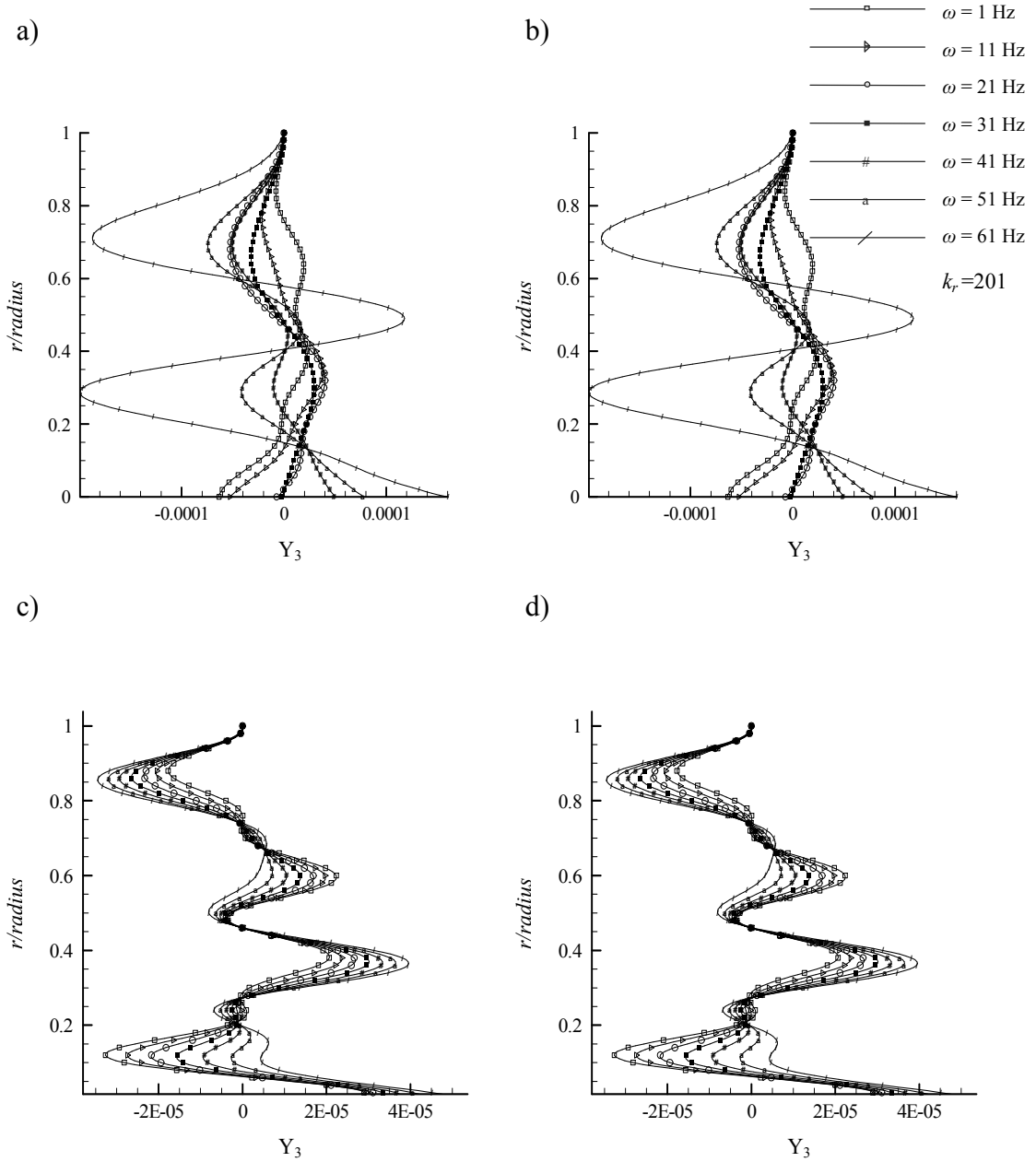
Radyal yöndeki genlik fonksiyonları (Şekil 3.10) yalnızca merkeze yakın bölgede frekans ile değişim gösterirken merkezden uzaklaşıldıkça hızla sıfıra sönümlenmektedir. Bu durum hem çalkantı hem de laminer durum için aynıdır.



Şekil 3.11  $p'$  genlik fonksiyonunun  $k_r=10$  dalga sayısı için frekans ile değişimi. b) Laminer, döngüsel akış c) Çalkantılı, döngüsüz akış d) Çalkantılı, döngüsel akış.

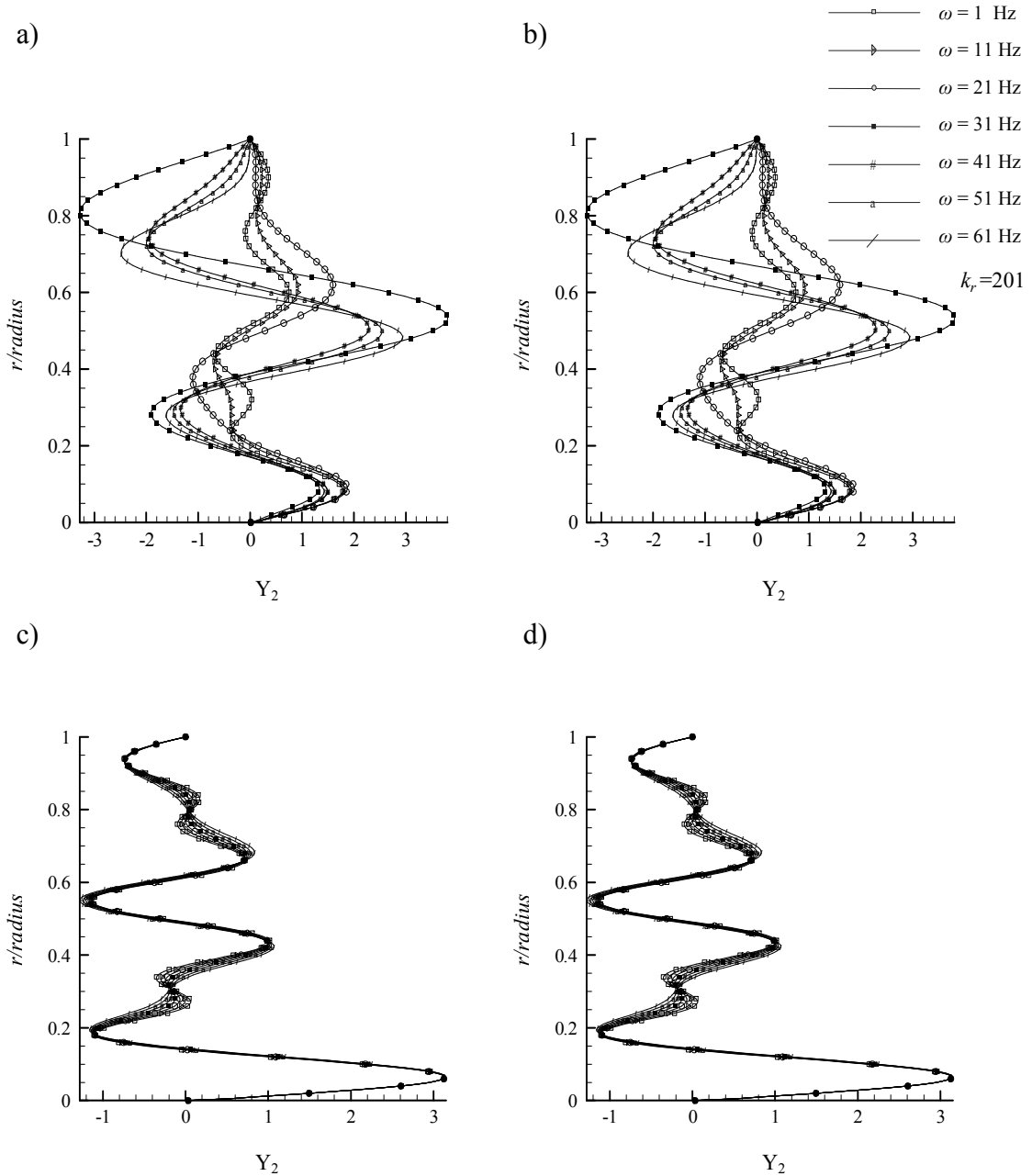
Basınç genlik fonksiyonlarının (Şekil 3.11) laminer durumda merkezdeki yüksek değerinden hızla düştüğü daha sonra hesaplama bölgesinin büyük bölümünde göreceli yavaş azaldığı gözlemlenmiştir. Çalkantılı durumda ise basıncın genlik fonksiyonlarının maksimum olduğu yer merkezden içeride olup bunun artan frekans ile merkeze doğru kaydığı görülmektedir.

Şimdi yukarıda anlatılan rms yapılarını oluşturan model fonksiyonların frekans ile değişimi  $k_r=201$  dalga sayısı için incelenecektir.



**Şekil 3.12**  $u_z'$  genlik fonksiyonunun  $k_r=201$  dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Şekil 3.12 de gösterilen  $u_z'$  genlik fonksiyonunun merkezde açık duvarda sabit uçlu dalga yapısı  $k_r=10$ 'da olduğu durumdakine benzemektedir; ancak burada laminer akış için radyal yönde iki dalga oluşturması dalga sayısında aşağı yönlü bir kayma olduğunu göstermektedir. Ayrıca laminer durumda genliğin frekans ile merkezden duvara doğru önemli bir artış göstermediği gözlemlenmektedir. Bu nedenle kararsızlık enerjisinin laminer durum için düzgün bir dağılım gösterdiğini söylemek mümkündür. Çalkantılı durumda ise dalganın genliğinin düğüm noktaları dışında  $k_r$  ile arttığı ve radyal yönde düzensizlikler gösterdiği saptanmıştır.

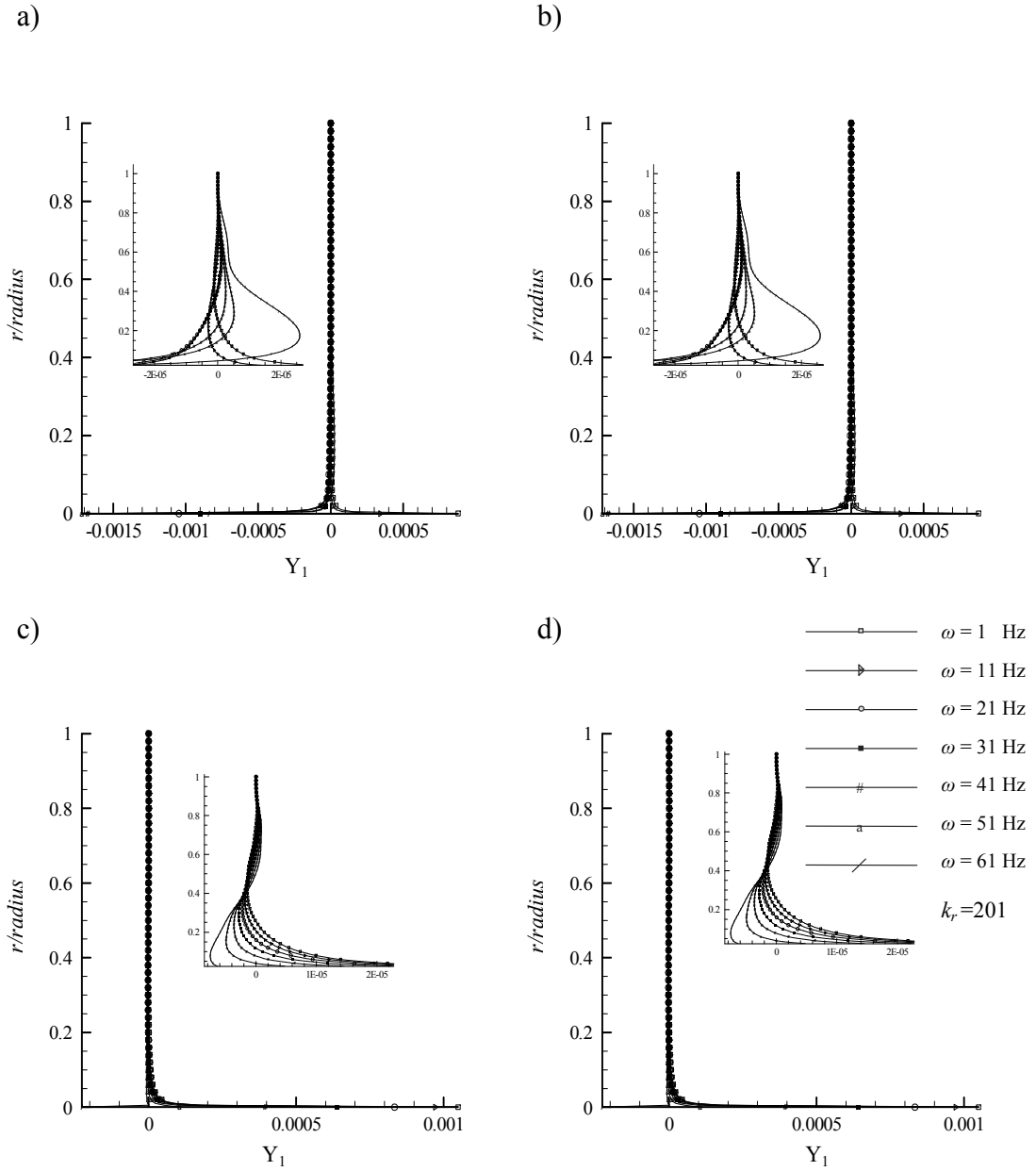


Şekil 3.13  $u'_\phi$  genlik fonksiyonunun  $k_r=201$  dalga sayısı için frekans ile değişimi a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Şekil 3.13'de gösterilen  $u'_\phi$  genlik fonksiyonlarının  $u'_z$  genlik fonksiyonlarından farklı olarak hem merkezde hem de duvarda sabit dalga yapısı göstermektedir. Burada da  $k_r=10$ 'da olduğu durumdaki gibi genliklerin frekansla önce arttığı (41 Hz'e kadar) sonra ara bir değere düşüp tekrar arttığı gözlemlenmektedir. Yine burada da 31 Hz'de genliğin merkezden uzaklaştıkça hızla arttığı gözlemlenmiştir. Çalkantılı durumda genlik frekansla çok küçük miktarlarda değişim göstermektedir. Radyal yönde sönümlenen genlikler düzgün bir yapı sergilememektedir. Çalkantılı durum

için  $k_r$  dalga sayısının 10 olduğu durum ile 201 olduğu durum karşılaştırıldığında,  $k_r$  arttıkça küçük modların enerji yüklendiği söylenebilir.

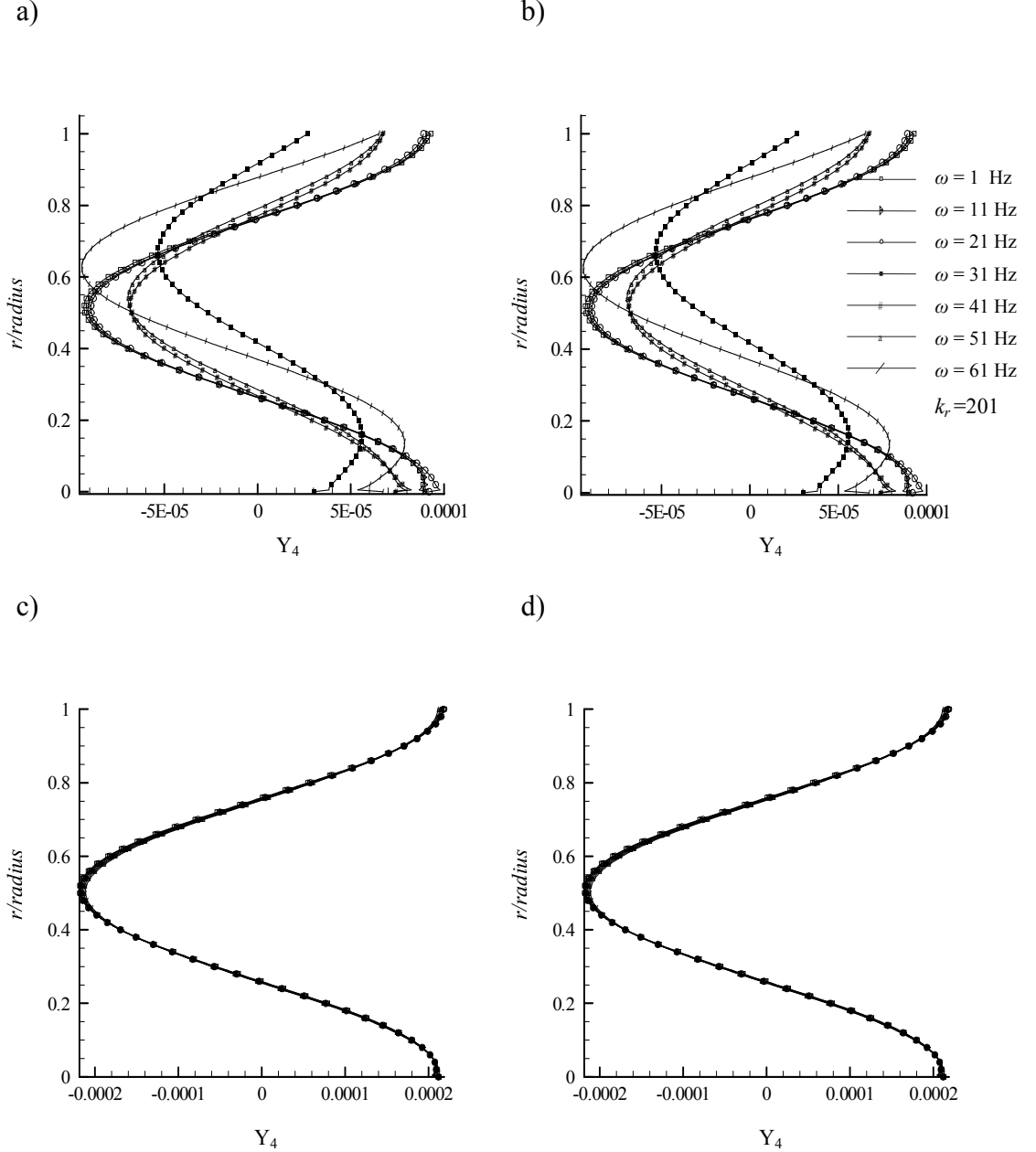
Şekil 3.14’de gösterilen radyal yöndeki genlik fonksiyonlarına ait değişim; yani merkeze yakın bölgede frekans ile değişmekte, merkezden uzaklaştıkça bu değişim hızla sıfıra sönümlenmektedir. Hem çalkantı, hem de laminar durum için ve  $k_r=10$ ’daki ile aynıdır.



Şekil 3.14  $u_r'$  genlik fonksiyonunun,  $k_r=201$  dalga sayısı için frekans ile değişimi . (Küçük grafikler yakınlaştırılmış grafiklerdir.). a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

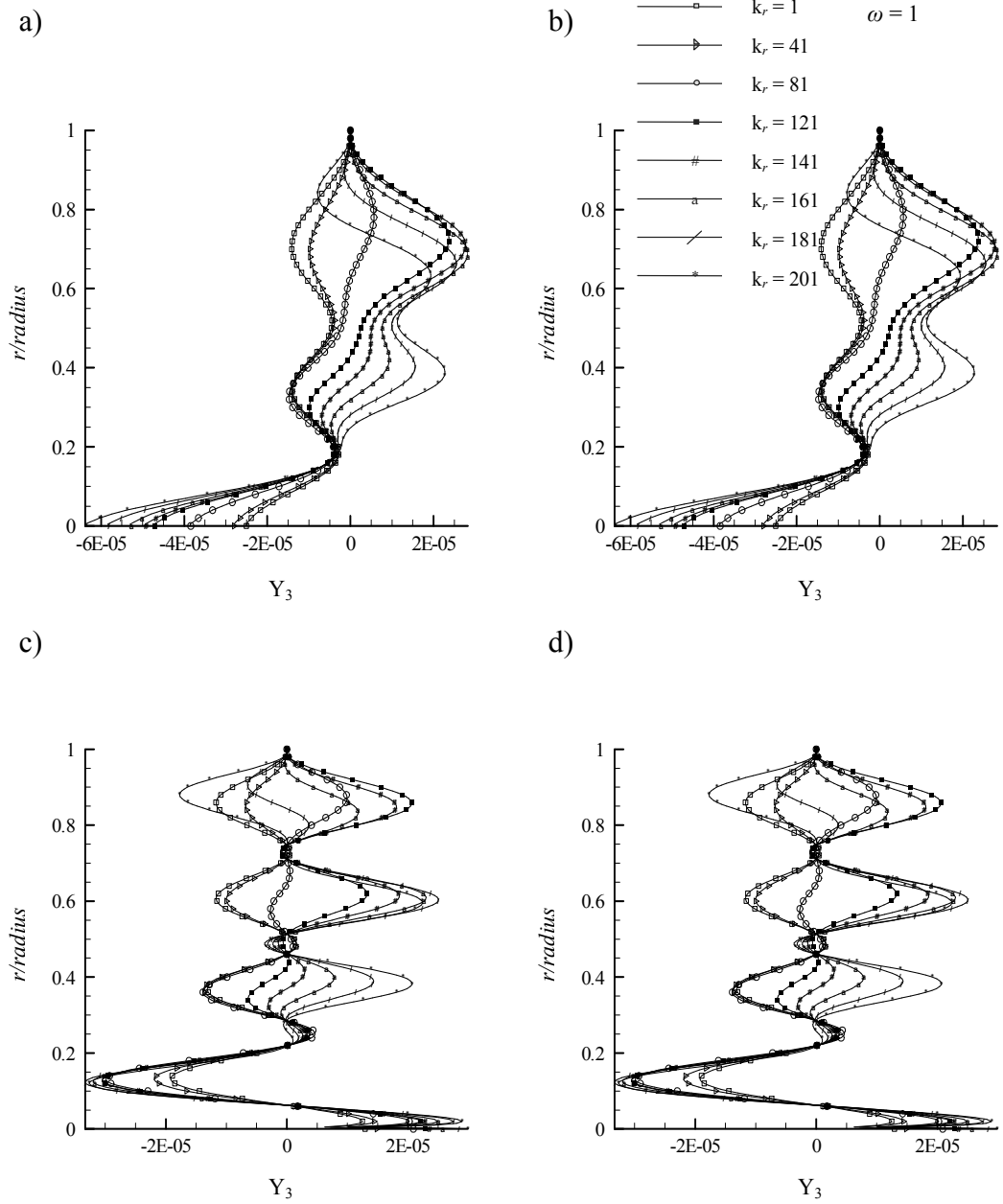


Şekil 3.15’de  $p'$  modlarının radyal yönde dalga yapısına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum  $k_r=10$ ’dan oldukça farklıdır. Laminer durumda genliklerin 31 Hz’e kadar frekansla önemli ölçüde değişiklik göstermediği, fakat 31 Hz’de önemli ölçüde düştüğü, ve daha sonra tekrar yükseldiği gözlemlenmektedir. Çalkantılı durumda ise genlikler frekans ile değişmemektedir.



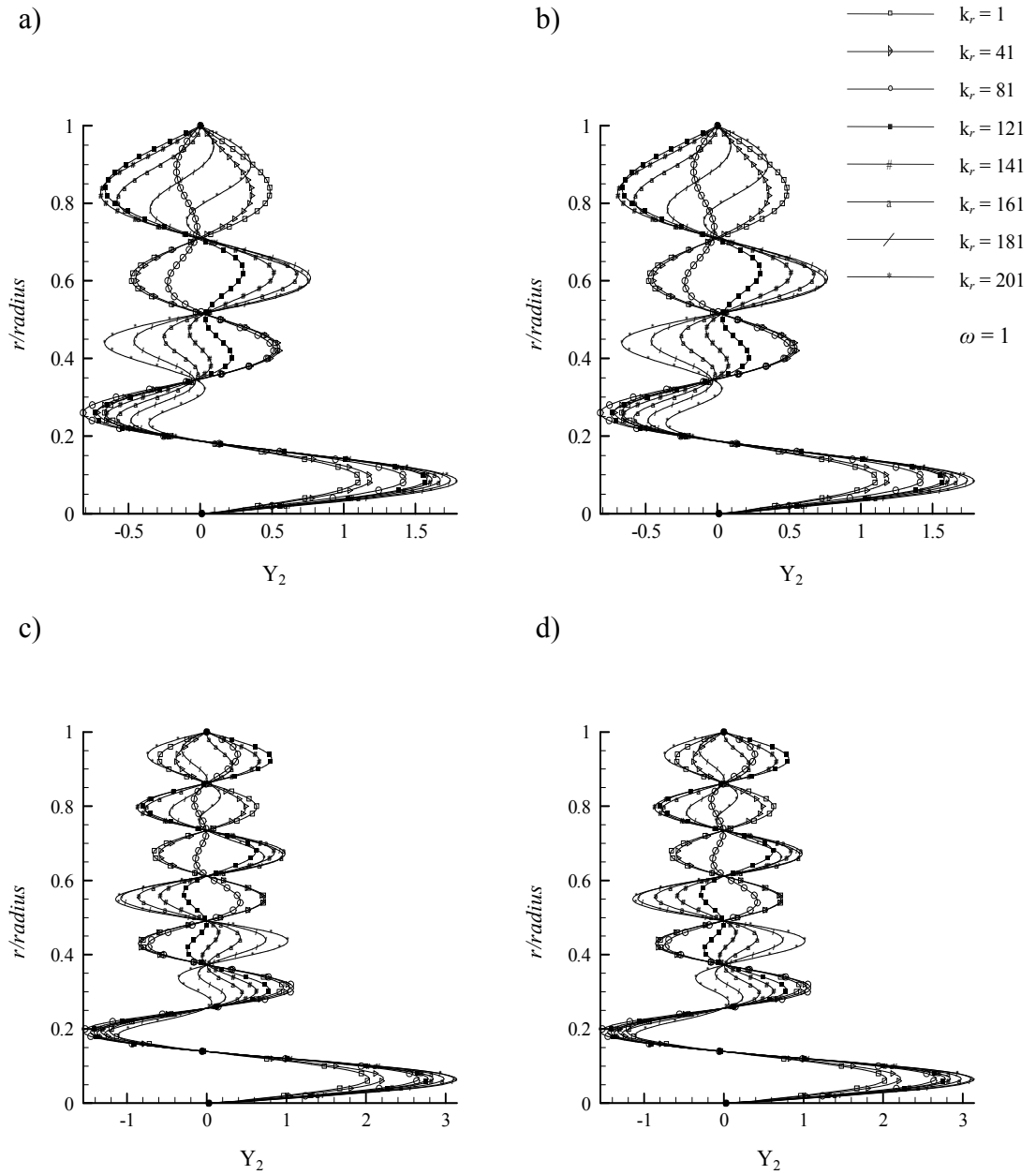
Şekil 3.15  $p'$  genlik fonksiyonunun,  $k_r=201$  dalga sayısı için frekans ile değişimi. a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Sabit frekanslarda radyal yöndeki dalga sayısı etkisini görebilmek için, eigen modlar  $\omega = 1$  ve  $\omega = 63$  için  $k_r = 1, 41, 81, 121, 141, 181, 201$  değerlerinde gösterilmiştir.



**Şekil 3.16**  $u'_z$  genlik fonksiyonunun,  $\omega = 1$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

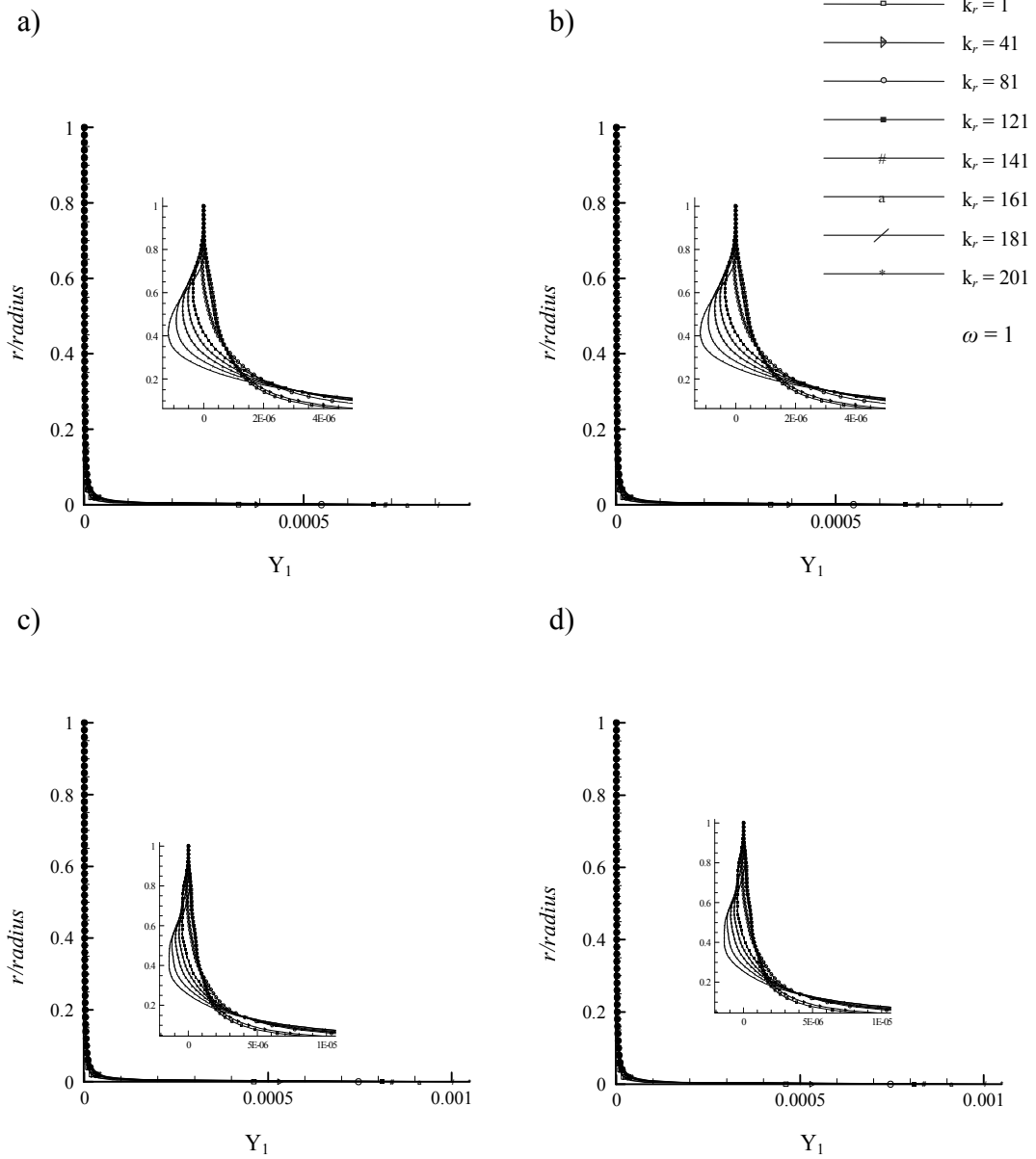
Şekil 3.16'da gösterilen  $u'_z$  genlik fonksiyonu diğer durumlarda olduğu gibi yine merkezde açık, duvarda sabit uçlu dalga yapısı göstermektedir. Burada hem laminer, hem de çalkantılı durumda radyal dalga sayısı artıkça genliğinde artma eğiliminde olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca çalkantılı durumda  $r^*=0.1$ 'de en yüksek genlik değeri elde edilmiştir. Buradan çalkantılı durum için duvara yakın bölgede çalkantının enerjisinin maksimum seviyede olduğunu söylemek mümkündür.



**Şekil 3.17**  $u_\phi'$  genlik fonksiyonunun  $\omega = 1$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

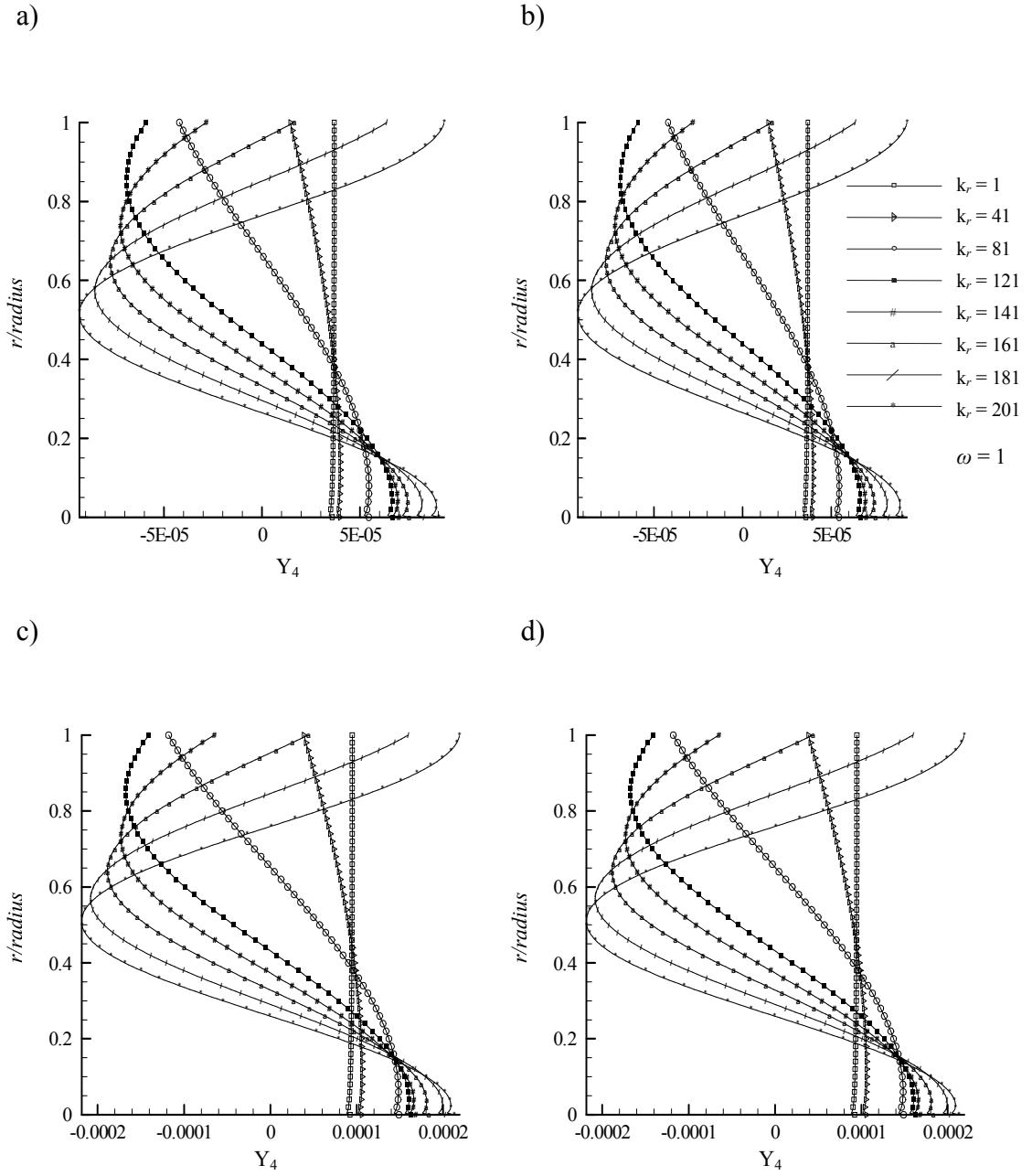
Şekil 3.17'de,  $u_\phi'$  için yine hem merkezde, hem de duvarda sabit uçlu dalga yapısı gözlemlenmektedir. Burada laminer durumda genliklerin merkeze yakın bir bölgede ( $r^*=0.1$ ) en yüksek değerini aldığı, daha sonra düzgün bir şekilde duvarda sıfıra indiği gözlemlenmektedir. Dalga sayısı 81 olana kadar, dalga sayısı ile genlikler değişmemiş, daha sonra genlikler dalga sayısı ile artma eğilimine girmişlerdir. Çalkantılı durumda merkezden duvara oluşturulan dalga sayısının fazla olmasının dışında aynı yapı gözlemlenmektedir.

Şekil 3.18’de gösterilen radyal yöndeki model fonksiyonlara ait değişimin diğer durumlara benzer şekilde yalnızca merkeze yakın bölgede dalga sayısı ile bir değişim gösterdiği, merkezden uzaklaştıkça bu değişimin hızla sıfıra sönümlendiği gözlemlenmektedir. Bu durum yine hem çalkantılı hem de laminar durum için aynıdır.



Şekil 3.18  $u'_r$  genlik fonksiyonunun,  $\omega = 1$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi. (Küçük grafikler yakınlaştırılmış grafiklerdir.). a) Laminer, dögüsüz akış b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

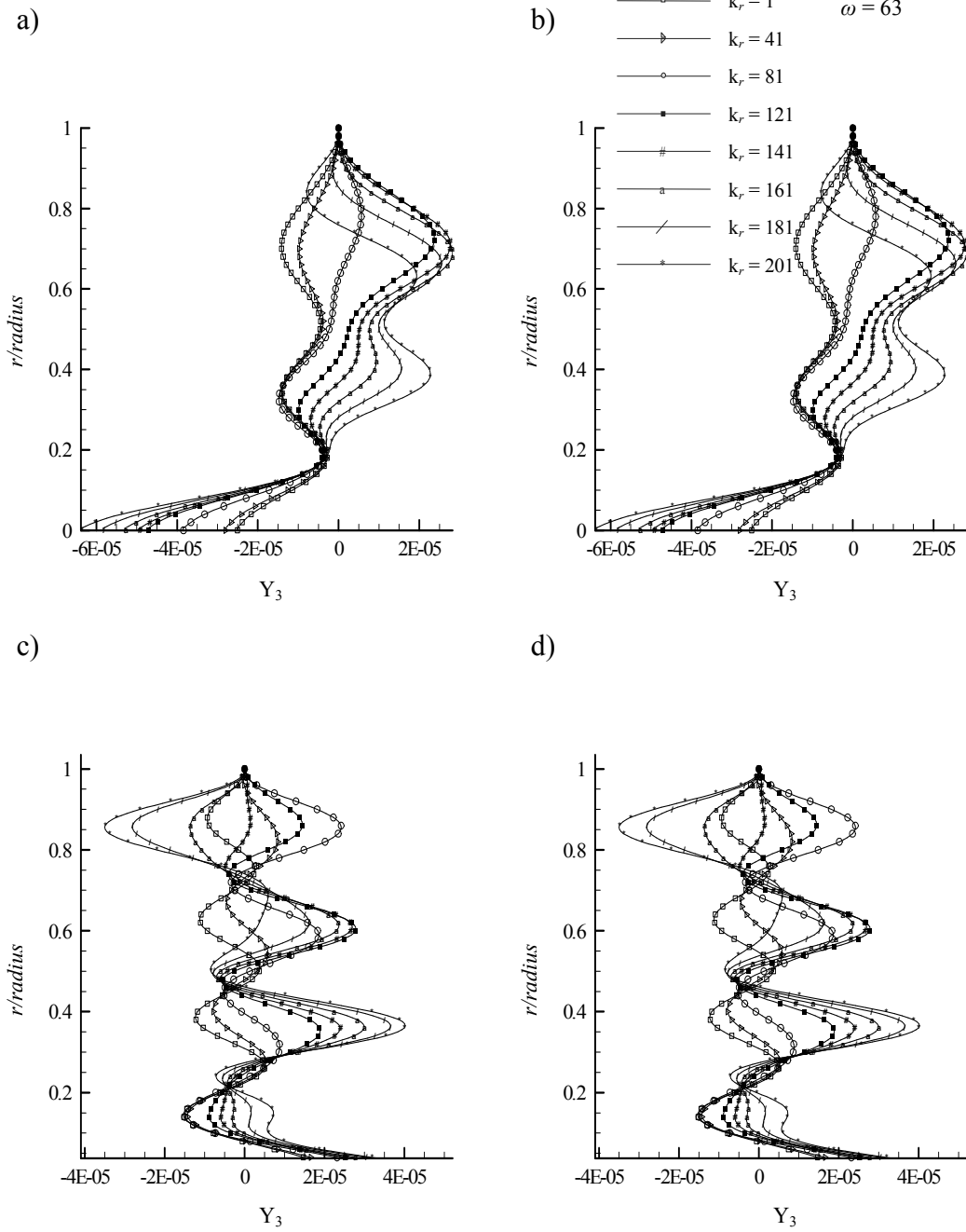
Şekil 3.19’da dalga sayısı 1 ve 41 için genlik fonksiyonların neredeyse sabit değerde kaldığı görölmektedir. Dalga sayısı arttıkça genliği gittikçe artan bir dalga yapısı oluştuğu gözlemlenmektedir.



**Şekil 3.19**  $p'$  genlik fonksiyonunun  $\omega = 1$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi a) Laminer, dögüsüz akış. b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Aynı modlar  $\omega=63$  için değişen  $k_r$  değerlerinde tekrar sunulmuştur. Şekil 3.20’de gösterilen  $u'_z$  genlik fonksiyonunun laminer durumda küçük dalga sayıları ( $k_r=1,41$  ve  $81$ ) için değişim gösterdiği, maksimum değerine yaklaşık  $r^*=0.58$ ’de ulaştığı, daha büyük dalga sayıları için sıfır değerinde kaldığı gözlemlenmektedir. Çalkantılı durumda ise laminer yapıdan çok farklı bir yapı görülmektedir. Dalga sayısı arttıkça tüm genliklerin arttığı ve genliklerin merkezden duvara kadar her sabit kaldığı,

dolayısıyla çalkantının enerjisinin çalkantılı durum için radyal yönde düzgün dağılımlı bir yapı sergilediği söylenebilir.

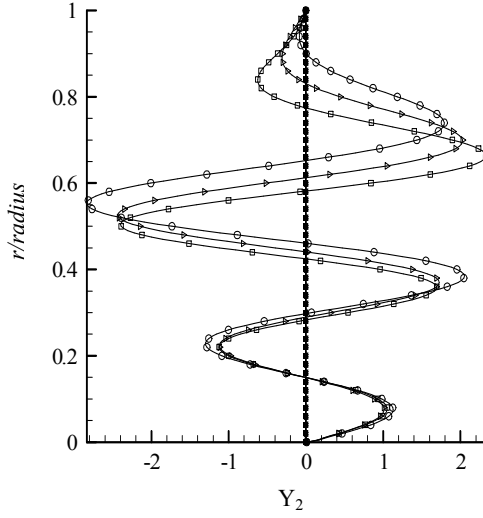


**Şekil 3.20**  $u'_z$  genlik fonksiyonunun  $\omega = 63$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi a) Laminer, döngüsüz akış. b) Laminer, döngüsel akış c) Çalkantılı, döngüsüz akış d) Çalkantılı, döngüsel akış.

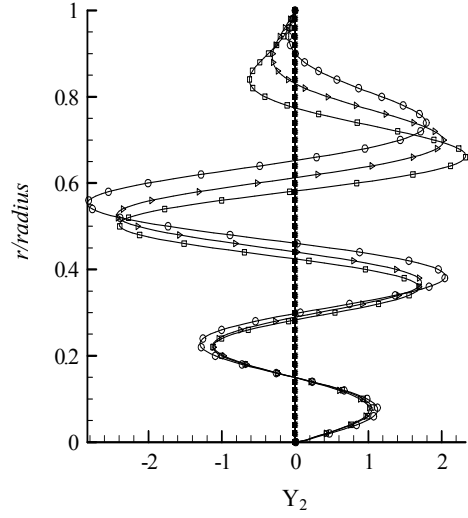
Şekil 3.21’de ise  $u'_\phi$  genlik fonksiyonunun  $u'_z$  de olduğu gibi laminer durum için yine küçük dalga sayılarında ( $k_r=1,41$  ve  $81$ ) değişim gösterdiği, maksimumuna yaklaşık  $r^*=0.58$ ’de ulaştığı, daha büyük dalga sayılarında ise genlik fonksiyonun değerinin sıfır kaldığı görülmektedir. Çalkantılı durumda ise yine çok farklı bir yapı ile

karşılaşılmaktadır. Çalkantılı yapıda dalga sayıları arttıkça genlikler küçük de olsa artma eğilimindedirler. Burada en büyük genlik duvara yakın bölgede yaklaşık  $r^*=0.06$  civarında oluşmaktadır.

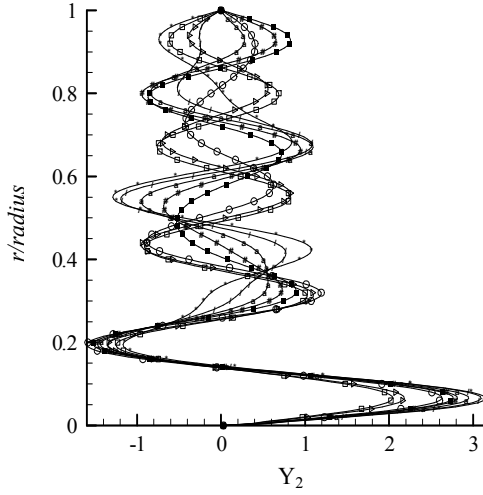
a)



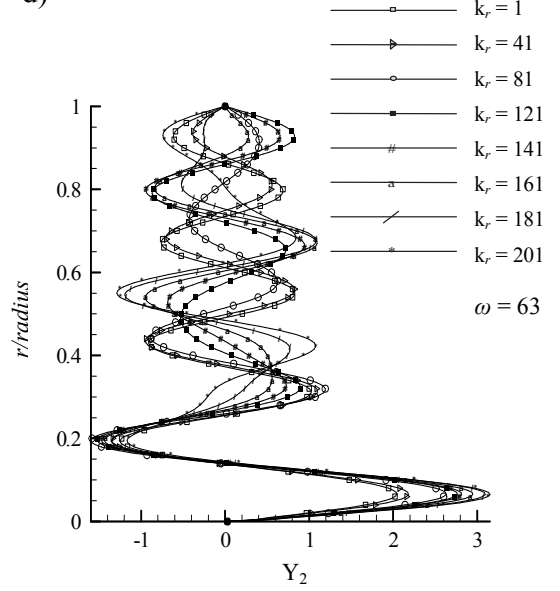
b)



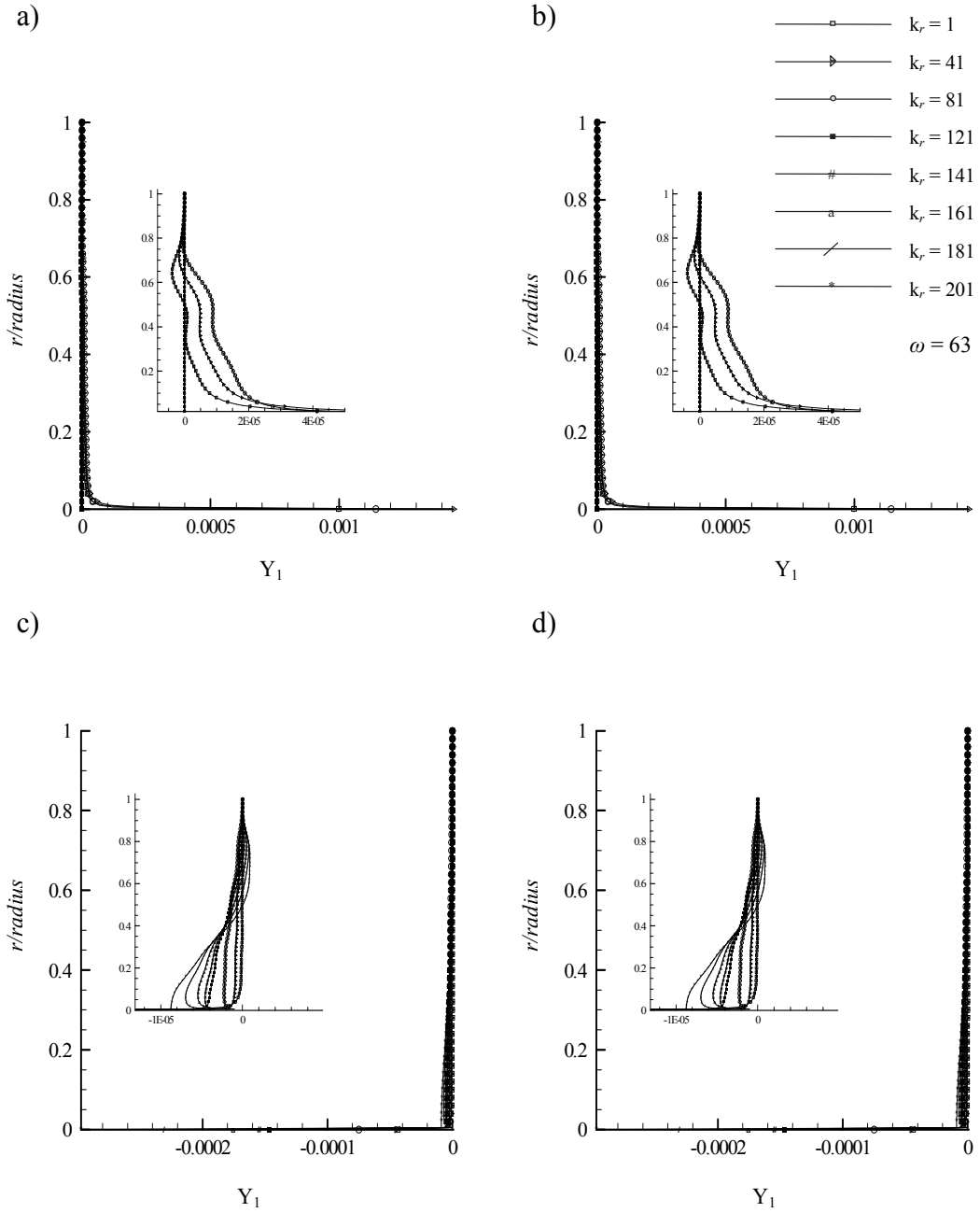
c)



d)



**Şekil 3.21**  $u_\phi'$  genlik fonksiyonunun,  $\omega = 63$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi. a) Laminer, döngüsüz akış. b) Laminer, döngüsel akış c) Çalkantılı, döngüsüz akış d) Çalkantılı, döngüsel akış.

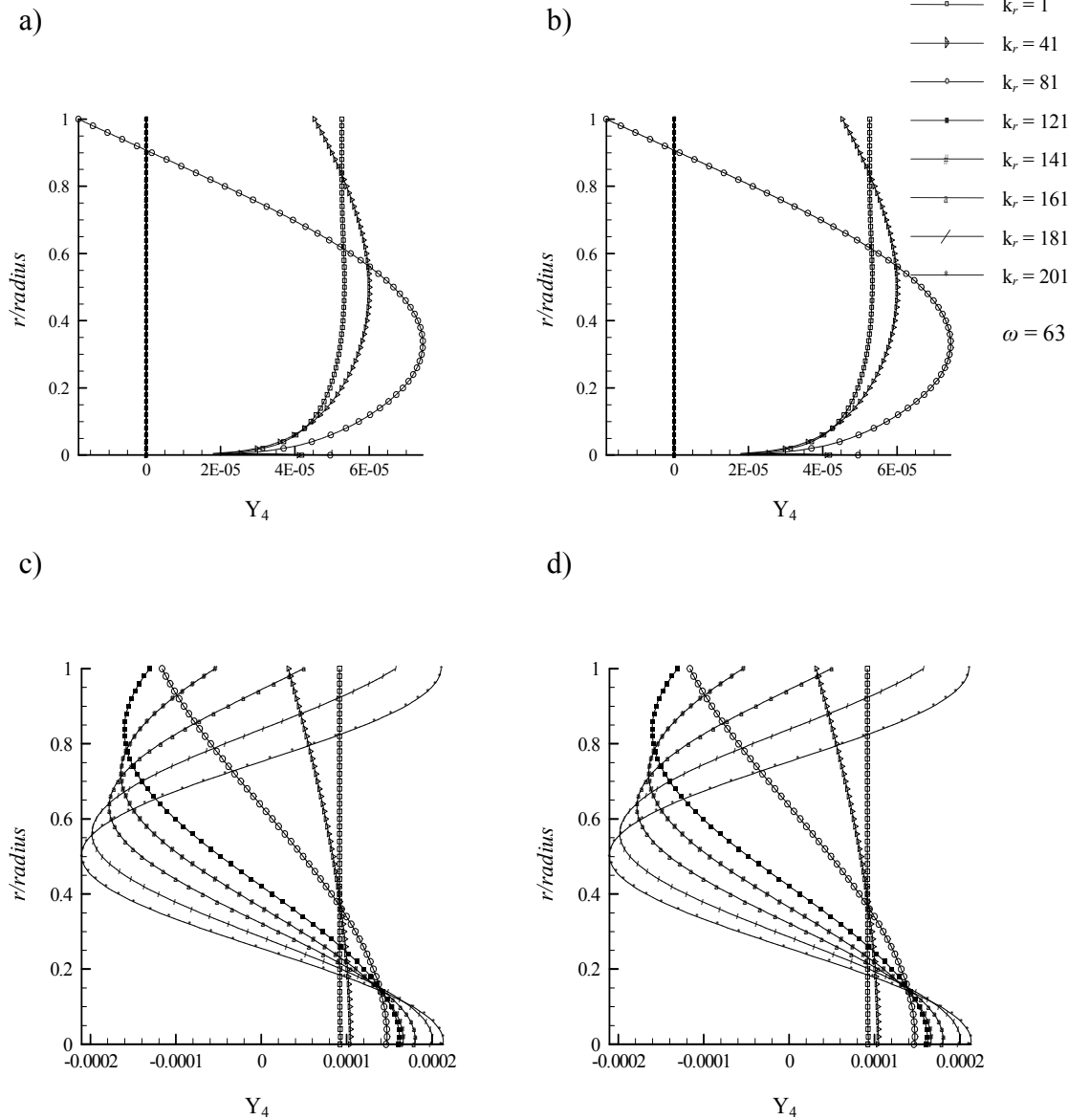


**Şekil 3.22**  $u'_r$  genlik fonksiyonunun  $\omega = 63$  frekansı için dalga sayısı ile değişimi. (Küçük grafikler yakınlştırılmış grafiklerdir.). a) Laminer, dögüsüz akış b) Laminer, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

Şekil 3.22’de laminer durum için küçük dalga sayılarında ( $k_r=1,41$  ve  $81$ ), radyal yöndeki model fonksiyonlara ait değişimin yalnızca merkeze yakın bölgede dalga sayısı ile bir değişim gösterdiği merkezden uzaklaştıkça bu değişimin hızla kaybolduğu gözlemlenmektedir. Daha yüksek dalga boyu sayıları içinse genlik fonksiyonun değeri sıfır kalmaktadır. Çalkantılı durumda ise tüm dalga sayıları için genlik fonksiyonun değerleri sıfıra sönümlenme eğilimindedirler.



Şekil 3.23’de gösterilen basınç  $p'$  genlik fonksiyonlarının değerleri laminar durum için ve  $k_r=1,41$  ve 81 dalga sayıları için  $r^*=0.03$ ’e kadar önm artmakta sonra azalmaktadır. Daha büyük dalga sayıları için ise sıfıra yakın değeri korumaktadır. Çalkantılı durumda ise önce  $r^*=0.05$  değeri kadar küçük bir miktar artmakta, daha sonra  $r^*=0.05$  değeri kadar azalmakta ve sonra tekrar artmaktadır. Burada küçük dalga sayıları ( $k_r=1,41$  ve 81) için model fonksiyonun değeriindeki değışim oldukça azdır.



Şekil 3.23  $p'$  genlik fonksiyonunun,  $\omega = 63$  frekansı için dalga sayısı ile değışimi a) Laminar, dögüsüz akış. b) Laminar, dögüsel akış c) Çalkantılı, dögüsüz akış d) Çalkantılı, dögüsel akış.

#### 4 YORUMLAR

Laminer ve çalkantılı ortalama akış profillerine göre yapılan hesaplamalar karşılaştırıldığında çalkantılı akış profilinin özellikle yüksek dalga sayılarında radyal yönde ciddi düzensizlikler içeren kararsızlıkları tetikleyebileceği gösterilmiştir. Bu nedenle çalkantılı ortalama akış hız profili kullanılarak üretilen dinamik modların büyük yapılara dayanılarak yapılan sayısal benzetimler (LES) veya doğrudan hesaplama yöntemlerinde (DNS) stokastik giriş koşulları oluşturmada daha uygun olacağı kanısına varılmıştır. Bu şekilde elde edilen giriş koşullarında zaman-uzay bağlantısının doğru bir şekilde korunacağı açıktır.

## KAYNAKÇA

- [1] **Sclichting, H.** 1955. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York.
- [2] **Rosenhead, L.** 1963. *Laminar Boundary Layers*. Oxford Press, Clarendon.
- [3] **Lin, C. C.** 1966. *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] **Lund, T., Wu, X. ve Squires, D.** 1998. Generation of turbulent inflow data for spatially developing boundary layer simulations, *Journal of Computational Physics*, **140**, 233-258.
- [5] **Sagaut, P.** 2002. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, Springer, Heidelberg.
- [6] **Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. ve Cabot, W. H.** 1991. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, **3** (7).
- [7] **Klein, M., Sadiki, A. ve Janicka, J.** 2003. A Digital Filter Based Generation of Inflow Data for Spatially Developing Direct Numerical or Large Eddy Simulations, *Journal of Computational Physics*, **186**, 652-665.
- [8] **Drazin, P. G. ve Reid, W. H.** 1981. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] **Wesoky, Howaral L.** 1967. Boundary Layer Measurements in Accelerated Flows Near Mach 1. NASA TN D-3862
- [10] **Özdemir, İ.B.** 1991. *Impingement of single and two phase jets on unheated and heated flat plates*, PhD Thesis, Imperial College of Science Technology and Medicine.
- [11] **Press, W.H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. ve Vetterling, W.T.** 1992. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, (FORTRAN version), Cambridge University Press, Cambridge
- [12] **Özdemir, İ.B.** 1996. *Hydrodynamic Stability*, Course notes, School of Mechanical Engineering, ITU.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Atilla Altıntaş 1979 yılında Sakarya’da doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini sırasıyla Hendek Cumhuriyet İlkokulu ve Adapazarı Atatürk Lisesi’nde tamamladıktan sonra 1998 yılında Beykent Üniversitesi Matematik ve Bilgisayar bölümüne girmeye hak kazanmıştır. 2003 yazında mezun olmuş ve aynı sene güz döneminde İstanbul Teknik Üniversitesi, Sistem Dinamiği ve Kontrol yüksek lisans programına kabul edilmiştir.