

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAM
İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU VE DÖNEN DİSK
PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Süleyman MUTİ

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAM
İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU VE DÖNEN DİSK
PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Süleyman MUTİ
(503091542)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Salih DOKUZ

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503091542 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Süleyman MUTİ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAM İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU VE DÖNEN DİSK PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mehmet Salih DOKUZ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Alaeddin ARPACI**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Serdar BARIŞ
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : **13 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **25 Ocak 2012**

Aileme,

ÖNSÖZ

Lisansüstü tezimi tamamladığım bu günlerde beni destekleyen herkese teşekkür ediyorum. Üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerimi saygıyla anıyorum. Tezimi hazırlarken yakın bir ilgi göstererek bana yardımcı olan hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Salih DOKUZ’a özel olarak teşekkürlerimi sunuyorum.

Ocak 2012

Süleyman Muti
(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı	2
1.2 Literatürdeki Çalışmalar	2
2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER.....	5
2.1 Karışımın Kinematığı	5
2.2 İki Elastik Katı Karışımı İçin Lineer Bünye Denklemleri	7
3. İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İÇİN DÜZLEM GERİLME VE DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME DURUMLARINDA BELTRAMI-MICHELL DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ.....	11
3.1 Düzlem Gerilme Durumunda Beltrami-Michell Denklemleri	11
3.2 Düzlem Şekil Değiştirme Durumunda Beltrami-Michell Denklemleri	19
4. İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU KULLANILARAK DÖNEN DİSK VE DÖNEN SİLİNDİRİK ÇUBUK PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ.....	29
4.1 Dönen Disk Problemi	30
4.1.1 Tekil bir elastik ortam için dönen disk problemi	30
4.1.2 İki elastik katıdan oluşan bir karışım için dönen disk problemi	34
4.2 Dönen Silindirik Çubuk Problemi.....	41
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER.....	47
5.1 Dönen Disk Problemi	49
5.2 Dönen Silindirik Çubuk Problemi.....	53
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Karışımda şekil değiştirme.	6
Şekil 4.1 : Dönen disk problemi.	30
Şekil 4.2 : Dönen silindirik çubuk problemi.	41
Şekil 5.1 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.	50
Şekil 5.2 : $a/b = 0$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.	50
Şekil 5.3 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.	51
Şekil 5.4 : $a/b = 0.5$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.	51
Şekil 5.5 : Radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.	52
Şekil 5.6 : θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.	52
Şekil 5.7 : $\bar{w}_r$ karışımın yer değiştirmesinin değişimi.	52
Şekil 5.8 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.	53
Şekil 5.9 : $a/b = 0$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.	54
Şekil 5.10 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait z-yönündeki boyutsuz gerilmeler.	54
Şekil 5.11 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.	55
Şekil 5.12 : $a/b = 0.5$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.	55
Şekil 5.13 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait z-yönündeki boyutsuz gerilmeler.	56
Şekil 5.14 : Radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.	56
Şekil 5.15 : θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.	56
Şekil 5.16 : z doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.	57
Şekil 5.17 : $\bar{w}_r$ karışımın yer değiştirmesinin değişimi.	57

İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAM İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU VE DÖNEN DİSK PROBLEMİ İÇİN BİR UYGULAMA

ÖZET

İki veya daha fazla sayıdaki maddesel ortamın birbirleri içerisinde difüzyona uğramaları neticesinde oluşan sürekli ortama karışım adı verilmektedir. Bu tür sürekli ortamların davranışları karışımlar teorisi olarak bilinen bilimsel disiplin kapsamında incelenmektedir. Karışımlar teorisi, sürekli ortamlar mekaniğinin şekil değiştiren ortamlar için ortaya koyduğu temel yaklaşımları kullanarak, karışımlara ait mekanik davranışların belirlenmesini ve mühendislik problemlerine uygulanmasını amaçlamaktadır. Karışımlar teorisi, biyolojik dokular ve jeolojik katmanlar gibi doğal oluşumların incelenmesi için olduğu kadar teknolojik ihtiyaçların karşılanması için de gereklidir. Karışımlar teorisi, bu teknolojik ihtiyaçların karşılanması için gerekli olan teorik ve uygulama alt yapısının hazırlanması açısından önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, karışımlar teorisinin temel denklemleri kullanılarak, iki elastik katı karışımından oluşan homojen bir sürekli ortam için Beltrami-Michell denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra ise Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak örnek problemler incelenmiş ve sonuçlara ilişkin değerlendirmeler sunulmuştur.

Çalışmada öncelikle karışımlar teorisi kısaca tanıtılmış ve literatürdeki çalışmalara değinilmiştir. Ardından, karışımın kinematiğine ait denklemler verilmiştir. Daha sonra, iki elastik katının karışımından oluşan bir sürekli ortama ait lineer bünye denklemleri, süreklilik denklemleri, karışım bileşenleri arasındaki difüzyon kuvveti vektörü, lineer haldeki şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları ve lineer bünye denklemlerinden elde edilmiş olan şekil değiştirme tansörleri sunulmuştur.

İfade edilen temel karışımlar teorisi denklemleri kullanılarak, düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları için, gerekli işlem ve düzenlemelerin ardından, Beltrami-Michell denklemleri elde edilmiştir. Karışımında iki bileşen bulunduğu için iki adet denklem elde edilmektedir. Düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları için elde edilen Beltrami-Michell denklemlerinde sadece katsayılar birbirinden farklıdır. Denklemlerin formları birbiri ile aynıdır. Buna göre, kütle kuvvetlerinin mevcut olduğu halde, bu iki durum arasında sadece katsayı değişikliği yapılarak dönüşüm sağlanabileceği anlaşılmaktadır.

Düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları için elde edilen denklemler kullanılarak dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri incelenmiştir. Problemlerin çözümünde, kütle kuvvetlerinin birer potansiyelden türediği düşüncesine dayanan gerilme alanı kabulleri ve Airy gerilme fonksiyonu kabulleri yapılmıştır. Difüzyon kuvveti vektörünün gerilme alanı kabullerinde bir potansiyelden türüyormuş gibi yer alması mümkün olmadığından, karışımında ön gerilmenin mevcut olmadığı kabulü yapılmıştır. Bu kabul, difüzyon kuvveti vektörünün sıfır olmasını sağlamaktadır.

Gerilme alanı kabulleri ve Airy gerilme fonksiyonları kullanılarak gerekli işlemler yapılmış ve karışım bileşenlerine ait gerilmeler elde edilmiştir. Daha sonra, bu gerilmeler ve şekil değiştirme tansörleri kullanılarak, yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarının yardımıyla yer değiştirmeler elde edilmiştir. Dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri için elde edilen çözümler birbirlerine form olarak benzetilmektedir. Ulaşılan sonuçlarda sadece katsayılar farklılık arz etmektedir. Buna göre, bu iki problem arasında katsayıları değiştirerek dönüşüm yapılması mümkün olmaktadır.

Çalışmada son olarak, elde edilen sonuçlara ilişkin değerlendirmeler yapılmıştır. Bu amaçla, elde edilen sonuçlar için boyutsuz büyüklük tanımlamaları yapılmış ve malzeme katsayılarının belirli değerleri için bu boyutsuz tanımlamalara ait grafikler sunulmuştur. İçi dolu ve içi boş dönen disk problemi için karışım bileşenlerine ait boyutsuz gerilme, toplam gerilme ve karışımın tamamı için tanımlanmış yer değiştirme grafikleri verilmiştir. İçi dolu diskte maksimum gerilmeler beklediği şekilde diskin merkezinde ortaya çıkmaktadır. Karışımın tamamı için yer değiştirme ise merkezde sıfır olup dışa doğru artmaktadır. İçi boş diskte ise radyal yöndeki gerilmeler serbest yüzeylerde sıfır olarak elde edilmektedir. Maksimum gerilmeler iç serbest yüzeyde ortaya çıkmaktadır. Yer değiştirme için verilen grafik ise iç çap ve dış çap oranına bağlı olarak değişmektedir.

İçi dolu ve içi boş dönen silindirik çubuk problemi için bileşenlere ait boyutsuz gerilme grafikleri, toplam boyutsuz gerilme grafikleri ve karışımın tamamı için tanımlanan yer değiştirme grafikleri dönen diske benzer şekilde elde edilmektedir. Dönen silindirik çubukta z-doğrultusundaki gerilme bileşenleri de mevcut olduğundan bunlara ilişkin boyutsuz grafikler de sunulmuştur. Bu gerilme bileşenlerinin maksimum değerleri, içi dolu silindirik çubukta merkezde, içi boş silindirik çubukta ise iç serbest yüzeyde oluşmaktadır.

Çalışmada elde edilen sonuçlar, iki elastik katı karışımı için düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları arasındaki benzerlikleri ortaya koymuştur. Bu durum elastisite teorisinden bilinen benzerlikleri hatırlatmaktadır. Dönen disk ve dönen silindirik çubuk için elde edilen sonuçlar ve çizdirilen boyutsuz grafikler, hem birbirleri ile hem de tekil durum ile benzer şekilde ortaya çıkmaktadır. Bu durumun sonuçların tutarlılığını göstermesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

AIRY STRESS FUNCTION FOR A CONTINUOUS MEDIUM OF TWO ELASTIC SOLIDS AND AN APPLICATION FOR THE ROTATING DISK PROBLEM

SUMMARY

The requirement of representing the material behaviors with permanent laws has created a scientific branch of mechanics known as the continuum mechanics. Continuum mechanics has grown rapidly from the 17th century. It has developed its basic formulations for the deforming bodies and sustained them up to today. These formulations are applicable to the continuous media that consist of only one material, as well as to the continuous media that consist of multiple materials.

A mixture is defined as a continuous medium in which two or more different materials are diffused. The mechanical behaviors and engineering applications of such media are studied by the theory of mixtures, a scientific branch that uses the basic findings of the continuum mechanics. In a continuum, which is classified as a mixture, every constituent has its own effect that cannot be neglected. If the effects are small enough so that they can be neglected, this continuum can be considered as a medium of a single material. The materials that are used for many engineering applications can be seen as this way, but there are those cases that this view is not applicable, such as biological tissues and geological layers. The theory of mixtures is concerned with these natural media as well as satisfying the technological needs of the industry. Improving the properties of the existing materials and obtaining those that have better mechanical properties, has become a major engineering branch today, due to the developments of the industrial processes. This condition increases the interest on the materials that consist of multiple constituents. The theory of mixtures is of particular importance for providing the theoretical and applied background of these kinds of materials.

The purpose of this work is to obtain the Beltrami-Michell equations in the plane stress and the plane strain conditions for a homogeneous mixture of two linear elastic solids. Then, it is aimed to examine some sample problems that are edifying the plane stress and the plane strain conditions, by using the Airy stress function formulations and previously obtained Beltrami-Michell equations

In this work, firstly, the theory of mixtures is introduced and the publications in the literature are referred. Following this, basic concepts and equations of the theory of mixtures are presented.

In the second chapter of this work, the fundamental equations of a mixture are given. The particles of the mixture in a sufficiently small volume are capable of representing the whole mixture, namely the mixture is a continuum. The deformations of the mixture constituents are continuous and mathematically, it is possible to take the inverse transformation of the deformations.

The certain particles in the mixture, that occupy the same volume element before the deformation, are separated from each other and come together with the other particles as the deformation occurs. According to this, the spatial volume is completely filled by the constituents of the mixture. The kinematic equations of the mixture are introduced in accordance with this idea. It is also emphasized that throughout this work, Einstein notation is used.

The mixture is isotropic before the deformation. Assuming that the constituents of the mixture do not chemically interact with each other and the deformations are infinitesimally small, linear forms of the constitutive equations, diffusion force vector, and strain tensors are presented. The strain-displacement relations and continuity equations are also given.

In the third chapter of this work, Beltrami-Michell equations for the plane stress and the plane strain conditions are obtained by using the given basic equations of mixtures. The isotropy assumption for the whole mixture is extended for the each constituent. In this case, a certain coefficient in the given equations becomes zero. Some related terms to this coefficient vanish in the equations. In addition to this, it is mentioned that the effect of the temperature is not taken into account for the scope of this work. For these reasons, the basic equations are modified and the new equations, which are valid through the rest of this work, are presented.

In the fourth chapter, the Beltrami-Michell equations in the plane stress and the plane strain cases are obtained for a mixture of two linear elastic solids. In many cases, the solutions of the elasticity problems are hardly obtained due to the complexity of the equations and the amount of the calculations. Hence, the solutions are made for some certain cases, which have specific assumptions for their own. Plane stress is one of these special cases. Firstly, the main assumptions of the plane strain case are given for a medium of single material and then they are expressed for a binary mixture. After that, the explicit forms of the strain tensors are given. Then, the diffusion force and the strain terms are written into the compatibility equations. Finally, using the the equilibrium equations Beltrami-Michell equations are obtained for the plane stress case. In this process, many coefficients arising from the calculations are defined.

When considering plane strain case, firstly, the main assumptions are expressed. Following this, the explicit forms of the linear constitutive equations, the strain tensors, and the diffusion force vector are given due to the change of the assumptions. Then the calculations are carried out as in the plane stress case and the Beltrami-Michell equations are obtained. Here also, many coefficient definitions are made. Two Beltrami-Michell equations arise for both plane stress and the plane strain cases, since there are two constituents in the mixture.

The Beltrami-Michell equations for both plane stress and plane strain cases are very similar to each other. They differ only by coefficients. If the body forces exist in the problem, it is possible to transform these cases into one another by only changing their coefficients.

In the fourth chapter, the rotating disk and the rotating cylindrical rod problems are studied using the Airy stress functions. The rotating disk problem is an example of the plane stress case, and the rotating cylindrical rod problem is an example of the plane strain case.

It is assumed that the mixture has no prestresses in it. The nonexistence of the prestresses makes the diffusion force vector zero, so that it vanishes from the all related terms. If the diffusion force is not zero, it should be added to the calculations in a way that it is derivable from a potential function. However, there is no such information in the literature that this kind of potential function exists.

In this work it is preferred to examine the hollow disk and rod, in order to maintain the most general approach. When examining the rotating disk problem, firstly, the brief solution for a single material is given. Then, the solution for a mixture of two elastic solids takes place. In the solution process, firstly, the stress field assumptions are given. Here, the body forces are considered to be derivable from known potential functions. After using the Beltrami-Michell equations and the stress field assumptions, biharmonic equations emerged. Providing the solutions to these biharmonic equations, Airy stress functions are obtained. After that, using the Airy stress functions and the stress boundary conditions, the stresses in the mixture constituents are calculated. Since the rotating disk problem is an axisymmetric problem, displacements of the constituents are obtained by using the appropriate strain-displacement equations.

The same path is followed to get the solution of the rotating cylindrical rod problem. Airy stress functions are calculated by solving the biharmonic equations. Then, the stress components of the mixture constituents are written using the Airy stress functions. Applying the stress boundary conditions, all of the unknown constants are determined, thus the stress fields for the mixture constituents are obtained. The rotating cylindrical rod is also an axisymmetric problem. Therefore, the displacements are written using the appropriate strain-displacement equations.

In the fifth and the last chapter of this work, the dimensionless graphs for the results of the thin rotating disk and the rotating cylindrical rod problems, are presented. For this purpose, dimensionless definitions are made. In order to plot the dimensionless graphs, it is necessary to know the exact numerical values of the material coefficients that took place in the fundamental equations. Providing the numerical values from the literature, the graphs for the rotating disk and the rotating rod are plotted and presented. The mean displacement of the mixture is defined by an equation that is available in the literature. Using this mean displacement equation, a new definition is made similar to the dimensionless stress definitions.

The graphs are presented for the solid and the hollow cases of the rotating disk and the rotating rod problems. In the solid disk case, the maximum stresses in the constituents are at the center of the disk and the radial stresses are zero at the free end surface of the disk. These results are compatible with expectations. The graphs of the total stresses and the mean displacement have the same form of a single material solid disk. In the hollow disk case, the radial stresses are zero at the both free surfaces. The maximum stresses occur at the inner free surface. For the rotating disk problem; the graphs are obtained very similar to the rotating disk.

The graphs that show the change of the total stresses and the mixture displacements are also presented for some certain values of the inner radius and the outer radius ratios. These graphs help to understand the effects of the various radius ratios.

Finally, the results of the rotating disk and the rotating rod problems are very similar to each other. They are also similar to the single material case known from the theory of elasticity. This situation is believed to be important for pointing the consistency of the results obtained for a mixture of two linear elastic solids.

1. GİRİŞ

Maddesel ortamların dış etkiler altındaki davranışlarını ve şekil değiştirme özelliklerini değişmez kanunlar ile ifade etme isteği sürekli ortamlar mekaniği olarak bilinen bilim dalının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Sürekli ortamlar mekaniği 17. yüzyıldan itibaren hızla gelişmiş ve şekil değiştiren ortamlar için genel yaklaşımları oluşturarak günümüze kadar ulaştırmıştır. Söz konusu yaklaşımlar tekil bir maddesel ortam için uygulanabileceği gibi farklı özelliklerdeki maddesel ortamların bir arada bulunduğu karışımlar için de uygulanabilmektedir. Birden çok maddesel ortamın bir arada bulunduğu karışımların davranışları karışımlar teorisi kapsamında incelenmektedir.

Karışımlar teorisi birbirleri içerisinde difüzyona uğramış birden fazla maddesel ortamdan teşekkül eden sürekli ortamın mekanik davranışlarının belirlenmesini amaçlamaktadır. Karışımı oluşturan bileşenlerin her birinin karışım üzerinde ihmal edilemeyecek bir etkisi söz konusudur. Eğer ikili bir karışım da bileşenlerden birinin etkisi diğerinin yanında ihmal edilebilecek düzeyde ise bu karışıma tekil bir sürekli ortam gözü ile bakılabilir. Mühendislik uygulamalarının çoğunda kullanılan malzemelere tekil birer sürekli ortam nazarı ile bakmak kabul edilebilir sınırları aşmasa da pek çok durum için söz konusu yaklaşım mümkün olamayacaktır. Biyolojik dokular, kompozit malzemeler, alaşımlar ve yer kabuğu katmanları bu durumlara verilebilecek örneklerden bazılarıdır.

Mevcut malzemelerin özelliklerinin geliştirilerek yeni ve daha iyi özellikteki malzemelerin elde edilmesi günümüzde önemli bir mühendislik dalı haline gelmiştir. Bunun en önemli nedeni endüstriyel uygulamalardaki gelişmelerin malzeme teknolojisindeki gelişmeleri zorunlu kılmasıdır. Söz konusu zorunluluk ise birden fazla bileşenden oluşan malzemelerin geliştirilmesine olan ilgiyi arttırmaktadır.

1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı

Çalışmanın temel amacı iki elastik katıdan oluşan homojen bir karışım için Beltrami-Michell denklemlerinin düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumlarındaki formlarının elde edilmesidir. Daha sonra düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları için Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak örnek problemler incelenecek ve sonuçları değerlendirilecektir.

Bu çalışmada, öncelikle, iki ayrı bileşenden oluşan bir karışımın kinematiği hakkında bilgi verilecektir. Ardından iki elastik katıdan oluşan sürekli ortama ait temel denklemler genel formları ile ifade edilecektir. Sonraki bölümlerde tezin esas içeriği olan hesaplamalar gerçekleştirilecek ve örnek problemler üzerindeki uygulamaları sunulacaktır. Son olarak ise tezin sonuçları hakkında değerlendirmeler yapılacaktır.

1.2 Literatürdeki Çalışmalar

Araştırmacılar birden fazla bileşenden oluşan ortamlar için teorik bir alt yapının oluşturulması amacıyla önemli çalışmalar yapmışlardır. Bu amaçla bileşenler arasındaki difüzyon kuvvetinin tanımlanmasını hedefleyen çalışmalar yapılmıştır (Atkin ve Craine, 1976; Rajagopal ve Tao, 1995). Bu çalışmalarda karışımlar teorisinin halen kullanılan temel kabulleri oluşturulmuş ve karışımın kendisini oluşturan bileşenlerin süperpozisyonu olarak düşünülebileceği ortaya konmuştur. Ancak söz konusu çalışmalardan yola çıkılarak gerilme, şekil değiştirme veya akım alanı gibi değerlerin elde edilmesi mümkün olmamaktaydı. Sürekli ortamlar mekaniğinin modern yaklaşımlarının karışımlara uygulanması ile bu eksiklikler giderilmiştir.

Truesdell ve Toupin (1960) tarafından yapılan çalışmalar modern karışımlar teorisinin başlangıcı olarak kabul edilmektedir. Daha sonra Eringen ve Ingram (1965), Green ve Naghdi (1965), Bowen (1967) ve Müller (1968) ilk karışım termodinamiği yaklaşımlarını ortaya koymuşlardır. Bunun yanı sıra Eringen ve Ingram (1965) tekil ortamların termodinamiği için geliştirilmiş olan formülasyonları karışımlar teorisine uygulayan ilk araştırmacılar olmuşlardır.

Katı-katı ve katı-akışkan karışımları için temel bünye denklemleri Green ve Steel (1966) tarafından ifade edilerek katı-akışkan karışımı için geçerli olan bünye denklemlerinin lineer halleri ortaya konmuştur. Katı-katı karışımları için geçerli olan

bünye denklemlerinin lineer halleri ise daha sonra Steel (1967a) tarafından elde edilmiştir.

Müller (1968) iki akışkan karışımı için belirli prensiplere dayandırdığı termodinamik bir teori ortaya koymuştur. Bu çalışmada yoğunluk gradyanlarının bünye değişkenlerinin arasına dahil edilmesinin gerekliliği ortaya konulmuştur. Gürgöze (1989), Green ve Steel (1966) tarafından ifade edilen bağıntıları kullanarak Kelvin problemini bir katı-akışkan karışımı için incelemiş ve yer değiştirmeleri yöneten diferansiyel denklemleri elde ederek bunların elastisite teorisindeki Navier denklemleri ile olan benzerliklerini ortaya koymuştur.

Sonsuz bir yarı uzaydaki katı-akışkan karışımı için Boussinesq problemi Gürgöze ve Dokuz (1998) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada sonsuz yarı uzaya dik olarak etki eden bir kuvvetin tesiri ile karışımda meydana gelen yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti alanları ortaya konulmuştur. Gürgöze ve Dokuz (1999) tarafından yapılan diğer bir çalışmada iki elastik katıdan oluşan bir karışım için Kelvin problemi incelenmiş ve denge halinde karışımda oluşan değişimler için çözüm önerisi yapılmıştır. Daha sonra Dokuz (1999b) tarafından yapılan bir çalışmada iki elastik katıdan oluşan bir karışımın termostatiği incelenmiştir. Yine Dokuz (2005) tarafından yapılan bir başka çalışmada iki elastik katı karışımına ait temel katsayıların elde edilmesi hakkında analitik bir yaklaşım ortaya konulmuştur. Svanadze (2008) tarafından yapılan çalışmada, iki lineer termoelastik katı karışımındaki düzlem dalgaları ve doğal frekanslar incelenmiş ve düzlem dalgaları ile doğal frekanslar arasındaki bağlantı ortaya konulmuştur. Ieşan (2011) tarafından yapılan çalışmada ön gerilmeye ve ön ısı akısına sahip elastik katı karışımı için bir teori sunulmuştur. Bu teori sabit basınca maruz küresel bir kabuktaki deformasyonların incelenmesi için kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER

Bu bölümde, öncelikle, bir karışım için sürekli ortamlar mekaniği yaklaşımlarına dayanan temel kabuller ifade edilecek ve karışımın kinematiğine ait kavramlar sunulacaktır. Sonrasında ise iki elastik katıdan oluşan bir karışım için lineer haldeki bünye denklemleri verilecek ve gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının gerilmeler cinsinden şekil değiştirmeleri ifade eden ters formu sunulacaktır.

2.1 Karışımın Kinematiği

İncelenen karışımı oluşturan bileşenler sürekli ortam olarak tanımlanabiliyor olsun, yani yeterince büyük bir ΔV hacmi içerisinde karışımı oluşturan bütün bileşenler bulunuyor ve karışımın genelini tutarlı olarak temsil ediyor olsun. Buna göre, şekil değişiminden önce aynı ΔV hacminin içinde bulunan parçacıklar şekil değişiminden sonra farklı parçacıklarla bir araya gelerek yer değiştirmiş olacaklardır. Bu düşünceye uygun olarak, karışımın oluşturduğu uzaysal bölgenin karışımın bütün bileşenleri tarafından doldurulduğu ve bu durumum şekil değişiminden sonra da süreceği söylenebilir. Bu düşünce matematiksel olarak

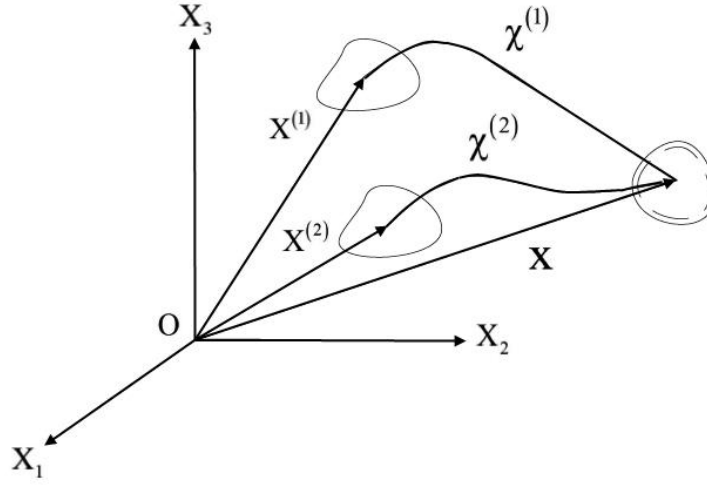
$$\mathbf{x} = \chi^{(\xi)}(\mathbf{X}^{(\xi)}, t), \quad \xi = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

dönüşümleriyle ifade edilebilir. Burada $\mathbf{X}^{(\xi)}$ karışımı oluşturan bileşenlerden birine ait maddesel hacim elemanının şekil değişiminden önceki konumunu, $\mathbf{x}$ ise şekil değişiminden sonraki konumunu göstermektedir (Şekil 2.1). Dönüşümlerin fiziksel bir harekete karşılık gelebilmesi için sürekli olması ve matematiksel olarak ters dönüşümünün alınabiliyor olması gerekir.

Karışımındaki parçacıkların herhangi bir $\mathbf{x}$ konumundaki hızları

$$\mathbf{w}^{(\xi)} = \frac{D^{(\xi)}(\mathbf{x}^{(\xi)})}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{x}^{(\xi)}}{\partial t} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada yer alan maddesel türev operatörü ise



Şekil 2.1 : Karışımın şekil değiştirme.

$$\frac{D^{(\xi)}(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + w_k^{(\xi)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Karışım bileşenlerinin yoğunlukları $\rho_{(\xi)}(x, t)$ olmak üzere, karışımın ortalama hızı

$$w = \frac{1}{\rho} \sum_{\xi=1}^n \rho_{(\xi)} w^{(\xi)} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanmaktadır. Karışımın yoğunluğu ρ , bileşenlerin yoğunluklarının toplamı olarak

$$\rho = \sum_{\xi=1}^n \rho_{(\xi)} \quad (2.5)$$

şeklinde verilmektedir. Karışımındaki parçacıkların ivmeleri ise

$$f^{(\xi)} = \frac{D^{(\xi)}(w^{(\xi)})}{Dt} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, Einstein toplama kuralına uygun olarak, tekrarlanan indis üzerinde 1'den 3'e kadar toplama yapılacaktır. İndisten sonra yer alan virgül ise kendinden sonraki indislere göre türevi ifade etmektedir.

2.2 İki Elastik Katı Karışımı İçin Lineer Bünye Denklemleri

İki bileşenden oluşan bir karışımın temel formülasyonları Green ve Naghdi (1965) tarafından ortaya konulmuştur. Green ve Steel (1966) söz konusu formülasyonlardan yararlanarak iki elastik katıdan oluşan bir karışım için lineer olmayan bünye denklemlerini elde etmişlerdir. Bu denklemlerin lineer halleri ise daha sonra Steel (1967a) tarafından ortaya konulmuştur. Şekil değişiminden önce karışımın sıcaklığının θ_0 , bileşenlerin yoğunluklarının sabit $\bar{\rho}_1$ ve $\bar{\rho}_2$ olarak dengede olduğu ve karışım bileşenlerinin kimyasal olarak etkileşmediği kabul edilmektedir. Karışımın şekil değişiminden önce izotropik olduğu varsayılmaktadır. Bununla birlikte şekil değişiminin sonsuz küçük olduğu kabulü yapılmaktadır. Buna göre ikinci dereceden daha yüksek çarpım terimleri çok küçük değerlere sahip olacaklarından ihmal edilmektedirler. Yer değiştirme değerleri u_i ve v_i , sıcaklık değişimi ise T ile ifade edilirse, ilk anda $X_i = Y_i$ konumunu işgal eden ve θ_0 sıcaklığındaki karışım parçacıkları için sonsuz küçük şekil değiştirme neticesinde

$$x_i = X_i + u_i, \quad y_i = Y_i + v_i, \quad \theta = \theta_0 + T \quad (2.7)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Belirtilen kabuller altında iki elastik katıdan oluşan bir karışım için lineer bünye denklemleri ve süreklilik denklemleri

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & -\alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} \\ & -\lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) - \gamma_1 T \delta_{ik} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ik} = & \alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} \\ & + 2\mu_3 e_{ik} + \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) - \gamma_2 T \delta_{ik} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} + \gamma (w_k^{(1)} - w_k^{(2)}) \quad (2.10)$$

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 (1 - e_{mm}), \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2 (1 - g_{mm}) \quad (2.11)$$

olarak verilmektedir (Steel, 1967a; Steel, 1967b; Ieşan, 1997). Karışım bileşenlerine ait kısmi gerilme tansörleri σ_{ik} ve π_{ik} olarak gösterilmiştir.

π_k , Truesdell ve Toupin (1960) tarafından kullanılan “momentum katkısı” vektörü veya diğer bir ifadeyle “difüzyon kuvveti” vektörünü temsil etmektedir. $\bar{\rho}$ ve α_2 değerleri

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4 \quad (2.12)$$

şeklindedir. $\lambda_1, \dots, \lambda_5$, μ_1, μ_2, μ_3 ve $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ katsayıları ise karışım bileşenlerinin mekanik ve termal özelliklerine bağlı olan katsayılardır. δ_{ik} ise Kronecker deltasını ifade etmektedir. Ayrıca (2.8) ve (2.9) denklemlerine göre α_2 ön gerilmeyi temsil etmektedir.

Denklemlerin lineer halleri göz önüne alındığında e_{ik} , g_{ik} ve h_{ik} tansörleri

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right), \quad g_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial Y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial Y_i} \right), \quad h_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial v_i}{\partial Y_k} \quad (2.13)$$

şeklindedir. Bünye denklemlerindeki h_{ik} ’lı terimlerin katsayısı olan λ_5 karışım bileşenlerinin izotropik olup olmaması ile ilgili olan bir sabittir. Şekil değişiminden önce karışımın tamamı için yapılan izotropiklik kabulü karışım bileşenleri için ayrı ayrı yapılırsa $\lambda_5 = 0$ değerini alacaktır (Steel, 1967b).

İki elastik katı karışımı için hareket denklemlerinin yerel formları ise

$$\sigma_{ik,i} - \pi_k + \bar{\rho}_1 F_k^{(1)} = \bar{\rho}_1 f_k^{(1)}, \quad \pi_{ik,i} + \pi_k + \bar{\rho}_2 F_k^{(2)} = \bar{\rho}_1 f_k^{(2)} \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada $F_k^{(1)}$ ve $F_k^{(2)}$ karışımın bileşenlerine ait kısmi kütle kuvveti vektörlerini, $f_k^{(1)}$ ve $f_k^{(2)}$ ise karışım bileşenlerine ait parçacıkların ivmelerini

göstermektedir. Yazım ve gösterim kolaylığı açısından tezin bundan sonraki kısmında $\bar{\rho}_1 F_k^{(1)} = F_k$ ve $\bar{\rho}_2 F_k^{(2)} = G_k$ olarak adlandırılacaktır.

Karışımın denge hali göz önüne alındığında karışım bileşenlerine ait parçacıkların hız ve ivme vektörleri sıfır olacaktır. Buna göre denge denklemleri

$$\sigma_{ik,i} - \pi_k + F_k = 0, \quad \pi_{ik,i} + \pi_k + G_k = 0 \quad (2.15)$$

olarak yazılabilir. Difüzyon kuvveti vektörü ise

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} \quad (2.16)$$

halini alacaktır.

Bünye denklemlerinden yola çıkılarak hesaplanan şekil değiştirme tansörleri

$$e_{ik} = \alpha_2 E H_1 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (-\mu_3 \pi_{ik} + \mu_2 \sigma_{ik}) + E (A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] + \alpha_{T1} T \delta_{ik} \quad (2.17)$$

$$g_{ik} = -\alpha_2 E H_2 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (\mu_1 \pi_{ik} - \mu_3 \sigma_{ik}) + E (A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] + \alpha_{T2} T \delta_{ik} \quad (2.18)$$

olarak verilmektedir (Dokuz, 1999a). Burada E , G , H_1 ve H_2 ile α_{T1} ve α_{T2} katsayıları lineer bünye denklemlerinde yer alan malzeme sabitleri cinsinden

$$E = \frac{1}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(3\lambda_2 + 2\mu_2) - (3\lambda_3 + 2\mu_3)(3\lambda_4 + 2\mu_3)} \quad (2.19)$$

$$H_1 = 3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3), \quad H_2 = 3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3) \quad (2.20)$$

$$A_1 = -\lambda_3 \mu_1 \mu_2 + \mu_3 \left[\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) - \lambda_4 \left(\frac{3}{2} \lambda_3 + \mu_3 \right) \right] \quad (2.21)$$

$$A_2 = -\lambda_1 \mu_3^2 + \mu_1 \left[-\lambda_2 \left(\frac{3}{2} \lambda_1 + \mu_1 \right) + \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) + \lambda_4 \mu_3 \right] \quad (2.22)$$

$$B_1 = -\lambda_2 \mu_3^2 + \mu_2 \left[-\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) + \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) + \lambda_4 \mu_3 \right] \quad (2.23)$$

$$B_2 = -\lambda_4 \mu_1 \mu_2 + \mu_3 \left[\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) + \lambda_2 \mu_1 - \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) \right] \quad (2.24)$$

$$G = \mu_1 \mu_2 - \mu_3^2, \quad \alpha_{T1} = E[\gamma_1(3\lambda_2 + 2\mu_2) - \gamma_2(3\lambda_3 + 2\mu_3)] \quad (2.25)$$

$$\alpha_{T2} = E[\gamma_2(3\lambda_1 + 2\mu_1) - \gamma_1(3\lambda_4 + 2\mu_3)] \quad (2.26)$$

$$\gamma_1 = \alpha_{T1}(3\lambda_1 + 2\mu_1) + \alpha_{T2}(3\lambda_3 + 2\mu_3) \quad (2.27)$$

$$\gamma_2 = \alpha_{T1}(3\lambda_4 + 2\mu_3) + \alpha_{T2}(3\lambda_2 + 2\mu_2) \quad (2.28)$$

olarak ifade edilmiştir (Dokuz, 1999a). Buradaki α_{T1} ve α_{T2} katsayıları, (2.17) ve (2.18) denklemlerinden görüleceği üzere karışım bileşenlerinin ısı genleşme katsayılarıdır.

3. İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İÇİN DÜZLEM GERİLME VE DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME DURUMLARINDA BELTRAMI-MICHELL DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde, öncelikle, iki elastik katıdan oluşan bir sürekli ortamın düzlem gerilme durumundaki Beltrami-Michell denklemleri elde edilecektir. Ardından ise düzlem şekil değiştirme durumu için hesaplamalar yapılacaktır. Bu tez kapsamında yapılacak çalışmalarda karışım bileşenlerinin şekil değişiminden önce ayrı ayrı izotropik oldukları kabul edilmektedir. Buna göre λ_5 malzeme sabiti sıfıra eşit olacaktır (Steel, 1967b). Ayrıca bu tez kapsamında yapılacak çalışmalarda sıcaklık etkisi göz önüne alınmamaktadır. Bu nedenle bir önceki bölümde verilen denklemlerin tamamında sıcaklıkla ilgili olan terimler düşecektir. Bu koşullar altında tezin bundan sonraki kısmında kullanılacak olan denklemler

$$\sigma_{ik} = -\alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} \quad (3.1)$$

$$\pi_{ik} = \alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 e_{ik} \quad (3.2)$$

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} \quad (3.3)$$

$$e_{ik} = \alpha_2 E H_1 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (-\mu_3 \pi_{ik} + \mu_2 \sigma_{ik}) + E (A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] \quad (3.4)$$

$$g_{ik} = -\alpha_2 E H_2 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (\mu_1 \pi_{ik} - \mu_3 \sigma_{ik}) + E (A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] \quad (3.5)$$

hallerini alırlar.

3.1 Düzlem Gerilme Durumunda Beltrami-Michell Denklemleri

Elastik problemlerin analitik çözümü denklemlerdeki karmaşıklık ve işlem yoğunluğu nedeniyle çoğu durumda çok zor elde edilebilmektedir. Bu amaçla çeşitli matematiksel kabuller yapılarak ve potansiyel fonksiyonlarından yararlanılarak daha

kolay bir şekilde analitik çözüm yapılması sağlanabilmektedir. Düzlem gerilme durumunda tekil malzeme için yapılan kabuller

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.7)$$

şeklindedir (Sadd, 2005). Düzlem gerilmeye karşılık gelen şekil değiştirmeler ise

$$e_{xx} = e_{xx}(x, y), \quad e_{yy} = e_{yy}(x, y), \quad e_{xy} = e_{xy}(x, y) \quad (3.8)$$

$$e_{zz} = e_{zz}(x, y), \quad e_{xz} = e_{yz} = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde olmaktadır.

İki elastik katının karışımından oluşan sürekli bir ortam için düzlem gerilme kabulleri ise

$$P_{ik} = \sigma_{ik} + \pi_{ik} \quad (3.10)$$

toplam gerilme olmak üzere

$$P_{xx} = P_{xx}(x, y), \quad P_{yy} = P_{yy}(x, y), \quad P_{xy} = P_{xy}(x, y) \quad (3.11)$$

$$P_{xz} = P_{yz} = P_{zz} = 0 \quad (3.12)$$

olarak ifade edilmektedir. P_{zz} toplam gerilmesi iki bileşenin toplamı olarak

$$P_{zz} = \sigma_{zz} + \pi_{zz} = 0 \quad (3.13)$$

şeklindedir. Karışımın ön gerilmenin mevcut olmadığı kabul edilirse

$$\sigma_{zz} = \pi_{zz} = 0 \quad (3.14)$$

olduğu kabul edilebilir.

Şekil değiştirme bileşenlerinin açık hallerini yazmak için (3.4) ve (3.5) denklemleri kullanılırsa, karışımın birinci bileşen için

$$e_{xx} = \alpha_2 EH_1 + \frac{1}{2G}(-\mu_3 \pi_{xx} + \mu_2 \sigma_{xx}) + \frac{E}{G}[A_1(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_1(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.15a)$$

$$e_{yy} = \alpha_2 EH_1 + \frac{1}{2G}(-\mu_3 \pi_{yy} + \mu_2 \sigma_{yy}) + \frac{E}{G}[A_1(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_1(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.15b)$$

$$e_{zz} = \alpha_2 EH_1 + \frac{E}{G}[A_1(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_1(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.15c)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2G}(-\mu_3 \pi_{xy} + \mu_2 \sigma_{xy}) \quad (3.15d)$$

bağıntıları elde edilmektedir. Karışımın diğer bileşeni için ise

$$g_{xx} = -\alpha_2 EH_2 + \frac{1}{2G}(\mu_1 \pi_{xx} - \mu_3 \sigma_{xx}) + \frac{E}{G}[A_2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.16a)$$

$$g_{yy} = -\alpha_2 EH_2 + \frac{1}{2G}(\mu_1 \pi_{yy} - \mu_3 \sigma_{yy}) + \frac{E}{G}[A_2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.16b)$$

$$g_{zz} = -\alpha_2 EH_2 + \frac{E}{G}[A_2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.16c)$$

$$g_{xy} = \frac{1}{2G}(\mu_1 \pi_{xy} - \mu_3 \sigma_{xy}) \quad (3.16d)$$

bağıntıları elde edilmektedir.

Karışım bileşenleri için uygunluk denklemleri tekil malzeme durumu ile benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 g_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.18)$$

olarak ifade edilmektedir (Sadd, 2005).

Difüzyon kuvveti vektörünü ifade eden (3.3) denklemindeki g_{mm} ve e_{mm} terimlerinin açık halleri $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$ ve $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ şeklindedir. Bu terimler, (3.15) ve (3.16) denklemlerinden yararlanılarak, gerilmeler cinsinden

$$\begin{aligned} g_{mm} = & -3\alpha_2 EH_2 + \left(\frac{\mu_1}{2G} + \frac{3EA_2}{G} \right) (\pi_{xx} + \pi_{yy}) \\ & + \left(-\frac{\mu_3}{2G} + \frac{3EB_2}{G} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} e_{mm} = & 3\alpha_2 EH_1 + \left(-\frac{\mu_3}{2G} + \frac{3EA_1}{G} \right) (\pi_{xx} + \pi_{yy}) \\ & + \left(\frac{\mu_2}{2G} + \frac{3EB_1}{G} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilirler.

Difüzyon kuvveti vektörünü ifade eden (3.3) denkleminde, yazımda kolaylık sağlanması açısından

$$\rho_1^* = \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}, \quad \rho_2^* = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}} \quad (3.21)$$

boyutsuz katsayı tanımları yapılmaktadır. Buna göre, (3.19) ve (3.20) denklemleri kullanılarak

$$\pi_k = a_1 (\pi_{xx} + \pi_{yy})_{,k} + a_2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{,k} \quad (3.22)$$

olarak ifade edilir. Burada a_1 ve a_2 sabit katsayılar olup

$$a_1 = \left[\rho_1^* \alpha_2 \left(\frac{\mu_1}{2G} + \frac{3EA_2}{G} \right) + \rho_2^* \alpha_2 \left(-\frac{\mu_3}{2G} + \frac{3EA_1}{G} \right) \right] \quad (3.23a)$$

$$a_2 = \left[\rho_1^* \alpha_2 \left(-\frac{\mu_3}{2G} + \frac{3EB_2}{G} \right) + \rho_2^* \alpha_2 \left(\frac{\mu_2}{2G} + \frac{3EB_1}{G} \right) \right] \quad (3.23b)$$

şeklindedirler. Karışımın birinci bileşeninden kaynaklanan Beltrami-Michell denklemini bulmak amacıyla (3.15) denklemleri (3.17) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[-\mu_3 \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial x^2} \right) + \mu_2 \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) \right] \\ & + E \left[A_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + B_1 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \\ & = -\mu_3 \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} + \mu_2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ifadesi elde edilir. (2.15) ile verilen denge denklemlerinden yararlanarak, (3.6) ve (3.7) düzlem gerilme koşulları altında

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \pi_x + F_x = 0 \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \pi_y + F_y = 0 \quad (3.25b)$$

denklemleri yazılmaktadır. (3.25a) ve (3.25b) denklemlerinde σ_{xy} 'li terimler sol tarafta yalnız bırakılır ve sırasıyla x'e ve y'ye göre türev alınarak taraf tarafa toplama yapılırsa

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (3.26)$$

denklemini elde edilir. (3.26) denkleminde difüzyon kuvveti vektörünün π_x ve π_y bileşenleri yer almaktadır. Bunlar açık olarak

$$\pi_x = a_1 \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial x} \right) + a_2 \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right) \quad (3.27a)$$

$$\pi_y = a_1 \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} \right) + a_2 \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \quad (3.27b)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (3.27) denklemleri (3.26)'da yerlerine yazılırsa

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = a_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + a_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (3.28)$$

denklemi elde edilir. (3.28) denklemi daha sonra (3.24) denkleminin sağ tarafında yerine yazılacaktır.

(2.15) ile verilen denge denklemlerinden yararlanılarak, bu kez

$$\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y} + \pi_x + G_x = 0 \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} + \pi_y + G_y = 0 \quad (3.29b)$$

denklemleri yazılmaktadır. (3.28) için yapılan işlemler tekrarlanarak

$$2 \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (3.30)$$

denklemi elde edilir. (3.27) denklemleri (3.30) denkleminde yerlerine yazılarak

$$2 \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} = -a_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) - a_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (3.31)$$

denklemi elde edilir. (3.28) ve (3.31) denklemleri (3.24) denkleminin sağ tarafında yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(EA_1 - b_1 - \frac{\mu_3}{2}\right) \nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + \left(EB_1 - b_2 + \frac{\mu_2}{2}\right) \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
& = \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}\right) - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

denklemini elde edilir. Burada b_1 ve b_2 katsayıları

$$b_1 = \frac{a_1}{2}(\mu_2 + \mu_3), \quad b_2 = \frac{a_2}{2}(\mu_2 + \mu_3) \tag{3.33}$$

ifadelerini temsil etmektedir.

(3.32) denklemindeki katsayılar yeniden adlandırılarak

$$\begin{aligned}
& c_1 \nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + c_2 \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
& = \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}\right) - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

denklemine ulaşılır. Burada c_1 ve c_2 katsayıları aşağıdaki şekildedir.

$$c_1 = EA_1 - b_1 - \frac{\mu_3}{2}, \quad c_2 = EB_1 - b_2 + \frac{\mu_2}{2} \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İkili karışımın diğer bileşeni için de hesap yapmak üzere (3.16) denklemleri (3.18) denkleminde yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial x^2}\right) - \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2}\right) \\
& + EA_2 \nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + EB_2 \nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) = \mu_1 \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} - \mu_3 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

denklemini elde edilir.

(3.28) ve (3.31) denklemleri (3.36) denkleminin sağ tarafında yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned}
& \left(EA_2 - d + \frac{\mu_1}{2}\right) \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + \left(EB_2 - d_2 - \frac{\mu_3}{2}\right) \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
& = -\frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}\right) + \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemdeki d_1 ve d_2 katsayıları

$$d_1 = -\frac{a_1}{2} (\mu_1 + \mu_3), \quad d_2 = -\frac{a_2}{2} (\mu_1 + \mu_3) \tag{3.38}$$

ifadelerini temsil etmektedir. (3.37) denkleminde katsayılar yeniden adlandırılarak

$$\begin{aligned}
& e_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + e_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
& = -\frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}\right) + \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

denklemini elde edilmektedir. Bu denklemdeki e_1 ve e_2 katsayıları

$$e_1 = EA_2 - d_1 + \frac{\mu_1}{2}, \quad e_2 = EB_2 - d_2 - \frac{\mu_3}{2} \tag{3.40}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(3.34) ve (3.39) denklemleri incelendiğinde bu denklemlerin

$$c_1 X + c_2 Y = P, \quad e_1 X + e_2 Y = R \tag{3.41}$$

formunda iki bilinmeyenli iki denkleme karşılık geldiği anlaşılmaktadır. (3.41) denkleminin X ve Y için çözümü

$$\begin{aligned}
X &= \left(\frac{1}{e_2 c_1 - c_2 e_1}\right) (e_2 P - c_2 R) \\
Y &= \left(\frac{1}{e_2 c_1 - c_2 e_1}\right) (c_1 R - e_1 P),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde olduğuna göre (3.34) ve (3.39) denklemlerindeki $\nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy})$ ve $\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ terimlerinin sadece karışımın iki bileşenine ait kütle kuvvetleri cinsinden yazılması mümkün olmaktadır. Bu işlem neticesinde

$$\nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) = h_1 \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - h_2 \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (3.43)$$

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -h_3 \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) + h_4 \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (3.44)$$

denklemleri elde edilir. Burada h_1 , h_2 , h_3 ve h_4 katsayıları

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{e_2 \mu_3 + c_2 \mu_1}{2(e_2 c_1 - c_2 e_1)}, & h_2 &= \frac{e_2 \mu_2 + c_2 \mu_3}{2(e_2 c_1 - c_2 e_1)} \\ h_3 &= \frac{c_1 \mu_1 + e_1 \mu_3}{2(e_2 c_1 - c_2 e_1)}, & h_4 &= \frac{c_1 \mu_3 + e_1 \mu_2}{2(e_2 c_1 - c_2 e_1)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

şeklinde olmaktadır.

Böylelikle, iki elastik katının karışımından oluşan sürekli bir ortam için düzlemsel gerilme haline ait Beltrami-Michell denklemleri elde edilmiş olur. Ortam iki ayrı bileşenden oluştuğu için iki ayrı denklem elde edilmiştir.

3.2 Düzlem Şekil Değiştirme Durumunda Beltrami-Michell Denklemleri

Uzunluğu diğer boyutlarına göre çok daha fazla olan bir silindir düzlem şekil değiştirme durumu için örnek verilebilecek bir problemdir. Tek malzemedен oluşan düzlem şekil değiştirme durumundaki cisim için yapılan kabuller

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_{xx}(x, y), & e_{yy} &= e_{yy}(x, y) \\ e_{xy} &= e_{xy}(x, y), & e_{xz} &= e_{yz} = e_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklindedir (Sadd, 2005).

İki elastik katıdan oluşan sürekli bir ortamın bileşenleri için bu kabuller

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= e_{xx}(x, y), & e_{yy} &= e_{yy}(x, y) \\
e_{xy} &= e_{xy}(x, y), & e_{xz} &= e_{yz} = e_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= g_{xx}(x, y), & g_{yy} &= g_{yy}(x, y) \\
g_{xy} &= g_{xy}(x, y), & g_{xz} &= g_{yz} = g_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

şeklinde olmaktadır. Karışım bileşenlerine ait gerilmelerin açık olarak yazılmış halleri daha sonraki hesaplamalarda kullanılacaktır. Bu amaçla düzlem şekil değiştirme kabullerinden faydalanarak (3.1) ve (3.2) denklemlerinin açık halleri

$$\sigma_{xx} = -\alpha_2 + \lambda_1(e_{xx} + e_{yy}) + 2\mu_1 e_{xx} + \lambda_3(g_{xx} + g_{yy}) + 2\mu_3 g_{xx} \tag{3.49a}$$

$$\sigma_{yy} = -\alpha_2 + \lambda_1(e_{xx} + e_{yy}) + 2\mu_1 e_{yy} + \lambda_3(g_{xx} + g_{yy}) + 2\mu_3 g_{yy} \tag{3.49b}$$

$$\sigma_{zz} = -\alpha_2 + \lambda_1(e_{xx} + e_{yy}) + \lambda_3(g_{xx} + g_{yy}) \tag{3.49c}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu_1 e_{xy} + 2\mu_3 g_{xy} \tag{3.49d}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{3.49e}$$

ve

$$\pi_{xx} = \alpha_2 + \lambda_2(g_{xx} + e_{yy}) + 2\mu_2 g_{xx} + \lambda_4(e_{xx} + e_{yy}) + 2\mu_3 e_{xx} \tag{3.50a}$$

$$\pi_{yy} = \alpha_2 + \lambda_2(g_{xx} + g_{yy}) + 2\mu_2 g_{yy} + \lambda_4(e_{xx} + e_{yy}) + 2\mu_3 e_{yy} \tag{3.50b}$$

$$\pi_{zz} = \alpha_2 + \lambda_2(g_{xx} + g_{yy}) + \lambda_4(e_{xx} + e_{yy}) \tag{3.50c}$$

$$\pi_{xy} = 2\mu_2 g_{xy} + 2\mu_3 e_{xy} \tag{3.50d}$$

$$\pi_{xz} = \pi_{yz} = 0 \quad (3.50e)$$

olarak yazılmaktadır.

Düzlem şekil değiştirme durumunda düzlem gerilme durumundakinden farklı kabuller söz konusu olduğundan birim şekil değiştirmelerin açık hallerini de yeniden yazmak gerekecektir. Bunlar (3.4) ve (3.5) denklemleri kullanılarak

$$e_{xx} = \alpha_2 E H_1 + \frac{1}{2G} [-\mu_3 \pi_{xx} + \mu_2 \sigma_{xx}] + \frac{E}{G} [A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}] \quad (3.51a)$$

$$e_{yy} = \alpha_2 E H_1 + \frac{1}{2G} [-\mu_3 \pi_{yy} + \mu_2 \sigma_{yy}] + \frac{E}{G} [A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}] \quad (3.51b)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2G} [-\mu_3 \pi_{xy} + \mu_2 \sigma_{xy}] \quad (3.51c)$$

$$e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0 \quad (3.51d)$$

ve

$$g_{xx} = -\alpha_2 E H_2 + \frac{1}{2G} [\mu_1 \pi_{xx} - \mu_3 \sigma_{xx}] + \frac{E}{G} [A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}] \quad (3.52a)$$

$$g_{yy} = -\alpha_2 E H_2 + \frac{1}{2G} [\mu_1 \pi_{yy} - \mu_3 \sigma_{yy}] + \frac{E}{G} [A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}] \quad (3.52b)$$

$$g_{xy} = \frac{1}{2G} [\mu_1 \pi_{xy} - \mu_3 \sigma_{xy}] \quad (3.52c)$$

$$g_{xz} = g_{yz} = g_{zz} = 0 \quad (3.52d)$$

olarak yazılır. Açık halde yazılmış olan bu denklemlerde tekrarlanan indis kullanılımasının nedeni yazımda sadeliği korumaktır. Burada 1'den 3'e kadar toplama sadece tekrarlanan 'm' indisi için geçerlidir.

Düzlem gerilme durumunda ifade edilen uygunluk denklemleri ile denge denklemleri düzlem şekil değiştirme durumunda da aynı olacaktır. Ancak şekil değiştirmeler ile ilgili yapılan kabullerin farklı olmasından dolayı difüzyon kuvveti vektörünün yeniden ifade edilmesi gerekmektedir. Buna göre (3.3) denklemi

$$\pi_k = \rho_1^* \alpha_2 g_{mm,k} + \rho_2^* \alpha_2 e_{mm,k} \quad (3.53)$$

olarak ifade edilir. Düzlem şekil değiştirme kabulleri göz önüne alınırsa (3.53) denklemi

$$\pi_k = \rho_1^* \alpha_2 (g_{xx} + g_{yy})_{,k} + \rho_2^* \alpha_2 (e_{xx} + e_{yy})_{,k} \quad (3.54)$$

halini alır. (3.51) ve (3.52) denklemlerinden yararlanarak gerekli hesaplamalar yapılır ve oluşan katsayılar yeniden adlandırılırsa (3.54) denklemi

$$\pi_k = k_1 (\pi_{xx} + \pi_{yy})_{,k} + k_2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{,k} + k_3 \pi_{mm,k} + k_4 \sigma_{mm,k} \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\alpha_2}{2G} [\rho_1^* \mu_1 - \rho_2^* \mu_3], & k_2 &= \frac{\alpha_2}{2G} [-\rho_1^* \mu_3 + \rho_2^* \mu_2] \\ k_3 &= \frac{2E\alpha_2}{G} [\rho_1^* A_2 + \rho_2^* A_1], & k_4 &= \frac{2E\alpha_2}{G} [\rho_1^* B_2 + \rho_2^* B_1] \end{aligned} \quad (3.56)$$

ifadelerini temsil etmektedir.

Düzlem gerilme durumu için yapılan hesaplarda elde edilen (3.26) ve (3.30) denklemleri düzlem şekil değiştirme durumu içinde aynen geçerlidir. Ancak bu denklemlerdeki difüzyon kuvvetini ifade eden terimler doğal olarak farklı olmaktadır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} &= k_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + k_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ &+ k_3 \nabla^2 (\pi_{mm}) + k_4 \nabla^2 (\sigma_{mm}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

olarak ifade edilmektedir.

İki elastik katıdan oluşan karışımın birinci bileşeni için ifade edilmiş olan (3.17) uygunluk koşulunda, (3.51) denklemleri yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial x^2} \right) + \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) \\
& + EA_1 \nabla^2(\pi_{mm}) + EB_1 \nabla^2(\sigma_{mm}) = -\frac{\mu_3}{2} \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\mu_2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

denklemini elde edilir. (3.57) denklemini, (3.26) ve (3.30) denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra oluşan ifadeler (3.58) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli katsayı isimlendirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
& m_1 \nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + m_2 \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
& + m_3 \nabla^2(\pi_{mm}) + m_4 \nabla^2(\sigma_{mm}) = \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

denklemini elde edilir. (3.59) denkleminde yer alan katsayılar

$$\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{\mu_3}{2} - \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_1}{2}, & m_2 &= \frac{\mu_2}{2} - \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_2}{2} \\
m_3 &= EA_1 - \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_3}{2}, & m_4 &= EB_1 - \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_4}{2}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Karışımın ikinci bileşeni için ifade edilmiş olan (3.18) uygunluk denkleminde, (3.52) denklemleri yerlerine yazılarak ise

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 \pi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_{yy}}{\partial x^2} \right) - \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) \\
& + EA_2 \nabla^2(\pi_{mm}) + EB_2 \nabla^2(\sigma_{mm}) = \frac{\mu_1}{2} \frac{\partial^2 \pi_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\mu_3}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

denklemini elde edilir.

(3.57) denklemini, (3.26) ve (3.30) denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra oluşan ifadeler bu kez (3.61) denkleminde yerlerine yazılırsa ve gerekli katsayı isimlendirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
& n_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + n_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + n_3 \nabla^2 (\pi_{mm}) + n_4 \nabla^2 (\sigma_{mm}) \\
& = -\frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) + \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

denklemini elde edilir.

(3.62) denkleminde yer alan katsayılar

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{\mu_1}{2} + \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_1}{2}, & n_2 &= -\frac{\mu_3}{2} + \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_2}{2} \\
n_3 &= EA_2 + \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_3}{2}, & n_4 &= EB_2 + \frac{(\mu_2 + \mu_3)k_4}{2}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklindedir.

Görüleceği üzere (3.59) ve (3.62) denklemleri sadece katsayılar açısından farklılık arz etmektedir. Bu iki denklem karışımındaki iki farklı bileşenden kaynaklandıkları için aynı formda olmaktadır.

(3.59) ve (3.62) denklemlerindeki tekrarlanan indise sahip π_{mm} ve σ_{mm} ifadeleri daha önce belirtildiği üzere sırasıyla $\pi_{xx} + \pi_{yy} + \pi_{zz}$ ve $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ toplamlarını ifade etmektedir. Eğer π_{zz} ve σ_{zz} gerilme bileşenleri sadece $\pi_{xx} + \pi_{yy}$ ve $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ toplamlarını içerecek şekilde ifade edilebilirse (3.59) ve (3.62) denklemleri düzlem gerilme durumunda elde edilen denklemlere benzer hale getirilebilecektir. Bu aşamadan sonra ise düzlem şekil değiştirme durumu için Beltrami-Michell denklemleri kolaylıkla elde edilebilecektir.

(3.49a) ve (3.49b) denklemleri kullanılarak $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ toplamı

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -2\alpha_2 + 2(\lambda_1 + \mu_1)(e_{xx} + e_{yy}) + 2(\lambda_3 + \mu_3)(g_{xx} + g_{yy}) \tag{3.64}$$

olarak elde edilmektedir.

(3.64) denklemindeki $e_{xx} + e_{yy}$ ve $g_{xx} + g_{yy}$ terimleri (3.51) ve (3.52) denklemleri kullanılarak

$$e_{xx} + e_{yy} = 2\alpha_2 EH_1 + \frac{1}{2G} [-\mu_3(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + \mu_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \frac{2E}{G} [A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}] \quad (3.65)$$

$$g_{xx} + g_{yy} = -2\alpha_2 EH_2 + \frac{1}{2G} [\mu_1(\pi_{xx} + \pi_{yy}) - \mu_3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \frac{2E}{G} [A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}] \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilmektedir. (3.65) ve (3.66) denklemleri (3.64) denkleminde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa, uygun katsayı adlandırmaları ile

$$p_1(\pi_{mm}) + p_2(\sigma_{mm}) = p_3 + p_4(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + p_5(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.67)$$

denklemini elde edilmektedir. Bu denklemde yer alan katsayılar

$$p_1 = \frac{4E}{G} [(\lambda_1 + \mu_1)A_1 + (\lambda_3 + \mu_3)A_2]$$

$$p_2 = \frac{4E}{G} [(\lambda_1 + \mu_1)B_1 + (\lambda_3 + \mu_3)B_2]$$

$$p_3 = 2\alpha_2 - 4\alpha_2 E [(\lambda_1 + \mu_1)H_1 - (\lambda_3 + \mu_3)H_2]$$

$$p_4 = \frac{\mu_3(\lambda_1 + \mu_1) - \mu_1(\lambda_3 + \mu_3)}{G}$$

$$p_5 = 1 - \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1) - \mu_3(\lambda_3 + \mu_3)}{G} \quad (3.68)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(3.50a) ve (3.50b) denklemleri kullanılarak bu kez $\pi_{xx} + \pi_{yy}$ toplamı

$$\pi_{xx} + \pi_{yy} = 2\alpha_2 + 2(\lambda_2 + \mu_2)(g_{xx} + g_{yy}) + 2(\lambda_4 + \mu_3)(e_{xx} + e_{yy}) \quad (3.69)$$

olarak elde edilsin. (3.65) ve (3.66) denklemleri (3.69) denkleminde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa uygun katsayı adlandırmaları ile

$$q_1(\pi_{mm}) + q_2(\sigma_{mm}) = q_3 + q_4(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + q_5(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.70)$$

denkleminde ulaşılmaktadır.

(3.70) denkleminde yer alan katsayılar

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{4E}{G} [(\lambda_4 + \mu_3)A_1 + (\lambda_2 + \mu_2)A_2] \\ q_2 &= \frac{4E}{G} [(\lambda_4 + \mu_3)B_1 + (\lambda_2 + \mu_2)B_2] \\ q_3 &= -2\alpha_2 - 4\alpha_2 E [(\lambda_4 + \mu_3)H_1 - (\lambda_2 + \mu_2)H_2] \\ q_4 &= 1 - \frac{\mu_1(\lambda_2 + \mu_2) - \mu_3(\lambda_4 + \mu_3)}{G} \\ q_5 &= \frac{\mu_3(\lambda_2 + \mu_2) - \mu_2(\lambda_4 + \mu_3)}{G} \end{aligned} \quad (3.71)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(3.67) ve (3.70) denklemleri göz önüne alındığında bu iki denklemin

$$p_1X + p_2Y = p_3 + p_4P + p_5R \quad (3.72a)$$

$$q_1X + q_2Y = q_3 + q_4P + q_5R \quad (3.72b)$$

formunda iki bilinmeyenli iki denkleme ifade ettiği anlaşılmaktadır. Bu denklemler çözülerek gerekli düzenleme ve katsayı isimlendirmeleri yapılsa

$$\pi_{zz} = r_0 + (r_1 - 1)(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + r_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.73)$$

$$\sigma_{zz} = s_0 + s_1(\pi_{xx} + \pi_{yy}) + (s_2 - 1)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.74)$$

ifadeleri elde edilir.

Burada r_0 , r_1 , r_2 ile s_0 , s_1 , s_2 katsayıları

$$\begin{aligned}
r_0 &= \frac{p_3 q_2 - p_2 q_3}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & r_1 &= \frac{p_4 q_2 - p_2 q_4}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & r_2 &= \frac{p_5 q_2 - p_2 q_5}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \\
s_0 &= \frac{p_1 q_3 - p_3 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & s_1 &= \frac{p_1 q_4 - p_4 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & s_2 &= \frac{d_1 q_5 - p_5 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

değerlerine karşılık gelmektedir. Böylelikle π_{zz} ve σ_{zz} sadece $\pi_{xx} + \pi_{yy}$ ve $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ toplamalarını içeren terimler cinsinden ifade edilmiş olur.

(3.73) ve (3.74) denklemleri göz önüne alınarak (3.59) denklemi yeniden yazılır ve gerekli düzenleme ve katsayı isimlendirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
&t_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + t_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \\
&\frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

denklemi elde edilir. (3.76) denkleminde

$$t_1 = m_1 + m_3 r_1 + m_4 s_1, \quad t_2 = m_2 + m_3 r_2 + m_4 s_2 \tag{3.77}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(3.73) ve (3.74) denklemleri göz önüne alınarak bu kez (3.62) denklemi yeniden yazılır ve gerekli düzenleme ve katsayı isimlendirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
&u_1 \nabla^2 (\pi_{xx} + \pi_{yy}) + u_2 \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \\
&-\frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) + \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

denklemi elde edilir. (3.78) denkleminde

$$u_1 = n_1 + n_3 r_1 + n_4 s_1, \quad u_2 = n_2 + n_3 r_2 + n_4 s_2 \tag{3.79}$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.76) ve (3.78) denklemleri, düzlem gerilme durumuna benzer şekilde iki bilinmeyenli iki denklem olarak değerlendirilerek çözüm yapılırsa, düzlem şekil değiştirme durumu için Beltrami-Michell denklemleri

$$\nabla^2(\pi_{xx} + \pi_{yy}) = v_1 \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) - v_2 \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (3.80)$$

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -v_3 \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) + v_4 \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (3.81)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerde yer alan katsayılar

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{u_2\mu_3 + t_2\mu_1}{2(t_1u_2 - t_2u_1)}, & v_2 &= \frac{u_2\mu_2 + t_2\mu_3}{2(t_1u_2 - t_2u_1)} \\ v_3 &= \frac{t_1\mu_1 + u_1\mu_3}{2(t_1u_2 - t_2u_1)}, & v_4 &= \frac{t_1\mu_3 + u_1\mu_2}{2(t_1u_2 - t_2u_1)} \end{aligned} \quad (3.82)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Böylece düzlem gerilme durumunun ardından düzlem şekil değiştirme durumu için de Beltrami-Michell denklemleri elde edilmiş olur. Her iki durum için elde edilen denklemlerde sadece katsayılar farklıdır. İki elastik katıdan oluşan bir sürekli ortam için kütle kuvvetlerinin mevcut olduğu halde düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları arasında (3.45) ve (3.82) ile verilen katsayıların değiştirilmesi ile dönüşüm yapılabilir. Buna benzer bir durum elastisite teorisinden hatırlanmaktadır.

4. İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İÇİN AIRY GERİLME FONKSİYONU KULLANILARAK DÖNEN DİSK VE DÖNEN SİLİNDİRİK ÇUBUK PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak, ikili karışım için dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri incelenecektir. Bu amaçla, öncelikle, tekil malzeme için elastisite teorisinden bilinen çözüm özet olarak verilecektir. İkili karışım için yapılan çalışmalar bundan sonra sunularak aradaki fark ve benzerlikler ortaya konulacaktır.

Dönen disk problemi düzlem gerilme durumuna, dönen silindirik çubuk ise düzlem şekil değiştirme durumuna örnek olarak verilebilir. Bu iki problemin çözümleri, bir önceki bölümde elde edilen ikili karışıma ait Beltrami-Michell denklemleri kullanılarak ve Airy gerilme fonksiyonu kabullerinden yararlanılarak incelenecektir. Gerilme fonksiyonu formülasyonu, gerilme alanı için denge denklemlerini ve diğer alan denklemlerini sağlayan bir kabul yapılması ilkesine dayanmaktadır (Sadd, 2005).

Bu bölümde incelenen problemler için ikili katı karışımında ön gerilme bulunmadığı kabul edilecektir. Bu kabul difüzyon kuvveti vektörü için rastgele bir dağılım kabulü yapılmaması açısından önemlidir. Ön gerilmenin mevcut olmaması kabulü gereği, karışım bileşenlere ait gerilme denklemlerinde yer alan α_2 katsayısı sıfır olacaktır. Buna göre, (2.12) denklemi göz önüne alınarak

$$\alpha_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 \quad (4.1)$$

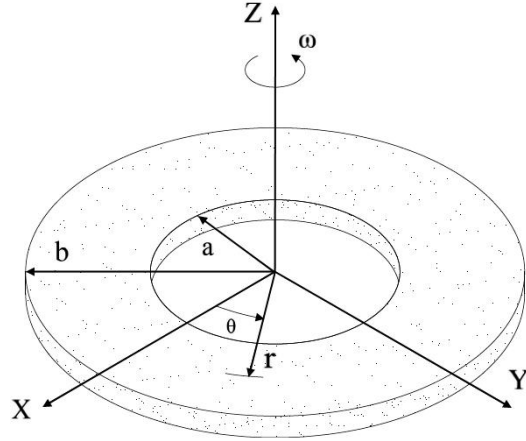
şeklinde olmaktadır. (4.1) ifadesi gereği, (3.3) ile verilen difüzyon kuvveti vektörü

$$\pi_k = 0 \quad (4.2)$$

olmaktadır.

4.1 Döner Disk Problemi

Döner disk problemi düzlem gerilme durumuna uygun bir problemdir. Bu çalışmada iç çapı $r = a$ ve dış çapı $r = b$ olmak üzere en genel durumdaki döner ince disk düşünülmektedir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 : Döner disk problemi.

4.1.1 Tekil bir elastik ortam için döner disk problemi

İkili karışım için döner disk probleminin incelenmesinden önce tekil malzeme durumundaki çözümün incelenmesi yararlı olacaktır. Problemin çözümü Beltrami-Michell denklemi ve Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilecektir. Düzlem gerilme durumunda tekil malzeme için Beltrami-Michell denklemi

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (4.3)$$

şeklindedir. Bu denklemin kutupsal koordinatlardaki görünümü ise

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.4)$$

olarak verilmektedir (Sadd, 2005). Airy gerilme fonksiyonu $F = F(x, y)$ ve kütle kuvvetleri f_x ve f_y olmak üzere, kütle kuvvetinin bir V potansiyelinden türediği düşünülerek, gerilme alanı ve kütle kuvvetleri için

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + V, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4.5)$$

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.6)$$

kabulleri yapılmaktadır. Bu kabuller kutupsal koordinatlarda

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + V, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + V, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (4.7)$$

$$f_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad f_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (4.8)$$

hallerini almaktadırlar (Barber, 1992).

Kütle kuvvetleri, şekil değişiminden önceki merkezkaç etkiden kaynaklandıkları düşünülerek

$$f_r = \rho \omega^2 r, \quad f_\theta = 0 \quad (4.9)$$

olarak ifade edilmektedir. Böylece kütle kuvveti için ilk andaki sabit yoğunluk değeri olan ρ kullanılmaktadır (Sadd, 2005).

(4.8) ve (4.9) denklemleri kullanılarak integrasyon yapılırsa, kütle kuvvetinin türediği potansiyel

$$V = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad (4.10)$$

olarak elde edilir.

(4.7) ve (4.8) denklemleri kullanılarak (4.4) denklemi

$$\nabla^4 F = (v - 1) \nabla^2 V \quad (4.11)$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu denklemde yer alan ∇^2 operatörü kutupsal koordinatlarda

$$\nabla^2 () = \frac{\partial^2 ()}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 ()}{\partial \theta^2} \quad (4.12)$$

olarak ifade edilmektedir.

Bu durumda, (4.11), (4.10) ve (4.12) denklemleri kullanılarak

$$\nabla^4 F = 2\rho\omega^2(u - 1) \quad (4.13)$$

homojen olmayan diferansiyel denklemi elde edilir. Airy gerilme fonksiyonunun elde edilebilmesi için bu diferansiyel denklemin çözülmesi gerekmektedir.

Dönen disk problemi eksenel simetrik bir problemidir. Bu nedenle Airy gerilme fonksiyonu θ 'dan bağımsız olmalıdır. Başka bir deyişle, Airy gerilme fonksiyonu $F = F(r)$ formunda radyal bir fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar için biharmonik denklem

$$\nabla^4 F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) \right] \right\} \quad (4.14)$$

halini almaktadır (Kaplan, 1992).

$$\nabla^4 F = 0 \quad (4.15)$$

denkleminin çözümü Michell tarafından verilmiştir. Eksenel simetrik durumda bu çözüm

$$F_h = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r \quad (4.16)$$

formuna indirgenebilmektedir. Bu çözümdeki C_4 katsayısı, yer değiştirme bileşenlerinde θ 'dan bağımsız olmayı engellemektedir (Barber, 1992). Disk üzerinde her 2π kadar dönüş neticesinde aynı konuma ulaşıldığında çözümün değişmemesi gerekmektedir. C_4 katsayısını ihtiva eden yer değiştirme alanı çok değerli bir davranış sergilediği için $C_4 = 0$ alınmalıdır. Çözümü tamamlamak için

$$\nabla^4 F = 64C_0 \quad (4.17)$$

formundaki homojen olmayan denklemin çözümü

$$F_s = C_0 r^4 \quad (4.18)$$

olarak verilmektedir (Url-1, 2011). Sonuç olarak Airy gerilme fonksiyonu

$$F = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_0 r^4 \quad (4.19)$$

olarak elde edilmektedir. Buna göre, (4.13) denkleminde Airy gerilme fonksiyonu

$$F = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + \frac{(1 - \nu)}{32} \rho \omega^2 r^4 \quad (4.20)$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır.

Airy gerilme fonksiyonu elde edildiğine göre (4.7) ile verilen gerilme alanı gerekli hesaplama ve düzenlemelerden sonra

$$\sigma_{rr} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 - \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (4.21)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 - \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (4.22)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.23)$$

olarak elde edilir. İç çapı $r = a$ ve dış çapı $r = b$ olan halka şeklindeki en genel disk düşünülürse, bu durumdaki sınır şartları

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = \sigma_{rr} \Big|_{r=b} = 0 \quad (4.24)$$

şeklindedir. (4.24) sınır koşullarının kullanılması neticesinde C_1 ve C_2 katsayıları elde edilir ve gerilme alanı

$$\sigma_{rr} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left[a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \quad (4.25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left[a^2 + b^2 - \frac{(1 + 3\nu)}{(3 + \nu)} r^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \quad (4.26)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.27)$$

şeklinde bulunur.

Yer değiştirme bileşenlerinin elde edilmesi için ise yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntılarının kullanılması gerekmektedir. Dönen disk problemi eksenel simetrik bir problem olduğundan $u_\theta = 0$ olacağı bilinmektedir. u_r 'nin elde edilmesi için yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntılarından

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (4.28)$$

denklemin kullanılması yeterli olacaktır. Eksenel simetri gereği (4.28) denklemi

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (4.29)$$

şeklinde olacaktır. Bünye denklemlerinden

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}] \quad (4.30)$$

denklemi, elde edilen gerilme alanı kullanılarak hesaplanır ve (4.29) denkleminde yerine yazılırsa radyal yöndeki yer değiştirme

$$u_r = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \frac{(1 - \nu)}{E} r \left[a^2 + b^2 - \frac{(1 + \nu)}{(3 + \nu)} r^2 + \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \quad (4.31)$$

olarak elde edilir.

4.1.2 İki elastik katıdan oluşan bir karışım için dönen disk problemi

Dönen disk probleminin, Beltrami-Michell denklemi ve Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak, tekil malzeme için çözümü sunulduktan sonra iki katı karışımından oluşan sürekli bir ortam için inceleme yapılacaktır. İkili karışım için düzlem gerilme durumundaki Beltrami-Michell denklemleri (3.43) ve (3.44) denklemleri ile verilmişti. Bu denklemlerin kutupsal koordinatlardaki şekli tekil durum göz önüne alınarak

$$\nabla^2(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) = h_1 \left(\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{G_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} \right) - h_2 \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.32)$$

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -h_3 \left(\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{G_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} \right) + h_4 \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.33)$$

olarak ifade edilmektedir.

Karışımın bileşenleri için Airy gerilme fonksiyonları $F_1 = F_1(r)$ ve $F_2 = F_2(r)$ şeklinde olsun. Karışım bileşenleri için kütle kuvvetlerinin, sırasıyla, V_1 ve V_2 potansiyellerinden türediği düşünülerek, bileşenlere ait gerilme alanlarının ve kütle kuvvetlerinin

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} + V_1, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + V_1, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \quad (4.34)$$

$$\pi_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} + V_2, \quad \pi_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2} + V_2, \quad \pi_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \right) \quad (4.35)$$

$$F_r = -\frac{\partial V_1}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \quad (4.36)$$

$$G_r = -\frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad G_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \quad (4.37)$$

şeklinde olacağı kabul edilmektedir. Karışım bileşenleri için ön gerilmenin mevcut olmadığı kabulü yapıldığı için difüzyon kuvveti vektörünün bir potansiyelden türediği şeklindeki varsayım bu denklemlerde yer almak zorunda değildir. Verilen bu bağıntılar (4.32) ve (4.33) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$\nabla^4 F_1 = -(h_4 + 2) \nabla^2 V_1 + h_3 \nabla^2 V_2 \quad (4.38)$$

$$\nabla^4 F_2 = h_2 \nabla^2 V_1 - (h_1 + 2) \nabla^2 V_2 \quad (4.39)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler Airy gerilme fonksiyonları ile kütle kuvveti potansiyelleri arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. (4.38) ve (4.39) denklemleri kutupsal koordinatlarda ifade edilmesine rağmen kartezyen koordinatlarda da aynı formda geçerli olmaktadır.

Karışım bileşenlerine ait kütle kuvvetleri

$$F_r = \bar{\rho}_1 \omega^2 r, \quad F_\theta = 0 \quad (4.40)$$

$$G_r = \bar{\rho}_2 \omega^2 r, \quad G_\theta = 0 \quad (4.41)$$

şeklindedir. (4.36) ve (4.37) denklemleri ile (4.40) ve (4.41) denklemleri kullanılarak integrasyon yapılırsa kütle kuvveti potansiyelleri

$$V_1 = -\frac{1}{2} \bar{\rho}_1 \omega^2 r^2 \quad (4.42)$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \bar{\rho}_2 \omega^2 r^2 \quad (4.43)$$

olarak elde edilir.

(4.12), (4.42) ve (4.43) denklemleri kullanılarak (4.38) ve (4.39) yeniden yazılırsa

$$\nabla^4 F_1 = 2\omega^2 [\bar{\rho}_1 (h_4 + 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.44)$$

$$\nabla^4 F_2 = 2\omega^2 [-\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2 (h_1 + 2)] \quad (4.45)$$

homojen olmayan diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler, tekil malzeme için ifade edilen şekilde çözümlenerek

$$F_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{32} [\bar{\rho}_1 (h_4 + 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.46)$$

$$F_2 = D_1 + D_2 \ln r + D_3 r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{32} [-\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2 (h_1 + 2)] \quad (4.47)$$

Airy gerilme fonksiyonları elde edilir. Bu durumda, (4.34) ve (4.35) ile verilen gerilme alanları

$$\sigma_{rr} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [\bar{\rho}_1 (h_4 - 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.48)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [\bar{\rho}_1(3h_4 + 2) - 3\bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.49)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.50)$$

ve

$$\pi_{rr} = \frac{D_2}{r^2} + 2D_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [-\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2(h_1 - 2)] \quad (4.51)$$

$$\pi_{\theta\theta} = -\frac{D_2}{r^2} + 2D_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [-3\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2(3h_1 + 2)] \quad (4.52)$$

$$\pi_{r\theta} = 0 \quad (4.53)$$

olarak elde edilmektedir.

Karışım bileşenlerine ait gerilme alanlarının nihai hallerinin elde edilebilmesi için yukarıdaki denklemlerde yer alan sabitlerin belirlenmesi gerekir. Söz konusu sabitlerin elde edilebilmesi için en genel haldeki dönen disk problemine ait sınır koşulları

$$(\sigma_{rr} + \pi_{rr}) \Big|_{r=a} = (\sigma_{rr} + \pi_{rr}) \Big|_{r=b} = 0 \quad (4.54)$$

olacaktır. Ancak, $r = a$ ve $r = b$ yarıçapları karışım bileşenlerinin tümü için serbest yüzeyler olduğu için ve karışımda ön gerilme mevcut olmadığı için bu sınır koşulları

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = \sigma_{rr} \Big|_{r=b} = \pi_{rr} \Big|_{r=a} = \pi_{rr} \Big|_{r=b} = 0 \quad (4.55)$$

olarak yazılabilir. (4.55) sınır koşulları (4.48) denklemi için uygulanırsa

$$\frac{C_2}{a^2} + 2C_3 = -\frac{\omega^2 a^2}{8} [\bar{\rho}_1(h_4 - 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.56a)$$

$$\frac{C_2}{b^2} + 2C_3 = -\frac{\omega^2 b^2}{8} [\bar{\rho}_1(h_4 - 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.56b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülerek

$$C_2 = \frac{a^2 b^2 \omega^2}{8} [\bar{\rho}_1 (h_4 - 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.57a)$$

$$C_3 = -\frac{(a^2 + b^2) \omega^2}{16} [\bar{\rho}_1 (h_4 - 2) - \bar{\rho}_2 h_3] \quad (4.57b)$$

katsayılarına ulaşılır. (4.55) sınır koşulları bu kez (4.51) denklemini için uygulanırsa ve ortaya çıkan denklemler çözülürse

$$D_2 = \frac{a^2 b^2 \omega^2}{8} [-\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2 (h_1 - 2)] \quad (4.58a)$$

$$D_3 = -\frac{(a^2 + b^2) \omega^2}{16} [-\bar{\rho}_1 h_2 + \bar{\rho}_2 (h_1 - 2)] \quad (4.58b)$$

katsayıları elde edilir.

Katsayılar elde edildikten sonra karışım bileşenlerine ait gerilme alanları nihai olarak ifade edilebilir.

$$\eta = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \quad (4.59)$$

olmak üzere, gerekli hesaplama ve düzenlemelerin ardından gerilme alanları

$$\sigma_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [-(h_4 - 2) + \eta h_3] \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} \left\{ [-(h_4 - 2) + \eta h_3] \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - [-(3h_4 + 2) + 3\eta h_3] \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right\} \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.62)$$

ve

$$\pi_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [h_2 - \eta (h_1 - 2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (4.63)$$

$$\pi_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} \left\{ [h_2 - \eta(h_1 - 2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] - [3h_2 - \eta(3h_1 + 2)] \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right\} \quad (4.64)$$

$$\pi_{r\theta} = 0 \quad (4.65)$$

olarak elde edilmektedir. Yukarıdaki sonuçlar tekil durum için elde edilen sonuçlarla şekil olarak benzeşmektedir. Bu durum dönen disk problemindeki gerilme dağılımı karakteristiğinin aynı olduğunu fakat gerilme değerlerinin karışım bileşenlerine ait özelliklerden etkilendiğini göstermektedir.

Toplam gerilme alanı ise (3.10) ifadesine uygun olarak

$$3 + v_1 = h_2 - h_4 + 2, \quad 3 + v_2 = h_3 - h_1 + 2 \quad (4.66)$$

olmak üzere

$$P_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [(3 + v_1) + \eta(3 + v_2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \quad (4.67)$$

$$P_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} \left\{ [(3 + v_1) + \eta(3 + v_2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] - [(1 + 3v_1) + \eta(1 + 3v_2)] \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right\} \quad (4.68)$$

$$P_{r\theta} = 0 \quad (4.69)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Karışım bileşenlerine ait yer değiştirmeler, tekil durum ile benzeşim kurularak elde edilebilir. Karışım bileşenleri için (2.13) denkleminde verilen yer değiştirme – şekil değiştirme ilişkileri tekil durum ile aynı formdadır. Bu ilişkilerin kutupsal koordinatlardaki şekilleri de tekil durum ile aynı olacaktır. Buna göre, karışım bileşenleri için yer değiştirme – şekil değiştirme ifadeleri

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (4.70)$$

$$g_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad g_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (4.71)$$

olarak verilmektedir. Problem aksenal simetrik olduğu için u_θ ve v_θ yer değiştirmeleri sıfır olacaktır. Karışım bileşenlerine ait şekil değiştirmeler, (3.15) ve (3.16) denklemleri ile tekil durum için geçerli olan ilişkiler göz önüne alınarak

$$e_{rr} = \frac{1}{2G} (-\mu_3 \pi_{rr} + \mu_2 \sigma_{rr}) + \frac{E}{G} [A_1 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_1 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.72)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} (-\mu_3 \pi_{\theta\theta} + \mu_2 \sigma_{\theta\theta}) + \frac{E}{G} [A_1 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_1 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.73)$$

ve

$$g_{rr} = \frac{1}{2G} (\mu_1 \pi_{rr} - \mu_3 \sigma_{rr}) + \frac{E}{G} [A_2 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.74)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} (\mu_1 \pi_{\theta\theta} - \mu_3 \sigma_{\theta\theta}) + \frac{E}{G} [A_2 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.75)$$

olarak ifade edilebilir.

Karışım bileşenlerine ait gerilme alanları bilindiğine göre u_r ve v_r yer değiştirmeleri, sadece (4.70) ve (4.71) denklemlerinde verilen $e_{\theta\theta}$ ve $g_{\theta\theta}$ 'lı bağıntılar ile (4.72) ve (4.74) şekil değiştirmeleri kullanılarak bulunabilir. Buna göre, radyal yöndeki yer değiştirmeler

$$u_r = \frac{r}{2G} (-\mu_3 \pi_{rr} + \mu_2 \sigma_{rr}) + \frac{Er}{G} [A_1 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_1 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.76)$$

$$v_r = \frac{r}{2G} (\mu_1 \pi_{rr} - \mu_3 \sigma_{rr}) + \frac{Er}{G} [A_2 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + B_2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (4.77)$$

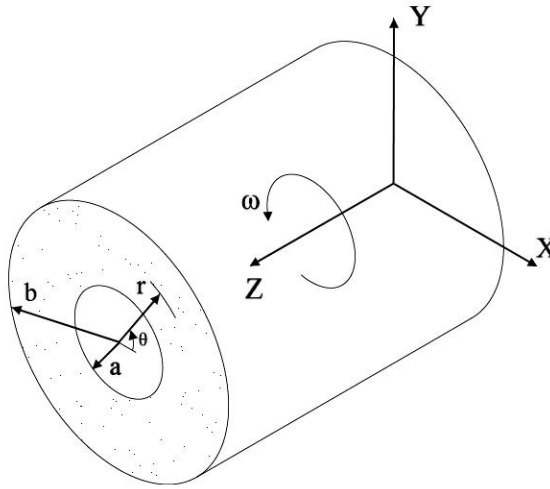
olarak elde edilmektedir. Bu denklemler malzeme katsayılarının sayısal değerleri olmaksızın çok uzun ve karmaşık bir yapıda olacaklarından mevcut hallerinde bırakılmışlardır.

Böylelikle dönen disk probleminin incelenmesi tamamlanmış olur. Dönen disk probleminde tekil malzeme ve iki elastik katı karışımı durumları için elde edilen

sonuçlar aynı formdadır. İki elastik katı karışımı için elde edilen sonuçlar, doğal olarak, her iki bileşenin özelliklerinden etkilenmiş bir yapıda ortaya çıkmaktadır.

4.2 Dönen Silindirik Çubuk Problemi

Dönen silindirik çubuk problemi düzlem şekil değiştirme durumuna uygun bir problemidir. Bu çalışmada, iç çapı $r = a$ ve dış çapı $r = b$ olmak üzere, en genel haldeki dönen uzun silindirik çubuk düşünülmektedir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 : Dönen silindirik çubuk problemi.

Düzlem şekil değiştirme durumu için elde edilen Beltrami-Michell denklemleri düzlem gerilme için elde edilenlerden sadece katsayılar yönünden farklılık sergilemektedir. Dönen silindirik çubuk problemi ile dönen disk probleminin çözüm adımları birebir aynı olduğundan elde edilen sonuçlarda sadece katsayılar farklı olacaktır.

Dönen silindirik çubuk probleminde Airy gerilme fonksiyonları için biharmonik denklemler

$$\nabla^4 F_1 = -(v_4 + 2)\nabla^2 V_1 + v_3 \nabla^2 V_2 \quad (4.78)$$

$$\nabla^4 F_2 = v_2 \nabla^2 V_1 - (v_1 + 2)\nabla^2 V_2 \quad (4.79)$$

şeklinde yazılmaktadır. Dönen disk problemine benzer şekilde hesaplanan kütle kuvveti potansiyelleri yukarıdaki denklemlerde yerlerine yazılarak

$$\nabla^4 F_1 = 2\omega^2 [\bar{\rho}_1(v_4 + 2) - \bar{\rho}_2 v_3] \quad (4.80)$$

$$\nabla^4 F_2 = 2\omega^2 [-\bar{\rho}_1 v_2 + \bar{\rho}_2(v_1 + 2)] \quad (4.81)$$

homojen olmayan diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesi ile Airy gerilme fonksiyonları

$$F_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{32} [\bar{\rho}_1(v_4 + 2) - \bar{\rho}_2 v_3] \quad (4.82)$$

$$F_2 = D_1 + D_2 \ln r + D_3 r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{32} [-\bar{\rho}_1 v_2 + \bar{\rho}_2(v_1 + 2)] \quad (4.83)$$

olarak elde edilmektedir. (4.34) ve (4.35) gerilme alanı kabulleri ve yukarıdaki Airy gerilme fonksiyonları kullanılarak dönen silindirik çubuk problemi için karışım bileşenlerine ait gerilme alanları

$$\sigma_{rr} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [\bar{\rho}_1(v_4 - 2) - \bar{\rho}_2 v_3] \quad (4.84)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [\bar{\rho}_1(3v_4 + 2) - 3\bar{\rho}_2 v_3] \quad (4.85)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.86)$$

$$\pi_{rr} = \frac{D_2}{r^2} + 2D_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [-\bar{\rho}_1 v_2 + \bar{\rho}_2(v_1 - 2)] \quad (4.87)$$

$$\pi_{\theta\theta} = -\frac{D_2}{r^2} + 2D_3 + \frac{\omega^2 r^2}{8} [-3\bar{\rho}_1 v_2 + \bar{\rho}_2(3v_1 + 2)] \quad (4.88)$$

$$\pi_{r\theta} = 0 \quad (4.89)$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerdeki katsayıların elde edilebilmesi için sınır koşullarının uygulanması gereklidir. En genel halde, iç yarıçapı $r = a$ ve dış yarıçapı $r = b$ olan içi boş boru şeklinde silindirik bir çubuk için sınır koşulları, (4.55) denklemlerinde verilen sınır koşulları ile aynı olacaktır.

Bu durumda, katsayılar dönen disk problemine benzer şekilde elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra dönen silindirik çubuk problemi için karışım bileşenlerine ait gerilme alanları

$$\sigma_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [-(v_4 - 2) + \eta v_3] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} & \left\{ [-(v_4 - 2) + \eta v_3] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. - [-(3v_4 + 2) + 3\eta v_3] \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.92)$$

ve

$$\pi_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [v_2 - \eta(v_1 - 2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} & \left\{ [v_2 - \eta(v_1 - 2)] \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. - [3v_2 - \eta(3v_1 + 2)] \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\pi_{r\theta} = 0 \quad (4.95)$$

olarak elde edilir.

Döner silindirik çubuk probleminde sıfır olmayan σ_{zz} ve π_{zz} gerilmeleri ise (3.73) ve (3.74) denklemlerinden benzeşim yolu ile

$$\pi_{zz} = r_0 + (r_1 - 1)(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + r_2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (4.96)$$

$$\sigma_{zz} = s_0 + s_1(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + (s_2 - 1)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (4.97)$$

şeklinde yazılabilir.

Yazımda sadeliği korumak için bu denklemler mevcut hallerinde bırakılmışlardır.

Toplam gerilmeler ise

$$3 + v_3 = v_2 - v_4 + 2, \quad 3 + v_4 = v_3 - v_1 + 2 \quad (4.98)$$

olmak üzere

$$P_{rr} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} [(3 + v_3) + \eta(3 + v_4)] \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (4.99)$$

$$P_{\theta\theta} = \frac{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}{8} \left\{ [(3 + v_3) + \eta(3 + v_4)] \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] - [(1 + 3v_3) + \eta(1 + 3v_4)] \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right\} \quad (4.100)$$

$$P_{r\theta} = 0 \quad (4.101)$$

$$P_{zz} = r_0 + s_0 + (r_1 + s_1 - 1)(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta}) + (r_2 + s_2 - 1)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (4.102)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Dönen silindirik çubuk durumundaki yer değiştirme bileşenleri dönen disk problemine benzer şekilde elde edilebilir. Problem eksenel simetrik olduğu için u_θ ve v_θ yer değiştirmeleri yine sıfır olacaktır.

Şekil değiştirmeler

$$e_{rr} = \frac{1}{2G} (-\mu_3 \pi_{rr} + \mu_2 \sigma_{rr}) + \frac{E}{G} [A_1 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_1 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.103)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} (-\mu_3 \pi_{\theta\theta} + \mu_2 \sigma_{\theta\theta}) + \frac{E}{G} [A_1 (\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_1 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.104)$$

$$g_{rr} = \frac{1}{2G}(\mu_1 \pi_{rr} - \mu_3 \sigma_{rr})$$

$$+ \frac{E}{G} [A_2(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.105)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{2G}(\mu_1 \pi_{\theta\theta} - \mu_3 \sigma_{\theta\theta})$$

$$+ \frac{E}{G} [A_2(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.106)$$

şeklinde olmaktadır. Buna göre, dönen silindirik çubuk problemi için u_r ve v_r radyal yer değiştirmeleri, dönen disk probleminde hesaplandığı şekilde,

$$u_r = \frac{r}{2G}(-\mu_3 \pi_{\theta\theta} + \mu_2 \sigma_{\theta\theta})$$

$$+ \frac{Er}{G} [A_1(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_1(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.107)$$

ve

$$v_r = \frac{r}{2G}(\mu_1 \pi_{\theta\theta} - \mu_3 \sigma_{\theta\theta})$$

$$+ \frac{Er}{G} [A_2(\pi_{rr} + \pi_{\theta\theta} + \pi_{zz}) + B_2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (4.108)$$

olarak bulunmaktadır.

Döner disk probleminde elde edilen sonuçlar ile döner silindirik çubuk probleminde elde edilen sonuçlar oldukça benzer bir yapıdadır. Bu iki problem arasında sadece ilgili katsayılar değiştirilerek dönüşüm yapılabilir.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Karışımlar, farklı özelliklere sahip maddesel ortamların birleşmesiyle oluşan sürekli ortamlardır. Karışımlar teorisi bu çeşit sürekli ortamların davranışlarını inceleyen bilimsel bir disiplindir. Karışımlar teorisi alanında günümüze kadar pek çok bilimsel çalışma yapılmış ve ortaya konan temel yaklaşımlar doğrultusunda yeni çalışmalar yapılmaya devam etmektedir.

Bu çalışmada, karışımlar teorisinin temel bulgu ve denklemlerinden yararlanılarak, iki elastik katının karışımından oluşan bir sürekli ortam için düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumlarındaki Beltrami-Michell denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra ise elde edilen bu denklemler ve Airy gerilme fonksiyonu yaklaşımı kullanılarak en genel haldeki dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri incelenmiştir. Bu amaçla, karışımda ön gerilmenin mevcut olmadığı kabulü yapılmıştır. Ön gerilmenin mevcut olmaması difüzyon kuvveti vektörünün sıfır olmasına ve ortadan kalkmasına neden olmuştur. Difüzyon kuvveti vektörünün sıfır olmaması, bu kuvvetin bir potansiyelden türediği şeklindeki ek terimlerin gerilme alanı kabullerinde yer almasını gerektirmektedir. Difüzyon kuvveti için bir potansiyel kabulü yapmak mümkün değildir. Literatürde bu konuda bir veri bulunmadığı gibi potansiyel kabulünü sağlayacak ek bir koşul da mevcut değildir. Ayrıca elastisite teorisinin klasik metotları difüzyon etkisine maruz olmayan ortamlar için geliştirilmiştir.

Bu bölümde ise önceki bölümde dönen disk ve dönen silindirik çubuk için elde edilen sonuçlara ilişkin boyutsuz grafikler verilerek bunlara ait değerlendirmeler sunulacaktır. Söz konusu grafiklerin sunulabilmesi için karışım bileşenlerine ait malzeme katsayılarının bilinmesi gerekmektedir. Bu amaçla, Dokuz (2005) tarafından yapılan çalışmadan, karışımda ön gerilmenin bulunmadığı ($\alpha_2 = 0$) kabulüne uygun olarak

$$\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}} = 0.649806937, \lambda_1 = 26.32, \lambda_2 = 4.29, \lambda_3 = 0.09026783$$

$$\mu = 2.14285714, \mu_1 = 30.89, \mu_2 = 1.07, \mu_3 = -1.6981993 \quad (5.1)$$

verileri alınmaktadır. Bu verilerden faydalanarak elde edilen sonuçlarda yer alan η , (2.12) denklemi göz önüne alınarak

$$\eta = \frac{35}{65} \quad (5.2)$$

olarak hesaplanmaktadır.

İki elastik katı karışımından oluşan dönen disk ve dönen silindirik çubuk için bileşenlere ait yer değiştirme değerleri serbest yüzeylerde aynı olmalıdır. Bu şekilde karışım olma özelliği ortadan kalkmamış olacaktır, sadece şekil değişiminden önce aynı konumda olan parçacıkların ayrılarak şekil değişiminden sonra başka parçacıklarla bir araya gelebilmesi mümkün olacaktır.

Karışım bileşenlerine ait yer değiştirmelerin serbest yüzeylerde birbirine eşitlenmesi amacıyla (4.70) ve (4.71) denklemlerinden e_r ve g_r için verilen ifadeler kullanılırsa karışım bileşenlerine ait yer değiştirmeler integrasyon sabitlerini içerecek şekilde elde edilmektedir. Karışım bileşenleri için serbest yüzeylerdeki yer değiştirmelerin aynı olacağı kısıtlaması bu denklemlerde uygulandığında integrasyon sabitlerinin çözülmesi mümkün olmamaktadır. Bunun nedeni elde edilen denklemlerin bilinmeyen iki katsayının hesaplanması için yeterli olmamasıdır. Buna göre yer değiştirmeler sınırlarda aynı ise bütün bölgede de aynı olmak zorundadır. Başka bir deyişle bileşenler ortak bir yer değiştirme alanına sahip olmalıdır. Bu ortak yer değiştirme tüm karışımın yer değiştirmesini ifade etmektedir.

Tüm karışımın radyal yer değiştirmesi

$$\mu w_r = (\mu_1 + \mu_3)u_r + (\mu_2 + \mu_3)v_r \quad (5.3)$$

olarak Dokuz (2005) tarafından ifade edilmiştir.

Gerilme ve yer değiştirmeler için

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}, & \bar{\pi}_{ij} &= \frac{\pi_{ij}}{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2} \\ \bar{P}_{ij} &= \frac{P_{ij}}{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^2}, & \bar{w}_r &= \frac{G w_r}{\bar{\rho}_1 \omega^2 b^3}\end{aligned}\quad (5.4)$$

tanımları yapılmaktadır. Dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri için bu tanımlara uygun olarak çeşitli grafikler verilecektir.

5.1 Dönen Disk Problemi

En genel haldeki dönen disk problemi için elde edilen denklemlerde yer alan h_1 , h_2 , h_3 , h_4 ile v_1 ve v_2 katsayıları, (5.1) verileri kullanılarak kendilerinden önce tanımlanan bütün diğer katsayılar hesaplandıktan sonra

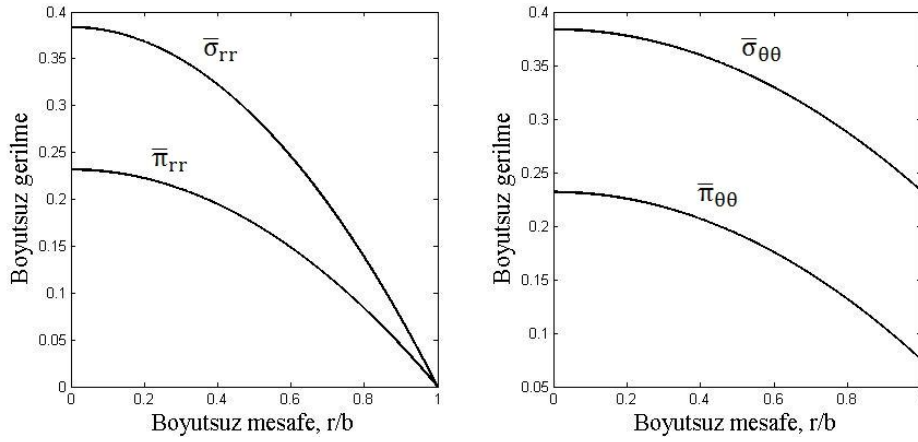
$$\begin{aligned}h_1 &= -1.41904, & h_2 &= 0.0122704 \\ h_3 &= -0.297011, & h_4 &= -1.22898 \\ v_1 &= 0.241251, & v_2 &= 0.122031\end{aligned}\quad (5.5)$$

olarak elde edilmektedir.

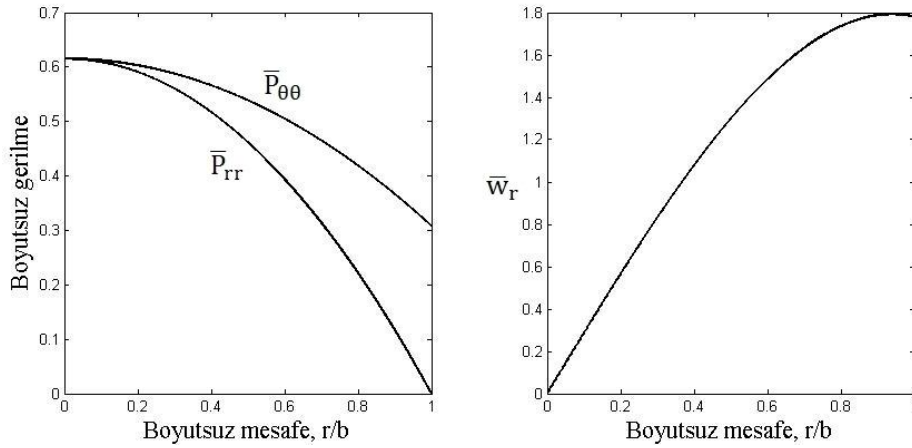
En genel durumda, iç çapı $r = a$ ve dış çapı $r = b$ olan bir diskte farklı r/a oranları için pek çok grafik çizilmesi mümkündür. Burada, içi dolu disk için $a/b = 0$ durumundaki grafikler ve içi boş disk için $a/b = 0.5$ durumundaki grafikler verilecektir. Ayrıca, toplam gerilmelerin ve karışımın yer değiştirmesinin $a/b = 0$, $a/b = 0.25$, $a/b = 0.5$ ve $a/b = 0.75$ oranlarındaki formlarının bir arada çizdirildiği grafikler verilecektir. Böylece aynı büyüklük için farklı iç ve dış çap oranlarında oluşan değişimler net bir şekilde ortaya konulmuş olacaktır.

İçi dolu dönen disk ($a/b = 0$) için elde edilen grafikler aşağıda verilmiştir. (Şekil 5.1)'de görüldüğü üzere her bir bileşen için maksimum gerilme diskin merkezinde oluşmaktadır. Radyal yöndeki gerilmelerin serbest yüzeylerde sıfır olacağını belirten sınır koşuluna uygun olarak, her iki bileşene ait radyal gerilmeler $r/b = 1$ 'de sıfır değerine gelmektedir. Diğer gerilme bileşenleri ise maksimumdan başlayarak disk

içerisinde azalmakta, serbest yüzeyde minimum değerlerine ulaşmakta fakat sıfır olmamaktadır.



Şekil 5.1 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.

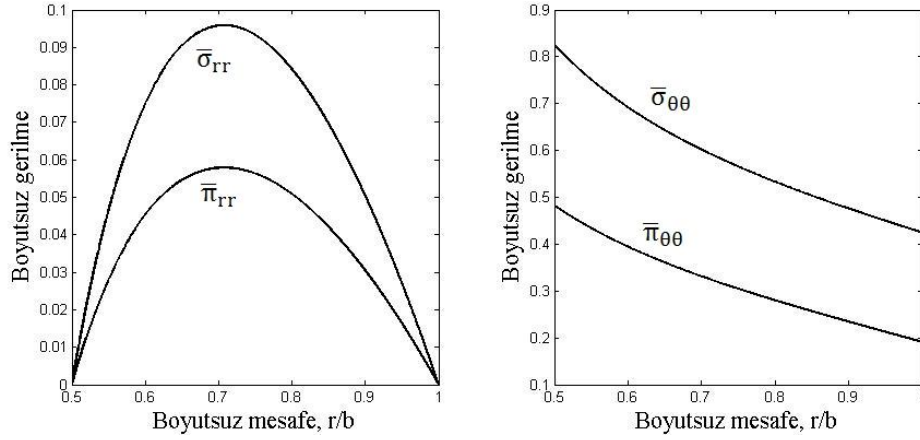


Şekil 5.2 : $a/b = 0$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.

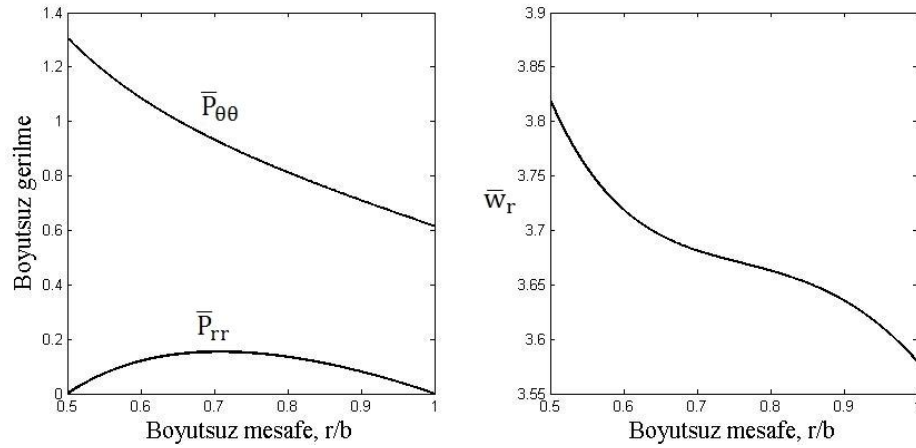
Toplam gerilmeler ile karışım yer değiştirmesi için çizdirilen grafikler tekil malzemeden oluşan bir disk için elde edilecek grafikler ile tamamen aynı yapıdadır. (Şekil 5.2)'de görüldüğü gibi maksimum gerilmeler diskin merkezindedir, yer değiştirme ise merkezde sıfır olup uca doğru merkezkaç etki ile artmaktadır.

İçi boş dönen disk ($a/b = 0.5$) için radyal gerilmeler serbest yüzeylerde sıfır olmak zorundadır. (Şekil 5.3)'te görüldüğü üzere her iki bileşen için radyal gerilmeler serbest yüzeyleri ifade eden $r/b = 0.5$ ve $r/b = 1$ 'de sıfır olmaktadır. Diğer gerilme bileşenleri ise birbiri ile aynı formda maksimum değerlerinden itibaren uca doğru gittikçe azalmaktadır. Toplam gerilmeler için çizdirilen boyutsuz grafik de yukarıdaki grafikleri ile benzer bir formdadır. Bu durumda toplam gerilme ve karışımın tamamına ait yer değiştirme için verilen grafikler, elastisite teorisinden

bilinen tekil malzemeden yapılmış içi boş dönen disk probleminden elde edilen sonuçlar ile çok benzer bir yapıda olmaktadır.



Şekil 5.3 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.

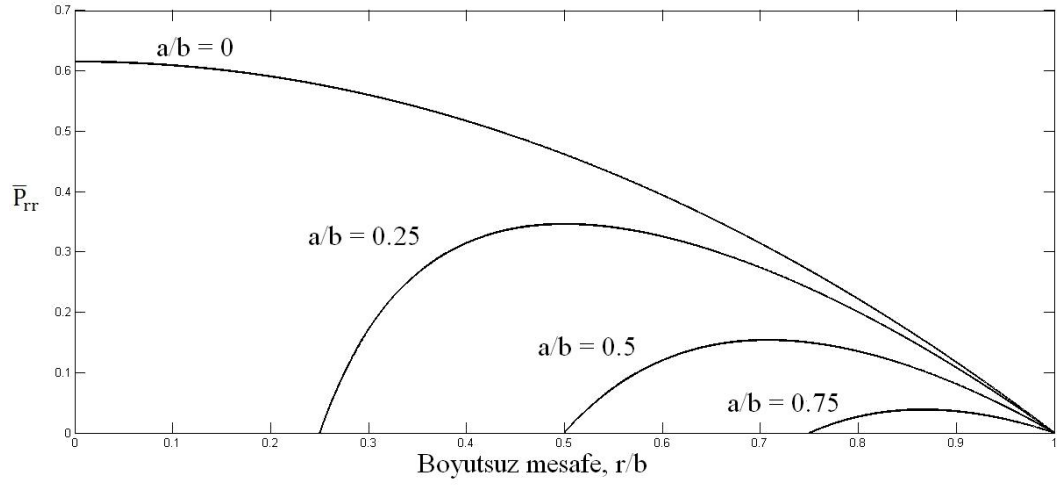


Şekil 5.4 : $a/b = 0.5$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.

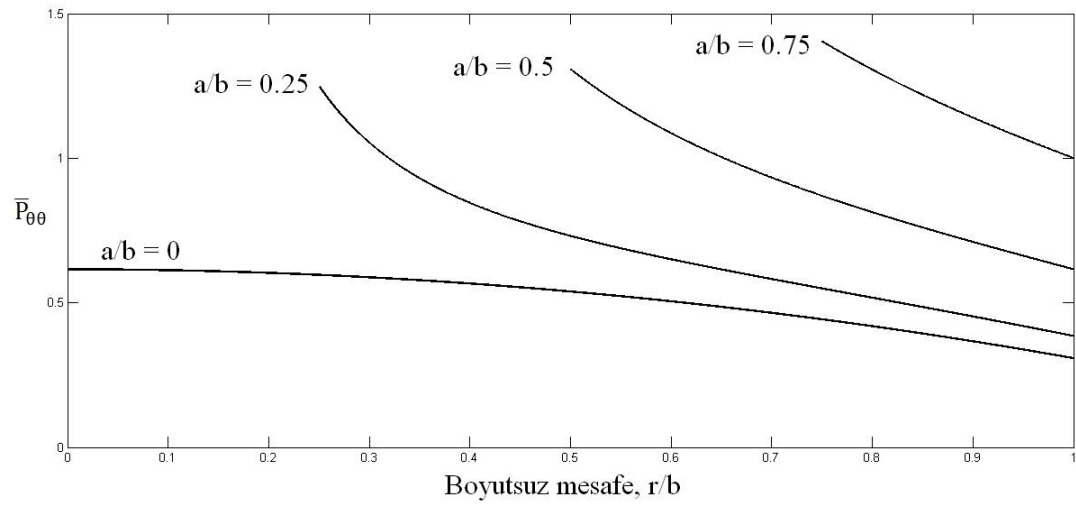
(Şekil 5.4)'te görüldüğü üzere radyal yöndeki gerilme serbest yüzeylerde sıfırdır. Bu durumdaki toplam maksimum gerilme ise iç serbest yüzeyde oluşmaktadır. Karışıma ait yer değiştirme ise gerilmenin en büyük olduğu yerde en büyük olacak şekilde değişerek uca doğru gittikçe azalmaktadır.

Radyal yöndeki toplam gerilme için yapılan boyutsuz gerilme tanımının farklı a/b oranlarındaki değişimi (Şekil 5.5) ile verilmiştir. Buna göre a/b oranı büyüdükçe gerilme değerleri azalmaktadır. (Şekil 5.5) tekil malzeme durumundaki dönen disk ile örtüşmektedir.

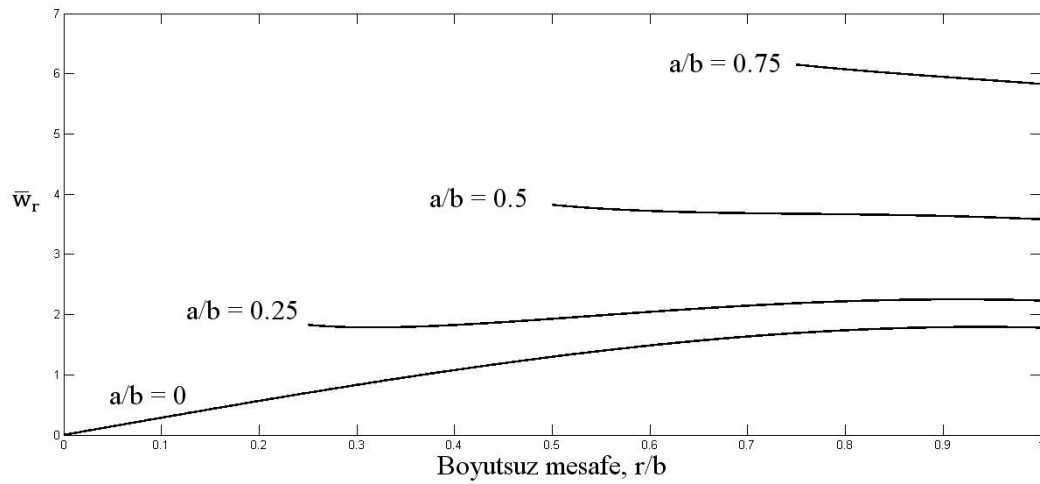
θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmeler (Şekil 5.6) ile verilmektedir. Bu grafikten a/b oranı büyüdükçe gerilme değerlerinin arttığı görülmektedir.



Şekil 5.5 : Radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.



Şekil 5.6 : θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.



Şekil 5.7 : $\bar{w}_r$ karışımın yer değiştirmesinin değişimi.

Karışımın yer değiştirmesi için tanımlanan büyüklüğün değişimi ise (Şekil 5.7) ile verilmiştir. Yer değiştirme değerleri iç çap - dış çap oranı büyüdükçe artmakta ve daha yatay bir seyir izlemektedir.

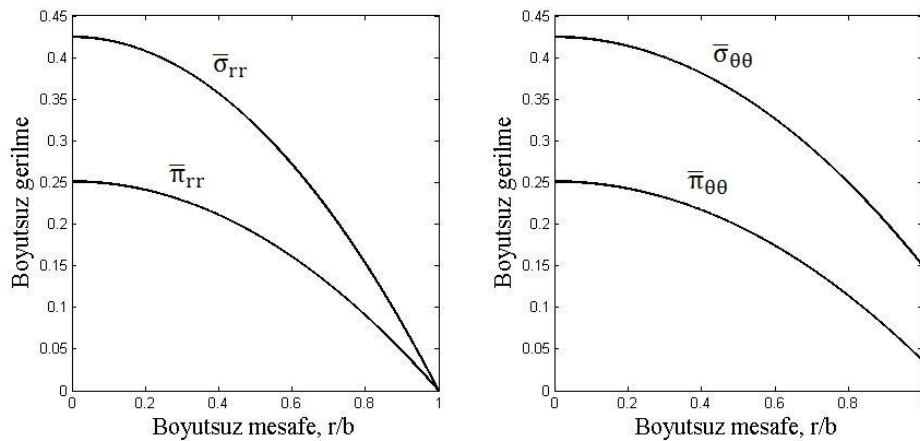
5.2 Dönen Silindirik Çubuk Problemi

En genel haldeki dönen silindirik çubuk problemi için elde edilen denklemlerde yer alan v_1 , v_2 , v_3 , v_4 ile v_3 ve v_4 katsayıları, (5.1) verileri kullanılarak

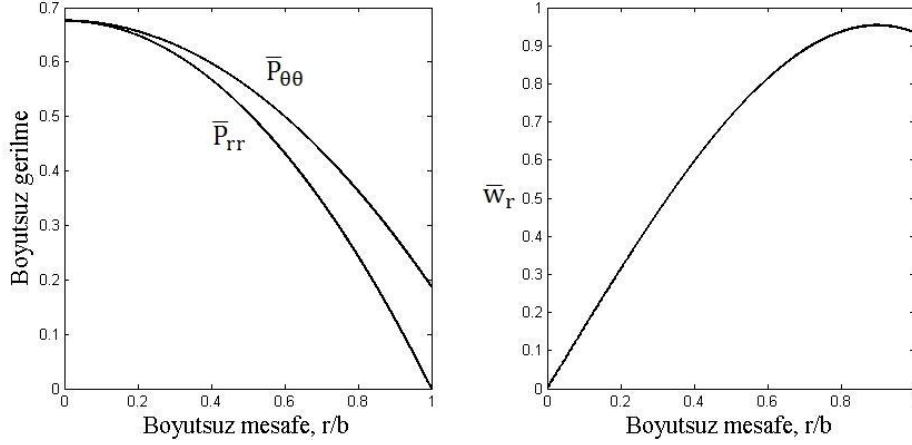
$$\begin{aligned} v_1 &= -1.68085, & v_2 &= 0.0265748 \\ v_3 &= 0.170947, & v_4 &= -1.30517 \\ v_3 &= 0.331741, & v_4 &= 0.851796 \end{aligned} \quad (5.6)$$

olarak elde edilmektedir. Dönen silindirik çubuk problemine ait boyutsuz gerilme ve yer değiştirme grafikleri bu değerler kullanılarak çizilecektir.

İçi dolu dönen silindirik çubuk ($a/b = 0$) için grafikler aşağıda verilmiştir. Dönen içi dolu disk için elde edilen grafikler, dönen içi dolu disk için elde edilen grafikler ile aynı formdadır. Dönen silindirik çubuk probleminde bileşenlere ait gerilme değerleri dönen disk durumundan biraz daha yüksek olmaktadır. Bununla birlikte maksimum gerilmeler yine merkezde oluşmaktadır (Şekil 5.8).



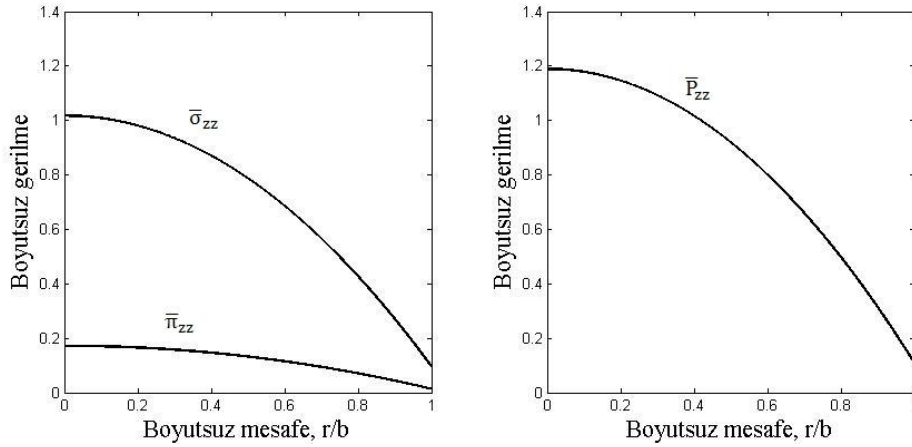
Şekil 5.8 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.



Şekil 5.9 : $a/b = 0$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.

Toplam gerilme ve yer değiştirme için çizilen grafikler içi dolu dönen silindir için beklenen şekilde elde edilmiştir. (Şekil 5.9)'dan görüldüğü üzere maksimum gerilmeler merkezdedir ve yer değiştirme uca doğru artmaktadır.

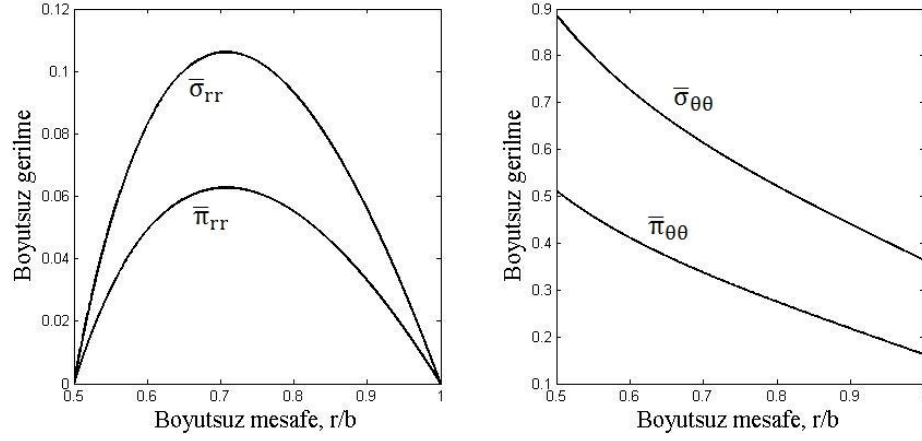
Dönen silindirik çubuk probleminde σ_{zz} ve π_{zz} gerilmeleri de mevcuttur. Buna göre, (5.4) tanımlarına uygun olarak grafikleri elde edilmektedir. z-doğrultusundaki maksimum gerilmeler diskin merkezinde ortaya çıkmaktadır ve kenarlara doğru azalmaktadır (Şekil 5.10).



Şekil 5.10 : $a/b = 0$ için bileşenlere ait z-yönündeki boyutsuz gerilmeler.

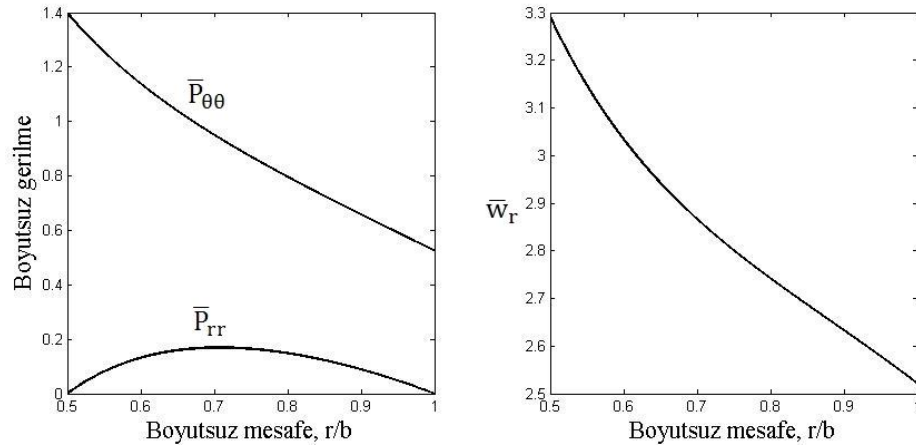
İçi boş dönen silindirik çubuk ($a/b = 0.5$) için çizilen grafikler ise içi boş dönen disk ile benzer şekilde elde edilmektedir.

(Şekil 5.11)'den görüleceği gibi serbest yüzeylerde radyal gerilmeler sıfır olmaktadır. Maksimum gerilmeler ise θ doğrultusundaki bileşenlerde olup iç serbest yüzeyde oluşmaktadır.



Şekil 5.11 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait boyutsuz gerilmeler.

Toplam gerilmeler ve karışımın yer değiştirmesi ise (Şekil 5.12) ile verilmiştir. Elde edilen grafikler dönen disk ile benzer yapıda olmaktadır.

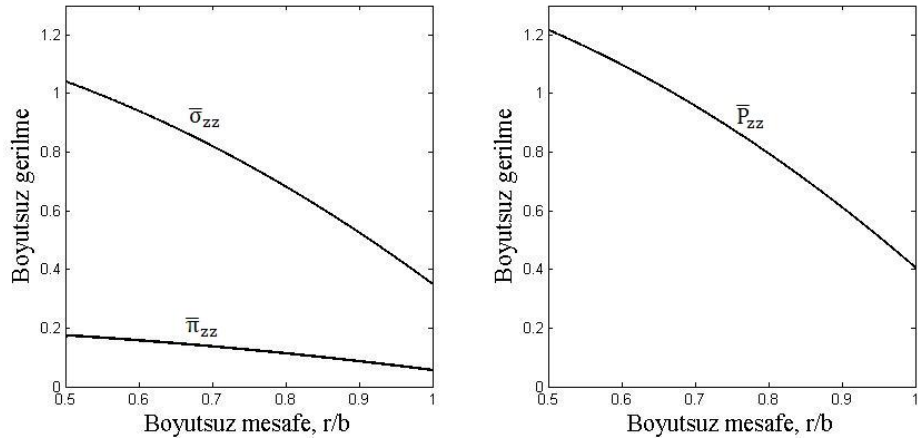


Şekil 5.12 : $a/b = 0.5$ için toplam boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme.

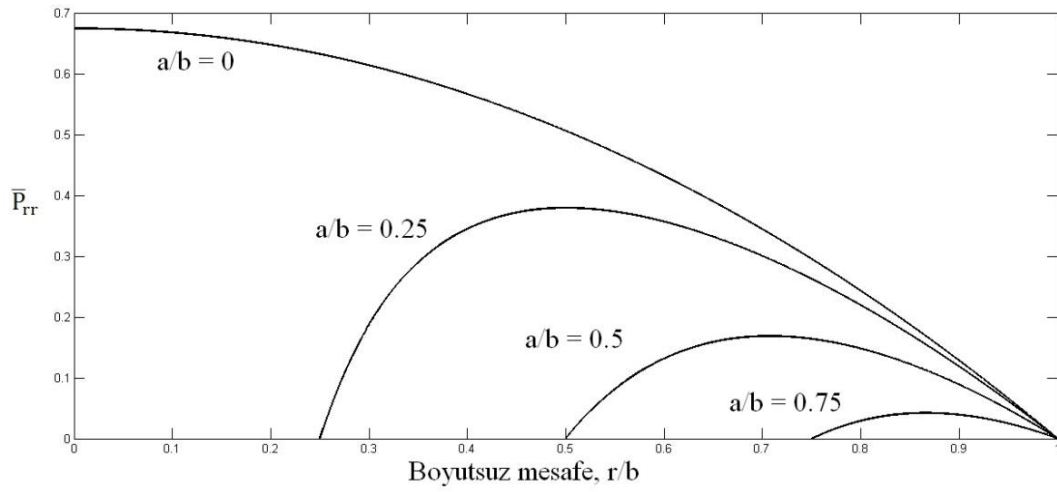
İçi boş silindirik çubuk durumunda, z -doğrultusundaki gerilme değerleri içi dolu durumdakine benzer formda elde edilmektedir. Maksimum gerilme en içte ortaya çıkmakta ve kenarlara doğru azalmaktadır ancak sıfır olmamaktadır (Şekil 5.13).

Dönen silindirik çubuk için radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin farklı a/b oranlarındaki değişimi (Şekil 5.14) ile verilmiştir. Bu durumda radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi dönen disk durumundakine benzer şekilde elde edilmektedir.

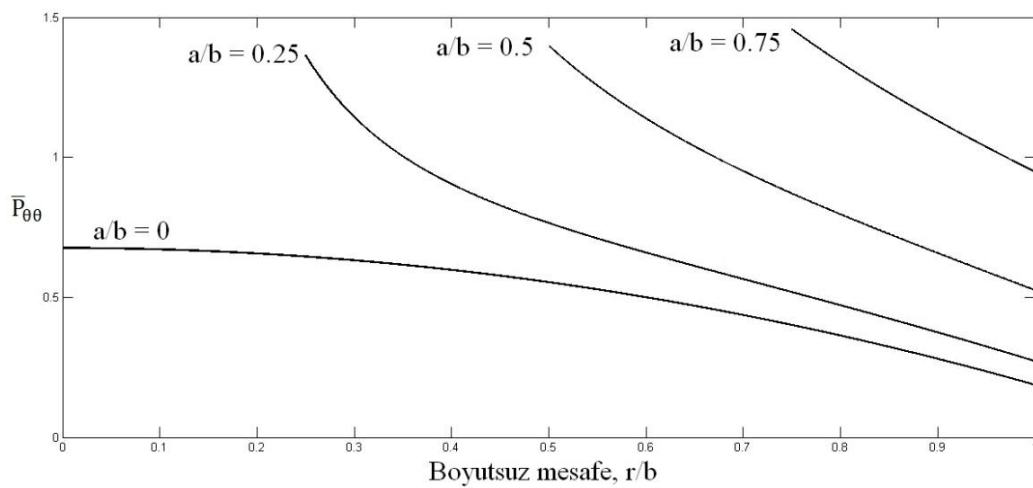
θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmeler (Şekil 5.15) ile verilmektedir. Bu grafik de dönen disk ile benzer yapıda olmaktadır.



Şekil 5.13 : $a/b = 0.5$ için bileşenlere ait z-yönündeki boyutsuz gerilmeler.

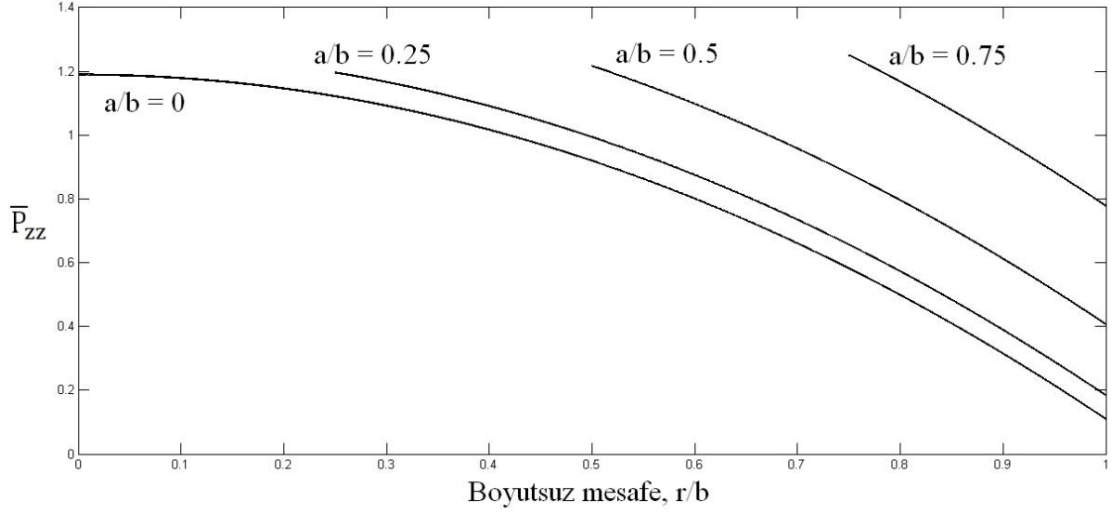


Şekil 5.14 : Radyal yöndeki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.

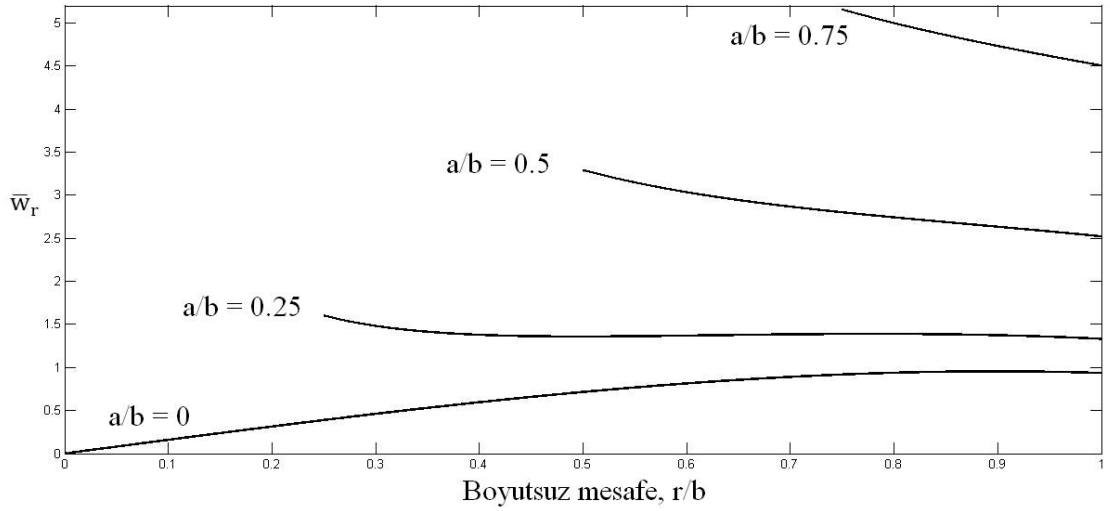


Şekil 5.15 : θ doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.

Dönen silindirik çubuk için z doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmelerin değişimi (Şekil 5.16) ile verilmektedir. Buna göre a/b oranı büyüdükçe gerilme değerleri birbirine paralel bir yapıda artmaktadır.



Şekil 5.16 : z doğrultusundaki toplam boyutsuz gerilmenin değişimi.



Şekil 5.17 : $\bar{w}_r$ karışımının yer değiştirmesinin değişimi.

Karışımın yer değiştirmesi kullanılarak tanımlanan büyüklüğün farklı a/b oranları için gösterdiği değişim ise (Şekil 5.17)'de sunulmuştur. a/b oranı arttıkça tanımlanan büyüklüğün değeri, dönen disk probleminde olduğu gibi, artmaktadır.

Böylelikle dönen disk ve dönen silindirik çubuk problemleri için tanımlanan büyüklüklere ait grafikler tamamlanmış olmaktadır. Grafikler dönen disk ve silindir problemlerinden beklenen şekillerde elde edilmişlerdir.

Toplam gerilmeler ve karışımın tamamına ait yer değıştirme için çizdirilen grafikler tekil bir malzeme için elde edilen sonuçları çağrıştırmaktadır. Bu durumun sonuçların tutarlılığını göstermesi açısından önemli olduğu düşünölmektedir.

KAYNAKLAR

- Atkin, R.J. ve Craine, R.E.** (1976). Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **29**, 209-245.
- Barber, J. R.** (1992). Elasticity, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Bowen, R.M.** (1967). Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **24**, 370-403.
- Dokuz, M.S.** (1999a). Termoelastik koşullar altında iki elastik katı karışımı ile ilgili analitik çözümler (Doktora tezi), İTÜ Fen Bil. Enst., İstanbul
- Dokuz, M.S.** (1999b). Thermoelasticity of an infinite mixture of two elastic solids and a spherical thermal inclusion problem, *Int. J. Engng. Sci.*, **40**, 177-191.
- Dokuz, M.S.** (2005). An analytical procedure to determine constitutive coefficients of a mixture of two linear elastic solids, *Int. J. Solids and Structures*, **42**, 805-817.
- Eringen, A.C. ve Ingram, J.D.** (1965). A continuum theory of chemically reacting media-I, *Int. J. Engng. Sci.*, **3**, 197-212.
- Green, A.E. ve Naghdi, P.M.** (1965). A dynamical theory of interacting continua, *Int. J. Engng. Sci.*, **3**, 231-241.
- Green, A.E. ve Steel, T.R.** (1966). Constitutive equations for interacting continua, *Int. J. Engng. Sci.*, **4**, 483-500.
- Gürgöze, İ.T.** (1989). An equilibrium solution for the Kelvin's problem of an infinite mixture of an elastic solid and a fluid, *Bull. Tech. Univ. İstanbul*, **42**, 317-327.
- Gürgöze, İ.T. ve Dokuz, M.S.** (1998). An equilibrium solution for the Boussinesq problem for a mixture of an elastic solid and a fluid in an infinite half-space, *Int. J. Engng. Sci.*, **36**, 645-653
- Gürgöze, İ.T. ve Dokuz, M.S.** (1999). Papkovitch-Neuber solution for a mixture of two elastic solids and Kelvin problem, *Int. J. Engng. Sci.*, **37**, 497-507.
- İeşan, D.** (1997). A theory of mixtures with different constituent, *Journal of Thermal Stresses*, **20**, 147-167.
- İeşan, D.** (2011). Prestressed composites modelled as interacting solid continua, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 513-524.
- Kaplan, W.** (1992). Advanced calculus, Addison-Wesley Advanced Book Program, Redwood City, Calif.
- Müller, I.** (1968). A thermodynamic theory of mixtures of fluids, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **28**, 1-39.

- Rajagopal, K. R. ve Tao, L.** (1995). Mechanics of mixtures, World Scientific Publishing, Singapore.
- Sadd, M. H.** (2005). Elasticity : theory, applications, and numerics, Elsevier Butterworth Heinemann, Amsterdam, Boston.
- Steel, T.R.** (1967a). Applications of a theory of interacting continua, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **20**, 57-72.
- Steel, T.R.** (1967b). Linearised theory of plane strain of a mixture of two solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **5**, 775-789.
- Svanadze, M.** (2008). Plane waves and eigenfrequencies in the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids, *J. Elasticity*, **92**, 195-207.
- Truesdel, C. ve Toupin, R.** (1960). The classical field theories, *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Ed. Flügge, S., Springer-Verlag, Berlin.
- Url-1** < <http://mathworld.wolfram.com/BiharmonicEquation.html>>, alındığı tarih: 01.11.2011.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Süleyman Muti
Doğum Yeri ve Tarihi: Çayeli / 01.01.1986
E-Posta: suleymanmuti@gmail.com
Lisans: İstanbul Üniversitesi