

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PLAK TİTREŞİMLERİNİN DİFERANSİYEL KUADRATUR
YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Elanur BARIŞ**

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Katı Cisimlerin Mekanik

OCAK 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PLAK TİTREŞİMLERİNİN DİFERANSİYEL KUADRATUR
YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Elanur BARIŞ
(503081503)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Aralık 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Ocak 2011**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)
Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU (İTÜ)**

OCAK 2011

ÖNSÖZ

Plaklar uçak, gemi, otomobil, demir yolu araçları, döşeme sistemleri, köprü gibi yaygın uygulama alanlarında kullanılan önemli yapı elemanlarıdır. Bu yapıların titreşim karakterlerinin bilinmesi tasarım aşamasında büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada plakların doğal frekansları nümerik bir yöntem olan diferansiyel kuadratur metoduyla hesaplanmış ve bu frekanslara karşılık gelen mod şekilleri belirlenmiştir.

Çalışmanın gerçekleştirilmesindeki yardımları ve desteği için sayın hocam Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye teşekkür ederim.

Her zaman beni destekleyen ve yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Aralık 2010

Elanur Barış
(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı ve Önemi	1
2. DKM KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	3
3. DİFERANSİYEL KUADRATUR METODU	7
3.1 Klasik Kiriş Teorisi	7
3.2 Klasik Plak Teorisi	9
3.3 Diferansiyel Kuadratur Metodu	11
3.3.1 Birinci dereceden türev için ağırlık katsayılarının hesaplanması	12
3.3.1.1 Bellman yaklaşımları	12
3.3.1.2 Quan ve Chang yaklaşımları	14
3.3.1.3 Genelleştirilmiş Shu yaklaşımı	14
3.3.2 İki ve daha yüksek dereceden türev için ağırlık katsayılarının hesaplanması.....	15
3.3.3 Grid nokta sayısı ve seçimi	16
4. DK METODUNUN KİRİŞ VE PLAK TİTREŞİMLERİNE UYGULANMASI.....	19
4.1 DK Metodunun Kiriş Titreşim Problemine Uygulanması	19
4.2 DK Metoduyla Elde edilen Kiriş Doğal Frekansları ve Sonuçların Karşılaştırılması	23
4.3 DK Metodunun Plak Titreşim Problemine Uygulanması	27
4.4 Sonlu Farklar Metodu	33
4.5 DK Metoduyla Elde Edilen Plak Doğal Frekansları ve Sonuçların Karşılaştırılması	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR	57
EKLER.....	59

KISALTMALAR

DK	: Diferansiyel Kuadratur
DKM	: Diferansiyel Kuadratur Metodu
SFM	: Sonlu Farklar Metodu
GDK	: Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratur
EBKT	: Euler-Bernoulli Kiriş Teoremi
TKT	: Timoshenko Kiriş Teoremi
A	: Ankastre Mesnet
B	: Basit Mesnet

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : A-A giriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω).....	24
Çizelge 4.2 : B-B giriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω)	25
Çizelge 4.3 : A-B giriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω)	26
Çizelge 4.4 : A-A-A-A dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).	39
Çizelge 4.5 : A-A-B-B dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω)	41
Çizelge 4.6 : B-A-B-A dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω)	43
Çizelge 4.7 : B-B-B-B dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).....	45
Çizelge 4.8 : Dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).....	48
Çizelge 4.9 : 30×20 nokta ile bulunan boyutsuz doğal frekanslar (Ω).....	49

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Kiriş geometrisi ve eksen takımı	7
Şekil 3.2 : A-B mesnetli kiriş ve kiriş elemanı	8
Şekil 3.3 : Yanal yüklenmiş dikdörtgen plak	10
Şekil 3.4 : İki boyutlu bölge için lineer grid dağılımı	17
Şekil 3.5 : İki boyutlu bölge için Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı	18
Şekil 4.1 : Kiriş mod şekilleri	27
Şekil 4.2 : Dikdörtgen plakta iç ve yakın noktalar.	31
Şekil 4.3 : Arayüz	33
Şekil 4.4 : İki boyutlu bölge	35
Şekil 4.5 : A-A-A-A plak mod şekilleri	40
Şekil 4.6 : A-A-B-B plak mod şekilleri	42
Şekil 4.7 : B-A-B-A plak mod şekilleri	44
Şekil 4.8 : B-B-B-B plak mod şekilleri	46
Şekil 4.9 : Mod-Doğal frekans grafiği	47
Şekil 4.10 : 30×20 nokta için A-A-A-A plak mod şekilleri	50
Şekil 4.11 : 30×20 nokta için B-B-B-B plak mod şekilleri	51

PLAK TİTREŞİMLERİNİN DİFERANSİYEL KUADRATUR YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada sabit kalınlıklı izotropik kiriş ve plakların diferansiyel kuadratur metodu kullanılarak doğal frekansları ve buna karşılık gelen mod şekilleri gibi önemli titreşim karakteristikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde çalışmanın amacı, plak titreşimlerinin uygulama alanları ve bu titreşimlerin incelenmesinin önemi belirtilmiştir.

İkinci bölümde konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, genel olarak kiriş ve plak teoremleri, bu teoremlerin dayandığı varsayımlar ve temel bağıntı ve denklemler verilmiştir. Daha sonra diferansiyel kuadratur metodu tanıtılmış, birinci dereceden türev için ağırlık katsayılarının bulunması konusunda öne sürülen çeşitli yaklaşımlar ve bu yaklaşımların avantajları ve dezavantajları gösterilmiştir. İki ve daha yüksek dereceden türev için ağırlık katsayıları hesabı ve grid nokta seçimi anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde önce plak problemine göre daha basit bir örnek olan kiriş problemi incelenmiş, kirişin çeşitli sınır şartlarında doğal frekansları bulunmuş ve mod şekilleri gösterilmiştir. Daha sonra çeşitli boyutlarda ve çeşitli sınır şartlarında plak titreşimleri hem DKM hem de sonlu farklar metodu ile incelenmiş, iki durum için de doğal frekanslar hesaplanmış ve mod şekilleri çizdirilmiştir. Çeşitli parametrelerin değiştirilmesinin plak titreşimlerine olan etkisi incelenmiş ve bu etkiler yorumlanmıştır. Elde edilen sonuçlar her aşamada sonlu farklar metodu sonuçları ve bazı plaklar için literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir ve bu sonuçlara dayanılarak denilebilir ki, DKM yeterli doğrulukta sonuç vermektedir. DKM kullanılarak elde edilen sonuçların bilgisayarda gerektirdiği CPU (merkezi işlem birimi) süresi ve çözüm için harcanan zaman sonlu elemanlar yöntemine göre oldukça düşüktür. Yeterli hassasiyette doğru sonuçlar veren DKM, mühendislikte yoğun olarak kullanılan sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemlerine alternatif olarak gösterilebilir.

VIBRATION ANALYSIS OF PLATES USING DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

SUMMARY

In this study, free vibration analysis of isotropic beams and rectangular plates with constant thickness have been achieved using differential quadrature method. Differential quadrature method is an highly efficient and a newly proposed numerical technique compared to the conventional ones like finite element, finite difference and etc.

Before the analysis, beam and plate theories and the assumptions that based on these theories have been introduced. The governing equations and some important relationships have been given. Also the differential quadrature method has been introduced. Some approximations about computation of weighting coefficient matrices for the first, second and the higher order derivatives have been detailed. The effect of grid point distribution on eigenvalues of differential quadrature discretization has been examined.

In the first analysis section, free vibration analysis of beams which is an easier process than a plate, has been achieved. The natural frequencies and mode shapes have been examined for any combination of the clamped and simply supported conditions. The free vibration of plates has been analyzed using both differential quadrature and finite difference method. The natural frequencies and mode shapes have been examined for any combination of the clamped and simply supported conditions and also for the various ratio of the edges and the number of grid points. The effects of changing various parameters to the natural frequencies and mode shapes have been explained. The obtained differential quadrature results have been compared to mainly finite difference method results, and for some plate configurations compared also with the literature results.

From the results presented, it can be concluded that differential quadrature method provides the results with adequate accuracy. Furthermore, the formulation of differential quadrature method is simple and computer programming procedure is also considerably straightforward. Lastly the computation time is also significantly less than the finite element method. Consequently, differential quadrature method seems to has the potential to be an alternative to the conventional numerical methods like finite element and finite difference.

1. GİRİŞ

Plaklar, uçak, gemi, otomobil, demiryolu araçları, döşeme sistemleri, köprü gibi yaygın uygulamalarda kullanılan önemli yapı elemanlarıdır. Bu yapıların doğal frekanslarının tespiti tasarım aşamasında oldukça önemlidir. Plaklarda, üzerinden geçen vasıtalar, depremler gibi nedenlerle veya harmonik zorlamalara maruz sistemlerde, zorlama frekansı ile yapının doğal frekanslarının çakışması rezonans adı verilen ve yüksek genlikli titreşimlerin olduğu bir durum ortaya çıkartır ki bu yapı güvenliği için olumsuz bir durum oluşturur. Bu durum yer aldığı sistemin (köprü, bina, vs gibi) yıkılmasına sebep olur. Bu nedenle bu etkilerin incelenmesi önemlidir. Eğer deformasyonlar önceden incelenip belirlenirse buna bağlı olarak oluşabilecek emniyetsiz durumlara karşı tedbir alabilme imkanı doğar. Böylelikle hasar tüm mekanik sistemi etkilemeden parça değiştirilebilir ya da çeşitli yöntemlerle sağlamlaştırılabilir.

1.1 Çalışmanın Amacı ve Önemi

Mühendislikte temel amaç insan yaşamını kolaylaştıracak sistemler geliştirmektir. Bu sistemlerin ortaya konmasındaki temel sebep insan ihtiyaçlarının karşılanmasıdır. Günden güne gelişen teknoloji, insanların ihtiyaçlarının çoğalmasına ve farklılaşmasına sebep olmuştur. Bu ihtiyaçları karşılayabilmek için gerek teorik gerekse uygulamalı çalışmalar yapan mühendisler güvenlik ve ekonomiklik koşulunu gözeterek bilimsel verileri uygulamak için değişik teknikler ve yöntemler üzerinde yoğunlaşmışlardır.

Mühendislik sistemlerinin analizi, en genel anlamda mevcut olan bir fiziksel sistemi ifade eden matematik modelin oluşturulması ve elde edilen denklemin analitik olarak veya çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler oluşturularak çözülmesiyle olur. Analitik bir çözümün yapılabilmesi için iyi bir matematik altyapısı ve deneyim gereklidir. Kurulan matematik model genellikle sistemi ifade eden bir integral denklem, kısmi türevli veya adi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır koşullarının karmaşıklığı ve

türevli diferansiyel denklemler içermesi nedeniyle bu diferansiyel denklemin çözümü çoğu zaman analitik olarak mümkün olmaz. Bu nedenle bu tür denklemleri çözebilmek için sayısal analiz tekniklerine başvurulur. Yaklaşık sayısal yöntemler kullanılarak yapılan çözümlerde ise analitik çözümleme için gerekli olan bütün bu matematik altyapı deneyim ve bilginin yanında hızlı ve kapsamlı bir hesaplayıcı gereklidir. Bilgisayar tekniğindeki gelişmelerle denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi bu tür sayısal analiz yöntemlerinde büyük bir gelişmeye sebep olmuştur. Bu gelişmeler sayesinde sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar, varyasyonel hesap, Euler, Rayleigh-Ritz metodları günümüze kadar etkin bir şekilde kullanılmıştır. Çoğunlukla sayısal analiz yöntemlerinde yeterli doğrulukta çözümler elde etmek için zaman veya uzay bölgesi belirli aralıklara bölünerek çözüme birkaç adımda veya çoğu zaman ardışık iterasyon çözümleri yapılarak sonuca ulaşılır. Bilgisayar teknolojilerinin günden güne gelişmesi bu yöntemlerin verimliliğini ve çeşitliliğini arttırmıştır. Yöntemlerin gerektirdiği hesaplayıcı ihtiyacı, çözüm için harcanan zaman, CPU (merkezi işlem birimi) süresi, denklemlerin stabilitesi, kullanılan grid nokta sayısı, çözüm için gereken ön işlemler ve çözüm için harcanan para başka bir deyişle ekonomik olması gibi faktörler yöntemden yönteme değişir ve günümüzde bu faktörler en az gereksinimle optimum sonuç alınabilmesi için geliştirilmektedir.

Bu çalışmada, sayısal analiz yöntemlerinden Richard Bellman tarafından geliştirilen ve ilk defa “Differential Quadrature” terimi ile tanımlanan Diferansiyel Kuadratur Metoduyla bir sistemin diferansiyel formda elde edilmiş yönetici denklemlerinin mevcut sınır değer koşullarını da sağlayacak şekilde çözümü yapılmıştır. İzotropik malzemeden imal edilmiş çeşitli boyutlardaki dikdörtgen plakların ve kirişlerin çeşitli sınır şartlarında titreşim analizini yapmak için gerekli olan formülasyon elde edilmiş, daha sonra bu formülasyon diferansiyel kuadratur metodu kullanılarak yapının serbest titreşimleriyle ilgili doğal frekansları ve mod şekilleri bulunmuş ve incelenmiştir.

2. DKM KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

Mühendislik problemlerinde günümüze kadar sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi çok fazla grid nokta sayısı kullanarak çözüm yapan birçok sayısal analiz yöntemi uygulanmıştır. Bununla birlikte bazı pratik uygulamalarda, kısmi diferansiyel denklemler o değişken bölgesinde alınan birkaç belirli nokta ile çözülebilir. Bu tür pratik uygulamalarda dahi sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi yüksek dereceli olmayan yöntemler, yeterli doğrulukta sonuçların alınabilmesi için çok fazla grid noktası kullanımı gerektirir.

Diferansiyel kuadratur metodu, birkaç grid nokta sayısı kullanarak yeterli doğrulukta sayısal sonuçların elde edilmesini sağlayan daha verimli bir yöntem bulma arayışı sonucunda Richard Bellman [1] tarafından ortaya koyulmuş bir yöntemdir. Bellman integral kuadratur metodunda kullanılan prosedürü takip ederek DK metodunu geliştirmiştir. DK metodunda bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamıyla ifade edilir. Bellman'a göre bu yöntemde en önemli işlem adımı herhangi bir dereceden türev için ağırlık katsayılarının hesaplanmasıdır. Bellman birinci dereceden ağırlık katsayılarının hesaplanması için iki tür yaklaşım önermiştir. Bunlardan ilki cebirsel bir denklem sisteminin çözümünü gerektirir. İkinci yaklaşımda da ise basit bir formül yardımıyla ağırlık katsayıları bulunur ancak ikinci yöntemde grid noktalarının koordinatları ötelenmiş Legendre fonksiyonunun köklerinden seçilir.

Bellman' dan sonra Mingle [2], Civan ve Sliepcevich [3,4], Jang [5] Diferansiyel Kuadratur Metodunu çeşitli mühendislik problemlerine uygulamışlardır. Jang [5] ağırlık katsayılarını hesaplayabilmek için grid noktalarının koordinatlarının rastgele seçilebilmesine izin veren Bellman'ın birinci yaklaşımını kullanmıştır. Ancak bu yöntemde kullanılan cebirsel denklem sistemi nokta sayısı fazla alındığında, katsayılar matrisinin çok büyük olmasına yol açmaktadır. Bu da matris işlemlerini zorlaştırmakta, çok fazla nokta sayısı kullanılarak yapılan analizlerde çözümsüzlüğe neden olmaktadır. Bu engelleri ortadan kaldırmak için Quan ve Chang [6] ve Wen ve

Yu [7] test fonksiyonu olarak Langange interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak, birinci ve ikinci dereceden türev için ağırlık katsayılarını hesaplayan bir formülasyon geliştirmişlerdir.

Shu ve Richards [8] ve Shu [9] ağırlık katsayılarını hesaplayabilmek için bulunan tüm metodları yüksek dereceden polinom yaklaşımı analizi ve lineer vektör yaklaşımı analizi altında genelleştirilmiş bir yöntem geliştirmişlerdir (GDK). Genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur metodunda birinci dereceden ağırlık katsayıları grid nokta seçimi konusunda herhangi bir kısıtlama yaratmayan basit bir formülasyon ile bulunmaktadır. Yüksek dereceden türev için ağırlık katsayıları ise yine aynı bağıntıdan yararlanılarak bulunmuştur. GDK metodunun en büyük avantajı grid nokta sayısı seçiminde herhangi bir kısıtlama olmadan ağırlık katsayılarının hesaplanabilmesidir. Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratur Metodu Shu [9] ve Shu ve Richards [8,10,11] tarafından sıvı akış problemlerine, Du, Lim ve Lin [12,13] tarafından yapısal problemlere uygulanmıştır.

Diferansiyel Kuadratur Metodu ile ilgili öncü çalışmalar ve yapısal mekanik ile ilgili uygulamalar Bert [14,15,16], Wang ve Bert [17], Wang, Bert ve Striz [18,19] tarafından yapılmıştır. Ayrıca Du, Lim ve Lin [12,13] , Laura ve Gutierrez [20] ve Wen ve Yu [21] bu konuda çalışmaları mevcuttur.

Diğer sayısal analiz yöntemleri gibi Diferansiyel Kuadratur Metodu da diferansiyel denklemleri, cebirsel denklem takımlarına indirgeyerek çözer. Bu denklem takımlarını çözebilmek için sınır şartlarının uygun bir şekilde denklemlere dahil edilmesi gereklidir. Her sınırdaki tek bir sınır şartının olduğu durumlarda bu sınır şartını yerine koyma işlemi oldukça basittir ancak bir sınırdaki birden fazla sınır koşulunun olduğu durumlarda sınır şartlarını yerine koyarken birçok sayısal zorluklarla karşılaşılır. Navier-Stokes denklemleri buna bir örnektir. Yönetici denklem ikinci dereceden olmasına rağmen, her sınır için biri Dirichlet tipi ve biri de Neumann tipi olmak üzere iki adet sınır şartı vardır. Bu sınır şartlarını doğru bir şekilde uygulayabilmek için Shu [9] iki sınır şartını, iki tabakalı nümerik sınır şartlarına dönüştürerek çözen bir yaklaşım önermiştir. Bir başka örnek ise kiriş veya plak titreşim analizinde, yönetici denklemin dördüncü dereceden ve her sınır için iki sınır şartının olduğu durumudur. Bu tip yapısal mekanik problemleri için sınır şartlarının uygulanması aşamasında birçok yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan biri Bert [14] ve Jang [5] tarafından önerilen “ δ -tekniği”dir. Bu

teknikte iki sınır noktasına δ kadar uzaklıkta noktalar alınır ve sınır şartları bu sınır noktasının kendisine ve ona çok yakın olan δ noktasına uygulanır. Sonuç olarak sınır şartlarından biri tam olarak sağlanırken diğer δ noktasında yaklaşık olarak sağlanır. Bu teknikte iki temel sorun vardır. Bunlardan biri δ noktasının alınan değere göre sonucu etkileyebileceğidir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için δ çok küçük, L plak veya giriş boyu olmak üzere, $0.0001L$ den daha büyük olmamak şartıyla seçilmelidir. Ancak burada da oluşan bir diğer sorun δ değerinin bu kadar küçük seçilmesinin DK metodunda ağırlık katsayı matrislerinin çözüme uygun bir biçimde çıkmamasına sebep olmasıdır. Sonuç olarak, elde edilen çözümler yeterli doğrulukta değildir.

δ -teknğinde karşılaşılan bu problemleri ortadan kaldırabilmek amacıyla Wang ve Bert [15] , Malik ve Bert [22] başka bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yaklaşıma göre türevli ifadeler içeren sınır şartları ağırlık katsayı matrisinde yerine koyularak işlem yapılmıştır. Bu şekilde modifiye edilmiş ağırlık katsayı matrisleri elde edilmiş ve yönetici denklemde modifiye edilmiş ağırlık katsayıları kullanılarak çözüm yapılmıştır. Bu yöntem giriş ve plaklarda doğru sonuçlar vermiştir ancak sınır şartlarının uygulanmasında birtakım kısıtlamalara sebep olmuştur. Bu yöntemle A-A sınır şartları için yanlış sonuçlar elde edilmiş, ayrıca basit mesnetli plak problemlerinde de bazı frekanslar bulunamamıştır.

Sınır şartlarının uygulanma aşamasında iki yöntemde de oluşan sorunları ortadan kaldırabilmek için Shu [23] başka bir yaklaşım önermiştir. Bu yaklaşıma göre geliştirilen formülasyonlarla sınır şartları doğrudan yönetici denkleminde yerine koyularak çözüm yapılmıştır. Bu yöntemde gerek δ -teknğinde gerekse modifiye edilmiş ağırlık katsayıları tekniğindeki eksiklikler giderilmiştir. δ -teknigindeki gibi yaklaşık sınır şartları kullanılmamış, bütün sınır şartları tam olarak sağlanmış ve modifiye edilmiş ağırlık katsayıları tekniğindeki gibi sınır şartlarının seçiminde herhangi bir kısıtlamaya sebep olmamıştır. Sınır şartlarının denkleme dahil edilmesi giriş ve plak titreşimleri incelenerek anlatılmıştır.

Shu [24] , Diferansiyel Kuadratur Metodu ile ilgili bir kitap yazmış ve bu kitapta konu bütün incelikleriyle ele alınmıştır. Yöntemin matematiksel temelleri, ağırlık katsayılarının hesaplanma yöntemleri, literatürlerde ele alınan farklı yaklaşımlar ve bu yaklaşımların avantajları ve dezavantajları, yöntemin akışkanlar ve katı cisimler mekaniğinde, ısı problemlerinde, kimyasal problemlerde, lineer olmayan analizlerde,

dalga analizlerinde ve daha birçok karmaşık problemde uygulanışı detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

2000 yılından sonra bu kitabın da yardımıyla diferansiyel kuadratur metodu çalışmaları hız kazanmış ve birçok mühendislik probleminin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde diğer sayısal analiz yöntemlerine göre daha az grid nokta sayısı kullanması dolayısıyla daha az CPU (merkezi işlem birimi) süresi gereksinimiyle tercih edilmeye başlanan bir yöntem olmuştur ve sürekli olarak mühendislik problemlerinde uygulama alanları geliştirilmektedir.

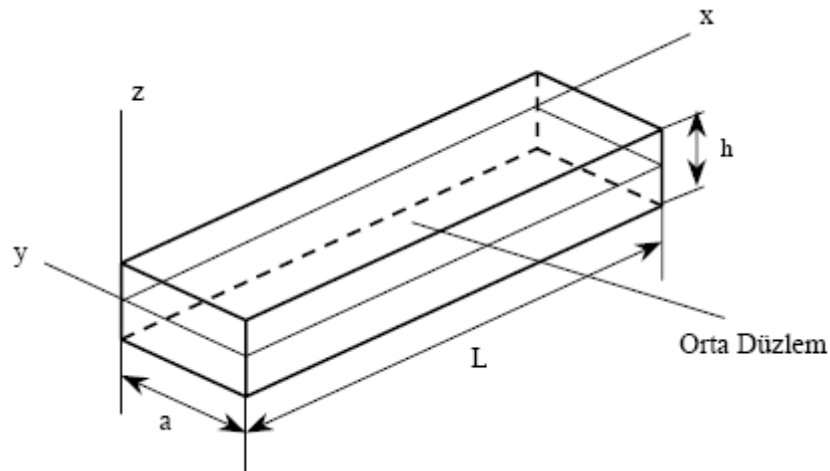
3. DİFERANSİYEL KUADRATUR METODU

Diferansiyel kuadratur metodu, diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan nümerik bir tekniktir. Bu çalışmada DKM kiriş ve plak denklemlerine uygulanmıştır. Bunun için öncelikle klasik kiriş ve plak denklemleri, dayandığı varsayımlar temel bağıntı ve denklemler açıklanmıştır.

3.1 Klasik Kiriş Teorisi

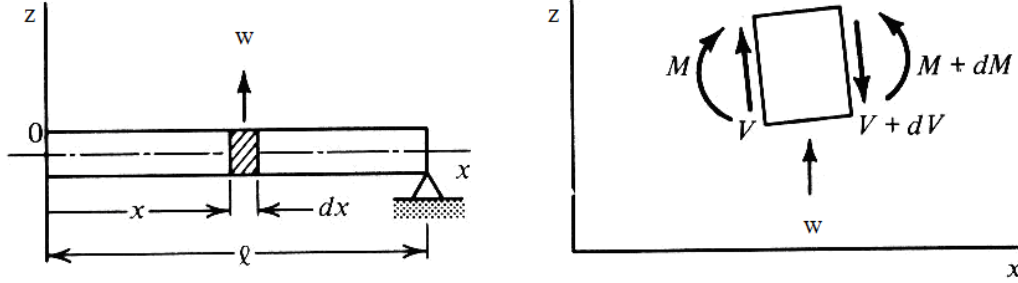
Kirişlerde deformasyonun kinematikini birçok kiriş teorisi geliştirilmiştir. Klasik kiriş teorisi aşağıdaki kabullere dayanmaktadır [28].

- Düzlemsel simetri: Kiriş, boyunca uzanan düz bir eksene sahiptir ve kesit alanında ekstenel bir simetri söz konusudur.
- Diklik şartı: Kiriş boyunca orta düzleme dik olan doğrultular, deformasyondan sonra da dik kalırlar, şekil değıştirmezler.
- Genleme enerjisi: Kiriş elemanlarının iç genleme enerjileri sadece eğilme deformasyonlarında önem kazanır. Diğer tüm etkiler ihmal edilmektedir.
- Lineerleştirme: Kiriş kalınlığı boyunca oluşacak dönme ve deformasyonlar ihmal edilebilir. Böylece düşey yöndeki normal ve kayma gerilmeleri hesaba katılmaz.



Şekil 3.1: Kiriş geometrisi ve eksen takımı.

Şekil 3.1’de kiriş geometrisi ve eksen takımı x-y-z koordinat sistemi, x eksenindeki kiriş uzunluğu L, y eksenindeki kiriş genişliği a ve z eksenindeki kiriş kalınlığı h olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.2: A-B mesnetli kiriş ve kiriş elemanı.

Şekil 3.2’de $M(x,t)$ eğilme momenti, $V(x,t)$ kesme kuvvetidir. Birim uzunluğa etki eden dış kuvvet ise $f(x,t)$ dir. Kiriş elemanına etki eden eylemsizlik kuvveti ise aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \quad (3.1)$$

z yönündeki hareket denklemi,

$$-(v + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \quad (3.2)$$

Burada ρ kütle yoğunluğu ve $A(x)$ ise kiriş kesit alanıdır. y eksenine göre moment eşitliğinden,

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.3)$$

Elde edilir. $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ ve $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$ yazılırsa, denklem (3.2) ve denklem (3.3)

şu şekilde yazılır.

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x,t) - V(x,t) = 0 \quad (3.5)$$

$V = \partial M / \partial x$ yazılırsa denklem aşağıdaki gibi olur.

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \quad (3.6)$$

Euler-Bernoulli Kiriş teoreminde eğilme momenti ile çökme arasındaki ilişki şöyledir,

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \quad (3.7)$$

Burada E Young modülü, I(x) ise kirişin y eksenine göre eylemsizlik momentidir. Denklem (3.6) ve denklem (3.7)'den kuvvet etkisi altındaki kiriş için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t) \quad (3.8)$$

Denklem homojen bir kiriş için indirgendiğinde, şu denklem elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t) \quad (3.9)$$

Serbest titreşim için, $f(x,t) = 0$ olur. Böylelikle hareket denklemi şu hale gelir.

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad (3.10)$$

Burada $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ olarak tanımlanır. Lineer elastik bir kirişin eğilmeli durum için serbest titreşim denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

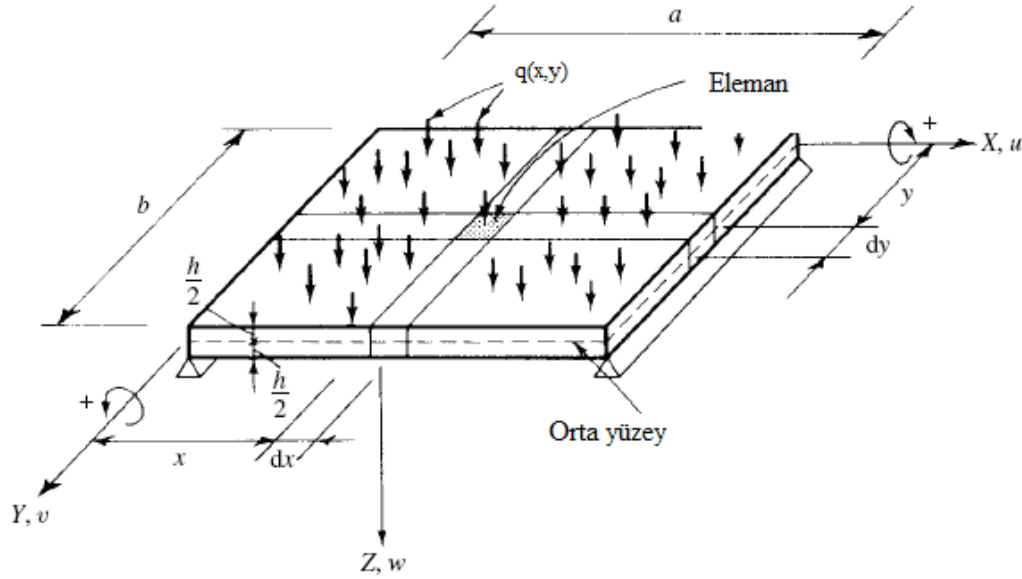
3.2 Klasik Plak Teorisi

Kirişlerin statik ve dinamik davranış analizlerinin dayandığı teoriler plak ve kabuk yapılar için geliştirilen teoriler ile paralellikler taşımaktadır. Bu kabuller,

- Malzeme homojen izotropik ve lineer statiktir. Hooke kanununa uygundur.
- Şekil değiştirmeden (deformasyon) önce plağın orta düzlemine dik olan doğrular şekil değiştirmeden sonra da dik kalırlar.

- Plak kalınlığı genişliğine oranla çok (en az 10 katı kadar) küçüktür.
- Orta düzleme paralel düzlemlere etkiyen normal gerilmeler σ_z ihmal edilebilir.

şeklinde verilen Kirchhoff varsayımlarına dayanmaktadır. Bu varsayımlardan yola çıkarak 3-boyutlu global yer değiştirme alan bileşenleri plağın orta düzlem bileşenleri cinsinden, üç-serbestlik dereceli 2-boyutlu plak teorilerine indirgenmektedir [27].



Şekil 3.3: Yanal yüklenmiş dikdörtgen plak.

İnce, dikdörtgen bir plağın titreşim, eğilme ve burkulmasını yöneten diferansiyel denklemler sırasıyla;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \omega^2 w \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P_x \frac{\partial w}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Şeklinde verilir. Burada w plağın orta düzleminin deplasmanı, ρ plak malzemesinin kütle yoğunluğu, h plak kalınlığı, ω doğal frekans, D plağın eğilme rijitliği olup, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ ile verilir. ν Poisson oranı, E elastisite modülüdür. P_x ise plak kenarlarına etkiyen aksenal basınç yüküdür [27].

3.3 Diferansiyel Kuadratur Metodu

Diferansiyel kuadratur metodu, 1971 yılında Richard Bellman tarafından diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilmiş sayısal bir yöntemdir. Bu yöntem ilk olarak integral kuadratur metodundan hareketle bulunmuş ve 1992 yılından itibaren yöntemin çeşitli formülasyonlarla geliştirilmesiyle günümüze kadar birçok mühendislik probleminin çözümünde kullanılmıştır [24].

$$f_x^{(1)}(x_i) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları $f(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını belirtir. Diferansiyel kuadratur metodu uygulanırken dikkat edilmesi gereken önemli nokta ağırlık katsayılarının hesaplanmasıdır [24].

Ağırlık katsayılarının hesabı karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Bu fonksiyonlara test fonksiyonu denir. Seçilen test fonksiyonlarının türüne göre ağırlık katsayılarının hesaplanması iki temel yaklaşımla olur. Bunlar yüksek dereceden polinom yaklaşımı (Polinomal Diferansiyel Kuadratur metodu) ve Fourier seri açılımı yaklaşımıdır. Bu çalışmada yüksek dereceden polinom yaklaşımı kullanılmıştır [24].

Yüksek dereceden polinom yaklaşımı Weierstrass birinci teoremine dayanır. Bu teoreme göre “ $f(x)$ (a,b) aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ise, n sonsuza gittikçe $f(x)$ ’e yakınsayan bir $P_n(x)$ vardır” şeklinde tanımlanır. Bu teorem,

$$f(x) = P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x^k \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikteki c_k sabitleri aşağıdaki denklem sisteminin çözülmesiyle bulunur [24].

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_{N-1} x_1^{N-1} &= f(x_1) \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_{N-1} x_2^{N-1} &= f(x_2) \\ \\ c_0 + c_1 x_N + c_2 x_N^2 + \dots + c_{N-1} x_N^{N-1} &= f(x_N) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Bununla birlikte N'nin büyük değerleri için çözüm yapılırken $N \times N$ boyutundaki matrisin tersinin alınması çeşitli zorluklar yaratır bu nedenle $c_0, c_1, c_2, \dots, c_N$ katsayılarını belirleyebilmek oldukça güçtür ve sonuçların hassasiyeti nokta sayısı arttıkça azalmaktadır. Bu güçlükleri gidermek, metodun kullanım alanını genişletmek ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmak için Langrange interpolate edilmiş polinomları kullanılmıştır. Buna göre fonksiyon şu hale gelir,

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot l_i(x) \quad (3.18)$$

Burada,

$$l_i(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_i)(x - x_i)} \quad (3.19)$$

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \quad (3.20)$$

$M^{(1)}(x_i)$ $M(x)$ in $x = x_i$ noktasındaki türevidir.

$$M^{(1)}(x_i) = (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (3.21)$$

$l_i(x)$ fonksiyonunun önemli bir özelliği

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad (3.22)$$

olmasıdır.

3.3.1 Birinci dereceden türev için ağırlık katsayılarının hesaplanması

3.3.1.1 Bellman yaklaşımları

Bellman birinci dereceden ağırlık katsayılarının hesabında iki temel yaklaşım önermiştir. Bu iki yaklaşımda farklı test fonksiyonları kullanmıştır [24].

İlk yaklaşımda test fonksiyonu olarak,

$$g_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

şeklinde bir polinomal fonksiyon kullanmıştır. Bu denklem bize N tane test fonksiyonu verir. Denklem (3.15)'e göre A_{ij} için i ve j değerleri 1 den N'ye kadar değerler alır. Böylelikle toplam $N \times N$ adet ağırlık katsayısı elde edilir. Bu katsayılar, N adet test fonksiyonunun N adet noktaya uygulanmasıyla elde edilir.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N A_{ij} = 0 \\ \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^k = k..x_j^k, k = 2,3,..., N-1 \end{cases}, \quad i = 1,2,..., N \quad (3.24)$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla N'nin büyük değerleri için çözüm yapılırken $N \times N$ boyutundaki matrisin tersinin alınması bir takım zorluklar doğurur. Bu nedenle bu yaklaşımda N genellikle 13'den küçük seçilir.

Bellman'ın önerdiği ikinci yaklaşım da birinciye benzer şekildedir ancak bu yaklaşımda farklı bir test fonksiyonu kullanılmıştır [24].

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k).L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1,2,..., N \quad (3.25)$$

Burada $L_N(x)$ N'nci dereceden ötelenmiş Legendre polinomu ve $L_N^{(1)}(x)$, $L_N(x)$ 'nin birinci dereceden türevidir. x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökü olarak seçilir ve bu denklem N adet $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ grid nokta için uygulanırsa ağırlık katsayıları için şu ifadeler elde edilir.

$$A_{ij} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.26)$$

$$A_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad (3.27)$$

Bu eşitlikler kullanılarak ağırlık katsayıları hesaplanabilir ancak grid noktalarının koordinatları ötelenmiş Legendre polinomunun köklerinden seçilmek zorunda olduğu için bu eşitlikler sadece özel bir durumu yansıtır. Basit uygulamalarda ilk yaklaşım tercih edilir.

3.3.1.2 Quan ve Chang yaklaşımları

Quan ve Chang [24] test fonksiyonu olarak daha önce de değinildiği gibi uzun matris işlemlerine gerek duymadan uygulanabilen Langrange interpolate edilmiş polinomlarını kullanmışlardır.

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.28)$$

Burada $M(x)$ ve $M^{(1)}(x_k)$ denklem (3.20) ve denklem (3.21)'de verilmiştir.

$M^{(1)}(x_k)$ $M(x)$ in $x = x_k$ noktasındaki türevidir.

Denklem (3.28)'deki test fonksiyonu N adet grid nokta için uygulandığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$A_{ij} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \quad , \quad j \neq i \text{ için} \quad (3.29)$$

$$A_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} \quad (3.30)$$

Bu yaklaşımla ağırlık katsayıları grid nokta seçiminde herhangi bir kısıtlama olmadan hesaplanabilir.

3.3.1.3 Genelleştirilmiş Shu yaklaşımı

Shu [24] dört temel polinom tipini esas alarak bütün yaklaşımları kapsayan bir yöntem geliştirmiştir. Bu temel polinomlar şöyledir,

$$r_k(x) = x^k - 1 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.31)$$

$$r_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.32)$$

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.33)$$

$$r_1(x) = 1 \quad , \quad r_k(x) = (x - x_{k-1}).r_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (3.34)$$

Buarada $L_N(x)$ N'nci dereceden Legendre polinomu, $M(x)$ ise denklem (3.20)'de tanımlanmıştır. Bu temel polinomları kullanarak ağırlık katsayıları için önerilen ifadeler şöyledir,

$$A_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad , \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.35)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ii} = 0 \text{ veya } A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} \quad (3.36)$$

Burada $M^{(1)}(x)$ denklem (3.21)'de tanımlanmıştır.

3.3.2 İki ve daha yüksek dereceden türev için ağırlık katsayılarının hesaplanması

İkinci dereceden ağırlık katsayılarının hesaplanması için Quan ve Chang [24] Langrange interpolasyon polinomlarını test fonksiyonu olarak kullandıktan sonra elde edilen ifadelerin türevini alarak aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

$$B_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad , \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.37)$$

$$B_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right] \quad (3.38)$$

Genelleştirilmiş yaklaşıma göre ikinci dereceden türev için ağırlık katsayıları şöyledir.

$$B_{ij} = 2A_{ij} \left(A_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right) \quad , \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.39)$$

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} = 0 \text{ veya } B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij} \quad (3.40)$$

Diferansiyel kuadratur metodu n'inci dereceden bir fonksiyona uygulandığında, x_i noktası için ifade şu hale gelir.

$$f^{(n)}(x_i) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.41)$$

Bu durumda $A_{ij}^{(n)}$ n'inci dereceden türev için ağırlık katsayısı hesabında şu sonuç elde edilmiştir.

$$A_{ij}^{(n)} = n \left(A_{ij} A_{ii}^{(n-1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad (3.42)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{veya} \quad A^{(n)}_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}^{(n)} \quad (3.43)$$

Bu denklemlerde $i, j=1, 2, \dots, N$ ve $n=2, 3, \dots, N-1$ arasında alınır. İki ve daha yüksek dereceden türev için ağırlık katsayıları, birinci dereceden türev için elde edilen ifadelerin türetilmesiyle bulunabileceği gibi matris çarpımları yöntemiyle aşağıdaki formda da hesaplanabilir.

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (3.44)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (3.45)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (3.46)$$

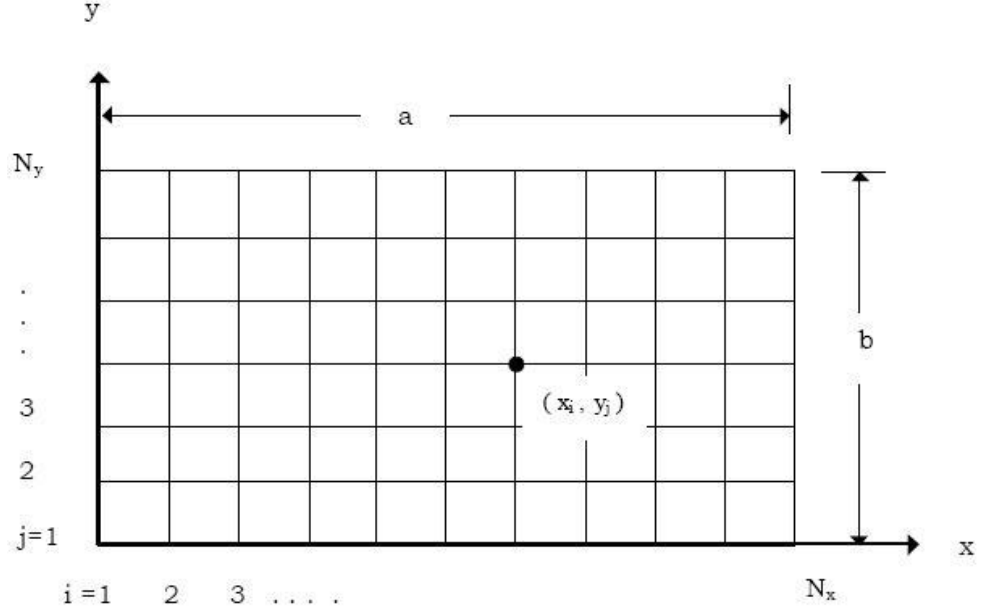
3.3.3 Grid nokta sayısı ve seçimi

Diferansiyel kuadratur yöntemiyle bir mühendislik problemini çözebilmek için öncelikle grid nokta türünü ve sayısı belirlenmelidir. Bu yöntemle elde edilen sonuçların hassasiyetinin bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olduğu görülse de genel olarak seçilen grid noktalarının türüne ve dağılımına bağlıdır. İki tip nokta dağılımı vardır [24].

- Lineer grid dağılımı: Her bir koordinat yönünde eşit aralıklı seçilen grid dağılımıdır. N_x ve N_y nokta sayısı olmak üzere,

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1} \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.47)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1} \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.48)$$



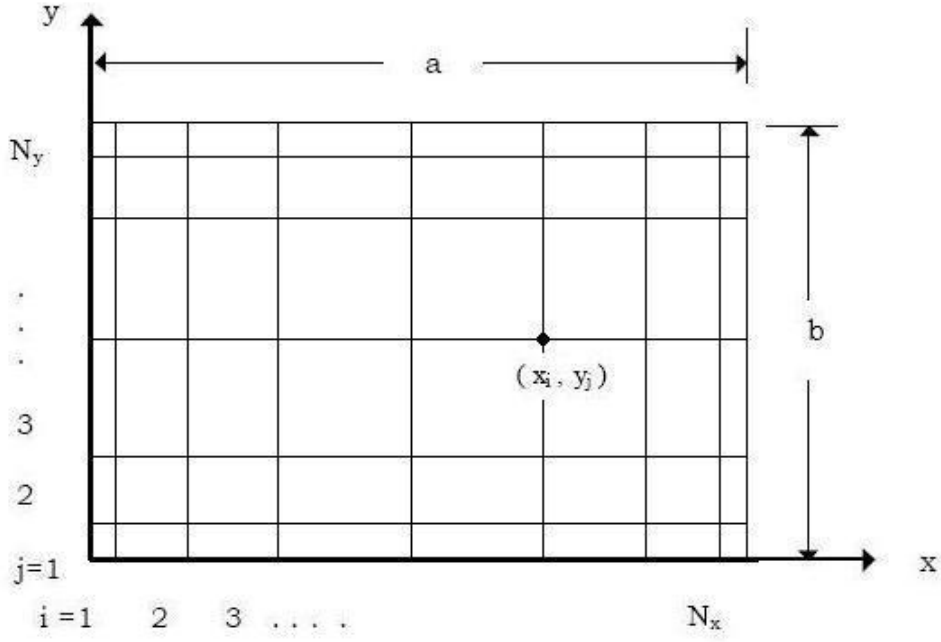
Şekil 3.4: İki boyutlu bölge için lineer grid dağılımı.

Eşit aralıklı grid noktaları kullanılması hesaplama kolaylığı sağlaması ve basit bir şekilde uygulanabilmesi açısından avantaj sağlar ancak yapılan çalışmalar bu nokta dağılımının seçilmesiyle sonuçların hassaslığının bazı problem türlerinde artıp bazılarında azaldığını göstermiştir [24].

- Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı: Sınır şartlarının uygulandığı noktalara doğru sıklaşan grid dağılımıdır. N_x ve N_y nokta sayısı olmak üzere,

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_x-1}\pi\right)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.49)$$

$$y_j = \frac{1 - \cos\left(\frac{j-1}{N_y-1}\pi\right)}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.50)$$



Şekil 3.5: İki boyutlu bölge için Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı.

Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı sınır koşullarının uygulandığı noktalara doğru sıklaşan bir dağılım olduğu için çözüme daha çabuk yakınsamayı sağlar. Hassas ve güvenilir sonuçlar verir [24].

4. DK METODUNUN KİRİŞ VE PLAK TİTREŞİMLERİNE UYGULANMASI

Bu çalışmada sabit kalınlıklı izotropik malzemeden yapılmış plak ve kirişin serbest titreşimleri DK metodu ile incelenecektir. İzotropik malzeme özellikleri, elastisite modülü $E=210\text{GPa}$, Poisson oranı $\nu=0.3$ ve yoğunluk $\rho=7800\text{kg/m}^3$ olarak alınmıştır. Yöntemin daha kolay bir şekilde anlaşılabilmesi için yöntem öncelikle iki boyutlu plak problemine göre daha basit bir problem olan tek boyutlu kiriş problemine uygulanmıştır. Doğal frekanslar ve karşılık gelen mod şekilleri gibi önemli titreşim karakteristikleri incelenmiştir.

4.1 DK Metodunun Kiriş Titreşim Problemine Uygulanması

Lineer elastik bir kirişin eğilmeli durum için serbest titreşim denklemi,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

olarak bilinir. Burada ρA kütle, t zaman parametresidir. Bu denklemin boyutsuzlaştırılmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{d^4 W}{dX^4} - \Omega^2 W = 0 \quad (4.2)$$

Burada , $X=x/L$ boyutsuzlaştırılmış koordinat, L kiriş boyu, $\Omega^2 = \rho A L^4 \omega^2 / EI$ boyutsuz frekans, ω titreşim frekansı, ρA birim uzunluk başına kütle, EI eğilme rijitliğidir. Bu denkleme DKM uygulanmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{k=1}^N D_{ik} W_k = \Omega^2 W_i \quad (4.3)$$

Burada D dördüncü dereceden türev için ağırlık katsayısı, W_i , $i = 1, 2, \dots, N$, fonksiyonun o grid noktasında aldığı değerdir. Birinci , ikinci üçüncü ve dördüncü

dereceden türev için ağırlık katsayılarını veren matrisler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(1)} & c_{1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1,N-1}^{(1)} & c_{1,N}^{(1)} \\ c_{2,1}^{(1)} & c_{2,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2,N-1}^{(1)} & c_{2,N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N-1,1}^{(1)} & c_{N-1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-1,N-1}^{(1)} & c_{N-1,N}^{(1)} \\ c_{N,1}^{(1)} & c_{N,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N,N-1}^{(1)} & c_{N,N}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(2)} & c_{1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1,N-1}^{(2)} & c_{1,N}^{(2)} \\ c_{2,1}^{(2)} & c_{2,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2,N-1}^{(2)} & c_{2,N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N-1,1}^{(2)} & c_{N-1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-1,N-1}^{(2)} & c_{N-1,N}^{(2)} \\ c_{N,1}^{(2)} & c_{N,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N,N-1}^{(2)} & c_{N,N}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(3)} & c_{1,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1,N-1}^{(3)} & c_{1,N}^{(3)} \\ c_{2,1}^{(3)} & c_{2,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2,N-1}^{(3)} & c_{2,N}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N-1,1}^{(3)} & c_{N-1,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-1,N-1}^{(3)} & c_{N-1,N}^{(3)} \\ c_{N,1}^{(3)} & c_{N,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N,N-1}^{(3)} & c_{N,N}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$D = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(4)} & c_{1,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1,N-1}^{(4)} & c_{1,N}^{(4)} \\ c_{2,1}^{(4)} & c_{2,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2,N-1}^{(4)} & c_{2,N}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N-1,1}^{(4)} & c_{N-1,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-1,N-1}^{(4)} & c_{N-1,N}^{(4)} \\ c_{N,1}^{(4)} & c_{N,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N,N-1}^{(4)} & c_{N,N}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Sınır şartları ise aşağıdaki şekildedir.

Basit mesnetli uç için,

$$W(0) = 0 \quad \left. \frac{d^2 W}{dX^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \left. \frac{d^2 W}{dX^2} \right|_{x=1} = 0 \quad (4.8)$$

Ankastre mesnetli uç için,

$$W(0) = 0 \quad \left. \frac{dW}{dX} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \left. \frac{dW}{dX} \right|_{x=1} = 0 \quad (4.9)$$

Denklem (4.3)'ün sınır şartlarının da dahil edilerek çözülmesiyle boyutsuz frekans değerleri elde edilir. Sınır şartlarının denkleme uygulanma aşamasında birçok yaklaşım mevcuttur ancak ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının çeşitli kombinasyonları için Shu'nun önerdiği ve yüksek hassasiyette sonuçlar veren yöntem şu şekildedir [24].

Ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının herhangi bir kombinasyonu için DK metodu uygulanırsa şu denklemler elde edilir.

$$W_1 = 0 \quad (4.10a)$$

$$\sum_{k=1}^N C_{1,k}^{(n0)} . W_k = 0 \quad (4.10b)$$

$$W_N = 0 \quad (4.10c)$$

$$\sum_{k=1}^N C_{N,k}^{(n1)} . W_k = 0 \quad (4.10d)$$

Burada n0 ve n1 uygulanacak sınır şartlarına göre 1 veya 2 olarak alınır. Örnek olarak,

$n0 = 1, n1 = 1 \rightarrow$ ankastre - ankastre

$n0 = 1, n1 = 2 \rightarrow$ ankastre - basit mesnet

$n0 = 2, n1 = 1 \rightarrow$ basit mesnet - ankastre

$n0 = 2, n1 = 2 \rightarrow$ basit mesnet - basit mesnet

Yukarıda verilen sınır şartlarından (4.10a) ve (4.10c) denklemleri (4.3) denkleminde kolayca yerine konulabilir. Ancak türevli ifadeler olan (4.10b) ve (4.10d) denklemlerinde verilen sınır şartlarını (4.3) denkleminde yerine koymak zor bir işlemdir. Bu sınır şartlarının hepsinin (4.3) denklemini sağlayabilmesi için (4.10b) ve (4.10d) denklemleri ortak çözülerek, W_2 ve W_{N-1} için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$W_2 = \frac{1}{AXN} \cdot \sum_{k=3}^{N-2} AXK1 \cdot W_k \quad (4.11a)$$

$$W_{N-1} = \frac{1}{AXN} \cdot \sum_{k=3}^{N-2} AXKN \cdot W_k \quad (4.11b)$$

Burada,

$$AXK1 = c_{1,k}^{(n0)} \cdot c_{N,N-1}^{(n1)} - c_{1,N-1}^{(n0)} \cdot c_{N,k}^{(n1)} \quad (4.12)$$

$$AXKN = c_{1,2}^{(n0)} \cdot c_{N,k}^{(n1)} - c_{1,k}^{(n0)} \cdot c_{N,2}^{(n1)} \quad (4.13)$$

$$AXN = c_{N,2}^{(n1)} \cdot c_{1,N-1}^{(n0)} - c_{1,2}^{(n0)} \cdot c_{N,N-1}^{(n1)} \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Denklem (4.11)'e göre W_2 ve W_{N-1} $W_3, W_4, \dots, W_{N-2}$ cinsinden ifade edilmiştir. Denklem (4.10)'da 4 adet sınır şartı verilmiştir. Bununla birlikte N adet bilinmeyen $W_1, W_2, \dots, W_N$ vardır. Bu dört adet sınır şartının (4.3) denklemini sağlayabilmesi için (4.3) denklemi N-4 noktaya uygulanmalıdır ki bu da (4.3) denklemi $X_3, X_4, \dots, X_{N-2}$ grid noktalarına uygulanarak olur. Bunun için (4.10a), (4.10c) ve (4.11) denklemleri (4.3) denkleminde yerine konur ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sum_{k=3}^{N-2} C_3 W_k = \Omega^2 W_i \quad , \quad i = 2, 3, \dots, N-2 \quad (4.15)$$

Burada,

$$C_3 = c_{i,k}^{(4)} - \frac{c_{i,2}^{(4)} \cdot AXK1 + c_{i,N-1}^{(4)} \cdot AXKN}{AXN} \quad (4.16)$$

olarak bulunur.

Denklem (4.15) N-4 bilinmeyen için N-4 adet eşitlik verir. Denklem (4.15) özdeğer problemi formunda yazılır.

$$[\mathbf{C}_3 - \Omega^2 \mathbf{W}] \quad (4.17)$$

$$\text{Det} [\mathbf{C}_3 - \Omega^2 \mathbf{W}] = 0 \quad (4.18)$$

$(N-4) \times (N-4)$ boyutundaki $[\mathbf{C}_3 - \Omega^2 \mathbf{W}]$ katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek serbest titreşimlerin boyutsuz doğal frekansları elde edilir.

4.2 DK Metoduyla Elde edilen Kiriş Doğal Frekansları ve Sonuçların Karşılaştırılması

Bölüm 4.1 de verilen ifadeler, Ek A.1, Ek A.2, Ek A.3 Ek A.4 ve Ek A.5 te kodları verilen Matlab programı kullanılarak (N nokta sayısını göstermek üzere) N'yi değiştirerek ve ilgili satırlarda farklı sınır şartları için farklı ifadeler yazılarak N=7 , N=10, N=15 ve N=30 için lineer ve Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı durumlarında çözülmüştür. İlk beş doğal frekansla ilgili elde edilen sonuçlarla literatürdeki sonuçların karşılaştırılması Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'te gösterilmiştir. Çizelgelerde ankastre mesnet “A” , basit mesnet “B” ile gösterilmiştir. A-A mesnetli kiriş için çözüm yapıldığında çizelge 4.1'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.1: A-A kiriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω).

		Lineer grid	Chebyshev-Gauss Lobatto grid	Kaynak [24]
N=7	Ω_1	22.9586	22.5604	22.3733
	Ω_2	49.2950	58.4237	61.6728
	Ω_3	72.8759	87.8954	120.9034
	Ω_4			199.8594
	Ω_5			298.5555
N=10	Ω_1	22.3594	22.3723	22.3733
	Ω_2	60.8338	61.5963	61.6728
	Ω_3		123.5385	120.9034
	Ω_4		236.0434	199.8594
	Ω_5		255.7144	298.5555
N=15	Ω_1	22.3733	22.3733	22.3733
	Ω_2	61.6702	61.6728	61.6728
	Ω_3	120.7642	120.9021	120.9034
	Ω_4	218.5820	199.9365	199.8594
	Ω_5	253.5904	299.3886	298.5555
N=30	Ω_1	22.3733	22.3733	22.3733
	Ω_2	61.6728	61.6728	61.6728
	Ω_3	120.9034	120.9034	120.9034
	Ω_4	199.8594	199.8594	199.8594
	Ω_5	298.5555	298.5555	298.5555

B-B mesnetli kiriş için çözüm yapıldığında çizelge 4.2'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2: B-B giriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω).

		Lineer grid	Chebyshev-Gauss Lobatto grid	Kaynak [24]
N=7	Ω_1	9.9591	9.9165	9.8696
	Ω_2	31.1769	35.0542	39.4784
	Ω_3	54.5062	62.2066	88.8264
	Ω_4			157.9137
	Ω_5			246.7401
N=10	Ω_1	9.8676	9.8693	9.8696
	Ω_2	39.1580	39.4174	39.4784
	Ω_3		92.8422	88.8264
	Ω_4		197.3083	157.9137
	Ω_5			246.7401
N=15	Ω_1	9.8696	9.8696	9.8696
	Ω_2	39.4778	39.4784	39.4784
	Ω_3	88.7725	88.8249	88.8264
	Ω_4	166.8761	158.0619	157.9137
	Ω_5	222.2928	248.4716	246.7401
N=30	Ω_1	9.8695	9.8696	9.8696
	Ω_2	39.4782	39.4784	39.4784
	Ω_3	88.8268	88.8264	88.8264
	Ω_4	157.9139	157.9137	157.9137
	Ω_5	246.7399	246.7401	246.7401

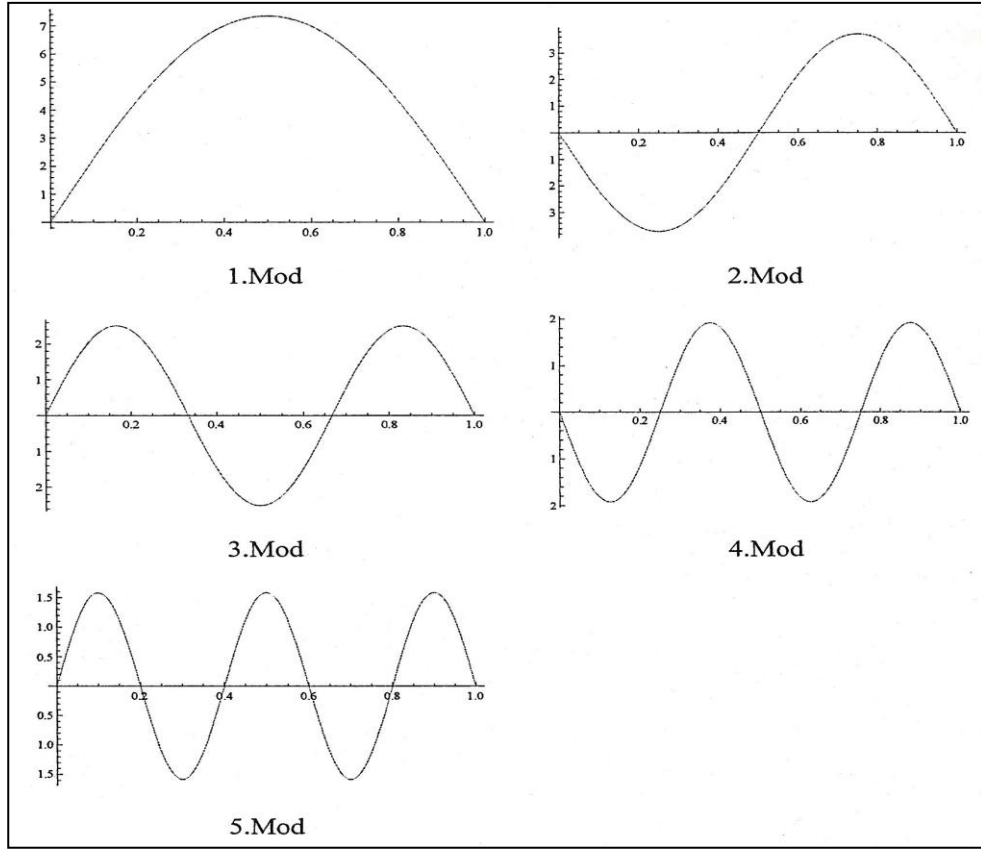
A-A mesnetli giriş için çözüm yapıldığında çizelge 4.3'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.3: A-B kiriş için elde edilen boyutsuz frekans katsayıları (Ω).

		Lineer grid	Chebyshev-Gauss Lobatto grid	Kaynak [24]
N=7	Ω_1	15.4890	15.4460	15.4182
	Ω_2	39.4863	44.4765	49.9648
	Ω_3	65.4138	78.0648	104.2477
	Ω_4			178.2697
	Ω_5			272.0310
N=10	Ω_1	15.4104	15.4170	15.4182
	Ω_2	49.6357	49.9216	49.9648
	Ω_3		109.2703	104.2477
	Ω_4		284.0631	178.2697
	Ω_5			272.0310
N=15	Ω_1	15.4182	15.4182	15.4182
	Ω_2	49.9631	49.9648	49.9648
	Ω_3	104.2050	104.2471	104.2477
	Ω_4	196.4614	178.4642	178.2697
	Ω_5	223.8927	273.1126	272.0310
N=30	Ω_1	15.4185	15.4182	15.4182
	Ω_2	49.9648	49.9648	49.9648
	Ω_3	104.2476	104.2477	104.2477
	Ω_4	178.2697	178.2697	178.2697
	Ω_5	272.0310	272.0310	272.0310

Doğal frekanslar $(N - 4) \times (N - 4)$ boyutundaki $\mathbf{B}^-$ katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek bulunduğu ve bulunan bazı doğal frekansların kompleks çıkması nedeniyle N'nin küçük değerleri için ilk beş doğal frekanstan bazıları bulunamamaktadır. Sonuçlar incelendiğinde, tek boyutlu bir problemde Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımının lineer grid dağılımına oranla az da olsa daha hassas sonuçlar verdiği görülmüştür. Nokta sayısının arttırılmasıyla referansa göre hatalar sıfır bulunmuştur ve elde edilen sonuçlar oldukça tatmin edicidir.

Şekil 4.1'de iki ucu ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimleri için mod şekilleri verilmiştir.



Şekil 4.1: Kiriş mod şekilleri.

4.3 DK Metodunun Plak Titreşim Problemine Uygulanması

İnce dikdörtgen bir plağın titreşimini ifade eden diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \omega^2 w \quad (4.19)$$

olarak verilir. Burada w plağın orta düzleminin deplasmanı, ρ yoğunluk, h plak kalınlığı, ω doğal frekansı göstermektedir. Eşitlik boyutsuzlaştırıldığında,

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \Omega^2 W \quad (4.20)$$

denklemini elde edilir. Burada $X=x/a$ ve $Y=y/b$ boyutsuz koordinatlar, a ve b plak kenar uzunlukları, $\lambda=a/b$ plak kenar uzunluklarının birbirine oranıdır. Ω boyutsuz frekans, $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ ve $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ eğilme rijitliğidir. E ve ν sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranıdır. Bu denkleme DKM uygulanmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{k=1}^N D_{i,k} W_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k1=1}^N \sum_{k2=1}^M B_{i,k1} \bar{B}_{j,k2} W_{k1,k2} + \lambda^4 \sum_{k=1}^M \bar{D}_{j,k} W_{i,k} = \Omega^2 W_{i,j} \quad (4.21)$$

Kiriş probleminde A, B C ve D ağırlık katsayıları (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemlerinde verilmiştir. Bu denklemdeki $\bar{B}$ ve $\bar{D}$ plağın y eksenindeki sırasıyla ikinci ve dördüncü dereceden ağırlık katsayılarıdır. Aynı şekilde y ekseninde birinci , ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden türev için ağırlık katsayılarını veren matrisler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(1)} & \bar{C}_{1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{1,N-1}^{(1)} & \bar{C}_{1,N}^{(1)} \\ \bar{C}_{2,1}^{(1)} & \bar{C}_{2,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{2,N-1}^{(1)} & \bar{C}_{2,N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{C}_{N-1,1}^{(1)} & \bar{C}_{N-1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N-1,N-1}^{(1)} & \bar{C}_{N-1,N}^{(1)} \\ \bar{C}_{N,1}^{(1)} & \bar{C}_{N,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N,N-1}^{(1)} & \bar{C}_{N,N}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(2)} & \bar{C}_{1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{1,N-1}^{(2)} & \bar{C}_{1,N}^{(2)} \\ \bar{C}_{2,1}^{(2)} & \bar{C}_{2,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{2,N-1}^{(2)} & \bar{C}_{2,N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{C}_{N-1,1}^{(2)} & \bar{C}_{N-1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N-1,N-1}^{(2)} & \bar{C}_{N-1,N}^{(2)} \\ \bar{C}_{N,1}^{(2)} & \bar{C}_{N,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N,N-1}^{(2)} & \bar{C}_{N,N}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(3)} & \bar{C}_{1,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{1,N-1}^{(3)} & \bar{C}_{1,N}^{(3)} \\ \bar{C}_{2,1}^{(3)} & \bar{C}_{2,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{2,N-1}^{(3)} & \bar{C}_{2,N}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{C}_{N-1,1}^{(3)} & \bar{C}_{N-1,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N-1,N-1}^{(3)} & \bar{C}_{N-1,N}^{(3)} \\ \bar{C}_{N,1}^{(3)} & \bar{C}_{N,2}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{C}_{N,N-1}^{(3)} & \bar{C}_{N,N}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{1,1}^{(4)} & \bar{c}_{1,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{c}_{1,N-1}^{(4)} & \bar{c}_{1,N}^{(4)} \\ \bar{c}_{2,1}^{(4)} & \bar{c}_{2,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{c}_{2,N-1}^{(4)} & \bar{c}_{2,N}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_{N-1,1}^{(4)} & \bar{c}_{N-1,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{c}_{N-1,N-1}^{(4)} & \bar{c}_{N-1,N}^{(4)} \\ \bar{c}_{N,1}^{(4)} & \bar{c}_{N,2}^{(4)} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{c}_{N,N-1}^{(4)} & \bar{c}_{N,N}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Ağırlık katsayıları hesabında x eksenini ve y eksenini için nokta sayıları eşit alınırsa ağırlık katsayıları da eşit çıkar. Ancak x ve y doğrultuları için farklı sayıda nokta ile hesap yapılırsa ağırlık katsayıları birbirinden farklı olacaktır.

Sınır şartları aşağıdaki şekildedir,

Basit mesnetli uç için,

X=0 ve X=1 de

$$W(0) = 0 \quad \frac{d^2 W}{dX^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \frac{d^2 W}{dX^2} \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.26)$$

Y=0 ve Y=1 de

$$W(0) = 0 \quad \frac{d^2 W}{dY^2} \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \frac{d^2 W}{dY^2} \Big|_{y=1} = 0 \quad (4.27)$$

Ankastre mesnetli uç için,

X=0 ve X=1 de

$$W(0) = 0 \quad \frac{dW}{dX} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \frac{dW}{dX} \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.28)$$

Y=0 ve Y=1 de

$$W(0) = 0 \quad \frac{dW}{dY} \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{ve} \quad W(1) = 0 \quad \frac{dW}{dY} \Big|_{y=1} = 0 \quad (4.29)$$

Denklem (4.21)'in sınır şartlarının da dahil edilerek çözülmesiyle boyutsuz frekans değerleri elde edilir. Sınır şartlarının denkleme uygulanma aşamasında birçok yaklaşım mevcuttur ancak ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının kombinasyonları için Shu'nun önerdiği ve yüksek hassasiyette sonuçları veren yöntem şu şekildedir [24].

Ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının herhangi bir kombinasyonu için DK metodu uygulanırsa şu denklemler elde edilir.

$$\text{Bütün sınır noktalarında } W_{1,j} = 0, \quad W_{N,j} = 0, \quad W_{i,1} = 0, \quad W_{i,M} = 0 \quad (4.30a)$$

$$X=0 \text{ da } \sum_{k=1}^N c_{1,k}^{(n0)} \cdot W_{k,j} = 0 \quad (4.30b)$$

$$X=1 \text{ de } \sum_{k=1}^N c_{N,k}^{(n1)} \cdot W_{k,j} = 0 \quad (4.30c)$$

$$Y=0 \text{ da } \sum_{k=1}^M \bar{c}_{1,k}^{(m0)} \cdot W_{i,k} = 0 \quad (4.30d)$$

$$Y=1 \text{ de } \sum_{k=1}^M \bar{c}_{M,k}^{(m1)} \cdot W_{i,k} = 0 \quad (4.30e)$$

Burada n0, n1, m0 ve m1 ankastre sınır şartı için 1, basit mesnet sınır şartı için 2 alınır. Yukarıda verilen sınır şartlarından (4.30a), (4.21) denkleminde kolayca yerine konulabilir ancak türevli ifadeler olan (4.30b), (4.30c), (4.30d) ve (4.30e) denklemlerinde verilen sınır şartlarını (4.21) denkleminde yerine koymak zor bir işlemdir. Kiriş probleminde olduğu gibi aynı prosedür izlenerek (4.30b) ve (4.30d) denklemleri ortak çözülerek $W_{2,j}$ ve $W_{N-1,j}$ için aşağıdaki denklemler elde edilir. Bu denklemler Şekil 4.2 'de o sembolüyle gösterilen grid noktalarını belirtir.

$$W_{2,j} = \frac{1}{AXN} \cdot \sum_{k=3}^{N-2} AXK1 \cdot W_{k,j}, \quad j = 3, 4, \dots, M-2 \quad (4.31a)$$

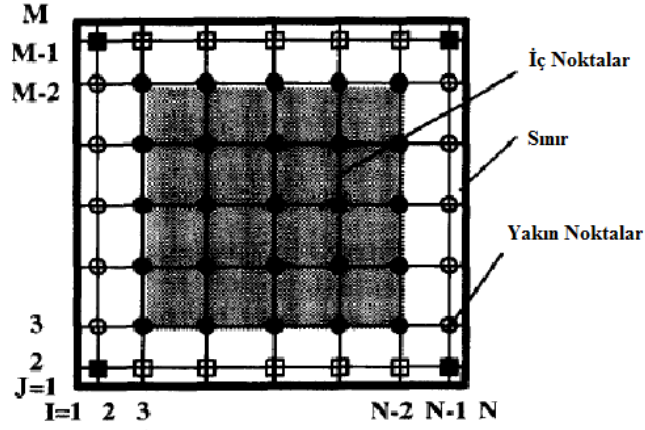
$$W_{N-1,j} = \frac{1}{AXN} \cdot \sum_{k=3}^{N-2} AXKN \cdot W_{k,j}, \quad j = 3, 4, \dots, M-2 \quad (4.31b)$$

Burada,

$$AXK1 = c_{1,k}^{(n0)} \cdot c_{N,N-1}^{(n1)} - c_{1,N-1}^{(n0)} \cdot c_{N,k}^{(n1)} \quad (4.32)$$

$$AXKN = c_{1,2}^{(n0)} \cdot c_{N,k}^{(n1)} - c_{1,k}^{(n0)} \cdot c_{N,2}^{(n1)} \quad (4.33)$$

$$AXN = c_{N,2}^{(n1)} \cdot c_{1,N-1}^{(n0)} - c_{1,2}^{(n0)} \cdot c_{N,N-1}^{(n1)} \quad (4.34)$$



Şekil 4.2: Dikdörtgen plakta iç ve yakın noktalar.

Aynı şekilde (4.30c) ve (4.30e) denklemleri ortak çözülerek $W_{i,2}$ ve $W_{i,M-1}$ için aşağıdaki denklemler elde edilir. Bu denklemler Şekil 4.2’de □ sembolüyle gösterilen grid noktalarını belirtir.

$$W_{i,2} = \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k=3}^{M-2} AYK1 \cdot W_{i,k} \quad , \quad i = 3,4,..., N-2 \quad (4.35a)$$

$$W_{i,M-1} = \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k=3}^{M-2} AYKM \cdot W_{i,k} \quad , \quad j = 3,4,..., N-2 \quad (4.35b)$$

Burada,

$$AYK1 = \bar{c}_{1,k}^{(m0)} \cdot \bar{c}_{M,M-1}^{(m1)} - \bar{c}_{1,M-1}^{(m0)} \cdot \bar{c}_{M,k}^{(m1)} \quad (4.36)$$

$$AYKM = \bar{c}_{1,2}^{(m0)} \cdot \bar{c}_{M,k}^{(m1)} - \bar{c}_{1,k}^{(m0)} \cdot \bar{c}_{M,2}^{(m1)} \quad (4.37)$$

$$AYM = \bar{c}_{M,2}^{(m1)} \cdot \bar{c}_{1,M-1}^{(m0)} - \bar{c}_{1,2}^{(m0)} \cdot \bar{c}_{M,M-1}^{(m1)} \quad (4.38)$$

Şekil 4.2’de dört köşedeki ■ sembolüyle gösterilen noktalar için (4.30b), (4.30c), (4.30d) ve (4.30e) denklemleri ortak çözülerek aşağıdaki dört denklem elde edilir.

$$W_{2,2} = \frac{1}{AXN} \cdot \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k1=3}^{N-2} \sum_{k2=3}^{M-2} AXK1 \cdot AYK1 \cdot W_{k1,k2} \quad (4.39a)$$

$$W_{N-1,2} = \frac{1}{AXN} \cdot \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k1=3}^{N-2} \sum_{k2=3}^{M-2} AXKN \cdot AYK1 \cdot W_{k1,k2} \quad (4.39b)$$

$$W_{2,M-1} = \frac{1}{AXN} \cdot \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k1=3}^{N-2} \sum_{k2=3}^{M-2} AXK1 \cdot AYKM \cdot W_{k1,k2} \quad (4.39c)$$

$$W_{N-1,M-1} = \frac{1}{AXN} \cdot \frac{1}{AYM} \cdot \sum_{k1=3}^{N-2} \sum_{k2=3}^{M-2} AXKN \cdot AYKM \cdot W_{k1,k2} \quad (4.39d)$$

Bu denklemlerde, karıştırılmaması amacıyla daha önceden bulunan AXK1 ve AXKN ifadelerindeki k indisi k1 olarak, AYK1 ve AYKM ifadelerindeki k indisi k2 olarak değiştirilmiştir. Artık bütün bu sınır şartları denklem (4.21)'de yerine koyularak aşağıdaki özdeğer denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{k=3}^{N-2} C_1 W_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k1=3}^{N-2} \sum_{k2=3}^{M-2} C_2 W_{k1,k2} + \lambda^4 \sum_{k=3}^{M-2} C_3 W_{i,k} = \Omega^2 W_{i,j} \quad (4.40)$$

Burada,

$$C_1 = c_{i,k}^{(4)} - \frac{c_{i,2}^{(4)} \cdot AXK1 + c_{i,N-1}^{(4)} \cdot AXKN}{AXN} \quad (4.41)$$

$$C_2 = c_{i,k1}^{(2)} \cdot \bar{c}_{j,k2}^{(2)} - \frac{AXK1 \cdot c_{i,2}^{(2)} + AXKN \cdot c_{i,N-1}^{(2)}}{AXN} \cdot \bar{c}_{j,k2}^{(2)} - \frac{AYK1 \cdot \bar{c}_{j,2}^{(2)} + AYKM \cdot \bar{c}_{j,M-1}^{(2)}}{AYM} \cdot c_{i,k1}^{(2)} + \frac{AXK1 \cdot AYK1 \cdot c_{i,2}^{(2)} \cdot \bar{c}_{j,2}^{(2)} + AXKN \cdot AYK1 \cdot c_{i,N-1}^{(2)} \cdot \bar{c}_{j,2}^{(2)}}{AXN \cdot AYM} + \frac{AXK1 \cdot AYKM \cdot c_{i,2}^{(2)} \cdot \bar{c}_{j,M-1}^{(2)} + AXKN \cdot AYKM \cdot c_{i,N-1}^{(2)} \cdot \bar{c}_{j,M-1}^{(2)}}{AXN \cdot AYM} \quad (4.42)$$

$$C_3 = \bar{c}_{j,k}^{(4)} - \frac{\bar{c}_{j,2}^{(4)} \cdot AYK1 + \bar{c}_{j,M-1}^{(4)} \cdot AYKM}{AYM} \quad (4.43)$$

olarak bulunur. Denklem (4.40)'ta $(N-4) \times (M-4)$ adet bilinmeyen vardır. Bu sebeple denklem $(N-4) \times (M-4)$ adet noktaya uygulanmalıdır. Bu noktalar Şekil 4.2'de iç noktalar olarak gösterilen $3 \leq i \leq N-2$ ve $3 \leq j \leq M-2$ noktalarıdır. Denklem (4.40) özdeğer problemi olarak yazılır.

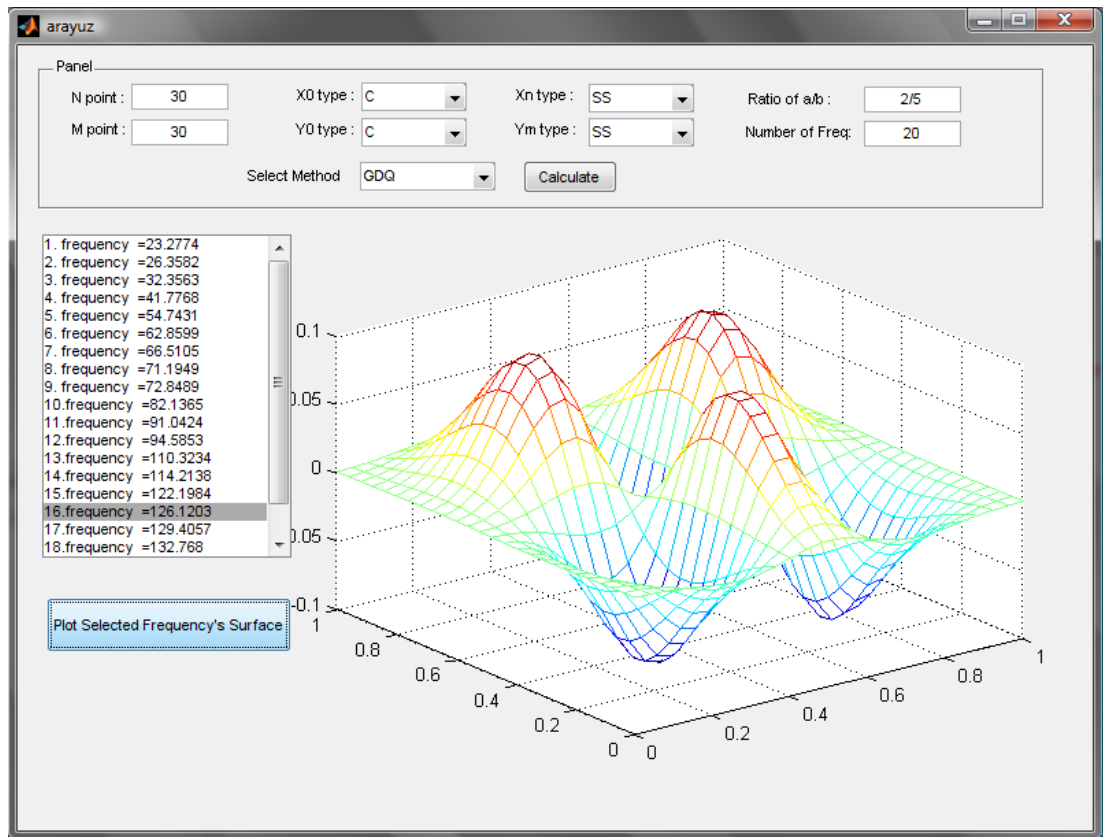
$$[\bar{W}] \frac{1}{\Omega^2} [W] \quad (4.44)$$

$$Det [\bar{W}] = 0 \quad (4.45)$$

$(N-4) \times (M-4)$ boyutundaki $[\bar{W}]$ katsayılar matrisinin determinantı sifıra eşitlenerek serbest titreşimlerin boyutsuz doğal frekansları elde edilir.

Bu ifadeler Ek A.6 daki Matlab program kodlarıyla, her bir işlem adımı için fonksiyon dosyaları oluşturularak çözülmüş, son olarak elde edilen çözümler başka

bir programda işleme sokularak istenilen sonuçlar elde edilmiştir. Kullanıcıya kolaylık sağlamak amacıyla bütün kodlar, istenilen sınır şartları, x ve y doğrultularında istenilen nokta sayısı, istenilen plak boyutu, istenilen frekans sayısı kullanıcı tarafından girilmek suretiyle boyutsuz doğal frekansları hesaplayan ve bu frekanslara karşılık gelen mod şekillerini gösteren bir arayüz oluşturulmuştur. Bulunan sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca kıyaslama yapabilmek amacıyla plak denklemi sonlu farklar metoduyla da analitik olarak çözülmüş, boyutsuz doğal frekanslar hesaplanmış ve yine DK metoduyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.3: Arayüz.

4.4 Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar metodu sayısal türev alma işlemine dayanmaktadır. Tüm fark yaklaşımları

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{1!}(y-x)f'(x) + \frac{1}{2!}(y-x)^2 f''(x) + \frac{1}{3!}(y-x)^3 f'''(x) + O((y-x)^4)$$

(4.46)

ile tanımlanan Taylor açılımı ile elde edilir.

$y = x + \Delta x$ olsun,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 f'''(x) + O((\Delta x)^4) \quad (4.47)$$

Bu ifade $f'(x)$ için çözüldüğünde,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \underbrace{\frac{1}{2}(\Delta x) f''(x) - \frac{1}{6}(\Delta x)^2 f'''(x) + O((\Delta x)^3)}_{hata} \quad (4.48)$$

Hata $O(\Delta x)$ çok küçük kabul edilirse,

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.49)$$

İleri sonlu farklar ifadesi elde edilir.

$y = x + \Delta x$ olsun,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(x) - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 f'''(x) + O((\Delta x)^4) \quad (4.50)$$

Bu ifade $f'(x)$ için çözümlerse,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} + \underbrace{\frac{1}{2}(\Delta x) f''(x) - \frac{1}{6}(\Delta x)^2 f'''(x) + O((\Delta x)^3)}_{hata} \quad (4.51)$$

Hata $O(\Delta x)$ çok küçük kabul edilirse,

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (4.52)$$

Geriye sonlu farklar ifadesi elde edilir.

Denklem (4.50) , denklem (4.47)'den türetilirse,

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2(\Delta x) f'(x) + \frac{1}{3}(\Delta x)^3 f'''(x) + O((\Delta x)^5) \quad (4.53)$$

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2(\Delta x)} - \underbrace{\frac{1}{6}(\Delta x)^2 f'''(x) + O((\Delta x)^4)}_{hata} \quad (4.54)$$

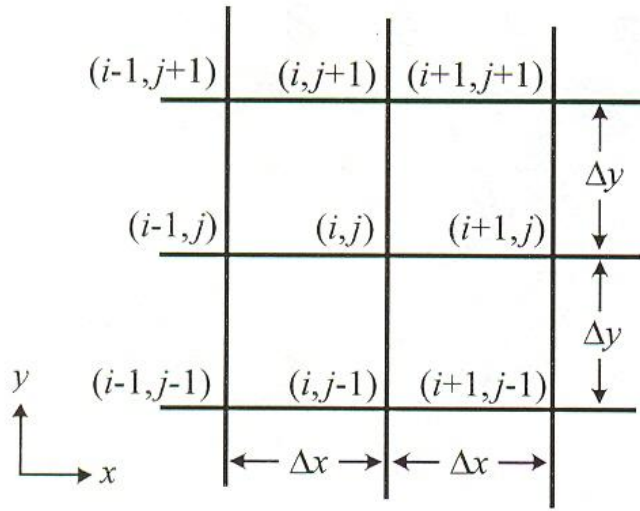
$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2(\Delta x)} \quad (4.55)$$

veya

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \quad (4.56)$$

Merkezi farklar denklemi elde edilir.

İki Boyutlu bölge üzerinde gösterilirse, u iki bağımsız değişkenli fonksiyon, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere, bu fonksiyonun x_i ve y_j noktasındaki değeri $u_{i,j}=(x_i,y_j)$ olur.



Şekil 4.4: İki boyutlu bölge.

$u(x,y)$ fonksiyonu Şekil 4.4'te gösterildiği gibi serbest değişkenleri Δx ve Δy gibi eşit aralıklarla sıralanan bir bölge üzerinde verilsin. x_i ve y_j noktası civarında $u_{i+1,j}$ ve $u_{i-1,j}$ değerleri,

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (4.57)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (4.58)$$

Burada,

$$O(\Delta x) = \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (4.59)$$

hata mertebesini vermektedir.

Denklem (4.57) ve denklem (4.58)'den aşağıdaki üç bağıntı çıkar.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (4.62)$$

Burada denklem (4.60) ileri sonlu farklar, denklem (4.61) geriye sonlu farklar ve denklem (4.62) merkezi farklar denklemdir. Benzer şekilde y ye göre kısmi türev aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O((\Delta y)^2) \quad (4.65)$$

İkinci türev ise denklem (4.57) ve denklem (4.58)'in toplanmasıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (4.66)$$

Fonksiyonun y ye göre ikinci kısmi türevi benzer şekilde aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2) \quad (4.67)$$

Karışık türev ise denklem (4.65)'te verilen birinci türevin merkezi fark bağıntısı kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\Delta y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j-1} \right] \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.69)$$

u fonksiyonunun x e göre üçüncü, dördüncü ve karışık türevlerinin hesaplanması ve sonuçları aşağıdaki gibidir.

Üçüncü türev,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i-1,j} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} - u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{2(\Delta y)^3} + O[(\Delta y)^2] \quad (4.72)$$

Karışık türev,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i-1,j} \right] + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + 2u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.74)$$

Karışık türev,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j-1} \right] + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + 2u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2} + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.76)$$

Dördüncü türev,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{i+1,j} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i-1,j} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} - 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{(\Delta y)^4} + O[(\Delta y)^2] \quad (4.79)$$

Karışık türev,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{i,j+1} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j-1} \right] + O[(\Delta x + \Delta y)^2] \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

(4.81)

Yukarıda verilen denklemlerden yararlanılarak , denklem (4.78), (4.79) ve (4.80) boyutsuz plak denklemi olan , denklem (4.20)'ye uygulanır ve özdeğer problemi formunda yazılarak çözülürse, sonlu farklar metoduyla plağın boyutsuz doğal frekansları elde edilir.

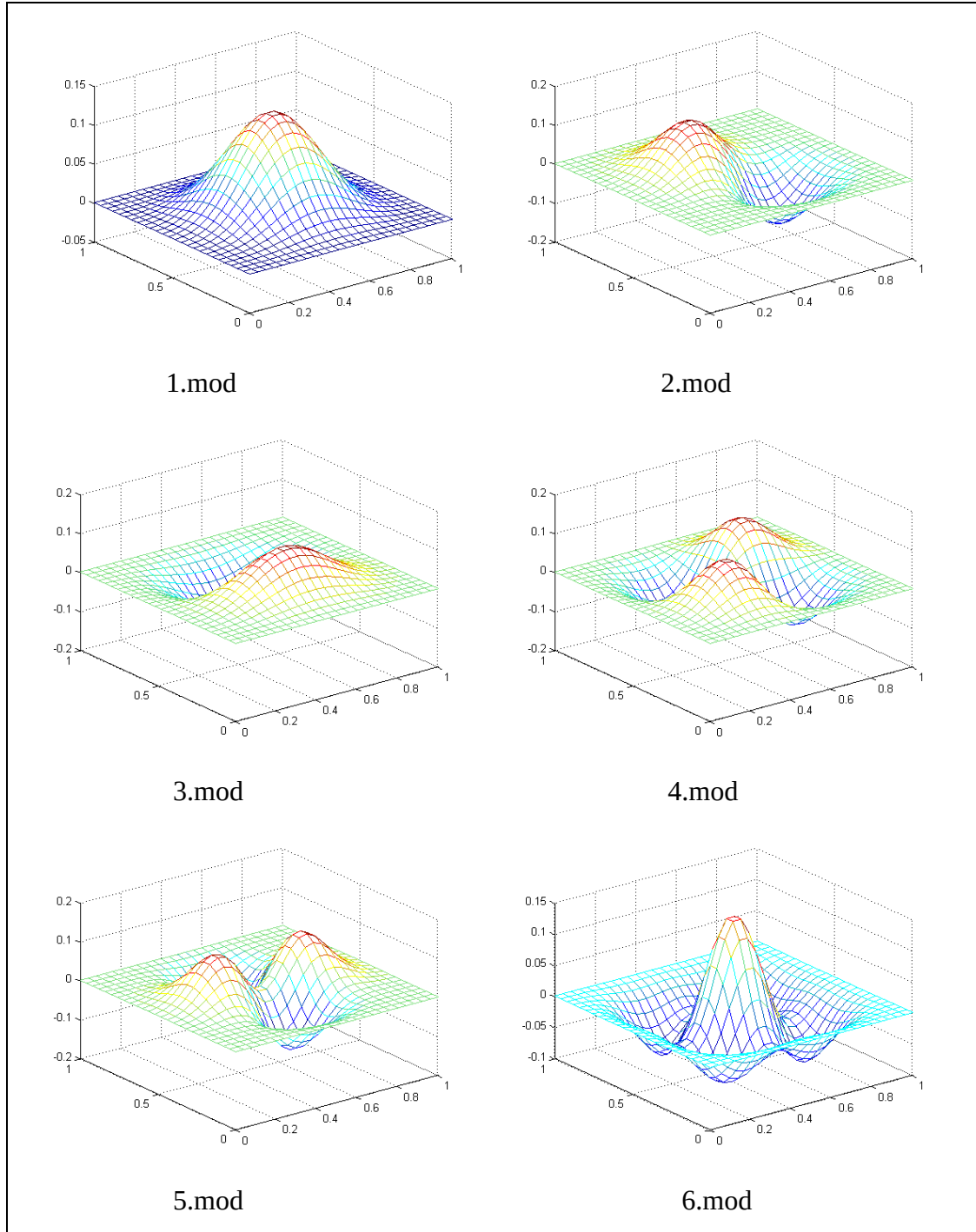
4.5 DK Metoduyla Elde Edilen Plak Doğal Frekansları ve Sonuçların Karşılaştırılması

Bölüm 4.3 te DK yöntemi ile uygulaması gösterilen plak titreşim problemi, bu tezin eki olarak CD'de verilen Matlab program kodları kullanılarak doğal frekanslar hesaplanmıştır. Daha önce giriş probleminde de görüldüğü gibi, hesaplama açısından zor olmasına rağmen daha hassas sonuçlar verdiği için plak titreşimleri incelenirken Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı kullanılmıştır. Çeşitli sınır şartları için nokta sayılarının artırılmasıyla, farklı boyutlardaki plak titreşimleri için bulunan sonuçlarla, kaynak [26] da Leissa tarafından analitik yöntemlerle bulunan sonuçların ve sonlu farklar yöntemiyle bulunan sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır. Çizelgelerde basit mesnet için “B” ankastre mesnet için “A” kullanılmıştır. Çizelge 4.4'te A-A-A-A plağın farklı boyutlarda ve farklı grid nokta sayılarıyla bulunan ilk beş doğal frekansı verilmiştir.

Çizelge 4.4: A-A-A-A dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).

$\lambda=a/b$		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
2/5	12×12	23.6447	27.8104	35.4141	46.4513	63.0906
	20×20	23.6438	27.8069	35.4172	46.6714	61.4954
	30×30	23.6438	27.8069	35.4171	46.6713	61.4950
	Kaynak[26]	23.648	27.817	35.446	46.702	61.554
	SFM	23.5199	27.6059	35.9854	45.7261	59.5995
2/3	12×12	27.0058	41.707	66.1303	66.4652	79.8194
	20×20	27.0049	41.7038	66.1243	66.5219	79.8049
	30×30	27.0049	41.7038	66.1243	66.5219	79.8049
	Kaynak[26]	27.010	41.716	66.143	66.552	79.850
	SFM	26.8556	41.3163	65.4128	65.4456	78.8434
1	12×12	35.9861	73.3988	73.3988	108.2305	131.4177
	20×20	35.9852	73.3939	73.3938	108.2165	131.5808
	30×30	35.9852	73.3938	73.3938	108.2165	131.5808
	Kaynak[26]	35.992	73.413	73.413	108.270	131.640
	SFM	35.7811	72.6312	72.6312	106.8901	129.2463
3/2	12×12	60.763	93.8408	148.7931	149.5466	179.5936
	20×20	60.7611	93.8335	148.7797	149.6743	179.5611
	30×30	60.7611	93.8335	148.7797	149.6742	179.5611
	Kaynak[26]	60.772	93.860	148.820	149.740	179.660
	SFM	60.425	92.9617	147.1789	147.2526	177.3977
5/2	12×12	147.7794	173.8151	221.3384	290.3207	394.3165
	20×20	147.7736	173.793	221.3573	291.6962	384.3461
	30×30	147.7736	173.793	221.3571	291.6958	384.344
	Kaynak[26]	147.800	173.850	221.540	291.890	384.710
	SFM	146.9996	172.5369	218.6586	285.7883	372.4966

A-A-A-A kare plakta ilk altı doğal frekansa karşılık gelen mod şekilleri Şekil 4.5'te gösterilmiştir.



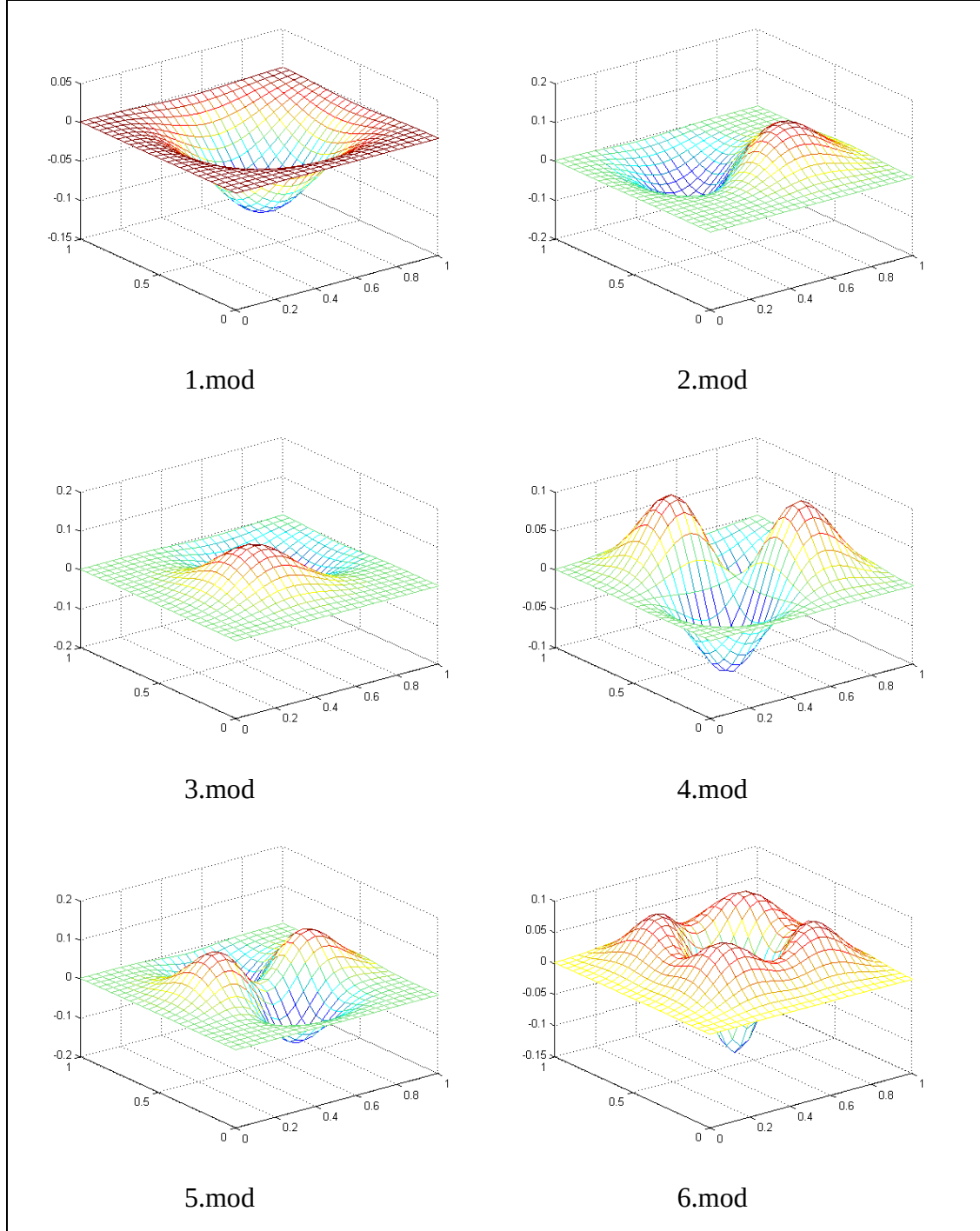
Şekil 4.5: A-A-A-A plak mod şekilleri.

Çizelge 4.5'te A-A-B-B plağın farklı boyutlarda ve farklı grid nokta sayılarıyla bulunan ilk beş doğal frekansı verilmiştir.

Çizelge 4.5: A-A-B-B dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).

$\lambda=a/b$		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
2/5	12×12	16.848	21.3575	29.2008	40.2072	51.454
	20×20	16.8475	21.3573	29.2255	40.4933	51.4504
	30×30	16.8475	21.3573	29.2255	40.4933	51.4504
	Kaynak[26]	16.849	21.363	29.236	40.509	51.457
	SFM	16.7979	21.2583	28.9638	39.8469	51.0875
2/3	12×12	19.9516	34.0201	54.3661	57.3759	67.7896
	20×20	19.9512	34.0199	54.3636	57.5077	67.7898
	30×30	19.9512	34.0199	54.3636	57.5077	67.7898
	Kaynak[26]	19.952	34.024	54.370	57.517	67.815
	SFM	19.8899	33.8183	53.9857	56.8441	67.2609
1	12×12	27.0544	60.5396	60.7877	92.8338	114.2017
	20×20	27.0541	60.5385	60.7861	92.8361	114.5563
	30×30	27.0541	60.5385	60.7861	92.8361	114.5563
	Kaynak[26]	27.056	60.544	60.791	92.865	114.570
	SFM	26.9695	60.1338	60.3857	92.1031	113.1115
3/2	12×12	44.891	76.5452	122.3234	129.0957	152.5265
	20×20	44.8903	76.5448	122.3182	129.3924	152.527
	30×30	44.8903	76.5448	122.3181	129.3924	152.527
	Kaynak[26]	44.893	76.554	122.330	129.410	152.580
	SFM	44.7522	76.0911	121.4677	127.8992	151.337
5/2	12×12	105.3002	133.4843	182.5049	251.2952	321.5875
	20×20	105.297	133.4833	182.6597	253.083	321.5651
	30×30	105.297	133.4833	182.6596	253.083	321.565
	Kaynak[26]	105.310	133.520	182.730	253.180	321.600
	SFM	104.987	132.8643	181.024	249.043	319.2972

A-A-B-B kare plakta ilk altı doğal frekansa karşılık gelen mod şekilleri Şekil 4.6 da gösterilmiştir.



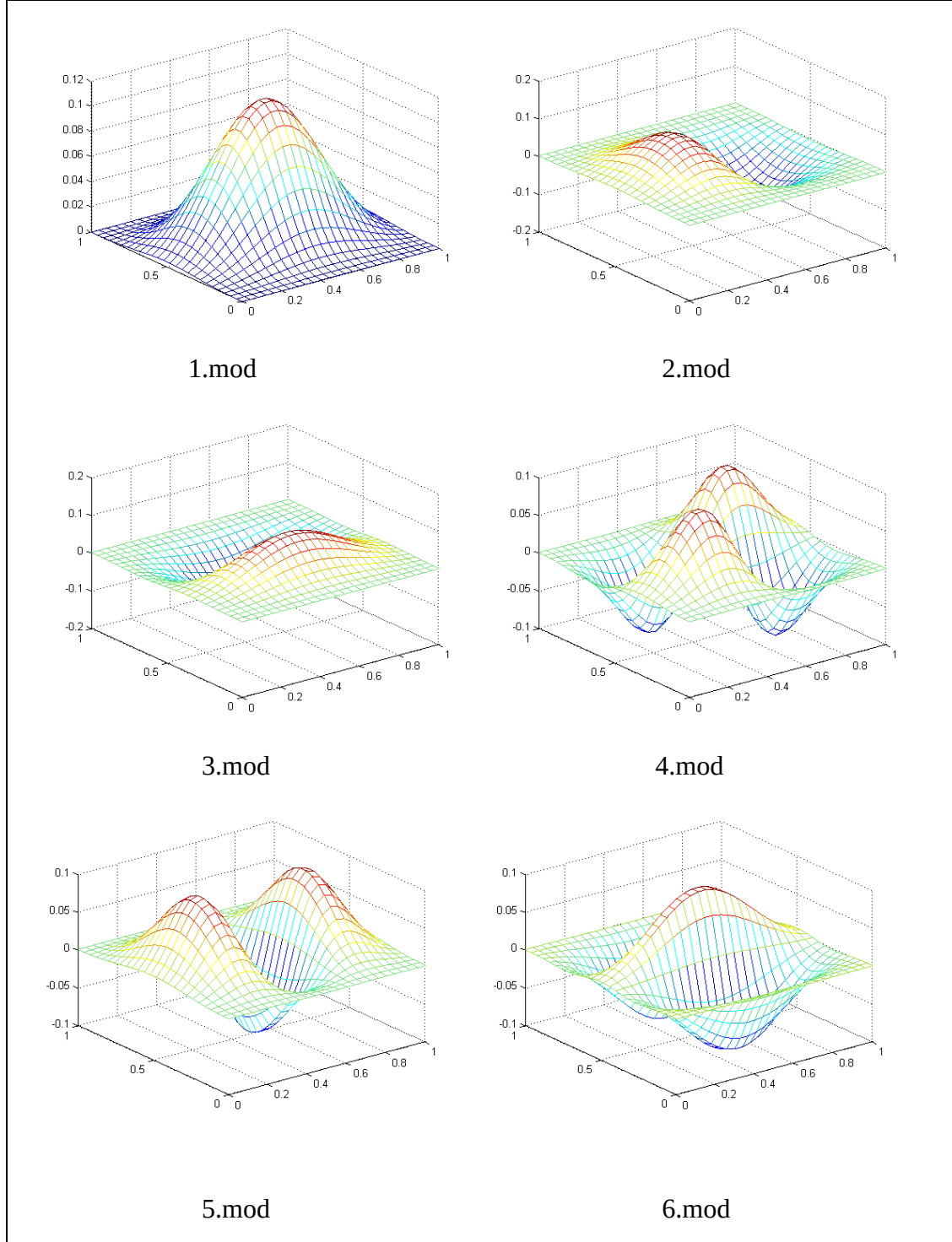
Şekil 4.6: A-A-B-B plak mod şekilleri.

Çizelge 4.6'da B-A-B-A plağın farklı boyutlarda ve farklı grid nokta sayılarıyla bulunan ilk beş doğal frekansı verilmiştir.

Çizelge 4.6: B-A-B-A dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).

$\lambda=a/b$		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
2/5	12×12	12.135	18.9659	27.9537	40.483	41.3849
	20×20	12.1347	18.3647	27.9657	40.75	41.3782
	30×30	12.1347	18.3647	27.9657	40.75	41.3782
	Kaynak[26]	12.135	18.365	27.966	40.750	41.378
	SFM	12.104	18.2378	27.5834	39.8328	41.1976
2/3	12×12	17.3731	35.3456	45.433	61.9869	62.3209
	20×20	17.373	35.3445	45.4294	62.0544	62.3131
	30×30	17.373	35.3445	45.4294	62.0544	62.3131
	Kaynak[26]	17.373	35.345	45.429	62.054	62.313
	SFM	17.3099	35.0269	45.2164	61.042	61.8296
1	12×12	28.9504	54.745	69.3293	94.5898	101.9498
	20×20	28.9509	54.7431	69.327	94.5853	102.2162
	30×30	28.9509	54.7431	69.327	94.5853	102.2162
	Kaynak[26]	28.951	54.743	69.327	94.585	102.216
	SFM	28.8255	54.4716	68.6419	93.7316	101.3142
3/2	12×12	56.3481	78.9847	122.9498	146.2733	170.1169
	20×20	56.3481	78.9836	123.1719	146.2677	170.1112
	30×30	56.3481	78.9836	123.1719	146.2677	170.1112
	Kaynak[26]	56.348	78.984	123.172	146.268	170.111
	SFM	56.0849	78.581	122.1585	144.759	168.4314
5/2	12×12	145.484	164.7392	202.093	258.9896	376.3007
	20×20	145.4839	164.7387	202.2271	261.1052	342.147
	30×30	145.4839	164.7387	202.2271	261.1053	342.1442
	Kaynak[26]	145.484	164.339	202.227	261.105	342.144
	SFM	144.7836	163.9074	200.8467	258.1576	335.7833

B-A-B-A kare plakta ilk altı doğal frekansa karşılık gelen mod şekilleri Şekil 4.7’de gösterilmiştir.



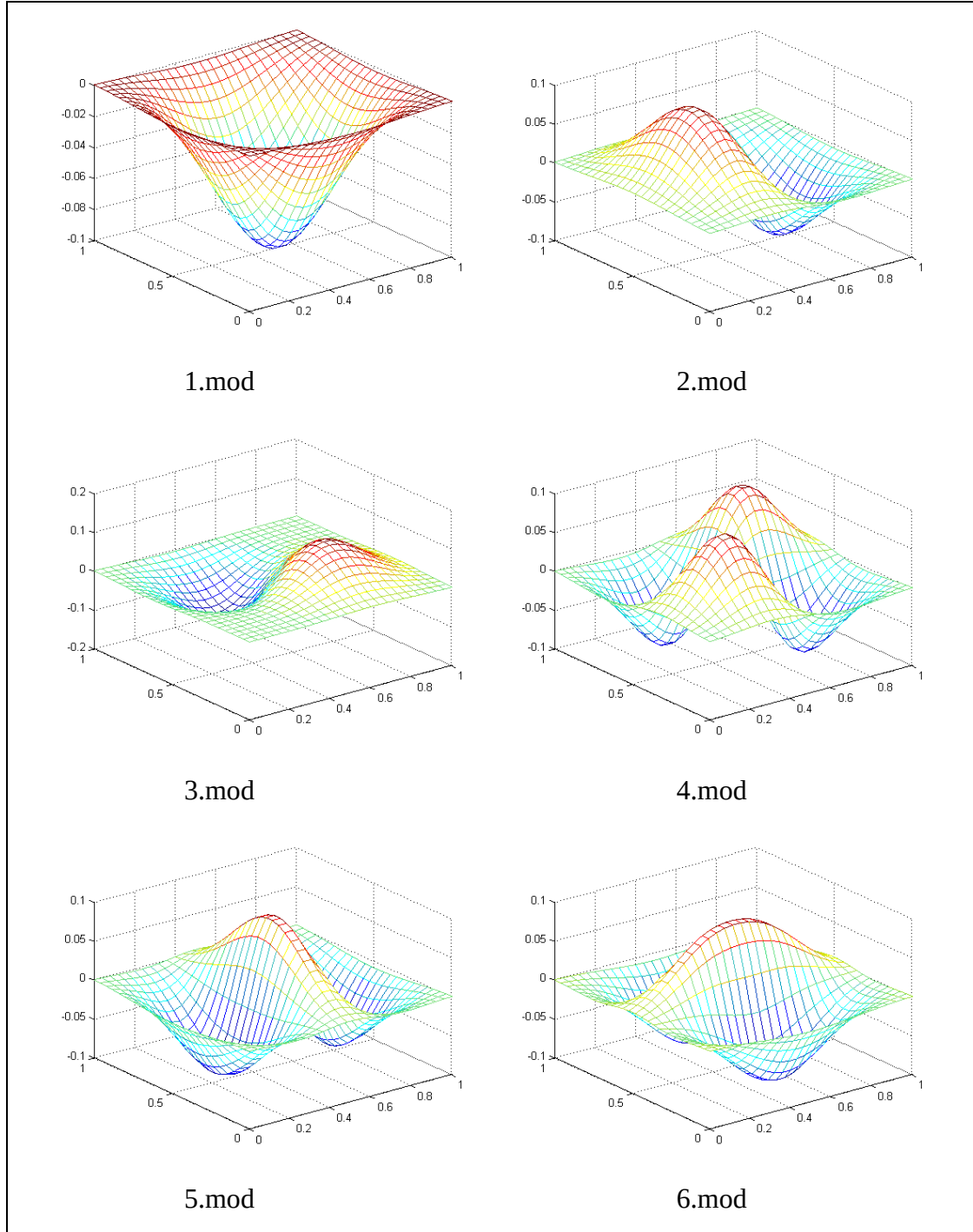
Şekil 4.7: B-A-B-A plak mod şekilleri.

Çizelge 4.7’de B-B-B-B plağın farklı boyutlarda ve farklı grid nokta sayılarıyla bulunan ilk beş doğal frekansı verilmiştir.

Çizelge 4.7: B-B-B-B dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları (Ω).

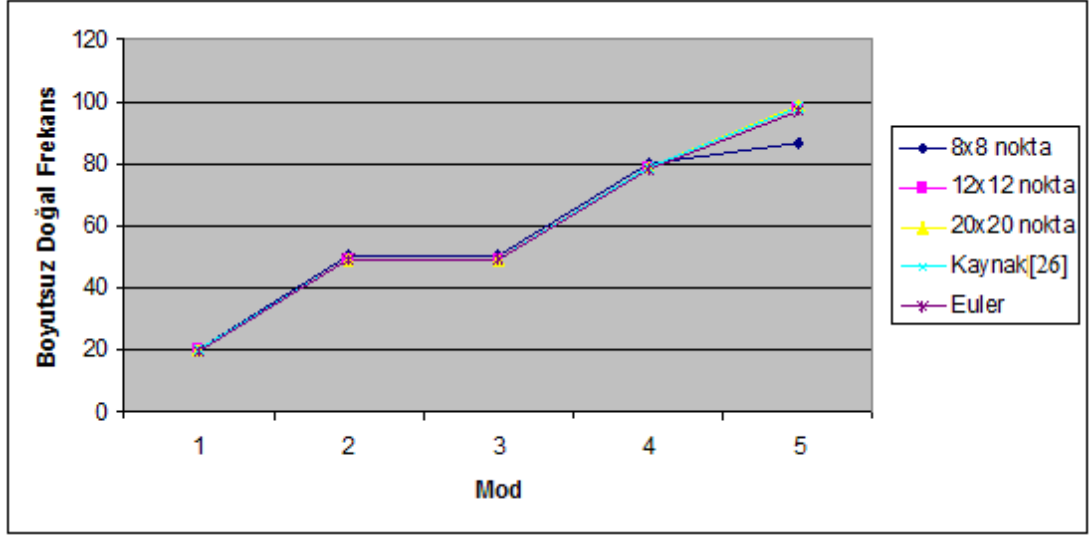
$\lambda=a/b$		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
2/5	12×12	11.4487	16.1863	24.0529	34.7326	41.0593
	20×20	11.4487	16.1862	24.0818	35.1358	41.0576
	30×30	11.4487	16.1862	24.0818	35.1358	41.0576
	Kaynak[26]	11.4487	16.1862	24.0818	35.1358	41.0576
	SFM	11.4375	16.1518	23.9475	34.7333	40.9018
2/3	12×12	14.2561	27.4161	43.8665	49.2377	57.0258
	20×20	14.2561	27.4156	43.8649	49.348	57.0244
	30×30	14.2561	27.4156	43.8649	49.348	57.0244
	Kaynak[26]	14.2561	27.4156	43.8649	49.3480	57.0244
	SFM	14.2422	27.3374	43.7064	48.9921	56.8017
1	12×12	19.7392	49.3494	49.3494	78.9568	98.4154
	20×20	19.7392	49.348	49.348	78.9568	98.696
	30×30	19.7392	49.348	49.348	78.9568	98.696
	Kaynak[26]	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960
	SFM	19.7199	49.1842	49.1842	78.6485	97.9073
3/2	12×12	32.0762	61.682	98.6996	110.7848	128.3081
	20×20	32.0762	61.685	98.696	111.033	128.3049
	30×30	32.0762	61.685	98.696	111.033	128.3049
	Kaynak[26]	32.0762	61.6850	98.6960	111.0330	128.3049
	SFM	32.0949	61.5091	98.3395	110.2323	127.8037
5/2	12×12	71.5546	101.1641	150.3306	217.0788	256.6204
	20×20	71.5546	101.1634	150.5115	219.5987	256.6097
	30×30	71.5546	101.1634	150.5115	219.5987	256.6097
	Kaynak[26]	71.5564	101.1634	150.5115	219.5987	256.6092
	SFM	71.4847	100.949	149.6721	217.0829	255.6364

B-B-B-B kare plakta ilk altı doğal frekansa karşılık gelen mod şekilleri Şekil 4.8’de gösterilmiştir.



Şekil 4.8: B-B-B-B plak mod şekilleri.

Yukarıdaki çizelgelerde de görüldüğü gibi 12×12 nokta sayısı ile oldukça hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca nokta sayısı artırıldıkça sonuçların daha çok yakınsadığı belirlenmiştir. Aşağıdaki grafikte dört kenarı basit mesnetli kare plağın DKM ile nokta sayısına, literatürdeki sonuçlara ve sonlu farklar yöntemine göre doğal frekans değerleri verilmiştir.



Şekil 4.9: Mod – Doğal frekans grafiği.

Şekil 4.9'daki grafikte görüldüğü gibi nokta sayısı arttıkça bulunan sonuçların hassasiyeti de artmıştır. Sonlu farklar metoduna göre ve verilen literatür sonuçlarına göre oldukça yakın değerler bulunmuştur.

DK metoduyla, x ve y yönünde 30×30 nokta alınarak $\lambda = 1/3$ oranındaki dikdörtgen plağın ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının çeşitli kombinasyonları için elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede verilmiştir. İlk 10 boyutsuz doğal frekanslar hesaplanmış, sonlu farklar metoduyla bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.8: Dikdörtgen plağın boyutsuz doğal frekansları(Ω).

Mod	B-B-B-A		B-B-A-B	
	DKM	SFM	DKM	SFM
1	11.1411	11.1247	16.252	16.209
2	14.8657	14.811	18.9012	18.8434
3	20.9015	20.7286	23.6463	23.5236
4	29.1686	28.7235	30.6681	30.366
5	39.6358	38.6678	40.0152	39.3297
6	40.6611	40.4974	50.9093	50.289
7	44.1965	43.9886	51.6743	50.5571
8	50.0535	49.7214	53.7758	53.4059
9	52.2932	50.4325	58.6464	58.2087
10	58.1956	57.5867	65.6157	63.0835
Mod	A-A-A-B		A-B-A-B	
	DKM	SFM	DKM	SFM
1	23.0848	22.9702	22.9938	22.8826
2	25.4169	25.2724	25.0436	24.9181
3	29.7873	29.5434	28.9509	28.7673
4	36.5244	36.0333	35.1038	34.754
5	45.748	44.7585	43.6922	42.9742
6	57.4418	55.5812	54.7431	53.3399
7	62.5553	61.8876	62.4955	61.8344
8	65.2459	64.5369	65.0079	64.3274
9	69.8573	68.3028	68.2148	65.6751
10	71.5768	69.0369	69.327	68.5804
Mod	A-A-A-A		B-B-B-B	
	DKM	SFM	DKM	SFM
1	23.1963	23.0766	10.9662	10.9555
2	25.8593	25.6878	14.2561	14.2293
3	30.7417	30.4175	19.7392	19.643
4	38.0936	37.4249	27.4156	27.1331
5	47.965	46.6492	37.2852	36.6118
6	60.3041	57.9115	40.575	40.4198
7	62.6217	61.9462	43.8649	43.6936
8	65.509	64.7654	49.348	47.9649
9	70.4385	69.53	49.348	49.1073
10	75.0406	70.9977	57.0244	56.5974

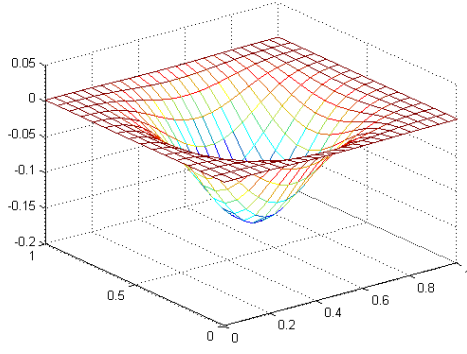
Çizelge 4.8’de de görüldüğü gibi DK metodu ile sonlu farklar metodu karşılaştırıldığında oldukça yakın sonuçlar alınmıştır. Burada ilk 10 mod x ve y doğrultusunda 30×30 nokta için hesaplanmıştır.

Buraya kadar olan uygulamalarda x ve y eksenini için eşit nokta sayıları kullanılmıştır ancak bu çalışmada x ve y eksenlerindeki noktalar eşit alınmadığı zaman bunun doğal frekanslara olan etkileri de incelenmiştir. Dört kenarı ankastre ve dört kenarı basit mesnetli kare plak için x ve y ekseninde sırasıyla 30 ve 20 nokta sayısı alınarak çözüm yapılmıştır. Bu durumda boyutları 26×16 olan [S] matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek özdeğer problemi çözülmüş, ilk beş mod literatür sonuçlarıyla ve sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

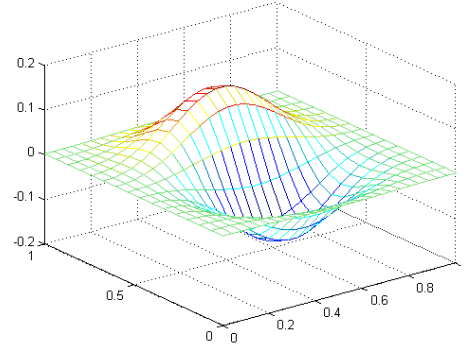
Çizelge 4.9: 30×20 nokta ile bulunan boyutsuz doğal frekanslar (Ω).

Mod	A-A-A-A		
	DKM	Kaynak [26]	SFM
1	35.9852	35.992	35.6492
2	73.3938	73.413	71.7904
3	73.3938	73.413	72.4974
4	108.2165	108.270	106.06
5	131.5808	131.640	126.7382
Mod	B-B-B-B		
	DKM	Kaynak [26]	SFM
1	19.7392	19.7392	19.7071
2	49.348	49.3980	48.9799
3	49.348	49.3980	49.1714
4	78.9568	78.9568	78.4442
5	98.696	98.696	96.8799

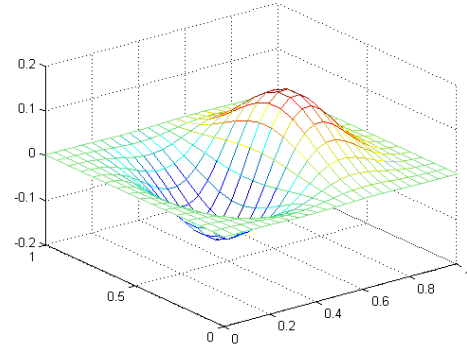
Çizelge 4.9’da gösterildiği gibi noktaları çözüm için yeterli sayıda almak kaydıyla , x ve y yönünde farklı sayılarda nokta almanın DK metodunda herhangi bir çözümsüzlüğe neden olmadığı ve sonuçların yeterli hassasiyette olduğu görülmüştür. Bu şekildeki çözünürlüğün x ve y eksenlerinde farklı olduğu durumlardaki mod şekilleri dört kenarı ankastre ve dört kenarı basit mesnetli kare plak için sırasıyla Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de gösterilmiştir.



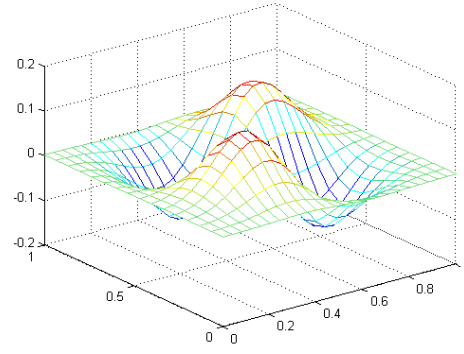
1.mod



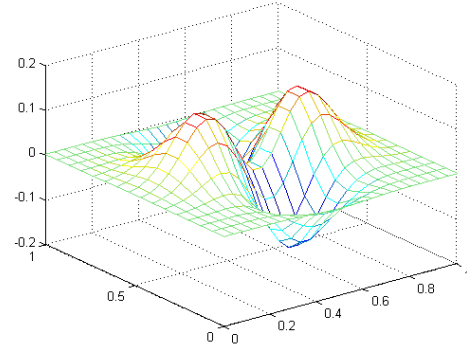
2.mod



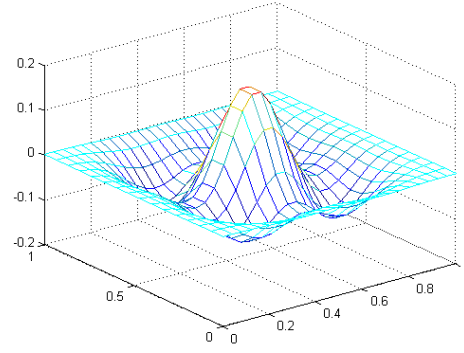
3.mod



4.mod

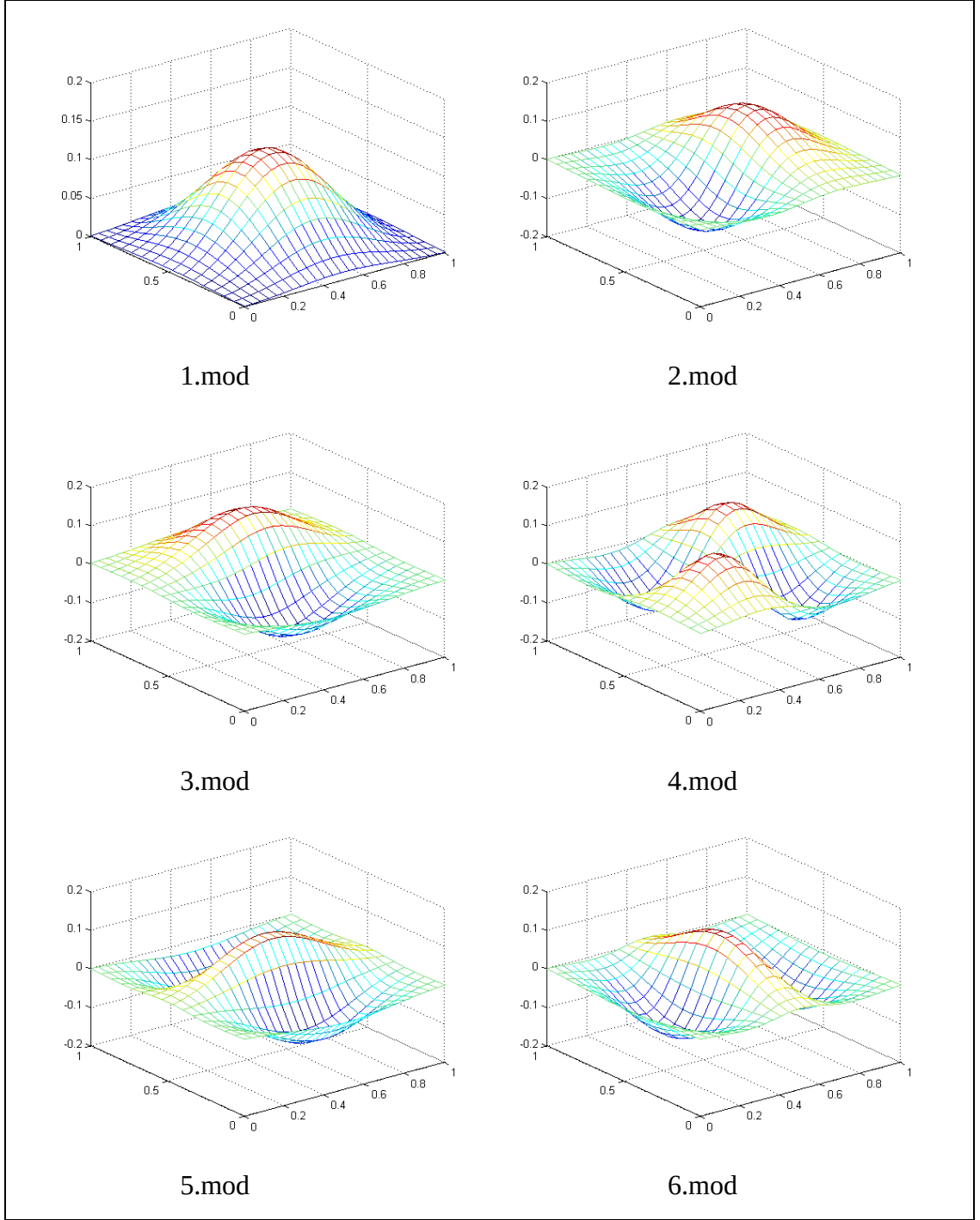


5.mod



6.mod

Şekil 4.10: 30×20 nokta için A-A-A-A plak mod şekilleri.



Şekil 4.11: 30×20 nokta için B-B-B-B plak mod şekilleri.

Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de görüldüğü gibi 30×20 nokta için çözüm yapıldığında kaynak [26] ve sonlu farklar metoduna göre çok yakın sonuçlar elde edilmesine rağmen, mod şekilleri farklı çıkmıştır. Ayrıca noktalar eşit alındığında daha önceden görülen kare mesh yapıları yerine bu problemde x ve y yönünde nokta sayısı eşit alınmadığı için dikdörtgen mesh yapıları görülmüştür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada plakların titreşim karakteristikleri ele alınmıştır. Bu konularda yapılan daha önceki çalışmalar incelenerek plak ve kiriş teorileri için yapılan kabuller ve çözüm yöntemleri özetlenmiştir.

Plak denklemine göre daha basit bir uygulama olması nedeniyle öncelikle kiriş problemi ele alınmıştır. Her bir sınır şartı kiriş denklemini sağlayacak şekilde A-A, A-B ve B-B mesnetli kiriş için hem lineer grid dağılımı hem de Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı kullanılarak DKM denkleme uygulanmış, Matlab programında yazılan bir kod vasıtasıyla ağırlık katsayıları iki tür nokta dağılımı için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Başka bir program dosyasında, hesaplanan ağırlık katsayıları denkleme dahil edilerek, farklı sınır şartları ve farklı nokta sayıları için çözülmüştür. Doğal frekanslar hesaplanmış, A-A kiriş için mod şekilleri gösterilmiştir. Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımının lineer grid dağılımına göre daha hassas sonuçlar verdiği görülerek plak titreşimleri için Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımının kullanılması uygun görülmüştür.

Plak titreşimlerinin hesaplanabilmesi için farklı sınır şartları plak denklemine dahil edilerek DKM plak denklemine uygulanmıştır. Matlab programında farklı sınır şartları için fonksiyon dosyaları oluşturulmuş, bu hesaplanan verilerin plak denkleminde kullanılabilmesi için bütün bu veriler başka bir program dosyasına aktarılmış ve doğal frekanslar hesaplanmıştır. Kullanıcı için kolaylık olması amacıyla değiştirilebilecek bütün parametrelerin (x ve y yönünde alınan grid nokta sayısı, plak boyutu, hesaplanacak frekans sayısı vs. gibi) klavyeden kullanıcı tarafından girilmesiyle, frekansları hesaplayan ve mod şekillerini gösteren bir arayüz oluşturulmuştur.

A-A-A-A, A-A-B-B, B-A-B-A, B-B-B-B mesnetli, boyutları $2/5$, $2/3$, 1 , $3/2$ ve $5/2$ oranındaki plakların 12×12 , 20×20 , 30×30 grid nokta sayısı alınarak DKM ile doğal frekansları hesaplanmış, literatür sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Ayrıca başka bir sayısal analiz yöntemi olan sonlu farklar metodu ile de plak denklemi çözülmüş, doğal frekanslar bu yöntem ile de hesaplanıp üç sonuç karşılaştırılmış ve sonuçların

oldukça yakın olduğu, çoğu durumda hata miktarının %0.00 olduğu görülmüştür. Plak titreşimlerine ait mod şekilleri gösterilmiştir. Ayrıca nokta sayılarının artmasıyla yöntemin daha hassas sonuçlar verdiği belirlenmiş ve grafikte gösterilmiştir.

Ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarının bütün kombinasyonları için yöntemin doğru sonuç verip vermeyeceğini anlayabilmek amacıyla boyutları 1/3 oranındaki dikdörtgen plak için bütün sınır şartları uygulanmış ilk 10 doğal frekans hesaplanmış ve literatürde bulunmayan sonuçlar olduğu için sonlu farklar metoduyla hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmış ve iki yöntemle de hesaplanan sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Hata miktarının ilk frekans değerlerinde çoğunlukla %0.5 civarında olduğu en fazla hata miktarının ise 10. frekans değerinde ve %5.38 oranında olduğu görülmüştür.

Son olarak, daha önceden x ve y yönünde farklı grid sayıları kullanılarak yapılan çözümlerin olmaması bu durumun sonucu nasıl etkileyeceğini düşündürmüştür ve bunu görmek amacıyla 30×20 grid nokta sayısı alınarak A-A-A-A ve B-B-B-B mesnetli kare plak için çözüm yapılmış, literatür sonuçlarıyla ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır. Hata miktarının çoğunlukla %0.00 oranında olduğu görülmüştür. Buna göre çözüm için yeterli nokta sayısı alınması koşuluyla farklı koordinat yönlerinde farklı grid nokta sayılarının kullanılmasının çözümü etkilemediği sonucuna varılmıştır. Ayrıca bu durumdaki mod şekilleri incelenmiş ve frekanslar x ve y yönünde eşit sayıda grid noktası alınan durum ile aynı bulunmasına rağmen mod şekilleri farklı çıkmıştır. Bu duruma ait mod şekilleri gösterilmiştir.

Akışkanlar ve katı cisimler mekaniği, sürekli ortamlar mekaniği gibi uygulamalı alanlarda diferansiyel denklemlerin çözümü büyük önem taşımaktadır. Günümüzde sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodu daha hassas sonuçlar vermekte ancak yüksek sayıda grid nokta gerektirmektedir. Bu ise çözüm için gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ihtiyaçlarını ve analiz süresini arttırmaktadır. Eşit grid nokta sayısı kullanıldığında DK metodunun, sonlu farklar metoduna göre daha hassas sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Bu yöntem kabuk gibi 3 boyutlu yapıların denklemleri, statik dinamik ve burkulma analizleri, termal analizler veya lineer olmayan analizler için kullanılmakta ve geliştirilmektedir. Metodun görünen tek dezavantajı çok yüksek grid nokta sayıları için ağırlık katsayılarının hesaplanmasında

oluşan güçlüklerdir ve bu ağırlık katsayılarının çok büyük boyutta matrisler olması işlem süresini uzatmakta hatta bazı durumlarda hesaplanamamasına sebep olmaktadır. Ağırlık katsayılarının hesabı için daha basit yaklaşımlar geliştirilerek yöntemin daha yaygın uygulama alanlarına sahip olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bellman, R., Kashef, B.G., and Casti, J.**, 1972. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computer Physics*, **10**, 40-52.
- [2] **Mingle, J. O.**, 1977. The method of differential quadrature for transient nonlinear diffusion, *Journal of Mathematical Analysis Applied*, **60**, 559-569.
- [3] **Civan, F., and Sliepcevich, C. M.**, 1983. Application to differential quadrature to transport processes, *Journal of Mathematical Analysis Applied*, **93**, 711-724.
- [4] **Civan, F., and Sliepcevich, C. M.**, 1984. Differential quadrature for multi-dimensional problems, *Journal of Mathematical Analysis Applied*, **101**, 423-443.
- [5] **Jang, S. K., Bert, C.W., and Striz, A.G.**, 1989. Application of differential quadrature to static analysis of structural components, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **28**, 561-577.
- [6] **Quan, J. R., Chang, C. T.**, 1989. New insights in solving distributed system equations by the quadrature methods, *Computers and chemical engineering*, **13**, 779-788.
- [7] **Wen, C., and Yu, Y.**, 1993a. Calculation and analysis of weighting coefficient matrices in differential quadrature method, *Computational Engineering*, 157-162.
- [8] **Shu, C., and Richards, B. E.**, 1990. High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential quadrature, *Advances in Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*, **2**, 978-985.
- [9] **Shu, C.**, 1991. Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation, *Ph.D. thesis*, University of Glasglow.
- [10] **Shu, C., and Richards, B. E.**, 1992a. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible navier-stokes equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **15**, 791-798.
- [11] **Shu, C., and Richards, B. E.**, 1992b. Parallel simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature, *Computing Systems in Engineering*, **3**, 271-281.
- [12] **Du, H., Lim, M. K., and Lin, R. M.**, 1994. Application of generalized differential quadrature method to structural problems, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1881-1896.

- [13] **Du, H., Lim, M. K., and Lin, R. M.,** 1995. Application of differential quadrature to vibration analysis, *Journal of Sound and Vibration*, **181**, 279-293.
- [14] **Bert, C. W., Jang, S. K., and Striz, A. G.,** 1988. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AA Journal*, **26**, 612-618.
- [15] **Bert, C. W., Jang, S. K., and Striz, A. G.,** 1993. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates, *International Journal of Solids and Structures*, **30**, 1737-1744.
- [16] **Bert, C. W., Jang, S. K., and Striz, A. G.,** 1994. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method, *Acta Mechanica*, **102**, 11-24.
- [17] **Wang, X., and Bert, C. W.,** 1993. A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analysis of beams and plates, *Journal of Sound and Vibration*, **162**, 566-572.
- [18] **Wang, X., Striz, A. G., and Bert, C. W.,** 1993. Free vibration analysis of annular plates by the DQ method, *Journal of Sound and Vibration*, **164**, 173-175.
- [19] **Wang, X., Striz, A. G., and Bert, C. W.,** 1994. Buckling and vibration analysis of skew plates by the differential quadrature methods, *AIAA Journal*, **32**, 886-888.
- [20] **Laura, P. A. A., and Gutierrez, R. H.,** 1993. Analysis of vibrating Timoshenko beams using the method of differential quadrature, *Shock and Vibration*, **1**, 89-93.
- [21] **Wen, C., and Yu, Y.,** 1993b. Differential quadrature method for high order boundary value problems, *Computational Engineering*, 163-168.
- [22] **Malik, M., and Bert, C. W.,** 1996. Implementing multiple boundary conditions in the DQ solution of higher order PDE's: Application to free vibration of plates, *International Journal for numerical methods in engineering*, **39**, 1237-1258.
- [23] **Shu, C.,** 1997. Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates, *Solid Structures*, **34**, 819-835.
- [24] **Shu, C.,** 2000. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer-Verlag, London.
- [25] **Zong, Z., Zhang, Y.,** 2009. *Advanced Differential Quadrature Methods*, CRC Press, London.
- [26] **Leissa, A. W.,** 1973. The free vibration of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, **31**, 257-393.
- [27] **Leissa, A. W.,** 1969. *Vibration of Plates*, Ohio State University, Columbus, Ohio
- [28] **Rao, S. S.,** 2003. *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall.

EKLER

EK A.1 : DKM Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı için ağırlık katsayılarını hesaplayan MATLAB program kodu

EK A.2 : DKM lineer grid dağılımı için ağırlık katsayılarını hesaplayan MATLAB program kodu

EK A.3 : A-A giriş için doğal frekansları hesaplayan MATLAB program kodu

EK A.4 : A-B giriş için doğal frekansları hesaplayan MATLAB program kodu

EK A.5 : B-B giriş için doğal frekansları hesaplayan MATLAB program kodu

ve son olarak plak doğal frekanslarını hesaplayan MATLAB program kodu bu tezin eki olarak CD'ye kaydedilmiştir.

EK A.1

```
function [A]=DQM(N)

% chebyshev-gauss-lobatto grid noktaları kullanılarak DQM ile
% 1.dereceden türev için
% ağırlık katsayılarını bulan fonksiyon

% 2.dereceden türev için B=A*A
% 3.dereceden türev için C=A*B
% 4.dereceden türev için D=A*C olarak bulunur.

for ii=1:N
    X(ii)=0.5*(1-cos((ii-1)*pi/(N-1)));
end

M=1;
for ii=1:N
    for jj=1:N
        for kk=1:N
            if ii~=jj
                a1=(1/(X(jj)-X(ii)));
                for k=1:N
                    if k~=ii & k~=jj
                        M=M*(X(ii)-X(k))/(X(jj)-X(k));
                    end
                end
                a(ii,jj)=a1*M;
                M=1;
            end
        end
    end

    end

A=a;

satirtoplam=sum(A,2);
for ii=1:N
    A(ii,ii)=-satirtoplam(ii);
end

A=A;
```


EK A.2

```
function [A]=DQM_linear(N)

% linear grid noktaları kullanılarak DQM ile 1.dereceden türev için
% ağırlık katsayılarını bulan fonksiyon....

% 2.dereceden türev için B=A*A
% 3.dereceden türev için C=A*B
% 4.dereceden türev için D=A*C olarak bulunur.

for ii=1:N
    X(ii)=(ii-1)/(N-1);
end

M=1;
for ii=1:N
    for jj=1:N
        for k=1:N
            if ii~=jj
                a1=(1/(X(jj)-X(ii)));
                for k=1:N
                    if k~=ii & k~=jj
                        M=M*(X(ii)-X(k))/(X(jj)-X(k));
                    end
                end
                a(ii,jj)=a1*M;
                M=1;
            end
        end
    end
end

A=a;

satirtoplam=sum(A,2);
for ii=1:N
    A(ii,ii)=-satirtoplam(ii);
end

A=A;
```

EK A.3

```
% N=30 AA giriş
clear all
clc
N=30;
A=DQM(N);
B=A*A;
C=A*B;
D=A*C;

sat1=A(1,:);
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];

sat2=A(N,:);
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];

M=D;
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];

sut1=D(:,2);
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];

sut2=D(:,N-1);
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];

AXK1=sat1*A(N,N-1)-A(1,N-1)*sat2;
AXKN=A(1,2)*sat2-sat1*A(N,2);
AXN=A(N,2)*A(1,N-1)-A(1,2)*A(N,N-1);

C3=M-((sut1*AXK1+sut2*AXKN)/-AXN);

format long
sqrt(eig(C3))
```

EK A.4

```
% N=30 AB giriş
clear all
clc
N=30;
A=DQM(N);
B=A*A;
C=A*B;
D=A*C;

sat1=A(1,:);
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];

sat2=B(N,:);
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];

M=D;
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];

sut1=D(:,2);
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];

sut2=D(:,N-1);
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];

AXK1=sat1*B(N,N-1)-A(1,N-1)*sat2;
AXKN=A(1,2)*sat2-sat1*B(N,2);
AXN=B(N,2)*A(1,N-1)-A(1,2)*B(N,N-1);

C3=M-((sut1*AXK1+sut2*AXKN)/-AXN);

format long
sqrt(eig(C3))
```

EK A.5

```
% N=30 BB giriş
clear all
clc
N=30;
A=DQM(N);
B=A*A;
C=A*B;
D=A*C;

sat1=B(1,:);
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];
sat1(:,1)=[];
sat1(:,end)=[];

sat2=B(N,:);
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];
sat2(:,1)=[];
sat2(:,end)=[];

M=D;
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];
M(1,:)=[];
M(end,:)=[];
M(:,1)=[];
M(:,end)=[];

sut1=D(:,2);
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];
sut1(1,:)=[];
sut1(end,:)=[];

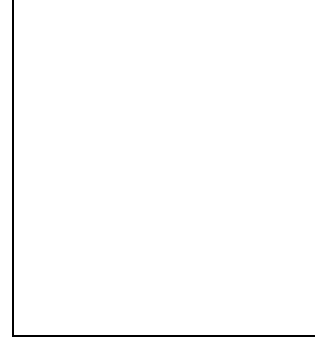
sut2=D(:,N-1);
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];
sut2(1,:)=[];
sut2(end,:)=[];

AXK1=sat1*B(N,N-1)-B(1,N-1)*sat2;
AXKN=B(1,2)*sat2-sat1*B(N,2);
AXN=B(N,2)*B(1,N-1)-B(1,2)*B(N,N-1);

C3=M-((sut1*AXK1+sut2*AXKN)/-AXN);

format long
sqrt(eig(C3))
```

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Elanur Barış

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya 02.01.1984

Adres: 52/71 sokak. No:5 D:5 Güzelıah/İZMİR

Lisans Üniversite: Dokuz Eylül Üniversitesi Makina Mühendisliğı Bölümü

