

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAFES SİSTEMLERİN OPTİMUM TASARIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. Cem Celal TUTUM

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : KATI CİSİMLERİN MEKANİĞİ

MAYIS 2005

KAFES SİSTEMLERİN OPTİMUM TASARIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. Cem Celal TUTUM
(503021507)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Haziran 2005

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Erol ŞENOCAK
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Süleyman TOLUN
Prof.Dr. Can ÖZSOY

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasındaki yardımlarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Erol Şenocak'a, TAI'de tanıştığım Sayın Mustafa Açıkğöz'e, Hüseyin Denli'ye ve her zaman bana destek veren aileme ve de özellikle Raik C. Orbay'a teşekkür ederim.

Mayıs 2005

Cem Celal TUTUM

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	iv
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU	3
2.1. Kısıtlı Optimizasyon Problemi	3
2.1.1. Standart optimizasyon problemi	3
2.1.2. K-T koşulları	4
2.1.3. İkinci dereceden yeterlik koşulları	5
2.1.4. Genel minimum	6
2.2. SQP Yöntemi	7
3. KAFES SİSTEMLER VE ÖRNEKLER	9
3.1. Hiperstatik Kafes Sistemlerin Çözümü	9
3.2. Kafes Sistemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözümü	12
3.2.1. Sistemin statik ve dinamik davranışının elde edilmesi	12
3.2.2. LU ayrıklaştırma yöntemi	16
3.3. Kafes Sistem Optimizasyonunun Matematiksel İfadesi	17
3.4. Örnekler	19
3.4.1. On elemandan oluşan kafes sistem	20
3.4.2. Yirmi beş elemandan oluşan kafes sistem	21
3.4.3. Elli elemandan oluşan kafes sistem	22
3.4.4. Yetmiş beş elemandan oluşan kafes sistem	23
3.4.5. Yüz elemandan oluşan kafes sistem	24
3.4.6. Yüz yirmi beş elemandan oluşan kafes sistem	26
3.4.7. Yüz elli elemandan oluşan kafes sistem	27
3.4.8. İki yüz elemandan oluşan kafes sistem	28
3.5. Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması	29
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33

KISALTMALAR

LP	: Linear Programming
NLP	: Nonlinear Programming
SQP	: Sequential Quadratic Programming
BFGS	: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
LU	: Lower Upper

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1 : On elemandan oluşan sistemin çözümü	22
Tablo 3.2 : Yirmi beş elemandan oluşan sistemin çözümü	24
Tablo 3.3 : Elli elemandan oluşan sistemin çözümü	25
Tablo 3.4 : Yetmiş beş elemandan oluşan sistemin çözümü	26
Tablo 3.5 : Yüz elemandan oluşan sistemin çözümü	28
Tablo 3.6 : Yüz yirmi beş elemandan oluşan sistemin çözümü	29
Tablo 3.7 : Yüz elli elemandan oluşan sistemin çözümü	30
Tablo 3.8 : İki yüz elemandan oluşan sistemin çözümü	31
Tablo 3.9 : Çözüm sürelerinin karşılaştırılması	32

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 : İzostatik Kafes Sistem	9
Şekil 3.2 : Hiperstatik Kafes Sistem.....	9
Şekil 3.3 : Düzlem çubuk elemanın lokal ve global koordinatlardaki gösterimi.....	12
Şekil 3.4 : Çubuğun kritik yük altında burkulması	18
Şekil 3.5 : On elemandan oluşan kafes sistemin başlangıçtaki geometrisi.....	20
Şekil 3.6 : On elemandan oluşan kafes sistemin optimizasyon sonucu.....	20
Şekil 3.7 : Yirmi beş elemandan oluşan kafes sistemin başlangıçtaki geometrisi.....	21
Şekil 3.8 : Yirmi beş elemandan oluşan kafes sistemin optimizasyon sonucu.	21
Şekil 3.9 : Elli elemandan oluşan kafes sistemin başlangıçtaki geometrisi.....	22
Şekil 3.10 : Elli elemandan oluşan kafes sistemin optimizasyon sonucu.....	22
Şekil 3.11 : Yetmiş beş elemandan oluşan kafes sistemin başlangıçtaki geometrisi.....	23
Şekil 3.12 : Yüz elemandan oluşan kafes sistemin başlangıçtaki geometrisi	24
Şekil 3.13 : Yüz elemandan oluşan kafes sistemin optimizasyon sonucu.....	25

SEMBOL LİSTESİ

d	: Araştırma yönü
e_i	: Eleman boyundaki şekil değişimi
E	: Elastisite Modülü
H	: Hessian
I	: Çubukların atalet momenti
L_i	: Çubuk boyu
k	: Eksenel katılık
T	: Transformasyon matrisi
$\{u\}$	: Düğüm noktalarındaki yer değiştirme vektörü
$\{W\}$	: Global kuvvet vektörü
σ_i	: Eleman gerilmesi
ε_i	: Gerinme
α	: Adım miktarı

KAFES SİSTEMLERİN OPTİMUM TASARIMI

ÖZET

Bu çalışmada düzlem kafes sistemlerin belirli bir yükleme koşulu altında gerilme, yer değiştirme, burkulma ve doğal frekans kısıtlarına göre optimum tasarımı incelenmiştir. Ele alınan kafes sistemlerde, düğüm noktalarının yerleri değişmemektedir. Tasarım değişkeni olarak kafes sistem elemanlarının kesit alanları kullanılarak boyut optimizasyonu uygulanmıştır. Ayrıca optimizasyon işlemi sırasında belirli bir minimum kesit alanı değerine ulaşmış elemanlar, kafes sistemin rijitliğine katkısı olmayacağı düşüncesiyle atılarak topoloji optimizasyonu da uygulanmıştır. Optimizasyon problemindeki amaç kafes sistemin kütlesini mümkün olan en küçük değere çekmektir.

Kafes sistemlerin statik ve dinamik davranışlarına ilişkin bilgiler sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilmiş, optimizasyon için ise SQP (Sequential Quadratic Programming) yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen bütün sonuçlar, belirli karşılaştırma problemlerinde kullanılan SLP (Sequential Linear Programming), FSD (Fully Stress Design), vb. optimizasyon yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar ile kıyaslandıktan sonra kafes sistemdeki eleman sayısı artırılmaya çalışılmıştır. Eleman sayısı arttıkça süre üstel olarak artmaya başlamıştır. Çözüm süresini azaltmak için sonlu elemanlar yöntemi kullanılırken elde edilen katılık ve kütle matrislerinin simetrik ve de bol sıfırlı yapısından faydalanarak LU (Lower Upper) Ayrıklaştırma yöntemi kullanarak daha kısa sürede çözülmesi sağlanmıştır.

OPTIMUM DESIGN OF TRUSS SYSTEMS

SUMMARY

In this work, optimum design of planar truss systems subject to stress, displacement, buckling and natural frequency constraints is considered. Joint positions of truss systems considered are fixed. Cross-sectional areas are used as the design variables, by this way, size optimization was applied. Furthermore topology optimization was considered that a definite minimum cross-sectional area value was defined, then according to the results of the optimization procedure, the members which have this minimum value were canceled due to their lack of usefulness in the point of rigidity. The objective of the optimization problem is to minimize the mass of the truss system subject to one load case.

Static and dynamic responses of truss systems were obtained using finite element method and SQP (Sequential Quadratic Programming) was used for the optimization procedure. All results were compared with some benchmark problems that considered SLP (Sequential Linear Programming), FSD (Fully Stressed Design), etc. as optimization method. Then, the number of members in the truss systems were increased, as a result, the time elapsed began to increase exponentially. In order to increase the speed of the the solution process, LU (Lower Upper) Decomposition Method was used due to the symmetric and sparse structure of the stiffness and mass matrices that obtained during the finite element solution.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

Kafes sistemler sadece eksenleri boyunca yük taşıyan ve düğüm noktaları denilen noktalarda birleştirilen çubuklardan oluşur. Yükler kafes sistemin düğüm noktalarına uygulanır. Kafes sistemler, yapısal eleman olarak kullanılmasının yanı sıra sürekli bir ortamı ayırklaştırmak için de kullanılır ve bu özelliği sebebiyle de optimal topolojinin araştırıldığı birçok problemde göz önüne alınmaktadır.

Kafes sistemlerin optimum tasarımında farklı tasarım değişkenleri veya kısıtları uygulanmaktadır. Şekil optimizasyonunda düğüm noktalarına hareket etme serbestliği verilmiştir. Tasarım değişkeni olarak, boyut optimizasyonundaki kesit alanı değişkenine ilave olarak düğüm noktalarının global koordinatları alınır. Bu tip problemlerde genellikle penaltı yöntemleri kullanılmaktadır, düğüm noktalarının yer değiştirmesi ile ilgili kısıt bilgisi amaç fonksiyonunun içersine yerleştirilerek kısıtsız optimizasyon problemi çözülür [1]. Uygun penaltı değerinin belirlenmesi önemli bir husustur. Çünkü dış veya iç penaltı yöntemlerinde çözüm, ancak penaltı parametrelerinin belirlenen limit yaklaşımı sonunda elde edilir. Kesin Eklenmiş Lagrange Çarpanı Yöntemi (Exact Augmented Lagrange Multiplier Method) kullanıldığında bu sorun ortadan kaldırılır çünkü penaltı katsayısının belirli bir değeri için kesin çözüm bulunur, yakınsama kısıtı yoktur fakat Lagrange çarpanlarının önceden bulunması gerekir [2-5].

Kafes yapıların tasarımında, her türlü çalışma koşuluna yönelik çeşitli kısıtlar göz önüne alınabilir [6]. Bu çalışmada gerilme, yer değiştirme, burkulma ve doğal frekans kısıtlarını sağlayan, belirli bir yükleme koşuluna göre minimum ağırlığa sahip kafes sistemler araştırılmıştır. Yapıların statik ve dinamik davranışlarının elde edilmesi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış, optimizasyon yöntemi için ise SQP algoritması seçilmiştir [7]. Hem sonlu elemanlar programı, hem de optimizasyon için gerekli programlar Matlab 7.0'da hazırlanmıştır. İlk başta on eleman içeren bir sistem çözülmüş, daha sonrasında eleman sayısı doğrusal olarak

artırılarak iki yüz elemana kadar çıkarılmıştır. Eleman sayısı arttıkça çözüm süresi üstel olarak artmıştır. Çözüm süresini kısaltmaya yönelik sonlu elemanlar modelinin çözümü için LU Ayırıştırma yöntemi dahil edilmiştir [8,9].

2. OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU

2.1 Kısıtlı Optimizasyon Problemi

Kısıtlı optimizasyon problemlerinde amaç fonksiyonunun belirli eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarına göre minimum ya da maksimum değeri aranır. Amaç ya da kısıt fonksiyonları doğrusal ise kısıtlı optimizasyon problemi LP problemi olarak tanımlanır, aksi takdirde optimizasyon problemini tanımlayan fonksiyonlardan herhangi birisi doğrusal değil ise problem NLP problemi olarak nitelendirilir. Kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümüne geçmeden önce standart optimizasyon probleminin tanımlanması gerekir.

2.1.1 Standart optimizasyon problemi

Standart optimizasyon probleminde amaç fonksiyonunun belirli kısıtlar altında minimum olduğu en uygun tasarım değişkenleri aranır. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

Amaç fonksiyonu:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{Minimum} \quad (2.1)$$

Sırasıyla eşitlik ve eşitsizlik kısıtları:

$$h_i(x) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2)$$

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

(2.1-3)'de belirtilen amaç ve kısıt fonksiyonlarının haricinde tanımlanan bir diğer kısıt tipi de tasarım değişkenlerini doğrudan etkileyen boyut kısıtlarıdır. Boyut kısıtları, tasarım değişkenleri için alt ve üst sınır belirtilmesiyle tanımlanır.

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

x_{il} ve x_{iu} sırasıyla tasarım değişkenleri için tanımlanmış alt ve üst sınırlardır. Eşitlik kısıtlarının sayısı tasarım değişkenlerinin sayısına eşit veya daha az olmalıdır. Aksi

halde kısıtlar lineer bağımlı olur ve formülasyon çelişkili (inconsistent) olarak tanımlanır.

2.1.2 K-T koşulları

K-T koşulları standart formda yazılmış bir kısıtlı optimizasyon problemi için birinci dereceden gereklilik şartlarını belirtir. Gereklilik koşulunun uygulanabilmesi için öncelikle Lagrange Fonksiyonunun yazılması gerekir.

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum u_i g_i(x) + \sum v_i h_i(x) \quad (2.5)$$

(2.5) denklemindeki amaç ve kısıt fonksiyonları standart optimizasyon probleminde belirtildiği şekilde tanımlanmak üzere $L(x, u, v)$ fonksiyoneli Lagrange fonksiyonunu ifade etmektedir. Lagrange fonksiyonu, kısıtlı bir problemin kısıtsız bir probleme dönüştürülmesini sağlar. Lagrange fonksiyonu için geçerli olan bütün gereklilik koşulları, orijinal kısıtlı problem için de aynen geçerlidir.

K-T koşullarının yazılabilmesi için düzgünlük (regularity) koşulu kabulü yapılır. Bu kabule göre öyle u_i ve v_i Lagrange çarpanları vardır ki:

$$\nabla f(x^*) = - \left[\sum u_i \nabla g_i(x^*) + \sum v_i \nabla h_i(x^*) \right] \quad (2.6)$$

Matematiksel olarak (2.6) denkleminin anlamı şudur: Amaç fonksiyonunun gradyanı, eşitlik ve aktif eşitsizlik kısıt fonksiyonlarının gradyanlarının lineer kombinasyonu cinsinden ifade edilebilir. Bunun için temel gereklilik, bütün eşitlik ve eşitsizlik kısıt fonksiyonlarının kendi aralarında lineer bağımsız olmasıdır. Bu koşula düzgünlük koşulu denir. Optimum olma koşulları yalnızca düzgün (regular) noktalarda geçerlidir. Fakat bütün minimum noktalar düzgün olmak zorunda değildir. Düzgünlük koşulunun gerekliliği, K-T koşullarının kullanımına bağlıdır.

Bütün eşitsizlik kısıtlarının eşitlik kısıtlarına dönüştürülmesi uygun bir pozitif sayının, eşitsizliğin sol tarafına eklenmesiyle mümkün hale gelir:

$$g_i(x) + s_i^2 = 0, \quad i=1, \dots, m \quad (2.7)$$

(2.7) denklemindeki s_i değişkeni gevşek değişken (slack variable) adını alır, s_i^2 şeklinde kullanılmasının sebebi eklenen değişkenin yalnızca pozitif değer

taşımasının istenmesidir. Bu durumda Lagrange fonksiyonu eşitsizlik kısıtının (2.7)'deki son haliyle yazılacak olursa:

$$L(x, u, v, s) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i [g_i(x) + s_i^2] + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x) \quad (2.8)$$

Kısıtsız optimizasyon probleminin minimum değerini bulmak için (2.8)'de elde edilen Lagrange fonksiyonunun bütün değişkenlere göre türevi sıfıra eşitlenir. Başka bir deyişle Lagrange fonksiyonunun gradyanını sıfır yapan tasarım değişkenleri aranır.

$$\nabla L = \begin{pmatrix} \partial L(x, u, v, s) / \partial x = 0 \\ \partial L(x, u, v, s) / \partial u = 0 \\ \partial L(x, u, v, s) / \partial v = 0 \\ \partial L(x, u, v, s) / \partial s = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i(x) = 0 \\ g_i(x) + s_i^2 = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 2u_i s_i = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

(2.9)'da ifade edilen denklem sisteminin ilk satırdaki denklem seti gradyan koşulunu belirtir. İkinci ve üçüncü satırdaki denklem setleri ise kısıtların sağlanması gerektiğini, yani çözümün makul (feasible) olması gerektiğini vurgulamaktadır. Son denklem seti ise değiştirme (switching) koşulunu ifade eder; $u_i=0$ veya $s_i=0$ olması gerektiğini gösterir. Eğer gevşek değişken (s_i) sıfır ise, söz konusu eşitsizlik kısıtı pozitif bir Lagrange çarpanı değerine sahip aktif bir kısıttır. Aksi takdirde Lagrange çarpanı sıfırdır, bu da kısıtın aktif olmadığını gösterir. Bu koşul düşünüldüğünde, birinci denklem sisteminde geçen eşitsizlik kısıtlarının aktif kısıtlar olduğu bir kez daha vurgulanmış olur.

K-T koşulları kısıtlı minimizasyon problemleri için gereklilik koşullarıdır. K-T koşullarını sağlayan noktalar yalnızca lokal minimum olmaya aday noktalardır. Gerçekten lokal minimum noktası olup olmadıklarını anlamak için yeter koşullar incelenmelidir.

2.1.3 İkinci dereceden yeterlik koşulları

K-T koşulları (konveks problemler dışında) kısıtlı optimizasyon problemleri için yalnızca gereklilik koşullarını ifade eder. Lagrange fonksiyonu kısıtsız bir fonksiyon olduğundan, gerek şartları sağlayan bir K-T noktasında (x^*, u^*, v^*) yeterlik koşullarının incelenmesi de aşağıda (2.10) denkleminde gösterildiği gibidir.

$$d^T \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla^2 h_i(x^*) \right] d \geq 0 \quad (2.10)$$

Kısıtsız problem olması durumunda, (2.10) denklemindeki d 'nin seçimi ile ilgili bir kısıt yoktur, rasgele seçilebilir. Fakat kısıtlı problemlerde d 'nin seçimi kısıtlara bağlıdır, makul değerler (feasible) almalıdır. Lagrange fonksiyonunun Hessian'i ($\nabla^2 f(x^*)$) pozitif belirli olması halinde özel bir durum söz konusudur ve d rasgele seçilebilir.

2.1.4 Genel minimum

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, makul bir S kümesinde kapalı ve sınırlı ise, S 'de bu fonksiyonun bir genel minimumu vardır (Weierstrass Teoremi). Bu teoreme dayanarak amaç fonksiyonunun genel bir minimumu olduğu garanti edilir. Konveks problemler için K-T koşulları aynı zamanda yeter koşullardır. Yani konveks bir problemde K-T koşullarını sağlayan bir nokta aynı zamanda global minimumdur.

x^* noktası birinci mertebeden K-T gerek şartlarını optimum tasarım problemi için sağlamış olsun. Lagrange fonksiyonunun x^* noktasındaki Hessian matrisi,

$$H = \nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^m u_i \nabla^2 g_i + \sum_{i=1}^p v_i \nabla^2 h_i \quad (2.11)$$

olur, $d \neq 0$ olmak üzere x^* noktasında,

$$\nabla h_i^T d = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.12)$$

ve bütün aktif eşitsizlikler için,

$$\nabla g_i^T d = 0 \text{ ve } u_i > 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

Ayrıca $u_i = 0$ iken kısıtlar için $\nabla g_i^T d \leq 0$ eşitsizliğine izin verilir. Optimum tasarım problemi için x^* noktasının genel minimum olması için (2.14) denklemini sağlanmalıdır.

$$Q = d^T \nabla^2 L(x^*) d \quad (2.14)$$

$$Q \geq 0$$

Bir optimizasyon probleminin konveks olabilmesi için eşitlik kısıtlarının doğrusal, amaç ve kısıt fonksiyonlarının konveks olması gerekir.

2.2 SQP Yöntemi

SLP algoritmasının en büyük kusuru rasgele seçilen hareket limitleridir. Hareket limit parametresinin küçük seçilmesi durumunda, yakınsama hızı optimum noktaya yaklaşıldıkça çok azalabilir. Ters durumda büyük hareket limit parametresi seçildiğinde ise lineerleştirilmiş kısıtların kullanılmasından dolayı problemler çıkabilir (örneğin orijinal problem konveks iken, kısıtların lineerleştirilmesi sonucu problem sınırsız (unbounded) hale gelebilir).

SQP’de ise bu olumsuzluk hareket limitinin doğrudan değil de dolaylı yoldan lineerleştirilmiş amaç fonksiyonuna eklenmesi ile giderilmiştir. Hareket limiti, yön bulma alt problemine (direction-finding subproblem) (2.15) denkleminde görüldüğü gibi eklenir:

$$\frac{1}{2}d^T d \quad (2.15)$$

Bu durumda amaç fonksiyonu ikinci dereceden bir fonksiyondur. Kısıt fonksiyonları ise halen lineerdir. Sonuç olarak yön bulma alt problemi artık QP problemine dönüşmüştür. QP Alt Problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned} \text{Min. } \nabla f(x^k)d + \frac{1}{2}d^T d \\ \text{Şu kısıtlar altında: } \begin{pmatrix} h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \rightarrow i = 1, 2, \dots, p \\ g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d \leq 0 \rightarrow i = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

İyileştirilmiş (Refined) SQP Metodu’nda, Standart SQP (Dual QP probleminin kullanıldığı) ile oluşturulan arama yönünü daha etkin bir şekilde belirlemek için lineerleştirilmiş amaç fonksiyonuna daha genel bir ikinci dereceden terim eklemesi düşünülmüştür.

$$\begin{aligned} \text{Min. } \nabla f(x^k)d + \frac{1}{2}d^T Hd \\ \text{Şu kısıtlar altında: } \begin{pmatrix} h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d = 0 \rightarrow i = 1, 2, \dots, p \\ g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T d \leq 0 \rightarrow i = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17) denklemindeki H (Hessian) matrisinin,

$$H = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^m u_i \nabla^2 g_i + \sum_{i=1}^p v_i \nabla^2 h_i \quad (2.18)$$

(2.18) denklemindeki gibi ifade edilmesi iki yönden zorluk çıkarmaktadır; Fonksiyonların ikinci türevlerinin hesaplanması gerektiğinden sayısal hesaplamalar zorlaşır ve Lagrange fonksiyonunun Hessian matrisi pozitif belirli olmayabilir, bu durumda amaç fonksiyonuna eklenen ikinci dereceden terim de pozitif olmayabilir.

Bu zorlukları aşmak için BFGS yöntemi ile oluşturulmuş pozitif belirli bir Hessian kullanılır. İlk adımda Hessian olarak birim matris kullanılır ve her adımda bir yenilenir.

$$\begin{aligned} H^{(k+1)} &= H^{(k)} + \frac{\gamma \gamma^T}{q^T s} - \frac{H^{(k)} s s^T H^{(k)}}{s^T H^{(k)} s} \\ \Rightarrow s &= x^{(k+1)} - x^{(k)}, \Rightarrow q = \nabla_x L^{(k+1)} - \nabla_x L^{(k)} \\ \Rightarrow \nabla_x L &= \nabla f + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma &= \theta q + (1 - \theta) H^{(k)} s \\ \Rightarrow &\left(\begin{aligned} 1.0 &\Leftrightarrow q^T s \geq 0.2 s^T H^{(k)} s \\ \frac{0.8 s^T H^{(k)} s}{s^T H^{(k)} s - q^T s} &\Leftrightarrow q^T s \leq 0.2 s^T H^{(k)} s \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Hessian matrisinin yenilenme şekli (2.19) numaralı denklemde gösterilmiştir. Arama yönü belirlendikten sonra arama yönü boyunca gidilecek adım miktarı tespit edilir. Bunun için ikinci dereceden ya da üçüncü dereceden interpolasyon kullanılabilir. Adım miktarı hesaplandıktan sonra yeni değişken değeri belirlenir.

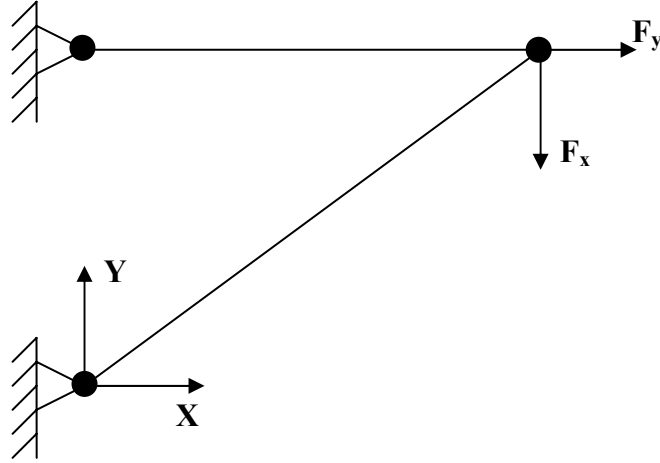
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d \quad (2.20)$$

(2.20) numaralı denklemde $x^{(k+1)}$ yeni tasarım değişkenini, $x^{(k)}$ şu anki tasarım değişkenini, α adım miktarını ve de d araştırma yönünü göstermektedir. Eğer $\|d\|$ belli bir tolerans değerinden küçük ise iterasyon durdurulur. Aksi takdirde QP problemine geri dönülür ve yeni arama yönü hesaplanır. Arama yönü ile ilgili tolerans sağlandığı zaman (amaç fonksiyonu daha fazla azaltılamadığı zaman) elde edilen $x^{(k+1)}$ vektörü kısıtlı optimizasyon probleminin minimum noktasını verir.

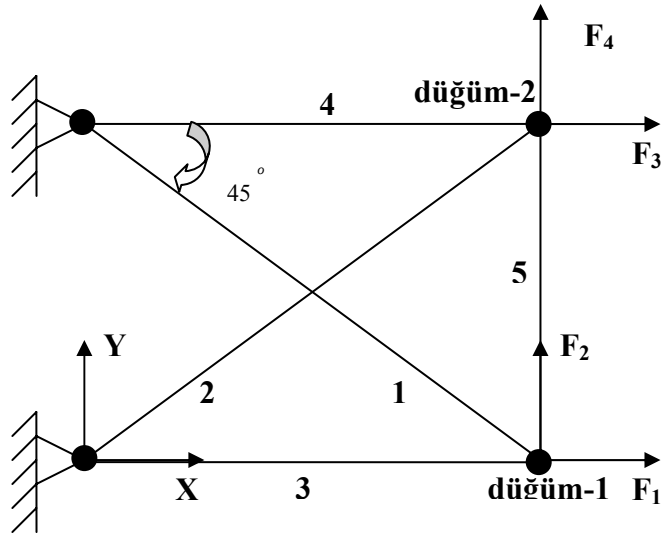
3. KAFES SİSTEMLER VE ÖRNEKLER

3.1 Hiperstatik Kafes Sistemlerin Çözümü

İzostatik kafes sistemlerde, çubuklardaki kuvvetler düğüm noktalarında yazılan denge denklemleri ile hesaplanabilir (Şekil 3.1). Hiperstatik sistemlerde, denge için gerekli olandan daha fazla sayıda çubuk ya da destek vardır (Şekil 3.2). Bu tip sistemlerde denge denklemleri çözüm için yeterli değildir.



Şekil 3.1: İzostatik Kafes Sistem



Şekil 3.2: Hiperstatik Kafes Sistem

Uygunluk ve bünye denklemleri gibi başka bağıntıların kullanılması gerekir [10]. Bulunan çözümün doğru olabilmesi için temel bağıntıların sağlanması gerekir. Bu temel bağıntılar ve Şekil 3.2’de gösterilen beş elemandan oluşan kafes sistem için çubuklara gelen kuvvetlerin bulunması aşağıda açıklanmıştır.

Denge Denklemleri: Sisteme etkiyen dış kuvvetler ve iç kuvvetler her bir düğüm noktasında denge durumunu oluşturmaktadır. Şekil 3.2’deki kafes sistemde beş tane çubuk, dört tane düğüm noktası vardır. Kafes sistemin 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarına x ve y doğrultularında sırasıyla F_1 , F_2 , F_3 ve F_4 kuvvetleri uygulanmıştır. Hiperstatik olan bu kafes sistemin 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarında denge denklemleri yazılırsa,

$$\sum F_x = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (3.2)$$

toplam dört adet denklem elde edilir ve bu denklemler (3.1-2) matris formuna getirilirse,

$$F_j = Rf_i \quad \begin{matrix} j=1,\dots,4 \\ i=1,\dots,5 \end{matrix} \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) numaralı denklemde F_j düğüm noktalarına dışardan uygulanan ve de f_i çubuklardaki kuvvet vektörleridir. R ise çubuk kuvvetleri ile dışardan uygulanan kuvvetler arasındaki ilişkiyi gösteren 4×5 boyutunda bir matristir.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

(3.3) denklemi açık halde yazılırsa (3.4) denklemi elde edilir.

Uygunluk Denklemleri: Kafes sistemi oluşturan elemanlar birbirlerinden bağımsız deforme olamazlar. Yani birbirlerine uygun olarak şekil değiştirmek zorundadırlar. Çubukların boy değişimleri e_i ve düğüm noktalarının yer değişimleri d_i olsun. R^T çubuklardaki boy değişimi ile düğüm noktalarının yer değişimi arasındaki bağıntıyı

veren matris olup (3.3) denklemindeki $\mathbf{R}$ matrisinin transpozesidir. Bu durumda uygunluk şartı,

$$e_i = R^T d_j \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 5 \\ j = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir.

Bünye Denklemi: İç kuvvetler ve deformasyonlar elementin gerilme-gerinme ilişkisini sağlamalıdır. Bu bağıntıyı matematiksel olarak şu şekilde ifade edebiliriz.

$$f_i = k_i e_i \quad i = 1, \dots, 5 \quad (3.6)$$

(3.6) numaralı denklemdaki k_i çubuklara gelen kuvvetler ile çubukların boy değişimi arasındaki ilişki olup aşağıdaki bağıntı ile belirlidir,

$$k_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (3.7)$$

Bu bağıntıya göre A_i çubukların kesit alanlarını, L_i çubukların boylarını ve de E_i her bir çubuğun elastiklik modülünü göstermektedir. Bu problemde bütün çubukların aynı malzemeden yapıldığı kabul edilmiştir. Bu durumda k_i matrisi şu şekilde gösterilebilir,

$$k_i = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_4 A_4}{L_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_5 A_5}{L_5} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Çubuk kuvvetlerini bulmak için (3.5) denklemini (3.6) denkleminde yerine konursa,

$$f_i = k_i R^T d_j \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 5 \\ j = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) denkleminde (d_j) 'nin açık olarak ifade edilmesi gerekir, bunun için (3.6) denklemini (3.3) denkleminde yerine konursa,

$$F_j = Rk_i e_i \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 5 \\ j = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (3.10)$$

bulunur ve bu denklemde e_i yerine (3.5) denklemiindeki değeri konursa,

$$F_j = Rk_i R^T d_j \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) numaralı denklemde,

$$K = Rk_i R^T \quad (3.12)$$

dönüşümü yapılırsa simetrik **K** matrisi elde edilir. Beş elemanlı sistem için **K** matrisinin açık olarak gösterimi,

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} + k_4 & \frac{k_2}{2} & -k_4 & 0 \\ \frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} + k_3 & 0 & 0 \\ -k_4 & 0 & \frac{k_1}{2} + k_4 & \frac{-k_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-k_1}{2} & \frac{k_1}{2} + k_5 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde dir. Düğüm noktalarındaki yer değişimini bulabilmek için (3.12) numaralı denklemi (3.11)'de yerine koyarsak,

$$d_j = K^{-1} F_j \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.14)$$

sonucu elde edilir. Bu denklem sembolik olarak çözülüp (3.11) numaralı denklemde yerine konursa,

$$f_i = k R^T K^{-1} F_j \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, 4 \\ i = 1, \dots, 5 \end{matrix} \quad (3.15)$$

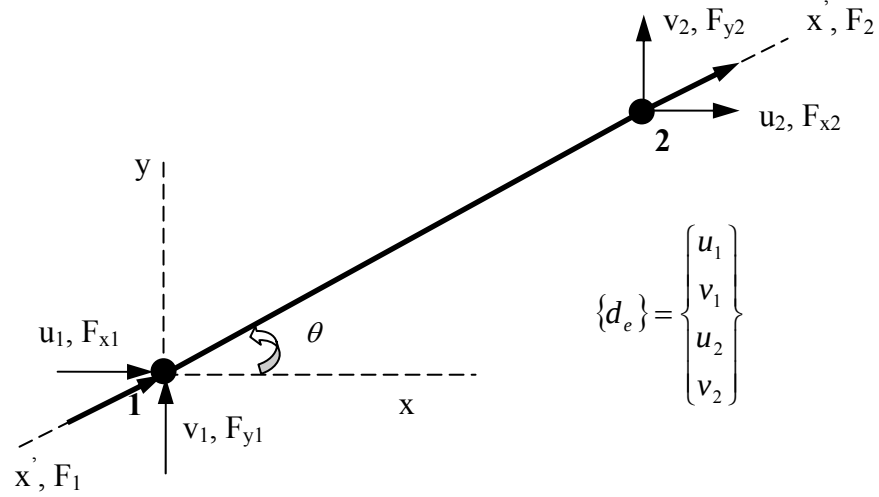
her bir çubuğa gelen kuvvet hesaplanmış olur. Bu sonuçtan yararlanarak gerilme bilgisini de her bir çubuğa gelen kuvveti çubukların kesit alanlarına bölerek elde etmiş oluruz.

3.2 Kafes Sistemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözümü

3.2.1 Sistemin statik ve dinamik davranışlarının elde edilmesi

Kafes sistemin düğüm noktaları sonlu eleman modelinin düğüm noktaları durumundadır. Kafes sistemin her bir çubuğu, sonlu eleman modelinde birer eleman

ile temsil edilmiştir. Çubuk elemanlar yalnızca doğrultuları boyunca yük taşırlar, eğilme yükü taşımazlar. Bu sebeple sonlu elemanlar modelinde de çubukların her bir düğüm noktasında iki serbestlik derecesi mevcuttur. Dış kuvvetler yalnızca çubukların düğüm noktalarına uygulanır.



Şekil 3.3: Düzlem Çubuk Elemanının Lokal ve Global Koordinatlardaki Gösterimi

Şekil 3.3'te tanımlanan x' eksenini lokal koordinatlardaki çubuk eksenini, x ve y eksenleri ise global koordinatları (iki serbestlik derecesi mevcut) belirtmektedir. Lokal koordinatlarda tanımlanmış bir yer değiştirme vektörünün global koordinatlarda gösterimi,

$$\{d_e'\} = [T]\{d_e\} \quad (3.16)$$

(3.16) numaralı denklemdeki $[T]$ matrisi dönüşüm matrisidir ve açık şekilde gösterimi,

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Bu denklemdeki c ve s terimleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} c &= \cos(\theta) \\ s &= \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

değerlerini ifade ederler. Aynı şekilde dışardan uygulanan kuvvetler de global koordinatlarda ifade edilirse,

$$\{F_e\} = [T]^T \{F_e'\} \quad (3.19)$$

(3.19) numaralı denklemde $\{F_e\}$ global koordinatlarda, $\{F_e'\}$ ise lokal koordinatlarda düğüm noktalarına uygulanan kuvvet vektörlerini göstermektedir. Global koordinatlarda elemente ait denge denkleminin ifadesi ($\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$) ,

$$[k_e]\{d_e\} = \{F_e\} \quad (3.20)$$

(3.20) denklemindeki $[k]$ matrisi çubuk elemanın, global koordinatlar cinsinden eleman katılık matrisini temsil eder ve de açık yazılımı şu şekildedir,

$$[k_e] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [k] = [T]^T [k_e] [T] = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

(3.21) numaralı denklemde kullanılan c ve s terimleri aynen (3.18) numaralı denklemde gösterildiği gibidir, k'nın açılımı ise,

$$k = \frac{AE}{L} \quad (3.22)$$

şeklindedir ve de eksenel katılık adını alır.

Kafes sistemdeki bütün çubukların global koordinatlardaki element katılık matrisleri tek bir katılık matrisinde toplanırsa ve de düğüm noktalarındaki yer değişimi de tek bir vektör halinde ifade edilirse,

$$[K]\{D\} = \{W\} \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) numaralı denklemdeki $[K]$ matrisi global katılık matrisini, $\{D\}$ vektörü global şekil değiştirme vektörünü ve de $\{W\}$ vektörü global kuvvet vektörünü temsil etmektedir. (3.23) numaralı denklem, kafes sistemin global koordinatlardaki denge denklemini ifade eder. Bu denklem kullanılarak sistemin belirli yükleme koşulları altında statik cevabi elde edilebilir [11–14].

$$\{D\} = [K]^{-1} \{W\} \quad (3.24)$$

(3.24) numaralı denklemde düğüm noktalarının global yer değişimi ifade edilmektedir. Bu sonuçtan yararlanarak optimizasyon probleminde kısıt olarak

kullanılacak gerilme, gerinme bilgileri hiperstatik sistemlerin çözümünde gösterildiği gibi elde edilebilir.

Çubuk elemanın dinamik davranışının incelenmesinden kastedilen doğal frekans analizinin yapılmasıdır. Optimizasyon probleminde bizi ilgilendiren sistemin birinci doğal frekansının elde edilmesi ve de sistemin rezonansa girmemesi için bu değerin belirli bir değerden daha yüksek olması istenmektedir. Bunun için ilk önce çubuk elemanın kütle matrisi oluşturulmalıdır. Kütle matrisinin elde edilmesi için de aynı katılık matrisinin elde edilmişinde referans alınan Şekil 3.3 geçerlidir.

$$[m_e] = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow [m] = [T]^T [m_e] [T] = m \begin{bmatrix} 2c^2 + 2s^2 & 0 & c^2 + s^2 & 0 \\ 0 & 2c^2 + 2s^2 & 0 & c^2 + s^2 \\ c^2 + s^2 & 0 & 2c^2 + 2s^2 & 0 \\ 0 & c^2 + s^2 & 0 & 2c^2 + 2s^2 \end{bmatrix}$$

(3.25) numaralı denklemde $[m]$ matrisi, global koordinatlar cinsinden kütle matrisini göstermektedir ve m 'nin açılımı şu şekildedir,

$$m = \frac{\rho AL}{6} \quad (3.26)$$

Bu denklemde ρ , malzemenin yoğunluğunu göstermektedir.

Sistemin doğal frekansının hesaplanması için çözülmesi gereken özdeğer problemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$([K] - w^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \quad (3.27)$$

Bu denklemde $[K]$ matrisi sistemin katılık matrisini, $[M]$ matrisi sistemin kütle matrisini, w_i^2 sistemin i.nci doğal frekansının karesini 'rad/sn' cinsinden ve de $\{\phi_i\}$ sistemin i.nci titreşim mod şeklini göstermektedir. w_i^2 optimizasyon problemlerinde kullanılırken 'Hz' cinsinden ifade edilmiştir. Bunun için rad/sn cinsinden ifade edilen w_i^2 'nin $(2 * \pi)$ değerine bölünmesi gerekir.

$$([K] - w^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \Rightarrow ([K] - w^2 [M]) = 0 \quad (3.28)$$

(3.28) denkleminde de görüleceği üzere, w_i^2 , $[M]^{-1}$ ve $[K]$ matrislerinin çarpımıyla elde edilen matrisin özdeğerlerini göstermektedir. Elde edilen en küçük özdeğer değeri sistemin birinci doğal frekansını vermektedir [15-16].

3.2.2 LU ayrıklaştırma yöntemi

Herhangi bir A matrisini, iki matrisin çarpımı şeklinde yazmak mümkündür,

$$\mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29)'daki L alt üçgen matrisi (diyagonal ve diyagonalin altındaki elemanlar) ve U üst üçgen matrisi (diyagonal ve diyagonalin üstündeki elemanlar) 4x4'lük bir matrisin LU şeklinde ayrıklaştırılması aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Lineer denklem seti şu şekilde verilmiş olsun,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3.31)$$

Bu lineer denklem sistemini çözebilmek için (3.29) denklemini kullanılırsa,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{L} \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{L} (\mathbf{U} \mathbf{x}) = \mathbf{y} \quad (3.32)$$

(3.32) numaralı denklemde gerekli dönüşüm yapılırsa,

$$(\mathbf{U} \mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (3.33)$$

elde edilir. $\mathbf{x}$ vektörünün çözümü aşağıdaki sırayla gerçekleştirilir,

$$\mathbf{L} \mathbf{b} = \mathbf{y} \quad (3.34)$$

(3.34) numaralı denklemden $\mathbf{b}$ vektörü çözüldükten sonra (3.35) numaralı denklemden $\mathbf{x}$ vektörü çözülür.

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.35)$$

Herhangi bir A matrisini iki farklı matrisin çarpımı şeklinde ifade etmek kolaylıklar sağlamaktadır, çünkü oluşturulan iki matris de basittir ve bunların çözümleri de kolay elde edilir.

3.3 Kafes Sistem Optimizasyonunun Matematiksel İfadesi

Bu çalışmadaki optimizasyon probleminin amacı belirli yükleme koşulları için gerilme, yer değiştirme, burkulma ve doğal frekans kısıtlarına göre minimum ağırlığa sahip kafes sistemlerin bulunmasıdır. Buna göre amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$\text{Minimum Ağırlık} \Rightarrow \text{Min.} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i \right) \quad (3.36)$$

Gerilme, yer değiştirme ve frekans kısıtlarının tanımlanabilmesi için limitlerin belirlenmesi gerekir. Gerilme kısıtıyla istenen her bir çubukta oluşan gerilmelerin, çubuklarda kullanılan malzemenin akma gerilmesinden küçük değerde olması istenir. σ_{ak} malzemenin akma gerilmesi ve σ_i çubuklardaki gerilmeler olmak üzere, gerilme kısıtları aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\|\sigma_i\| \leq \sigma_{ak} \quad i=1, \dots, n \quad (3.37)$$

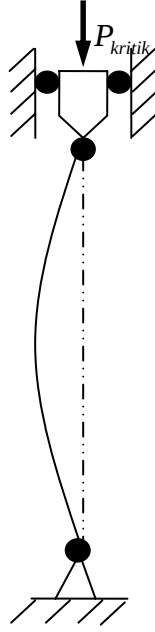
Yer değiştirme kısıtları ve doğal frekans kısıtları da gerilme kısıtlarına benzer olarak doğrudan tanımlanabilir. Belirli düğüm noktaları için belirli bir yer değiştirme limiti tanımlanarak yer değiştirme kısıtları ve de belirli bir frekans değeri belirlenerek sistemin ilk doğal frekansının bu değerden yüksek olması istenerek doğal frekans kısıtlarının uygulanması da mümkündür.

$$\|d_i\| \leq d_{\max} \quad i=1, \dots, n \quad (3.38)$$

(3.38) numaralı denklemde $d_{\max}$, sistemin düğüm noktalarının hareket limitini belirleyen maksimum yer değiştirme miktarıdır. Aşağıda ise kritik bir frekans değerinin doğal frekans ile ilgili kısıtlarda kullanım şeklini göstermektedir.

$$w_{kritik} \leq w_1 \quad i=1, \dots, n \quad (3.39)$$

Burkulma ile ilgili kısıtları ifade edebilmek için öncelikle kritik burkulma yükünün ve de burkulma gerilmesinin ifade edilmesi gerekir.



Şekil 3.4: Çubuğun Kritik Yük Altında Burkulması

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi bir çubuğun eksenini boyunca, belirli kritik bir yükün zorlaması altında burkulma problemi yaşanır. Euler burkulma yükü diye tanımlanan bu kritik yük şu şekilde gösterilebilir,

$$\Rightarrow P_{kritik} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.40)$$

(3.40) numaralı denklemde ifade edilen E çubuğun elastisite modülünü, I alan atalet momentini ve de L çubuğun boyunu vermektedir. Bu ifadeden yararlanarak kritik burkulma gerilmesi oluşturulabilir,

$$\Rightarrow \sigma_{kritik} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \quad (3.41)$$

Dairesel sabit bir kesite sahip çubuk elemanı için alan atalet momenti, kesit yarıçapı R'ye şu şekilde bağlıdır [17–19],

$$I = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (3.42)$$

Bu denklemden de görüldüğü gibi burkulma problemindeki kritik yükün hesaplanmasında kesit yarıçapının büyük rolü vardır. Bu çalışmada tasarım değişkeni olarak kesit alanları kullanıldığından, alan atalet momentinin kesit yarıçapı değişkeninden makul bir kabul ile kurtarılması gerekir. Bunun için şöyle bir kabul yapılmıştır,

$$I = \beta A^2 \quad (3.43)$$

(3.43) denklemi, (3.41) numaralı denklemde yerine konursa,

$$\sigma_{kritik} = \frac{\pi^2 E \beta A^2}{AL^2} = \frac{\pi E \beta A}{L^2} \quad (3.44)$$

elde edilir. Bu kabulün yapılması ile birlikte burkulma kısıtının tanımlanmasına da geçilebilir. Burkulma problemi, basma kuvvetlerine maruz elemanlarda ortaya çıktığından,

$$-\sigma_i - \sigma_{kritik} \leq 0 \quad (3.45)$$

şeklindeki tanımlama çekmeye zorlanan elemanlar için otomatikman sağlanırken basmaya maruz çubuk elemanları için ise burkulma kısıtını ifade etmektedir [].

Bütün bu kısıtların dışında tasarım değişkenlerini doğrudan etkileyen boyut kısıtları vardır. Ele alınan kafes sistem optimizasyon probleminde çözüm ararken fiziksel bir çelişkiye düşülmemesi için (negatif kesit alanları bulunmaması için) kesit alanları için minimum bir değer belirlenmelidir.

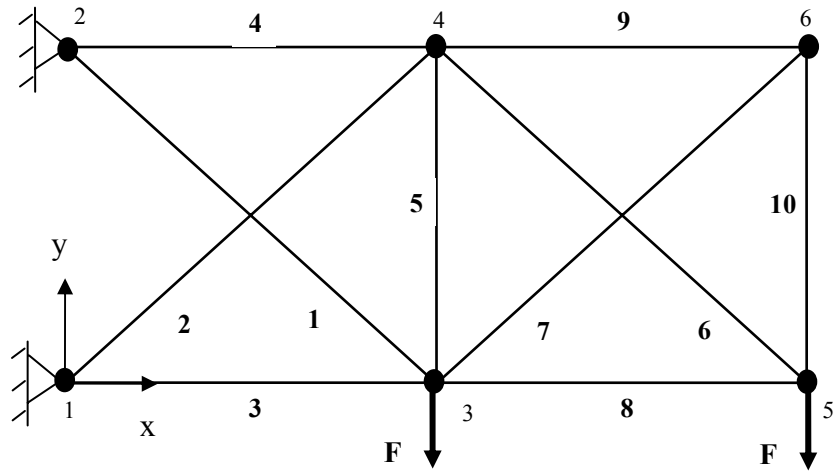
$$A_i \geq A_{\min} \quad (3.46)$$

3.4 Örnekler

Bu çalışmada ele alınan optimizasyon problemlerinde aynı modelleme mantığı bütün örneklerde uygulanmıştır. Ele alınan (hiperstatik) kafes sistemlerde alt sıradaki sınır koşul verilmemiş bütün düğüm noktalarına düşey yönde bir ($F=444822N$) kuvvet uygulanmıştır ve de 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarının düşey ve yatay yönlerde hareket etmesi engellenmiştir. Malzeme olarak alüminyum kullanılmıştır ($\sigma_{akma} = 172.369Mpa$, $E = 68947.6Mpa$, $\rho = 2.765 \times 10^{-9} ton/mm^3$). Yatay ve dikey çubukların boyları 9144mm, çapraz elemanların yatayla olan açıları 45° 'dir.

Kafes sistemlerin gerilme, yer değiştirme, doğal frekans ve burkulma kısıtları (3.30-32, 3.38) altında minimum ağırlığa sahip olması istenmiştir. Doğal frekans kısıtı uygulanırken kritik frekans değeri (w_{kritik}) olarak sistemin başlangıçtaki geometrisine ait birinci doğal frekansının 1.3 katı alınmıştır. Yer değiştirme kısıtlarında ise frekans kısıtlarında olduğu gibi kritik yer değiştirme limiti ($d_{\max}$), sistemin başlangıçtaki geometrisi düşünüldüğünde yüklemeler sonucunda en büyük yer değişimi değerinin 0.8 katı olarak belirlenmiştir. Burkulma kısıtları için $\beta=1$ alınmıştır.

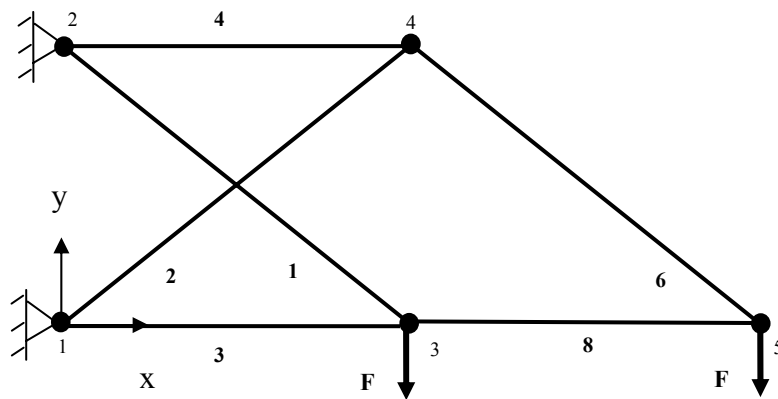
3.4.1 On elemandan oluşan kafes sistem



Şekil 3.5: On Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Başlangıçtaki Geometrisi

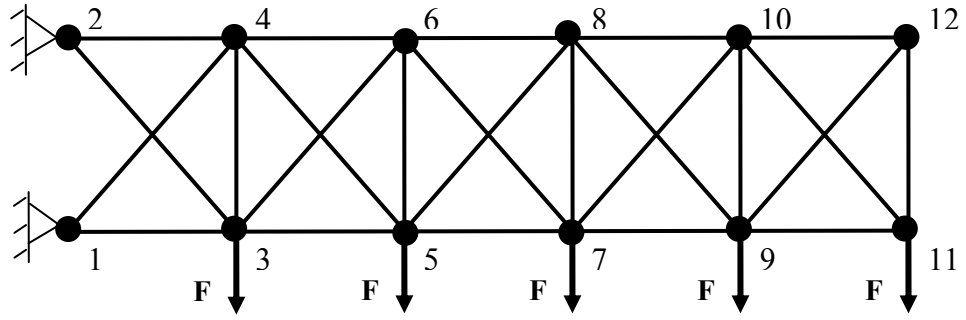
Tablo 3.1: On Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	3651.86
2	4230.24
3	5162.89
4	6019.92
5	0
6	4227.02
7	0
8	2988.96
9	0
10	0

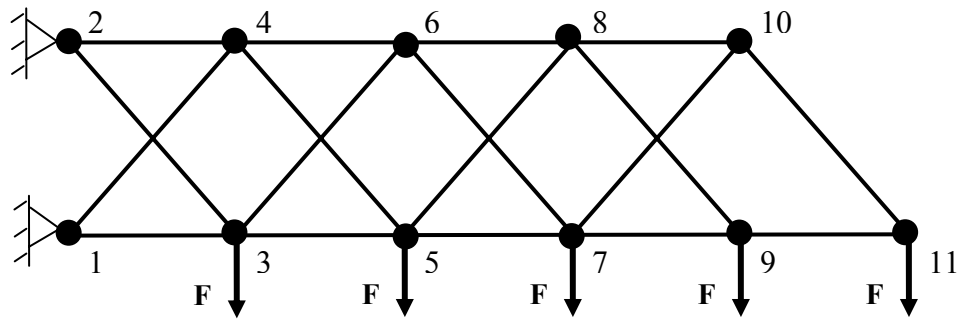


Şekil 3.6: On Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Optimizasyon Sonucu

3.4.2 Yirmi beş elemandan oluşan kafes sistem



Şekil 3.7: Yirmi Beş Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Başlangıçtaki Geometrisi

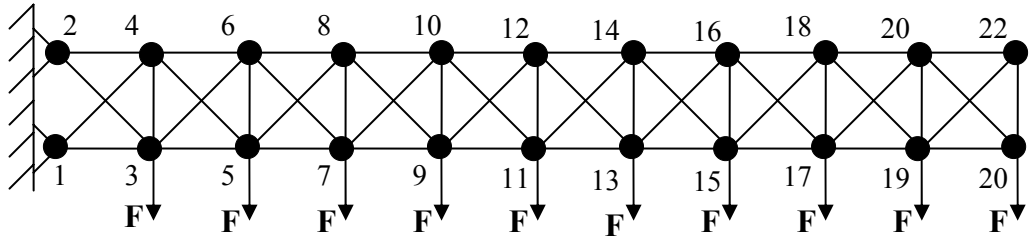


Şekil 3.8: Yirmi Beş Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Optimizasyon Sonucu

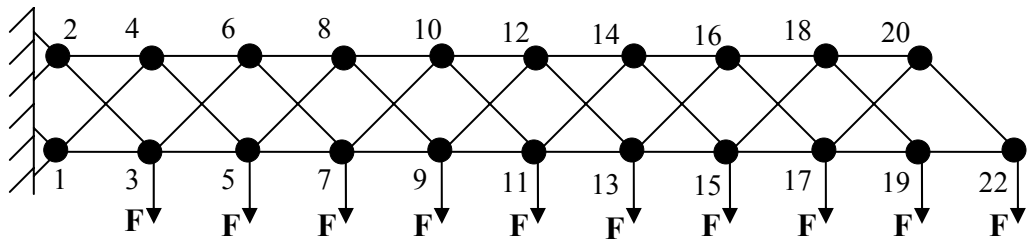
Tablo 3.2: Yirmi Beş Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	10892.04	14	10362.62
2	7355.85	15	0
3	33508.25	16	3706.25
4	31007.74	17	3592.89
5	0	18	5201.34
6	7355.85	19	5121.21
7	7242.43	20	0
8	20685.18	21	3592.89
9	20605.05	22	0
10	0	23	2540.57
11	7242.43	24	0
12	3706.25	25	0
13	12863.13		

3.4.3 Elli elemandan oluşan kafes sistem



Şekil 3.9: Elli Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Başlangıçtaki Geometrisi

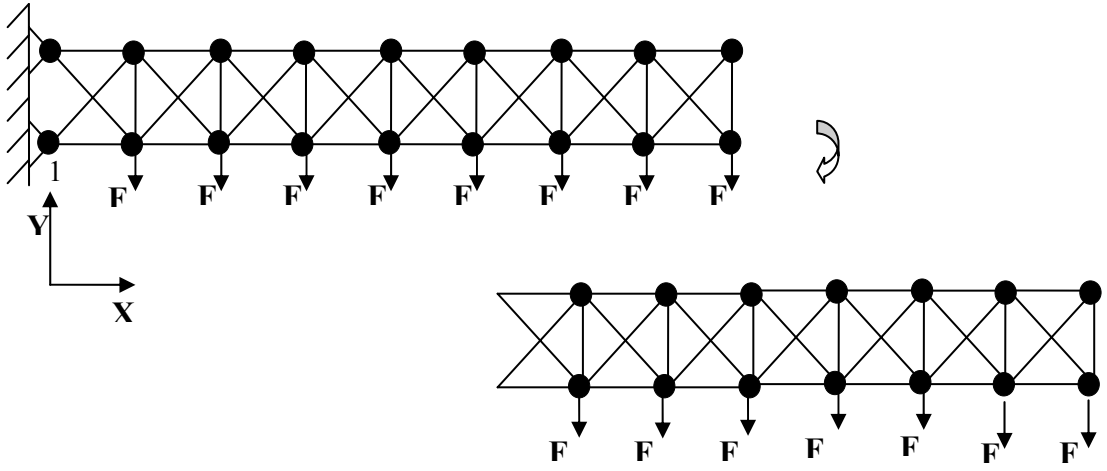


Şekil 3.10: Elli Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Optimizasyon Sonucu

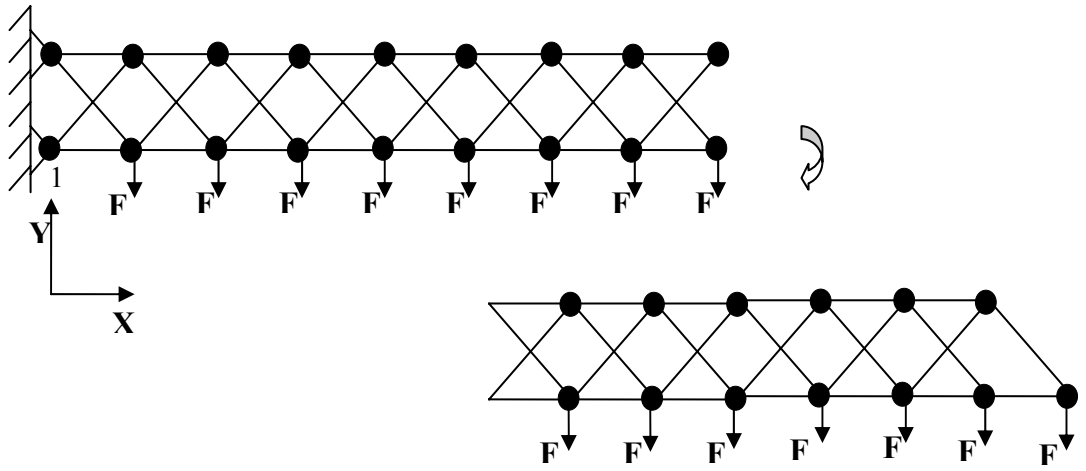
Tablo 3.3: Elli Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	18304.54	26	10892.04
2	18191.18	27	7355.85
3	129072.06	28	33508.25
4	128991.93	29	31007.74
6	18191.18	31	7355.85
7	14655.00	32	7242.43
8	105766.17	33	20685.18
9	103265.66	34	20605.05
11	14655.00	36	7242.43
12	14541.58	37	3706.25
13	82620.54	38	12863.13
14	82540.41	39	10362.62
16	14541.58	41	3706.25
17	11005.39	42	3592.89
18	64475.93	43	5201.34
19	61975.42	44	5121.21
21	11005.39	46	3592.89
22	10892.04	48	2540.57
23	46491.58		
24	46411.45		

3.4.4 Yetmiş beş elemandan oluşan kafes sistem



Şekil 3.11: Yetmiş Beş Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Başlangıçtaki Geometrisi

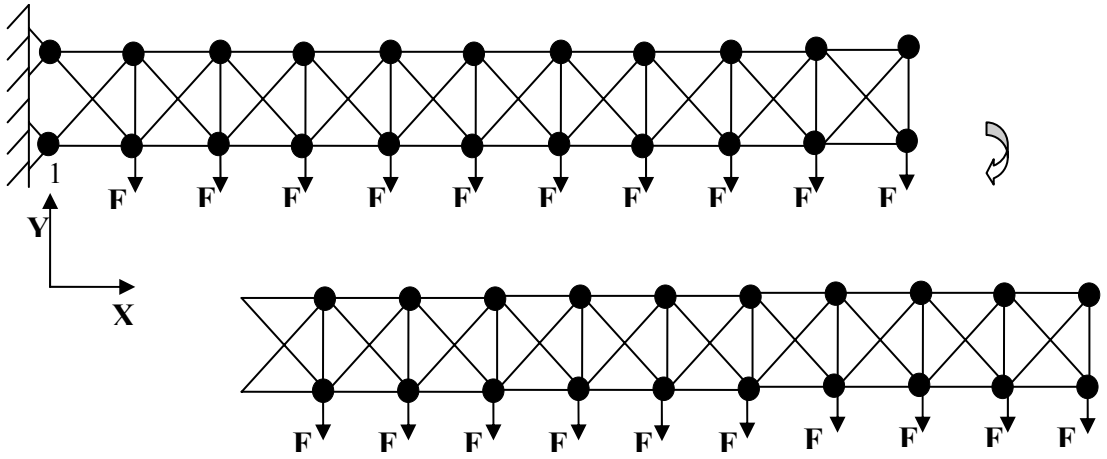


Şekil 3.12: Yetmiş Beş Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Optimizasyon Sonucu

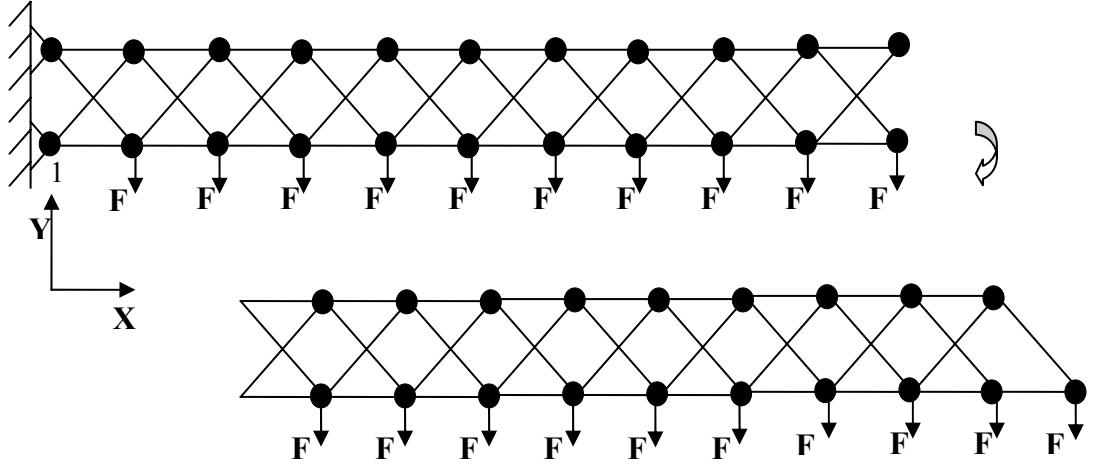
Tablo 3.4: Yetmiş Beş Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	29139.94	26	128991.94	51	10892.04
2	25603.69	27	18304.54	52	7355.86
3	291572.26	28	18191.19	53	33508.26
4	289071.74	29	129072.06	54	31007.74
6	25603.69	31	18191.19	56	7355.86
7	25490.34	32	14655.00	57	7242.44
8	252942.78	33	105766.18	58	20685.18
9	252862.66	34	103265.66	59	20605.06
11	25490.34	36	14655.00	61	7242.44
12	21954.15	37	14541.58	62	3706.25
13	219314.34	38	82620.54	63	12863.14
14	216813.82	39	82540.42	64	10362.62
16	21954.15	41	14541.58	66	3706.25
17	21840.80	42	11005.40	67	3592.90
18	185846.14	43	64475.94	68	5201.34
19	185766.02	44	61975.42	69	5121.22
21	21840.80	46	11005.40	71	3592.90
22	18304.54	47	10892.04	73	2540.58
23	157378.98	48	46491.58		
24	154878.46	49	46411.46		

3.4.5 Yüz elemandan oluşan kafes sistem



Şekil 3.13: Yüz Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Başlangıçtaki Geometrisi



Şekil 3.14: Yüz Elemandan Oluşan Kafes Sistemin Optimizasyon Sonucu

Tablo 3.5: Yüz Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	36552.44	33	252942.78	66	14541.58
2	36439.09	34	252862.66	67	11005.40
3	516168.06	36	25490.34	68	64475.94
4	516087.94	37	21954.15	69	61975.42
6	36439.09	38	219314.34	71	11005.40
7	32902.90	39	216813.82	72	10892.04
8	467055.78	41	21954.15	73	46491.58
9	464555.26	42	21840.80	74	46411.46
11	32902.90	43	185846.14	76	10892.04
12	32789.48	44	185766.02	77	7355.86
13	418103.74	46	21840.80	78	33508.26
14	418023.62	47	18304.54	79	31007.74
16	32789.48	48	157378.98	81	7355.86
17	29253.30	49	154878.46	82	7242.44
18	374152.74	51	18304.54	83	20685.18
19	371652.22	52	18191.19	84	20605.06
21	29253.30	53	129072.06	86	7242.44
22	29139.94	54	128991.94	87	3706.25
23	330361.98	56	18191.19	88	12863.14
24	330281.86	57	14655.00	89	10362.62
26	29139.94	58	105766.18	91	3706.25
27	25603.69	59	103265.66	92	3592.90
28	291572.26	61	14655.00	93	5201.34
29	289071.74	62	14541.58	94	5121.22
31	25603.69	63	82620.54	96	3592.90
32	25490.34	64	82540.42	98	2540.58

3.4.6 Yüz yirmi beş elemandan oluşan kafes sistem

Kafes yapıların başlangıçtaki ve optimizasyon sonucundaki geometrileri benzerlik gösterdiğinden geometriler tekrar çizilmemiştir.

Tablo 3.6: Yüz Yirmi Beş Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	43758.96	42	26969.81	83	97579.50
2	40484.48	43	345249.26	84	95317.14
3	7453311.84	44	342986.90	86	13514.67
4	7430688.16	46	26969.81	87	13395.60
6	40484.48	47	26910.27	88	76265.62
7	40365.41	48	304883.86	89	76146.54
8	6859142.56	49	304764.78	91	13395.60
9	6857951.84	51	26910.27	92	10180.66
11	40365.41	52	23635.79	93	59476.46
12	37090.93	53	269043.18	94	57214.10
13	6310220.64	54	266780.82	96	10180.66
14	6287596.96	56	23635.79	97	10061.58
16	37090.93	57	23516.72	98	42925.46
17	36971.86	58	233440.66	99	42806.38
18	576368.02	59	233321.58	101	10061.58
19	576248.94	61	23516.72	102	6787.10
21	36971.86	62	20242.24	103	30899.18
22	33756.91	63	202362.86	104	28636.82
23	526238.70	64	200100.50	106	6787.10
24	523976.34	66	20242.24	107	6668.03
26	33756.91	67	20182.70	108	19111.06
27	33637.84	68	171523.22	109	18991.98
28	476347.54	69	171404.14	111	6668.03
29	476228.46	71	20182.70	112	3393.55
31	33637.84	72	16908.22	113	11847.66
32	30363.36	73	145208.30	114	9585.30
33	430981.10	74	142945.94	116	3393.55
34	428718.74	76	16908.22	117	3334.02
36	30363.36	77	16789.15	118	4822.42
37	30244.29	78	119131.54	119	4703.34
38	385852.82	79	119012.46	121	3334.02
39	385733.74	81	16789.15	123	2321.90
41	30244.29	82	13514.67		

3.4.7 Yüz elli elemandan oluşan kafes sistem

Tablo 3.7: Yüz Elli Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	59161.17	51	38387.02	101	19290.28
2	50322.48	52	34580.58	102	17225.77
3	1164384.77	53	517482.84	103	129741.68
4	1158191.23	54	514773.16	104	128322.32
6	50322.48	56	34580.58	106	18193.51
7	55483.76	57	34774.12	107	14645.13
8	1083352.67	58	465741.00	108	105741.72
9	1086965.57	59	465870.04	109	103290.12
11	55483.76	61	34774.12	111	14645.13
12	46645.07	62	30967.68	112	14516.10
13	1014707.65	63	419418.52	113	82645.00
14	1008514.11	64	416708.84	114	82515.96
16	46645.07	66	30967.68	116	14516.10
17	51870.86	67	31096.71	117	11032.24
18	938836.83	68	372837.96	118	64451.48
19	942449.73	69	372967.00	119	61999.88
21	51870.86	71	31096.71	121	11032.24
22	43096.69	72	27290.27	122	10903.20
23	875353.09	73	331676.76	123	46516.04
24	868836.97	74	328967.08	124	46387.00
26	43806.36	76	27290.27	126	10903.20
27	47419.26	77	27483.82	127	7354.82
28	805159.68	78	290257.48	128	33483.80
29	807740.32	79	290386.52	129	31032.20
31	47096.68	81	27483.82	131	7354.82
32	40451.53	82	23612.86	132	7225.79
33	745546.90	83	254257.56	133	20709.64
34	740901.74	84	251547.88	134	20580.60
36	40451.53	86	23612.86	136	7225.79
37	43483.78	87	23806.40	137	3677.41
38	681547.02	88	217999.56	138	12838.68
39	683611.54	89	218128.60	139	10387.08
41	43483.78	91	22903.18	141	3677.41
42	36838.64	92	20838.67	142	3612.90
43	626837.46	93	186515.76	143	5225.80
44	622192.30	94	185096.40	144	5096.76
46	37290.25	96	20838.67	146	3612.90
47	39354.76	97	19290.28	148	2516.12
48	568321.44	98	156709.36		
49	569740.80	99	155548.08		

3.4.8 İki yüz elemandan oluşan kafes sistem

Tablo 3.8: İki Yüz Elemandan Oluşan Sistemin Çözümü

Eleman Numarası	Kes. Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)	Eleman Numarası	Kesit Alanı (mm ²)
1	72967,6	68	941933,6	136	2554834
2	72967,596	69	939352,96	137	21870,924
3	2064512	71	4741926	138	219354,4
4	2064512	72	47419,26	139	216773,76
6	729676	73	872256,32	141	2187092
7	69354,7	74	872256,32	142	21870,924
8	1963867,04	76	4741926	143	185806,08
9	1961286,4	77	43806,364	144	185806,08
11	693547	78	807740,32	146	2187092
12	69354,7	79	805159,68	147	18258,028
13	1863222,08	81	4380636	148	157419,04
14	1863222,08	82	43806,364	149	154838,4
16	693547	83	743224,32	151	1825803
17	65677,288	84	743224,32	152	18258,028
18	1767738,4	86	4380636	153	129032
19	1765157,76	87	40128,952	154	129032
21	6567729	88	683869,6	156	1825803
22	65677,288	89	681288,96	157	14580,616
23	1672254,72	91	4012895	158	105806,24
24	1672254,72	92	40128,952	159	103225,6
26	6567729	93	624514,88	161	1458062
27	62064,392	94	624514,88	162	14580,616
28	1581932,32	96	4012895	163	82580,48
29	1579351,68	97	36516,056	164	82580,48
31	6206439	98	570321,44	166	1458062
32	62064,392	99	567740,8	167	10967,72
33	1491609,92	101	3651606	168	64516
34	1491609,92	102	36516,056	169	61935,36
36	6206439	103	516128	171	1096772
37	58386,98	104	516128	172	10967,72
38	1406448,8	106	3651606	173	46451,52
39	1403868,16	107	32838,644	174	46451,52
41	5838698	108	467095,84	176	1096772
42	58386,98	109	464515,2	177	7290,308
43	1321287,68	111	3283864	178	33548,32
44	1321287,68	112	32838,644	179	30967,68
46	5838698	113	418063,68	181	7290308
47	54774,084	114	418063,68	182	7290,308
48	1241287,84	116	3283864	183	20645,12
49	1238707,2	117	29225,748	184	20645,12
51	5477408	118	374192,8	186	7290308
52	54709,568	119	371612,16	187	3677,412
53	1161288	121	2922575	188	12903,2
54	1161288	122	29161,232	189	10322,56
56	5470957	123	330321,92	191	3677412
57	51096,672	124	330321,92	192	3612,896
58	1086449,44	126	2916123	193	5161,28
59	1083868,8	127	25548,336	194	5161,28
61	5109667	128	291612,32	196	3612896
62	51096,672	129	289031,68	198	258064
63	1011610,88	131	2554834		
64	1011610,88	132	25548,336		
66	5109667	133	252902,72		
67	47419,26	134	252902,72		

3.5 Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması

Aşağıda Tablo 3.9’da LU yöntemi kullanıldığında elde edilen çözüm sürecindeki kazanç ortaya konmuştur.

Tablo 3.9: Çözüm Sürelerinin Karşılaştırılması

Hiçbir iyileştirme yapılmadığı zaman hesaplanan CPU süresi		LU Ayırıklaştırma Yöntemi kullanıldığında hesaplanan CPU süresi	
10 Eleman (2 Hücre)	3.20	10 Eleman (2 Hücre)	1.97
25 Eleman (5 Hücre)	14.56	25 Eleman (5 Hücre)	8.42
50 Eleman (10 Hücre)	433.14	50 Eleman (10 Hücre)	206.26
75 Eleman (15 Hücre)	742.65	75 Eleman (15 Hücre)	322.89
100 Eleman (20 Hücre)	1793.94	100 Eleman (20 Hücre)	661.09
125 Eleman (25 Hücre)	3485.16	125 Eleman (25 Hücre)	1283.74
150 Eleman (30 Hücre)	6975.63	150 Eleman (30 Hücre)	2545.85
200 Eleman (40 Hücre)	26158.61	200 Eleman (40 Hücre)	9477.76

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada belirli bir yükleme koşulu altında gerilme, yer değiştirme, burkulma ve doğal frekans kısıtlarına göre minimum ağırlığa sahip düzlem kafes sistem çözümü aranmıştır. Ele alınan kafes sistemlerde, düğüm noktalarının yerleri değişmemektedir. Tasarım değişkeni olarak çubukların kesit alanları alınmıştır. Optimizasyon probleminde çubuklar için belirli bir minimum kesit alanı değeri göz önünde bulundurulmuş, buna göre optimizasyon işlemi sonucunda bu değeri alan elemanlar sistemden atılmıştır.

Kafes sistemlerin statik ve dinamik davranışlarına ilişkin bilgiler sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilmiş, optimizasyon için ise SQP yöntemi kullanılmıştır. 10 elemandan başlanarak 200 eleman sayısına kadar çıkmıştır. Eleman sayısı arttıkça çözüm süresi üstel olarak artmaya başlamıştır. Çözüm süresini azaltmak için sonlu elemanlar yöntemi kullanılırken elde edilen katılık ve kütle matrislerinin simetrik ve de bol sıfırlı yapısından faydalanan LU (Lower Upper) Ayrıklaştırma yöntemi kullanarak daha kısa sürede çözülmesi sağlanmıştır.

Çubukların kesit alanlarının yanı sıra çubukların malzemesi de birer tasarım değişkeni olarak kullanılabilir. Bu durumda optimum malzeme dağılımı da bulunmuş olur. Ayrıca kafes sistemdeki deformasyonların lineer olduğu kabul edilmiştir. Daha sonra yapılacak çalışmalarda doğrusal olmayan geometrik davranış da incelenebilir [20-21].

Gradyan tabanlı yöntemlerde tasarım değişkenlerinin sayısı arttıkça başlangıç değerinin seçilmesi önemli bir kıstas olmaktadır. Bunun için optimizasyon problemi iki fazlı halde çalıştırılabilir. Birinci fazda, optimizasyon adımlarına başlamadan önce kullanılan başlangıç değerini daha iyi belirlemek için rasgele arama yöntemleri kullanılabilir, gerekirse daha düşük bir yakınsama kriteri belirlenir. Bu fazda elde edilen çözüm, ikinci fazda SQP algoritmasının başlangıç noktası olarak kullanılabilir. Böylece yakınsama hızlandırılmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] **Gil, L., Andreu, A., 2000.** Shape and cross-section optimization of a truss structure, *Computers&Structures*, **79**, 681-689.
- [2] **Bhatti, M.A., 2000.** Practical Optimization Methods-With Mathematica Applications, Springer-Verlag, New York.
- [3] **Arora, J.S., 1989.** Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill Book Company, Singapore.
- [4] **Vanderplaats, G.N., 1984.** Numerical Optimization Techniques For Engineering Design With Applications, McGraw-Hill Book Company, USA.
- [5] **Luenberger, D.G., 1973.** Introduction to Linear And Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, USA.
- [6] **Haftka, R.T., Gürdal, Z., Kamat, M.P., 1990.** Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [7] **Matlab, 2000.** Optimization Toolbox-For Use With Matlab, The MathWorks Company, USA.
- [8] **Press, W.H., 1992.** Numerical recipes in C: the art of scientific computing, Cambridge University Press, New York.
- [9] **Penny, J., Lindfield, G., 1995.** Numerical Methods Using Matlab, Ellis Horwood, Great Britain.
- [10] **Gökdere, N., 2002.** Kafes Sistemlerin Optimum Tasarımı, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [11] **Kwon, Y.W., Bano, H., 2000.** The Finite Element Method Using Matlab, CRC Pres, USA.
- [12] **Smith, I.M., Griffiths, D.V., 1997.** Programming the Finite Element Method, John Wiley & Sons, USA.
- [13] **Kanchi, M.B., 1993.** Matrix Methods of Structural Analysis, John Wiley & Sons, India.
- [14] **Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J., 2000.** Concepts And Applications Of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, USA.

- [15] **Bendsøe, M.P., Sigmund, O.**, 2003. Topology Optimization-Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin.
- [16] **Pedersen, N.L., Nielsen, A.K.**, 2003. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling, *Struct. Multidisc. Optim.*, **25**, 436-445.
- [17] **Craig, R.R.**, 2000. Mechanics of Materials, John Wiley & Sons, USA.
- [18] **Gu, Y.X., Zhao, G.Z., Zhang, H.W., Kang, Z., Grandhi, R.V.**, 2000. Buckling design optimization of complex built-up structures with shape and size variables, *Struct. Multidisc. Optim.*, **19**, 183-191.
- [19] **Ülker, M., Hayalioğlu, M.S.**, 2000. Optimum Design of Space Trusses with Buckling Constraints by Means of Spreadsheets, *Turk J. Engin Environ. Sci.*, **25**, 355-367.
- [20] **Salajegheh, E.**, 1997. Structural optimization using response approximation and optimality criteria methods, *Engineering Structures*, **19**, 527-532.
- [21] **Khot, N.S., Kamat, M.P.**, 1985. Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior, *AIAA*, **23**, 139-145.

ÖZGEÇMİŞ

Cem Celal Tutum 1980’de İstanbul’da doğdu. Liseyi 1994–1998 yılları arasında Kabataş Erkek Lisesi’nde okudu. İstanbul Teknik Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü’nden 2002 yılında mezun oldu. Yüksek lisans eğitimi için 2002’de İstanbul Teknik Üniversitesi, Katı Cisimlerin Mekaniği Programı’na girdi. 2003–2004 yılları arasında Figes Ltd.’de çalıştı. 2005 yılından itibaren, İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi bünyesinde kurulmuş olan ROTAM (Rotorlu Hava Araçları Tasarım ve Mükemmeliyet Merkezi) ’da çalışmaktadır.