

**KAFESLİ ASENKRON MAKİNEDE ISINMANIN İNCELENMESİ VE
ISISAL DEVRE MODELİNİN KURULMASI**

100854

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Pevrül SARIKAYA

493Y332

100854

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Ocak 1999

Tezin Savunulduğu Tarih : 4 Şubat 1999

Tez Danışmanı:

Prof.Dr. İlhami ÇETİN

Diğer Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Nurdan GÜZELBEYOĞLU (İ.T.Ü.)

Doç.Dr. Salman KURTULAN (İ.T.Ü.)

OCAK 1999

ÖNSÖZ

Yaptığım çalışma sırasında katkılarından dolayı sayın Prof.Dr. İlhami Çetin'e,benden desteğini ve yardımlarını esirgemeyen ve çalışmam süresince hep yanımda olan sayın Y.Müh.Murat İmeryüz'e, araştırmalarım sırasında her türlü imkanlarını kullandığım Türk Elektrik Endüstrisi A.Ş.'ye ve çalışmaların yazıya döküldüğü sırada yardımlarını aldığım dostlarım Melda Polat, Levent Ergene ve Levent Akdağ'a teşekkür ederim. Çalışmamı yaşadığı sürece daima arkamda olan sevgili annemin anısına ithaf ediyorum.

Ocak 1999

Pevrül Sarıkaya

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	xiv
1. GİRİŞ	1
2. ISI AKTARIMI	6
2.1 Isı Aktarımı Nedir?	6
2.2.İletim	7
2.3.Taşınım	13
2.4.Yayınım	16
3. ASENKRON MOTÖRÜN ALT PARÇALARA AYRILMASI	18
3.1.Alt Parçaların Tanımları	20
3.2.Isıl Modele İlişkin Alt Parçaların Ayrıntıları	21
3.2.1.Gövde	21
3.2.2.Stator Boynu	21
3.2.3.Stator Dişi	21
3.2.4.Oluk Sargıları	22
3.2.5.Uç sargıları	22
3.2.6.Hava Aralığı	23
3.2.7.Kapak Boşluğu Havası	23
3.2.8.Rotor Sargısı	23
3.2.9.Rotor Sacı	24
3.2.10.Mil	24
4. ISI AKTARIMI VE ELEKTRİK DEVRELERİ ARASINDAKİ BENZEŞİM	25
4.1.Sıcaklık Dağılımı	25
4.2.Isıl Direnç	27
4.3.Bileşke Duvar Sistemi	28
4.4.Temas Direnci	30
4.5.Yarıçapsal Sistemler	31
4.5.1.Silindir	31
4.6.Elektrik Devreleri Ve Isı Aktarımı Arasındaki Benzeşim	34
5. ISIL DİRENÇLERİN TANIMLANMASI	36
5.1.Temel Silindirik Bileşen	36
5.2.Yarıçapsal Yöndeki Isı Akışının İncelenmesi	41

5.3.Eksenel Yöndeki Isı Akışının İncelenmesi	42
6. TEMEL SİLİNDİRİK BİLEŞENE GÖRE ISIL DİRENÇLERİN TANIMLANMASI	44
6.1.Genel Tanımlar	44
6.1.1.Sadece Dışarıdan Bir Isı Akışı Varsa	45
6.1.2.Sadece Eleman İçinde Isı Akışı Varsa	47
6.1.3.Hem Eleman İçinde Isı Üretimi Hemde Dışarıdan Isı Akışı olduğunda	49
6.2.Silindirik Yapının İncelenmesi	53
6.2.1.Sadece Dışarıdan Isı Akışı Olduğunda	54
6.2.2.Hem Dışarıdan Isı Akışı Hem de İç Üretim Olduğunda	59
6.3.İçi Boş Bir Silindirde Eksenel Akışın İncelenmesi	65
7. ALT PARÇALARA İLİŞKİN ISIL DİRENÇLERİN HESAPLANMASI	67
7.1.Gövde	67
7.2.Stator Demiri	69
7.3.Stator Dişleri	70
7.4.Stator Sargıları	73
7.5.Hava aralığı	78
7.7.Uç sargıları	79
7.7.Kapak Boşluğu Havası	82
7.8.Rotor Sargısı	84
7.9.Rotor Demiri	85
7.10.Mil	87
7.11.Toplu Parametrelili Isıl Eşdeğer Devrenin Oluşturulması	88
8. KAYIPLARIN BELİRLENMESİ	91
8.1.Boşta Kayıplar	91
8.1.1.Demir Kayıpları	91
8.1.2.Sürtünme Ve Soğutma Düzenegi Kayıpları	92
8.2.Yükte Kayıplar	93
8.2.1.Stator Akım Kayıpları	93
8.2.2.Rotor Akım Kayıplar	93
8.2.3.Dağılma Akısı Kayıpları	93
8.3.Motör Kayıplarının Isınma Modeli İçinde Dağılımı	95
9. ISISAL EŞDEĞER DEVRE DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI VE ÇÖZÜLMESİ	101
10. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	104
KAYNAKLAR	114
ÖZGEÇMİŞ	116

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. İletimle ısı aktarımına ilişkin ısıl iletkenlik katsayıları.....	13
Tablo 2.2. Taşınım ile ısı aktarımına ilişkin ısıl iletkenlik katsayıları.....	15



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1 : Akış diyagramları	3
Şekil 1.2 : Bir asenkron makinenin alt parçaları.....	4
Şekil 2.1 : Sıcaklığın katı madde içinde boyuta bağlı olarak değişimi	7
Şekil 2.2 : Fourier yasasının basit katı bir cisime uygulanması.....	8
Şekil 2.3 : Isı aktarımında üç boyutlu akışı tanımlayan birim elemanlar	12
Şekil 2.4 : Taşınım ile ısı aktarımı	14
Şekil 3.1 : Isı akış yolları	19
Şekil 3.2 : Asenkron motöre ilişkin alt parçaların tanımı	21
Şekil 4.1 : Kesit duvar	25
Şekil 4.2 : Bileşke duvar sistemi.....	28
Şekil 4.3 : Karmaşık duvar sistemi	29
Şekil 4.4 : İki yüzey arasındaki temas bölgesi	30
Şekil 4.5 : Yarıçapsal iletimde sıcaklık dağılımı	32
Şekil 4.6 : Karmaşık silindirik sistemler.....	33
Şekil 5.1 : Temel silindirik bileşen.....	35
Şekil 5.2 : Eksenel ve yarıçapsal ısı eşdeğer devreler	36
Şekil 5.3 : Temel silindirik bileşen içinde her iki yöndeki ısı akışının birleştirilmesi	39
Şekil 5.4 : İki boyutlu ısı akışını tanımlayan ısı eşdeğer devre	39
Şekil 5.5 : İki boyutlu ısı aktarımına ilişkin ısı eşdeğer devre.....	41
Şekil 6.1 : İki ucu hariç her tarafı yalıtılmış levha.....	43
Şekil 6.2 : Sadece içinde ısı üretimi olan bir levhayı tanımlayan eşdeğer devre	47
Şekil 6.3 : Hem eleman içinde üretim olduğunda hem de dışarıdan ısı akışı varken ısı eşdeğer devre	50
Şekil 6.4 : Temel silindirik bileşen.....	52
Şekil 6.5 : Silindirin et kalınlığında ısı akışı	55
Şekil 6.6 : İçinde ısı üretimi olan silindirik yapı.....	57
Şekil 7.1 : Kafes rotorlu asenkron motor gövdesi	66
Şekil 7.2 : Gövdeye ilişkin ısı eşdeğer devre.....	66
Şekil 7.3 : Stator demiri	67
Şekil 7.4 : Stator demiri ısı eşdeğer devresi	68
Şekil 7.5 : Stator dişleri	69
Şekil 7.6 : Stator dişlerine ilişkin ısı eşdeğer devre.....	69
Şekil 7.7 : Stator dişine ilişkin ölçüler.....	70
Şekil 7.8 : Stator sargıları	71
Şekil 7.9 : Stator sargısı iletken modeli	72
Şekil 7.10 : Stator sargılarının ısı eşdeğer devresi.....	72

Şekil 7.11	: Stator sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre.....	74
Şekil 7.12	: Hava aralığı	76
Şekil 7.13	: Hava aralığına ilişkin ısı eşdeğer devre.....	76
Şekil 7.14	: Uç sargıları	77
Şekil 7.15	: Uç sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre.....	77
Şekil 7.16	: Kapak boşluğu.....	80
Şekil 7.17	: Kapak boşluğuna ilişkin ısı eşdeğer devre	80
Şekil 7.18	: Rotor sargısı	82
Şekil 7.19	: Rotor sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre	82
Şekil 7.20	: Rotor demiri	83
Şekil 7.21	: Rotor demirine ilişkin ısı eşdeğer devre.....	84
Şekil 7.22	: Mil	85
Şekil 7.23	: Mille ilişkin ısı eşdeğer devre	85
Şekil 7.24	: Toplu parametrelili ısı eşdeğer devre	87
Şekil 8.1	: Kayıpların hesabında kullanılan elektriksel eşdeğer devre	93
Şekil 8.2	: Demir kayıpları sadece dişte ise	95
Şekil 8.3	: Demir kayıpları paylaştırıldığında.....	96
Şekil 8.4	: Demir kayıplarının paylaştırılması	97
Şekil 8.5	: Demir kayıplarının paylaştırılması	98
Şekil 10.1	: Oluk içindeki sargıların kesiti	106
Şekil 10.2	: Oluk içi sargılara ilişkin ısı eşdeğer devre modeli	106
Şekil 10.3	: Oluk içi sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre	107
Şekil 10.4	: x doğrultusundaki akış, üretim ortada akış tek yönlü.....	107
Şekil 10.5	: x doğrultusundaki akış, üretim ortada akış çift yönde.....	108
Şekil 10.6	: Oluk içi sargıları ve uç sargılarının birbirlerine göre durumu.....	109
Şekil 10.7	: Uç sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre.....	110
Şekil 10.8	: Uç sargılarına ilişkin ısı devre modeli, üretim ortada akış çift yönlü.....	110

SEMBOL LİSTESİ

A	: Akışa dik alan
C₁,C₂,C₃...	: Isıl kapasite
c	: Malzemeye ilişkin özgül ısı değeri
h	: Taşınım ile ısı aktarımında ısı iletkenlik katsayısı
k	: İletimle ısı aktarımında ısı iletkenlik katsayısı
L	: Stator paket boyu uzunluğu
Q	: Isıl enerji
R₁,R₂,R₃...	: Isıl Direnç
r₁,r₂,r₃...	: Yarıçap
ρ	: Malzemeye ilişkin yoğunluk değeri
T	: Sıcaklık değeri
q	: Isı akımı



Üniversitesi	: İstanbul Teknik Üniversitesi
Enstitüsü	: Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	: Elektrik Mühendisliği
Programı	: Elektrik Mühendisliği
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. İlhami ÇETİN
Tez Türü ve Tarihi	:Yüksek Lisans- Ocak 1999

ÖZET

KAFESLİ ASENKRON MAKİNEDE ISINMANIN İNCELENMESİ VE İSİSAL DEVRE MODELİNİN KURULMASI

Pevrül SARIKAYA

Günümüzde elektrik makinelerinin tasarımında ekonomik nedenlerden dolayı, makine boyutlarının ve verim değerlerinin küçültülmesi yönünde bir eğilim vardır. Bu tür bir yaklaşım yalıtım sınıflarının izin verdiği en yüksek sıcaklık değerlerinde çalışmayı ve makineyi sınır sıcaklık değerlerinde tasarlamayı gerektirir. Soğutma düzeneğinde ve maliyetlerde yapılacak iyileştirmeler, makine içindeki sıcaklık değişiminin önceden bilinmesi ile yapılabilir.

Asenkron motördeki sıcaklık değişimi iki farklı yolla incelenebilir. Bunlar toplu parametrelili eşdeğer devre yöntemi ve iki ya da üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemidir. Üç boyutlu bir sonlu elemanlar çalışmasında geometriyi saran ağ elemanlarının sayısı çok fazla olacağından bu yöntemle bütün bir geometrinin incelenmesi neredeyse imkansızdır. Bu nedenle bu çalışmada toplu parametrelili eşdeğer devre yöntemi tercih edilmiştir.

Toplu parametrelili ısı eşdeğer devre yöntemi hem sürekli hali hem de geçici durumları kapsamaktadır. Yöntem boyut bilgileri ve ısı katsayıları kullanılarak tanımlanan ısı dirençlerinden faydalanır. Elde edilecek matematik model oldukça basit bir yapıya sahiptir ve tasarımcı motor koruma problemine kolaylıkla çözüm bulabilir.

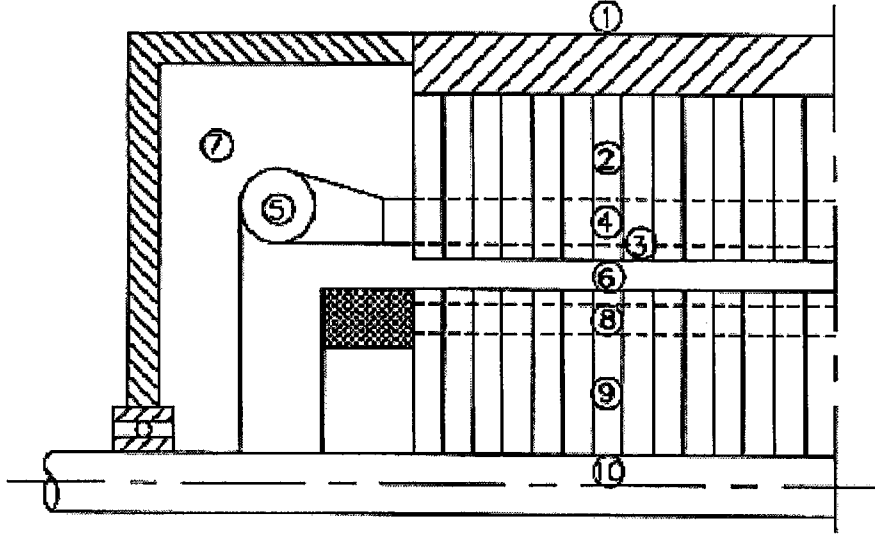
Günümüzde tasarımcı için motördeki sıcaklık dağılımını önceden bilmek maliyet açısından oldukça önem kazanmıştır. Bu nedenle de ayrıntılı bir matematik modele gerek duyulur. Kullanılacak olan bu model tasarımdaki herhangi bir

değişikliğe mutlaka cevap verebilmelidir. Bu amaca yönelik olarak bir çok farklı yöntem geliştirilmiş ve soruna çözüm getirdiği iddia edilmiştir. Bu yöntemlerden ilki yukarıda da bahsedildiği gibi sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemde motor geometrisi çok küçük elemanlara bölünerek yapı üzerinde bir ağ yaratılır. Elemanların oluşturduğu düğüm noktalarında tanımlanan ısıl denge denklemleri çözülerek sonuca ulaşılır. Ancak yöntemin zorlukları arasında sınır koşullarının doğru tanımlanabilmesi ve eleman sayılarının oldukça büyük değerlere çıkması bulunmaktadır. Eleman sayısının fazlalığı büyük bilgisayar imkanlarını gerektirmektedir. Yanısıra çözülmesi gereken denklem sayısı da orantılı olarak çok fazladır ve bu da çözüme ulaşma açısından uzun sürelerle neden olur. İletimle ısı aktarımında oldukça iyi sonuçlar vermesine rağmen, taşınım ve yayınım söz konusu olduğunda bu tür bir yaklaşım oldukça yetersiz kalacaktır. Şu an için yeteri kadar ayrıntılı ve doğru bir sonlu elemanlar modeli de oluşturulabilmiş değildir.

İkinci ve bu çalışmada ele alınan tür yöntem ise toplu parametrelili ısı eşdeğer devre modelidir. Temelde birinci tür yaklaşımla aynı mantığı kullanmasına karşın, motor geometrisi binlerce elemana değil basitçe on onbeş adet alt parçalara bölünür. Bu alt parçalar kullanılarak bütün motörü kapsayan bir eşdeğer devre tanımlanır. Yöntemde motorün yapısı ya aşırı basitleştirilir ya da çok güçlü varsayımlar yapılarak motorün karmaşık geometrisinden kaçılmış olur. Yöntem iletim ve taşınım ile ısı aktarımını yeterli bir biçimde kapsamasına karşın yayınım ile oluşacak ısı aktarımı genellikle ihmal edilir. Böylece tasarımcı motordeki sıcaklık dağılımını önceden hesaplama olanağına kavuşmuş olur.

Makinede mil merkezinde ve yarıçapsal düzlemde simetri olduğu kabul edilmiştir. Bir çok motorde bulunan ve fanın soğutma etkisiyle ortaya çıkan asimmetrik sıcaklık dağılımları da dikkate alınmamıştır.

Motöre ait geometri en basit şekliyle on alt parçaya bölünebilir. Şekil 1’de bu tanımlamaya ilişkin ayrıntılar görülmektedir.

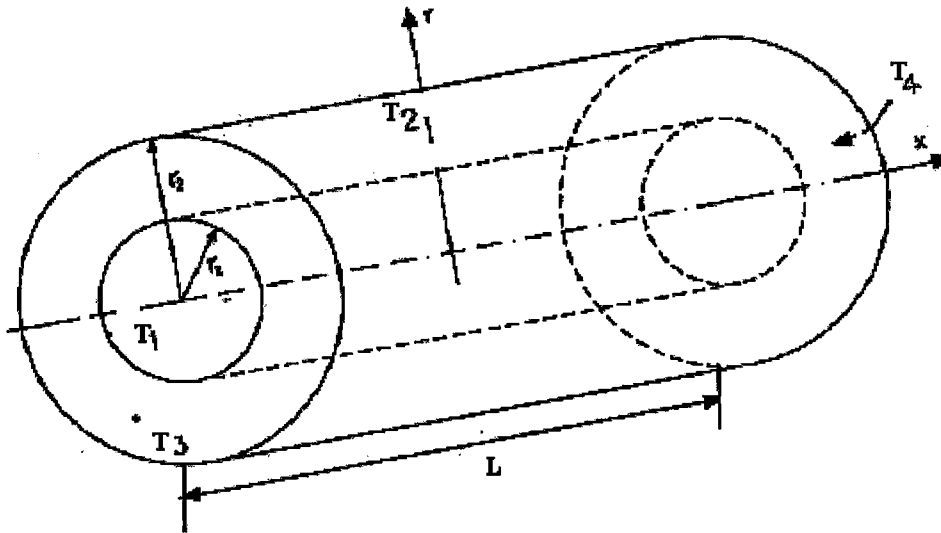


Şekil 1 Kafes rotorlu asenkron bir motöre ait alt parçalar

Alt parçaları tek tek tanımlarsak;

- | | |
|---------------------|------------------|
| 1) Gövde | 6) Hava aralığı |
| 2) Stator boynu | 7) Kapak boşluğu |
| 3) Stator dişleri | 8) Rotor kafesi |
| 4) Stator sargıları | 9) Rotor demiri |
| 5) Uç sargıları | 10) Mil |

Isıl eşdeğer devre elmanları olan ısıl dirençlerin tanımlanması tamamen temel silindirik bileşene göre yapılmıştır. Şekil 2'de temel silindirik bileşene ilişkin boyutlar görülmektedir.

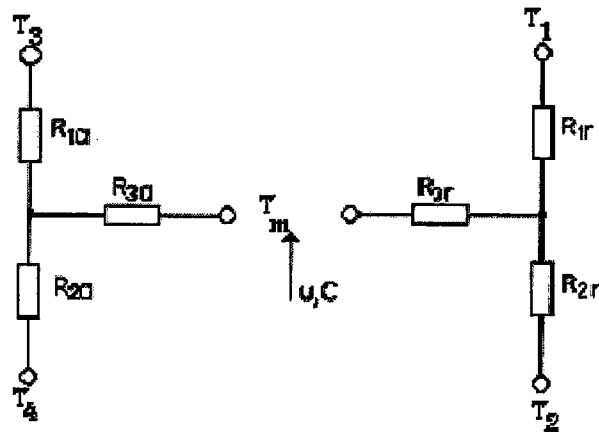


Şekil 2 Temel silindirik bileşen

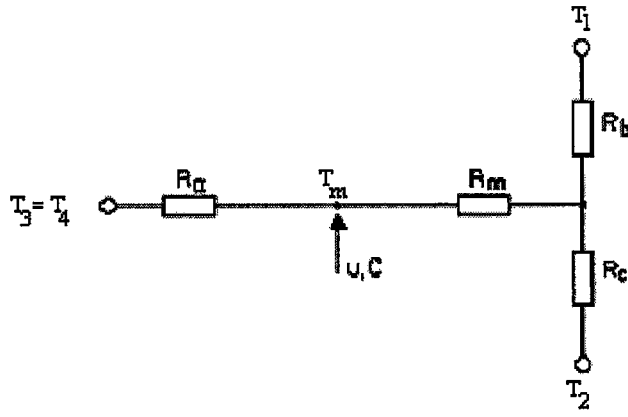
Isıl dirençler önce bu yapıda çözülmüş daha sonra tanımlanan alt parçalara uygulanmıştır. İnceleme esnasında aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- 1) Eksenel ve yarıçapsal yöndeki ısı akışları birbirinden bağımsızdır.
- 2) Tek başına ortalama sıcaklık değeri hem eksenel hem de yarıçapsal yöndeki ısı akışını tanımlar
- 3) Çevresel bir ısı akışı yoktur.
- 4) Isıl kapasite ve alt parça içindeki ısıl üretim düzgün dağılmıştır.

İki yöndeki ısı akışının yardımıyla üçer ısıl dirençten oluşmuş iki farklı eşdeğer devre elde edilir. Bu devreler şekil 3'te verilmiştir. Varsayımlarda tanımlanan ortalama sıcaklık değeri kullanılarak bu iki devre birleştirilir. Böylece iki yönlü ve birbirinden bağımsız olarak tek boyutlu çözülmüş ısı aktarım problemi, ortalama sıcaklık düğümünün yardımıyla iki boyutlu durumu tanımlar hale getirilmiştir. Birleştirilen iki boyutlu akışı tanımlayan devre altı ısıl direnç yerine dört ısıl dirençten oluşmuştur. Şekil 4'te ise birleştirilmiş eşdeğer devre verilmiştir. İki farklı akış birleştirilirken, silindirdeki sıcaklık değerleri merkez eksen boyunca simetrik kabul edilirse eksenel doğrultuda motörün iki yüzey sıcaklığı birbirine eşit olacaktır ($T_3 = T_4$). Bu yarıçapsal akışta, akışa dik alanın yarıya düşmesini sağlar ($L=L/2$). Ancak eksenel akışta görülen L uzunluğu akışa dik alandan değil akışın kattığı yoldan gelmektedir. Bu nedenle eksenel akış incelenirken L uzunluğu yarıya inmemekte ve aynı kalmaktadır. Bununla birlikte iki yüzey sıcaklığı aynı alındığından R_{2y} direnci ortadan kalkmasına rağmen ısı akışı R_{me} üzerinden geçmeye devam eder.



Şekil 3 Eksenel ve yarıçapsal doğrultudaki ısı akışını tanımlayan eşdeğer devreler



Şekil 4 İki boyutlu ısı akışını tanımlayan eşdeğer devre

Yöntemde kayıpların belirlenmesi önemli bir yer tutar. Kayıplar ne kadar doğru biçimde elde edilirse modelin güvenilirliği de o derece artar. Çünkü direnç tanımları yapılırken çözülen denklemlerde ısı olarak ortaya çıkan kayıplar kullanılmaktadır. Bu kayıpların belirlenmesinde IEC ve IEEE standartlarınca tanımlanmış yöntemler kullanılmalıdır.

Sonuç olarak herbir alt parça için ayrı ayrı tanımlanan ısı eşdeğer devreler birbirine bağlanır. Böylece makine geometrisinin bütünü kapsayan toplu parametrelili ısı eşdeğer devre elde edilmiş olur.

Bu aşamadan sonra onbeş düğümde tanımlanan ısı denge denklemlerine ilişkin lineer denklem sistemi çözülür. Bu çözümün yapılması tasarımı açısından hem kolay olacaktır hem de diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında fazla zaman almayacaktır. Bu nedenle toplu parametrelili ısı eşdeğer devre yöntemi oldukça başarılı bir yöntemdir.

Anahtar Kelimeler: Asenkron Motör, Isı Aktarımı, Isıl Direnç,Toplu Parametrelili Isıl Eşdeğer Devre

Bilim Dalı Sayısal Kodu: 608.01.01

University : İstanbul Technical University
Institute : Graduate School of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Electrical Engineering
Programme : Electrical Engineering
Supervisor : Prof. İlhami Çetin
Degree Awarded and Date : M.Sc.-January 1999

THE HEATING ANALYSIS AND SETTING UP THE THERMAL MODEL IN A CAGE ROTOR INDUCTION MACHINE

SUMMARY

Pevrül SARIKAYA

The recent aim of designing electrical machines, seems to have mainly been, some tries towards decreasing sizes and increasing efficiency under certain economic urges. Using the optimal isolation of heat degrees and operating of a machine on limit values of temperature, seem to be the very key-concept for such tries. Any optimization for cooling systems, costs and/or yielding capacity of an induction machine, should include estimations to fixation of heat dissipation, has current studies as to get values on heat dissipation of induction motors general-purposed usages.

The heat distribution of induction motor can be analysed two different ways. Those are the lumped -parameter heat transfer model and 3D or 2D finite element studies. Establishing 3D finite element method, the element number defining the path between the nodes is so great number that the solution can probably be impossible. Therefore lumped-parameter method is to held on the present paper.

In the lumped-parameter thermal model, the steady-state and transient solutions are possible. The method use thermal resistances, identified by the dimensional information and constant thermal coefficients. The model is simple suitable for the estimation of temperatures, so that the designer can solve the protection problems.

Nowadays it's very important to estimation the temperature distribution for the designer because of the cost. Therefore a good mathematical model is required. This model must be able to precisely represent the effects of any design modification. There are many thermal models which claim to solve the problem properly. In general they can be classified into two groups. The first is using the Finite Element Method. In this method you can divide the whole geometry into small elements and calculate heat transfer equations which applied to each node. For conduction it can be a sufficient method to calculate the temperature distribution. But for the convection and radiation it's not a good representation. In adding to these a truly comprehensive model has not yet been presented. Furthermore there is a disadvantage need for having large computational requirements.

The second group of models is the lumped-parameter methods. They are based on a division of the machine into a few parts or elements. A thermal equivalent circuit is prepared, where the nodes represent the machine elements. These models generally either oversimplify the machine geometry, or introduce very strong assumptions to alleviate the complexity of the equations modelling the actual bulk conduction and convection heat transfer processes. Radiation is generally not accounted for these models.

This paper represent a lumped-parameter equivalent thermal circuit so that the designer can estimate the temperature distribution along the whole machine geometry. The symmetry is assumed about the shaft and a radial plane through the centre of the machine. The influence of the asymmetric temperature distribution that exist in most machines, for example as a result of the external fan being mounted at one end, is therefore taken to be small.

The geometry of a induction motor can be subdivided into the 10 sub-components shown in fig 1.

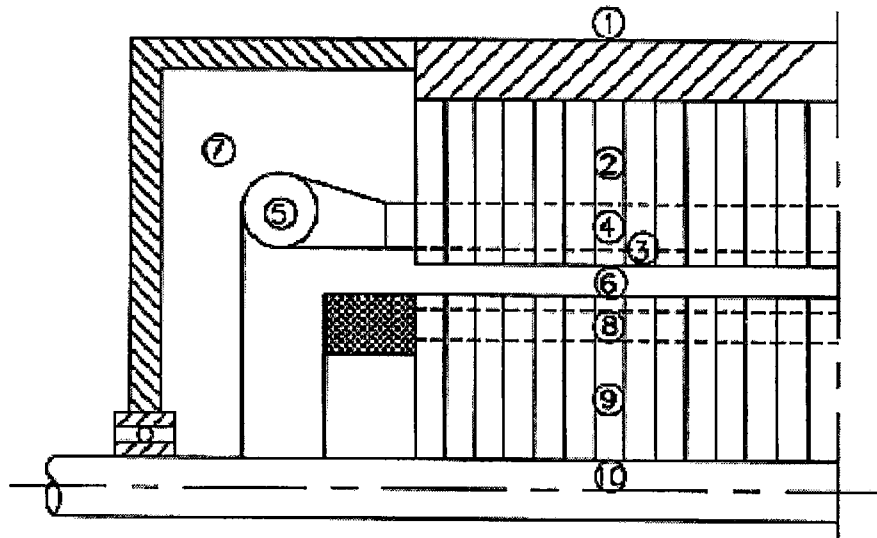


Fig.1:Sub-component of the induction motor

- | | |
|--------------------|----------------|
| 1) Frame | 6) Air gap |
| 2) Stator yoke | 7) End cap air |
| 3) Stator teeth | 8) Rotor cage |
| 4) Stator windings | 9) Rotor yoke |
| 5) End windings | 10) Shaft |

GENERAL CYLINDRICAL COMPONENT

The solid components of the induction motor are based on the general cylindrical component shown in fig 2.

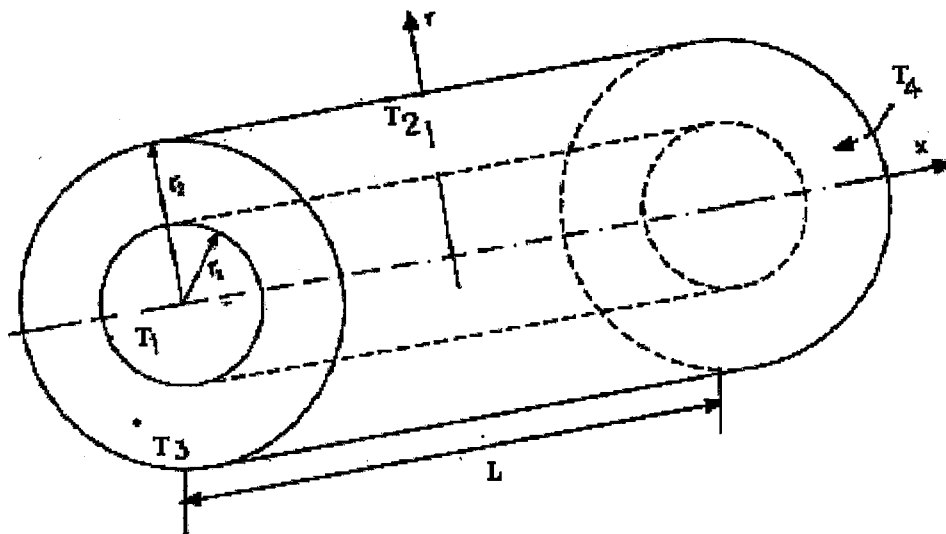


Fig.2: General cylindrical component

By the calculations the following assumptions are made:

- 1) The heat flow in the radial and axial directions are independent
- 2) A single mean temperature defines the heat flow both in the radial and axial directions
- 3) There is no circumferential heat flow
- 4) The thermal capacity and heat generation are uniformly distributed.

By mean of two direction heat flow, it's estimated two different thermal networks with three thermal resistances. The mean temperature in two networks has the same value. The networks are shown in fig 3

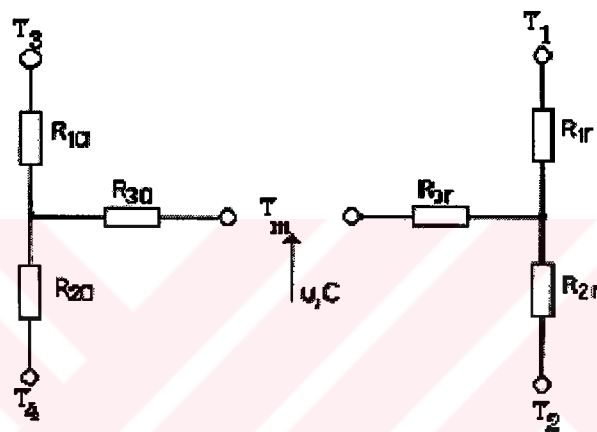


Fig.3: Thermal networks of axial and radial directions.

On using the mean temperature the two networks are reduced in one thermal network with four thermal resistances which shown in fig 4

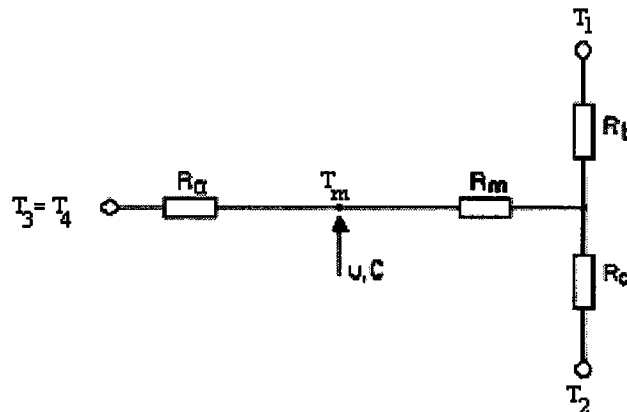


Fig.4: Combining of two thermal networks.

In the present paper calculating and separating the losses of the machine are derivated in terms of IEC and IEEE standards. In double cage rotor motors, especially, it proves considerable difficulty to get to have true derivations out of the data over the rotor cage losses. Since such motors show different flue-region for rotor current in start and on work duration. In that cases the paper poses a somehow different modulation, or smoothing behaviour on the run.

Keywords: Heat Transfer, Thermal Resistance , Lumped Parameter Thermal Model, Induction Machine

Science Code: 608.01.01



1.GİRİŞ

Günümüzde alternatif akım makinelerinin büyük bir çoğunluğu tam kapalı fan soğutmalı türde üretilmektedir. Artan hammadde fiyatları ve diğer maliyetler nedeniyle üretici firmaların zorlaşan rekabet koşulları, tasarımcıyı makine boyutlarını küçültmeye zorlamaktadır. Boyutların küçültülmesi makinenin daha düşük bir verimle, sınır sıcaklık değerinde çalışmasını gerektirebilir. Bütün bu etkiler dikkate alındığında, makineyi en iyilenmiş boyutlarda tasarlamak güçleşmektedir. Bu nedenle ideal makine tasarımının yapılabilmesi için analitik ısınma modelinin tam ve doğru bir biçimde oluşturulması büyük bir önem kazanmaktadır.

Oluşturulacak ısınma modelinin ne kadar ayrıntılı olacağı yapılacak tasarımın türüne bağlıdır. Burada iki farklı tasarım biçiminden sözedilebilir. Yapılacak olan çalışmalar ya mevcut bir üründe iyileştirme amacına yönelik, ya da daha önce hiç üretilmemiş türde bir ürüne yönelik olacaktır. Bu aşamada tasarlanacak ürüne ilişkin veriler kullanılırken çözümü etkileyecek bazı ihmal ve varsayımların yapılması gerekecektir. Yapılan bu varsayımlar çözümün basitliğini sağlarken makinenin gerçek işletme koşullarından uzaklaşmasını da doğuracaktır. Bu nedenle doğru bir tasarım için yapılacak varsayımlar dikkatle seçilmelidir.

Üretilmekte olan bir makinenin, iyileştirilmesine yönelik yapılan tasarımda temel nokta, başlangıç tasarım değişkenlerinin doğru olarak öngörülmesidir. Bu değişken tahminleri yapılırken, kullanılan makinelerden yararlanmak mümkündür. Herhangi bir matematiksel modele gereksinilmez. Çünkü daha önce tasarlanmış bir örnek vardır, yeterince ve güvenilir bilgi daha önce elde edilmiştir. Şekil 1a'da bu tür bir çalışmaya ait akış diyagramı verilmektedir [1].

Ancak yeni bir tasarım yapılacaksa, makinenin matematiksel modelini de içeren yeni bir tasarım akış diyagramına gerek duyulur (Şekil 1b). Böyle bir tasarımda temel sorun tasarım değişkenlerine verilecek ilk değerlerin belirlenmesidir. Bunun için tasarımcının daha önceki deneyimlerinden yararlanması kaçınılmazdır. Tasarım ister yeni bir ürüne, isterse bir ürün iyileştirmesine yönelik

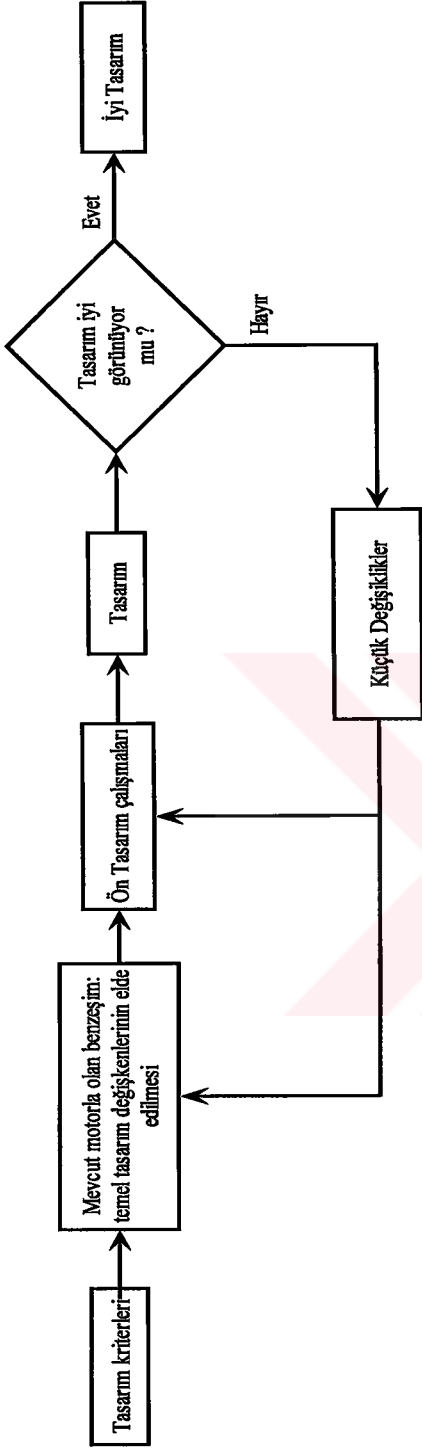
olsun makinenin ısınma modelinin yapılması zorunludur. Böylelikle makine ısısal bakımdan güvenilir biçimde sınır sıcaklık değerlerinde çalışarak, aynı işletme iyiliğini sağlayacak biçimde daha küçük boyutlarda tasarlanabilecektir.

Ancak diğer taraftan tasarımın geliştirilmesi açısından eğer bir akış diyagramına gerek duyulmakta ise iyi bir matematik modelin gerekliliği hissedilir. Bu model herhangi bir tasarım değişikliğine cevap verecek şekilde kapsamlı olmalıdır. İyi bir matematik modele duyulan ihtiyaç ya tasarım kriterleri alışılmadık tipte olduğunda ya da tasarım için gerekli bilgilere ulaşmak çok zor ve ya olanaksız olduğunda ortaya çıkacaktır (Şekil 1b)

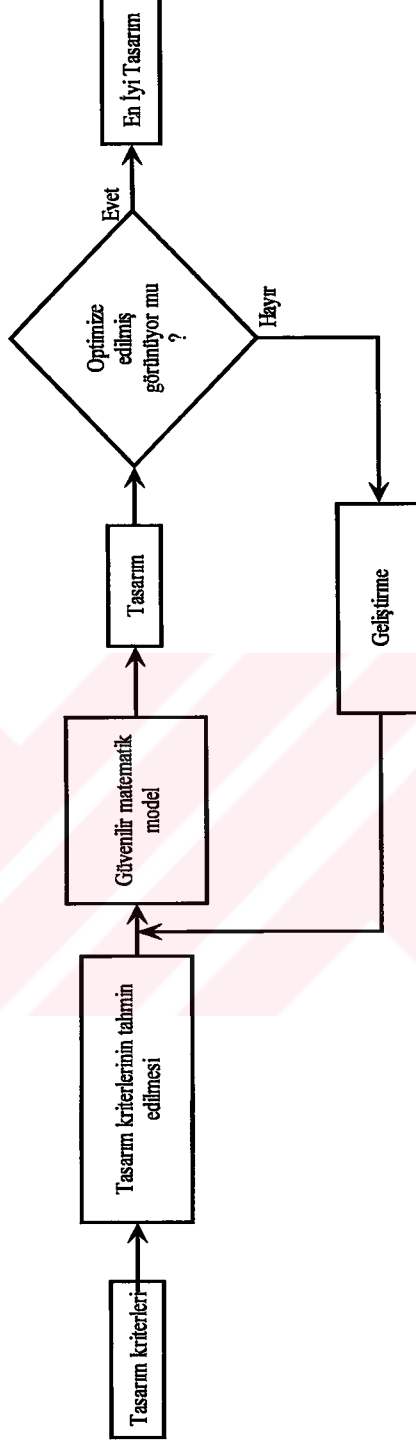
Birçok sürekli durum ısınma modeli literatürde yayımlanmıştır. Bunları iki grupta sınıflandırmak mümkündür. Birincisi sonlu farklar ya da sonlu elemanlar tekniğinin kullanıldığı modellerdir. Bu tip çalışmalarda makine geometrisi, ya düzgün bir ağ ile örülür ya da küçük elemanlara ayrılarak herbir düğümde ısı aktarım denklemleri çözülür. Bazı kısımlar, örneğin sargılar daha detaylı ele alınmak zorundadır. Buna rağmen karmaşık bir yapıda olan taşınım ve yayılım ısı denklemleriyle bu denli ayrıntılı bir model kullanılarak doğru bir sonuca ulaşmak daha da zorlaşmaktadır. Zaten kapsamlı ve doğru bir model de henüz oluşturulmuş değildir. Bunun yanı sıra bu yöntemler çok büyük bilgisayar olanakları gerektirmekte, büyük belleklere ve uzun hesaplama sürelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca tasarımda olabilecek bir değişikliği buraya uygulamak da güçtür.

İkinci grup yöntemler ise temelde yukarıdaki yöntemeye dayanır, ancak daha kaba bir model oluşturulur ve toplu parametrelili ısınma modeli olarak adlandırılır [2] [3] [4]. Bu yöntemde makine geometrisi ısı kaynakları dikkate alınarak bir takım parçalara ya da elemanlara bölünmektedir (Şekil 1.2). Bu alt parçalar kullanılarak oluşturulan ısı eşdeğer devrede herbir düğüm makine elemanlarından birini temsil eder. Bu model kurulurken genellikle ya makine geometrisi çok basitleştirilir ya da çok sayıda varsayım yapılır. Böylelikle ısı aktarımını iletim ve taşınım ile tanımlayan denklemlerin karmaşıklığı bir ölçüde giderilmiş olur. Bu tür eşdeğer devrelerde yayımla ısı aktarımı genellikle dikkate alınmaz.

Yapılan varsayımlarla gerçek modelden uzaklaşılmasına rağmen daha doğru bir modelin oluşturulabilmesi için gerekli düzeltmeler literatürde yayımlanmıştır. Soderberg ve Fecheimer üç boyutlu iletimin nasıl olduğuna ve



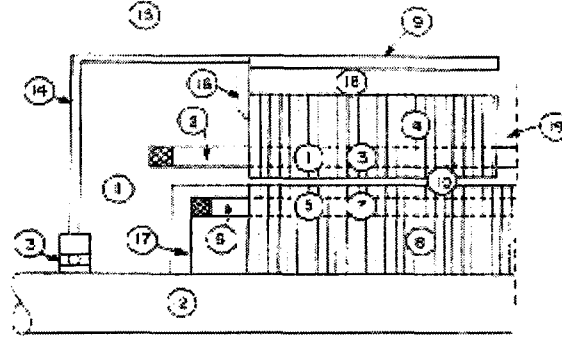
a)



b)

Şekil 1.1 a) Daha önce üretilmiş bir üründen yararlanılarak yapılacak tasarımlar için akış diyagramı

b) Alışılmamış bir ürün tasarlanırken kullanılacak akış diyagramı



Şekil 1.2 Bir asenkron makinenin kapsamlı bir matematik modeli oluşturulurken dikkate alınacak alt parçalar

sargıların nasıl modellenebileceğine ilişkin bir yaklaşım sunmuştur. Ayrıca taşıyım katsayılarının nasıl bulunabileceğine ilişkin çeşitli çalışmalar da sürdürülmektedir. Buna karşın doğru ve tam bir ısınma modelinin oluşturulması için yapılması gereken incelemeler vardır. Yayınımıyla ısı değişiminin modellenmesinde ise kavramsal olarak bir zorluk yoktur. Ancak buradaki tek engel makinenin karmaşık geometrisidir.

Küçük ve orta boyutlu makinelerin yapısı ve soğutması basit olduğundan bunların ısınma modeli karmaşık değildir. Önemli olan makinenin yalıtım sınıfının izin verdiği sıcaklık değerinin altında çalışmasıdır. Böylelikle makine ömrü yalıtkan ömrüne eşit olabilir. Bu nedenle ısınma modeline ait rotor ve stator alt parçaları ayrıntılı ve eksiksiz olarak tanımlanmalıdır. İdeal olan modelin hem geçici hem de sürekli hal çözümlerini kapsamasıdır. Böylelikle modelin hızlı değişen yüklerde ve kısa periyodlu aşırı yüklenmelerde de kullanılması sağlanır [5].

Sunulan bu yüksek lisans çalışmasında tam kapalı yapıda, fan soğutmalı kafesli bir asenkron motörün ısınma modeli ve eşdeğer devresi, toplu parametrelili yöntem kullanılarak oluşturulmaktadır. Ayrıca ısınma denklemlerinin çözüm algoritmaları verilmektedir. İncelemede motor geometrisi belirli sayıda toplu parçaya ayrılmaktadır. Alt parçaların sayısı çözümün doğruluğuna etkir. Her alt parça bir ısısal düğüm olarak dikkate alınır. Bu düğümler komşu düğümlerle ısısal dirençler yardımıyla birleştirilir. Böylelikle bir ısısal direnç ağı elde edilir. Bu dirençler tanımlanırken ısı aktarımı ve elektrik devreleri arasındaki benzerlikten yararlanılır. Geçici hal incelemesi için ısı üretimi olan düğümlerde ısısal kapasitelerin tanımlanması zorunludur. Isısal dirençler, gerekli varsayımlar kullanılarak geometrik

ölçülerden, tasarımda kullanılan malzemenin ısı özelliklerinden ve ısı aktarım katsayılarından yararlanılarak çıkarılmaktadır.

Sonuç olarak bu model, makinenin belli bir bölümüne kolaylıkla uygulanabilir. Direnç ifadelerinin çıkarılması oldukça karmaşık olmasına rağmen, makinedeki ısınmayı bütünüyle tanımlayan ısı denge denklemlerinin kullanımı ve çözümü son derece basittir.



2.ISI AKTARIMI

2.1. ISI AKTARIMI NEDİR ?

Isı aktarımı cisimler arasında, sıcaklık farkı nedeniyle oluşan enerji değişimini belirlemeye çalışan bir konudur. Isı aktarımı ısı enerjisinin nasıl aktarıldığıyla değil, bunun yanısıra belirli koşullarda bu aktarımın hangi oranda gerçekleştiğini de bulmaya çalışır. Gerçekte ısı aktarımıyla ile termodinamik arasındaki fark, bu ısı akımıdır. Termodinamik ısısal dengedeki sistemlerle ilgilenir ve burada herhangi bir noktada dengede olan sistemi, başka bir denge noktasına taşıyabilmek için gerekli enerji miktarını hesaplar. Bu değeri hesaplarırken sıcaklıktaki değişimin ne kadar hızlı olduğu konusunda herhangi bir bilgi vermez. Isı aktarımı ise termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarına ek olarak deneysel bir takım kurallar getirir ve bunların yardımıyla ısı akımı hakkında bazı bilgilerin elde edilmesini sağlar. Deneysel kuralların kullanılması teorik açıdan hesaplanması zor durumların uygulamalı olarak çözümünü de sağlar.

İki kavram arasındaki farkı daha açık bir biçimde verebilmek için bir örnekten yararlanılabilir : Su dolu bir kova içindeki sıcak demir çubuğun soğumasını dikkate alabiliriz. Termodinamik su-çubuk ikili sisteminin denge halindeki son sıcaklığıyla ilgilenecektir. Yani termodinamik bu dengeye ulaşılması için ne kadar süre gerektiğiyle ya da denge öncesi herhangi bir süre sonunda çubuğun ulaştığı ara sıcaklık değeriyle ilgilenmez. Oysa ısı aktarımı iki denge noktası arasında suyun ve çubuğun sıcaklıklarındaki değişimi, zamana bağlı bir fonksiyon olarak verir ve birim uzunlukta sıcaklığın değişimini hesaplar.

Isı aktarımı üç temel biçimde gerçekleşir :

- 1) İletim
- 2) Taşınım
- 3) Yayınım

Bundan sonraki bölümde ısı aktarımının temel olarak bu üç yolla nasıl gerçekleştiği incelenecektir.

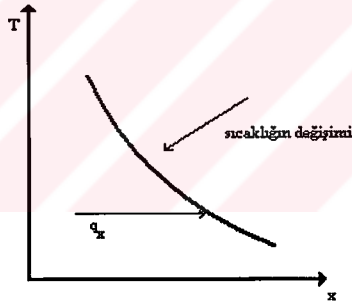
2.2.İLETİM

Herhangi bir cisim içinde bir sıcaklık gradyanı mevcutsa, bu cismin sıcaklığı yüksek olan bölümünden, sıcaklığı küçük olan bölümüne doğru bir enerji aktarımı gerçekleşir. Böyle bir durumda enerji iletim yoluyla aktarılır. Isının dik olarak geçtiği yüzeye oranı normal doğrultudaki sıcaklık gradyanı olarak tanımlanır (2.1) [6].

$$\frac{q}{A} \approx \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

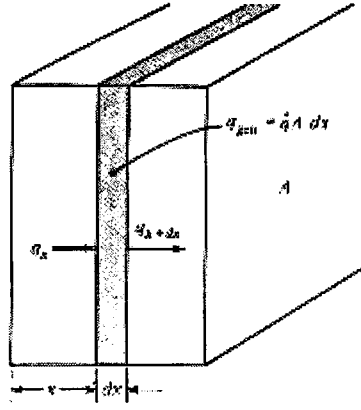
Burada q ısı akımı $\partial T / \partial x$ ise ısı akış yönündeki sıcaklık gradyanıdır. k pozitif sayısı ise maddeye ait ısı iletim katsayısı olarak adlandırılır. Denklemdaki (-) işaretinin anlamı ise termodinamiğin ikinci kanununun gerçekleşmesidir. Böylelikle ısı sıcaklık açısından büyük değerden küçük değere doğru akacaktır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Sıcaklığın katı madde içinde boyuta bağlı olarak değişimi

Elde edilen bu denklem Fransız matematik-fizikçi Joseph Fourier'nin adıyla anılır ve iletim yoluyla ısı aktarımının Fourier yasası olarak bilinir. Tüm bunların yanında verilen bu denklemde k katsayısının $[W/m^{\circ}C]$ gibi bir birime sahip olduğu, ısı akışında $[W]$ olarak verildiği de unutulmamalıdır.

Şimdi elde ettiğimiz bu denklemi basit bir katı cisme uygulayalım. Şekil2.2'de verilen bir boyutlu sistemi ele alalım. Şayet sıcaklık zamanla değişmiyorsa bu basit bir problem olacaktı ve çözmek için eşitliğin integralini, almak istediğimiz sonuca ulaşmak için yeterli olacaktı.



Şekil 2.2 Fourier yasasının basit katı bir cisime uygulanması

Ancak eğer katı cismin sıcaklığı zamanla değişmekte, ya da cisim bir ısı kaynağına veya ısı çukuruna sahipse bu durumda problem çok daha karmaşık bir duruma girecektir. Biz burada cismin sıcaklığının zamanla değiştiği ve cismin bünyesinde bir ısı kaynağının olduğunu genel durumu dikkate alalım. dx kalınlığı için aşağıdaki enerji korunumu denklemi yazılmalıdır :

Sol yandan alınan enerji + elemanda üretilen ısı = içerdeki enerji değişimi + sağ yana iletilen enerji

Bu enerjilerin değerlerini matematiksel olarak ifade etmek gerekirse :

$$\text{Sol yandaki enerji : } q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\text{Eleman içinde üretilen enerji: } \dot{q} A dx \quad (2.4)$$

$$\text{Eleman içindeki enerji değişim miktarı: } \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} dx \quad (2.5)$$

$$\text{Sağ yana iletilen enerji : } q_{x+dx} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} \quad (2.6)$$

$$= -A \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad (2.7)$$

Burada :

$\dot{q}$ birim hacimde üretilen enerji [W/m³]

c maddeye ait özgül ısı [J/kg°C]

ρ yoğunluk [kg/m³]

Şimdi enerji korunumu denklemini yazılırsa :

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q}A dx = \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} dx - A \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad (2.8)$$

ya da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.9)$$

Elde edilen bu denklem bir boyutlu ısı iletim denklemdir. Eğer çok boyutlu bir problemle ilgileniyorsak o zaman birim hacimde, her üç yönde iletim yoluyla alınan ve verilen enerji miktarlarını da denkleme eklememiz gerekecektir (Şekil 2.3). Enerji dengesi bu durumda şu biçimde olacaktır :

$$q_x + q_y + q_z + q_{\text{üretilen}} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + dE / d\tau \quad (2.10)$$

Denkleminde verilen tüm bu büyüklüklerin değerleride aşağıdaki gibi hesaplanabilir :

$$q_x = -k \, dy \, dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$q_{x+dx} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy \, dz \quad (2.12)$$

$$q_y = -k \, dx \, dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$q_{y+dy} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx \, dz \quad (2.14)$$

$$q_z = -k \, dx \, dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$q_{z+dz} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx dy \quad (2.16)$$

$$q_{gen} = -\dot{q} dx dy dz \quad (2.17)$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c dx dy dz \frac{dT}{d\tau} \quad (2.18)$$

Tüm bunların sonucunda üç boyutlu genel ısı iletim denklemi şu duruma gelecektir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.19)$$

Sabit iletkenlik içinse :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.20)$$

Burada $\alpha = k / \rho c$ olmak üzere maddeye ait ısıl geçirgenliktir. α sayısı ne kadar büyük olursa ısı iletimi de o denli hızlı olacaktır. Bunun böyle olduğu α 'yı tanımlayan büyüklüklere bakılarak görülebilir. α 'nın büyük olabilmesi ya ısıl iletim değerinin büyük olmasıyla gerçekleşebilir - bu durumda hızlı bir enerji aktarımı söz konusudur - ya da ısıl kapasitenin düşük olmasıyla mümkündür. Bu durumda da madde içinde hareket eden enerjinin küçük bir bölümünün emildiği ve aktarım için daha fazla enerjiye ihtiyaç duyulduğu anlaşılmaktadır. Isıl geçirgenlik α 'nın birimi $[m^2/s]$ dir.

Yukarıdaki çıkarımlar yapılırken $x+dx$ noktasında Taylor serisinin sadece ilk iki terimi alınmıştır.

Kartezyen koordinatlarda elde edilen bu denklemler silindirik ya da küresel koordinatlarda da yazılabilir.

Silindirik koordinatlarda :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.21)$$

Küresel koordinatlarda :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.22)$$

Bu denklemlere ait çizimler şekil 2.2’de verilmiştir.

Pratikte ise bir çok problem belirli durumları kapsar. Bu durumlar için geçerli olacak denklemlerin küçük bir tablosu aşağıda verilmiştir :

1) Sürekli durumda bir boyutlu ısı aktarımı (ısı üretimi yok)

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.23)$$

Bunun (2.1) ile q’nun sabit olması durumu için aynı olduğunu görürüz.

2) Sürekli durumda silindirik koordinatlarda ısı aktarımı (ısı üretimi yok)

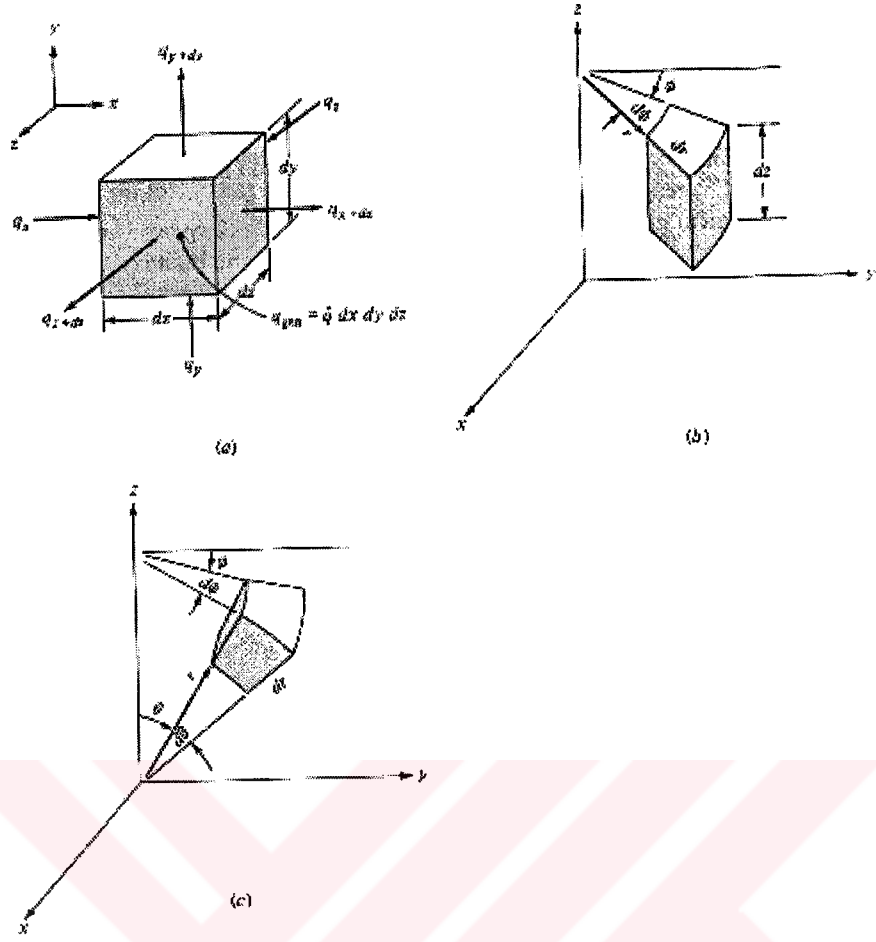
$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (2.24)$$

3) Sürekli durumda bir boyutlu ısı aktarımı (ısı üretimi var)

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.25)$$

4) Sürekli durumda iki boyutlu ısı aktarımı (ısı üretimi yok)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.26)$$



Şekil 2.3 Isı aktarımında üç boyutlu akışı tanımlayan birim elemanlar

- a) Kartezyen koordinatlar
- b) Silindirik koordinatlar
- c) Küresel koordinatlar

İletimle ısı aktarımına ilişkin ısı aktarım katsayılarını kullanılarak malzemeye göre yaklaşık değerleri tablo 2.1’de verilmiştir [7].

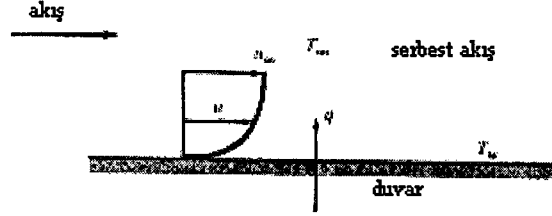
Tablo 2.1 : İletimle ısı aktarımına ilişkin ısı iletkenlik katsayıları

Malzeme	k (W/m°C)
Metaller	
Gümüş(Saf)	410
Bakır(Saf)	385
Alüminyum(Saf)	202
Nikel(Saf)	93
Demir(Saf)	73
Karbon Çeliği, %1 C	43
Kurşun(Saf)	35
Krom-Nikel çelik (%18 Cr, %8 Ni)	16,3
Metal olmayan Katılar	
Quartz, eksen yönünde	41,6
Magnezit	4,15
Mermer	2.08-2.94
Çakıtaşı	1,83
Pencere Camı	0,78
Meşe veya akçaağaç	0,17
Testere talaşı	0,059
Camyünü	0,038
Sıvılar	
Civa	8,21
Su	0,556
Amonyak	0,54
Yağ, SAE 50	0,147
Freon12, CCl ₂ F ₂	0,073
Gazlar	
Hidrojen	0,175
Helyum	0,141
Hava	0,024
Su buharı(doymuş)	0,0206
Karbondioksit	0,0146

2.3.TAŞINIM

Sıcak bir metal plaka, önüne bir fan konduğu zaman çok daha çabuk soğuyacaktır. Bu durum için havanın ısıyı taşıdığını söyleriz ve bu olayı taşınım yoluyla ısı aktarımı olarak adlandırırız. Taşınım terim olarak bize birşeyler ifade ediyor olsa bile bir problemin analitik olarak çözümü için çok daha fazla bilgi gerekmektedir. Örneğin metalin sıcak bölümüne üflenen havanın hızını biliyorsak

bunun ısı akımını etkilediğini söyleyebiliriz. Ancak bu etkinin doğrusal bir etki olup olmadığı konusunda hiçbir bilgiye sahip olamayız. Hız iki katına çıkarıldığında ısı akımı da iki kat artacak mıdır? Hatta soğutmayı hava yerine su ile yaparsak ısı akımını yine değiştirmiş olacağız. Bu değişimin hangi değerde olacağı konusunda da birşey söylemek yine zordur. Aslında tüm bunların cevabını verebilmek olasıdır. Ancak burada sadece taşınımın fiziksel oluşumunu ve iletim ile ilişkisini incelemekle yetineceğiz.



Şekil 2.4 Taşınım ile ısı aktarımı

Şimdi şekil 2.4’de verilen ısıtılmış plakayı gözönüne alalım. Plakanın sıcaklık değeri T_p ve akışkanın sıcaklık değeri de T_∞ olsun.

Akışkan hızı plaka yüzeyinde azalacak şekilde verilmiştir. Bunun nedeni de yüzeydeki sürtünmedir. Eğer tam plaka yüzeyi üzerinde akışkanın hızı sıfırsa bu noktada ısı aktarımı taşınım ile değil de iletim yoluyla olacaktır. Bu nedenle bu nokta için (2.2) eşitliğini kullanarak çözüme gidebiliriz. Gerekli olan büyüklükler ise akışkana ait ısıl iletkenlik değeri ve plaka üzerindeki sıcaklık gradyanıdır. Böyle bir durumda ısı iletim yoluyla transfer edildiğine göre burada taşınım kavramından söz edilmesinin nedeni şu biçimde açıklanır : Sıcaklık gradyanı akışkanın ısıyı uzaklaştırma oranına bağlıdır. Örneğin yüksek hızlar daha büyük bir sıcaklık gradyanına neden olur. Ancak kesinlikle unutulmamalıdır ki plaka üzerinde temas noktasında ısı iletim yoluyla taşınmaktadır.

Taşınımın etkisini tanımlamak için Newton’un soğuma kanunu kullanılır :

$$q = hA(T_p - T_\infty) \quad (2.27)$$

Tablo 2.2 : Taşınım ile ısı aktarımına ilişkin ısı iletkenlik katsayıları

Durum		W/m ² °C
Serbest taşınım, ΔT=30°C		
	Hava içinde 0.3 m yüksekliğinde dik plaka	4,5
	Çapı 5 cm olan yatay silindir hava içinde	6,5
	Çapı 2 cm olan yatay silindir su içinde	890
Zorlanmış Taşınım		
	0.2 m kare plaka üzerinde 2 m/s hava akışı	12
	0.75 m kare plaka üzerinde 35 m/s hava akışı	75
	2.5 cm çaplı tüp içinde 10 m/s , 2 atm hava akışı	65
	2.5 cm çaplı tüp içinde 0.5 kg/s su akışı	3500
	5 cm çaplı tüp etrafında 50 m/s hava akışı	180
Kaynar Su		
	Havuz veya kap içinde	2,500-35,000
	Tüp içinde akış halinde	5,000-100,000
1 atm. de su buharının sıvılaşması		
	Dik yüzeyler	4,000-11,300
	Yatay tüplerin dışında	9,500-25,000

Burada ısı akımı, akışkan ve metal dış yüzeyi arasındaki sıcaklık farkıyla ilgilidir. h büyüklüğü taşınım katsayısı olarak isimlendirilir. Bu büyüklüğün hesabında bazı sistemler için analitik çözümler yapılır. Ancak karmaşık sistemlerde bu hesaplama deneysel olarak yapılmak zorundadır. Bazı durumlarda bu büyüklük film iletkenliği olarak da isimlendirilebilir. Çünkü akışkan ve plaka yüzeyinde ince bir katman boyunca iletim söz konusudur.

Denklem (2.27)'den bu büyüklüğün biriminin, ısı akışının birimi [W] olmak üzere [W/m²°C] olduğu çıkarılabilir. Daha önce söylendiği gibi taşınım yoluyla ısı aktarımı akışkanın ısı özelliklerinin (ısı iletkenlik, özgül ısı, yoğunluk...) yanısıra hızına da bağlıdır.

Eğer ısıtılmış plaka açık bir çevrede hava ile temas halinde ise ve havayı hareketlendirecek bir kaynak yok ise, yine de plaka yüzeyine yakın bir bölgede havayla plaka arasında ısı alışverişi olacaktır. Bu tür bir oluşum doğal ya da serbest taşınım olarak tanımlanır. Verilen örnekteki gibi fiziksel bir olayda ise zorlanmış taşınım sözkonusudur. Havanın hız değişimi dışarıdan bir kaynak yardımıyla sağlandığından zorlanmış taşınım tanımı kullanılmaktadır. Buharlaşma da taşınım yoluyla ısı iletimi başlığı altında incelenebilecek fiziksel bir oluşumdur. Taşınım yoluyla ısı aktarım katsayılarının yaklaşık değerleri tablo 2.2’de verilmektedir [7].

2.4.YAYINIM

İletim ve taşınımında olduğu gibi ısı maddesel ortamda aktarılacağı gibi tam bir vakum ortamında da aktarılabilir. Bu tip bir fiziksel oluşumun nedeni elektromagnetik yayınımdır. Ancak burada sıcaklık farkı nedeniyle oluşan elektromagnetik yayınımları sınırlı bir biçimde incelememiz yeterli olacaktır. Bu inceleme ısı yayınımları adı altında yapılacaktır.

Termodinamik çalışmalardan elde edilen sonuçlara göre ideal bir yayıcı ya da siyah bir cisimden yayılan enerji cismin sıcaklığının dördüncü kuvveti ve cismin yüzey alanıyla doğrudan orantılıdır. Yani

$$q_{yay\ lan} = \sigma AT^4 \quad (2.28)$$

σ orantı katsayısıdır ve Stefan-Boltzmann sabiti olarak bilinir. Değeri ise $5.669 \times 10^{-8} [W/m^2K^4]$ tür. (2.28) nolu denklem, ısı yayınımlarının Stefan-Boltzmann yasası olarak tanımlanır. Stefan-Boltzmann yasası sadece ısı yayınımları için geçerlidir. Diğer elektromagnetik yayınımlar ise bu kadar basit bir ifadeyle incelenemez. Dolayısıyla (2.28) nolu denklem sadece siyah cisimden yayılan ısıyı tanımlamaktadır. Buna göre iki yüzey arasında yayınım yoluyla gerçekleşen ısı değişimi iki yüzeyin sıcaklıkları farklarının dördüncü kuvvetiyle doğru orantılıdır. Bunu matematiksel bir ifade haline getirirsek :

$$\frac{q_{netde\ i\ im}}{A} \approx \sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (2.29)$$

Herhangi bir siyah cisim T^4 yasasına göre yayınım yapar. Siyah cisim dememizin sebebi gerçekten de siyah yüzeylerin bu şekilde davranmalarıdır. Örneğin yüzeyi karbon kaplanmış bir metal parçasında olduğu gibi. Diğer türdeki yüzeylerde yine aynı yasaya uygun olarak davranmalarına rağmen siyah cisim kadar enerji yaymazlar. Ancak gri yüzeyler olarak tanımlayabileceğimiz bu tür yapıları da hesaba katabilmek için farklı bir katsayı tanımlanır. ϵ yayınım katsayısı ile gri cisimleri ideal siyah cisimlerle bağlantılı hale getirilmiş olur. Buna ek olarak bir yüzeyden yayılan enerjinin diğer bir yüzeye tamamıyla ulaştığında söylenemez. Bu nedenle oluşacak bazı kayıplar da dikkate alınmalıdır. Bu kayıpların etkisi eşitliğe eklenecek iki katsayı ile verilir. Böylece yayınım ile ısı aktarımı ifadesi en genel haliyle aşağıdaki gibi olacaktır :

$$q = F_{\epsilon} F_G \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.30)$$

Burada F_{ϵ} yayınım katsayısı F_G ise geometrik görünüm katsayısıdır.

3. ASENKRON MOTÖRÜN ALT PARÇALARA AYRILMASI

Isıl model makinedeki maksimum sıcaklık değerlerinin hesaplanması amacına yöneliktir, ancak burada tasarıma yönelik verilerin (boyutlar ve malzeme bilgileri) ve çalışma koşullarının (kayıplar ve soğutma düzeneği bilgileri) açık bir biçimde verilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak ise ilgilenilen bölgelerdeki sıcaklıklar elde edilir ve iletim, taşınım ve yayınımına dair ısı değişim haritaları bulunur. Isıl modelin amacı verilmiş bir tasarıma ait işletme iyiliğinin değerlendirmesini yapmaktır. Isıl modelin ayrıntısına ait adımlar şu şekilde sıptanabilir :

a) İdeal bir makine geometrisinin seçimi : Şekil 3.2’de aksenal simetrik soğutulan ve rotor sargıları uç halkasıyla kısadevre edilmiş bir makine için geçerli olan geometri temsil edilmektedir. Kafesli asenkron bir makine de bu bölmeleme temel alınarak basitleştirilmiş bir biçimiyle modellenenebilir.

b) Makineyi temel ısıı elemanlara bölmek : (Şekil 3.2). Bu elemanlar zaman zaman düğüm olarak nitelendirilir. Bunun nedeni de elektrik devreleri ile aralarında olan benzerliktir. Bütün bir değişim haritası ise daha sonra hazırlanacaktır. Son ısıı değişimlerine ilişkin değişim haritası şekil 3.1’de verilmektedir. Bu yolla şekil 3.2’de verilen geometrinin tanımlası yapılmış olur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta şekil 3.2’deki bazı elemanların şekil 3.1’de toplu olarak gösterilmiş olmasıdır. Bu yöntem modelleme sırasında bir ortalama sıcaklık değerine gereksinim yaratır. Bunun incelemesi daha sonra yapılacaktır. Bazı kısımlar ise ısıı aktarımının birden fazla türüne uyabilirler. Şekilde bu da gösterilmiştir.

c) Herbir düğümde enerji korunumu ilkesini tanımlayan denklemlerin yazılması :

Sürekli durumda :

$$L_i = Q_i + C_i + R_i \quad i=1,2,3\dots N \quad (3.1)$$

N eleman sayısı, L_i i nolu elemandaki ısıı üretim oranı, Q_i , C_i ve R_i i nolu elemandan, iletim, taşınım ve yayınım yoluyla oluşan ısıı akış oranlarıdır. Bu ısıı

d) Denklemlerde bilinmeyenlerin hesabı için bunlarla ilgili katsayıların bulunması : (Bu katsayılar elektriksel benzeşimin geçerli olduğu durumlarda ısı eşdeğer dirençlerdir). Bu katsayılardan taşınım ile ilgili olanların bazıları sıcaklıktan kısmen bağımsızdırlar.

f) İlgilenilen sıcaklık artışlarının belirlenmesi ve ısı değişim haritası değerlerinin bulunması

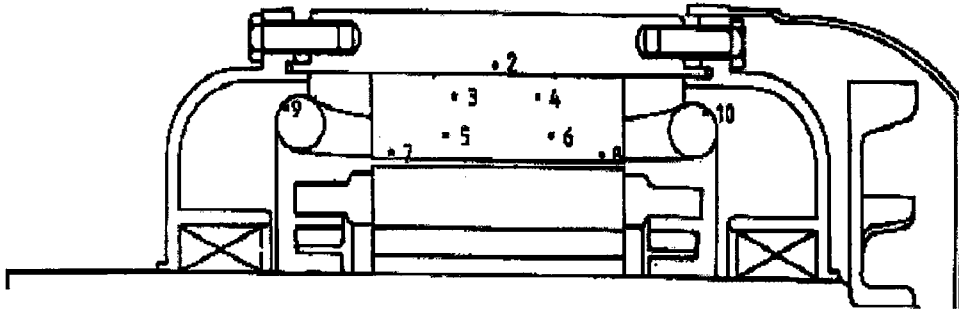
19

ayrılan geometrik yapıda herbir eleman bir düğüm noktasıyla temsil edilmelidir. Modelin bu bölümünde incelemeyi yapacak kişinin öngörüsü ve ne kadar hassas bir model yaratmak istediği önem kazanır. Bu nedenle literatürde aynı mantığı kullanmasına rağmen çok farklı yapıda ısınma modelleriyle karşılaşmak mümkündür. Isı akış yolları kullanılarak birbirleriyle ilişkileri olan elemanlar arasında düğümleri birbirine bağlayan ısıl dirençler tanımlanır. Tanımlamalar yapıldıktan sonra geometriyi modelleyen ısıl eşdeğer devre kurulur. Son aşama ise düğümlerde tanımlanacak ısıl denklemlerin çözülmesidir.

3.1.ALT PARÇALARIN TANIMLARI

Toplu parametrelili ısınma modeli başlıca tüm alt parçaları ve ısıl aktarım sürecini, karmaşık olmadan kapsayacak şekilde ayrıntılıdır. Bu model üzerinde daha önce yapılan çalışmalarda, sürekli durumda hacim bileşenleri arasında ısının nasıl aktarıldığı başarılı bir biçimde gösterilmiştir. Özellikle Perez ve Kassakian [1] her bir alt parçayı, parçaya ait ortalama sıcaklık, ısı bir düğüm olmak üzere modellemişlerdir. Alt parçalardaki kayıplar nedeniyle oluşan ısı üretimi, o düğümde bir noktasal kaynak olarak verilmiştir. Çalışma herhangi bir düğümde ek bir ısı üretimini hesaplamak kaydıyla geçici halide kapsamaktadır. Bu da ortalama sıcaklıkla ve toplam ısıl kapasiteyle ilgilidir.

Bir asenkron makineye ait geometri en basit biçimiyle 10 alt parçaya ayrıştırılabilir. Bu parçalar şekil 3.2’de verilmiştir. Makine mil eksenine yarıçapsal olarak simetrik kabul edilmiştir. Örneğin makinenin dışına ve bir ucuna takılmış soğutma fanı nedeniyle makinelerin çoğunda bulunan simetrisiz sıcaklık dağılımının etkisi bu nedenle küçük alınmıştır.



Şekil 3.2 Asenkron motöre ilişkin alt parçaların tanımı

Parçaların hepsi, gövde (1), stator (2,3), sargılar (4,6), rotor (8,10), genel silindirik toplu bileşene dayanan, ısıl dirençlerden oluşmuş bir devre olarak modellenmiştir. Ek olarak hava aralığı (5) ve kapak boşluğu havası (7) ısıl kapasiteleri ihmal edilebilen iki parça şeklinde tanımlanmışlardır. Bu on alt parça doğrudan birbirleriyle bağlıdır. Böyle bir şey söz konusu değilse soğutma havası yollarında taşınım iletilen ısıyı da hesaba katmak için ısıl dirençler kullanılmıştır. Ayrıca ısıl bir direnç ise stator laminasyonunun gövdeyle temasta olduğu durumlarda ek olarak verilmiştir. Yayınım yoluyla gerçekleşen herhangi bir ısı aktarımı ise ihmal edilmiştir.

3.2.ISIL MODELE İLİŞKİN ALT PARÇALARIN AYRINTILARI

Aşağıda her bir alt parçaya ait devreye, iletim ve taşınım kuralları uygulanırken yapılan varsayımlar ve basitleştirmeler kısa bir biçimde anlatılmıştır. Birçok durumda ise simetri nedeniyle makinenin sadece yarısı gözönünde bulundurulmuştur [8].

3.2.1.GÖVDE

Gövde alt parçası bütün oluklu soğutma yapılarını ve kasnak tarafı aksinde bulunan kapağı kapsamaktadır. Tüm yapının eş bir sıcaklığa sahip olduğu ve çevreye tekil bir gövde olarak taşınım ısıl direnciyle bağlandığı varsayılmıştır. Isıyı ise gövde-stator ısıl direnci üzerinden ve kapak boşluğu havasındaki taşınım yoluyla alır.

3.2.2.STATOR BOYNU

Stator boynu alt parça olarak tüm stator sac paketinden ayrı olarak modellenmiş ve stator sac paketinden stator dişlerinin çıkarılmasıyla elde edilmiştir. Yarıçapsal doğrultudaki sac dilimlerinin yığın faktörleri nedeniyle oluşan düzensizliğe ilişkin hesaplamalar, genel silindirik yapıda bazı düzeltmeler gerektirir.

3.2.3.STATOR DİŞİ

Genel silindirik bileşenin geliştirilmiş bir durumu uygulanan stator dişleri silindirik dilimler topluluğu olarak kabul edilmiş ve bunlar ısıl olarak birbirleriyle koştur bağlanmışlardır. Dişe ait eşdeğer yay ϕ_e yardımı ile dilim kesit alanı hesaplanmıştır. Oluk sargılarının çevresel ısı akışı ek olarak bir dirençle

gösterilmiştir. Bu direnç oluk yüzeyi ile dış merkezindeki ortalama sıcaklık noktası arasındadır. Stator boynu için yapılanlar benzer şekilde burada da yapılabilir.

3.2.4.OLUK SARGILARI

Oluklarda bulunan sargı bölgeleri katı silindirik çubuklar olarak modellenmiştir. Bu çubuklar bir dizi iletken ve yalıtımdan oluşmuştur. Eksenel ve yarıçapsal yöndeki iletimi tanımlamak için sadece bakır iletkenlerin oluk boyunca eksenel yönde ısı aktarımı gerçekleştirdiği kabul edilmiştir. Yarıçapsal yönde ise sargı homojen bir katı gibi davranır ve iletkenlik değeri yalıtımın 2,5 katıdır. 2,5 değeri referans 7'den alınmıştır ve bu doyurulmuş sargılar üzerinde yapılmış ölçümler çıkarılmıştır. Burada yalıtımın boşluk etkisi de dahil edilmiştir. Çubukların yarıçapı olukların doluluğu %100 iken hesaplanan oluk alanına eşit olacak şekilde seçilmiştir. Oluk izolasyonu ise ayrıca polyamid bir şerit olarak modellenmiştir ve bu makinede kullanılan izolasyon sınıfı ile uyumludur.

3.2.5.UÇ SARGILARI

Uç sargıları homojen halkalar (toroid) biçiminde modellenmiştir ve iletkenlerle yalıtımın yanısıra, stator oluk sargılarının kısa silindirik uzantılarının dairesel ağını temsil eder. Oluk sargılarındaki davranışa benzer olarak yarıçapsal yöndeki ısı akışı homojen çubuklardaki gibi incelenir. Eksenel yöndeki ısı akışını stator oluk sargıları boyunca bakır iletken uzantılarının oluşturduğu halkadaki ortalama sıcaklık noktasının ortaya çıkardığı kabul edilmiştir. Halka dış yarı çapının tasarım resimlerinde açıkça verilmediği durumlarda bu değer stator oluklarının ortalama yarıçapı olacak şekilde alınır. Halka kesit alanının eşdeğer yarıçapı tüm sargı hacminden elde edilir. Bu hacim oluk ve uzantılardaki bakırların çıkarılmasından sonra kalan değerdir.

Uç sargısı modeline ortalama sıcaklık değerinden çok, tepe sıcaklık değerini hesaplamak amacıyla ağırlık verilir. Çünkü bu değer izolasyonun yaşlanma ve bozulmasını belirlemektedir. Isı iletim denklemlerinin teorik olarak çözümünden silindirdeki yarıçapsal sıcaklık dağılımı incelenirse şöyle bir oran elde edilmektedir : Sıcaklığın tepe değeri ortalama değer 1,5 katıdır. Bu katsayı sargılara ait tepe sıcaklığını elde etmek amacıyla, Uç sargısının ısı direnç modelini belirlemede

kullanılır. Depo edilmiş enerji değerin doğru değerin korunması için ısı kapasitede aynı miktarda azaltılır.

3.2.6.HAVA ARALIĞI

Hava aralığı stator dişleri, stator oluk açıklığında görünen stator sargıları ile rotor yüzeyi arasında bir bağlantı kurar. Buradaki ısı dirençler bu katılar arasındaki temas alanlarından ve hava aralığı taşınım katsayısından bulunur.

3.2.7.KAPAK BOŞLUĞU HAVASI

Kapak boşluğunda dolaşım yapan havanın düzgün dağılımlı bir sıcaklığa sahip olduğu kabul yapılır. Rotor soğutma kanallarından ayrı olarak - burada başka bir değer kullanılır - tüm yüzeylerdeki taşınım yoluyla ısı aktarımı tekbaşına bir taşınım katsayısı ile tanımlanır. Yüzey düzensizliklerinin ve gerçek Uç sargısı düzgün yapısının en büyük alanının hesaba katılması için, uç halkasının halka modeli tarafından belirlenen alan %50 oranında büyütülür.

3.2.8.ROTOR SARGISI

Rotor sargıları demir çekirdeği çevreleyen alüminyum silindirler olarak modellenmişlerdir. Bu silindirlerin hacmi kafes çubuklarının hacmine eşittir. Ek bir adım olarak uç halkaları, fanında içinde bulunduğu eşdeğer hacimli bir disk olarak tanımlanmıştır. Böyle bir yaklaşımda bulunmanın amacı basitleştirme yapmaktır, çünkü sıkıştırılmış alüminyum çubuklar ile rotor sac dilimleri arasında iyi bir ısı teması mevcuttur.

3.2.9.ROTOR SACI

Rotor sacındaki haseplama yöntemi statordaki ile aynıdır. Eğer eksenel yönde soğutma kanalları mevcutsa bu durumda genel silindirik yapıya ilişkin ısı direnç, alanın azalmasına orantılı olarak azalacaktır.

3.2.10.MİL

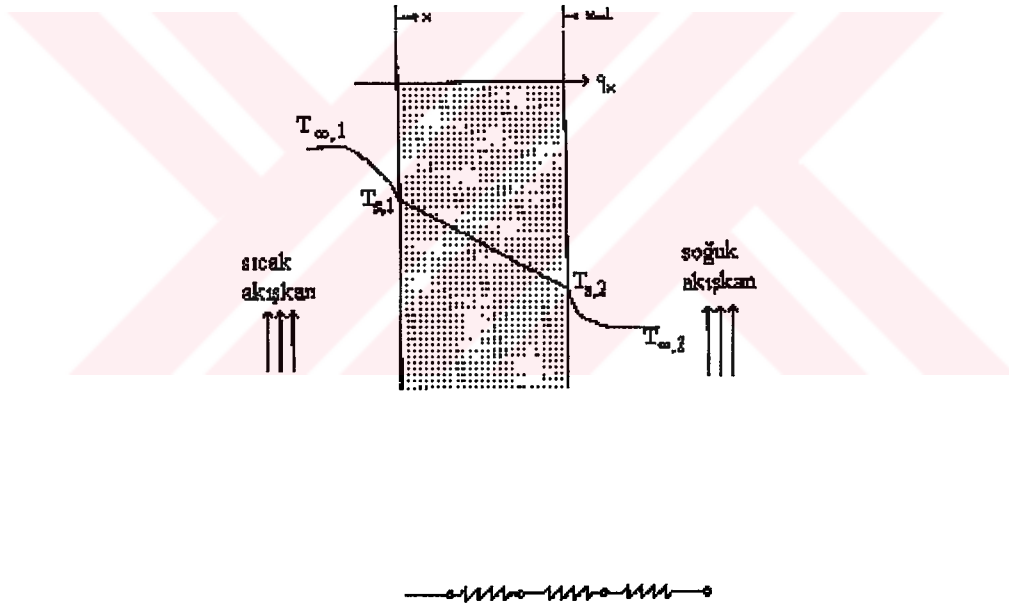
Mil, içinde ısı üretimi olmayan silindirik bir çubuk olarak modellenmiştir. Eksenel ısı iletimi ise üç bölge olarak gösterilmiştir. Bunlardan ilki rotor çekirdeğinin altında, ikincisi mil yatağı altındadır. Üçüncüsü ise ilk ikisinin ortalama sıcaklıkları arasında ısı bir bağlantı gibi davranır. Tüm milin ortalama sıcaklığı ise üçüncü

bölgenin merkezindeki sıcaklık olarak alınır. Mil yatağı boyunca gövde ve mil arasında iyi bir ısıl temas olduğu varsayılmıştır. Bunun için milin dış yüzeyinin bir kısmı gövdenin bir parçası gibi davranır.



4. ISI AKTARIMI VE ELEKTRİK DEVRELERİ ARASINDAKİ BENZEŞİM

Kesit haldeki bir duvarda bir boyutlu iletim incelendiğinde sıcaklığın tek boyutun (örneğin x) fonksiyonu olarak değiştiği görülebilir. Şekil 4.1'deki duvar farklı sıcaklıklardaki iki akışkanı birbirinden ayırmaktadır. Isı aktarımı sıcaklığı büyük değerde olan akışkandan sıcaklığı küçük değerde olan akışkana doğru olacaktır. Bu ısı aktarımı da aradaki duvar kesiti boyunca olacaktır. İncelemeye bu duvar kesiti ele alınarak başlanmalıdır [9].



Şekil 4.1 Kesit duvar

4.1.SICAKLIK DAĞILIMI

Duvardaki sıcaklık dağılımı ısı denklemlerinin uygun sınır koşulları altında çözümüyle elde edilebilir. Sürekli halde kaynaklar dağılmamış ve duvar içinde enerji dönüşümü yoksa ısınma denklemi şu biçimde yazılabilir :

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (4.1)$$

Bir boyutlu ve sürekli hal durumunda ısı üretimi olmadığı varsayılırsa, ısı akışı sabittir ve doğrultudan bağımsızdır. Eğer duvarın ısıl iletkenliği sabit kabul edilirse denklem çözüme ulaşmak için iki defa integre edilir

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (4.2)$$

Denklemdaki sabitleri bulabilmek için sınır koşullarını bilmemiz gerekir. İncelediğimiz durum için $x = 0$ ve $x = L$ için sıcaklık değerlerini bildiğimize göre denklemdeki sabitler kolaylıkla bulunabilir. :

$$T(0) = T_1 \quad \text{ve} \quad T(L) = T_2$$

$$x = 0 \text{ için } T_1 = C_2$$

$$x = L \text{ için } T_2 = C_1 L + C_2 \quad T_2 = C_1 L + T_1$$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Elde edilen sabitler denklemde yerine yazılırsa :

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 \quad (4.3)$$

Bu denklemlerden şu sonuç çıkarılabilir :

Bir boyutlu sürekli halde ısı üretimi olmayan bir duvarda ısıl iletkenlik sabit ise sıcaklık x doğrultusunda doğrusal olarak değişir. Elde ettiğimiz bu sonucu Fourier yasasına uygulayabiliriz. Buna göre ısı akımını şu ifadeyle belirlenir.

$$q_x = -kA \left(\frac{dT}{dx} \right) = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) \quad (4.4)$$

Burada A alanı ısı akışına dik doğrultudaki kesittir. Bu değer bir sabittir ve x 'den bağımsızdır. Isı akışı ise şöyle yazılabilir :

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L}(T_1 - T_2) \quad (4.5)$$

4.2.ISIL DİRENÇ

Bu noktada elektrik devre denklemleri ile ısı aktarım denklemleri arasında bir ilişki kurulabilir. Elektrikte tanımlanan direnç büyüklüğü ısı aktarımında da benzer şekilde bulunabilir. Elde edilen denklemlere göre bu tanım şu şekildedir :

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{q_x} = \frac{L}{kA} \quad (4.6)$$

Elektrikte direnç tanımı ise şu biçimde yapılır :

$$R_e = \frac{U_1 - U_2}{I} = \frac{L}{\sigma A} \quad (4.7)$$

İki denklem arasındaki benzerlik görülmektedir. O halde ısıl direnç herhangi bir yüzeydeki iletim ısı aktarımı ile ilişkilendirilebilir. Newton'un soğuma kanunu kullanılırsa :

$$q = hA(T_1 - T_2) \quad (4.8)$$

Isıl direnç için :

$$R = \frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{1}{hA} \quad (4.9)$$

Isı aktarımını eşdeğer bir devre şeklinde göstermek problemlerin çözümü açısından kolaylık sağlamaktadır. Elimizdeki modeli bir devre şekline getirirsek duvarın yüzeylerinde ve içinde her bir eleman için şunlar yazılabilir :

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}} \quad (4.10)$$

Sistemi bütün olarak ele alırsak sıcaklık farkı $T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$ olacaktır.

Sistemin bileşke direncine R_{bil} dersek

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{bil}} \quad (4.11)$$

Dirençler seri olarak birbirine bağlıdır ve toplamaları aşağıdaki gibi yazılı :

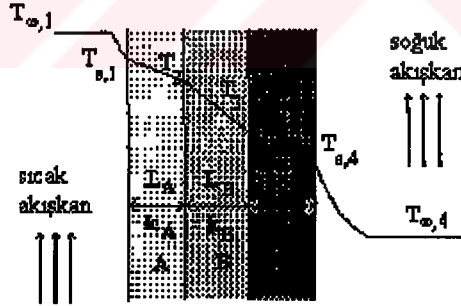
$$R_{bil} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \quad (4.12)$$

Bu tür bir inceleme iki yüzey arasında katı bir cisim değilde bir gaz kütlesi varken de yapılabilir. Bu durumda yayılım yoluyla gerçekleşen ısı aktarımı için ısıl direncin ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$R_r = \frac{T_s - T_{sur}}{q_{rad}} = \frac{1}{h_r A} \quad (4.13)$$

4.3.BİLEŞKE DUVAR SİSTEMİ

Eşdeğer devreler karmaşık sistemler için de kullanılabilir. Daha önce incelediğimiz duvar birden fazla tabakadan oluşturulabilir. Böyle bir sistem şekil4.2’de verilmiştir.



Şekil 4.2 Bileşke duvar sistemi

Bir boyutlu ısı akımı böyle bir sistem için şu biçimde tanımlanır :

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_{bil}} \quad (4.14)$$

$T_{\infty,1}$ ve $T_{\infty,4}$ sistemin iki ucundaki sıcaklık değerleridir. $\sum R_{bil}$ ise tüm ısı dirençleri içermektedir :

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[\left(\frac{1}{h_1 A} \right) + \left(\frac{L_A}{k_A A} \right) + \left(\frac{L_B}{k_B B} \right) + \left(\frac{L_C}{k_C C} \right) + \left(\frac{1}{h_4 A} \right) \right]} \quad (4.15)$$

Tüm bu direnç değerini tek tek terimler halinde yazmak da mümkündür.

Karmaşık sistemlerde genellikle ısı aktarım katsayısı U ile çalışmak tercih edilir. U'nun tanımı Newton'un soğuma kanunu ile benzerlik gösterir.

$$q = UA\Delta T \quad \Delta T \text{ iki uç arasındaki sıcaklık farkıdır.}$$

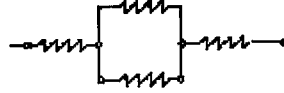
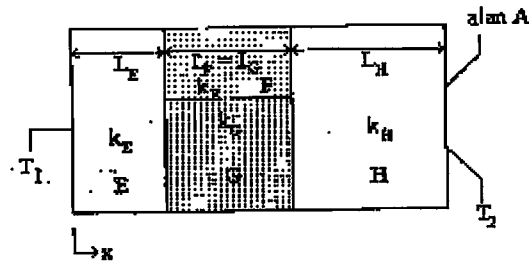
Isı aktarım katsayısı ısı dirençle ilişkilidir ve elde edilen denklemlere göre $UA = 1 / R_{bil}$ yazılır.

$$U = \frac{1}{R_{bil} A} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{h_1} \right) + \left(\frac{L_A}{k_A} \right) + \left(\frac{L_B}{k_B} \right) + \left(\frac{L_C}{k_C} \right) + \left(\frac{1}{h_4} \right) \right]} \quad (4.16)$$

Genel olarak ise şu yazılabilir :

$$R_{bil} = \sum R_i = \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{UA} \quad (4.17)$$

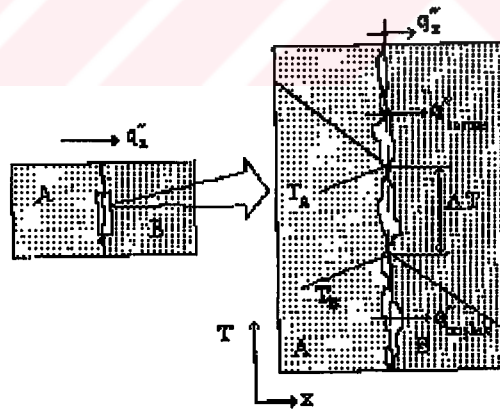
Karmaşık duvar problemleri seri yada paralel türlerde de oluşturulabilir. şekil4.3'de böyle bir sistem görülmektedir.



Şekil 4.3 Karmaşık duvar sistemi

4.4.TEMAS DİRENCİ

Buraya kadar ihmal edilmesine rağmen bileşik sistemlerde iki yüzey arasındaki sıcaklık düşümü önemlidir. Bu etki temas direnci olarak tanımlanan büyüklükle ifade edilebilir. Bu büyüklüğün etkisi şekil 4.4’de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 İki yüzey arasındaki temas bölgesi

Bu direnç iki yüzey arasında kalan bölümde birim alan için :

$$R_{tem}'' = \frac{T_A - T_B}{q_x''} \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Aslında burada iki farklı dirençten söz etmek mümkündür. Bunlardan biri iki yüzeyin pürüzlü yapısından dolayı birbirine temas halindeki noktalara ait iletim temas direnci, diğeri ise iki yüzey arasındaki boşlukları dolduran havadaki yayınımla iletilen ısı aktarımına ait temas direncidir. Bu nedenle bu direnci gerçekte iki koşul direnç olarak görmekte mümkündür. Temas yüzeyi oldukça küçüktür ve pürüzlü yüzeylerde temas direnci aslında iki yüzey arasındaki havanın etkisiyle oluşmaktadır.

4.5. YARIÇAPSAL SİSTEMLER

Silindirik ve küresel sistemler çoğunlukla sadece çapsal yönde sıcaklık gradyanına sahip olduklarından bir boyutlu olarak davranırlar. Burada silindirik sistemler bilinen yöntemlerle analiz edilmeye çalışılacaktır

4.5.1. SİLİNDİR

Genel olarak rastlanan örnek içi boş silindirdir. İç ve dış silindirlerde farklı sıcaklıklarda akışkanlar olduğu varsayılır. Sürekli durum denklemleri için şu yazılır :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (4.18)$$

k burada bir değişken olarak davranır. Fourier yasasının yaklaşım biçimini kullanırsak bu denklemin fiziksel anlamı ortaya çıkacaktır. Silindirin herhangi bir yüzeyinden akışkana iletilen enerji şu şekilde yazılabilir :

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi L) \frac{dT}{dr} \quad (4.19)$$

$A = 2\pi rL$ alanı ısı akışına normal doğrultudaki alandır. (4.19) eşitliğine göre q_r ısı akımı çapsal doğrultuda sabittir. Silindir içindeki sıcaklık dağılımını bulmak için (4.18) nolu denklem çözülür ve uygun sınır koşulları kullanılır. k değerini sabit varsayarsak (4.18) denklemini iki defa integre edilir ve denklemin genel çözümü bulunur :

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (4.20)$$

Buradaki sabitleri bulmak için aşağıdaki sınır koşulları kullanılır :

$$T(r_1) = T_{s,1}$$

$$T(r_2) = T_{s,2}$$

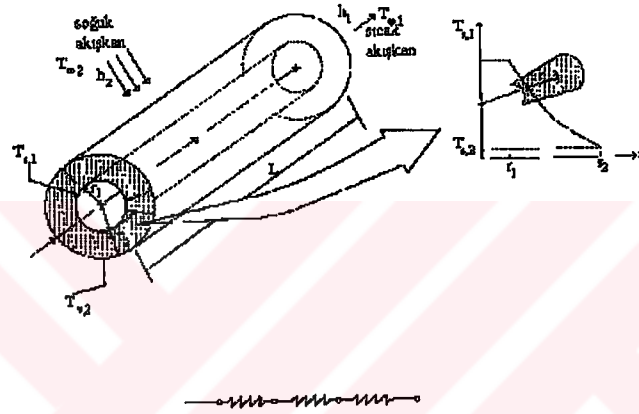
Genel çözümden C_1 ve C_2 hesaplanır:

$$T_{s,1} = C_1 \ln r_1 + C_2$$

$$T_{s,2} = C_1 \ln r_2 + C_2$$

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2} \quad (4.21)$$

Yarıçapsal iletimde sıcaklık dağılımının doğrusal değilde logaritmik olduğuna dikkat edilmelidir. Bu logaritmik değişim şekil 4.5’de görülmektedir



Şekil 4.5 Yarıçapsal iletimde sıcaklık dağılımı

Eğer (4.21) denkleminde elde edilen sıcaklık dağılımı Fourier kanunu ile birleştirilirse ısı akımı için geçerli olan ifade elde edilmiş olur :

$$q_r = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (4.22)$$

Bu denklemden açıkça görüldüğü gibi silindirdeki çapsal ısı direnç şu şekilde verilir :

$$R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi Lk} \quad (4.23)$$

Bu direnç şekil 4.5'deki seri devre için gösterilmiştir. q_r değerinin r 'den bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi de karmaşık yapıdaki silindirik sistemleri ele alalım. Şekil 4.6'da böyle bir sistem verilmiştir. Temas yüzeyindeki etkiler ihmal edilirse ısı akımı için şu yazılabilir :

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}} \quad (4.24)$$

Bu uzun denklem bir uçtan bir uca ısı aktarım katsayısı U 'nun fonksiyonu olarak yazılırsa :

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = U_1 A_1 (T_{\infty,1} - T_{\infty,4}) \quad (4.25)$$

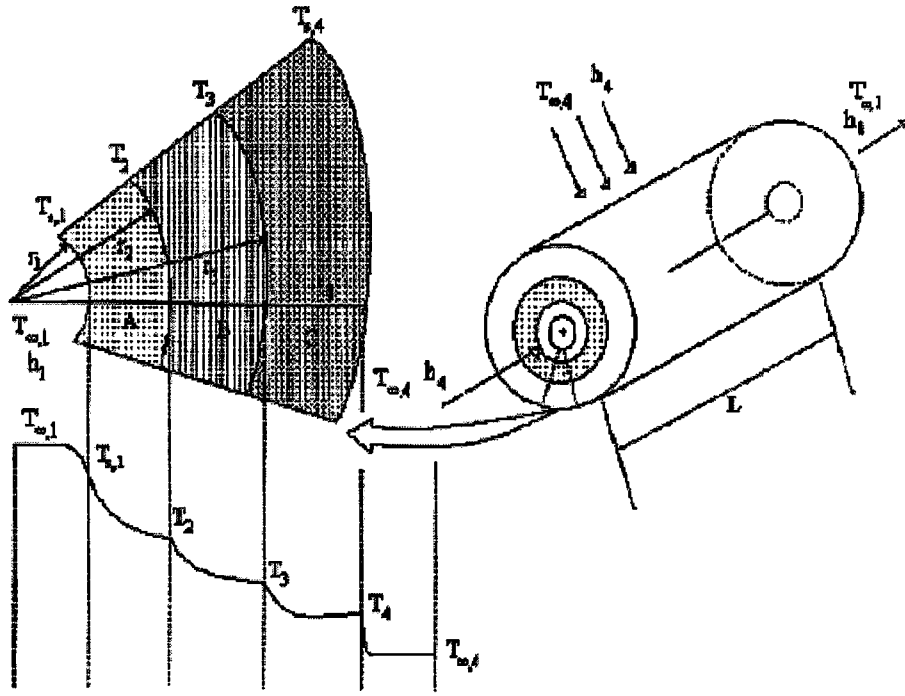
Burada :

$$A = 2\pi r_1 L$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4} \frac{1}{h_4}} \quad (4.26)$$

(4.26) nolu denklem U 'yu A_1 iç yüzey alanının terimleri olarak almıştır. Bu keyfi bir tanımlamadır. U katsayısı A_4 'ün terimleri olarak da belirlenebilirdi. Burada aşağıdaki gibi bir ilişki söz konusudur :

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = \left(\sum R_i\right)^{-1} \quad (4.27)$$



Şekil 4.6 Karmaşık silindirik sistemler

4.6. ELEKTRİK DEVRELERİ VE ISI AKTARIMI ARASINDAKİ BENZEŞİM

Çalışma sonunda kurulacak modelde ısı dirençlerden bahsettiğimize göre elektrik ile ısı aktarımı arasındaki benzeşimden faydalanmak mümkündür. Her iki alanda birbirine karşı düşen büyüklükleri tablolarsak :

ΔU	Gerilim düşümü	ΔT	Sıcaklık farkı
R_e	Elektriksel direnç	R_1	Isıl direnç
Q_e	Elektrik yükü	Q_1	Isıl enerji
C_e	Kapasite	C_1	Isıl kapasite
I	Akım	q	Isı akış oranı

Isıl direncin genel tanımı ise şöyledir :

$$R_i = \frac{\Delta T}{q} \quad (4.28)$$

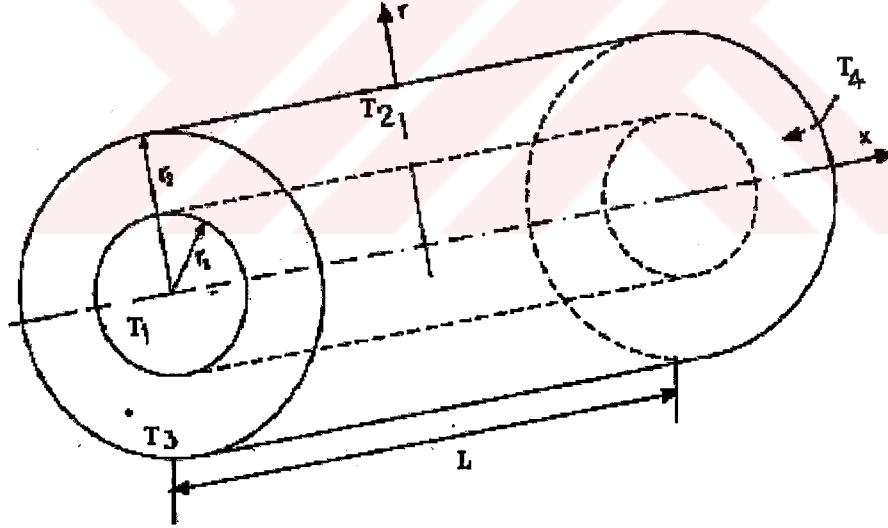


5.ISIL DİRENÇLERİN TANIMLANMASI

Oluşturulan matematik model tamamıyla eşdeğer devre üzerine oturmaktadır. Devre elemanlarını ısı dirençler oluşturduğuna göre bu dirençlerin doğru bir biçimde elde edilmesi matematik modelin başarısını doğrudan etkileyecektir. Şimdi bu dirençlerin nasıl bulunabileceğini inceleyelim [10].

5.1.TEMEL SİLİNDİRİK BİLEŞEN

Makineye ait katı parçaların ifadeleri yazılırken, şekil 5.1’de gösterilen genel silindirik bileşen için geçerli olan denklemler temel alınır. Devre bileşenleri arasındaki ısı iletimi tanımlayan ısı direnç devresini, basit bir biçimde elde etmek için bazı öngörmeler yapılmıştır [11] :



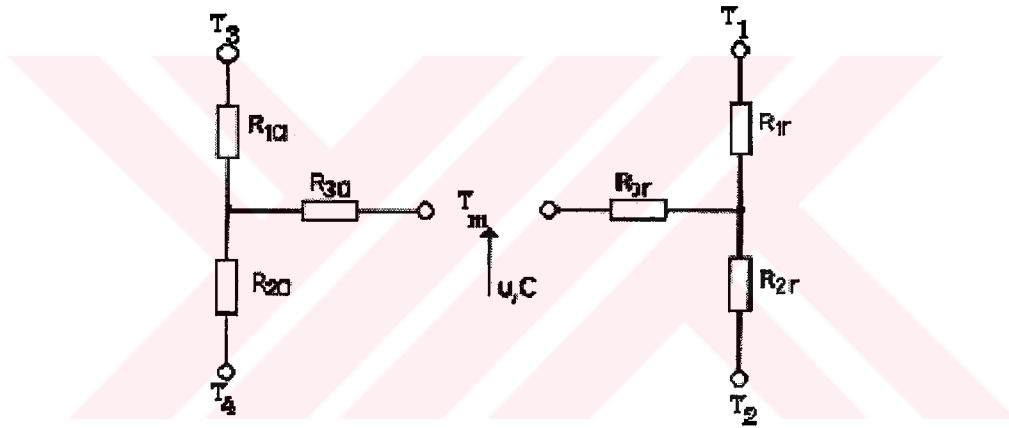
Şekil 5.1 Temel silindirik bileşen

- 1) Eksenel ve yarıçapsal yöndeki ısı akışı birbirinden bağımsızdır.
- 2) Tek başına ortalama sıcaklık hem yarıçapsal hem de eksenel yöndeki ısı akışını tanımlar.

3) Dairesel bir ısı akışı olmadığı kabul edilmiştir.

4) Isıl kapasite ve ısı üretimi düzenli olarak dağılmıştır.

Bu varsayımlar kullanılarak, eksenel ve yarıçapsal yöndeki iletimle ısı aktarımı denklemlerinin çözümü, iki ayrı ve üç girişli devre olarak elde edilmiştir. Bu devre şekil 5.2’de verilmiştir. Her bir devrede girişlerden ikisi yaklaşık olarak yüzey sıcaklığını tanımlarken üçüncü giriş ucu ise içlerinde ısı üretimi u olan ya da ısıl kapasite C ’ye sahip alt parçaların ortalama sıcaklıkları T_m ’i tanımlar. Alt parça içindeki ısı üretiminin süperpozisyonu ortalama bir sıcaklığa sebep olur. Bu sıcaklık değeri merkez düğüm için verilen değerden daha küçüktür. Bu etki devrede R_{3a} , R_{3r} dirençlerinin negatif değeri oluşuyla temsil edilir. Isıl dirençlerin değeri her bir devrede, doğrudan iletim yoluyla ısı aktarımı denklemlerinin bağımsız olarak yarıçapsal ve eksenel yönde çözümüyle elde edilir.



Şekil 5.2 Eksenel ve yarıçapsal ısı eşdeğer devreler

Asenkron makine geometrisi genel olarak silindirik bir geometri olduğuna göre daha önce elde ettiğimiz ısı aktarımı denklemlerini genel silindirik bileşeni kullanarak çözüp, her bir alt parçayı tanımlayan ısıl dirençleri bulabiliriz. Dirençlerin tanımlanması sırasında aşağıdaki akış sırası izlenmektedir :

- 1) Akışın yönünün belirlenmesi (Akış eksenel ya da yarıçapsal yönde olabilir)
- 2) Isı akışına dik alanın bulunması
- 3) Isı geçiş denkleminin yazılması (Burada ilgilenilen geometrinin biçimine göre ya kartezyen koordinatlar ya da silindirik koordinatlar kullanılır.)

Kartezyen koordinatlarda :

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (5.1)$$

Bu denklemin çözümü :

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (5.2)$$

biçimindedir. Sınır koşulları olarak

$$x = 0 \text{ için } T(0) = T_1$$

$$x = L \text{ için } T(L) = T_2$$

değerleri kullanılırsa $T(x)$ için şu denklem bulunacaktır :

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 \quad (5.3)$$

Bu denklemi kullanarak ısı akış denklemini çözersek :

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (5.4)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (5.5)$$

$$q_x = -kA \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (5.6)$$

Bundan sonra yapılacak olan elektriksel benzerlikten faydalanarak ısıl direnci tanımlamaktır. Elektrikteki potansiyel farkının karşılığı burada sıcaklık farkıdır. Akım ise ısı akışı q 'ya karşılık gelmektedir. Böylece elektrikte

$$R = \frac{U_1 - U_2}{I} \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlanan direnç burada

$$R = \frac{T_1 - T_2}{q} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Bu tanıma göre elde etmek istediğimiz direnç değeri

$$R = \frac{L}{kA} \quad (5.9)$$

olacaktır.

Silindirik koordinatlarla çalışıldığında ise çözülmesi gereken diferansiyel denklem şu şekildedir :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (5.10)$$

Aynı mantıkla bu denklemin çözümünün sonucunda ise ısı direnç olarak elde edilecek değer :

$$R = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{-k2\pi L} \quad (5.11)$$

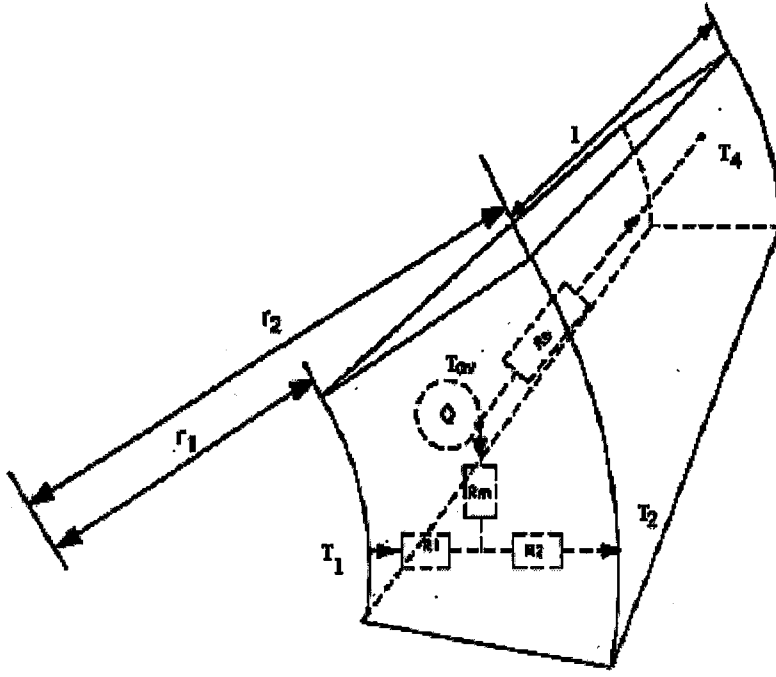
olacaktır.

Ancak bu dirençler tanımlanırken alt parçalar içindeki ısı üretimler gözönüne alınmamıştır. Şayet alt parça içinde ısı üretim de mevcutsa kullanılacak olan diferansiyel denklemin yeni hali aşağıdaki gibi olacaktır :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q'}{k} = 0 \quad (5.12)$$

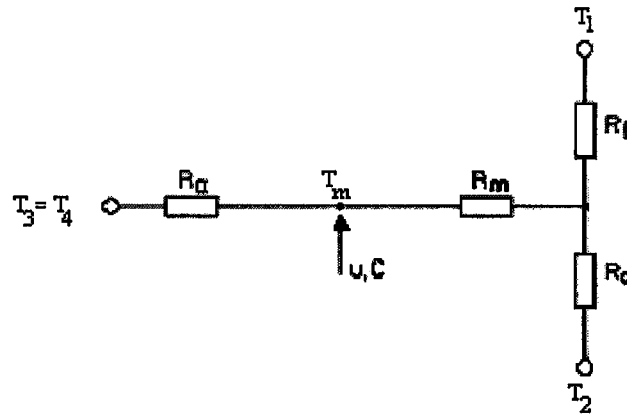
$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'}{k} = 0 \quad (5.13)$$

Herbir alt parça ayrı ayrı ele alınırsa içindeki ısı devre bir T eşdeğer devre ile temsil edilir. Yalnız burada ısı akışı iki farklı yönde ve birbirinden bağımsız olduğundan iki devre tanımlanır. Ancak bu iki devre ortalama sıcaklık düğümü kullanılarak birleştirilir.



Şekil 5.3 Temel silindirik bileşen içinde her iki yöndeki ısı akışının birleştirilmesi

İki farklı akış birleştirilirken, silindirdeki sıcaklık değerleri merkez eksen boyunca simetrik kabul edilirse aksenal doğrultuda motorün iki yüzey sıcaklığı birbirine eşit olacaktır ($T_3 = T_4$). Bu yarıçapsal akışta akışa dik alanın yarıya düşmesini sağlar ($L=L/2$). Ancak aksenal akışta görülen L uzunluğu akışa dik alandan değil akışın kattığı yoldan gelmektedir. Bu nedenle aksenal akış incelenirken L uzunluğu yarıya inmemekte ve aynı kalmaktadır. Bununla beraber iki yüzey sıcaklığı aynı alındığından R_{2y} direnci ortadan kalkmasına rağmen ısı akışı R_{me} üzerinden geçmeye devam eder.



Şekil 5.4 İki boyutlu ısı akışını tanımlayan ısı eşdeğer devre

Bundan sonra yapılması gereken bu direnç tanımlarının çıkarılmasıdır. Bu direnç değerlerinin bulunuşuna dair ayrıntılar bölüm 6'da verilmiştir. Şimdi bu direnç tanımlarının nasıl yapıldığını inceleyelim.

5.2. YARIÇAPSAL YÖNDEKİ ISI AKIŞININ İNCELENMESİ

Bölüm 6'daki tanımlamalardan içi boş bir silindir için geçerli olan ısısal direnç ifadeleri kullanılırsa elde edilecek direnç değerleri şu şekilde olacaktır :

$$R_{1y} = \frac{1}{4\pi k_y L} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (5.14)$$

$$R_{2y} = -\frac{1}{4\pi k_y L} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (5.15)$$

$$R_{my} = \frac{1}{8\pi k L (r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{4r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - r_2^2 - r_1^2 \right) \quad (5.16)$$

$$R_{1e} = \frac{L}{2\pi k_e (r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.17)$$

$$R_{2e} = \frac{L}{2\pi k_e (r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.18)$$

$$R_{3e} = \frac{L}{6\pi k_e (r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.19)$$

Temel silindirik bileşene ait toplam ısısal kapasite ise malzeme yoğunluğu ρ , öz ısı c_p ve motor boyutları kullanılarak hesaplanır :

$$C = \rho c_p \pi (r_2^2 - r_1^2) L \quad (5.20)$$

Bir boyutlu iki devre ise basit olarak ortalama sıcaklık düğümlerinden bağlanarak birleştirilir. Merkez eksen boyunca silindirdeki sıcaklıkları simetrik kabul ettiğimizden yüzey sıcaklıkları T_3 ve T_4 eşit olacaktır. Böylece silindirin yarısını modellemek, ısı üretiminin ve ısısal kapasitenin yarısı alınarak mümkün hale gelir.

Bundan sonra ısı devre şekil 5.5’de gösterilen duruma indirgenmiş olur. Bu devre iki iç düğüme ve dört ısıl dirence sahiptir. Bunların değeri de aşağıdaki gibidir :

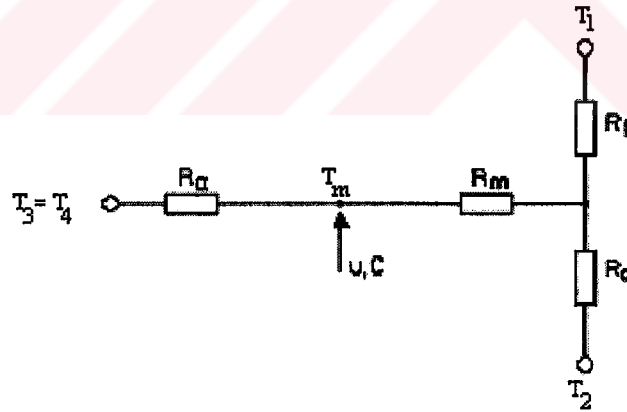
$$R_a = R_{1e} + 2R_{3e} = \frac{L}{6\pi k_a (r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.21)$$

$$R_b = 2R_{2y} = -\frac{1}{2\pi k_y L} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (5.22)$$

$$R_c = 2R_{1y} = \frac{1}{2\pi k_y L} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (5.23)$$

$$R_m = 2R_{3y} = \frac{1}{4\pi k L (r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{4r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - r_2^2 - r_1^2 \right) \quad (5.24)$$

Örneğin stator ve rotor sac dilimleri dikkate alınırsa, bu genel devre aksenal ve yarıçapsal yöndeki farklı ısıl iletkenliklerin hesaplanmasını mümkün kılar. Bu silindirin modellenmesi mil içinde rahatlıkla kullanılabilir. Elde edilmiş ifadelerde r_2 ’yi sıfır yapmak ve merkez sıcaklığı T_2 ’ye denk gelen düğümü kaldırmak bunun için yeterli olacaktır.



Şekil 5.5 İki boyutlu ısı aktarımına ilişkin ısıl eşdeğer devre

5.3. EKSENEL YÖNDE ISI AKIŞININ İNCELENMESİ

Sürekli durumda aksenal yönde ısı akışını tanımlayan Poisson denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (5.25)$$

İncelemeyi kolaylaştırmak amacıyla eksenel simetriyi kullanmak mantıklı olacaktır. Simetri gözönüne alındığında sınır koşulları şu biçimde olur :

$$Q_{(x=0)} = kA \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 0 \text{ ve } T_{x=h} = T_4$$

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü $h = L/2$ olmak üzere

$$T(x) = T_4 + \frac{q}{2k} (h^2 - x^2) \quad (5.26)$$

Ortalama sıcaklık değeri için :

$$T_{ort} = \frac{1}{h} \int_0^h T(x) dx \quad (5.27)$$

$$T_{ort} = T_4 + \frac{Q' R_o'}{3} \quad (5.28)$$

bulunur.

Burada :

$$Q' = \pi q h (r_2^2 - r_1^2) \quad (5.29)$$

$$R_o' = \frac{h}{\pi k (r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.30)$$

olarak alınmalıdır. Ortalama sıcaklık değerinin yeri içinse

$$x_{ort} = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (5.31)$$

kullanılmalıdır.

6. TEMEL SİLİNDİRİK BİLEŞENE GÖRE ISIL DİRENÇLERİN TANIMLANMASI

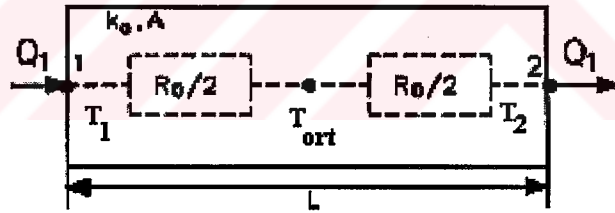
6.1.GENEL TANIMLAR

i ve j nolu iki eleman arasındaki ısı eşdeğer direncin en genel tanımı Fourier'nin ısı iletim yasası kullanılarak şu biçimde yapılır [12]:

$$R_{ij} = \frac{T_i - T_j}{Q_{ij}} \quad (6.1)$$

Burada T_i ve T_j i. Ve j. elemanlara ait ortalama sıcaklık değeridir. Q, i ve j arasındaki ısı akışını tanımlar. R_{ij} ise ısı direncidir.

Isıl direnç hesabını tanımlayabilmek için iki ucu hariç her tarafı yalıtılmış levha durumu ele alınabilir.



Şekil 6.1 İki ucu hariç her tarafı yalıtılmış levha

Burada ısı direnç

$$R_0 = \frac{L}{kA} \quad (6.2)$$

L : Levhanın uzunluğu

A : Kesit

k : Isıl iletkenlik

Eleman içinde üretilen ısıyı ise şu şekilde yazabiliriz:

$$Q = q \cdot L \cdot A \quad (6.3)$$

q : Birim hacimde üretilen ısı

Herhangi bir ortamdaki bir boyutlu ısı akışı için üç farklı durum ayırt edilir.

6.1.1 SADECE DIŞARIDAN BİR ISI AKIŞI VARSA

Bu durumda Laplace denklemi şu hale gelir:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (6.4)$$

İki defa integre edilirse:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (6.5)$$

Sınır koşulları bu durum için:

$$Q_{x=0} = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = Q_1 \quad (6.6)$$

(-) işaretinin anlamı Q'nun yönünün sıcaklık gradyanına ters olduğudur.

$$T_{x=0} = T_1$$

$$T_{x=L} = T_2$$

Denklemin çözümü:

Genel çözüm: $T(x) = C_1 x + C_2$

Buna göre $T_1 = C_2$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T_2 = C_1 L + T_1$$

O halde $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

$$T(x) = \frac{T_2}{L}x + T_1\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$-kA \frac{dT}{dx} = Q_1 \quad \text{biliniyordu.}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q_1}{kA} \quad T(x) = -\frac{Q_1}{kA}x + C_3$$

$$T(0) = T_1 = C_3 \quad T(x) = -\frac{Q_1}{kA}x + T_1$$

$$T(L) = T_2 = -\frac{Q_1}{kA}L + T_1 \quad (6.7)$$

$$T_1 = T_2 + \frac{Q_1}{kA}L \quad \Rightarrow \quad \text{Genel denklemde yerine konur.}$$

$$T(x) = \frac{T_2}{L}x + \left(T_2 + \frac{Q_1L}{kA}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (6.8)$$

$$T(x) = \frac{T_2}{L}x + T_2 - \frac{T_2}{L}x + \frac{Q_1L}{kA} - \frac{Q_1}{kA}x \quad (6.9)$$

$$T(x) = T_2 + Q_1 \frac{L}{kA} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (6.10)$$

$\frac{L}{kA}$ terimini daha önce R_0 olarak tanımlamıştık.

$$T(x) = T_2 + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (6.11)$$

Ortalama sıcaklığın hesabı:

$$T_{\text{ort}} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (6.12)$$

$$T_{\text{ort}} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[T_2 + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] dx \quad (6.13)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} T_2 \int_0^L dx + \frac{1}{L} Q_1 R_0 \int_0^L dx - \frac{1}{L^2} Q_1 R_0 \int_0^L x dx \quad (6.14)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} T_2 (x|_0^L) + \frac{1}{L} Q_1 R_0 (x|_0^L) - \frac{1}{L^2} Q_1 R_0 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^L \right) \quad (6.15)$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{1}{2} Q_1 R_0 \quad R_0 = \frac{L}{kA} \text{ idi}$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{1}{2} Q_1 \frac{kL}{A} \quad (6.16)$$

6.1.2 SADECE ELEMAN İÇİNDE ISI AKIŞI VARSA

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (6.17)$$

Sınır koşulları $Q_{x=0} = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$

$$T_{x=L} = T_2$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{k} \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{k} x + C_1 \quad -\frac{q}{k} x + C_1 = 0 \quad C_1 = 0$$

$$T(x) = -\frac{q}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \quad x = L \quad T = T_2$$

$$T_2 = -\frac{q}{2k} L^2 + C_2 \quad C_2 = T_2 + \frac{q}{2k} L^2$$

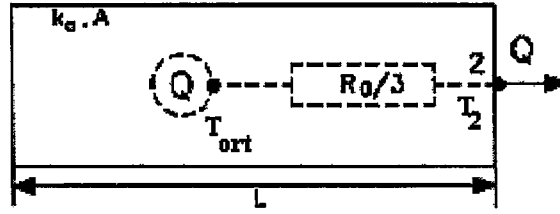
$$T(x) = -\frac{q}{2k} x^2 + T_2 + \frac{q}{2k} L^2 \quad (6.18)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{q}{2k} (L^2 - x^2) \quad Q = qLA \quad qL = \frac{Q}{A}$$

$$T(x) = T_2 + \frac{qL^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad R_0 = \frac{L}{kA} \quad \frac{L}{k} = R_0 A \quad (6.19)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{QR_0 A}{2A} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \quad (6.20)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{QR_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \quad (6.21)$$



Şekil 6.2 Sadece içinde ısı üretimi olan bir levhayı tanımlayan eşdeğer devre

Ortalama sıcaklık değerinin hesabı:

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (6.22)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ T_2 + \frac{QR_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \right\} dx \quad (6.23)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L T_2 dx - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{QR_0}{2L^2} x^2 dx - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{QR_0}{2} dx \quad (6.24)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} T_2 (x|_0^L) + \frac{1}{L^3} \frac{QR_0}{2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^L \right) - \frac{1}{L} \frac{QR_0}{2} (x|_0^L) \quad (6.25)$$

$$T_{ort} = T_2 - \frac{QR_0}{6} + \frac{QR_0}{2} \quad (6.26)$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{QR_0}{3} \quad (6.27)$$

6.1.3 HEM ELEMAN İÇİNDE ISI ÜRETİMİ HEMDE DIŞARIDAN ISI AKIŞI OLDUĞUNDA

Diferansiyel denklem

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (6.28)$$

$$\text{Sınır koşulları} \quad x = 0 \quad \text{için} \quad -kA \frac{dT}{dx} = Q_1 \quad (6.29)$$

$$x = L \quad \text{için} \quad T = T_2$$

Çözüm:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{k} \quad x = 0 \text{ 'da}$$

$$-kA \frac{dT}{dx} = Q_1$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{k}x + C_1 \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{Q_1}{kA}$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = -\frac{q}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \quad C_1 = -\frac{Q_1}{kA}$$

$$T(x) = T_2 = -\frac{q}{2k}L^2 - \frac{Q_1}{kA}L + C_2$$

$$C_2 = T_2 + \frac{q}{2k}L^2 + \frac{Q_1}{kA}L$$

$$T(x) = -\frac{q}{2k}x^2 - \frac{Q_1}{kA}x + T_2 + \frac{q}{2k}L^2 + \frac{Q_1}{kA}L \quad (6.30)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{q}{2k}(L^2 - x^2) + \frac{Q_1}{kA}(L - x) \quad (6.31)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{QR_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (6.32)$$

Ortalama sıcaklığın hesabı:

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (6.33)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ T_2 + \frac{QR_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right\} dx \quad (6.34)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} \int_0^L T_2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{QR_0}{2} dx - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{QR_0}{2} \frac{x^2}{L^2} dx + \frac{1}{L} \int_0^L Q_1 R_0 dx - \frac{1}{L} \int_0^L Q_1 R_0 \frac{x}{L} dx \quad (6.35)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{L} T_2 (x|_0^L) + \frac{1}{L} \frac{QR_0}{2} (x|_0^L) - \frac{1}{L^3} \frac{QR_0}{2} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^L \right) + \frac{1}{L} Q_1 R_0 (x|_0^L) - \frac{1}{L^2} Q_1 R_0 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^L \right) \quad (6.36)$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{QR_0}{2} - \frac{QR_0}{6} + Q_1 R_0 - \frac{Q_1 R_0}{2} \quad (6.37)$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{QR_0}{3} + \frac{Q_1 R_0}{2} \quad (6.38)$$

Maksimum sıcaklık $T_{maks} = T_1$ dir yani;

$$T(x) = T_2 + \frac{QR_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (6.39)$$

$$x = 0 \text{ da} \quad T(x) = T_1 = T_{maks}$$

$$T_{maks} = T_2 + \frac{R_0}{2} Q + R_0 Q_1 \quad (6.40)$$

Ortalama sıcaklığın yeri için T_{ort} denklemi $T(x)$ 'e eşitlenmelidir.

$$T_2 + Q \frac{R_0}{3} + Q_1 \frac{R_0}{2} = T_2 + Q \frac{R_0}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + Q_1 R_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (6.41)$$

$$\frac{QR_0}{3} + \frac{Q_1 R_0}{2} = \frac{QR_0}{2} - \frac{QR_0}{2L^2} x^2 + Q_1 R_0 - \frac{Q_1 R_0}{L} x \quad (6.42)$$

$$\frac{QR_0}{2L^2} x^2 + \frac{Q_1 R_0}{L} x - Q_1 R_0 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + QR_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.43)$$

$$\frac{QR_0}{2L^2} x^2 + \frac{Q_1 R_0}{L} x - \frac{Q_1 R_0}{2} - \frac{QR_0}{6} \quad (6.44)$$

$$x^2 + \frac{Q_1 R_0}{L} \frac{2L^2}{QR_0} x - \frac{Q_1 R_0}{2} \frac{2L^2}{QR_0} - \frac{QR_0}{6} \frac{2L^2}{QR_0} \quad (6.45)$$

$$x^2 + 2L \frac{Q_1}{Q} x - L^2 \frac{Q_1}{Q} - \frac{1}{3} L^2 = 0 \quad \frac{Q_1}{Q} = D \quad \text{ise}$$

$$x^2 + 2DLx - L^2 \left(D + \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

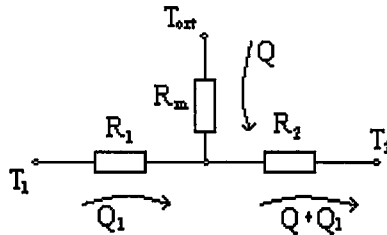
$$\Delta = 4D^2 L^2 + 4L^2 \left(D + \frac{1}{3} \right) = 4L^2 \left(D^2 + D + \frac{1}{3} \right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2DL \mp \sqrt{4L^2 \left(D^2 + D + \frac{1}{3} \right)}}{2}$$

x_{ort} negatif olamayacağı için (+) işaretli kök alınır.

$$x_{ort} = \left(-D + \sqrt{D^2 + D + \frac{1}{3}} \right) L$$

Dirençlerin hesaplanması:



Şekil 6.3 Hem eleman içinde üretim olduğunda hem de dışarıdan ısı akışı varken ısı eşdeğer devre

Devre denklemleri:

$$T_1 = T_2 + R_1 Q_1 + R_2 Q + R_2 Q_1 \quad (6.46)$$

$$T_{ori} = T_2 + R_m Q + R_2 Q + R_2 Q_1 \quad (6.47)$$

İç üretim olmadığı durumda $Q = 0$ olduğundan

$$T_1 = T_2 + (R_1 + R_2) Q_1$$

$$T_{ori} = T_2 + R_2 Q_1$$

$$R_2 Q_1 = T_{ori} - T_2$$

$$T_1 = T_2 + R_1 Q_1 + T_{ori} - T_2 \quad R_1 = \frac{T_1 - T_{ori}}{Q_1} \quad (6.48)$$

$$T_1 = T_2 + \frac{R_0}{2} Q + R_0 Q_1$$

$$- \quad T_{ori} = T_2 + \frac{R_0}{3} Q + \frac{R_0}{2} Q_1$$

$$Q = 0$$

$$T_1 - T_{ori} = \frac{R_0}{2} Q_1$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R_0}{2}$$

$$R_2 = \frac{T_{ori} - T_2}{Q_1} \quad (6.49)$$

$$T_{ori} = T_2 + \frac{R_0}{3} Q + \frac{R_0}{2} Q_1$$

$$- \quad T_2 \quad Q = 0$$

$$T_{ori} - T_2 = \frac{R_0}{2} Q_1$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{R_0}{2}$$

R_m 'nin hesabı:

$$T_{ori} = T_2 + R_m Q + R_2 Q + R_2 Q_1 \quad (I)$$

$$T_{ori} = T_2 + \frac{R_0}{3} Q + \frac{R_0}{2} Q_1 \quad (II)$$

$$(I) = (II)$$

$$T_2 + R_m Q + R_2 Q + R_2 Q_1 = T_2 + \frac{R_0}{3} Q + \frac{R_0}{2} Q_1$$

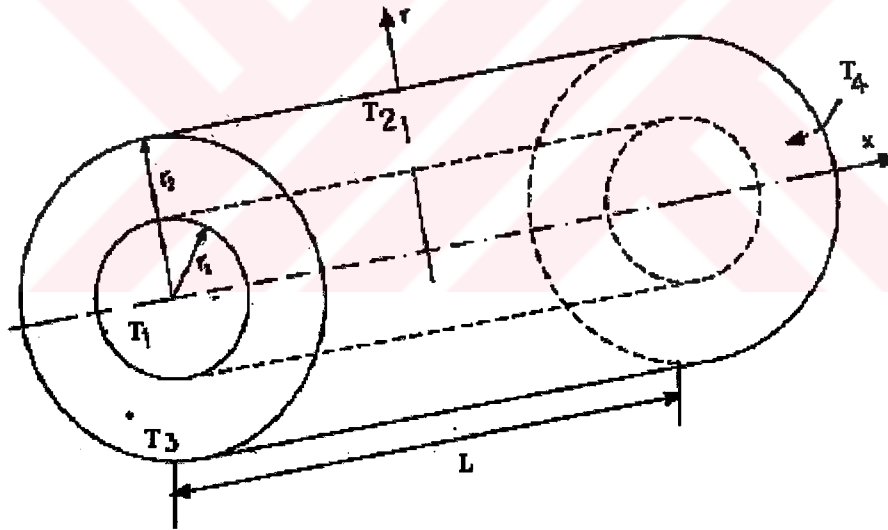
$$T_2 + R_m Q + \frac{R_0}{2} Q + \frac{R_0}{2} Q_1 = T_2 + \frac{R_0}{3} Q + \frac{R_0}{2} Q_1$$

$$R_m Q + \frac{R_0}{2} Q = \frac{R_0}{3} Q$$

$$R_m Q = R_0 Q \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$R_m = -\frac{1}{6} R_0 \quad (6.50)$$

6.2. SİLİNDİRİK YAPININ İNCELENMESİ



Şekil 6.4 Temel silindirik bileşen

Eleman içinde üretilecek toplam ısı:

$$Q = qV \quad (6.51)$$

$$Q = q\pi(r_2^2 - r_1^2)L \quad (6.52)$$

6.2.1 SADECE DIŞARIDAN ISI AKIŞI OLDUĞUNDA

İncelenen durum yarıçapsal doğrultuda ısı aktarımı olduğundadır. Bu nedenle silindirik koordinatlar kullanılır [13].

Diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (6.53)$$

$$\text{Çözümü: } \frac{dT}{dr} = p \quad \text{olsun} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dr^2} = \frac{dp}{dr} \text{ olur.}$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} p = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r} p$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln p = -\ln r + \ln C_1$$

$$\ln p = \ln \frac{C_1}{r} \quad p = \frac{C_1}{r} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$T = C_1 \ln r + C_2$$

Sabitlerin bulunması:

$$(1) \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad r \rightarrow r_1 \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_1}{k_r A_1} \text{ idi} \quad A_1 = 2\pi r_1 L$$

$$-\frac{Q_1}{k_r A_1} = \frac{C_1}{r_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{Q_1 r_1}{k_r A_1}$$

$$(2) \quad r \rightarrow r_2 \quad T(r_2) = T_2$$

$$T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_2 - C_1 \ln r_2$$

$$C_2 = T_2 + \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln r_2$$

$$T(r) = -\frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln r + T_2 + \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln r_2 \quad (6.54)$$

$$T(r) = T_2 - \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} [\ln r - \ln r_2] \quad (6.55)$$

$$T(r) = T_2 - \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln \frac{r}{r_2} \quad (6.56)$$

$r = r_1$ için ısı giriş yüzeyinin yani silindirin iç yüzey sıcaklığı:

$$T_1 = T_2 - \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad \text{olacaktır.}$$

Ortalama sıcaklığın hesabı:

$$T_{ort} = \frac{1}{V} \int_0^V T(r) dV$$

Herhangi bir r uzaklığındaki hacim yazılırsa

$$V = \pi(r^2 - r_1^2)L$$

$$dV = 2\pi L r dr \quad \text{olacaktır.}$$

$$\begin{aligned} T_{ort} &= \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \int_{r_1}^{r_2} T_2 \cdot 2\pi L r dr - \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln r \cdot 2\pi L r dr + \\ &+ \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln r_2 \cdot 2\pi L r dr \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$T_{ort} = \frac{T_2 2\pi L}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \int_{r_1}^{r_2} r dr - \frac{2\pi L Q_1 r_1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L \cdot k_r A_1} \int_{r_1}^{r_2} r \ln r dr + \frac{2\pi L Q_1 r_1 \ln r_2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L \cdot k_r A_1} \int_{r_1}^{r_2} r dr \quad (6.58)$$

$$T_{ort} = \frac{2T_2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} - \frac{2Q_1 r_1}{(r_2^2 - r_1^2) k_r A_1} \left(r^2 \left(\frac{1}{2} \ln r - \frac{1}{4} \right) \right) \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{2Q_1 r_1 \ln r_2}{k_r A_1 (r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (6.59)$$

$$T_{ort} = \frac{2T_2}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - \frac{2Q_1 r_1}{(r_2^2 - r_1^2) k_r A_1} \left[r_2^2 \left(\frac{1}{2} \ln r_2 - \frac{1}{4} \right) - r_1^2 \left(\frac{1}{2} \ln r_1 - \frac{1}{4} \right) \right] + \frac{2Q_1 r_1 \ln r_2}{k_r A_1 (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} \quad (6.60)$$

$$T_{ort} = T_2 - \frac{2Q_1 r_1}{(r_2^2 - r_1^2) k_r A_1} \left[\frac{1}{2} r_2^2 \ln r_2 - \frac{1}{4} r_2^2 - \frac{1}{2} r_1^2 \ln r_1 + \frac{1}{4} r_1^2 - \frac{1}{2} r_2^2 \ln r_2 + \frac{1}{2} r_1^2 \ln r_2 \right] \quad (6.61)$$

$$T_{ort} = T_2 - \frac{2Q_1 r_1}{(r_2^2 - r_1^2) k_r A_1} \left[-\frac{1}{4} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{2} r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.62)$$

$$T_{ort} = T_2 - \frac{2Q_1 r_1}{k_r A_1} \cdot \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.63)$$

$$T_{ort} = T_2 - \frac{2Q_1 r_1}{k_r A_1} \cdot \left[-1 + \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.64)$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{2Q_1 r_1}{k_r A_1} \cdot \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.65)$$

$$B = \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ olarak tanımlanırsa}$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{2Q_1 r_1}{k_r A_1} [1 - 2B] \quad (6.66)$$

Ortalama sıcaklık değerinin yeri:

$T_{ort} = T(r)$ 'de r çekilirse:

$$T_2 + \frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = T_2 - \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln \frac{r}{r_2} \quad (6.67)$$

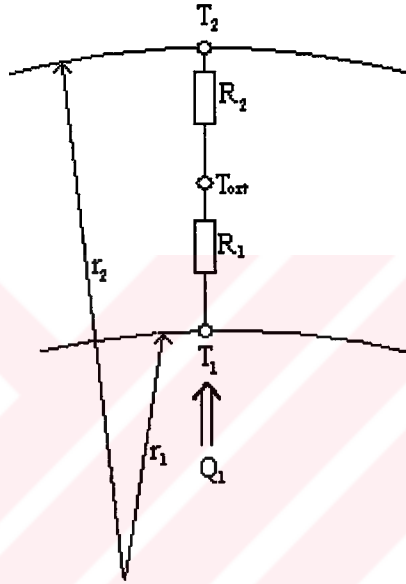
$$\frac{1}{2} - \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\ln \frac{r}{r_2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\ln r + \ln r_2$$

$$\ln r = -\frac{1}{2} + \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln r_2$$

$$r_{ort} = r_2 e^{-\frac{1}{2} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6.68)$$

Isıl dirençlerin hesabı:



Şekil 6.5 Silindirin et kalınlığında ısı akış

$$R_1 = \frac{T_1 - T_{av}}{Q_1}$$

$$T_1 = T_2 - \frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$T_{ort} = T_2 + \frac{2Q_1 r_1}{k_r A_1} \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$T_1 - T_{ort} = -\frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} - 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$T_1 - T_{ort} = -\frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \cdot \left[1 - \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 2 \right) \right]$$

$$T_1 - T_{ort} = -\frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \cdot \left[1 - \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{2r_1^2 + 2r_2^2 - 2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \right]$$

$$T_1 - T_{ort} = -\frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \cdot \left[1 - \frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$T_1 - T_{ort} = \frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \cdot \left[\frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right] \quad A_1 = 2\pi r_1 H$$

$$T_1 - T_{ort} = \frac{Q_1 r_1}{2k_r \cdot 2\pi r_1 H} \cdot \left[\frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$\frac{T_1 - T_{ort}}{Q_1} = \frac{1}{4\pi k_r \cdot H} \cdot \left[\frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{4\pi k_r \cdot H} \cdot \left[\frac{2r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right] \quad (6.69)$$

$$R_2 = \frac{T_{ort} - T_2}{Q_1}$$

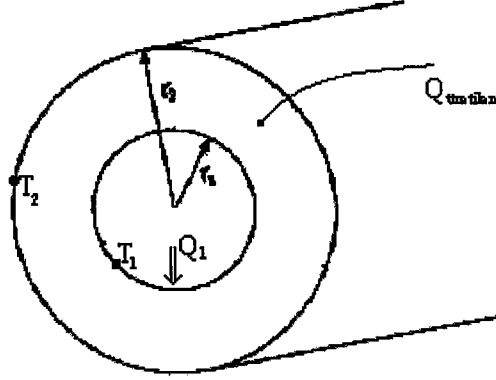
$$T_{ort} = T_2 + \frac{Q_1 r_1}{2k_r A_1} \cdot \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$\frac{T_{ort} - T_2}{Q_1} = \frac{r_1}{2k_r \cdot 2\pi r_1 H} \cdot \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_2 = \frac{1}{4\pi k_r \cdot H} \cdot \left[1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.70)$$

Eleman içinde ısı üretimi olmadığı için R_m direncinin hesaplanmasına gerek yoktur.

6.2.2 HEM DIŞARIDAN ISI AKIŞI HEM DE İÇ ÜRETİM OLDUĞUNDA



Şekil 6.6 İçinde ısı üretimi olan silindirik yapı

Diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q}{k_r} = 0 \quad (6.71)$$

Sınır koşulları

$$(1) \quad r = r_1 \quad \text{için} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_1}{k_r A_1} \quad A_1 = 2\pi r_1 H$$

$$(2) \quad r = r_2 \quad \text{için} \quad T(r_2) = T_2$$

Diferansiyel denklemin çözümü:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} r \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{k_r}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{k_r} r$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{q}{2k_r} r^2 + C_3$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{2k_r} r + \frac{C_3}{r}$$

$$T(r) = -\frac{q}{4k_r} r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{2k_r} r + \frac{C_3}{r} = -\frac{Q_1}{k_r A_1} \quad r = r_1 \text{ için}$$

$$\frac{C_3}{r_1} = -\frac{Q_1}{k_r A_1} + \frac{q r_1}{2k_r}$$

$$C_3 = -\frac{Q_1 r_1}{k_r A_1} + \frac{q r_1^2}{2k_r}$$

$$C_3 = \left[-\frac{Q_1}{k_r A_1} + \frac{q r_1}{2k_r} \right] r_1$$

$$T_2 = -\frac{q}{4k_r} r_2^2 + \left[\frac{Q_1}{k_r A_1} + \frac{q}{2k_r} r_1 \right] r_1 \ln r_2 + C_4$$

$$T_2 = -\frac{q}{4k_r} r_2^2 + \frac{2q}{4k_r} r_1^2 \ln r_2 - \frac{Q_1}{k_r A_1} r_1 \ln r_2 + C_4$$

$$C_4 = T_2 + \frac{q}{4k_r} r_2^2 - \frac{2q}{4k_r} r_1^2 \ln r_2 + \frac{Q_1}{k_r A_1} r_1 \ln r_2 + C_4$$

$$T(r) = -\frac{q}{4k_r} r^2 + \frac{2q}{4k_r} r_1^2 \ln r - \frac{Q_1}{k_r A_1} r_1 \ln r + T_2 + \frac{q}{4k_r} r_2^2 - \frac{2q}{4k_r} r_1^2 \ln r_2 + \frac{Q_1}{k_r A_1} r_1 \ln r_2$$

$$T(r) = T_2 - \frac{Q_1}{k_r A_1 2\pi r_1 L} r_1 \ln \frac{r}{r_2} + \frac{q}{4k_r} \left[-r_2^2 + 2r_1^2 \ln r_2 + r_2^2 - 2r_1^2 \ln r_2 \right] \quad (6.72)$$

$$q = \frac{Q}{A.L} \quad q \text{ (W/m}^3\text{)} : \text{Birim hacimde üretilen ısı}$$

$$Q(W) \quad \text{Tüm hacimde üretilen ısı}$$

$$A.L(m^3) \quad \text{Hacim}$$

$$T(r) = T_2 - \frac{2Q}{k_r 4\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \left[\frac{r_2^2 - r^2}{2} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_2} \right] + \frac{Q_1}{2\pi r_1 L k_r} \ln \frac{r}{r_2} \quad (6.73)$$

$$T(r) = T_2 + \frac{Q}{2\pi L k_r (r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r_2^2 - r^2}{2} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_2} \right] + \frac{Q_1}{2\pi r_1 L k_r} \ln \frac{r}{r_2} \quad (6.74)$$

Maksimum sıcaklık değeri $r = r_1$ de

$$T_{maks} = T(r_1) = T_1 \quad \text{olmalıdır.}$$

Ortalama sıcaklık denkleminin hesabı

$$T_{ort} = \frac{1}{V} \int_0^V T(r) dV$$

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)L$$

$$dV = 2\pi L r dr$$

$$\begin{aligned} T_{ort} &= \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \int_{r_1}^{r_2} T_2 \cdot 2\pi L r dr - \frac{Q}{2\pi L k_r (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_2^2 - r^2}{2} 2\pi L r dr + \\ &+ \frac{Q}{2\pi L k_r (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r_1^2 (\ln r - \ln r_2) 2\pi L r dr \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$T_{ort} = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} 2\pi L T_2 \int_{r_1}^{r_2} r dr - \frac{2\pi L}{\pi(r_2^2 - r_1^2)L} \cdot \frac{Q}{2\pi L k_r (r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r_2^2}{2} \int_{r_1}^{r_2} r dr - \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{2} dr \right]$$

$$+\frac{Q2\pi L}{2\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\cdot\frac{r_1^2}{\pi(r_2^2-r_1^2)L}\left[\int_{r_1}^{r_2}r\ln r dr-\ln r_2\int_{r_1}^{r_2}r dr\right]-\frac{2\pi L}{\pi(r_2^2-r_1^2)L}\cdot\frac{Q}{2\pi Lk_r}\left[\int_{r_1}^{r_2}r\ln r dr-\ln r_2\int_{r_1}^{r_2}r dr\right] \quad (6.76)$$

$$T_{ort}=\frac{2T_2}{(r_2^2-r_1^2)}\cdot\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)+\frac{Q}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)^2}\left[\frac{r_2^2}{2}\cdot\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(r_2^4-r_1^4)\right]$$

$$+\frac{Q_1^2}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)^2}\cdot\left[r^2\left(\frac{\ln r}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{r_1}^{r_2}-\frac{1}{2}\ln r_2(r_2^2-r_1^2)\left]-\frac{Q}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\cdot\left[r^2\left(\frac{\ln r}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{r_1}^{r_2}-\frac{1}{2}\ln r_2(r_2^2-r_1^2)\right] \quad (6.77)$$

$$T_{ort}=T_2+\frac{Q}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)^2}\left[\frac{1}{4}r_2^2(r_2^2-r_1^2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(r_2^2+r_1^2)(r_2^2-r_1^2)\right]$$

$$+\frac{Q_1^2}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)^2}\cdot\left[-\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)+\frac{1}{2}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right]-\frac{Q}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\cdot\left[-\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)+\frac{1}{2}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right] \quad (6.78)$$

$$T_{ort}=T_2+\frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\left[\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2}+\frac{4r_1^2}{(r_2^2-r_1^2)}\left(-\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)+\frac{1}{2}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]$$

$$-\frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\cdot\left[-4\cdot\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)+4\cdot\frac{1}{2}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right]-\frac{Q}{\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\cdot\left[-\frac{1}{4}(r_2^2-r_1^2)+\frac{1}{2}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right] \quad (6.79)$$

$$T_{ort}=T_2+\frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\left[\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2}-r_1^2+\frac{2r_1^2}{(r_2^2-r_1^2)}r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right]-\frac{Q}{4\pi Lk_r}\left[-1+2\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right] \quad (6.80)$$

$$B=\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \text{olduğuna göre}$$

$$T_{ort}=T_2+\frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2-r_1^2)}\left[\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2}-r_1^2(1-2B)\right]-\frac{Q}{4\pi Lk_r}(-1+2B) \quad (6.81)$$

Isıl Dirençlerin Hesabı:

$$T_1=T_2+R_1Q_1+R_2Q_1$$

$$T_{ort}=T_2+R_2Q_1$$

$$R_2 = \frac{T_{ori} - T_2}{Q_1} \quad \text{İç üretim olmadığı varsayımıyla yani} \quad Q=0 \text{ için}$$

$$T_{ori} = T_2 - \frac{Q_1}{4\pi L k_r} \left[-1 + 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_2 = -\frac{1}{4\pi k_r L} \left[2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$R_2 = \frac{1}{4\pi L k_r} \left[1 - 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.82)$$

$$R_1 = \frac{T_1 - T_{ori}}{Q_1} \quad Q=0 \text{ için:}$$

$$T_1 = T_2 - \frac{Q_1}{2\pi L k_r} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$= T_2 + \frac{Q_1}{4\pi L k_r} 2 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$T_{ori} = T_2 - \frac{Q_1}{4\pi L k_r} \left[-1 + 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$T_1 - T_{ori} = \frac{Q_1}{4\pi L k_r} \left[2 \ln \frac{r_2}{r_1} + 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$\frac{T_1 - T_{ori}}{Q_1} = \frac{1}{4\pi L k_r} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} \left(2 + 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - 1 \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{4\pi L k_r} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{2r_2^2 - 2r_1^2 + 2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - 1 \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{4\pi L k_r} \left[\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right] \quad (6.83)$$

R_m direncinin hesabı:

$$T_{ori} = T_2 + (R_m + R_2)Q + R_2Q_1$$

$$T_{ori} = T_2 + R_mQ + R_2Q + R_2Q_1$$

$$T_2 + \frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right] - \frac{Q_1}{4\pi Lk_r} \left[2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$= T_2 + R_mQ + \frac{Q}{4\pi Lk_r} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] - \frac{Q_1}{4\pi Lk_r} \left[-1 + 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$\frac{Q}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right] = R_mQ - \frac{Q}{4\pi Lk_r} \left[1 - 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right] - \frac{1}{4\pi Lk_r} \left[1 - 2 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) - (r_2^2 - r_1^2) + \frac{2(r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - r_1^2 + \frac{2r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - r_2^2 + r_1^2 + 2r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{2r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} + 2r_1^2 \right) - r_2^2 \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{2r_1^4 + 2r_1^2 r_2^2 - 2r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} \right) - r_2^2 \right]$$

$$R_m = \frac{1}{4\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[-\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + \frac{2r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$R_m = \frac{1}{8\pi Lk_r(r_2^2 - r_1^2)} \left[-r_2^2 - r_1^2 + \frac{4r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (6.84)$$

6.3. İÇİ BOŞ BİR SİLİNDİRDE EKSENEL AKIŞIN İNCELENMESİ

Çözülmesi gereken Poisson denklemi kartezyen koordinatlarda:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q}{k_a} = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Yapılan incelemeyi basitleştirmek için silindirik yapı eksenel merkezden geçen bir düzlemle ikiye ayrılır. Böylece simetriden yararlanılmış olur. Silindir her iki parçasında da üretilen ısı enerjisi aynıdır. Isı akışı da aynı ve birbirine zıt yöndedir.

Sınır koşulları:

$$Q_{x=0} = kA \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

ve

$$Q_{x=l} = T_4$$

Çözüm:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{k_a} \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad x = 0 \text{ da}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{k_a} x + C_1 \quad 0 = -\frac{q}{k_a} 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$T = -\frac{q}{2k_a} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$T_4 = -\frac{q}{2k_a} l^2 + C_1 l + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_4 + \frac{q}{2k_a} l^2$$

$$T = -\frac{q}{2k_a} x^2 + \frac{q}{2k_a} l^2 + T_4$$

$$T = T_4 + \frac{q}{2k_a}(l^2 - x^2) \quad l = L/2$$

$$Q' = \pi l(r_2^2 - r_1^2)$$

$$T = T_4 + \frac{Q' R_0'}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (6.85)$$

$$T_{ori} = \frac{1}{l} \int_0^l T(x) dx$$

$$T_{ori} = \frac{1}{l} \int_0^l T_4 dx + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{Q' R_0'}{2} dx - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{Q' R_0'}{2} \frac{x^2}{l^2} dx$$

$$T_{ori} = \frac{1}{l} T_4 (x|_0^l) + \frac{1}{l} \cdot \frac{Q' R_0'}{2} (x|_0^l) - \frac{1}{l^3} \cdot \frac{Q' R_0'}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^l \right)$$

$$T_{ori} = T_4 + \frac{Q' R_0'}{2} - \frac{Q' R_0'}{6}$$

$$T_{ori} = T_4 + \frac{Q' R_0'}{3} \quad (6.86)$$

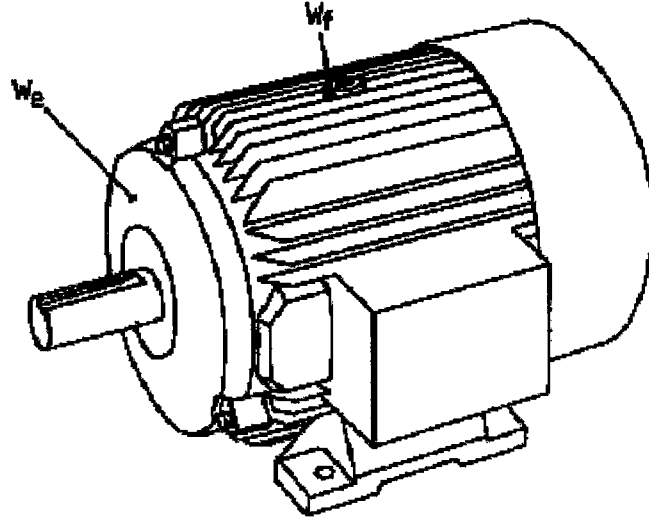
7. ALT PARÇALARA İLİŞKİN ISIL DİRENÇLERİN HESAPLANMASI

Daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi oluşturulmaya çalışılan matematik model toplu parametrelili ısı eşdeğer devre mantığını kullanmakta ve temel olarak da ısısal direnç tanımlarından yararlanmaktadır. Bu direnç değerleri matematik modele aktarılırken temel silindirik bileşenden yararlanılmış ve asenkron makinenin geometrisi, temel silindirik bileşen tanımını kullanabilecek şekilde alt parçalara ayrılmıştır.

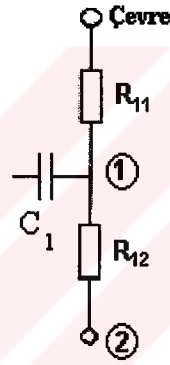
Bu aşamadan sonra yapılması gereken tüm bu alt parçaları ısı akış biçimine ve ısının akış yönüne göre ısısal dirençler yardımıyla modellemektir. Her bir alt parça tek tek ele alınırken kendi içindeki eşdeğer devresi çıkarılacak ve bu tanımlama yapılırken de temel silindirik bileşenden yararlanılacaktır. Alt parçaların kendi içinde oluşturulacak bu küçük küçük eşdeğer devreler, ilişkide olduğu alt parçaya ait devre ile birleştirilerek gerekli sadeleştirmeler yapılacak ve tüm makine geometrisini tanımlayan ısı eşdeğer devre elde edilmiş olacaktır. Şimdi daha önce belirlediğimiz alt parçaları tek tek ele alalım [14] :

7.1.GÖVDE

Asenkron makinedeki ısı akış yollarını dikkate aldığımızda, bütün bir yapıda ortaya çıkacak olan ısı enerjisinin, iletim, taşınım ve yayılım yollarıyla gövdeye ulaştığı ve buradanda ortama aktarıldığını görürüz. Burada asenkron motörün gövdesi ile ortam arasında deneysel olarak bulunması gereken bir ısısal direnç tanımlanır. Isı aktarımı gövdeden ortama yayılım yoluyla geçmektedir. Ortam sıcaklığının saptanması kolay olacağından gövde ile ortam arasındaki ısısal direnç değerinin bulunması da deneysel yolla çok daha kolay olacaktır [15].



Şekil 7.1 Kafes rotorlu asenkron motör gövdesi



Şekil 7.2 Gövdeye ilişkin ısı eşdeğer devre

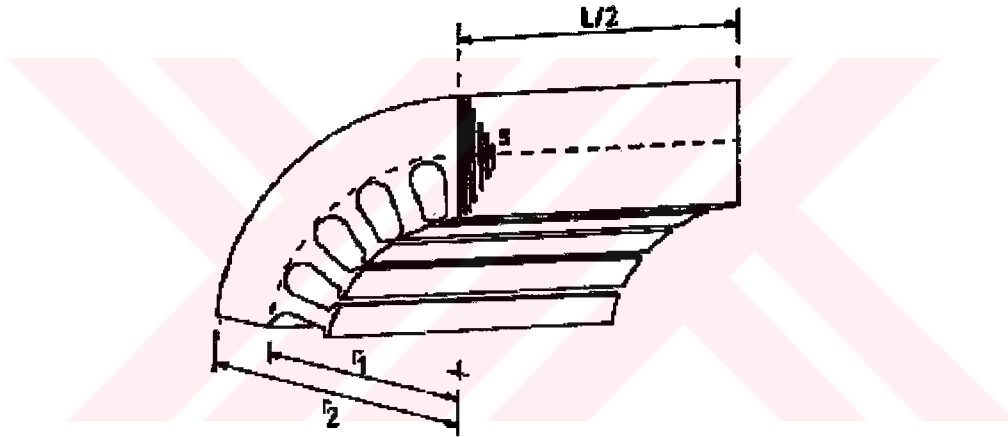
r_1	Stator dış yarıçapı
L	Stator uzunluğu
M_k	Kapak kütlesi
M_g	Gövde kütlesi
c_k	Kapağa ait özgül ısı değeri
c_g	Gövdeye ait özgül ısı
h_t	Gövde ile demir çekirdek arasındaki temas katsayısı
R_{11} = Deneysel olarak bulunacaktır	

$$R_{12} = \frac{1}{\pi h_1 L r_1} \quad (7.1)$$

$$C_1 = M_k c_k + \frac{1}{2} M_g c_g \quad (7.2)$$

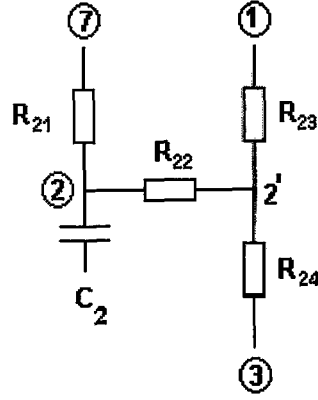
7.2.STATOR DEMİRİ

Stator demiri olarak isimlendirilen geometrik yapı stator olukları ve dişleri çıktıktan sonra geriye kalan kısımdır. Kısaca içi boş silindir bir yapıdır. Stator demirini bu biçimiyle ele alırsak temel silindirik bileşen için tanımlanan direnç değerlerinde sadece alt yazımları değiştirmek yeterli olacak ve herhangi bir değişikliğe gidilmeyecektir. Şekil 7.4'te görülen devreye ilişkin direnç değerleri için ise şu denklemler yazılabilir :



Şekil 7.3 Stator demiri

r_1	Stator dış yarıçapı
r_2	Diş dış yarıçapı
L	Stator uzunluğu
s	Çekirdek yığın faktörü
k_y	Çekirdek yarıçapsal ısı iletkenliği
k_e	Çekirdek eksenel ısı iletkenliği
c_1	Çekirdeğe ait özgül ısı değeri
ρ_1	Çekirdek demir yoğunluğu



Şekil 7.4 Stator demiri ısı eşdeğer devresi

$$R_{21} = \frac{L}{6\pi k_e s (r_2^2 - r_1^2)} \quad (7.3)$$

$$R_{22} = \frac{-1}{4\pi k_y L s} \left(\frac{4r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - r_2^2 - r_1^2 \right) \quad (7.4)$$

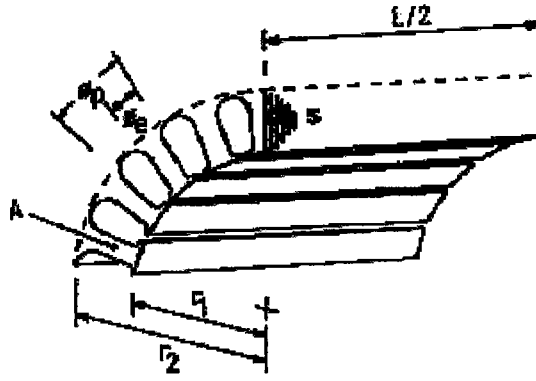
$$R_{23} = \frac{1}{2\pi k_y L s} \left(\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (7.5)$$

$$R_{24} = -\frac{1}{2\pi k_y L s} \left(\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (7.6)$$

$$C_2 = \frac{c\rho\pi L s (r_2^2 - r_1^2)}{2} \quad (7.7)$$

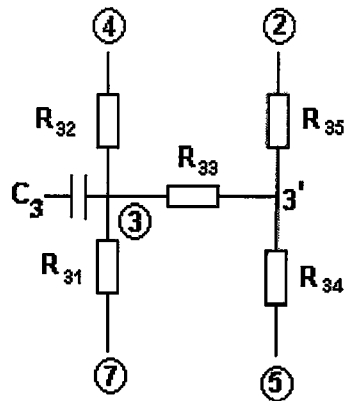
7.3. STATOR DİŞLERİ

Stator dişlerine ait ısı dirençlerin tanımı yapılırken dikkat edilmesi gereken bazı noktalar vardır. Stator dişleri yapı olarak birbirlerinden, stator olukları nedeniyle ayrılmışlardır. Bu yapıda dişler birbirlerine koştur olarak durmaktadırlar. Yanısıra yarıçapsal doğrultuda, çevresel geometriyi belirli bir oranla doldurmaktadırlar. Bu oran, ısısal dirençlere ait denklemler çıkarılırken hesaba katılmıştır.



Şekil 7.5 Stator dişleri

r_2	Stator dış yarıçapı
r_1	Diş dış yarıçapı
L	Stator uzunluğu
n	Oluk sayısı
ϕ_d	Diş adımı
ϕ_c	Eşdeğer diş yay uzunluğu
s	Demir çekirdek yığın faktörü
k_y	Demir çekirdek yarıçapsal ısı iletkenliği
k_e	Demir çekirdek eksenel ısı iletkenliği
c_1	Demir çekirdeğe ait özgül ısı değeri
ρ_1	Demir çekirdek yoğunluğu



Şekil 7.6 Stator dişlerine ilişkin ısı eşdeğer devre

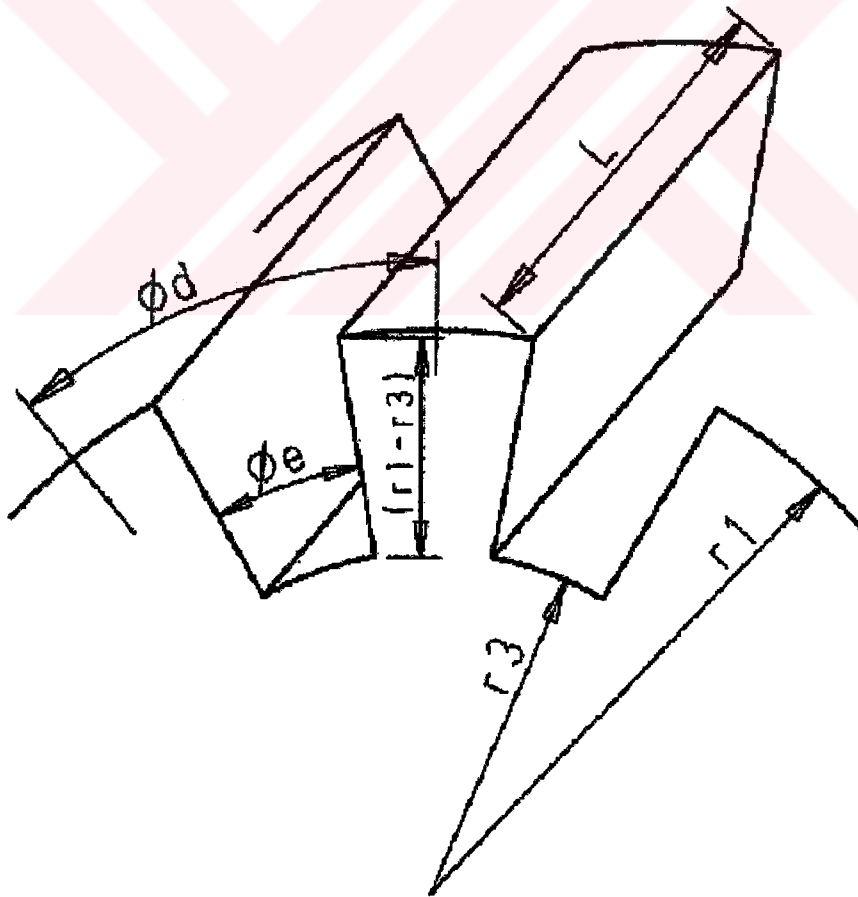
$$R_{31} = \frac{L}{6\pi k_e \left(\frac{\phi_d}{\phi_e} \right) (r_1^2 - r_3^2)} \quad (7.8)$$

$$R_{33} = \frac{-1\phi_d}{4\pi k_y L s \phi_e} \left(\frac{4r_1^2 r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} \ln \frac{r_1}{r_3} - r_1^2 - r_3^2 \right) \quad (7.9)$$

$$R_{34} = -\frac{1\phi_d}{2\pi k_y L s \phi_e} \left(\frac{2r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} \ln \frac{r_1}{r_3} - 1 \right) \quad (7.10)$$

$$R_{35} = \frac{1\phi_d}{2\pi k_y L s \phi_e} \left(\frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_3^2} \ln \frac{r_1}{r_3} - 1 \right) \quad (7.11)$$

Stator dişleri ile stator sargıları arasındaki ısı aktarımını tanımlayan ısı direncin ifadesi ise biraz daha karışıktır. Bu nedenle bu direnç verilirken nasıl elde edildiğine dair ayrıntıda verilmelidir.



Şekil 7.7 Stator dişine ilişkin ölçüler

En genel tanımıyla ısıl direnç şu biçimdeydi :

$$R = \frac{L}{kA} \quad (7.12)$$

Geometrik yapıyı dikkate alarak denklemde görülen, L ısısının katettiği yolu ve A ısı akışına dik alanının açık ifadelerini yazalım,

$$A = Ls(r_1 - r_3) \quad (7.13)$$

$$L = \frac{2\pi}{n} \left(\frac{r_1 + r_3}{2} \right) \frac{\phi_e}{\phi_d} \quad (7.14)$$

$$R = \frac{2\pi}{n} \frac{r_1 + r_3}{2} \frac{\phi_e}{\phi_d} \frac{1}{Ls(r_1 - r_3)} \quad (7.15)$$

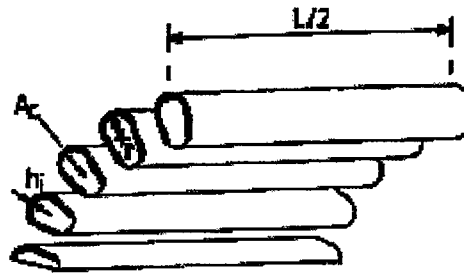
Direnç ifadesi $(r_1 - r_3) / (r_1 - r_3)$ ile çarpılarak düzenlenir ve stator dişleri birbirine koşut n tane yapı olduğu içinde n ile bölünürse, ısısal dirence ilişkin son denklem elde edilmiş olacaktır.

$$R_{32} = \frac{\pi \phi_e (r_1^2 - r_3^2)}{k_y L s \phi_d (r_1 - r_3)^2 n^2} \quad (7.16)$$

Isıl kapasite ise aşağıdaki gibi olacaktır.

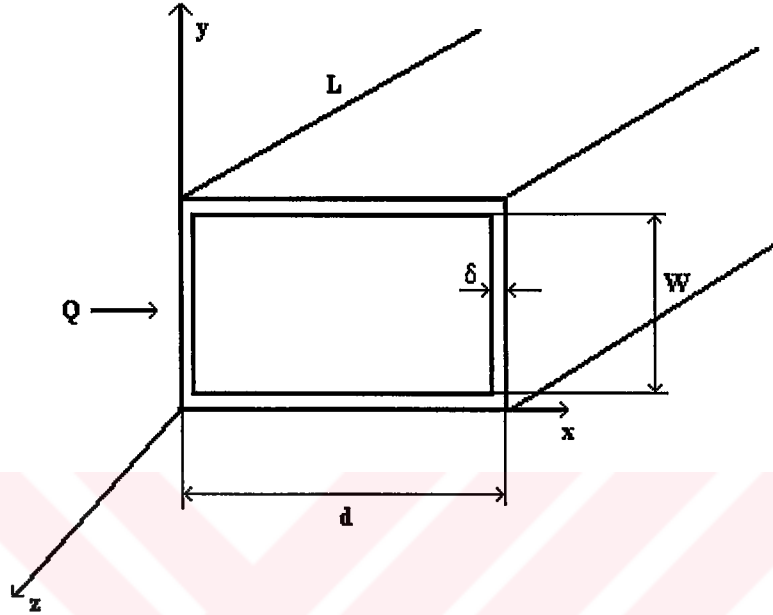
$$C_3 = \frac{c_1 \rho_1 \pi L s \phi_e (r_1^2 - r_3^2)}{2 \phi_d} \quad (7.17)$$

7.4.STATOR SARGILARI



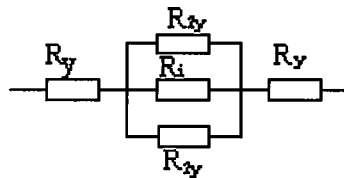
Şekil 7.8 Stator sargıları

Matematik model oluşturulurken dikkat edilmesi gereken en önemli alt parçalardan biri stator sargılarıdır. Sargılar modellenirken farklı yaklaşımlar kullanılabilir. Bunlardan biri sargıların kare kesitli olduğu kabulüdür [16]. Bir diğer yaklaşımda ise iletken kesitleri dairesel alınabilir. Burada ele alınacak olan yaklaşım sargıların kare kesitli olduğu yaklaşımdır.



Şekil 7.9 Stator sargısı iletken modeli

İletken kesidi kare olarak alındığına göre hem x hem de y yönündeki ısının katettiği yol ve akışa dik alan değerleri aynı olacaktır. O halde her iki yön içinde direnç değerleri birbiriyle aynıdır. Şekilde iletkenin geometrik kesitinde yalıtkan malzemelerde görülmektedir. Bu biçimdeki bir yapıda ısı devre şekil 7.10'daki gibi olacaktır.



Şekil 7.10 Stator sargılarının ısı eşdeğer devresi

Bu devredeki dirençleri genel direnç eşitliğini kullanarak tek tek tanımlayalım

R_y yalıtkan direnci :

$$R_y = \frac{\delta}{k_y A_1} = \frac{\delta}{k_y dL} \quad (7.18)$$

R_{2y} yalıtkan direnci :

$$R_{2y} = \frac{W}{k_y A_2} = \frac{W}{k_y \delta L} \quad (7.19)$$

R_i iletken direnci :

$$R_i = \frac{W}{k_i WL} \quad (7.20)$$

Bu direnç değerleri ile devreyi temsil eden tek bir direnç ifadesini bulabiliriz :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{2R_y} \quad (7.21)$$

$$R_2 = \frac{1}{L} \frac{W}{k_i W + 2k_y \delta} \quad (7.22)$$

Devrenin yeni hali birbirine seri üç direnç halini almıştır.

$$R_x = R_y = 2R_y + R_2 \quad (7.23)$$

$$R_x = R_y = \frac{1}{L} \left(\frac{2\delta}{k_y W + 2k_y \delta} + \frac{W}{k_i W + 2k_y \delta} \right) \quad (7.24)$$

Bu değer birim uzunluktaki iletkenin ısı direnç değeridir. L uzunluğu ile çarpılırsa iletkenin ısı direnç ifadesi elde edilmiş olacaktır.

$$R_x = R_y = \left(\frac{2\delta}{k_y W + 2k_y \delta} + \frac{W}{k_i W + 2k_y \delta} \right) \quad (7.25)$$

İletken ile çevresindeki yalıtkanı karşılaştırdığımızda ısı iletkenlik açısından, sargı iletkeninin iletkenlik katsayısının çok büyük bir değerde olacağı açıktır. Bu nedenle direnç ifadesindeki ikinci terimi rahatlıkla atabiliriz.

$$R_x = R_y = \left(\frac{2\delta}{k_y W + 2k_y \delta} \right) \quad (7.28)$$

Şimdi aynı geometrik boyutlara sahip eşdeğer hayali bir parçayı düşünelim, birim uzunluktaki direnci aşağıdaki gibi olacaktır.

$$R = \frac{d}{k_e dL} \quad (7.29)$$

$$\text{Parçanın tümünde : } R = \frac{1}{k_e} \quad (7.30)$$

Bunu bulduğumuz sargı direncine uygularsak :

$$R_x = R_y = \frac{1}{k_e} = \left(\frac{2\delta}{k_y W + 2k_y \delta} \right) \quad (7.31)$$

$$k_e = \frac{k_y (W + 2\delta)}{2\delta} = k_y \left(1 + \frac{W}{2\delta} \right) \quad (7.32)$$

$$F = \left(1 + \frac{W}{2\delta} \right) \quad (7.32)$$

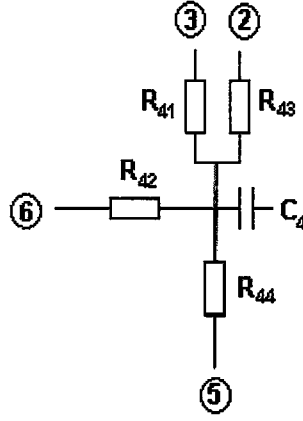
olarak tanımlanırsa :

$$k_e = F k_y \quad (7.33)$$

$$\left(\frac{W}{2\delta} \right) \gg 1 \text{ olduğuna göre; } F \gg 1 \text{ dir.}$$

Oluk doluluk oranına göre F deneysel bir özgeğriden bulunabilir. [2]

Bu biçimde modellenebilecek sargıları matematik modelimiz açısından ele alırsak sargıların diğer parçalarla arasındaki ilişkiyi de temsil edecek olan ısı eşdeğer devresi aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 7.11 Stator sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre

L	Stator uzunluğu
r_4	Eşdeğer sargı yarıçapı
d_i	İzolasyon kalınlığı
A_c	Oluklardaki bakırın kesiti
n	Oluk sayısı
F	Yarıçapsal iletkenlik katsayısı
k_c	Bakır iletkenliği
k_i	Oluk yalıtkanı iletkenliği
k_v	İletken etrafındaki verniğin iletkenlik değeri
c_c	Bakırın özgül ısı değeri
ρ_x	Bakır yoğunluğu

$$R_{41} = \frac{2d_i}{\pi k_i L r_4 n} + \frac{1}{2\pi k_v L F n} \quad (7.34)$$

$$R_{42} = \frac{L}{6k_c A_c n} \quad (7.35)$$

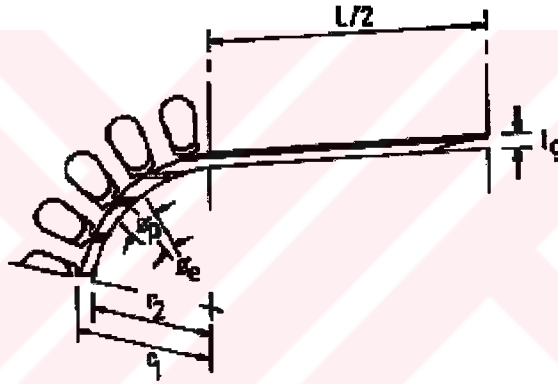
$$R_{43} = \frac{4d_i}{\pi k_i L r_A n} + \frac{1}{\pi k_v L F n} \quad (7.36)$$

$$R_{45} = \frac{1}{\pi k_i L F n} \quad (7.37)$$

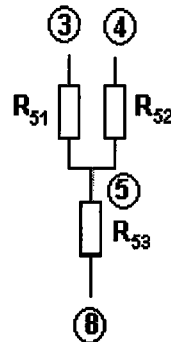
$$C_4 = \frac{c_c \rho_c A_c L n}{2} \quad (7.38)$$

7.5.HAVA ARALIĞI

Hava aralığı asenkron motörün statoru ve rotoru arasında ısı aktarımının taşınım yoluyla gerçekleştiği kısımdır. Stator tarafında dişler ve sargılar ayrı ayrı parçalar olarak görülmektedir. Rotor ise modellemede katı bir silindir biçiminde ele alındığından hava aralığı tanımlanırken üç ısıl direnç yeterli olacaktır.



Şekil 7.12 Hava aralığı



Şekil 7.13 Hava aralığına ilişkin ısı eşdeğer devre

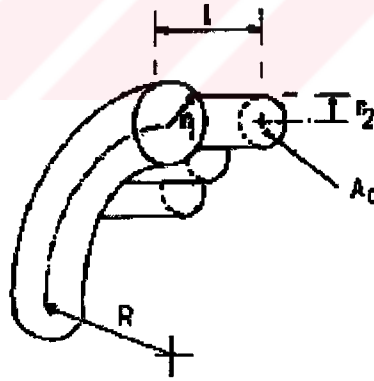
r_3	Diş iç dış yarıçapı
r_5	Rotor dış yarıçapı
L	Stator uzunluğu
ϕ_d	Diş adımı
ϕ_e	Eşdeğer diş yay uzunluğu
h_{2r}	Motör dönmekte iken hava aralığı film iletkenlik katsayısı
h_{2s}	Motör hareketsiz iken hava aralığı film iletkenlik katsayısı

$$R_{s1} = \frac{\phi_d}{\phi_e \pi r_3 L h_{2r} h_{2s}} \quad (7.39)$$

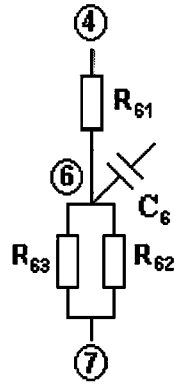
$$R_{s2} = \frac{\phi_d}{(\phi_d - \phi_e) \pi r_3 L h_{2r} h_{2s}} \quad (7.40)$$

$$R_{s3} = \frac{1}{\pi r_5 L h_{2r} h_{2s}} \quad (7.41)$$

7.6.UÇ SARGILARI



Şekil 7.14 Uç sargıları



Şekil 7.15 Uç sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre

R	Uç sargısı halka yarıçapı
r_4	Eşdeğer stator sargısı yarıçapı
r_6	Uç sargısı kesiti yarıçapı
l_0	Oluk sargısı uzantısı
n	Oluk sayısı
A_c	Oluktaki sargıya ait bakır kesiti
V_c	Tüm sargıya ait bakır hacmi
F	Yarıçapsal iletkenlik katsayısı
α	Stator oluklarının hacminin uç sargısı hacmine oranı
ω	En yüksek sıcaklık değerinin ortalama sıcaklık değerine oranı
k_c	Bakıra ait ısı iletkenlik katsayısı
k_v	Verniğe ait iletkenlik katsayısı
c_c	Bakıra ait özgül ısı değeri
ρ_c	Bakıra ait yoğunluk değeri

Statorun uç sargıları geometrik yapı açısından iki kısımdan oluşmuştur. Bunlardan birincisi oluk içi sargılarının demir çekirdek kısımdan taşan ve bacak diyebileceğimiz ilk bölümleri, ikincisi ise bu bacaklar üzerine oturtulan halka biçimli yapıdır. Motoru korumaya yönelik bir uygulamada uç sargılarının en yüksek sıcaklık değeri ortalama sıcaklık değerine göre daha fazla önem kazanmaktadır. Bu düğümde

ortalama sıcaklığı vermek yerine en yüksek sıcaklığı vermek için uç sargılarına ait ısısal direnç ω gibi bir katsayıyla çarpılır. Bu katsayının tanımı ise şu biçimde yapılır.

$$\frac{T_{\max} - T_{\text{yüzey}}}{T_{\text{ort}} - T_{\text{yüzey}}} \quad (7.42)$$

Stator uç sargılarında aksenal akış bacaklar tarafından motorun kapak boşluğuna doğrudur. Yarıçapsal akışın temel düğümü ise halka biçimli yapıda düşünülmüştür. Bu düğümden yarıçapsal akış iki ayrı biçimde, iki farklı yol ve kaynak üzerinden kapak boşluğuna geçmektedir. Yarıçapsal akışın birinci bileşenin kaynağı olarak halka içinde üretilen ısı enerjisi düşünülmelidir. Isı akışı halka çevresi boyunca yarıçapsal yönde kapak boşluğuna doğru olmaktadır.

$$R = \frac{\omega}{8\pi 2\pi R F k_v} = \frac{\omega}{16\pi^2 R F k_v} \quad (7.43)$$

Yarıçapsal akışın ikinci bileşeni ise, bacaklarda üretilen ısıyı kaynak olarak almakta ve bacaklardan halka yapıya geçmektedir. Buradan da boşluğa aktarılmaktadır. Buradaki ısısal direncin hesabı için πr_1^2 kesitli bacakta oluşan ve hesaplanan yarıçapsal ısısal direnç πr_2^2 yarıçaplı halkaya aktarılır. Bu da bir dönüşüm işlemi ile yapılmaktadır. Bacaklardaki yarıçapsal ısısal direnç :

$$R_B = \frac{\omega}{8\pi r_1 F k_v} \quad (7.44)$$

Halka yapıya dönüşüm :

$$\frac{\pi r_1^2 R_x}{\pi r_2^2 R} = 1$$

$$R = \frac{r_2^2 \omega}{8\pi r_1^2 l F k_v} \quad (7.45)$$

n oluk sayısı olmak üzere n tane oluk için ısısal direnç :

$$R = \frac{r_2^2 \omega}{8\pi r_1^2 l F k_v} \cdot \frac{1}{n} \quad (7.46)$$

Eksenel akış ise bacak boyunca oluşacaktır. A_c iletken kesiti olmak üzere n tane koşturuk için :

$$R = \frac{l\omega}{nA_c k_c} \quad (7.47)$$

Buna göre direnç ifadelerini topluca yazarsak,

$$R_{61} = \frac{l_0\omega}{nA_c k_c} \quad (7.48)$$

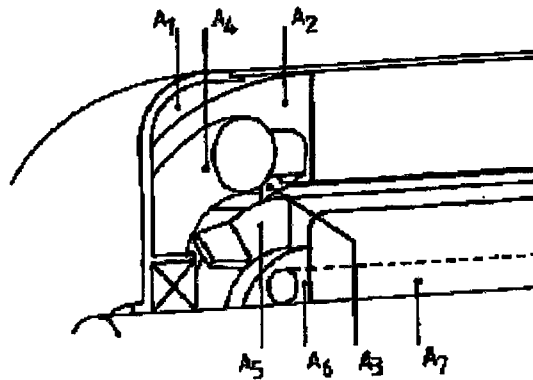
$$R_{62} = \frac{\omega}{16\pi^2 R F k_v} \quad (7.49)$$

$$R_{63} = \frac{\omega r_6^2}{8\pi^2 l_0 F k_v n} \quad (7.50)$$

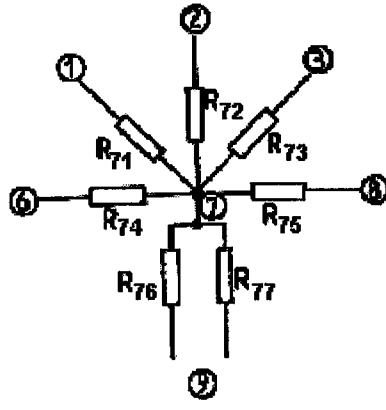
$$C_6 = \frac{\rho_c c_c (1 - \alpha) V_c}{2\omega} \quad (7.51)$$

7.7.KAPAK BOŞLUĞU HAVASI

Kapak boşluğunda ısı aktarımı incelendiğinde oldukça karmaşık bir yapı ortaya çıkar. Asenkron motörü ayrıştırdığımız alt parçalardan bir çoğu kapak boşluğu ile ısı akış yolları üzerinden ilişki halindedir. Bu nedenle kapak boşluğundaki yapı modellenirken ısısal direnç sayısı oldukça fazla olacaktır. Buradaki ısıнын aktarım biçimi tamamıyla taşınımdır. O nedenle aslında ısısal direnç sayısı fazla olmasına karşın bu dirençlerin yazılması kolaydır ve genel taşınım denklemleri kullanılarak yazılabilirler.



Şekil 7.16 Kapak boşluğu



Şekil 7.17 Kapak boşluğuna ilişkin ısı eşdeğer devre

A_1	Kapak temas yüzeyi
A_2	Stator demiri temas yüzeyi
A_3	Stator dişleri temas yüzeyi
A_4	Uç sargısı temas yüzeyi
A_5	Rotor uç halkası temas yüzeyi
A_6	Rotor demiri temas yüzeyi
A_7	Rotor soğutma kanalları temas yüzeyi
h_{3r}	Motör dönme durumunda kapağa ait film ısı iletkenlik katsayısı
h_{3s}	Motör hareketsiz iken kapağa ait film ısı iletkenlik katsayısı

$$R_{71} = \frac{1}{A_1 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.52)$$

$$R_{72} = \frac{1}{A_2 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.53)$$

$$R_{73} = \frac{1}{A_3 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.54)$$

$$R_{74} = \frac{1}{A_4 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.55)$$

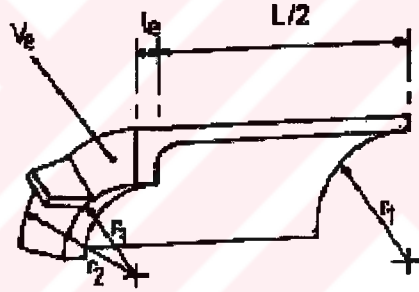
$$R_{75} = \frac{1}{A_5 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.56)$$

$$R_{76} = \frac{1}{A_6 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.57)$$

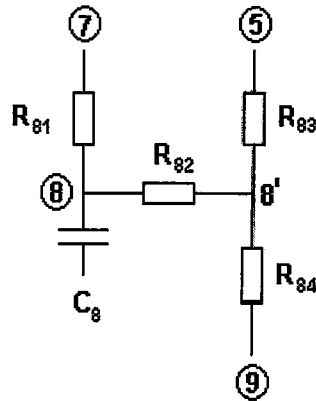
$$R_{77} = \frac{1}{A_7 h_{3r} h_{3s}} \quad (7.58)$$

7.8. ROTOR SARGISI

Ele alınan matematik modelde kafesli asenkron motorün ısısal eşdeğer devresinin çıkarılması öngörülmüştü. Rotorun yapım biçimine bakıldığında rotor sargıları iletken çubuklardan oluşmuştur ve bu çubuklar uç halkaları yardımıyla kısadevre edilmiştir. Bu yapı ısısal direnç tanımları yapılırken kullanılan temel silindirik bileşenin kullanılmasına uygundur. Ayrıca uç halkaları ve iletken çubuklar beraber tek bir yapı olarak ele alınmalıdır.



Şekil 7.18 Rotor sargısı



Şekil 7.19 Rotor sargılarına ilişkin ısısal eşdeğer devre

L	Stator uzunluğu
r_5	Rotor dış yarıçapı
r_7	Uç halkası iç yarıçapı
r_8	Rotor sargısı eşdeğer yarıçapı
l_e	Uç halkası kalınlığı
V_e	Uç halkası ve soğutma fanının hacmi
k_a	İletken çubukların ısısal iletkenliği
c_a	İletken çubuklara ait özgül ısı değeri
ρ_a	İletken çubuklara ait yoğunluk

$$R_{81} = \frac{L}{6\pi k_a (r_5^2 - r_8^2)} + \frac{l_e}{\pi k_a (r_5^2 - r_7^2)} \quad (7.59)$$

$$R_{82} = \frac{-1}{4\pi k_a L (r_5^2 - r_8^2)} + \frac{l_e}{\pi k_a (r_5^2 - r_8^2)} \left[r_5^2 + r_8^2 - \frac{4r_5^2 r_8^2 \ln\left(\frac{r_5}{r_8}\right)}{r_5^2 - r_8^2} \right] \quad (7.60)$$

$$R_{83} = -\frac{1}{2\pi k_a L} \left(\frac{2r_8^2}{r_5^2 - r_8^2} \ln \frac{r_5}{r_8} - 1 \right) \quad (7.61)$$

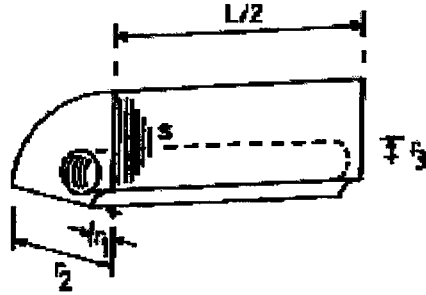
$$R_{84} = \frac{1}{2\pi k_a L} \left(\frac{2r_5^2}{r_5^2 - r_8^2} \ln \frac{r_5}{r_8} - 1 \right) \quad (7.62)$$

$$C_8 = c_a \rho_a \left[\frac{\pi L (r_5^2 - r_8^2)}{2} \right] + V_e \quad (7.63)$$

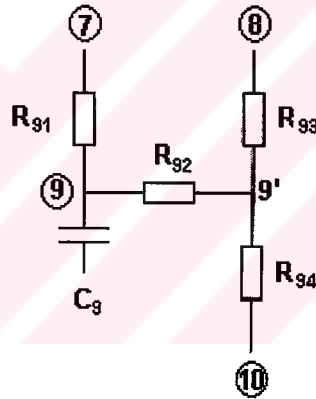
7.9. ROTOR DEMİRİ

Rotor demirinin geometrisi içi boş bir silindir olarak ele alınabilir. Bu biçimiyle rotor demirine ilişkin ısı dirençleri tanımlamak kolay olacaktır. Temel silindirik bileşen yardımıyla tanımlanmış ısı direnç ifadeleri buraya aynen uygulanabilir. Yapılması gereken tek şey boyut bilgilerinin düzeltilmesi olacaktır.

Ancak bunun yanında rotorda bulunabilecek soğutma kanalları da dikkate alınmalıdır. Denklemler verilirken soğutma kanallarının olmadığı durum ele alınmıştır. Bununla birlikte soğutma kanallarının bulunması denklemlerde çok büyük değişikliklere neden olmaz sadece ısı akışına dik alanın hesabında bu boşluklarda dikkate alınarak alan değeri o şekliyle düşünülmelidir.



Şekil 7.20 Rotor demiri



Şekil 7.21 Rotor demirine ilişkin ısıl eşdeğer devre

L	Rotor uzunluğu
r_g	Rotor iletkeni eşdeğer yarıçapı
r_9	Mil yarıçapı
s	Demir yığın faktörü
k_{de}	Demire ait aksenal iletkenlik
k_{ly}	Demire ait yarıçapsal iletkenlik

c_d Demire ait özgül ısı değeri

ρ_d Demire ait yoğunluk

$$R_{91} = \frac{L}{6\pi k_{de}(r_8^2 - r_9^2)} \quad (7.64)$$

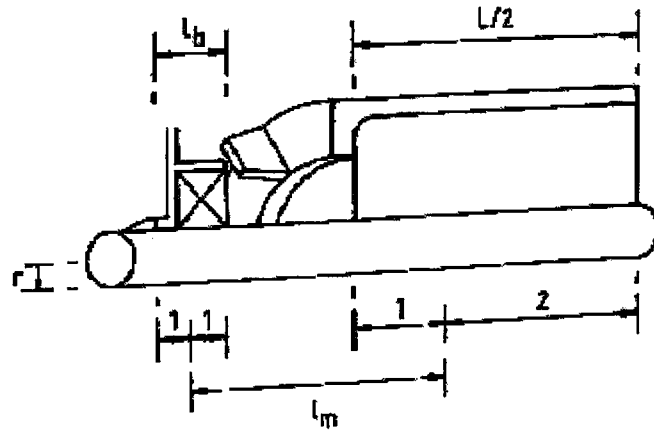
$$R_{92} = \frac{1}{4\pi k_{dy} Ls(r_8^2 - r_9^2)} \left(\frac{4r_8^2 r_9^2}{r_8^2 - r_9^2} \ln \frac{r_8}{r_9} - r_8^2 - r_9^2 \right) \quad (7.65)$$

$$R_{93} = -\frac{1}{2\pi k_{dy} Ls} \left(\frac{2r_9^2}{r_8^2 - r_9^2} \ln \frac{r_8}{r_9} - 1 \right) \quad (7.66)$$

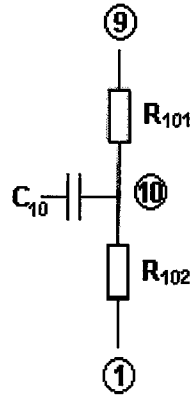
$$C_9 = \frac{c_1 \rho_1 \pi L s (r_8^2 - r_9^2)}{2} \quad (7.67)$$

7.10.MİL

Bütün bir model düşünüldüğünde milin modellenmesi en basit olanıdır. İçi dolu bir silindir olan mil asenkron motörün geometrik yapısı içinde rotor demiri ile ve yataklamalar yoluyla gövdeyle temas halindedir. Kısacası mil ile rotor demiri arasında ve mil ile gövde arasında tanımlanacak ısısal dirençler yeterli olacaktır. Ancak milin modellenmesi sırasında ısının akış yolları önem kazanmaktadır. Mil asenkron motör geometrisi içinde en içteki parçadır. Bu nedenle eksenel ve yarıçapsal ısı akış yolları üzerindeki ilgili dirençler birbirine seri olarak bağlıdır. Direnç tanımları yapılırken bunlarda dikkate alınarak direnç ifadeleri iki terimin toplanmasından oluşan denklemler olarak elde edilmişlerdir.



Şekil 7.22 Mil



Şekil 7.23 Mile ilişkin ısı eşdeğer devre

L	Stator uzunluğu
r_9	Mil yarıçapı
l_r	Yataklama parçasının genişliği
l_m	Yataklama merkezinin rotor ortasına olan uzaklığı
k_m	Mil çeliğinin iletkenliği
c_m	Mil çeliğinin özgül ısı değeri
ρ_m	Mil çeliğine ait yoğunluk değeri

$$R_{37} = \frac{1}{2\pi k_m L} + \frac{l_m}{2\pi k_m r_9^2} \quad (7.68)$$

$$R_{38} = \frac{1}{4\pi k_m l_r} + \frac{l_m}{2\pi k_s r_9^2} \quad (7.69)$$

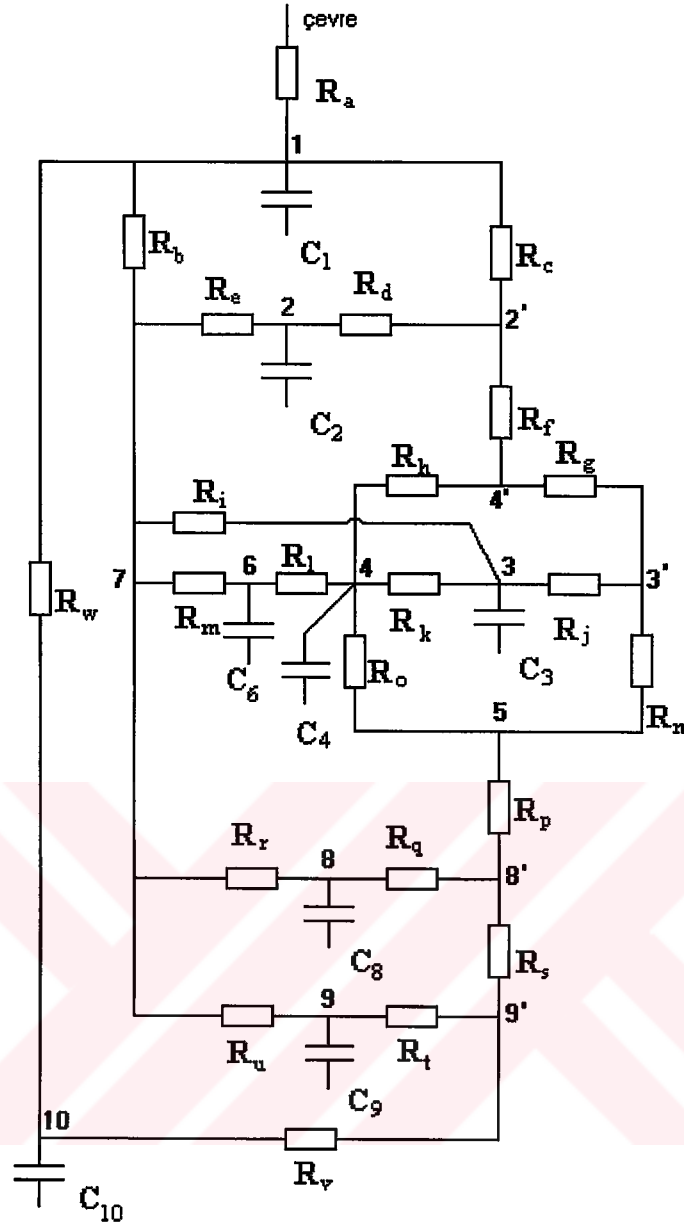
$$C_{10} = \rho_m c_m \pi r_9^2 \left(l_m + \frac{1}{2} l_r + \frac{1}{6} L \right) \quad (7.70)$$

7.11.TOPLU PARAMETRELİ ISIL EŞDEĞER DEVRENİN OLUŞTURULMASI

Şu ana kadar bir asenkron motöre ilişkin alt parçaların kendi ısı devreleri elde edilmiş oldu. Ancak bu tek tek ısı devrelerin tüm bir geometriyi tanımlayabilmesi için birleştirilmeleri gerekmektedir. Bu işlem yapılırken dikkat edilmesi gereken

nokta ısı akışının nereden nereye olduğu ve bu şekilde tanımlanacak olan ısı akış yollarıdır. Doğal olarak birbirine komşu iki alt parça arasında bir ilişki söz konusu olacaktır. Her bir alt parça ısı akış yolları üzerindeki ısı dirençleriyle bir sonraki alt parçaya bağlanacaktır. Bu bağlantı iki yönlüdür. Aralarında ısı alışverişi olan iki alt parçanın birbirlerine göre kendi geometrilerinin yarattığı ısı dirençleri mevcuttur. Bu parçalar birbirleri ile bağlanırken bu iki direnç değeri toplanacaktır. Burada da yine elektriksel benzeşimden faydalanılarak seri ve paralel durumdaki dirençlerin hesabında geçerli olan kurallar uygulanacaktır. Örneğin gövdeye ait R_2 direnci iki nolu alt parça olan stator demirine bağlanacaktır. Aynı şekilde stator demirde R_5 direnci üzerinden gövdeye bağlanır. Bu iki direnç birbirlerine seri durumdadır. O halde elektrik devrelerinde de geçerli olan yasalar kullanılarak bu iki direnç değeri toplanırsa genel devredeki R_c direnci elde edilmiş olacaktır. Genel devrede tanımlanan tüm ısı dirençleri bu hesaplama biçimi kullanılarak rahatlıkla elde edilebilir.

Asenkron motorün tüm geometrisini tanımlayan ısı eşdeğer devre bu biçimde direnç işlemleri ile çok daha sade bir duruma getirilmiştir (Şekil 7.24). Isı devre toplam 15 düğümden oluşmaktadır. Düğüm sıcaklıkları başlıbaşına 15 denge denklemi olarak tanımlanır. Devredeki 7 düğüm ısı kapasiteye sahip değildir. Matematiksel olarak bu düğümler yok edilerek sistemin sadece sekiz doğrusal diferansiyel denklemle ifade edilmesi sağlanır.



Şekil 7.24 Toplu parametrelı ısıı eşdeğer devre

8. KAYIPLARIN BELİRLENMESİ

Bir elektrik makinesi mekanik enerjiyi elektrik enerjisine çevirirken generatör olarak, elektrik enerjisini mekanik enerjiye çevirirken de motör olarak çalışacaktır. Bu fiziksel değişim sırasında elektrik makinesinde kayıplar ısı olarak ortaya çıkacaktır.. Bu kayıpların değeri hem makineye ilişkin verimi belirleyecek hemde gerekli soğutmanın nasıl olması gerektiği konusunda bir fikir verecektir.

Elektrik makinelerindeki bu kayıpların nedeni magnetik akı ve iletkenlerden akan akımdır. Özellikle de magnetik akı dağılımının çok karmaşık olabilmesi kayıpların belirlenmesini de güçleştirir. Bunun yanında ortaya çıkan ısı yayılırken yine çok karmaşık yollar kullanır. Bu yollar üzerinde bulunan malzemelerin doğrultuya göre ısı iletkenlikleri de değişmektedir. Makinenin bir fan tarafından soğutulması da sıcaklık dağılımının belirlenebilir olmasını zorlaştırır. Elektrik makinelerinde ortaya çıkan ısıyı iki ana başlık altında sınıflandırmak mümkündür.

1) Boşta kayıplar

a) Demir kayıpları

b) Sürtünme ve soğutma kayıpları

2) Yükte kayıplar

a) Stator akım kayıpları

b) Rotor akım kayıpları

c) Dağılma akısı kayıpları (Ek kayıplar)

8.1.BOŞTA KAYIPLAR

8.1.1.DEMİR KAYIPLARI

Asenkron motörde ortaya çıkan demir kayıplarının nedeni motördeki değişken magnetik alanın varlığıdır. Bu kayıplar histerezis kayıpları ve girdap akımı kayıpları olarak iki türde ortaya çıkmaktadır. Değişken magnetik alan demir çekirdek

yapıda ve iletkenlerde akım indükler. Bu akımlar malzeme içinde küçük halkalar oluşturacak biçimde akarlar. Demir kayıpları sürekli çalışma koşulları altında motörün stator bölümünde daha büyük değerdedir çünkü rotor frekansı kayma ile belirlendiğinden çok daha küçüktür. Stator ve rotorda meydana gelen kayıpları birbirlerine oranlarsak, stator ve rotorun hacimleri ile frekansları oranıyla değiştiği görülecektir.

$$\frac{W_{st}}{W_r} \approx \frac{V_s f_1^2}{V_r f_2^2} \quad (8.1)$$

8.1.2. SÜRTÜNME VE SOĞUTMA DÜZENEGİ KAYIPLARI

Fan soğutmalı makinelerde fanın çevrilmesi için gerekli olan enerjiyi motör kendisi sağlamaktadır. Fanın çevrilmesi için gereken enerji fan kanatlarında oluşan hava direncini yenmek amacıyla kullanılır. Bunun yanısıra yataklama elemanı olarak kullanılan rulmanlardaki dönmeye karşı koymaya çalışan sürtünme kuvvetide bir diğer kayıp nedenidir. Bu iki tür kaybı birbirinden ayırmak oldukça zordur, çünkü her ikisinde motörün dönme hızına bağlı olarak değişmektedir. Buna rağmen bunları birbirinden ayırt etmek yaklaşık olarak mümkün olabilmektedir. Düşük hızlarda havanın direnci sürtünmeye göre çok daha az olacağından bu hızlarda baskın olan, sürtünme nedeniyle oluşacak kayıptır. Bunun tersine yüksek hızlarda ise fanın da aynı hızda sürülmesi sonucu hava direnci oldukça yüksek değerlere ulaşacak ve sürtünme kayıplarına göre daha baskın olacaktır.

Pratikte boşa kayıpların belirlenmesi için bir sıra deney yapılması gereklidir. Kayıpları karmaşık yapısına rağmen sınıflandırmak ve değerlerini bulmak mümkün olabilmektedir. Boşa deneyde motör anma gerilim ve frekansında yüksüz olarak çalıştırılır ve giriş gücünün sabit bir değere oturması beklenir. Bu giriş gücü değeri, demir, sürtünme, soğutma düzeneği ve stator akım kayıplarının toplam değerini verecektir. Bu değerden boşa stator akım kayıpları çıkarılırsa geriye kalacak olan değer demir, sürtünme ve soğutma düzeneği kayıplarının toplamı olur. Bu aşamadan sonra sürtünme ve soğutma düzeneği kayıpları da demir kayıplarından ayrıştırılabilir. Bunu gerçekleştirebilmek için anma frekansında motör gerilimi %25'i ile %125'i arasında değiştirilir. Test boyunca hız değişimi az olacağından sürtünme ve soğutma düzeneği kayıpları sabit kalacaklardır. Gerilimin sıfır olacağı nokta için kayıpların

değişimi extrapole edilirse sürtünme ve soğutma düzeneği kayıpları elde edilmiş olacaktır.

8.2.YÜKTE KAYIPLAR

8.2.1.STATOR AKIM KAYIPLARI

Akım kayıpları motörün iletkenlerinden akan akımın yarattığı bir sonuçtur. Akımın aktığı devredeki iletkenin direnci ile akım değerinin karesinin çarpımı ısı olarak ortaya çıkar. İletkenin direnç değeri hem sıcaklığın hem de frekansın bir fonksiyonu olarak değişir.

Stator akım kayıplarının ölçülmesi standartlarda verilen yöntemle göre yapılır. Bilinen bir sıcaklık değerinde doğru gerilim direnci ölçülen iletkenin sıcaklığın dirence etkisi aşağıda verilen ifadeyle hesaplanır.

$$R_2 = R_1(1 + \alpha(T_2 - T_1)) \quad (8.2)$$

Bu ifadeden elde edilen direnç değeri ölçülen ya da hesaplanan akım değerinin karesiyle çarpılarak statora ilişkin akım kayıpları bulunmuş olur.

8.2.2. ROTOR AKIM KAYIPLARI

Rotor akım kayıpları ise dolaylı bir yoldan bulunur. Bu kayıplar motöre ilişkin kayma değeri ve giriş gücü ölçülerek aşağıdaki gibi hesaplanır [17].

$$V_2 = (P_{in} - I^2 R_{stator} - V_{fe})s \quad (8.3)$$

8.2.3.DAĞILMA AKISI KAYIPLARI

Bu tür kayıplar ek kayıplar olarak da sınıflandırılabilir ve yükteki değişime göre ortaya çıkar. Nedenleri ise motördeki iletken kısımlarda ve magnetik devrelerde ortaya çıkan histerezis kayıpları ve girdap akımlarıdır. Bu kayıplar hakkında bilgi edinmek amacıyla bazı teorik ve deneysel çalışmalar yapılmış ancak yeterli ya da motör tasarımında kullanılabilecek düzeyde gelişme kaydedilememiştir. Standart bir listeleme yapılamasa da yine de kaçak akılar nedeniyle oluşan kayıpları sınıflandırmak yararlı olacaktır [18].

1) Oluk kaçak akısının yarattığı kayıplar : Stator oluklarındaki iletkenlerden akan akım nedeniyle kaçak akı daha da güçlenir. Oluğu karşıdan karşıya geçen alan iletkende deri etkisi yaratarak akımın yukarı yığılmasına neden olur. Bu da akım kayıplarını artıracak yönde etkimektedir [19].

2) Uç sargıları kaçak akısının yarattığı kayıplar : Uç sargılarındaki çevresel akımların yarattığı akılar statoru ekstenel yönde keserler. Statorun iletken kısımlarında girdap akımları oluşarak, kayıpların artmasına neden olur.

3) Zigzag kaçak akısının yarattığı yüzey kayıpları : Statorun hava aralığında yarattığı akı dağılımının değişimi tam sinüsbiçimli değildir. Bunun kaynağı ise oluk ağızlarının açık yapıda olmasının sonucu olarak hava aralığı genişliğinin düzensiz değişimidir. Motör açısından dikkate alındığında ise hava aralığı çevresi boyunca yarıçapsal akı yoğunluğu, oluk frekansında darbeler üretecektir. Bu darbeler nedeniyle stator ve rotor yüzeylerinde girdap akımları oluşur. Bu da ek kayıplar yaratır.

4) Girişim kaçak akısının yarattığı kayıplar : Stator sargılarındaki faz girişimi nedeniyle düşük üsttitreşim alanları rotorda akım indükler. Bu akımlar nedeniyle ek kayıplar oluşmaktadır. Bu kayıplar bilezikli asenkron motörde küçüktür ancak kafesli asenkron motörde kafes empedansı mıknatıslanma reaktansı ile karşılaştırıldığında tam yükte oldukça küçük olduğundan önem kazanır.

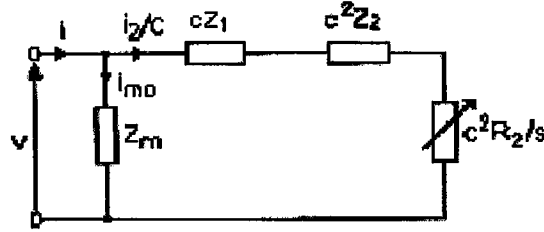
5) Rotor baralarının eğimi nedeniyle oluşan kayıplar : Eğer rotor olukları bir oluk boyu eğimli olacak şekilde imal edilir ve bara boyunca akım değerinin değişmediği varsayımı da yapılırsa alanın temel bileşeninde çekirdek sonlarında bir faz kayması olacaktır. Bunun etkisi yine yarıçapsal doğrultudaki akı yoğunluğunda görülür. Yarıçapsal yöndeki akı yoğunluğu artar ve yine ek kayıplar oluşur

Ek kayıpların hesaplanması için literatürde pek çok yaklaşık denklem bulunmaktadır. Ancak bu kayıpların hesabında çoğunlukla $V_z = \%0,5.(I_1 / I_{1N})^2 . P_N$ denklemi kullanılır[20].

Bir elektrik makinesinde magnetik malzemede oluşan kayıplar tüm kayıplar içinde %10...%20 lik bir paya sahiptir. Demir kayıpları makinenin işletme iyiliğini ve ömürünü kötü yönde etkiler. Bu kayıpları azaltmanın yolu ise doğru bir biçimde hesaplanmalarına ve fiziksel davranışlarının tam olarak anlaşılmasına bağlıdır.

Örneğin girdap akımlarının etkisini azaltmak amacıyla magnetik devreyi oluşturan demir çekirdek ince sac dilimleri kullanılarak üretilir. Hatta günümüzde sac kalınlıkları 0,18 mm'ye kadar indirilmiştir ve bu tip sacların geliştirilmesine çalışılmaktadır.

8.3.MOTÖR KAYIPLARININ ISINMA MODELİ İÇİNDE DAĞILIMI



Şekil 8.1 Kayıpların hesabında kullanılan elektriksel eşdeğer devre

Asenkron motörün kayıplarının belirlenebilmesi amacıyla kullanılabilecek en iyi yöntem elektriksel eşdeğer devre yöntemidir. Bu devrede gözükcek olan akım ve gerilim değerleri motöre ait anma akımı ve anma gerilimidir. (Şekil8.1) [21]. Eşdeğer devreye ait büyüklükler standartlara göre yapılacak bir dizi boşa ve kısıadevre deneyleri yardımıyla elde edilir. Bu devreye göre belirlenecek büyüklüklerle statordaki akım kayıpları aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_{st} = R_1 I_1^2 \quad (8.4)$$

Rotor akım kayıplarına gelince, bu kayıplarda şu şekilde elde edilir.

$$V_{ro} = -\frac{R_2}{cX_m(X_m + 2X_{sc})} V_1^2 + \frac{cR_2 X_m}{X_m + 2X_{sc}} I_1^2 \quad (8.5)$$

Demir kayıpları ise :

$$V_{fe} = \frac{V_1^2}{cR_m} - \frac{R_1}{cX_m(X_m + 2X_{sc})} V_1^2 + \left(\frac{cX_m}{X_m + 2X_{sc}} - 1 \right) R_1 I_1^2 \quad (8.6)$$

Akım kayıpları doğru bir şekilde hesaplanır ve bu kayıplar (4) nolu oluk sargıları ve (5) nolu uç sargıları düğümlerinde temsil edilir. (8.6) denklemiyle

tanımlanan demir kayıpları için doğruluğu sınanmış bir yöntem yoktur. Ancak yinede bu kayıpların %50'sini stator ve %50'sini de rotor dişlerine paylaştırmakla çok büyük bir hata yapılmış olmaz. Bu tür bir yaklaşım tamamıyla tasarımcının öngörüsüne dayanmaktadır.

Motör üzerinde yapılacak zamana bağlı sıcaklık testleri stator kayıplarının stator boynuna ve stator dişlerine nasıl paylaştırılabileceğini belirler [22] [23]. Rotor demir kayıplarının ise ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu varsayılır.

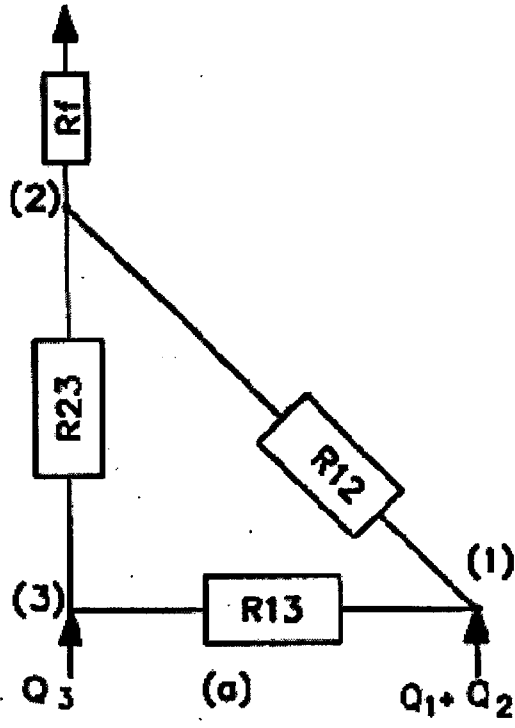
Motörde oluşan demir kayıplarının nerelerde yoğunlaştığına ve motör geometrisi içinde nasıl paylaştırılacağına dair net bir bilgi yoktur. Ancak daha önce de belirtildiği gibi motör üzerinde yapılacak zamana bağlı sıcaklık testleri demir kayıpları paylaştırılırken temel olarak alınabilir. Bununla beraber sürekli hal çalışma koşullarında bu yöntem rotor demir kayıplarını hesaplamaz. Sürekli çalışma koşullarında rotor demir kayıpları küçük olacağından ihmal de edilebilir.

Denklem (8.6)'dan elde edilen teorik demir kayıplarının yapılan birçok test sonucuyla uyum gösterdiği literatürde görülmüştür. Bu nedenle buradan elde edilecek demir kayıpları yeni bir motör tasarımı için temel çıkış noktası olarak alınabilir. Deneysel çalışmalardan bulunan neticelere göre demir kayıplarının %70'i stator boynunda %30'u ise stator dişlerinde ortaya çıkmaktadır.

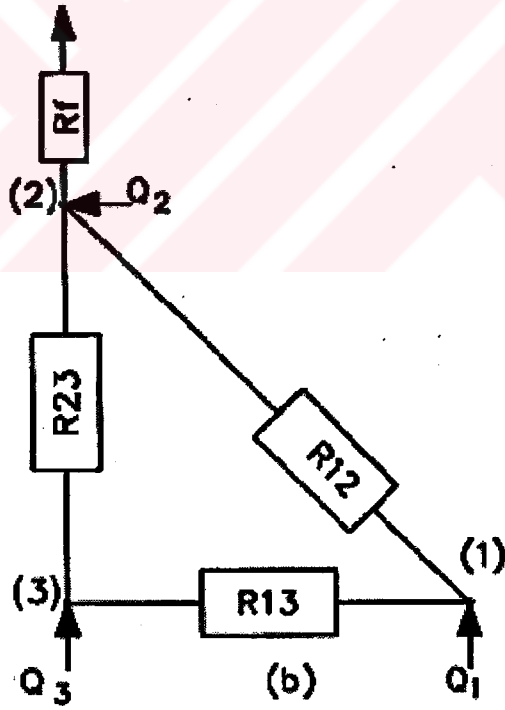
$$V_{feb} = 0,7V_{fe1} \quad (8.7)$$

$$V_{fed} = 0,3V_{fe1} \quad (8.8)$$

Eğer demir kayıpları dişler ve boyun arasında doğru bir şekilde paylaştırılmazsa matematik modelden hesaplanacak olan sargı sıcaklığı hatalı olacaktır. Bu sonuç şekil 8.2 ve 8.3'deki devrelerin karşılaştırılması ile elde edilebilir. 8.2'de tüm kayıpların dişlerde olduğu varsayılmış ve iki ayrı ısısal kaynak öngörülmüştür. Bunlardan biri $Q=(Q_1+Q_2)$ olan demir kayıpları tamamen dişlerde temsil edilmiştir. Q_3 ise akım kayıplarıdır. Bu kayıplar R_{12} , R_{13} , ve R_{23} ısısal dirençleri üzerinden birbirleri ile bağlanmışlardır. Bu devreye göre hesaplanacak statot boynu sıcaklığı şöyle olur



Şekil 8.2 Demir kayıpları sadece dişte ise



Şekil 8.3 Demir kayıpları paylaştırıldığında

$$T_{sb} = T_f + R_f(Q + Q_3) \quad (8.9)$$

Diğer yandan demir kayıplarını Q_1 ve Q_2 gibi iki kısma ayırdığımızda ısısal eşdeğer devredeki değişim 8.3'deki gibi olacaktır. Bu devreye göre hesaplanan stator boynu sıcaklığı şöyle olur

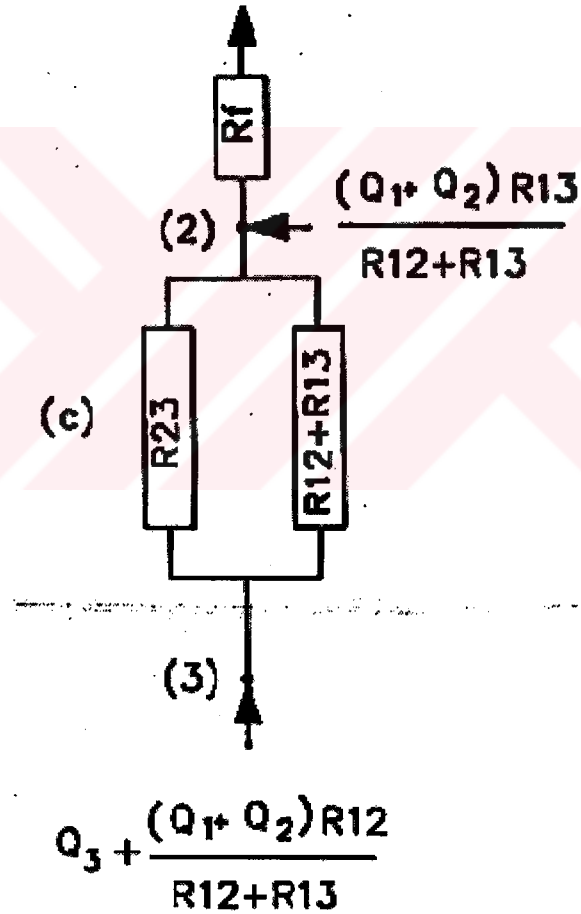
$$T_{sb} = T_f + R_f(Q_1 + Q_2 + Q_3) \quad (8.10)$$

Q_1 = Dişlerdeki demir kaybı

Q_2 = Boyundaki demir kaybı

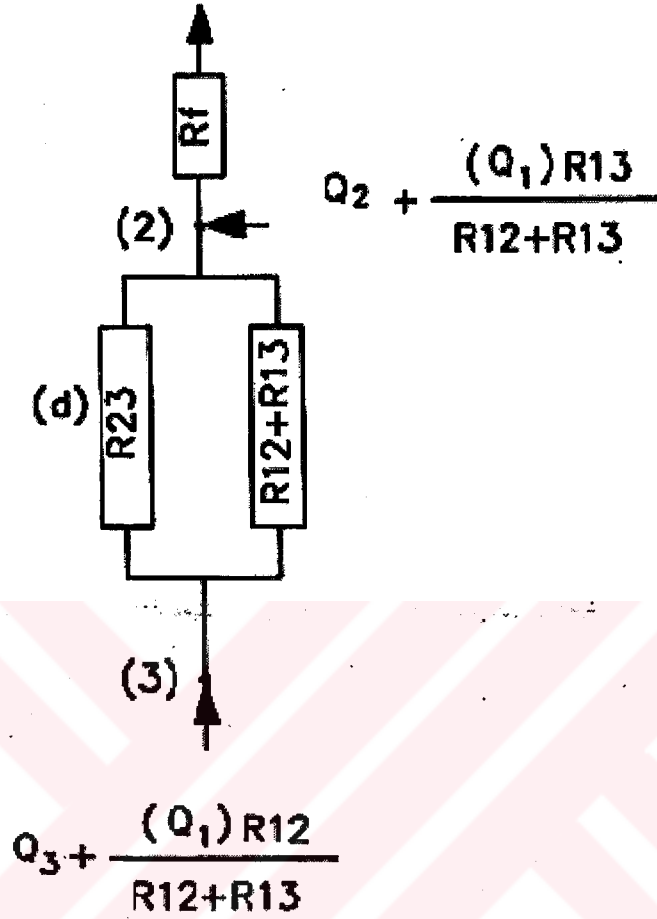
$$Q = Q_1 + Q_2$$

Buna göre demir kayıplarını ayırtırmak stator boynu sıcaklığı için bir anlam ifade etmemektedir.



Şekil 8.4 Demir kayıplarının paylaşılması

Ancak sargı sıcaklıkları için durum değişir. Bu amaçla her iki durum için basitleştirilmiş devreler kullanabiliriz. 8.4 ve 8.5’de verilen bu devrelere göre kayıplar paylaştırılmadığı zaman sargı sıcaklığının değeri aşağıdaki gibi hesaplanır :



Şekil 8.5 Demir kayıplarının paylaştırılması

$$T_{sa1} = T_b + \left[Q_3 + Q \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{13}} \right] \left[\frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \right] \quad (8.11)$$

Bu denklemde Q yerine $Q = Q_1 + Q_2$ yazarsak :

$$T_{sa1} = T_b + \left[Q_3 + (Q_1 + Q_2) \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{13}} \right] \left[\frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \right] \quad (8.12)$$

Şimdi de kayıpları ayırttığımız zaman durumun ne olacağına bakalım :

$$T_{sa2} = T_b + \left[Q_3 + Q_1 \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{13}} \right] \left[\frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \right] \quad (8.13)$$

İki durum arasında sargı sıcaklığındaki değişim miktarını hesaplayabiliriz :

$$T_{sa1} - T_{sa2} = Q_2 \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \quad (8.14)$$

Buradan çıkarılacak sonuca göre demir kayıplarının ayrıştırılmaması sargı sıcaklıklarında hataya neden olmaktadır.

Sargılarda ortaya çıkan kayıplar ise oluklara yerleştirilmiş sargılar ile uç sargıları arasında belli bir katsayıya göre paylaştırılabilir. Bu katsayı tasarıma bağlı olarak bakır iletkenin bahsedilen bölgelerdeki uzunluğuna göre belirlenir. Oluk içindeki sargıların kayıpları :

$$Q_{os} = \beta Q_{ak} \quad (8.15)$$

Uç sargılarında ise :

$$Q_{sy} = (1 - \beta) Q_{ak} \quad (8.16)$$

Bir kafes rotorlu motörde ise kayıplar çubuklardaki ve uç halkasındaki akım kayıpları oranına göre dağıtılır.

9. ISISAL EŞDEĞER DEVRE DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI VE ÇÖZÜLMESİ

Tek tek elde edilmiş direnç devreleri biraraya getirilip birleştirildiğinde toplu parametrelili ısı eşdeğer devre elde edilmiş olacaktır. Modelde onbeş adet düğüm vardır. Bu düğümlerden onu alt parçalara ait ortalama sıcaklık düğümleridir. Geriye kalan beş düğüm ise alt parça bağlantılarını gerçekleştiren düğümlerdir.

Denklemlerin yazılabilmesi amacıyla ısı denge yasasında yararlanılır. Herhangi bir düğüm için düğüme gelen ısı akış değeri düğümden ayrılan ısı akış değerine eşit olmak zorundadır [24] [25].

$$\begin{aligned}
 G_1(T_1 - T_a) + G_{12}(T_1 - T_2) + G_{13}(T_1 - T_3) + \dots + G_{1n}(T_1 - T_n) + C_1 \frac{dT_1}{dt} &= Q_1 \\
 G_2(T_2 - T_a) + G_{21}(T_2 - T_1) + G_{23}(T_2 - T_3) + \dots + G_{2n}(T_2 - T_n) + C_2 \frac{dT_2}{dt} &= Q_2 \\
 \vdots \\
 G_n(T_n - T_a) + G_{n1}(T_n - T_1) + G_{n2}(T_n - T_2) + \dots + G_{nn-1}(T_n - T_{n-1}) + C_n \frac{dT_n}{dt} &= Q_n
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Matris biçimiyle yazarsak :

$$[G][T] + [C] \left[\frac{dT}{dt} \right] = [Q] \tag{9.2}$$

Burada

G_{ij}	i ve j düğümlerini birbirine bağlayan admitans değeri
G_i	i nolu düğümün öz admitans değeri
T_i	i nolu düğümün sıcaklık değeri
Q_i	i nolu düğümdeki kayıp
C_i	i nolu düğümün ısı kapasitesi

Sürekli hal durumunda ise denklem sadeleşerek şu biçimi alır :

$$\begin{aligned}
G_1(T_1 - T_a) + G_{12}(T_1 - T_2) + G_{13}(T_1 - T_3) + \dots + G_{1n}(T_1 - T_n) &= Q_1 \\
G_2(T_2 - T_a) + G_{21}(T_2 - T_1) + G_{23}(T_2 - T_3) + \dots + G_{2n}(T_2 - T_n) &= Q_2 \\
\vdots \\
G_n(T_n - T_a) + G_{n1}(T_n - T_1) + G_{n2}(T_n - T_2) + \dots + G_{n,n-1}(T_n - T_{n-1}) &= Q_n
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Matris biçimiyle yazıldığında

$$[G][T] = [Q] \tag{9.4}$$

Burada :

[Q]	Isı kaynağı kolon vektörü
[G]	Isıl admitans matrisi
[T]	Düğüm sıcaklıkları kolon matrisi

Düğüm sıcaklıkları başlıbaşına onbeş denge denklemi olarak tanımlanmıştır. Onbeş düğümden yedisinde ısıl kapasite tanımlanmamıştır. Bu düğümler matematiksel olarak elenirse sistem sadece sekiz lineer diferansiyel denklem ile ifade edilebilir. Matrisel biçimde yazılmış en genel ifade motor dönerken yazılabilir. Eğer motor hareketsiz ise ayrı bir admitans matrisi tanımlanmalıdır, çünkü taşınım elemanlarının değerleri değişecektir. Kaynak olmadığından sıfır ısı üretimi nedeniyle hareketsiz durumda denklem sadeleşerek ikinci durumdaki halini alacaktır.

Yukarıdaki denklemler değişen yük ve kayıp durumları için en iyi, quasistatik bir yaklaşımla çözülebilir. Burada kısa ayırık zaman aralıklarında kayıpların sabit olduğu varsayılmaktadır. Ayırık çözümler k'ıncı zaman aralığında temel denklemlerden, özvektör tekniği kullanılarak hesaplanır ve iteratif bir hale dönüşür.

$$[T_{k+1}] = [A_r][T_k] + [u_k] \tag{9.5}$$

$$[T_{k+1}] = [A_s][T_k] \tag{9.6}$$

Yukarıdaki bu denklemler çevre sıcaklığına dayandırılır. Bu değer, motor mutlak sıcaklığı hesaplanırken bir sapma olarak eklenmek zorundadır.

Bunun yanında dirençlerdeki, sıcaklıkla olan değişimi bu denklemlerde görebilmek için ısıl üretim katsayısı her bir adımda tekrar hesaplanmalıdır.

$$[T_{k+1}] = [A_r][T_k] + ([I] + [\alpha][T_k])[u_k] \quad (9.7)$$

Burada üç sargı bileşeninde bulunan iletkenlere ilişkin dirençlerin sıcaklık katsayıları $[\alpha]$ matrisi ile verilmiştir.

Modelde onbeş düğüm olduğuna göre problem basit bir lineer denklem sistemine dönüşür ve diagonale göre simetriktir. Bu sistem örneğin Gauss yöntemi kullanılarak çözülebilir ve tüm düğümlere ilişkin sıcaklık değerleri hesaplanabilir.



10. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bir elektrik makinesinin matematik modeline neden ihtiyaç duyulabilir? Üretici firmalar günümüzdeki zor rekabet koşulları nedeniyle yeni tasarlanacak ya da geliştirilecek ürünlerinde, ayrıntılı ve doğru bir matematik modele gereksinim duyar. Makine içindeki sıcaklık dağılımını verecek olan ısınma modeli ise makineye ilişkin matematik modelin en önemli parçalarından biri olacaktır. Ancak tasarımcı açısından önemli olan, çalışmalarında yeterli olabilecek bir yöntem kullanmasıdır. Örneğin daha önce üretilmiş ve özgeçirileri bilinen türde bir ürün için çok kapsamlı bir ısıl modele ihtiyaç duyulmaz. Bununla birlikte daha önce üretilmemiş bir ürünle ilgilenildiğinde ya da mevcut ürüne ilişkin verilerin ve sonuçların elde edilmesinin zor olduğu durumlarda, ayrıntılı bir ısınma modelinin gerekliliği de ortaya çıkar. Standartlar tarafından konulmuş sınırlamalar da bu gereksinimin bir diğer nedenidir.

Günümüzde elde edilebilecek ısınma modellerini iki sınıfta gruplandırmak mümkündür. Bunlardan ilki sınır elemanları yönteminin ya da sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı sayısal analiz yöntemleridir. İkinci tür çalışmalar ise toplu parametrelili ısıl eşdeğer devre adı altında incelenebilir.

Birinci grupta yer alan yöntemlerde elde edilecek sonuçlar oldukça sağlıklı olur. Bu tür yöntemlerde yapılan, makine geometrisinin küçük parçalara bölünmesi ve bu parçaların her biri için ısıl denge denklemlerinin çözülmesidir. İlgilenilen geometrik yapı bir ağla örülerek problem çok küçük bölgelere indirgenir ve tam bir sıcaklık dağılımının çıkarılmasına çalışılır. İlk bakışta çok iyi bir yöntem gibi görünmesine rağmen, gerçekte bilgi-işlem yatırımı bakımından uygulanması neredeyse olanaksızdır. Bir asenkron motörün geometrisi düşünüldüğünde, böyle bir yapıyı ağla örmek ve üç boyutlu ısı akış modelini yaratarak çözmek için çok büyük bilgisayar belleklerine ve buna koşut olarak da çok uzun sürelerle gerek vardır. Bu sorunun tek çıkış yolu motörü bölüm bölüm modellemek olacaktır. Örneğin, sadece stator sargılarını modellemek gibi. Bütün bir makine geometrisini temsil eden üç boyutlu doğru bir model henüz oluşturulamamıştır.

İkinci tür yöntemler de temelde birinci tür yöntemlerle aynı mantığa dayanmaktadır. Bütün bir geometriyi ağla kaplamak yerine, motor geometrisi, belirli sayıdaki düğümlerde toplanmış olarak temsil edilebilir. Yani parça sayısı yüzbinler değil sadece onbeş yirmi kadardır. Böyle düşünüldüğünde yöntemin çok doğru çözümler vermeyeceği düşünülebilir. Ancak tanımlanacak her bir parçadaki ısı akışı doğru biçimde hesaplanabilirse yöntem çok doğru sonuçlar verir. O halde binlerce parçaya ilişkin matrisleri çözmek için uğraşmak yerine yirmi kadar lineer denklem sistemini çözmek daha akıllıca olacaktır. Ayrıca bu tür bir toplu parametrelili eşdeğer devre hem sürekli hem de geçici durumları kapsayacak biçimde oldukça ayrıntılı ve doğrudur. Çünkü ısı aktarımı konusunda gerekli tüm kavramsal çalışmalar yapılmıştır. Örneğin sargıların nasıl modellenebileceğine ilişkin teoriler geliştirilmiştir. Isı aktarımı konusunda yöntemin tek eksiği iletimle ilgili, taşınım-iletim katsayılarının tanımlanması olabilir. Çünkü bu konuda güvenilebilir ifadelerin elde edilmesi için yapılması gereken daha bir çok çalışma vardır.

Toplu parametrelili eşdeğer devrenin istenen sonucu verebilmesi için motor kayıplarının doğru şekilde tespit edilmesi ve geometrik yapı içerisinde doğru bir şekilde paylaşılması gerekir. Örneğin stator demir kayıplarının sadece stator dışlarında ortaya çıktığı varsayımı yapılarak kurulacak bir modelde, stator boyun sıcaklığında değişiklik olmaz. Ancak sargı sıcaklıklarının hesabında hata yapılacaktır. Sargı sıcaklıklarının hatalı hesaplanması hem yalıtım açısından hemde motor ömrü açısından önemlidir.

Yöntemin en iyi yönü ısıl devreyi oluşturan ısıl dirençlerin tamamen motorün geometrik boyutları ve kullanılan malzemenin ısıl özelliklerinin kullanılarak hesaplanmasıdır. Direnç ifadeleri çok basit dört işlem ifadelerinden oluşmaktadır. Bu da çözüm açısından tasarımcıyı çok rahatlatır.

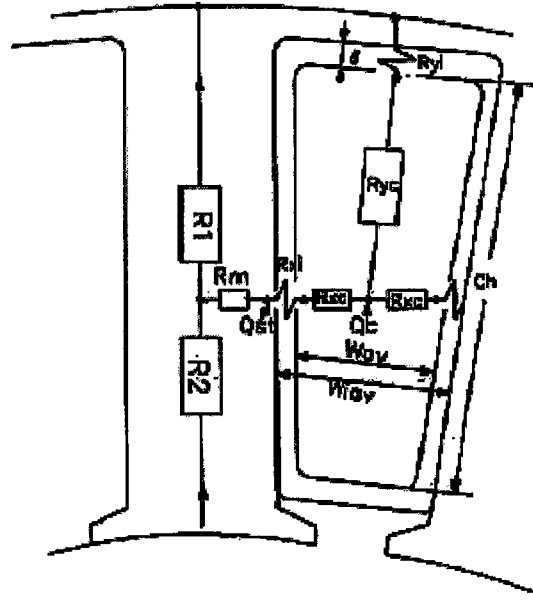
Toplu parametrelili eşdeğer devre sürekli hal çözümlerini yapabildiği gibi geçici durumları da kapsar. Bu amaca yönelik olarak ısıl devreyi oluşturan parçayların ortalama sıcaklık düğümlerinde ısıl kapasiteler tanımlanır. Motorü normal çalışma koşulları dışında zorlayacak türde bir çalışma söz konusu olduğunda ortaya çıkacak ısı enerjisi bu düğümlerde ek kaynaklar olarak incelenir. Böylece motorün geçici durumlarda çalışma hali de kapsanmış olur.

Bunun yanında taşınım ile ısı aktarımında ısı iletkenlik katsayılarının hesabı oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu sayıların elde edilmesi bir kaç basamaklı bir işlemdir. Buna rağmen dikkatli ve titiz bir çalışma sonucu bu zorlukta aşılabılır.

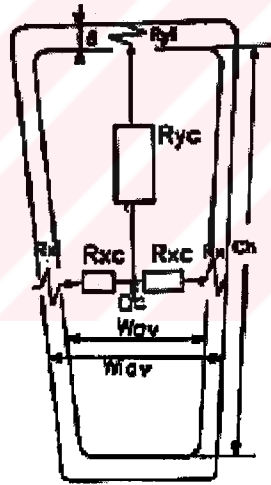
Toplu parametrelili ısı eşdeğer devreyi istenildiği kadar ayrıntılı ya da ihtiyaca göre basit bir biçimde kurmak da mümkündür. Devrenin nasıl oluşturulacağı tamamen tasarımcının öngörüsüne bağlıdır. Örneğin bu çalışmada rulmanlar mille beraber tek bir parça olarak kabul edilmiştir. Oysa rulmanlarda oluşacak sürtünme kaybı rulamanların ayrıca ele alınmasını gerektirebilir. Yapısı gereği rulmanları modellemek zor olmasına rağmen içi boş bir silindir olarak ele alınması doğru bir sonuç için yeterli olabilir. Bilyelerin yuvarlanma yolu üzerinde dönerken sürtünme nedeniyle ortaya çıkaracakları ısıyı da kaynak olarak tanımlamak modelin çözümünü mümkün kılacaktır. Ancak buradaki en büyük zorluk bilyeler yuvarlanma yolu üzerinde dönerlerken ortaya çıkardıkları ısı enerjisinin nasıl hesaplanacağıdır. Bu teorik bilginin elde edilmesi rulman üreticilerinin işbirliğini gerektirmektedir. Yapılan çalışma esnasında bu türden bir işbirliği için denemeler yapılmasına rağmen istenen seviyede bir işbirliği sağlanamadığından rulmanlara ilişkin bir modelleme ısı eşdeğer devre içinde yer almamaktadır. Rulmanların sürtünme kayıplarının büyüklüğü de, modele katmaya değer olup olmadıkları bakımından değerlendirilmesi gereken bir noktadır.

Eşdeğer devre modeli yaratılırken dikkat edilmesi gereken en önemli alt parça sargılardır. Motörün ömrü ve yalıtım sınıfının belirlenmesi buradaki sıcaklık değerine bağlıdır. Sargıların modellenmesi farklı yollarla yapılabilir. Çalışmada bunlardan sadece bir tanesi ele alınmış ve toplu parametrelili ısı eşdeğer devre bu biçimiyle kurulmuştur.

Kullanılan modellemede iletken kesiti daire biçimli olarak alınmaktadır. İkinci tür yaklaşımda ise iletken ile ilişkili bu daire kesit, eşdeğer bir kare ile modellenir. Oluk içinde ısı akışı ve ısı dirençlerinin nasıl olacağı şekil 10.1’de verilmektedir. Bu verilere göre sargılara ait ısı eşdeğer devreyi şekil 10.2’deki gibi çizebiliriz.



Şekil 10.1 Oluk içindeki sargıların kesiti



Şekil 10.2 Oluk içi sargılara ilişkin ısı eşdeğer devre modeli

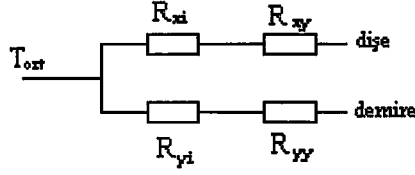
Şekil 10.2'deki verilere göre elde edilecek sargılara ilişkin ısı eşdeğer devre şekil10.3'deki gibi çizebiliriz.

Direnç ifadeleri

$$R_{xy} = \frac{\delta}{k_{sl} C_h h} \quad (10.1)$$

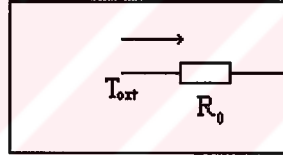
$$R_{yy} = \frac{\delta}{k_{sl} W_{yav} h} \quad (10.2)$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 10.3 Oluk içi sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre

İnceleme yapılırken dirençleri ayırıp hangi koşulları sağladıkları dikkate alınır. Bu amaca yönelik olarak oluk içinde dirençleri basamak basamak elde etmeye çalışalım. Önce x doğrultusunu incelenirse :



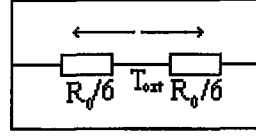
Şekil 10.4 x doğrultusundaki akış; üretim ortada, akış tek yönlü

$$R_0 = \frac{l}{kA} \quad (10.3)$$

olmak üzere ısı üretiminin tam ortada olduğunu ve akışın tek yönlü olduğunu varsayılır. Dışarıdan da ısı girişi yoksa bu durumda direncin değeri şöyle olacaktır :

$$R = \frac{R_0}{3} \quad (10.4)$$

Ancak şekil 10.2'den de görüldüğü gibi akış tek yönlü değil aksine iki yönlüdür. İlk duruma göre değişen tek şey ortamda üretilen ısıdır ve ikiye bölünmektedir. O halde ilk durumdaki direncin ifadesini ikiye böldüğümüzde yeni durum için direnç hesaplanmış olur.



Şekil 10.5 x doğrultusundaki akış, üretim ortada akış çift yönde

$$R = \frac{R_0}{6} \quad (10.5)$$

y doğrultusunda ise tek bir dirençle karşılaşır. Yani üretim sargı içinde ve ısı akışı demir çekirdeğe ve oradan da gövde yoluyla ortama olacak şekilde yarıçapsal yöndedir. Bir önceki dirençleri yazarken geçerli olan koşullar burada da mevcut olduğuna göre bu tek direnci de aynı şekilde yazabiliriz :

$$R = \frac{R_0}{3} \quad (10.6)$$

Şimdi bu ifadelerin ayrıntılı bir biçimde elde edilmesine çalışalım :

$$R_{xi} = \frac{R_{x0}}{6} \quad (10.7)$$

$$R_{x0} = \frac{W_{av}}{k_e C_h l} \quad (10.8)$$

l burada L / 2 dir.

$$R_{yy} = \frac{R_{y0}}{3} \quad (10.9)$$

$$R_{y0} = \frac{C_h}{k_e C_h l} \quad (10.10)$$

Şekil 10.5'de $T_1 = T_2$ alındığında,

$$R_{xi}' = \frac{R_{xi} R_{xi}}{R_{xi} + R_{xi}} \quad (10.11)$$

$$R_{xi} = \frac{W_{av}}{12 k_e C_h l} \quad (10.12)$$

y doğrultusundaki direncin ifadesi ise

$$R_y = \frac{C_h}{3k_e W_{av} l} \quad (10.13)$$

Şekil 10.1'deki oluk çevresini saran yalıtkanlara ilişkin geçiş dirençleri de yine aynı mantıkla tanımlanır.

$$R_{xy} = \frac{\delta}{2k_{sl} C_h l} \quad (10.14)$$

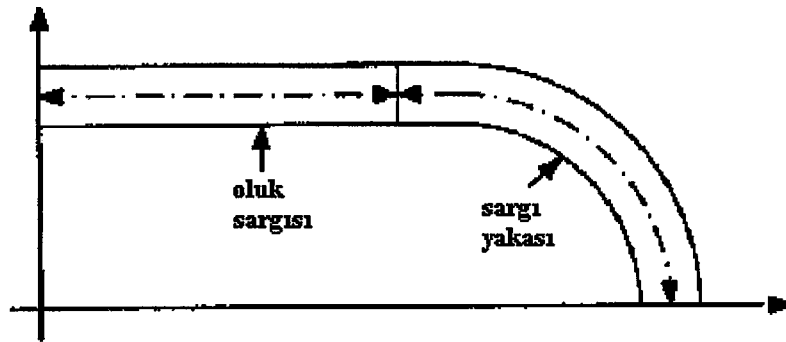
$$R_{yy} = \frac{\delta}{k_{sl} W_{iav} l} \quad (10.15)$$

Sonuç olarak oluk içi iletkeninin ve yalıtkanının yarıçapsal eşdeğer dirençleri n oluk sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

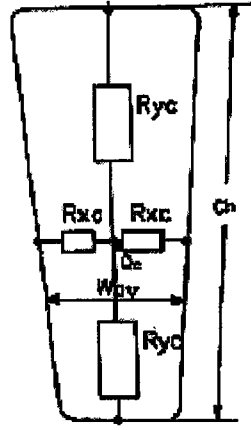
$$R_x = R_{xy} + R_{xi}' = \frac{W_{av}}{12nk_e C_h l} + \frac{\delta}{2nk_{sl} C_h l} \quad (10.16)$$

$$R_y = R_{yy} + R_{yi}' = \frac{C_h}{3nk_e W_{av} l} + \frac{\delta}{nk_{sl} W_{iav} l} \quad (10.17)$$

Bu yaklaşımı uç sargıları için de yapmak mümkündür. Oluk içindeki sargı modeline göre buradaki farklılık, yarıçapsal olarak motör içindeki kapak boşluğuna her iki yöndede ısı akışı vardır. Enine akış burada da değişmeyecektir. Yalnız enine ve yarıçapsal akışta oluk içi yalıtkan dirençlerinin burada bulunmayacağı da unutulmamalıdır.



Şekil 10.6 Oluk içi sargıları ve uç sargılarının birbirlerine göre durumu



Şekil 10.7 Uç sargılarına ilişkin ısı eşdeğer devre

Direnç ifadelerine gelince,

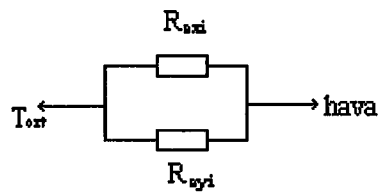
$$R_{exi} = \frac{R_{ex0}}{6} \quad (10.18)$$

$$R_{eyi} = \frac{R_{ey0}}{6} \quad (10.19)$$

$$R_{ex0} = \frac{W_{av}}{k_e C_h l_{av}} \quad (10.20)$$

$$R_{ey0} = \frac{C_h}{k_e W_{av} l_{av}} \quad (10.21)$$

$T_1 = T_2$ için



Şekil 10.8 Uç sargılarına ilişkin ısı devre modeli; üretim ortada akış çift yönlü

$$R_{exi}' = \frac{W_{av}}{12k_e C_h l_{av}} \quad (10.22)$$

$T_3 = T_4$ için

$$R_{eyi}' = \frac{C_h}{12k_e W_{av} l_{av}} \quad (10.23)$$

n oluk sayısı olmak üzere enine ısııl direnç,

$$R_{exi}' = \frac{W_{av}}{12nk_e C_h l_{av}} \quad (10.24)$$

yarıçapsal ısııl direnç,

$$R_{eyi}' = \frac{C_h}{12nk_e W_{av} l_{av}} \quad (10.25)$$

Uç sargılarından oluk içi sargıları yönünde eksenel bir akış da mevcuttur. Bu akışı tanımlayan eksenel ısııl direnç aşağıdaki gibi olur :

$$R_{ac} = \frac{l}{3k_i W_{av} C_h} \quad (10.26)$$

Bu biçimiyle sargılara ilişkin ikinci bir yaklaşımla, ısııl dirençlerin nasıl tanımlanacağı da gösterilmiş olur.

Toplu parametrelili ısııl eşdeğer devre çıkarılırken rotor sargıları için de farklı yaklaşımlar yapılabilir. Rotor sargıları burada kafes rotorlu bir motor için modellenmektedir. Rotor iletken çubukları bu nedenle içi dolu bir silindir olarak dikkate alınmıştır. Ancak bu sargılar da aynı stator sargılarındaki gibi modellenebilir. Bu çok daha ayrıntılı bir model için düşünülebilir. Burada çubuklar, geometrik yapıları gereği, temel silindirik bileşenin kullanılmasına çok elverişli oldukları için içi dolu silindirler olarak modellenmektedir. Sürekli belirtildiği gibi bunun kararı tasarımcının tecrübesine ve öngörüne bağlıdır.

Yapılan açıklamalardan görülebileceği gibi toplu parametrelili eşdeğer devre modeli bazı sakıncaları olmasına rağmen bugün için kullanılabilecek en ayrıntılı ve

doğru modelleme biçimidir. Model hem sürekli hem de geçici durumlar için uygundur. Isıl devrenin ne kadar ayrıntılı olacağı ve alt parçalarda yapılacak bazı yaklaşım ve varsayımlar tasarımcıya bağlıdır. Basitliği ve ifadelerdeki büyüklüklerin kolay erişilebilir olması nedeniyle tercih edilmesi gereken bir ısıl modelleme yaklaşımıdır.



KAYNAKLAR

- [1] **Perez, I.J. and Kassakian, J.K.**, 1979. A stationery thermal model for smooth air gap rotating electrical machines, *Electr. Mach. Electromech.*, **3**, 285-303
- [2] **Screenivasan, V.K. and Sengupta, D.P.**, 1977. Thermal design of a totally enclosed fan cooled induction motor, *IEEE PES Winter Meeting Paper A 77 97-9*
- [3] **Kotnik, R.L.**, 1954. An equivalent thermal circuit for non ventilated induction motors, *Trans. AIEE* Vol. **73**, pt **3A**, pp. 1604-1609
- [4] **Namburi, N.R.**, 1983. Thermal modelling of an induction motor, *IEEE Trans. Power Apparatus and systems*, Vol. **pas 102** no **8**, pp. 2636-2639
- [5] **Martiny, W.T., McCoy, H.B. and Margolis, H.B.**, 1961. Thermal relationships an an induction motor under normal and abnormal operation, *Trans. AIEE*, Vol **78** pt **3A**, pp. 66-78
- [6] **Tye, R.P.**, 1969. Thermal conductivity, Academic Press, vol.1,2
- [7] **General Electric**, 1969. Heat transfer and fluid data book
- [8] **Mellor, P.H. and Robert, D., Turner, D.R.**, 1991. Lumped parameter thermal model for electrical machines of TEFC design, *Proc. IEE*, vol.138, no.5, pp. 205-218
- [9] **Incropera, F.P. and DeWitt, D.P.**, 1996. Fundamentals of heat and mass transfer, John Wiley and sons
- [10] **Gazley, C.**, 1958. Heat transfer characteristics of rotational and axial flow between concentric cylinders., *Trans. ASME*, pp. 79-89
- [11] **Sarıkaya, P. ve İmeryüz, M.**, 1997. Kafesli asenkron makinelerde ısısal eşdeğer devrenin modellenmesine yönelik bir çalışma, *Elmeksem 97 Bursa 4. Elektromekanik sempozyumu*, sayfa 213-216
- [12] **Bousbaine, A. and McCormick, M., Lowi, W.F.**, 1991. Insitu determination of thermal coefficients for electrical machines, *IEEE Trans. On Energy Conversion*, vol. **10** no. **3**, pp. 385-391
- [13] **Parrott, J.E and Stuckes, A.D.**, 1975. Thermal conductivity of solids, Pion Limited

- [14] **Robert, D.**, 1986. The application of an induction motor thermal model to motor protection and other functions, *Ph. D. Thesis*, University of Liverpool, UK
- [15] **Heiles, F.**, 1952. Design and arrangement of cooling fins, *Digest*. Vol. 13 no. 10, pp. 343-346
- [16] **Bousbaine, A.**, 1993. An investigation into thermal modelling of induction motors, *Ph. D. Thesis*, University of Sheffield, UK.
- [17] **Christofides, N.**, 1965. Origin of load losses in induction motors with cast aluminium rotors, *Proc. IEE*, Vol 112, pp. 2317-2332
- [18] **Bird, B.M.**, 1964. Measurement of stray load losses in squirrel cage induction motors, *Proc. IEE*, Vol.116, pp. 737-751
- [19] **Bird, B.M.**, 1964. Measurement of stray load losses in squirrel cage induction motors, *Proc. IEE*, vol. 111, pp. 1697-1705
- [20] **Çetin, İ., Schuisky, W.**, 1987. Elektrik motorleri 1.Kısım, Sayfa 213
- [21] **Say, M.G.**, 1976. Alternating current machines, Pitman
- [22] **Gilbert, A.J.**, 1961. A method of measuring loss distribution in electrical machines, *Proc. IEE*, vol .108A , pp. 239-244
- [23] **Turner, D.R., Binns, K.J., Shamsadeen, B.N. and Warne, D.F.**, 1991. Accurate measurement of induction motor losses using balanced calorimeter, *Proc. IEE*, Vol 138, No 5,.. pp. 233-242
- [24] **Roberts, T.J.**, 1969-1970. Determination of the constants of heat flow equations of electrical machines, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.148, Pt.3E, pp. 84-92
- [25] **Roberts, T.J.**, 1969. The solution of the heat flow equations in large electrical machines, *Proc. IME*, Vol 184, pt 3E, pp. 70-83

ÖZGEÇMİŞ

Pevröl Sarıkaya 25 Nisan 1969'da İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini İstanbul Erkek Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1988 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Elektronik Fakültesi Elektrik Mühendisliği Bölümüne girdi. 1993 yılında Elektrik Mühendisi ünvanı alarak bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Programına girdi. 1995 yılından beri Türk Elektrik Endüstrisi ARGE biriminde Manyetik Analiz Mühendisi olarak çalışmaktadır.

