

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR İLE ROBOTLARDA TERS KİNEMATİK
PROBLEM ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ceren AKCAN

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekatronik Mühendisliği Programı

OCAK 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR İLE ROBOTLARDA TERS KİNEMATİK
PROBLEM ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ceren AKCAN
(518101051)**

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekatronik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hakan TEMELTAŞ

OCAK 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 518101051 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ceren AKCAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR İLE ROBOTLARDA TERS KİNEMATİK PROBLEM ÇÖZÜMÜ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Hakan TEMELTAŞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Murat S. YEŞİLOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Aydemir ARISOY
Hava Harp Okulu

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2013**
Savunma Tarihi : **22 Ocak 2014**

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, fikirleriyle bakış açımı genişletip zenginleştiren ve tez çalışmam süresince sabırla desteğini sürdüren Prof. Dr. Hakan TEMELTAŞ hocama teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2013

Ceren AKCAN
(Mekatronik Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Kapsamı	1
1.2 Literatür.....	2
2. GEOMETRİK CEBİR	3
2.1 Amaç	3
2.2 Geometrik Cebrin Tarihçesi	3
2.3 Geometrik Cebrin Elemanları	3
2.4 Geometrik Cebrin İşlemleri.....	4
2.4.1 Dış çarpım ve paralellik	4
2.4.1.1 Bivektörler.....	5
2.4.1.2 Trivektörler	6
2.4.2 İç çarpım ve diklik	7
2.4.3 Geometrik çarpım ve dualite.....	8
2.5 Geometrik Cebrin Özellikleri.....	11
2.5.1 İz düşüm ve rejeksiyon.....	11
2.5.2 Yansıma.....	12
2.5.3 Kesişme	12
2.6 Dönme İşlemleri.....	13
2.6.1 Kuaternionlar ile dönme işlemleri.....	13
2.6.2 Geometrik cebirde iki boyutta dönme.....	15
2.6.3 Geometrik cebirde üç boyutta dönme	16
3. KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR.....	17
3.1 İki Temel Vektör	17
3.2 Konformal Geometrik Cebirde Vektörler	17
3.2.1 Küre.....	18
3.2.2 Nokta	18
3.2.3 Düzlem	19
3.3 Konformal Geometrik Cebirde Bivektörler	19
3.3.1 Çember	20
3.3.2 Çizgi	20
3.4 Konformal Geometrik Cebirde Dual Vektörler	20
3.5 Mesafeler.....	21
3.5.1 Noktalar arasında mesafeler	22
3.5.2 Noktalar ve düzlemler arasındaki mesafeler	23
3.5.3 Bir noktanın küreye göre konumunun belirlenmesi.....	23

3.6	Kesişimler.....	24
3.6.1	İki kürenin kesişimi.....	24
3.6.2	Bir doğru ve kürenin kesişimi	25
3.6.3	Bir doğru ve düzlemin kesişimi	25
3.7	Dönme ve Öteleme.....	25
3.7.1	Dönme	25
3.7.2	Öteleme	26
3.7.3	Katı cisim hareketi	26
4.	TERS KİNEMATİK PROBLEMİ	27
4.1	Robotun Teknik Özellikleri ve Çizimi	27
4.2	Konformal Geometrik Cebir ile Ters Kinematik Çözüm.....	28
5.	SONUÇ.....	39
	KAYNAKLAR.....	41
	ÖZGEÇMİŞ.....	43

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 : 3-Boyutlu Euclidean uzayının kanatları.....	4
Çizelge 3.1 : Konformal cebirde fazladan temel iki vektörün anlamları.....	18
Çizelge 3.2 : Boş uzayın iç ve dış çarpımına göre obje tanımları.....	21
Çizelge 4.1 : KR6 R 900 robotunun uzunluları.....	28

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : 2-Kanat e_1^2 (İki temel vektör tarafından genişletilmiş).	4
Şekil 2.2 : Bivektör ve bileşenleri.	5
Şekil 2.3 : Trivektör ve bileşenleri.	6
Şekil 2.4 : Bir vektör ile bivektörün iç çarpımı.	7
Şekil 2.5 : İki bivektör-düzlem.	9
Şekil 2.6 : İki bivektör ve geometrik çarpımları.	9
Şekil 2.7 : A düzlemi ve dualitesi.	11
Şekil 2.8 : “v” vektörü, projeksiyonu ve rejeksiyonu.	11
Şekil 2.9 : “v” vektörü ve A düzlemine göre yansıması.	12
Şekil 2.10 : İki objenin kesişimi.	12
Şekil 2.11 : 2 boyutta örnek döndürülmüş bir vektör.	15
Şekil 2.12 : Üç boyutta dönme örneği.	16
Şekil 3.1 : Örnek bir S küresi.	18
Şekil 3.2 : Örnek düzlem gösterimi.	19
Şekil 3.3 : Üç noktadan oluşan örnek çember gösterimi.	20
Şekil 3.4 : Bir çizginin gösterilişi.	20
Şekil 3.5 : Bir Kürenin 4 noktanın dış çarpımı olarak gösterilmesi.	21
Şekil 3.6 : İki kürenin kesişimi.	24
Şekil 3.7 : Bir küre ve doğrunun kesişimi.	25
Şekil 3.8 : Bir düzlem ile doğrunun kesişimi.	25
Şekil 4.1 : KR6 R 900 robotunun dönme eksenleri ve şeması[12].	27
Şekil 4.2 : Robotun CLUCALC programı ile gösterimi.	28
Şekil 4.3 : Robotun gitmesi istenilen nokta ve yönelimi.	28
Şekil 4.4 : Robotun çalışma düzlemi.	29
Şekil 4.5 : Çalışma alanına uygun yönelim doğrusu.	29
Şekil 4.6 : Robotun üzerinde ikinci eklem gösterilmesi.	30
Şekil 4.7 : Robotun beşinci eklemının bulunması.	31
Şekil 4.8 : Dördüncü eklem için çizilen küre.	31
Şekil 4.9 : Küre ile doğrunun kesişimi.	32
Şekil 4.10 : Dördüncü eklemın konumu.	32
Şekil 4.11 : Robotun genel çizimi.	33
Şekil 4.12 : Üçüncü eklem için çizilen küreler.	33
Şekil 4.13 : İki kürenin kesişimi.	34
Şekil 4.14 : Çalışma alanı ile dairenin kesişimi.	34
Şekil 4.15 : Robotun genel çizimi.	35
Şekil 4.16 : Robotun ilk eklemının başlangıç konumu.	35
Şekil 4.17 : Birinci eklemın açısı.	36
Şekil 4.18 : İkinci eklemın açısı.	36
Şekil 4.19 : Üçüncü eklemın bulunması.	37
Şekil 4.20 : Dördüncü eklemın açısının bulunması.	38
Şekil 4.21 : Robotun sıfır konumu.	38

Şekil 4.22 : Robotun istenilen konumu.....	38
---	----

KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR İLE ROBOTLARDA TERS KİNEMATİK PROBLEM ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Robotik çalışmalarında ters kinematik çözümleri için kullanılan yöntemler ve bu yöntemlerin geliştirilmesi geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Robotlar yaygın olarak fabrikalarda, tıpta, insanlar için zararlı olan işlemlerin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır. Robotların bu geniş çalışma alanında ters kinematik probleminin çözümü ve bu çözümlerin hassasiyeti büyük önem taşımaktadır. Robotik çalışmalarda kullanılan ters kinematik yöntemleri ve çözümleri ağır matematik işlemleri içermekte ve detaylı bir görsel sonuç sunamamaktadır. Bilgisayar grafiklerinin gelişmesi ile robotikte ters kinematik problem çözümlerinin görsel olarak bulunması fikri gelişmiştir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle bilgisayar üzerine uygulanabilecek görsel bir matematiksel dil kullanılmalıdır.

Matematikte geometrik bir cebir geliştirme çalışmaları milattan önce üçüncü yüzyıla kadar dayanmaktadır. Öklid' in "Elementler" adlı çalışması geometrik alanda bilinen ilk çalışmadır. 19. yüzyılda Hermann Grassmann dış cebir fikrini tanıtmıştır. Aynı yüzyılın sonlarına doğru dış cebir ile kuaternion cebri birleştirilerek Clifford cebri tanıtılmıştır. 20. yüzyılda ise bu tezde tanıtılan geometrik cebir ve konformal geometrik cebir tanıtılmıştır. 21. yüzyılın başında bilgisayarların gelişmesi ile geometrik cebir bilgisayar grafikleri alanına dahil olmuştur ve bugüne kadar geometrik cebri bilgisayar programları ile kullanmak ve uygulama geliştirmek için kütüphaneler ve programlar geliştirilmiş ve geliştirilmeye devam edilmektedir. Bu tezde Dr. Christian Perwass tarafından geliştirilen CluViz adında bir program kullanılmıştır. CluViz programı hem geometrik cebir hem de konformal geometrik cebir için görsel ve matematiksel sonuçlar elde edebilmektedir.

Geometrik cebir, obje ve operatörleri tanımlamak için vektörler ve matrislerden daha fazla matematiksel işleme izin veren bir matematiksel dildir. Geometrik cebir; lineer cebir, vektör cebri, kuaternionlar, karmaşık sayılar gibi matematiksel dilleri birleştirerek kullanma imkanı sunmaktadır. Bu kadar fazla cebri ve matematiksel dili içermesine rağmen görsel olduğu için basit ve kolay anlaşılmaktadır. Geometrik cebirde içerdiği bir çok matematik dilinden dolayı yeni matematiksel işlemler tanıtılmıştır. Bunlar iç, dış ve geometrik çarpım isimleri verilen işlemlerdir. İç çarpım, vektörlere uygulanan nokta çarpım işlemi ile aynıdır. Dış çarpım, bu cebir için tanımlanmış bir işlemdir ve çarpılan iki objenin arasındaki alanı kapsamaktadır. Geometrik çarpım ise iç ve dış çarpımın kombinasyonudur. Bu işlemler, cebirde doğrudan objelere uygulanabilmektedir. Geometrik cebirde bir objenin geometrik çarpıma göre tersi alınabilmektedir yani bölme işlemi yapılabilir. Bölme işlemi de, geometrik cebirde dualite tanımını meydana getirmektedir. Geometrik objelerin dualitesi, objenin üç boyutlu birim dereceye ($e_1^1 e_2^2 e_3^3$) bölünmesi ile bulunabilmektedir. Bu işlemler, objelere sandviç operatörü uygulanması ile cebirde meydana getirilen yeni özelliklerde bulunmaktadır. Sandviç operatörü bir objenin bir obje ya da operatör ile önce soldan çarpılması daha sonra ise ikinci obje ya da

operatörün tersi ile sağdan çarpılması anlamına gelmektedir. Sandviç operatörü kuaternionlar cebirindeki vektörler arası dönme için kullanılmaktadır, bu cebire de kuaternion cebirinden gelmiştir. Bu cebirdeki yeni özellikler, objelerin iz düşümü, rejeksiyonu, yansıması ve en önemlisi ise dönme özelliğidir. Kuaternion cebirinde dönme özelliği sadece vektörler üzerine uygulanabilirken, geometrik cebirde tüm objelere uygulabilmektedir. Geometrik cebirde düzlem elemanı olarak kullanılan $(e_1 \wedge e_2)$ ile kuaternion cebirinde sanal uzayı tanımlayan i, j, k elemanları özellik olarak birbirine benzemektedirler. Bu benzerlik kullanılarak geometrik cebirde üç boyutlu dönme tanımlanmıştır. Geometrik cebirde dönme işlemi için, dönmenin eksenini ve dönme miktarını barındıran dönme operatörü tanımlanmıştır. Dönme işlemi, döndürülecek obje ve dönme operatörü ile sandviç işlemi yapılarak meydana gelmektedir.

Konformal geometrik cebir, geometrik cebirin üç boyuttan beş boyuta genişletilmiş halidir. Konformal geometrik cebirde üç boyutlu uzaya ilave olarak uzayda orijin konumunu ve sonsuzu ifade eden iki temel vektör daha eklenmiştir. Konformal geometrik cebirde doğrular, düzlemler, çemberler ve küreler, bu iki temel vektör sayesinde vektör olarak tanımlanabilmektedir. Tüm geometrik objeleri aynı denklem ile ifade edebilmekten dolayı konformal geometrik cebirde objeler arası işlem yapma, objeler arası farklılıkları ve benzerlikleri bulma kabiliyeti gelişmiştir. Objeler arası mesafeler geometrik cebirde geliştirilen iç çarpım işlemi ile bulunabilmektedir. Ayrıca objelerin kesişim bölgeleri dış çarpım işlemi ile bulunabilmektedir. Konformal geometrik cebirde dualite işlemi, objelerin tanımlanabileceği farklı bir denklem meydana getirmektedir. Bir küre, merkezinin bulunduğu konumu ve yarıçap bilgisini içeren denklem ile ifade edilebileceği gibi aynı zamanda dört noktanın kesişimi veren denklem ile de ifade edilebilmektedir. Konformal geometrik cebirde objelerin herhangi bir vektör etrafında dönme işlemleri ya da herhangi bir vektör boyunca öteleme işlemleri yapılabilmektedir. Ayrıca dönme operatörü ve öteleme operatörlerinin geometrik çarpımları ile objelere tek bir işlemle hem dönme hem öteleme işlemi yani motor işlemi kolaylıkla uygulanabilmektedir.

Bu tezde konformal geometrik cebir ile robotlardaki ters kinematik probleminin çözülmesi konu alınmıştır. Ters kinematik çözüm için jacobî ters kinematik, geometrik ters kinematik gibi çözümler literatürde bulunmaktadır. Ayrıca literatürde robotlarda ters kinematik problemi çözüm üzerine konformal geometrik cebir ile de çözümler bulunmaktadır. Bu çözümlerin bir kısmı daha hızlı çözüme ulaşmak amacıyla yeni algoritmalar ile test edilmiştir. Tezde uygulama için sanayide yaygın kullanılan bir robot seçilmiş ve bu robot CluViz programı sayesinde görsel olarak bilgisayar programına aktarılmıştır. Seçilen robotun beş adet dönel eklemi bulunmaktadır. Robotlarda ters kinematik probleminin tanımı bir robotun istenilen konuma, istenilen bir yönelimle gitmesinin çözümü ya da çözümlerdir. Bu problem tanımıyla tezde kullanılan robota, robotun mekanik özelliklerine ve çalışma uzayına göre bir istenilen son konum ve yönelim verilmiştir. Bu istekler doğrultusunda uzayda robotun eklemlerinin bulunması gereken konum ya da konum olasılıkları hesaplanmıştır. Hesaplanma sırasında robotun eklemleri üzerinde geometrik objeler oluşturularak, istenilen noktadan robotun tabanına doğru objeler arası işlemler ile robotun eklemlerinin konumları bulunmuştur. Eklemler konumları bulunduktan sonra eklemlerin üzerlerine robot kolları boyunca yeni objeler meydana getirilerek iç çarpım işlemi yardımıyla objeler arası açılar yani robotun eklemler açılıarı bulunmuştur. Konformal uzayda hem robotun hem de çalışma uzayının görüntülenebilmesi ile robotun ters kinematik çözüm olasılıkları görsel matematiksel olarak sonuca kavuşturulmuştur.

SOLUTION OF INVERSE KINEMATICS PROBLEM IN ROBOTICS USING CONFORMAL GEOMETRIC ALGEBRA

SUMMARY

Methods used to solve inverse kinematics problems and development of these methods constitute a research workspace in robotics area. Robots are used extensively in factories, medical applications and processes which can be hazardous for people health and life. Hence solution of inverse kinematics and precision of this solution is very important in the view of reliability. Also new designed robots such as modular or parallel robots, have been widespreaded in endustrial area because of their design and flexibility. With all these developments, inverse kinematics solutions is common and important study subject in robotics litterateur. Inverse kinematic methods used in robotic area include heavy methematical processes and can not present visual solution in detail. Along with evaluation of computer graphics, an idea about obtaining inverse kinematics solution visually had arised. In the direction of this idea, a mathematical language which can be implement over computer has been a necessity.

Geometrical algebra has been reaserching as from B.C. third century. The study called “Elements” is the first known study about geometry in the history. In 19th century, the idea of exterior algebra has been introduced by Hermann Grassmann. Towards the end of nineteenth century, Clifford algebra combined the external algebra and quaternion was introduced by William Kingdon Clifford. Geometric algebra and conformal geometric algebra which are presented in this thesis, introduced in the 20th century by David Hestenes.

Geometric algebra and conformal geometric algebra get involved in computer graphics area in the conference of computer graphics in 2001. Along with evaluation of the computer technology in the beginning of the 21th century, geometric algebra and conformal geometric algebra started to use more frequently and until today many programs and libraries have been developed and still are developing by researchers. The library called “Clifford” is developed for program called Maple. This library can be used for geometric algebra and conformal geometric algebra. Unfortunately, this library has not visual solution for both algebras. The library called “Gable” is developed for program called “Matlab”. This library has visual solution. On the other hand, this library has not supported for conformal geometric algebra yet. In this study, a program called as CluViz developed by Dr. Christian Perwass has been used. CluViz can obtain both mathematical and visual solutions for geometric algebra and conformal geometric algebra. At the same time, the conformal and geometric spaces used in visual solutions have been introduced, can be served visually to the user.

Geometric algebra is a mathematical language offering more mathematical procesess with respect to vectors and matrices to define objects and operators. Geometric algebra consist linear algebra, vector algebra, quaternions and complex numbers. Although consisting of many mathematical languages, geometric algebra is an easily

understandable language because of being visually. Geometric algebra consists of “blades” which are the basic elements of this algebra. Blades have dimensions such as one-blade, two-blade and etcetera. One-blades are three base vectors. And two-blades are spanned by two base vectors. Renewed operations has been introduced in geometric algebra owing to consist many mathematical language. These operations are inner, outer and geometric operations. The inner product is the same with dot product operator for vector algebra. The outer product is an operator relatively new described for this algebra. The outer product’s solution embraced the area between two objects which are applied by outer operator. The geometric product is a combination of inner and outer products. These mathematical operations can be applied to objects directly. In geometric algebra, inner products makes objects lower degrees with respect to their dimensions. Also the inner product consists the knowledge of degree between two objects. Hence, it can be used as criteria for perpendicularity and it can be used to find degree between objects numerically. The outer product can be used as criteria for parallelism. The geometric product can be applied for all objects. Also in geometric algebra, the reverse of an objects can be found with respect to geometric product. This ability shows that divide operation between objects can be applied in geometric algebra. The divide operation causes a new description of an operation in geometric algebra which is “duality” operation. The duality of an object can be found by dividing the object by three degrees unit blade($e_1e_2e_3$). Duality operator’s meaning as visually is the objects which is describing the first object. For example the duality operator for a plane gives a line as a solution, in this case the line is perpendicular to the plane. Implementation new operations together with sandwich operation to objects added new attributes to geometric algebra. Sandwich operator means that multiplying an object with an object or operator from left side, then multiplying with inverse of second object or operator from right side. The sandwich operator used for rotations between vectors in quaternions, in this algebra the sandwich operator comes from quaternions. The new attributes in this algebra are projection, rejection, reflection and the most important one is rotation operation. The projection, reflection, rejection and rotation attributes can be applied to the objects or between objects with single operation in this algebra. Attribute of the rotation of geometric algebra comes from quaternion algebra. In quaternions the rotation can be applied on only vectors. The (e_1e_2) used as plane element in geometric algebra is likely to i, j, k defining imaginary space in quaternion. The square of plane elements in geometric algebra and the square of imaginary elements in quaternions are same, both results of them are minus one. Using this likelihood, 3-dimensional rotation has been defined in geometric algebra. In geometric algebra, a new operator is introduced for rotation process. This operator consists of rotation axis and degree of the rotation. The rotation process can be applied with sandwich operator between object which will be rotated and the rotation operator. In this algebra, the intersection area between objects can be found with applying the duality operator to the inner products of the objects.

Conformal geometric algebra is an expanded geometric algebra from three dimensions to five dimensions. There are two additional base vectors in conformal geometric algebra. One of these base vectors is created to describe origin point in conformal space. The other base vector is created to describe infinity. With these two base vectors; lines, planes, spheres, points and circles can be described with one single equation or intersect of objects in conformal geometric algebra. Along with describing objects via same equation, the finding intersecting of objects and distances between objects be simple calculations in conformal geometric algebra.

Finding distances between objects can be realized with inner product in one step and finding intersections of objects can be carried out with outer product in one step. The duality operator in conformal geometric algebra, bring about a new equation group to describe objects. A sphere can be introduced with an equation which consists the location of the sphere and the radius of the sphere. Also the sphere can be introduced by outer products of four conformal points on that sphere. Along with these two different definition of objects bring to existence two different definition of conformal space. These definitions are “the inner product of null space” and “the outer product of the null space”. In CluViz programme, the user can use both of them both mathematically and visually. For the transition between definitions or defining the object with the other definition, the user can use duality operator. In conformal geometric algebra, objects can be rotated about an arbitrary line or can be transformed through an arbitrary line. Besides with geometric product of rotation operator R and transformation operator T , an object can be rotated and translated with just one operation. With help of CluViz program, objects can be created in conformal space and whole conformal geometric operations can be implemented on whole object or one of its part.

In this thesis, the aim is finding solutions for inverse kinematics problems in robotics. There are some solutions in literature for inverse kinematics problem, such as inverse Jacobian kinematics and geometric inverse kinematics. Also there are some solutions for inverse kinematics with conformal geometric algebra. Some of these solutions are advanced for faster solution and they are tested by computer algorithms. In this study a robot used in industry is picked and robot's specifications are embedded in CluViz program visually. The robot has five rotational joints. The definition of inverse kinematics problem is solution or solutions of robot's joints' angles with specific desired point and orientation. With definition of inverse kinematics problem, in this study a desired point and orientation are given to program as inputs according to robot's mechanical constraints and work space. According to these inputs, the position of robot's joints or possible positions of robot's joints are calculated. During the calculations, some geometric objects are created on position of robot's joints. From desired point to the base of robot, the positions of robot's joints are calculated with operations of between objects. Some new geometric objects are created on robot's joints to calculate angles between objects or angles of joints. In conformal geometric algebra the solutions can be discovered visually and mathematically.

1. GİRİŞ

Robotik çalışmalarında ters kinematik çözümleri için kullanılan yöntemler ve bu yöntemlerin geliştirilmesi geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Robotlar yaygın olarak fabrikalarda, tıpta, insanlar için zararlı olan, kaynak ve kimyasal işlemler gibi işlemlerin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır. Bilgisayar grafiklerinin gelişmesi ile robotikte ters kinematik problem çözümlerinin görsel olarak bulunması fikri gelişmiştir. Bu tezde Dr. Christian Perwass tarafından geliştirilen CluViz adında bir program kullanılmıştır. CluViz programı hem geometrik cebir hem de konformal geometrik cebir için görsel ve matematiksel sonuçlar elde edebilmektedir.

Geometrik cebir, obje ve operatörleri tanımlamak için vektörler ve matrislerden daha fazla matematiksel işleme izin veren bir matematiksel dildir. Geometrik cebir; lineer cebir, vektör cebri, kuaternionlar, karmaşık sayılar gibi matematiksel dilleri birleştirerek kullanma imkanı sunmaktadır. Bu kadar fazla cebri ve matematiksel dili içermesine rağmen görsel olduğu için basit ve kolay anlaşılmaktadır. Geometrik cebir, bilgisayar grafikleri ve robotik üzerine çalışma imkanı sunmaktadır. Konformal geometrik cebir, geometrik cebirin üç boyuttan beş boyuta genişletilmiş halidir. Konformal geometrik cebirde doğrular, düzlemler, çemberler ve küreler, vektör olarak tanımlanabilmektedir. Konformal geometrik cebirde dönmeler ve öteleme işlemleri rotor ile tanımlanabilmektedir. Rotorlar herhangi bir objeye uygulanabilmektedir.

1.1 Tezin Kapsamı

Bu tezde konformal geometrik cebirin ile robotlardaki ters kinematik probleminin çözülmesi konu alınmıştır. Ters kinematik çözüm için jacobî ters kinematik, geometrik ters kinematik gibi çözümler literatürde bulunmaktadır. Bu tezde konformal geometrik cebirin objeler üzerinde dönme ve öteleme özelliklerinin ve objeler arası özelliklerinin faydalarıyla ters kinematik çözüm görsel olarak bulunmaktadır.

1.2 Literatür

Literatürde konformal geometrik cebir ile ters kinematik çözüm için örnekler bulunmaktadır. [1]'de gösterilen çalışmada konformal geometrik cebir genel olarak tanıtılmış ve iki farklı robot kolu, iki farklı bilgisayar programı ile ters kinematik çözümü yapılmıştır. Farklı programlar sonucu daha hızlı bulabilmek için denemiştir.

[2]'de gösterilmiş kaynakta bir robotun ters kinematik çözümü konformal geometrik cebir ile bulunmuş ve bilgisayar üzerinde konformal geometrik işlemlerin hızlı yapılması için optimize edilmiş kod Maple programı ile kullanılmıştır. Bu kaynaktaki robot altı eklemlili insan bacağı benzetimi bir robottur.

[3]'de gösterilmiş kaynakta ise farklı bir robotun ters kinematik çözümünü içermektedir. Bu çalışmada kullanılan beş eklemlili bir robot koludur.

[5], [6], [7], [8] ve [9] numaralı kaynaklarda robotların ters kinematik çözümlerine dair konformal geometrik cebir ile farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. [10] ve [11] nolu kaynaklarda ise konformal geometrik cebir için yazılan Clifford kütüphanesi ile CluCalc programının kullanımına ve matematiksel altyapılarına dair bilgilendirmeler bulunmaktadır.

2. GEOMETRİK CEBİR

2.1 Amaç

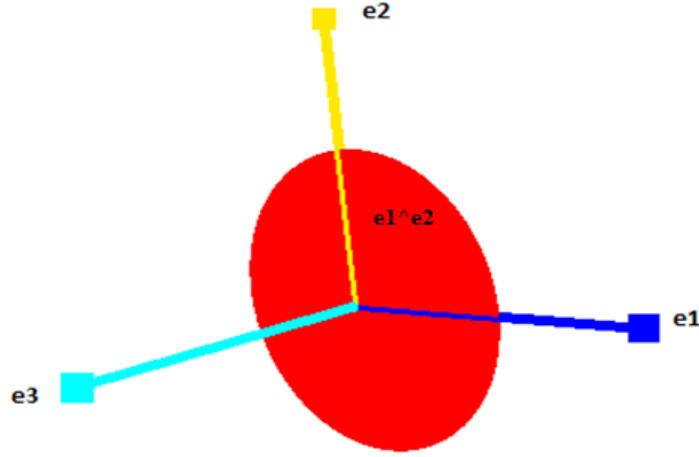
Geometrik cebir; lineer cebir, vektör cebri, kuaternionlar, karmaşık sayılar gibi matematiksel dilleri birleştirerek kullanma imkanı sunmaktadır. Geometrik cebirin mühendislikte, fizikte, görüntü işleme gibi konularda uygulamaları bulunmaktadır. Bu bölümde geometrik cebirin tarihçesi, elemanları, işlemleri ve diğer özellikler hakkında bilgi verilecektir.

2.2 Geometrik Cebirin Tarihçesi

Geometrik cebir, geometrik açıdan milattan önceki Öklid geometrisine dayanmaktadır. Ama bu tezde kullanılan hali 1844 yılına kadar geliştirilmemiştir. 1844 yılında Hermann Grassmann dış(exterior) geometrik cebir fikrini tanıtmıştır. 1878 yılında William Kingdon Clifford, Grassmann'ın tanıttığı dış cebri ve William Rowan Hamilton'ın kuaternionlarını araştırmıştır. Kuaternionlar belirli öteleme ve dönme işlemlerini açıklamaktadır. William Kingdon Clifford bu iki cebri birleştirerek yeni bir cebri tanıtmıştır. Bu cebirde Grassmann'ın dış işlemini biraz değiştirmiştir ve geometrik işlem olarak tanıtmıştır. 1960'lı yıllarda David Hestenes, Clifford cebirini geliştirerek geometrik cebri tanıtmıştır. Hestenes'ın geometrik cebri birçok bilim dalına uygulanmıştır.

2.3 Geometrik Cebirin Elemanları

Geometrik cebir “blade” adı verilen hesaplanabilir elemanlardan oluşur. “Blade” kelimesi teknik olarak pervane kanadı anlamına gelmektedir. Bu tezde “blade” terimi için kanat ifadesi kullanılmıştır. Üç boyutlu Euclidean uzayı derecelendirilmiş kanatları içerir. Bir skaler değer 0-kanat olur. 1-kanat üç temel vektördür (e_1, e_2, e_3). 2-kanat, iki temel vektör ile genişletilmiş Şekil 2.1'de gösterildiği gibi düzlem elemanlarıdır. 3-kanat ise üç temel vektör ile genişletilmiş ($e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$) üç boyutlu elemanlardır.



Şekil 2.1 : 2-Kanat $e1^e2$ (İki temel vektör tarafından genişletilmiş).

Çizelge 2.1’de 3-boyutlu Euclidean uzayında bulunan geometrik cebirin kanatlarının listesi verilmiştir.

Çizelge 2.1 : 3-Boyutlu Euclidean uzayının kanatları.

	Kanat	Derece	Kısaltma
1	1	0	1
2	$e1$	1	$e1$
3	$e2$	1	$e2$
4	$e3$	1	$e3$
5	$e2^e3$	2	$e23$
6	$e1^e2$	2	$e12$
7	$e1^e3$	2	$e13$
8	$e1^e2^e3$	3	I

2.4 Geometrik Cebirin İşlemleri

Geometrik cebirin üç işlemi vardır;

- Dış çarpım,
- İç çarpım,
- Geometrik çarpım.

2.4.1 Dış çarpım ve paralellik

Geometrik cebirde dış çarpımın üç temel özelliği vardır. Bunlardan ilki ters simetri özelliğidir denklem (2.1)’de gösterilmiştir. İkinci özelliği dağılma özelliğidir ve denklem (2.2)’de gösterilmiştir. Son özelliği ise birleşme özelliğidir ve denklem (2.3)’de gösterilmiştir.

$$a \wedge b = -(b \wedge a) \quad (2.1)$$

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c \quad (2.2)$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \quad (2.3)$$

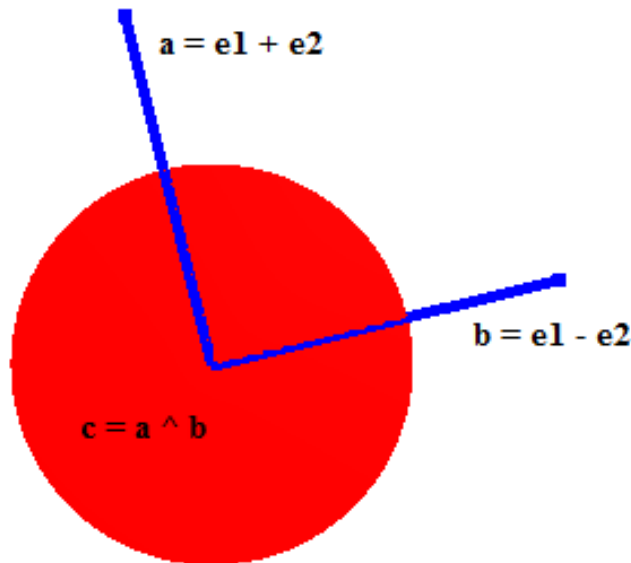
Bu özelliklere göre bir vektörün kendisiyle dış çarpımı sıfırdır ve denklem (2.4)'de gösterilmiştir.

$$a \wedge a = -(a \wedge a) = 0 \quad (2.4)$$

Bir vektör kendisine paraleldir bundan dolayı iki paralel vektörün dış çarpımı sıfıra eşittir dolayısıyla dış çarpım geometrik cebirde paralellik ölçütü olarak kullanılabilir.

2.4.1.1 Bivektörler

Bivektörler iki vektörden meydana gelen geometrik objelerdir. Bir bivektör iki vektörün dış çarpımı ile elde edilen düzlem elemanlarıdır. Şekil 2.2'de örnek bir bivektör ve bileşenleri verilmiştir.



Şekil 2.2 : Bivektör ve bileşenleri.

Şekil 2.2' de görüldüğü gibi iki vektörün dış çarpımı düzlem elemanını yani bir bivektörü oluşturur. Matematiksel olarak aynı işlemi yapılırsa; denklem (2.5) elde edilir. Denklem (2.5)'de çarpma işlemini açılırsa denklem (2.6) elde edilir.

$$c = a \wedge b = (e_1 + e_2) \wedge (e_1 - e_2) \quad (2.5)$$

$$a \wedge b = e_1 \wedge e_1 - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - e_2 \wedge e_2 \quad (2.6)$$

Dış çarpımda bir vektörün kendisi ile dış çarpımı sıfır olmasına kuralına göre denklemdeki sadeleştirmeler gerçekleştirilirse denklem (2.7)'da gösterildiği gibi sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{0} - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} \\ a \wedge b &= 0 - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

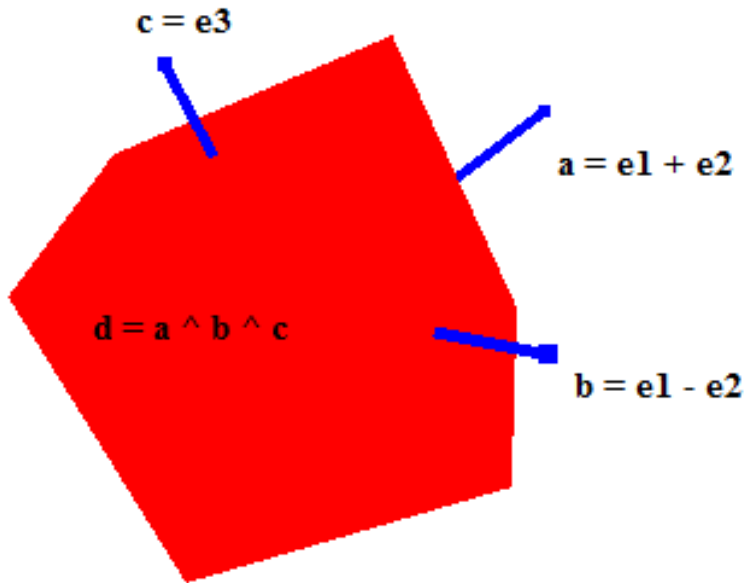
Dış çarpımın anti-simetri özelliğine göre denklem yeniden sadeleştirilirse denklem (2.8) elde edilir. Denklem (2.8) elde edilen bivektörün tersi; denklem (2.9)'da gösterildiği bulunur.

$$a \wedge b = -2 * (e_1 \wedge e_2) = -2 e_{12} \quad (2.8)$$

$$(\widetilde{a \wedge b}) = \tilde{c} = 2 * (e_1 \wedge e_2) = 2 e_{12} \quad (2.9)$$

2.4.1.2 Trivektörler

Bir trivektör, üç vektörün dış çarpımı olan üç boyutlu elemandır. Şekil 2.3'de örneği gösterilmiştir.



Şekil 2.3 : Trivektör ve bileşenleri.

Şekil 2.3'de görülen “d” trivektörünü matematiksel olarak hesaplanırsa denklem (2.10) elde edilir.

$$\begin{aligned}
d &= a \wedge b \wedge c = (e_1 + e_2) \wedge (e_1 - e_2) \wedge e_3 \\
&= \underbrace{(e_1 \wedge e_1)}_0 - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 - \underbrace{(e_2 \wedge e_2)}_0 \wedge e_3 \\
&= (-e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1) \wedge e_3 \\
&= (-e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_2) \wedge e_3 = \\
&\quad (-2(e_1 \wedge e_2)) \wedge e_3 = \\
&\quad -2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = -2I
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Denklemden görüldüğü üzere a , b ve c vektörlerini dış çarpımı üç temel vektörün dış çarpımına eşit olur, “ I ” ile gösterilir ve sahte skaler (“pseudoscalar”) olarak adlandırılır.

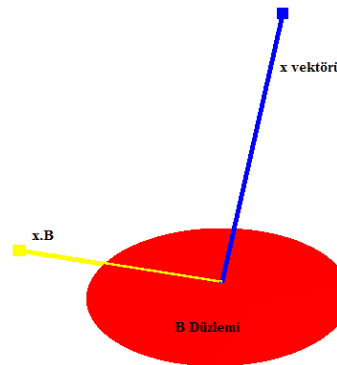
2.4.2 İç çarpım ve diklik

Geometrik cebir iç çarpım olarak adlandırılan bir işleme sahiptir ve “ $A \cdot B$ ” ile gösterilir. Euclidean uzayında iki vektörün iç çarpımı vektörlerdeki skaler çarpımla aynıdır. Vektörlerin skaler çarpımları aşağıdaki denklem (2.11) ile ifade edilir.

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\theta) \tag{2.11}$$

Denklemden “theta” iki vektör arasındaki açıyı ifade etmektedir. Bu denklemden de anlaşılacağı üzere iç çarpımı vektörlerin uzunluklarını bulmak ya da iki vektör arasındaki açıyı bulmak için kullanılabilir. İç çarpım aynı zamanda dikliğin ölçütü olarak kullanılabilir. İki dik vektörün iç çarpımı her zaman sıfır olacaktır.

Geometrik cebirde iç çarpım sadece vektörler için kullanılmaz, aynı zamanda iki bivektörün ya da bir bivektör ile vektörün iç çarpımı hesaplanabilir.



Şekil 2.4 : Bir vektör ile bivektörün iç çarpımı.

Şekil 2.4’de bir vektör ile bir bivektörün iç çarpımının bir vektör olduğu gösterilmektedir. İç çarpım derece düşüren yani bivektörden vektöre düşüren bir işlemdir. Örnekte de görüldüğü üzere bir bivektör ile vektörün iç çarpımı vektör olmuştur($1.2 = 1$).

2.4.3 Geometrik çarpım ve dualite

Geometrik çarpım iç ve dış çarpımın bir kombinasyonudur. İki u ve v vektörünün geometrik çarpımı “ uv ” şeklinde gösterilir ve açılımı denklem (2.12)’de gösterilmiştir.

$$uv = u \wedge v + u \cdot v \quad (2.12)$$

Geometrik çarpım kuralından iç ve dış çarpım elde edilirse denklem (2.13) ve denklem (2.14) elde edilir.

$$u \cdot v = \frac{1}{2} (uv + vu) \quad (2.13)$$

$$u \wedge v = \frac{1}{2} (uv - vu) \quad (2.14)$$

Bunlardan yola çıkarak bir vektörün karesini elde etmek için denklem (2.15) ‘de gösterilen sonuçlar elde edilir.

$$a^2 = aa = a \wedge a + a \cdot a = a \cdot a$$

$$e_1^2 = e_1 \wedge e_1 + e_1 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_1 = 1$$

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) &= (e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_2) = e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 \\ &= e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2 + e_1 \cdot e_2 = e_1 \wedge e_2$$

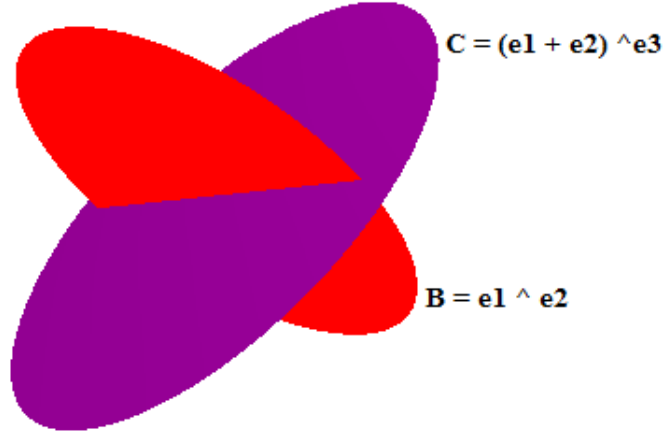
$$e_1(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 = 1 + e_1 \wedge e_2 = 1 + e_{12}$$

Tüm bu verilen örneklerle göre bir vektörle bir düzlemin iç çarpımını hesaplanırsa denklem (2.16)’da gösterilen “ $-e_1$ ” vektörü elde edilir.

$$\begin{aligned} x \cdot B &= (e_3 + e_2) \cdot (e_1 \wedge e_2) = (e_3 + e_2) \cdot e_{12} = e_3 \cdot e_{12} + e_2 \cdot e_{12} \\ &= e_3 \cdot e_1 e_2 + e_2 \cdot e_1 e_2 = 0 - e_2 \cdot e_2 e_1 = -e_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Verilen örnekte de görüldüğü gibi geometrik çarpım sadece vektörler değil aynı zamanda geometrik şekiller için de geçerlidir. İki bivektör Şekil 2.5’de gösterilmiştir.

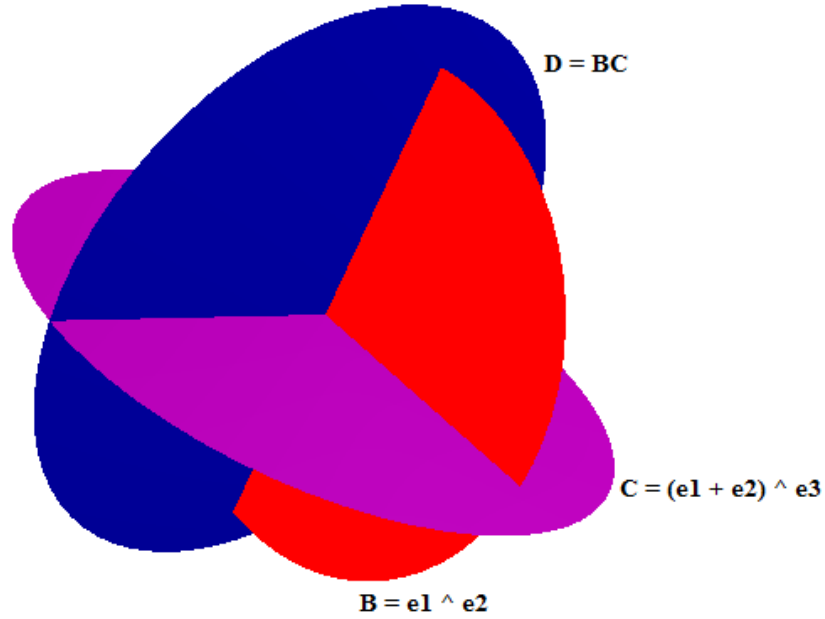
İki bivektörün geometrik çarpımı Şekil 2.6'da görsel olarak, denklem (2.17)'da matematiksel olarak açıklanmıştır.



Şekil 2.5 : İki bivektör-düzlem.

$$\begin{aligned}
 BC &= (e_1 \wedge e_2)((e_1 + e_2) \wedge e_3) = e_1 e_2 (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3) \\
 &= e_1 e_2 (e_1 e_3 + e_2 e_3) = e_1 e_2 e_1 e_3 + e_1 e_2 e_2 e_3 \\
 &= -e_2 e_1 e_1 e_3 + e_1 e_2 e_2 e_3 = -e_2 e_3 - e_3 e_1 \\
 &= -e_{23} - e_{31} = -[(-(e_3 \wedge e_1) + e_3 \wedge e_1)] \\
 &= -[e_3 \wedge (-e_2 + e_1)]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Matematiksel işlemlerden de anlaşıldığı üzere iki bivektörün geometrik çarpımının sonucu bir bivektör olur.



Şekil 2.6 : İki bivektör ve geometrik çarpımları.

Geometrik cebirde bir vektörün ya da kanatın tersi alınabilir ve denklem (2.18)'de gösterildiği gibi tanımlanır.

$$A A^{-1} = 1 \quad (2.18)$$

Bir v vektörünün tersi denklem (2.19) gösterildiği gibi tanımlanır ve denklem (2.20)'de gösterildiği gibi ispatlanır.

$$v^{-1} = \frac{v}{v \cdot v} \quad (2.19)$$

$$v \frac{v}{v \cdot v} = \frac{v \cdot v}{v \cdot v} = 1 \quad (2.20)$$

Buna göre sahte skalerin tersi $-I$ olur, denklem (2.21)'de ispatı gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} II &= (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = (e_1 e_2 e_3)(e_1 e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = \\ &= -e_2 e_1 e_3 e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3 \underbrace{e_1 e_1}_{1} e_2 e_3 = -e_3 \underbrace{e_2 e_2}_{1} e_3 = -\underbrace{e_3 e_3}_{1} = -1 \\ &\rightarrow II = -1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

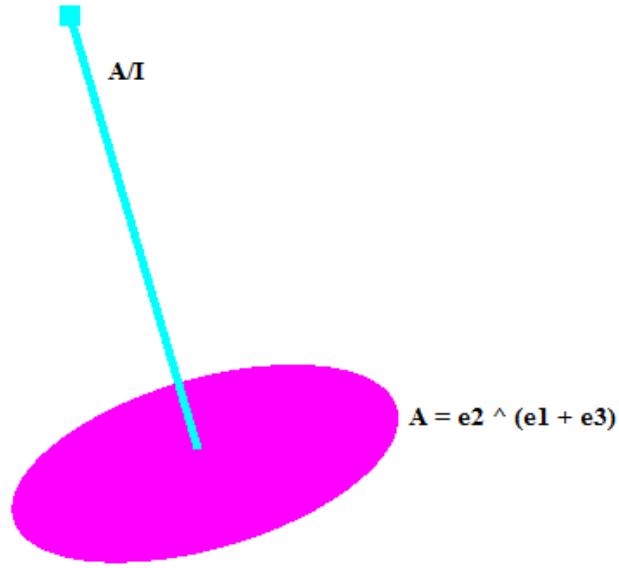
$$\rightarrow II(-I^{-1}) = -I^{-1}$$

$$\rightarrow I^{-1} = -I$$

Geometrik çarpımın tersi alınabilir olduğuna göre geometrik objeler birbirlerine bölünebilmektedir. Bölme işlemi başka bir işlemin tanımını meydana getirmektedir. Bir geometrik objenin dualitesi objenin sahte skalere (I) bölünmesi ile bulunur. Denklem (2.22)'de gösterilen A düzleminin dualitesi, denklem (2.23) ile bulunur ve Şekil 2.7'de gösterilmiştir.

$$A = e_2 \wedge (e_1 + e_3) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{I} &= e_2 \wedge (e_1 + e_3)(e_1 e_2 e_3)^{-1} = e_2(e_1 + e_3)(-e_1 e_2 e_3) \\ &= -(e_2(e_1 + e_3))e_1 e_2 e_3 = -e_2 e_1 e_1 e_2 e_3 - e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 \quad (2.23) \\ &= -e_2 e_2 e_3 - e_3 e_2 e_2 e_1 e_3 = -e_3 + e_1 e_3 e_3 = -e_3 + e_1 \end{aligned}$$



Şekil 2.7 : A düzlemi ve dualitesi

2.5 Geometrik Cebirin Özellikleri

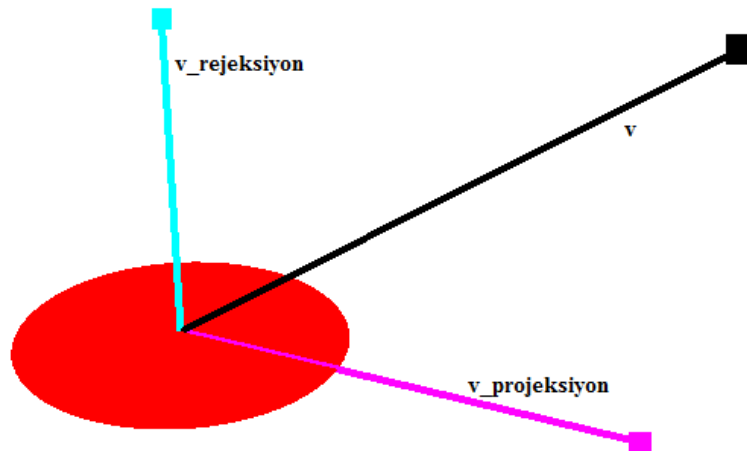
Geometrik cebirin işlemleri, objeler arasında iz düşüm, yansıma ve dönme gibi bazı görsel işlemleri lineer cebre göre basitleştirmektedir.

2.5.1 İz düşüm ve rejeksiyon

Bir vektörün (v) bir düzleme (B) göre izdüşümü ve rejeksiyonu sırasıyla denklem (2.24) ve denklem (2.25) ile bulunur.

$$v_{pro} = \frac{v \cdot B}{B} \quad (2.24)$$

$$v_{rej} = \frac{v \wedge B}{B} \quad (2.25)$$



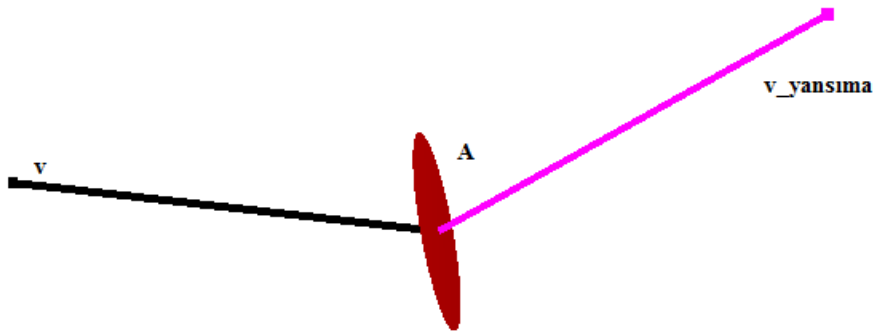
Şekil 2.8 : “v” vektörü, projeksiyonu ve rejeksiyonu.

Şekil 2.8’de v vektörünün B düzlemine göre izdüşümü ve rejeksiyonu gösterilmektedir. V vektörünün izdüşümü B düzlemine göre paralel olmaktadır, v vektörünün rejeksiyonu B düzlemine göre dik olmaktadır.

2.5.2 Yansıma

Bir v vektörünün bir A düzlemine göre yansıması denklem (2.26) bulunmaktadır görsel olarak Şekil 2.9’da gösterilmiştir.

$$v_{yan} = -\frac{Av}{A} \quad (2.26)$$

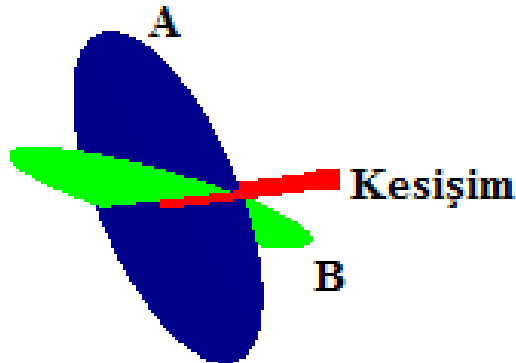


Şekil 2.9 : “v” vektörü ve A düzlemine göre yansıması.

2.5.3 Kesişme

Geometrik cebirde iki obje arasındaki kesişmeleri gösterebilmek için verilen operatör denklem (2.27) gösterildiği gibi tanımlanır ve Şekil 2.10’de gösterilmiştir.

$$A^* \cdot B \quad (2.27)$$



Şekil 2.10 : İki objenin kesişimi.

2.6 Dönme İşlemleri

2.6.1 Kuaternionlar ile dönme işlemleri

Kuaternionlar, karmaşık sayıların üç boyutlu hale genişletilmesidir. Bir yerine üç farklı sanal kısımları i , j ve k vardır ve bunların her birinin karesi -1 'e eşittir. Kuaternionun tanımı ve özellikler denklem (2.28)'da verilmiştir.

$$Q = w + ix + jy + kz \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k = -ji \quad (2.28)$$

Dönme işlemi için kullanılan özel denklemlere rotor denir. İki boyutlu dönme için karmaşık sayılarla tanımlanan rotor denklemi denklem (2.39)'da verilmiştir.

$$R_2 = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta) \quad (2.29)$$

Buradaki denkleme bakarak kuaternionlar ile üç boyutlu dönme için rotor tanımı denklem (2.30)'da gösterildiği gibi yazılır.

$$R = [\mathbf{v} \cdot \sin(\theta), \cos(\theta)] \quad (2.30)$$

Bir vektörü ya da saf kuaternionu denklem yardımıyla denklem (2.31)'de gösterildiği gibi döndürebiliriz. Saf kuaternion yani vektör $\mathbf{p}=[\mathbf{p},0]$, kuaternion ise $q=[\beta \mathbf{v}, s]$ olsun.

$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p} = [\beta \mathbf{v}, s][\mathbf{p}, 0] = [s\mathbf{p} + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{p}, (-\beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{p})] \quad (2.31)$$

İki kuaternionun çarpımı genel kuaternion yapısında hem gerçek ve sanal kısmı olan bir sonuç elde edilmiştir. Yukarıdaki sonuç için bazı varsayımlarda bulunulabilir. $\mathbf{P}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne dik olduğunu varsayarsak, bu durumda $\mathbf{p}'$ kuaternionun $-\beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ kısmı yani gerçek kısmı sıfır olur ve sonuç saf kuaternion yani vektör olur denklem (2.32)'de gösterilmiştir.

$$\mathbf{p}' = [s\mathbf{p} + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{p}, 0] \quad (2.32)$$

Bu durumda $\mathbf{p}$ vektörünü $\mathbf{v}$ kadar döndürmek için s 'nin yerine $\cos(\theta)$ ve β 'nin yerine ise $\sin(\theta)$ konmalıdır.

Bu dönme işlemi bir örnekle açıklanırsa, q kuaternionun vektör kısmına dik olan $\mathbf{p}$ vektörünü 45 derece döndürme işlemi denklem (2.33)'de gösterildiği gibi olur. Sonuç k etrafında 45 derece döndürülmüş saf kuaternion yani vektör bulunmuştur.

$$q = [\cos(\theta), \sin(\theta)k] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}k \right] \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
p &= [2i, 0] \\
p' = qp &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}k, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] [2i, 0] = \left[\frac{2\sqrt{2}}{2}i + \frac{2\sqrt{2}}{2}k \times i, 0 \right] \\
&= [\sqrt{2}i + \sqrt{2}j, 0]
\end{aligned}$$

Bu dönme işlemini p ve v vektörü birbirine dik olmadığında yapıldığında denklem (2.34)'de gösterilen sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \quad p = 2i \\
p' = qp &= [\sin(\theta) v, \cos(\theta)] [p, 0] \\
&= [\cos(\theta) p + \sin(\theta) v \times p, -\sin(\theta) v \cdot p] \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}2i + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \times 2i, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \cdot 2i \right] = [\sqrt{2}i + j, -1]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Sonuç bir önceki örnekte olduğu saf kuaternion değildir ve döndürülmüş vektör de değildir. Döndürme işlemleri için sadece vektörlerle ya da dik vektörlerle sınırlı kalamayacağı için bunun için de $p'=q p$ kuaternionu q kuaternionunun tersi ile çarpılırsa istenilen döndürme işlemi elde edilmiş olur. Kuaternionun tersi ile döndürme işlemi denklem (2.35)'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
q^{-1} &= \left[-\sin(\theta) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right), \cos(\theta) \right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} [-i - k, \sqrt{2}] \\
p'q^{-1} = qpq^{-1} &= [\sqrt{2}i + j, -1] \frac{1}{2} [-i - k, \sqrt{2}] \\
&= \frac{1}{2} [i + k + 2i + \sqrt{2}j - i + \sqrt{2}j + k, -\sqrt{2} + \sqrt{2}] \\
&= [i + \sqrt{2}j + k, 0]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

İşlem sonucunda saf kuaternion ve başlangıç p vektörünün mutlak değeri ile aynı bir sonuç elde edilmiştir. Fakat vektör 90 derece dönmüştür. Bu nedenle kuaternion ile dönme işlemi yapılırken istenilen açının yarısı ile işlem yapılır, denklem (2.36)'da gösterilmiştir.

$$q = \left[\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \mathbf{v}, \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right] \quad (2.36)$$

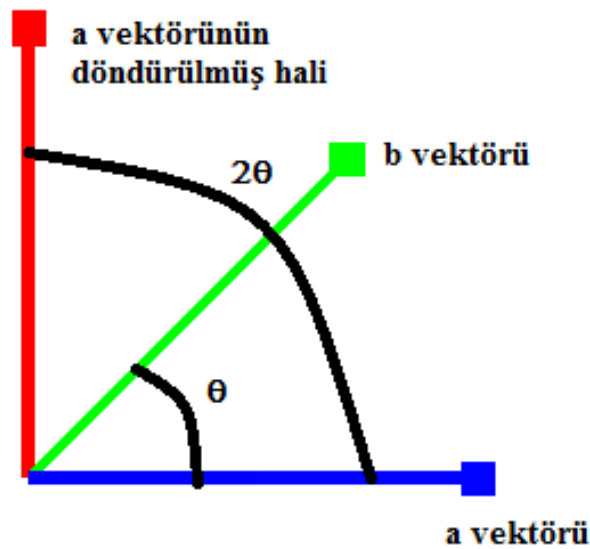
Kuaternionlar ile dönme örnekte gösterildiği gibi bir vektörü kuaternionun kendisi ile çarpıp bölünmesi ya da kendisi ile ve tersi ile çarpılması ile yapılmaktadır. Bu işleme sandviç işlemi denilir. Geometrik cebirde yansıma işlemi de aynı şekilde yapılmaktadır. Kuaternionlar ile sadece vektörlerin dönme işlemleri tanımlanmaktadır.

Dönme işlemi, bir çift vektörün iki kez yansıma işlemi yapılmış halidir. İki birim vektörün geometrik çarpımı iki yansıma işlemini içermektedir. Bundan dolayı geometrik cebirde dönme işlemi yapılırken geometrik çarpım işlemi kullanılmaktadır. Ayrıca kuaternionlarda kullanılan i, j, k sanal kısımlar geometrik cebirde kullanılan düzlem elemanları ile benzer yapıdadırlar. Sanal kısımların karelerinin -1 olduğu gibi, geometrik cebirdeki düzlem elemanlarının $((e_1 \wedge e_2), (e_2 \wedge e_3)(e_1 \wedge e_3))$ kareleri de -1 olmaktadır. Bu sebeplerden dolayı geometrik cebirde kullanılan rotor ifadesi kuaternionlardan gelmektedir.

2.6.2 Geometrik cebirde iki boyutta dönme

Geometrik cebirde iki normalize edilmiş vektörün geometrik çarpımı, bu iki vektör arasında bir dönmeyi tanımlar (vektörler arasındaki açıyı ikiyle çarparak). Bir vektörü (a) iki boyutta döndürülme istenirse denklem (2.37) kullanılır. Denklemdeki R' ye rotor adı verilir ve denklemdeki $\tilde{R}$ ifadesi R' 'nin tersini ifade eder.

$$c = Ra\tilde{R} \quad (2.37)$$



Şekil 2.11 : 2 boyutta örnek döndürülmüş bir vektör.

Şekil 2.11’da görülen örnekte a ve b vektörlerinin geometrik çarpımları ile R operatörü bulunmuştur daha sonra R operatörünün yardımıyla a vektörü $2*\Theta$ kadar döndürülmüştür. Döndürme operatörü R, üstel fonksiyonlar yardımıyla da denklem (2.38) yardımıyla bulunabilir.

$$R = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \quad (2.38)$$

R operatöründe $i = e_1 \wedge e_2$ şeklinde tanımlanır. R operatörünü Taylor Serisi ve $i^2 = -1$ denklemleri yardımıyla ispatı denklem (2.39)’de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} R = e^{-i\frac{\varphi}{2}} &= 1 + \frac{-i\frac{\varphi}{2}}{1!} + \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^5}{5!} \\ &+ \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^6}{6!} \dots \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^6}{6!} \dots + -i\frac{\varphi}{1!} + -i\frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3}{3!} \\ &- -i\frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^5}{5!} + \dots = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.6.3 Geometrik cebirde üç boyutta dönme

Operatör $R = e^{-\frac{\varphi}{2}p}$, üç boyutta dönmeyi tanımlar. Denklemdeki “p” karakteri normalize edilmiş düzlemi tanımlar. Bu düzlemin normalize edilmiş vektörü (ya da dualitesi) dönme eksenini olarak kullanılır. Şekil 2.12’de üç boyutta döndürülmüş bir vektörün örneği verilmiştir.



Şekil 2.12 : Üç boyutta dönme örneği.

3. KONFORMAL GEOMETRİK CEBİR

David Hestenes konformal geometrik cebri tanıtmıştır[4]. Geometrik cebri incelenirken 3 boyutlu Euclidean uzayı üzerine işlemler yapılmıştır. Konformal cebirde ise bu uzayı genişleterek yeni bir uzay elde edilmektedir ve buna Konformal uzay denmektedir. Konformal geometrik cebir 5 boyutlu bir geometrik cebirdir.

3.1 İki Temel Vektör

Konformal geometrik cebir fazladan iki tane temel vektör içermektedir. Bunlar e_+ ve e_- vektörleridir. Denklem (3.1) bu temel vektörlerin özelliklerini içermektedir.

$$e_+^2 = 1 \quad e_-^2 = -1 \quad e_+ \cdot e_- = 0 \quad (3.1)$$

Denklemde gösterilen iki temel vektör ile farklı iki temel vektör denklem (3.2)'de gösterildiği gibi tanımlanmıştır. Tanımlanan yeni temel vektörler ile ilgili bağlantılar denklem (3.3) gösterilmiştir.

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad e_\infty = e_- + e_+ \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} e_0^2 = e_\infty^2 = 0 \quad e_\infty \cdot e_0 = -1 \quad e_- = e_0 + \frac{1}{2}e_\infty \quad e_+ \\ = \frac{1}{2}e_\infty - e_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Konformal Geometrik Cebirde Vektörler

Konformal geometrik cebirde bir vektör denklem (3.4) ile gösterilmektedir. Euclidean uzayında bir nokta $\mathbf{s} = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3$ denklemiyle gösterilir(Kalın harfle yazılan değerler $\mathbf{s}$, $\mathbb{R}^3$ elemanıdır).

$$\mathbf{S} = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 + s_4e_\infty + s_5e_0 \quad (3.4)$$

Konformal geometrik cebirde eklenen iki farklı temel vektörün uzaydaki objeler arasındaki anlamları Çizelge 3.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1 : Konformal cebirde fazladan temel iki vektörün anlamları.

	$s_5=0$	$s_5 \neq 0$
$s_4=0$	Orijinde düzlem	Orijinde küre/nokta
$s_4 \neq 0$	Düzlem	Küre/nokta

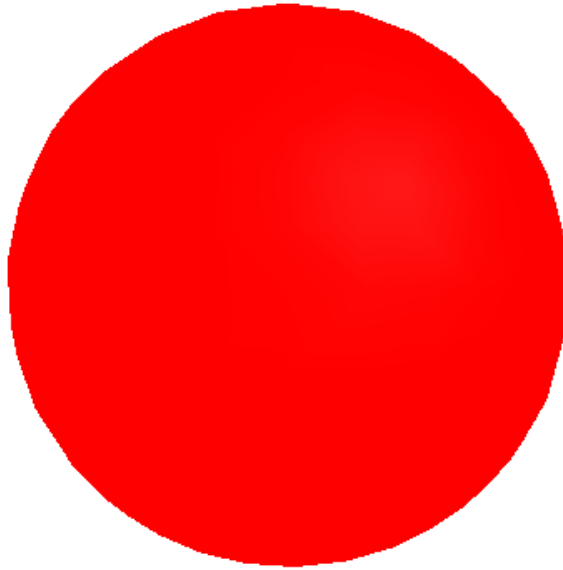
3.2.1 Küre

Konformal cebirde homojen olmayan s merkez noktalı ve r yarıçaplı bir küre aşağıdaki denklem (3.5) gösterilmektedir. Denklemdeki s_4 açılımı denklem (3.6) ile gösterilmiştir. Bu denklemlerden yarıçap çekilirse denklem (3.7)'deki eşitlik elde edilir.

$$K = s + s_4 e_\infty + e_0 \quad (3.5)$$

$$s_4 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - r^2) = \frac{1}{2} (s^2 - r^2) \quad (3.6)$$

$$r^2 = s^2 - 2s_4 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_4 \quad (3.7)$$



Şekil 3.1 : Örnek bir S küresi.

Şekil 3.1'de $S = e_2 + e_3 - e_\infty + e_0$ denklemine sahip küre gösterilmiştir. Kürenin matematiksel denkleminde, kürenin yarıçapı denklem (3.8) ile elde edilir.

$$r^2 = 1 + 1 - 2 * (-1) = 4 \quad (3.8)$$

3.2.2 Nokta

Konformal cebirde noktaları yarıçapı sıfır olan küre şeklinde temsil edilmektedir. Bir homojen olmayan nokta p , denklem (3.9) ile gösterilmektedir. Bu denklemde de

yarıçapı bulmak istenilirse denklem (3.10)'deki eşitlik elde edilir. Bu sonuca göre yarıçapı sıfır olan bir küre yani nokta elde edilmiş olur.

$$X = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 e_\infty + e_0 \quad (3.9)$$

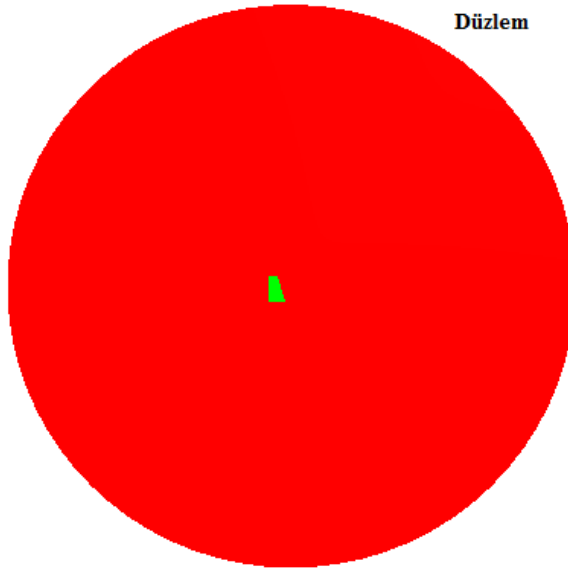
$$r = \mathbf{p}^2 - 2 * \left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^2\right) = 0 \quad (3.10)$$

3.2.3 Düzlem

Düzlemler, yarıçapı sonsuz olan küreler şeklinde temsil edilmektedir. Vektör denkleminde $s_5=0$ olarak alındığında bir düzlem elde edilmiş olur. Denklem (3.11)'da (n_1, n_2, n_3) düzleme dik vektörü temsil etmektedir. “n” vektörü denklem (3.12) ifade edildiği gibi birim vektördür. Ayrıca denklemdeki d, düzlemin orijinden uzaklığını ifade etmektedir. Şekil 3.2’de örnek bir düzlem görsel olarak gösterilmiştir.

$$D = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + d e_\infty \quad (3.11)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (3.12)$$



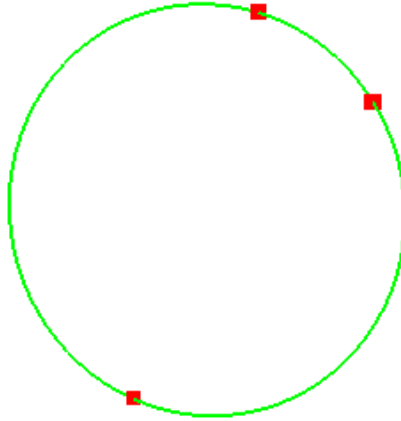
Şekil 3.2 : Örnek düzlem gösterimi.

3.3 Konformal Geometrik Cebirde Bivektörler

Konformal geometrik cebirde çemberler ve çizgiler bivektörleri oluşturmaktadır. Çizgiler sonsuz çaplı çemberler ile oluşturulmaktadır.

3.3.1 Çember

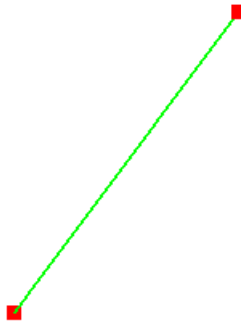
Konformal geometrik cebirde bir çember üç nokta ile tanımlanabilmektedir. Konformal geometrik cebirde çember tanımı ise üç noktanın dış çarpımının dualitesi şeklindedir. Şekil 3.3’de, verilen üç nokta ile elde edilmiş bir çember gösterilmektedir.



Şekil 3.3 : Üç noktadan oluşan örnek çember gösterimi.

3.3.2 Çizgi

Çizgiler sonsuz çaplı çemberler ile gösterilebilir. Çizgiler, iki nokta ve bir de sonsuzda bir noktanın yardımı ile tanımlanabilmektedir. Konformal geometrik cebirdeki tanımı ise bu üç noktanın dış çarpımlarının dualitesi şeklindedir. Şekil 3.4’de bir çizginin bu verilen iki nokta ve sonsuzdaki bir nokta ile gösterilimi verilmiştir.



Şekil 3.4 : Bir çizginin gösterilişi.

3.4 Konformal Geometrik Cebirde Dual Vektörler

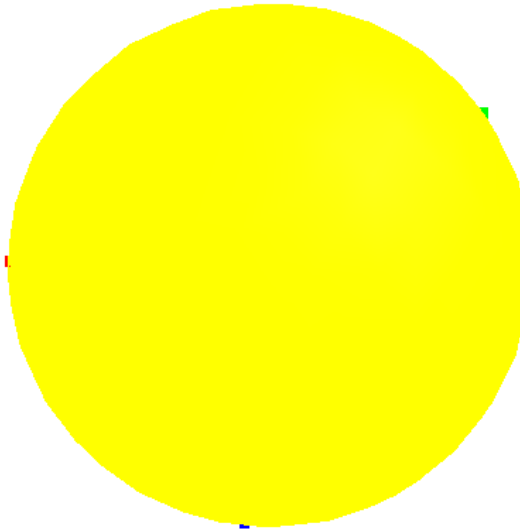
Küreleri ve düzlemleri, noktaların dış çarpımlarının dualitesi şeklinde tanımlayabildiğimiz gibi, konformal noktaların dış çarpımları şeklinde de ifade

edebiliriz. Bu iki farklı tanım sırasıyla boş uzayın iç çarpımı ve boş uzayın dış çarpımı şeklinde tanımlanmaktadır. Konformal uzayda tanımlanan objelerin boş uzayın iç ve dış çarpımına göre gösterilişleri Çizelge 3.2’de verilmiştir. Tablodan da anlaşıldığı gibi obje tanımlamaları birbirlerinin dualitesine eşittir.

Çizelge 3.2 : Boş uzayın iç ve dış çarpımına göre obje tanımları.

Objeler	Boş uzayın iç çarpımı	Boş uzayın dış çarpımı
Nokta	$N = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0$	-----
Küre	$K = x + \frac{1}{2}(x^2 - r^2)e_\infty + e_0$	$K^* = N_1 \wedge N_2 \wedge N_3 \wedge N_4$
Düzlem	$D = n + de_\infty$	$D^* = N_1 \wedge N_2 \wedge N_3 \wedge e_\infty$
Çember	$\mathcal{C} = K_1 \wedge K_2$	$\mathcal{C}^* = N_1 \wedge N_2 \wedge N_3$
Doğru	$L = D_1 \wedge D_2$	$L^* = N_1 \wedge N_2 \wedge e_\infty$
Nokta Çifti	$N\mathcal{C} = K_1 \wedge K_2 \wedge K_3$	$N\mathcal{C}^* = N_1 \wedge N_2$

Şekil 3.5’de 4 konformal noktanın dış çarpımı ile elde edilen bir kürenin gösterilişi verilmiştir.



Şekil 3.5 : Bir Kürenin 4 noktanın dış çarpımı olarak gösterilmesi.

3.5 Mesafeler

Konformal geometrik cebirde noktalar, düzlemler ve küreler vektörler gibi gösterilebilmektedir. Bu tarz geometrik şekillerin iç çarpımları skaler bir değer elde edeceğinden dolayı mesafeleri ölçmek için kullanılabilir. P ve S olarak iki konformal vektörün iç çarpımı P.S üç farklı anlam ifade edebilir. Bunlar;

- İki nokta arasındaki Euclidean mesafesi;
- Bir nokta ve bir düzlem arasındaki mesafe;

- Bir noktanın bir kürenin içinde mi ya da dışında mı olduğunun kararıdır.

Öncelikle Euclidean uzayında aşağıda tanımlanan iki vektörün iç çarpımı açıklanırsa denklem (3.13)'deki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
 P.S &= (\mathbf{p} + p_4 \mathbf{e}_\infty + p_5 \mathbf{e}_0).(\mathbf{s} + s_4 \mathbf{e}_\infty + s_5 \mathbf{e}_0) \\
 &= \underbrace{\mathbf{p}.\mathbf{s}}_0 + \underbrace{s_4 \mathbf{p}.\mathbf{e}_\infty}_0 + \underbrace{s_5 \mathbf{p}.\mathbf{e}_0}_0 + \underbrace{p_4 \mathbf{e}_\infty.\mathbf{s}}_0 + \underbrace{p_4 s_4 \mathbf{e}_\infty^2}_0 + \underbrace{p_4 s_5 \mathbf{e}_\infty.\mathbf{e}_0}_{-1} + \underbrace{p_5 \mathbf{e}_0.\mathbf{s}}_0 + \\
 &\quad \underbrace{p_5 s_4 \mathbf{e}_0.\mathbf{e}_\infty}_{-1} + \underbrace{p_5 s_5 \mathbf{e}_0^2}_0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$P.S = \mathbf{p}.\mathbf{s} - p_5 s_4 - s_5 p_4 = p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 - p_5 s_4 - s_5 p_4$$

3.5.1 Noktalar arasında mesafeler

P ve S iki nokta olarak kabul edilirse, denklem değerleri denklem (3.14) ve (3.15) gösterilmiştir. Tanımlanan bu iki noktanın iç çarpı denklem (3.16)'de gösterildiği gibi bulunmaktadır.

$$p_4 = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2, p_5 = 1 \tag{3.14}$$

$$s_4 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^2, s_5 = 1 \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 P.S &= \mathbf{p}.\mathbf{s} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \\
 &= p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 - \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\
 &= -\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2p_1 s_1 - 2p_2 s_2 - 2p_3 s_3) \\
 &= -\frac{1}{2} ((s_1 - p_1)^2 + (s_2 - p_2)^2 + (s_3 - p_3)^2) = -\frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 \\
 (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 &= -2(P.S)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Yukarıdaki denklemlere göre iki homojen olmayan nokta arasındaki mesafenin karesi o iki noktanın iç çarpımlarının -2 ile çarpımına eşit olduğu görülmektedir.

3.5.2 Noktalar ve düzlemler arasındaki mesafeler

P bir nokta olarak kabul edilirse denklem değerleri denklem (3.17)'de gösterildiği gibi olur.

$$p_4 = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, p_5 = 1 \quad (3.17)$$

S bir düzlem olarak kabul edilirse denklem değerleri denklem (3.18)'de gösterildiği gibi olur.

$$s = \mathbf{n}, s_4 = d, s_5 = 0 \quad (3.18)$$

Bir noktanın ve düzlemin iç çarpımı denklem (3.19)'da gösterildiği gibi o nokta ve düzlem arasındaki Euclidean mesafesini gösterir.

$$P.S = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d \quad (3.19)$$

3.5.3 Bir noktanın küreye göre konumunun belirlenmesi

P bir nokta olarak kabul edilirse denklem değerleri denklem (3.20)'de gösterildiği gibi olur.

$$p_4 = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, p_5 = 1 \quad (3.20)$$

S bir küre olarak kabul edilirse denklem değerleri denklem (3.21)'de gösterildiği gibi olur.

$$s_4 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - r^2), \quad s_5 = 1 \quad (3.21)$$

Bir nokta ve bir kürenin iç çarpımları denklem (3.22)'de gösterildiği gibi bulunur.

$$\begin{aligned} P.S &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - \frac{1}{2}(\mathbf{s}^2 - r^2) - \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 \\ &= \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{s}^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{p}^2) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Denklem (3.22)'den denklem (3.23) elde edilmektedir.

$$2(P.S) = r^2 - (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 \quad (3.23)$$

Denklem (3.23)'ü uzaklık terimi ile yeniden yazılırsa denklem (3.24)'de bulunan eşitlikler elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} (d + r)^2 &= (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 = d^2 + 2dr + r^2 \\ 2(P - S) &= r^2 - (d^2 + 2dr + r^2) = -d^2 - 2dr \\ D(d) &= P.S = -\frac{d}{2}(d + 2r) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Eğri çizimi denklemlerinin yardımıyla denklem (3.24)'den denklem (3.25)'teki iki eşitsizlik elde edilmektedir.

$$D(0) = 0 \quad D(-2r) = 0 \quad (3.25)$$

Eğri çizim denklemlerine göre parabolün maksimum noktasını denklem (3.26) ile edilir.

$$D(-r) = \frac{1}{2}r^2 \quad (3.26)$$

Elde edilen bu denklemlere göre nokta ve kürenin konumlarının ihtimalleri aşağıda gösterildiği gibi sonuçlanır.

- $P.S > 0 \rightarrow P$ noktası kürenin içindedir.
- $P.S = 0 \rightarrow P$ noktası kürenin yüzeyindedir.
- $P.S < 0 \rightarrow P$ noktası kürenin dışındadır.

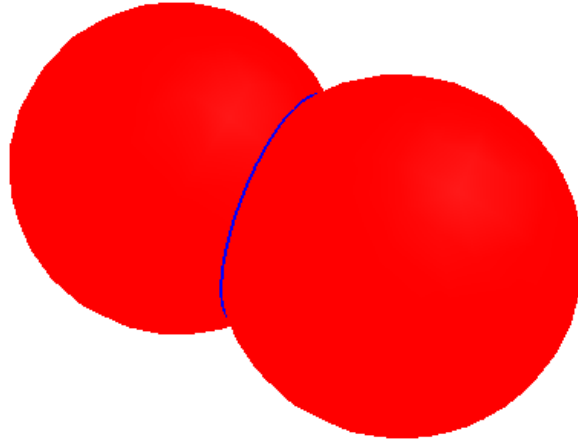
3.6 Kesişimler

İç çarpımı kullanarak mesafeleri elde ettiğimiz gibi dış çarpımı kullanarak objeler arasındaki kesişimler elde edilebilir.

3.6.1 İki kürenin kesişimi

Şekil 3.6' da iki kürenin kesişimi verilmiştir. Denklem (3.27)'de gösterildiği üzere iki kürenin kesişimi matematiksel olarak çember denklemini vermektedir.

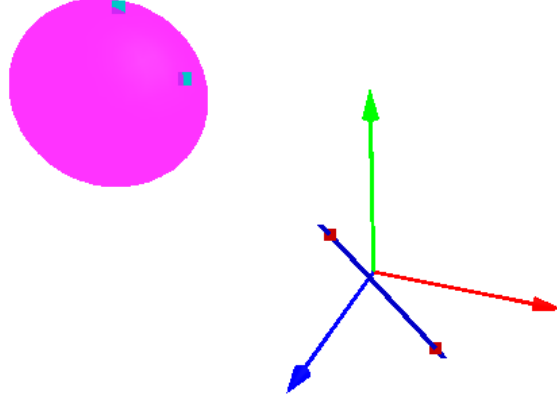
$$\begin{aligned} \text{Küre1} &= -0.5 e_2 - 0.5 e_3 - 0.25 e_\infty + e_0 \\ \text{Küre2} &= 0.5 e_2 + 0.5 e_3 - 0.25 e_\infty + e_0 \\ \text{Küre1} \wedge \text{Küre2} &= 0.25 (e_2 \wedge e_\infty) + 0.25 (e_3 \wedge e_\infty) - (e_2 \wedge e_0) - (e_3 \wedge e_0) \end{aligned} \quad (3.27)$$



Şekil 3.6 : İki kürenin kesişimi.

3.6.2 Bir doğru ve kürenin kesişimi

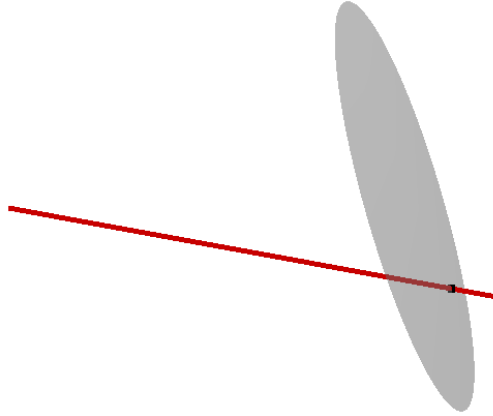
Bir doğru ve kürenin kesişimi Şekil 3.7’de gösterildiği gibi bir nokta çifti olmaktadır.



Şekil 3.7 : Bir küre ve doğrunun kesişimi.

3.6.3 Bir doğru ve düzlemin kesişimi

Bir doğru ve düzlemin kesişimi Şekil 3.8’de gösterildiği gibi bir nokta olmaktadır.



Şekil 3.8 : Bir düzlem ile doğrunun kesişimi.

3.7 Dönme ve Öteleme

Konformal geometrik cebirde dönme ve öteleme işlemleri rotor ve öteleme adı verilen operatörler yardımıyla ve geometrik cebirde olduğu gibi sandviç operatörü yardımıyla yapılmaktadır.

3.7.1 Dönme

Dönme operatörü olan rotor denklem (3.28)’de tanımlanmıştır.

$$R = e^{-\frac{\theta}{2}L} \quad (3.28)$$

Denklemde belirtilen “L” normalize edilmiş bir bivektördür ve dönme eksenini ifade etmektedir. Denklemdeki “theta” ifadesi ise dönme eksenini etrafındaki dönme açısının iki katını ifade etmektedir. Denklemde belirtilen “L” herhangi bir doğru olabilir, orijinden geçmesine gerek yoktur. Bir objenin dönmesini gerçekleştiren sandviç operatörü denklem (3.29)’da gösterilmiştir.

$$O_{döndürülmüş} = Ro\tilde{R} \quad (3.29)$$

3.7.2 Öteleme

Konformal geometrik cebirde öteleme işlemi artan bir fonksiyon ile tanımlanmaktadır. Öteleme işlemi için kullanılan operatör “T” ile gösterilmiştir ve denklem (3.30)’da matematiksel ifadesi gösterilmiştir.

$$T = e^{\frac{1}{2}te_{\infty}} = 1 - \frac{1}{2}te_{\infty} \quad (3.30)$$

Denklemde kullanılan “t” bir vektördür ve öteleme işlemi yapılacak yönü ve boyutu içermektedir. Öteleme yapılacak geometrik obje “o” ve öteleme işleme sandviç operatörü yardımıyla denklem (3.31)’de gösterilmiştir.

$$O_{ötelenmiş} = To\tilde{T} \quad (3.31)$$

3.7.3 Katı cisim hareketi

Üç boyutlu hem dönme hem de ötelemeyi içeren harekete katı cisim hareketi denmektedir. Konformal geometrik cebirde hem dönmeyi hem de ötelemeyi ifade eden operatöre motor denmektedir ve ifadesi denklem (3.32)’de verilmiştir.

$$M = RT \quad (3.32)$$

Denklemde R, dönme için kullanılan rotor operatörünü, T ise öteleme için verilen operatörü ifade etmektedir. Bir objenin katı cisim hareketi denklem (3.33)’de ifade edildiği gibi yapılmaktadır.

$$O_{katıCisimHareketi} = Mo\tilde{M} \quad (3.33)$$

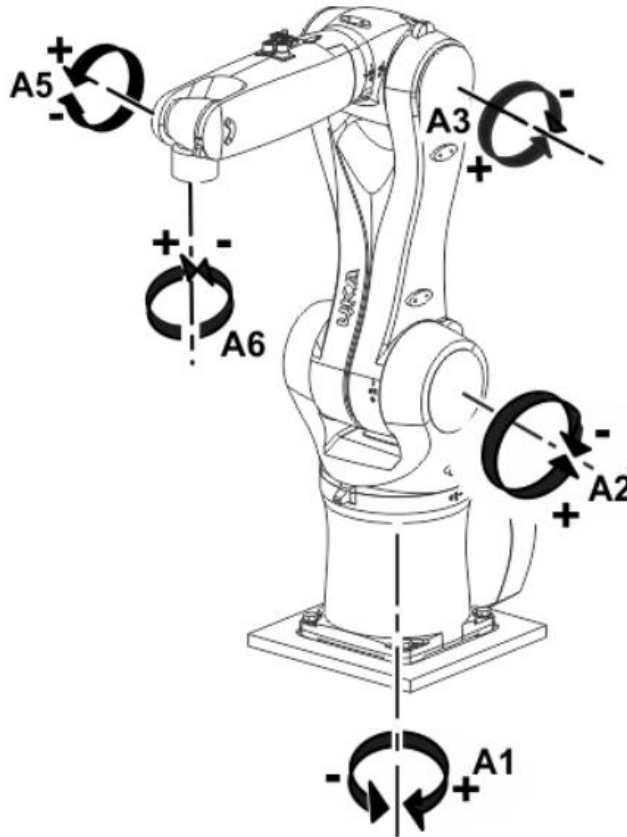
4. TERS KİNEMATİK PROBLEMİ

Robotlarda ters kinematik probleminin tanımı bir robotun istenilen konuma, istenilen bir yönelimle gitmesinin çözümü ya da çözümlerdir

Bu bölümde Kuka KR 6 R900 robotunun ters kinematik çözümü, konformal geometrik cebir hem matematiksel hem de görsel olarak verilecektir.

4.1 Robotun Teknik Özellikleri ve Çizimi

Kuka KR 6 R900 robotu 5 adet dönel eklemden oluşmaktadır. Her bir eklemi birer serbestlik derecesine sahiptir. Robotun çizimi ve eklemlerinin dönme yönleri Şekil 4.1’de eksenleriyle gösterilmiştir. Robotun kol uzunlukları Çizelge 4.1’de gösterilmiştir.



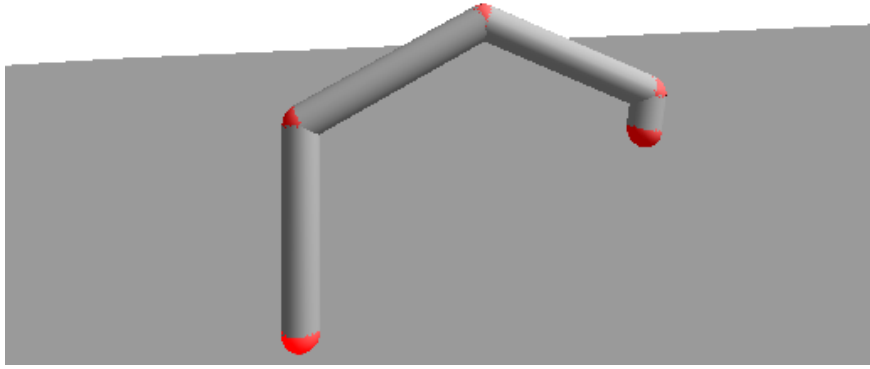
Şekil 4.1 : KR6 R 900 robotunun dönme eksenleri ve şeması[12].

Çizelge 4.1 : KR6 R 900 robotunun uzunlukları.

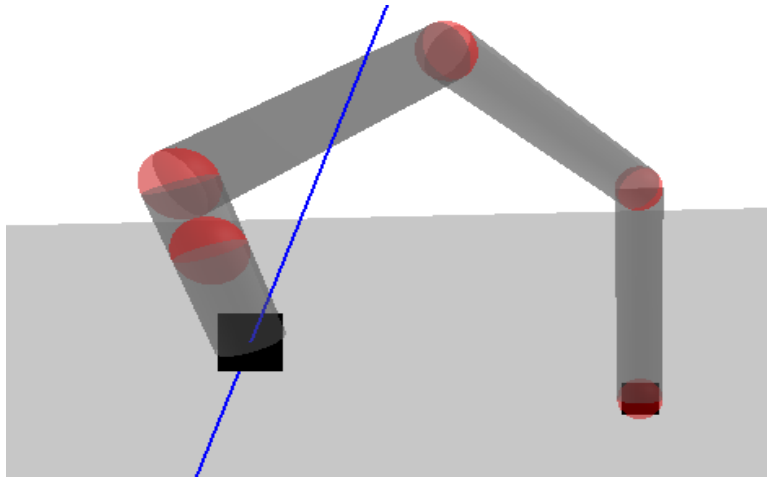
Kollar	Uzunlukları
1	400mm
2	455mm
3	420mm
4	80mm

4.2 Konformal Geometrik Cebir ile Ters Kinematik Çözüm

Robotun konformal geometrik cebir ile ters kinematik çözümü için programa giriş olarak robotun boyutları dönme eksenleri ve gitmesi istenilen nokta ve yönelimi verilmektedir. Bu verilere göre CLUCALC programı ile robotun grafiksel olarak gösterimi Şekil 4.2’ de gösterilmiştir.



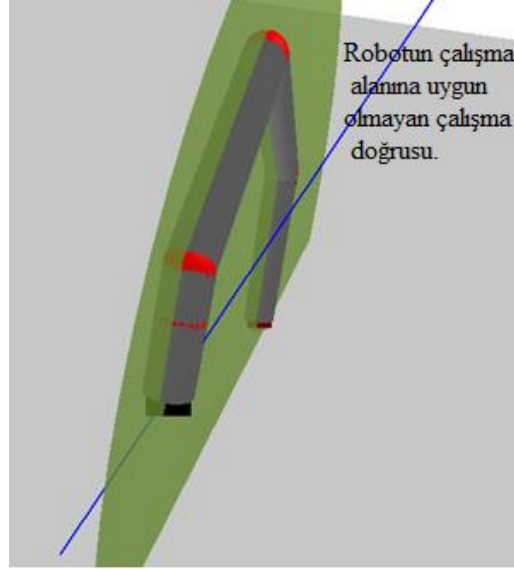
Şekil 4.2 : Robotun CLUCALC programı ile gösterimi.



Şekil 4.3 : Robotun gitmesi istenilen nokta ve yönelimi.

Şekil 4.3’ te robotun gitmesi istenilen nokta ve istenilen yönelim doğrusu gösterilmiştir. Bu gösterimde robotun beşinci ekleminin ucuna, uç işlevci yerine görsel bir link eklenmiştir. Farklı şekillerde uç işlevcilerde istenilen yönelimler

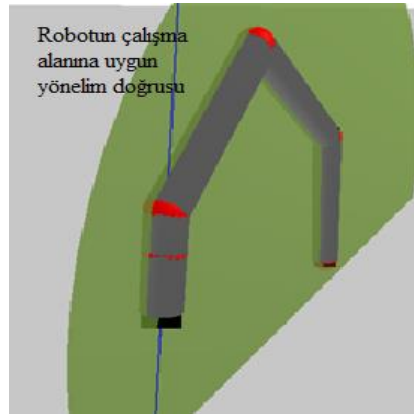
verilebilmesi için gidilmesi gereken nokta “Pt” hesaplanırken uç işlevci boyutları da hesaba katılmalıdır. Burada görsel olarak 120mm uzunluğunda bir uç işlevci bulunmaktadır. Giriş olarak verilen yönelim doğrusu, robotun mekanik olarak sınırlarına uygun olmalıdır, Şekil 4.3’de gösterilen L_0 yönelim doğrusu robotun sınırlarında uygun değildir. Yönelim doğrusu çalışma düzlemine paralel olmalıdır. Robotun çalışma düzlemi Şekil 4.4’de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 : Robotun çalışma düzlemi.

Bu çalışma düzlemine uygun yönelim doğrusunu bulmak için, yönelim doğrusunun çalışma düzlemine göre projeksiyonu bulunmuştur ve Şekil 4.5’de gösterilmiştir. Projeksiyonu bulunması için uygulanan işlem denklem (2.1)’de gösterilmiştir.

$$L_0 = \frac{Plane_{ÇalışmaDüzlemi} \cdot L_0}{Plane_{ÇalışmaDüzlemi}} \quad (4.1)$$



Şekil 4.5 : Çalışma alanına uygun yönelim doğrusu.

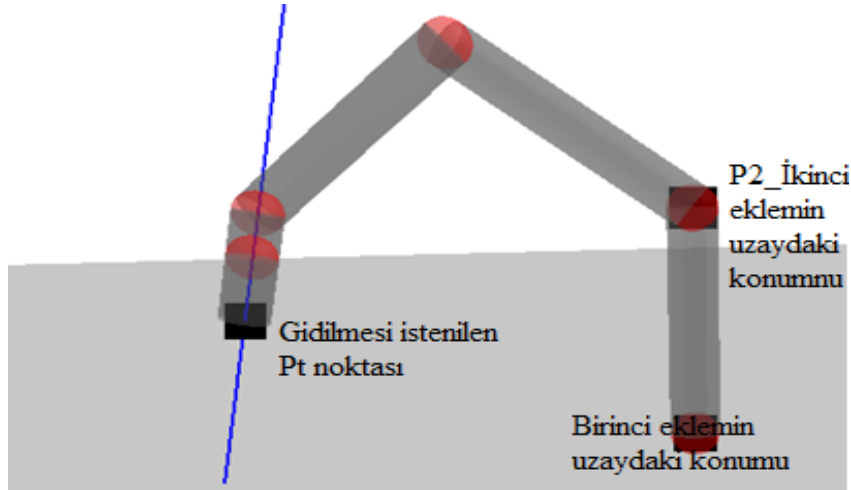
Robotun birinci eklemi konformal uzayda sıfır noktasında seçilmiştir, isteğe göre değişik bir noktada da seçilebilmektedir. Şekil 4.3’da siyah kare ile robotun ilk eklemi gösterilmiştir. Robotun eklem kol yapısına bakarak birinci eklem ne kadar dönerse dönsün ikinci eklemin yerini değiştirmemektedir. Bundan dolayı ikinci eklemin konumunu bulmak için şekilde gösterilen ilk noktayı robotun kol uzunluğu boyunca, kol yönünde ötelenmelidir. Konformal cebirde öteleme işlemi için denklem (4.2)’de kullanılmaktadır.

$$T = e^{-\frac{1}{2}te_{\infty}} = 1 - \frac{1}{2}te_{\infty} \quad (4.2)$$

Robotun kol yönü “ e_2 ” ekseninde, uzunluğu ise 400 milimetredir. Buna göre öteleme denklemini denklem (4.3) ile yeniden yazılmıştır. İlk eklemin bulunduğu nokta P_1 ile gösterildiğinde, P_2 noktası denklem (4.4) ile bulunur ve Şekil 4.6’de gösterilmiştir.

$$T_1 = 1 - \frac{1}{2}400e_2e_{\infty} \quad (4.3)$$

$$P_2 = T_1 P_1 \tilde{T}_1 \quad (4.4)$$



Şekil 4.6 : Robotun üzerinde ikinci eklemin gösterilmesi.

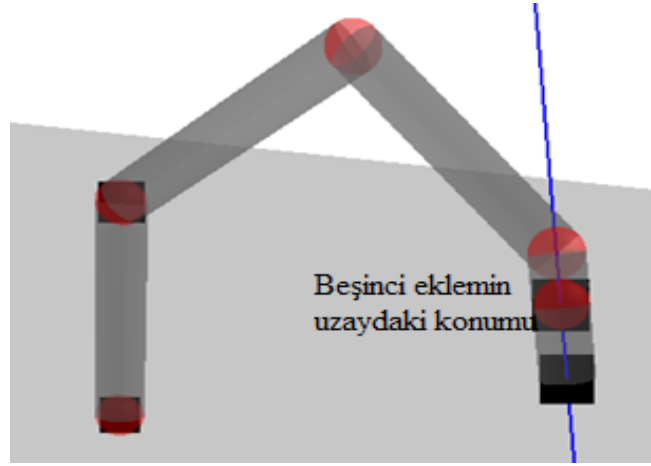
Robotun beşinci eklemi yönelim eksenini etrafında dönme yaptığından dolayı beşinci eklemin yerini bulmak için, robotun gitmesi istenilen “Pt” noktası, yönelim doğrultusunda “Lo” üç işlevcinin uzunluğu kadar öteleme yaptırılarak bulunur. Öteleme yapmak için birim doğru kullanılmalıdır yönelim doğrusunun

birimleştirilmesi denklem (4.5)'de gösterilmiştir. Öteleme denklemi ve uygulanması sırasıyla denklem (4.6) ve denklem (4.7)(2.1)'de gösterilmiştir.

$$L_{o_{birim}} = \frac{L_o}{|L_o|} \quad (4.5)$$

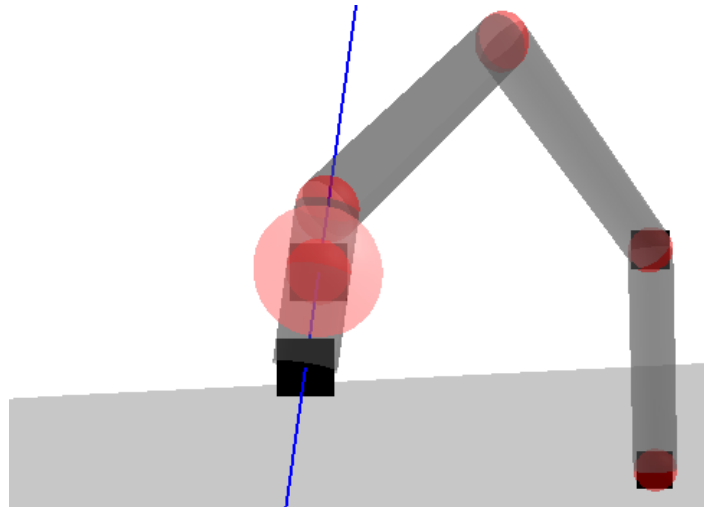
$$T_t = 1 - \frac{1}{2} 120 L_{o_{birim}} e_{\infty} \quad (4.6)$$

$$P_5 = T_t P_t \tilde{T}_t \quad (4.7)$$



Şekil 4.7 : Robotun beşinci ekleminin bulunması.

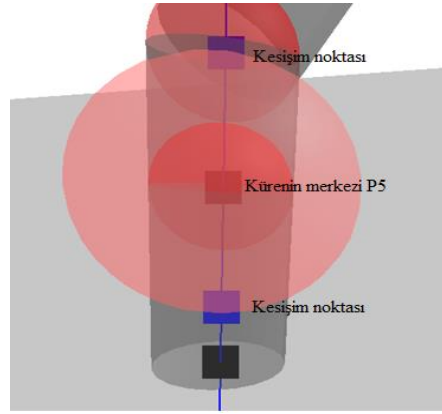
Robotun dördüncü ekleminin konumunun bulunması için, beşinci eklemin konumundan kol uzunluğu kadar yarıçapta bir küre çizildiğinde, dördüncü eklem kürenin yüzeyinde bulunacaktır. Şekil 4.8'de küre ve dördüncü eklem kesiştiği gösterilmiştir.



Şekil 4.8 : Dördüncü eklem için çizilen küre.

Robotun mekanik kısıtlamalarından dolayı, robotun dördüncü eklemi istenilen yönelimi gerçekleştirecektir. Bundan dolayı robotun dördüncü eklemi uzayda yönelim doğrusu üzerinde bulunmaktadır. Eklemin uzaydaki tam konumunu bulmak için küre ile yönelim doğrusunun kesişim noktaları bulunmalıdır. Konformal geometri cebirde iki objenin kesişimi dış çarpımla bulunmaktadır. Denklem (4.8)'de küre ile doğrunun kesişimi olan nokta çifti bulunmuştur. Şekil 4.9'da küre ile doğrunun kesişimi; nokta çifti gösterilmiştir.

$$N\zeta_1 = (Küre \wedge Doğru) = Sp_1 \wedge L_o \quad (4.8)$$

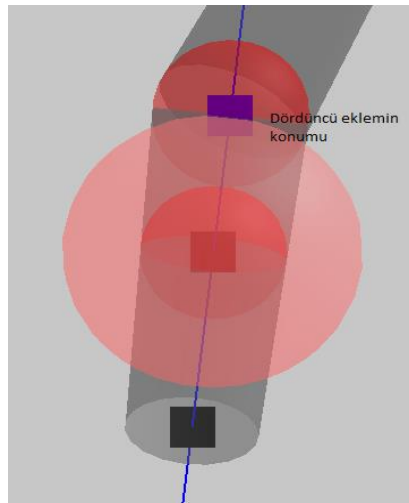


Şekil 4.9 : Küre ile doğrunun kesişimi.

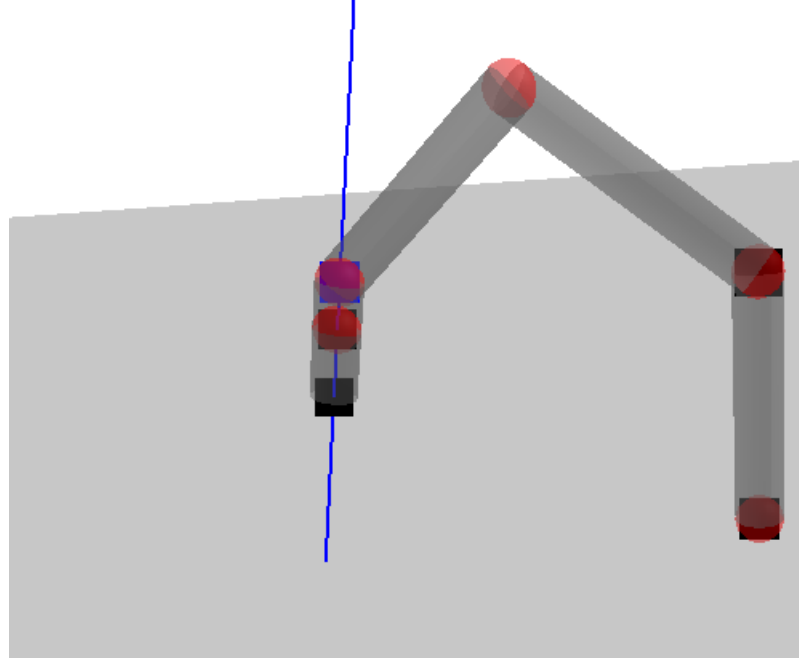
Konformal geometrik cebirde çiftini ayırmak için denklem (4.9)[4] kullanılmaktadır.

$$N_{\pm} = \frac{(\pm\sqrt{N\zeta^* \cdot N\zeta^*} + N\zeta^*)}{e_{\infty} \cdot N\zeta^*} \quad (4.9)$$

Bu denklemi bulunan nokta çifti $N\zeta_1$ ' e uygulandığında dördüncü eklemi yeri bulunacaktır. Dördüncü eklemi yeri Şekil 4.10'da gösterilmiştir.

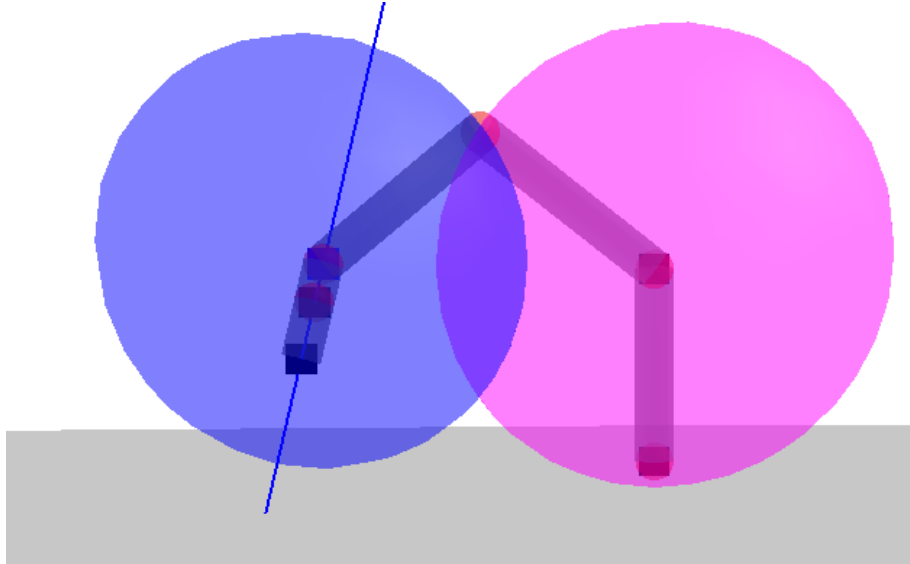


Şekil 4.10 : Dördüncü eklemi konumu.



Şekil 4.11 : Robotun genel çizimi.

Robotun Şekil 4.11'deki genel çizimine bakarak, üçüncü eklemin konumunu küreler ile bulunabilir. Robotun ikinci ekleminin konumunu küre merkezi alarak, küre yarıçapını ise ikinci eklemin kol uzunluğu olarak bir küre çizilmelidir. Aynı şekilde robotun dördüncü ekleminin bulunduğu nokta küre merkezi olarak ve üçüncü eklemin kol uzunluğu küre yarıçapı olarak ikinci bir küre çizilmelidir. Kürelerin çizimi Şekil 4.12'de gösterilmektedir.

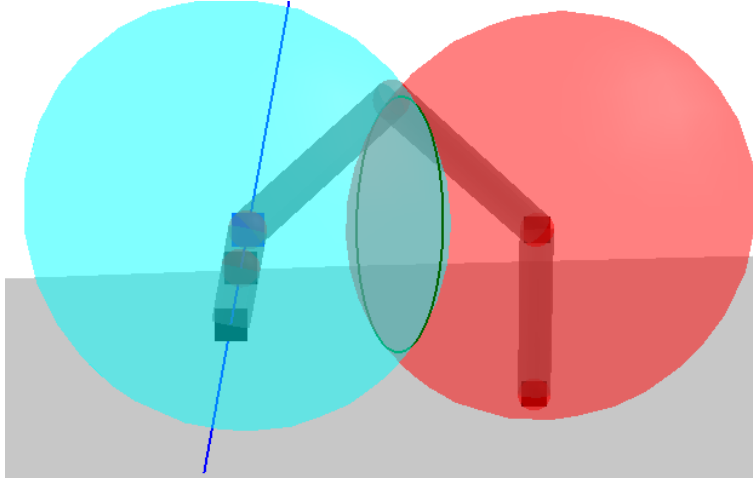


Şekil 4.12 : Üçüncü eklem için çizilen küreler.

Çizimden de görüldüğü üzere üçüncü eklemin konumu kürelerin kesişimi üzerinde bulunmaktadır. Konformal geometrik cebire göre iki kürenin kesişimi, iki objenin dış

arpımı ile bulunmaktadır. Bu işlem denklem (4.10) ile açıklanmış, şekil 4.13 ile gösterilmiştir.

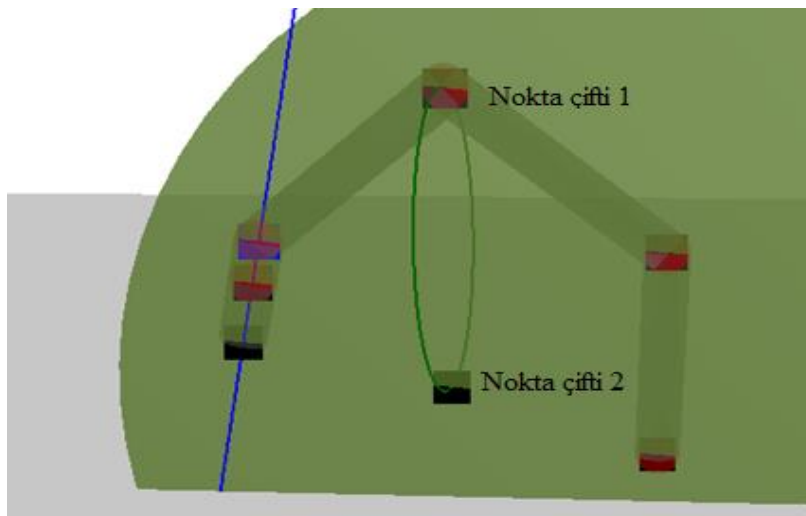
$$Kesişim_{Daire} = Kre1 \wedge Kre2 \quad (4.10)$$



şekil 4.13 : İki kürenin kesişimi.

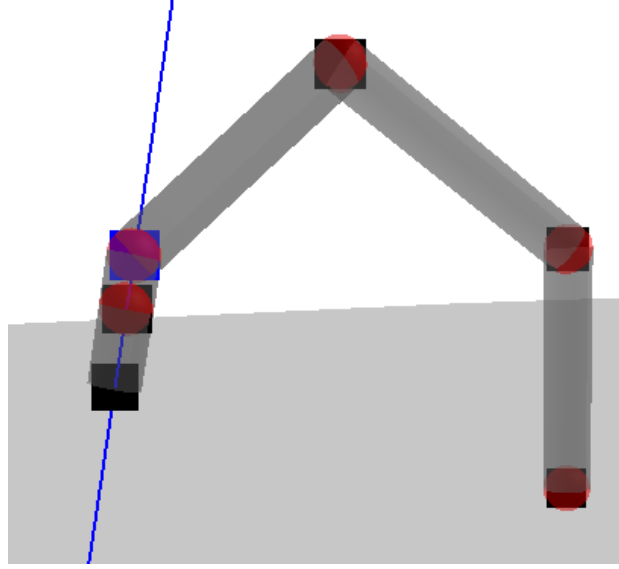
nc eklemin uzayda olabileceği konumu çember üzerinde sınırlandırılmıştır. nc eklem robotun çalışma alanı içinde olmalıdır. Çember ile robotun çalışma alanının kesişimi üçüncü eklemin konumunun olasılıklarını içermektedir. Bu işlem için konformal geometrik cebirde dış çarpım işlemi kullanılmaktadır. Denklem (4.11) ile kesişim açıklanmıştır ve şekil 4.14’de gösterilmiştir.

$$Kesişim_{Noktaifti} = Alan \wedge Daire \quad (4.11)$$



şekil 4.14 : Çalışma alanı ile dairenin kesişimi.

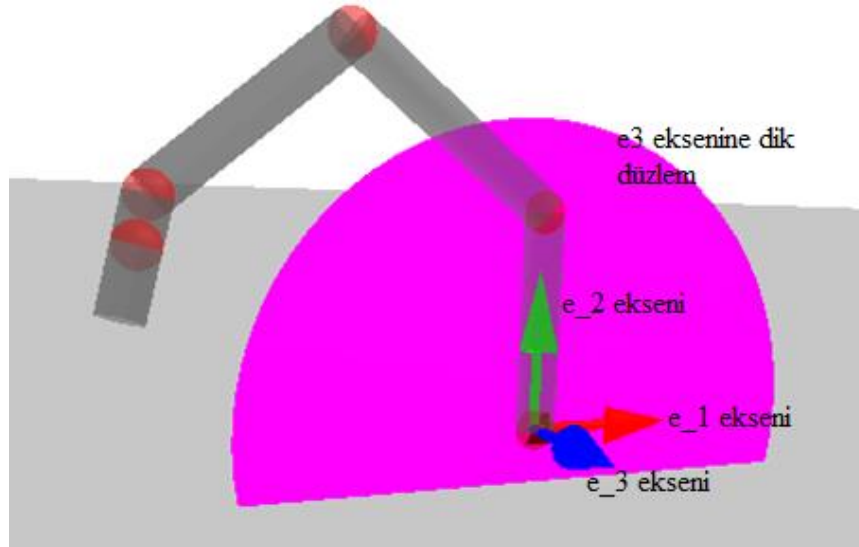
Şekil 4.14’ de gösterilen iki nokta ile de robot istenilen konuma istenilen yönelim ile gidebilmektedir. Robot mekanik sınırlarına ya da çalışma uzayına bağlı olarak nokta seçimi yapılmalıdır. Çalışma simülasyon olarak yapıldığı için noktalardan herhangi biri seçilebilmektedir.



Şekil 4.15 : Robotun genel çizimi.

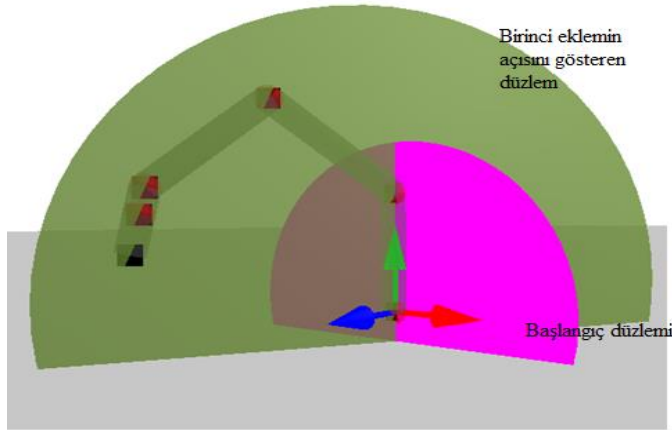
Robotun tüm eklem noktalarının yeri bulunduğu için eklemlerin açıları bulunmalıdır. Konformal geometrik cebirde iki objenin arasındaki açı, objelerin iç çarpımı yardımıyla bulunmuştur. İki obje arasındaki açının bulunması için denklem (2.1) kullanılmaktadır.

$$Açı = \cos^{-1} \left(\frac{Obj_1 \cdot Obj_2}{|Obj_1| |Obj_2|} \right) \quad (4.12)$$



Şekil 4.16 : Robotun ilk ekleminin başlangıç konumu.

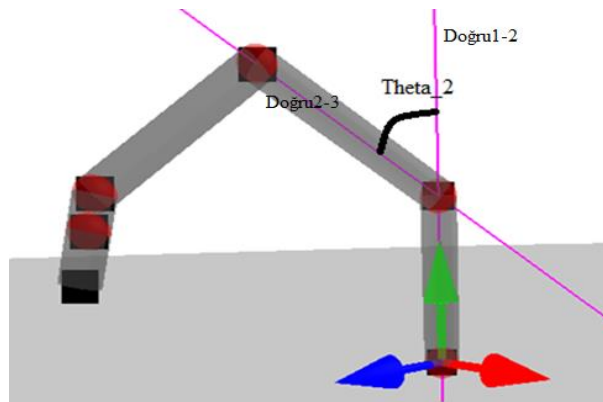
Robotun ilk eklemının açısının bulunması için robotun ilk ekleminden geçen bir alan çizilmelidir. Konformal geometrik cebirde üç nokta ile bir alan elde edilmektedir. Bundan dolayı robot çiziminde birinci eklemın konumu, ikinci eklemın konumu ve üçüncü eklemın konumu ile bir düzlem oluşturulmuştur. İlk eklemın yaptığı açı başlangıçta Şekil 4.16'da gösterildiği üzere e_3 eksine dik düzlem ile paralel olacaktır. E_3 eksenine dik olan düzlem referans olarak kullanılırsa Şekil 4.17'de gösterildiği gibi iki düzlem arasındaki açı birinci eklemın dönme açısını verecektir. Denklem (4.13)'de gösterildiği gibi iki düzlem arasındaki açı 60 derece bulunmaktadır.



Şekil 4.17 : Birinci eklemın açısı.

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{Düzlem_1 \cdot Düzlem_2}{|Düzlem_1| |Düzlem_2|} \right) \quad (4.13)$$

Robotun ikinci eklemının açısını belirlemek için robotun birinci eklemi ile ikinci eklemi arasında kol boyunca bir doğru oluşturulur ve ikinci eklemi ile üçüncü eklemi arasında kol boyunca bir doğru oluşturulur. Bu iki doğru arasında denklem (4.14) uygulandığında ikinci eklemın açısı 52.4 derece olarak bulunmuştur ve Şekil 4.18'de gösterilmiştir.

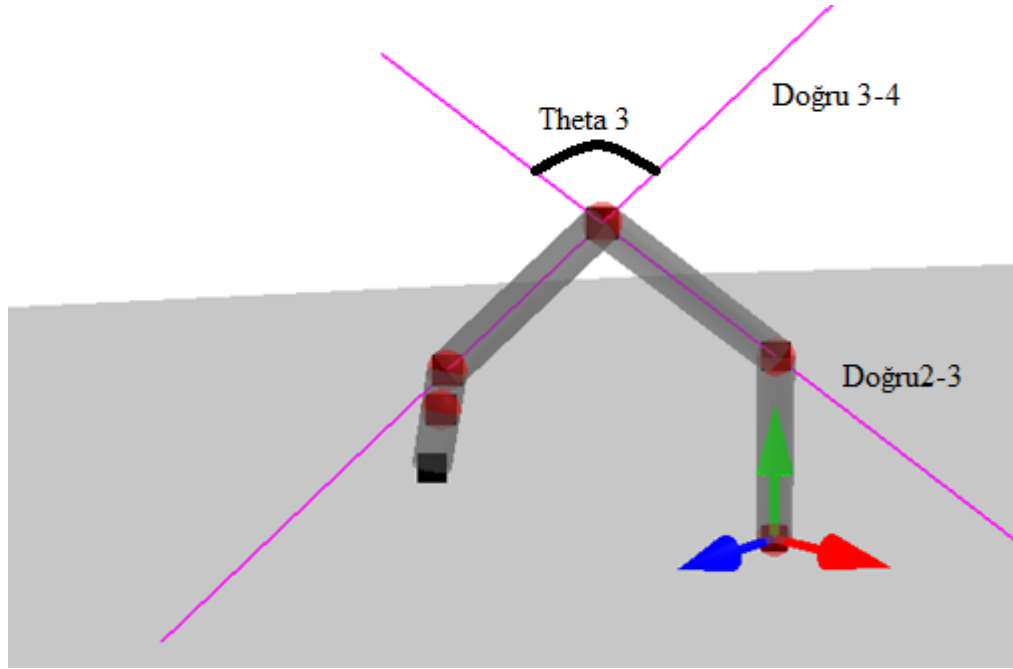


Şekil 4.18 : İkinci eklemın açısı.

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{Doğru_{12} \cdot Doğru_{23}}{|Doğru_{12}| |Doğru_{23}|} \right) \quad (4.14)$$

Robotun üçüncü eklemine açısını belirlemek için üçüncü eklem ile dördüncü eklem arasında doğru oluşturulmuştur. Doğru₂₋₃ ile doğru₃₋₄ arasında denklem (4.15) uygulandığında üçüncü eklem açısı 77 derece olarak bulunmuştur. Üçüncü eklem bulunması Şekil 4.19’da gösterilmiştir.

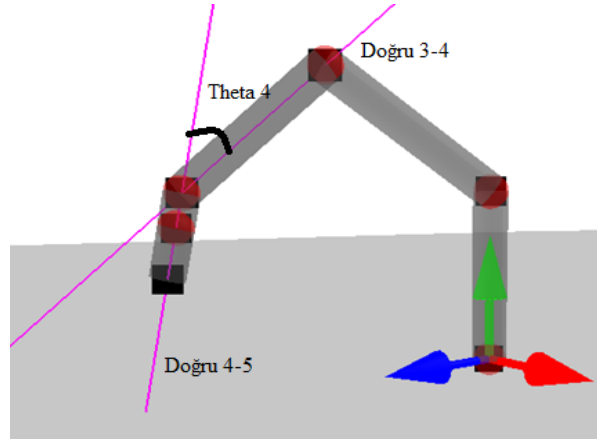
$$\theta_3 = \cos^{-1} \left(\frac{Doğru_{23} \cdot Doğru_{34}}{|Doğru_{23}| |Doğru_{34}|} \right) \quad (4.15)$$



Şekil 4.19 : Üçüncü eklem bulunması.

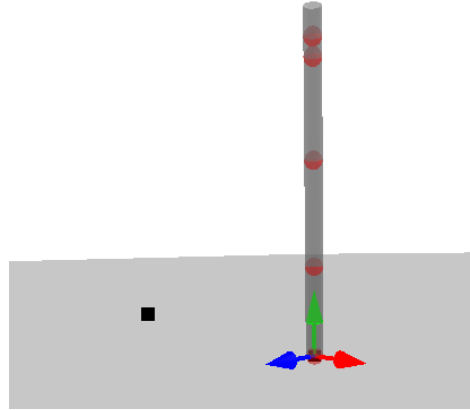
Robotun dördüncü eklemine açısını belirlemek için dördüncü eklem ile beşinci eklem arasında doğru oluşturulmuştur. Doğru₃₋₄ ile doğru₄₋₅ arasında denklem (4.16) uygulandığında üçüncü eklem açısı 36.5 derece olarak bulunmuştur. Dördüncü eklem Şekil 4.20’de bulunması gösterilmiştir.

$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{Doğru_{34} \cdot Doğru_{45}}{|Doğru_{34}| |Doğru_{45}|} \right) \quad (4.16)$$

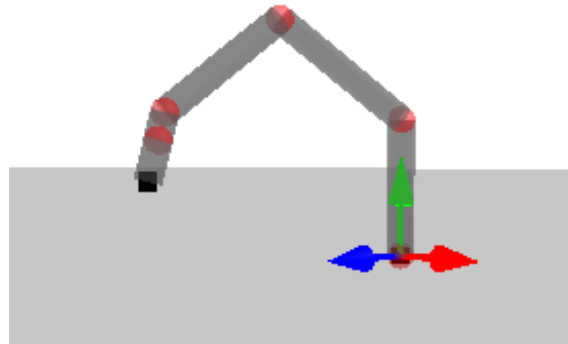


Şekil 4.20 : Dördüncü eklemin açısının bulunması.

Robotun beşinci ekleminin açı değişimi robotun istenilen noktaya ulaşmasını ya da yönelimini etkilememektedir. Bu nedenle, bu robot özelliklerine göre beşinci eklemin açı değişimi önemli değildir. Robotun sıfır konumu ve ulaşılacak istenilen nokta Şekil 4.21’de gösterilmiştir. Robotun gidilmesi istenilen konumu ise Şekil 4.22’de gösterilmiştir.



Şekil 4.21 : Robotun sıfır konumu.



Şekil 4.22 : Robotun istenilen konumu.

5. SONUÇ

Günümüz robotik çalışmalarında ters kinematik problemleri için kullanılan yöntemler geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Robotik çalışmalar için kullanılan klasik yöntemler ağır matematik işlemleri içermekte ve detaylı bir görsel bir sonuç sunamamaktadır. Bilgisayar grafiklerinin gelişmesi ve görsel yöntemlerin artmasıyla birlikte robotik alanındaki ters kinematik probleme görsel bir sonuç ya da çözüm getirilmesi fikri gelişmiştir.

Bu çalışmada, robotikteki ters kinematik problemine farklı bir matematik dili ile çözüm yolu bulunması amaçlanmıştır. Bu amaçla, öncelikle kullanımı çok yaygın olmayan ve daha çok bilgisayar grafikleri alanında kullanılan geometrik cebir tanıtılmıştır. Geometrik cebir ve özellikleri görsel örneklerle anlatılmış ayrıca, bu matematik dilinde meydana getirilmiş yeni işlemler ve özellikleri anlatılmıştır. Geometrik cebirde kullanılan yeni işlemler sayesinde objelere uygulanabilen iz düşüm, rejeksiyon, yansıma ve dönme işlemleri örneklerle açıklanmıştır.

Geometrik cebir genişletilerek 5 boyutlu uzaya sahip olan konformal geometrik cebir tanıtılmıştır. Konformal geometrik cebirde tanımlanabilen tüm objelerin, vektör denklemleri ile ifade edilebildiği gösterilmiştir. Bu özellikle konformal geometrik cebirde objeler arasındaki mesafeler ve objeler arası ilişkilerin bulunulması anlatılmıştır. Ayrıca konformal geometrik cebirde objelerin kesişim bölgelerinin görsel olarak bulunması ve matematiksel açıklamaları verilmiştir. Son olarak konformal geometrik cebirin robotik problemlerde kullanılmasının en büyük kaynağı olan tek işlemle dönme ya da öteleme ya da hem dönme hem öteleme işlemlerinin meydana getirilmesi örneklerle anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde ise robotik ters problemi için sanayide yaygın olarak kullanılan bir robot seçilmiştir. Robot olarak Kuka markasının beş dönel ekleme sahip olan bir robotu seçilmiştir. Robotun özellikleri ve boyutları anlatılmıştır. Bu robotun konformal uzayda modeli çizilerek model üzerinden ters kinematik çözüm bulunmuştur. Robotlarda ters kinematik problemlerinde bir robotun istenilen konuma ve istenilen yönelimle ulaşmasının yolları aranmaktadır. Bu amaçla konformal uzayda robota, robotun çalışma uzayı içerisinde bir gidilmesi istenilen nokta ve

vektör ile yönelim bilgisi verilmiştir. Bu bilgilerle robotun eklemlerinin gereken değerleri konformal geometrik cebirin özellikleri, işlemleri, objeleri ve obje uygulamaları ile bulunmuştur. Konformal uzayda hem robotun hem de çalışma uzayının görüntülenmesi ile robotun ters kinematik sonucu ya da sonuçlarının görsel olarak açıklanması gerçekleştirilmiştir.

Sanayide yaygın olarak kullanılan robotların birçoğunun ters kinematik problemleri gerekli kısıtlamalar ile çözüme kavuşturulmuştur. Fakat insansı robotlar ya da modüler robotların bu yeni matematik diliyle ters kinematik problemlerinin çözümü ya da hareket algoritmaları henüz literatürde bulunmamaktadır. Gelecek çalışmalarda bu yeni görsel matematik dili ile henüz çözüme kavuşturulmamış modüler robotların ters kinematik çözümleri ya da insansı robotların hareket algoritmaları için çözümlerin bulunulması umulmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Hildenbrand, D.** (2006). Geometric Computing in Computer Graphics and Robotics using Conformal Geometric Algebra.
- [2] **Pitt, J., Hidenbrand, D., Stelzer, M. ve Koch, A.** (2008). Inverse Kinematic of a Humanaid Robot based on Conformal Geometric Algebra using Optimized Code Generation, IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Daejeon, Korea, 1-3 Aralık.
- [3] **Wang, C., Wu, H. Ve Miao, Q.** (t.y.). Inverse Kinematics Computation in Robotics Using Conformal Geometric Algebra.
- [4] **Hestenes, D.** (t.y.). Old Wine in New Bottles: A New Algebraic Framework for Computational Geometry.
- [5] **Bayro-Corrochano, E. Ve Zamora-Esquivel, J.** (2007). Differential and Inverse Kinematics of Robot Devices using Conformal Geometric Algebra, Robotica, 25, 46-61.
- [6] **Kim, J. S., Ji Y. K. ve Park, J. H.** (2012). Inverse Kiematics Analysis of 7-DOF Anthropomorphic Robot Arm using Conformal Geometric Algebra, Journal of the Korean Society for Precision Engineering, 29, 1119-1127.
- [7] **Hildenbrand, D., Zamora, J. Ve Bayro-Corrochano, E.** (t.y.). Inverse Kinematics Computation in Computer Graphics and Robotics using Conformal Geometric Algebra.
- [8] **Hildenbrand, D., Lange, H., Stock, F. Ve Koch, A.** (t.y.). Efficient Inverse Kinematics Algorithm based on Conformal Geometric Algebra.
- [9] **Hildenbrand, D., Fontijne, D., Wang, Y., Alexa, M. Ve Dorst, L.** (2006). Competitive Runtime Performance for Inverse Kinematics Algorithms using Conformal Geometric Algebra, Eurographics.
- [10] **Ablamowicz, R., Fauser, B.** (2005). Mathematics of Clifford-A Maple Package for Clifford and Grasmann Algebras.
- [11] **Hildenbrand, D., Fontijne, D., Perwass, C. Ve Dorst, L.** (2004). Geometric Algrebra and its Application to Computer Graphics.
- [12] **Url-1** <http://www.kuka-robotics.com/res/sps/e6c77545-9030-49b1-93f5-4d17c92173aa_Spez_KR_AGILUS_fivve_en.pdf>, alındığı tarih: 14.12.2013

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ceren AKCAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Bursa- 09.02.1988

Adres: Küçükçekmece/İSTANBUL

E-Posta: cerenakcan1988@gmail.com

Lisans: Mekatronik Mühendisliği, KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

