

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONLU TIPTEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT
MANİFOLDLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu BEKTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONLU TIPTEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT
MANİFOLDLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Burcu BEKTAŞ
(509101002)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Uğur DURSUN

HAZİRAN 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün **509101002** numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **BURCU BEKTAŞ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**SONLU TİPTEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT MANİFOLDLAR**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Uğur DURSUN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Aynur UYSAL**
Doğuş Üniversitesi

Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **4 Mayıs 2012**
Savunma Tarihi : **5 Haziran 2012**

Anneme,

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını, desteğini ve değerli zamanını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Uğur DURSUN'a sonsuz teşekkür etmek isterim. Yüksek lisans eğitimim boyunca maddi olarak beni destekleyen TÜBİTAK(Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu)'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Gerek yüksek lisans gerekse yüksek lisans dışında karşılaştığım zorluklarda bana yol gösteren ve beni cesaretlendiren arkadaşlarıma ve abime, beni yetiştirip bugüne getiren anneme, merhum ananeme ve tüm sevdiklerime sonsuz sevgilerimi sunarım.

Haziran 2012

Burcu Bektaş
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	3
3. SONLU TİPTEN ALT MANİFOLD TANIMI VE TEMEL TEOREMLER.....	9
4. SONLU TİPTEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR.....	13
4.1 Gauss Tasviri.....	13
4.2 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Alt Manifoldlar	16
4.3 2-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Alt Manifoldlar	18
5. KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT MANİFOLDLAR.....	23
5.1 Küresel Gauss Tasviri	23
5.2 1-Tipinden Küresel Gauss Tasvirine Sahip Küresel Alt Manifoldlar	26
5.3 2-Tipinden Küresel Gauss Tasvirine Sahip Küresel Alt Manifoldlar	29
6. 2-TİPİNDEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP İZOPARAMETRİK KÜRESEL HİPERYÜZEYLER.....	37
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ	47

SEMBOL LİSTESİ

$\tilde{g}$	: Çevreleyen uzayın metrik tensörü
g	: Alt manifoldun metrik tensörü
$\tilde{V}$	: Çevreleyen uzayın Riemann konneksiyonu
V	: Alt manifoldun Riemann konneksiyonu
$\tilde{R}$	: Çevreleyen uzayın eğrilik tensörü
R	: Alt manifoldun eğrilik tensörü
A	: Şekil operatörü
D	: Alt manifoldda indirgenmiş normal konneksiyon
Δ	: Laplas operatörü
Imh	: Birinci normal uzay
TM	: Teğet vektör demeti
$G(n,m)$	: Grasmaniyen manifoldu
h	: İkinci esas form
$\hat{h}$	: Küresel ikinci esas form
ω_B^A	: Konneksiyon formları
trh	: İkinci esas formun izi
S	: Skaler eğrilik
H	: Ortalama eğrilik vektörü
$\hat{H}$	: Küresel ortalama eğrilik vektörü

SONLU TIPTEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT MANİFOLDLAR

ÖZET

Sonlu tipten alt manifoldlar fikri, 1970 yıllarının sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından ortaya atılmış ve Öklidiyen ve yarı Öklidiyen uzaylarının alt manifoldlarının incelenmesinde çok geniş olarak kullanılan bir kavram olmuştur. $\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^N$ bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^N$ Öklid uzayına tanımlanmış düzgün bir tasvir olsun. Eğer ϕ tasviri $\phi = c + \sum_{i=1}^k \phi_i$ şeklinde sonlu bir spektral açılıma sahip ise, ϕ 'ye sonlu tipten bir tasvir denir. Burada c , $\mathbb{E}^N$ içinde sabit bir vektör ve ϕ_i 'ler ise sıfırdan farklı $\mathbb{E}^N$ değerli Laplasiyen operatörünün, Δ , öz vektörleridir. Yani, $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ olmak üzere $\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i$ denklemini sağlar. ϕ tasvirinin spektral açılımında k tane sabit olmayan terim varsa, ϕ tasviri k -tipinden olarak adlandırılır. Ayrıca sonlu tipten kavramı Chen ve Piccinni tarafından Öklidiyen uzayların alt manifoldları üzerinde tanımlı türevlenebilir tasvirlerle genişletilmiştir. Bu tasvirler arasında alt manifoldların Gauss tasvirleri oldukça önemli yer tutmaktadır. Sonlu tipten Gauss tasviri alt manifoldlarla ilgili çalışmalarda önemli bir araç olarak kullanılmıştır. Chen ve Piccinni sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili makalede 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt hiperyüzeyler sınıflandırılmış ve $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında kompakt bir yüzeyin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^m$ veya $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{E}^4 \subset \mathbb{E}^m$ olmasıdır şeklinde önemli bir teorem elde etmişlerdir. Daha sonra küresel alt manifoldların, aslında küresel Gauss tasviri ile daha yakın ilişkili olduğu gözlenmiştir. Chen ve Lue ise sonlu tipinden küresel Gauss tasvirine sahip küresel bazı alt manifoldları sınıflandırmıştır.

Bu tez çalışmasının temel amacı ise, sonlu tipten küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlar ile ilgili teoremleri incelemektir. Ayrıca küresel hiperyüzeylerin küresel Gauss tasviri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır ve birinci bölümde tezin temelini oluşturan sonlu tipten alt manifoldlar ve Gauss tasvirinin tarihsel gelişimi hakkında kısaca bilgi verilmektedir.

İkinci bölümde elde edilen bulgulara hazırlık amacıyla, ortalama eğrilik vektörü, minimal manifoldlar, Laplasiyen operatörü, izoparametrik hiperyüzey gibi temel tanımlar, Gauss ve Weingarten formülleri ve alt manifoldların temel denklemleri olan Gauss, Codazzi ve Ricci denklemlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca ispatlarda kullanılan Cartan'ın Yardımcı Teoremi ve Erbacher'ın İndirgeme Teoremine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sonlu tipten alt manifoldların temel tanımı verilmiştir. k -tipinden ve sıfırlı k -tipinden alt manifoldların tanımları açıklanmıştır. Bir alt manifoldun veya bir tasvirin sonlu tipten olduğuna karar vermek için kullanılan temel teoremlere yer verilmiştir. Son olarak, bu bölümde verilen tanımlar ve teoremler, $\mathbb{E}^4$ içine daldırılmış bir çarpım yüzeyi olan tor yüzeyine uygulanmış ve $\mathbb{S}^3(1)$ içine daldırılmış Clifford minimal tor yüzeyinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Öklid uzayına daldırılmış alt manifoldlar için Grasmaniyen manifoldu yardımıyla Gauss tasviri tanımlanmıştır. Geri kalan kısımda ise Gauss tasvirinin Laplasiyeninin hesapları verilmiştir. Gauss tasvirinin birinci Laplasiyen ifadesinin yardımıyla, Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, alt manifoldun normal konneksiyonunun düz ve Öklid uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır sonucu çıkarılır. Bölümün devamında 1-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili teoremlere yer verilmiştir. Öklid uzayının bir alt manifoldunun Gauss tasvirinin 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul, manifoldun skaler eğriliğinin sabit, normal konneksiyonunun düz ve ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır. Ayrıca 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeylerin sınıflandırmasını veren teoreme yer verilmiştir. 2-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyen ifadesi verilmiştir ve örnek olarak Veronese yüzeyi incelenmiştir.

Beşinci bölümde, küresel alt manifoldların küresel Gauss tasviri ele alınmıştır. Küresel alt manifoldların küresel Gauss tasviri, Obata'nın tasviri yardımıyla tanımlanır. Dördüncü bölümde tanımlanan Gauss tasviri ile küresel Gauss tasvirinin geometrik davranışları farklıdır. Örneğin; Öklid uzayının her kompakt alt manifoldunun Gauss tasviri kütesel simetrik iken küresel kompakt alt manifoldların küresel Gauss tasviri genellikle kütesel simetrik değildir. Dördüncü bölümde yapılanlar küresel Gauss tasvirine uygulanmıştır. Benzer şekilde küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeninin hesapları verilmiştir. M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\mathbb{S}^{m-1}$, m -boyutlu $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayının birim hiperküresi olsun. $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ izometrik daldırmasının küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, x izometrik daldırmasının total jeodezik olmasıdır. Ayrıca 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili önemli teoremlere yer verilmiştir. Küresel bir alt manifoldun küresel Gauss tasvirinin kütesel simetrik 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul, alt manifoldun sabit skaler eğrilikli ve düz normal konneksiyona sahip küresel minimal olmasıdır. Ayrıca $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde total jeodezik olmayan bir yüzeyin kütesel simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin tamamen total jeodezik $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{m-1}$ içinde kalan Clifford minimal tor yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Son olarak, 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip Veronese yüzeyinden ve eşkenar minimal tor yüzeyinden bahsedilmiştir.

Tezin son bölümünde, $\mathbb{E}^{n+2}$ Öklid uzayının $\mathbb{S}^{n+1}$ hiperküresi içinde minimal olmayan izoparametrik bir hiperyüzeyinin küresel Gauss tasviri ele alınmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, $\mathbb{S}^{n+1}$ birim küresi içinde sıfırdan farklı ortalama eğrilığe sahip her yarı-ombilik olmayan izoparametrik hiperyüzeyi, kütesel simetrik 2-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu ispatlanmıştır. $\mathbb{S}^{n+1}$ birim küresinin her total jeodezik olmayan, yarı-ombilik hiperyüzeyi sıfırlı 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiş ve en son olarak $\mathbb{S}^3$ küresinin yüzeyleri ile ilgili bir sınıflandırma

teoremi verilmiştir, yani, M , $\mathbb{S}^3(1)$ küresinde ortalama eğriliği sabit yarı-ombilik olmayan bir yüzey ise M yüzeyinin kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin $a \neq b$ olmak üzere $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{S}^3(1)$ yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır.

SPHERICAL SUBMANIFOLDS WITH FINITE TYPE SPHERICAL GAUSS MAP

SUMMARY

In late 1970's B.Y. Chen introduced the notion of finite type submanifold of a Euclidean space. Since then the finite type submanifolds of Euclidean spaces or pseudo-Euclidean spaces have been studied by many geometers, and many interesting results have been obtained. Let M^n denote a Riemannian n -manifold with Laplacian operator Δ . A smooth map $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{E}^N$ of M^n into the Euclidean N -space is said to be of finite type if it admits a finite spectral decomposition, $\phi = c + \sum_{i=1}^k \phi_i$, where c , is a constant vector in N -dimensional Euclidean space, ϕ_i 's are non-constant $\mathbb{E}^N$ -valued maps such that $\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i$ with $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$. Otherwise, it is said to be of infinite type. When the spectral decomposition contains exactly k non-constant terms, the map ϕ is called k -type. Then, Chen and Piccinni extended the notion of finite type to differentiable maps, in particular, to Gauss map of submanifolds. Finite type Gauss map is useful tool in the study of submanifolds. Chen and Piccinni characterized and classified compact hypersurfaces with 1-type Gauss map. Also, they proved that a compact surface M in a Euclidean space $\mathbb{E}^m$ has 1-type Gauss map if and only if M is one of the following surfaces: a sphere $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^m$ or the product of two plane circles $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{E}^4 \subset \mathbb{E}^m$. Later, Chen and Lue introduced the spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map. They gave some classification theorems on spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map. It was believed that for spherical submanifolds the concept of spherical Gauss map is more relevant than Gauss map which was initiated by Chen and Piccinni. The geometrical behavior of these Gauss maps are different. For instance, Gauss map of every compact Euclidean submanifold is mass-symmetric; but the spherical Gauss map of a spherical compact submanifold is not mass-symmetric in general.

The main aim of this thesis is to study finite type spherical Gauss map of spherical submanifolds, in particular, spherical hypersurfaces with 2-type spherical Gauss map. We obtain some new results on such hypersurfaces in the last chapter.

This thesis contains six chapters. In the first chapter, we give a brief historical overview of the development of finite type submanifolds and finite type Gauss map.

In the second chapter, we give some basic definitions of the notions that are used in the sequel such as parallel vector field, mean curvature vector, minimal submanifolds, Laplacian operator and isoparametric hypersurfaces. If the principal curvatures of hypersurface are constants, then the hypersurface is called isoparametric hypersurface.

A submanifold of Riemannian manifold is called minimal if its mean curvature vector vanishes identically. Similarly, if second fundamental form of the submanifold of Riemannian manifold vanishes identically, this submanifold is called totally geodesic. The Laplacian operator on a submanifold M of Riemannian manifold is given by $\Delta = \sum_i (\nabla_{e_i} e_i - e_i e_i)$, where ∇ is the connection of the submanifold M and $e_1, \dots, e_n$ is a local orthonormal tangent basis on M . We also give formulas of Gauss and Weingarten, the fundamental equations of submanifolds such as Gauss, Codazzi and Ricci equations. Moreover, we mention Cartan's Lemma and Reduction Theorem of Erbacher.

In the third chapter, we study finite type submanifolds of Euclidean space and we give definitions of finite type, k -type and null k -type. If for one of $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_j$ vanishes identically in the spectral decomposition of a smooth map, it is called null k -type. We give certain theorems about finite type submanifolds and finite type smooth maps. Finally, in this chapter, we give the example of product submanifold such as flat torus and the standart imbedding of $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $\mathbb{S}^3$ is also called Clifford minimal torus.

In the forth chapter, we give the definition of Gauss map by using properties of Grassmanian manifold, $G(n, m)$, which consists of linear n -subspaces of $\mathbb{E}^m$. Gauss map $\nu : M^n \rightarrow G(n, m)$ associated with immersion is the map which carries each $p \in M$ to linear n -subspaces of $\mathbb{E}^m$ obtained by parallel displacement of the tangent space $T_p M^n$. A spherical finite type map $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$ of a Riemannian manifold M into $\mathbb{S}^{N-1}$ is called mass-symmetric if the vector c in its spectral decomposition is the center of $\mathbb{S}^{N-1}$. In the remaining part of this section, we give a computation of the first Laplacian of Gauss map. The Laplacian of the Gauss map of a submanifold of Riemannian manifold implies the following results: Let M be a submanifold of m -dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^m$. Then the map $\nu : M \rightarrow G(n, m)$ is harmonic if and only if M has parallel mean curvature in $\mathbb{E}^m$. Another result is that if $\bar{\nu} = i \circ \nu : M \rightarrow G(n, m) \rightarrow \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$, where i is the inclusion map and $N = \binom{m}{n}$, then the map $\bar{\nu} : M \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ is harmonic if and only if M has flat normal connection and parallel mean curvature vector. Furthermore, a characterization theorem for submanifolds with 1-type Gauss map is given with the proof. Let $x : M \rightarrow \mathbb{E}^m$ be an isometric immersion of a compact, oriented Riemannian manifold M into m -dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^m$. Then the Gauss map $\nu : M \rightarrow \Lambda^n \mathbb{E}^m$ is of 1-type if and only if M has constant scalar curvature, flat normal connection and parallel mean curvature vector in $\mathbb{E}^m$. In addition, we give theorem which classifies surfaces with 1-type Gauss map. A compact surface of m -dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^m$ has 1-type Gauss map if and only if it is one of the following surfaces: a sphere $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^m$ or the product of two plane circles $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{E}^4 \subset \mathbb{E}^m$. Also we mention that a compact hypersurface of $(n+1)$ -dimensional Euclidean space has 1-type Gauss map if and only if this hypersurface is a hypersphere in $(n+1)$ -dimensional Euclidean space. In the end of this section, we give calculation of the second Laplacian of Gauss map to classify minimal surfaces of $\mathbb{S}^{m-1}$ and we also give the definition of k -standard immersion ψ_k of a 2-sphere $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{S}^{2k}$. It is well-known that k -th standard immersion is an minimal immersion of $\mathbb{S}^2$ into $\mathbb{S}^{2k}$. If k is odd, it is an imbedding and if k is even, it is a two-to-one map. For $k = 2$ the standard immersion, $\psi_2 : \mathbb{S}^2(\frac{1}{3}) \rightarrow \mathbb{S}^4$ is

called Veronese surface and we give explicit expression of Veronese surface. Veronese surface is a compact minimal surface in $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{E}^5$ with 2-type Gauss map.

In the fifth chapter, we give the definition of the spherical Gauss map of a spherical submanifold M^n in $\mathbb{S}^{m-1}$ by using Obata's map which carries $p \in M^n$ to the totally geodesic n -sphere of $\mathbb{S}^{m-1}$ determined by the tangent space $T_p M^n$. As in the forth chapter we give a computation of the first Laplacian of the spherical Gauss map. We also mention the harmonicity of Gauss map. Obata's map of an isometric immersion $x : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ of a Riemannian n -manifold is a harmonic map if and only if x is a minimal immersion. The spherical Gauss map of an isometric immersion $x : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ is harmonic if and only if the immersion x is totally geodesic. We state some theorems on the classification of spherical submanifolds with 1-type spherical Gauss map. A submanifold of $\mathbb{S}^{m-1}$ has mass-symmetric 1-type spherical Gauss map if and only if it is a minimal submanifold of $\mathbb{S}^{m-1}$ with constant scalar curvature and flat normal connection. Moreover, a non-totally geodesic surface in $\mathbb{S}^{m-1}$ has mass-symmetric 1-type spherical Gauss map if and only if it is an open portion of the Clifford minimal torus lying fully in a totally geodesic 3-sphere $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{m-1}$. An n -dimensional submanifold of $\mathbb{S}^{m-1}$ has non-mass-symmetric 1-type spherical Gauss map if and only if it has constant scalar curvature and it is immersed in a totally geodesic $(n+1)$ -sphere $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{S}^{m-1}$ as a hypersurface with nonzero constant mean curvature. Finally, we mention that the Veronese surface in $\mathbb{S}^4$ is the only spherical minimal surface with mass-symmetric 2-type spherical Gauss map and the equilateral minimal torus in $\mathbb{S}^5$ is the only minimal spherical surfaces with non-mass-symmetric 2-type spherical Gauss map.

In the last chapter, we obtain some new results on the spherical Gauss map of spherical hypersurfaces. It is known that there are some examples about null 2-type map in Euclidean space. For example, null 2-type surfaces in $\mathbb{E}^3$ are circular cylinders. On the other hand, example about null 2-type spherical map or submanifold is not known. Chen and Lue concluded that every isoparametric minimal hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}$ has 1-type spherical Gauss map. Thus, we are especially interested in the isoparametric spherical hypersurfaces with finite type Gauss map. First, we calculate the second Laplacian of spherical Gauss map if the submanifold is non-minimal and isoparametric hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}$. Then by using this calculation we prove that every non-pseudo-umbilical isoparametric hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}$ with non-zero mean curvature in $\mathbb{S}^{n+1}$ has mass-symmetric 2-type spherical Gauss map. We give example about non-pseudo-umbilical isoparametric hypersurface with non-zero spherical mean curvature. For instance, the product manifold $\mathbb{S}^{n-k}(a) \times \mathbb{S}^k(b) \subset \mathbb{S}^{n+1}(1)$ with $a \neq b$ and $a^2 + b^2 = 1$ is a isoparametric non-pseudo umbilical hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ and thus it has 2-type mass-symmetric spherical Gauss map. Furthermore, every non-totally geodesic and pseudo-umbilical hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}$ has null 2-type spherical Gauss map. For example, every small sphere $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ is a pseudo-umbilical isoparametric hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ which has null 2-type spherical Gauss map. Finally, we give a classification theorem on surfaces in $\mathbb{S}^3$. That is, we prove that every non-pseudo-umbilical surface with constant mean curvature in the unit sphere $\mathbb{S}^3$ has mass-symmetric 2-type spherical Gauss map if and only if it is an open portion of the product of the plane circles $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{S}^3(1)$ for $a \neq b$ and $a^2 + b^2 = 1$.

1. GİRİŞ

Sonlu tipten alt manifoldlar tanımı 1970'li yılların sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından tanıtıldıktan sonra geometri ile uğraşan pek çok kişi tarafından yoğun olarak çalışılmış ve oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. 1996 yılına kadar bu alanda yapılmış olan çalışmalar, B.Y. Chen tarafından derlenerek bir rapor olarak yayınlanmıştır[1]. Bu tarihten sonrada, bu konuları içeren farklı doğrultularda yapılmış çok sayıda yayınlar bulunmaktadır[2,3,4]. Sonlu tipten kavramı daha sonra alt manifoldlar üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir tasvirlerle genişletilmiştir. Özellikle sonlu tipten Gauss tasvirleriyle ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Chen ve Piccinni sonlu tipten Gauss tasvirine sahip Öklid uzaylarının alt manifoldları üzerine genel bir çalışma yaparak sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar teorisinin temelini oluşturmuştur ve 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt yüzeylerin sınıflandırma teoremini vermişlerdir[5]. Daha sonra ise küresel alt manifoldlar için Gauss tasvirinin özellikleri incelenirken aslında küresel Gauss tasvirin küresel alt manifoldlarla yakın ilişkisi olduğu görülmüştür. Chen ve Lue ise sonlu tipten küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlarla ilgili çalışmalar yapmıştır ve Gauss tasvirine benzer şekilde 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlarla ilgili sınıflandırma teoremleri vermiştir. Ayrıca $\mathbb{S}^{n+1}$ hiperküresinin minimal izoparametrik hiperyüzeyinin 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahiptir sonucuna ulaşılmıştır. Bununla beraber aynı çalışmada 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip küresel minimal yüzeylerin sınıflarını içeren önemli sonuçlar elde etmişlerdir[6].

Bu tezde $\mathbb{E}^{n+2}$ Öklid uzayının $\mathbb{S}^{n+1}$ hiperküresi içinde minimal olmayan izoparametrik bir hiperyüzeyinin küresel Gauss tasviri ele alınmış ve bu tür hiperyüzeylerin 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu birim küre içinde bulunan bir yüzeyin 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olmasıyla ilgili sınıflandırma teoremi elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

M , m -boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun izometrik olarak daldırılmış bir alt manifoldu olsun. M ve $\tilde{M}$ manifoldlarının metrik tensörleri, sırasıyla, g ve $\tilde{g}$ ile Levi-Civita konneksiyonları ise, sırasıyla, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. g metriği, $\tilde{g}$ metrik tensöründen indirgenmiştir.

X ve Y , M manifoldunun teğet vektör alanları ve ξ , M manifoldu üzerinde tanımlı bir normal vektör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.1)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \quad (2.2)$$

formüllerine, sırasıyla, M manifoldunun *Gauss formülü* ve *Weingarten formülü* denir. Burada, A_ξ , M manifoldunun ξ normal vektörü doğrultusundaki şekil operatörünü ve D ise M üzerine indirgenen normal konneksiyonu göstermektedir.

Tanım 2.1 M manifoldunun herhangi bir X teğet vektörü için $D_X \xi = 0$ ise ξ normal vektör alanına paralel vektör alanı denir.

Tanım 2.2 M manifoldu üzerinde tanımlı $H = \frac{1}{n} \text{tr} h$ normal vektörüne M manifoldunun $\tilde{M}$ içindeki ortalama eğrilik vektörü denir.

Tanım 2.3 H ortalama eğrilik vektörü özdeş olarak sıfır ise M 'ye $\tilde{M}$ manifoldunun minimal alt manifoldu denir.

Tanım 2.4 M alt manifoldu üzerinde h ikinci esas formu özdeş olarak sıfır ise M 'ye $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun total jeodezik alt manifoldu denir.

Tanım 2.5 Eğer M manifoldunun herhangi X ve Y teğet vektörleri için

$$h(X, Y) = g(X, Y)H$$

ise M 'ye $\tilde{M}$ 'nin total ombilik alt manifoldu denir.

Bu temel tanımlardan sonra geri kalan kısımda, temel denklemlerden ve teoremlerden

bahsedilecektir.

$\tilde{R}$ ile $\tilde{M}$ manifoldunun eğrilik tensörü gösterilsin. Bu durumda, $\tilde{M}$ manifoldunun herhangi X, Y, Z teğet vektörleri için eğrilik tensörü

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. M alt manifoldu da bir Riemann manifoldu olduğundan R eğrilik tensörü benzer şekilde

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

olarak tanımlanır. (2.1) formülü (2.3) denkleminde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X, Z)) \\ &\quad - (\nabla_{[X, Y]} Z + h([X, Y], Z)) \\ &= R(X, Y)Z + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + \tilde{\nabla}_X h(Y, Z) - \tilde{\nabla}_Y h(X, Z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir. (2.2) formülü göz önüne alındığında (2.4) denklemi

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)} X + A_{h(X, Z)} Y \\ &\quad + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + D_X h(Y, Z) - D_Y h(X, Z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

şekline dönüşür. (2.5) denkleminde ilk üç terim eğrilik tensörünün teğetsel bileşeni, geri kalanlar ise normal bileşenidir. Bu nedenle, (2.5) denkleminin bir W teğet vektörü ile iç çarpımı alındığında

$$\tilde{R}(X, Y; Z, W) = R(X, Y; Z, W) + g(h(X, Z), h(Y, W)) - g(h(X, W), h(Y, Z)) \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada, $R(X, Y; Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ile gösterilmiştir. (2.6) ifadesi *Gauss denklemi* olarak adlandırılır. $\tilde{R}(X, Y)Z$ eğrilik tensörünün normal bileşeni ise

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\tilde{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y h)(X, Z) \quad (2.7)$$

dir. Burada $(\tilde{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$ olarak ifade edilmiştir. (2.7) denkleminde ise *Codazzi denklemi* denir.

ξ ve η normal vektör alanları olmak üzere M alt manifoldunun normal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y; \xi, \eta) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi, \eta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi, \eta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X, Y]} \xi, \eta) \\
&= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X (A_\xi Y), \eta) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X D_Y \xi, \eta) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y (A_\xi X), \eta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y D_X \xi, \eta) \\
&\quad - \tilde{g}(D_{[X, Y]} \xi, \eta) \\
&= -\tilde{g}(h(X, A_\xi Y), \eta) + \tilde{g}(h(Y, A_\xi X), \eta) \\
&\quad + \tilde{g}(D_X D_Y \xi, \eta) - \tilde{g}(D_Y D_X \xi, \eta) - \tilde{g}(D_{[X, Y]} \xi, \eta) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Eğer $R^D(X, Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]} \xi$ ile M alt manifoldunun normal konneksiyonuna karşı gelen eğrilik tensörü gösterilirse, (2.8) denkleminde

$$R^D(X, Y; \xi, \eta) = \tilde{R}(X, Y; \xi, \eta) + g([A_\xi, A_\eta](X), Y) \tag{2.9}$$

elde edilir. Burada $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ dir. (2.9) denkleminde ise *Ricci denklemi* denir.

$\tilde{M}$ çevreleyen uzayı sabit k eğriliğine sahip ise (2.6), (2.7) ve (2.9) temel denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
R(X, Y; Z, W) &= k[g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)] \\
&\quad + \tilde{g}(h(X, W), h(Y, Z)) - \tilde{g}(h(X, Z), h(Y, W)), \\
(\tilde{\nabla}_X h)(Y, Z) &= (\tilde{\nabla}_Y h)(X, Z), \\
R^D(X, Y; \eta, \xi) &= g([A_\xi, A_\eta](X), Y)
\end{aligned}$$

şekline indirgenir.

Bundan sonraki kısımda kullanılan indislerin aralıkları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq m; \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n; \quad n+1 \leq r, s, t, \dots \leq m.$$

$e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ vektörleri M alt manifoldu üzerinde tanımlanmış ortonormal yerel bir çatı alanı olsun öyleki $e_1, \dots, e_n$ vektörleri M manifolduna teğet, $e_{n+1}, \dots, e_m$ vektörleri de M alt manifolduna normal olsunlar. Bu $e_1, \dots, e_m$ vektörlerine karşı gelen dual çatı alanı $\omega^1, \dots, \omega^m$ ile gösterilsin. M alt manifoldunun e_i teğet vektörü ve e_r normal vektörünün X teğet vektörüne göre kovaryant türevleri

$$\tilde{\nabla}_X e_i = \sum_A \omega_i^A(X) e_A, \quad \tilde{\nabla}_X e_r = \sum_A \omega_r^A(X) e_A$$

ile ifade edilir. Bu durumda, $\tilde{M}$ manifoldu için 1. Cartan yapı denklemi

$$d\omega^A = - \sum_B \omega_B^A \wedge \omega^B, \quad \omega_B^A = -\omega_A^B$$

2. Cartan yapı denklemi ise

$$\begin{aligned} d\omega_B^A &= - \sum_C \omega_C^A \wedge \omega_B^C + \Phi_B^A, \\ \Phi_B^A &= \frac{1}{2} \sum_{C,D} \tilde{R}_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D, \quad \tilde{R}_{BCD}^A + \tilde{R}_{BDC}^A = 0 \end{aligned}$$

ile verilir.

Yardımcı Teorem (Cartan) $v_1, \dots, v_r$, r -boyutlu V vektör uzayının lineer bağımsız elemanları olsun. $\omega_1, \dots, \omega_r$ r -vektörler olsun. Eğer $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge v_i = 0$ ise, $i = 1, \dots, r$ için $\omega_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} v_j$ dir. Burada, $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

Dual bir formlar M alt manifolduna kısıtlanırsa $\omega^r = 0$ olur. Yani

$$0 = d\omega^r = - \sum_i \omega_i^r \wedge \omega^i \quad (2.10)$$

elde edilir. Cartan yardımcı teoremi göz önüne alındığında (2.10) denkleminde $\omega_i^r = \sum_j h_{ij}^r \omega^j$ yazılır.

Benzer şekilde M alt manifoldu için 1. ve 2. Cartan yapı denklemleri, sırasıyla,

$$d\omega^i = - \sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j, \quad \omega_i^j = -\omega_j^i$$

ve

$$d\omega_j^i = - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$$

ile verilir. (2.6) denkleminde ifade edilen Gauss denklemi lokal koordinatlarda,

$$R_{jkl}^i = \tilde{R}_{jkl}^i + \sum_r (h_{ik}^r h_{jl}^r - h_{il}^r h_{jk}^r) \quad (2.11)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde, çevreleyen uzayın sabit eğrilikli olması durumunda (2.7)

Codazzi denklemi ve (2.9) Ricci denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} h_{ij;k}^r &= h_{ik;j}^r \\ h_{ij;k}^r &= e_k h_{ij}^r - \sum_l (h_{il}^r \omega_j^l(e_k) + h_{jl}^r \omega_i^l(e_k)) + \sum_s h_{ij}^s \omega_s^r(e_k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

ve

$$R^D(e_j, e_k; e_r, e_s) = \langle [A_r, A_s]e_j, e_k \rangle = \sum_i (h_{ik}^r h_{ij}^s - h_{ij}^r h_{ik}^s) \quad (2.13)$$

olarak verilir.

Eğrilik tensöründe daraltma yapılarak Ricci tensörü ve skaler eğrilik elde edilir. M^n alt manifoldunun *Ricci tensörü* ve *skaler eğriliği*, sırasıyla, $R_{jk} = \sum_i R_{jik}^i$ ve $S = \sum_i R_{ii}$ olarak tanımlanır. Eğer M alt manifoldunun boyutu 2 ise Gauss eğriliği skaler eğriliğin yarısına eşittir.

Çevreleyen uzay m -boyutlu $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayı ise (2.11) denkleminde

$$S = n^2 |H|^2 - \|h\|^2 \quad (2.14)$$

elde edilir. Burada, $|H|^2$ ve $\|h\|^2$, sırasıyla, $\mathbb{E}^m$ uzayı içinde M^n alt manifoldunun ortalama eğrilik ve 2. esas formun normlarının karesidir. Özel olarak, M^n alt manifoldu $\mathbb{S}^{m-1}$ birim hiperküresinin içine daldırılmış ise M^n alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresi içindeki ortalama eğrilik vektörü $\hat{H}$ ve 2. esas formu $\hat{h}$ ile gösterildiğinde, (2.14) denklemindeki skaler eğrilik ifadesi

$$S = n(n-1) + n^2 |\hat{H}|^2 - \|\hat{h}\|^2 \quad (2.15)$$

şeklini alır. Ayrıca, M^n alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresi içindeki ve $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörü ve 2. esas formu arasındaki ilişkiler

$$H = \hat{H} - x, \quad h(X, Y) = \hat{h}(X, Y) - g(X, Y)x \quad (2.16)$$

denklemleriyle verilir.

Tanım 2.6 M , $\tilde{M}^{n+1}$ Riemann manifoldunun daldırılmış bir hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin bütün asal eğrilikleri sabit ise, M hiperyüzeyine izoparametrik hiperyüzey denir.

Tanım 2.7 Bir M Riemann manifoldunun metriği tarafından, M üzerinde indirgenen Laplasiyen operatörü

$$\Delta = \sum_i (\nabla_{e_i} e_i - e_i e_i) \quad (2.17)$$

ile tanımlanır. Burada, ∇ Riemann konneksiyonunu göstermektedir.

Ayrıca $f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere iki fonksiyonun çarpımının Laplasiyeni

$$\Delta(f.g) = \Delta f.g + f.\Delta g - 2 \langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle \quad (2.18)$$

olur.

Tanım 2.8 $M, \tilde{M}^m$ Riemann manifoldunun izometrik olarak daldırılmış bir alt manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasında M 'nin normal uzayının,

$Imh = \text{span}\{h(X, Y) | X, Y \in T_p M\}$ şeklinde tanımlanmış alt uzayına, birinci normal uzayı denir.

Erbacher İndirgeme Teoremi [7] $\psi : M \longrightarrow \tilde{M}(c)$, bağlantılı n -boyutlu bir M Riemann manifoldundan, sabit c eğrilikli $(n+p)$ -boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifolduna izometrik bir daldırma olsun. Eğer birinci normal uzayı, Imh , normal demetin konneksiyonuna göre paralel öteleme altında sabit kalıyorsa ve boyutu l ise, $\psi(M^n) \subset N^{n+l}$ olacak şekilde $\tilde{M}^{n+p}(c)$ manifoldunun total jeodezik bir N^{n+l} alt manifoldu vardır.

3. SONLU TIPTEN ALT MANİFOLD TANIMI VE TEMEL TEOREMLER

$\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^N$ bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^N$ Öklid uzayına tanımlanmış düzgün bir tasvir olsun. Eğer ϕ tasviri

$$\phi = c + \sum_{t=1}^k \phi_t \quad (3.1)$$

şeklinde sonlu bir spektral açılıma sahip ise, ϕ 'ye *sonlu tipten bir tasvir* denir. (3.1) denkleminde k tane sabit olmayan farklı terim varsa, ϕ tasviri *k-tipinden* olarak adlandırılır. Burada c , $\mathbb{E}^N$ içinde sabit bir vektör ve ϕ_t 'ler ise sıfırdan farklı $\mathbb{E}^N$ değerli Laplasiyen operatörünün, Δ , öz vektörleridir. Yani, $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ olmak üzere $\Delta\phi_t = \lambda_t\phi_t$ denklemini sağlar. Eğer λ_j 'lerden biri sıfır ise, ϕ tasvirine *sıfırlı k-tipinden tasvir* denir. ϕ tasviri M 'den $\mathbb{E}^N$ Öklid uzayına izometrik bir daldırma ise, M 'ye *sonlu tipten alt manifold* denir.

$\mathbb{S}^{N-1}$ merkezi orjinde olan birim hiperküre olsun. Küresel sonlu tipten

$\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$ tasvirinin (3.1) denkleminde gösterilen spektral açılımında c vektörü $\mathbb{S}^{N-1}$ hiperküresinin merkezi ise, yani, sıfırsa ϕ tasvirine *kütlesel simetrik tasvir* denir. M manifoldu kompakt olduğunda ϕ tasvirinin kütlesel simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $\int_M \phi dV = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.1 [5] x , bir kompakt M manifoldundan $\mathbb{E}^N$ Öklid uzayına izometrik bir daldırma olsun. H , M alt manifoldunun $\mathbb{E}^N$ uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörü olmak üzere,

(i) M 'nin sonlu tipten bir alt manifold olması için gerek ve yeter koşul, $Q(\Delta)H = 0$ olacak şekilde $Q(t)$ gibi trivial olmayan bir polinomun olmasıdır.

(ii) M sonlu tipten bir alt manifold ise, $P(\Delta)H = 0$ eşitliğini sağlayan $P(t)$ gibi en küçük dereceli tek bir monik polinom vardır.

(iii) M k -tipinden bir manifold ise, $P(t)$ polinomunun derecesi k 'ya eşittir.

Aynı sonuçlar H ortalama eğrilik vektörü yerine $x - c$ konulduğunda da geçerlidir.

Teorem 3.2 [5] $\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^N$ kompakt M manifoldundan $\mathbb{E}^N$ uzayına düzgün bir tasvir ve $\tau = \text{div}(d\phi)$ de ϕ tasvirinin gerilim alanı olsun. Bu durumda

(i) ϕ sonlu tipten bir tasvir olması için gerek ve yeter koşul, $Q(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde trivial olmayan $Q(t)$ gibi bir polinomun olmasıdır.

(ii) ϕ sonlu tipten bir tasvir ise, $P(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli $P(t)$ gibi tek bir monik polinom vardır.

(iii) ϕ k -tipinden bir tasvir ise, $P(t)$ polinomunun derecesi k 'ya eşittir.

Aynı sonuçlar τ yerine $\phi - c$ konulduğunda da geçerlidir.

Bu iki teoremdeki monik P polinomuna, sonlu tipten olan M alt manifoldunun veya sonlu tipten ϕ tasvirinin *minimal polinomu* denir.

Örnek (Çarpım alt manifoldu)

M ve $\bar{M}$, sırasıyla, $\mathbb{E}^m$ ve $\mathbb{E}^{\bar{m}}$ Öklid uzaylarının kompakt iki alt manifoldu olsun. Bu iki manifoldun çarpım alt manifoldlarının sonlu tipten olması için gerek ve yeter koşul, iki manifoldun da sonlu tipten olmasıdır. Ayrıca, bu manifoldların ikisi de 1-tipinden ise çarpım manifoldları 1-tipinden veya 2-tipindendir. Örnek olarak T^2 düz tor yüzeyi düşünülürse, T^2 tor yüzeyi, yarıçapları farklı olan iki düzlem çemberin kartezyen çarpımına izometriktir. Yer vektörü $x : T^2 \longrightarrow \mathbb{E}^4$

$$x = x(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$$

şeklinde verilmiş olan tor yüzeyi için

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), & e_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v) \\ e_3 &= (-b \cos u, -b \sin u, a \cos v, a \sin v), & e_4 &= (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v) \end{aligned}$$

vektörleri bir ortonormal çatı alanı oluşturur. Burada $a, b > 0$ ve $a^2 + b^2 = 1$ dir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \frac{1}{a}(-\cos u, -\sin u, 0, 0) \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \frac{1}{b}(0, 0, -\cos v, -\sin v) \\ \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. $\nabla_{e_i} e_j = \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_j, e_1 \rangle e_1 + \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_j, e_2 \rangle e_2$ ifadesi kullanılırsa, $i, j = 1, 2$ için $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \omega_j^k(e_i) e_k = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Yani, $\omega_1^2 = -\omega_2^1 = 0$ dır. Ayrıca, (2.1) ve (2.2) formülleri kullanılarak 2. esas formun e_3 ve e_4 vektörleri doğrultusundaki bileşenleri

$$h_{11}^3 = \frac{b}{a}, \quad h_{22}^3 = -\frac{a}{b}, \quad h_{11}^4 = h_{22}^4 = -1, \quad h_{12}^3 = h_{12}^4 = 0$$

olarak bulunur. Bu durumda, T^2 torusunun $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \cos u, \frac{1}{a} \sin u, \frac{1}{b} \cos v, \frac{1}{b} \sin v \right) \quad (3.2)$$

dır. (2.17) denklemindeki Laplasiyen operatörü seçilen ortonormal çatı alanı için

$$\Delta = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

şekline dönüşür. Gerekli hesaplamalar yapıldığında H ortalama eğrilik vektörünün 1. ve 2. Laplasiyeni, sırasıyla, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^3} \cos u, \frac{1}{a^3} \sin u, \frac{1}{b^3} \cos v, \frac{1}{b^3} \sin v \right), \\ \Delta^2 H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^5} \cos u, \frac{1}{a^5} \sin u, \frac{1}{b^5} \cos v, \frac{1}{b^5} \sin v \right)\end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum: $a = b$ olsun. Bu durumda ΔH ve H paraleldir. Dolayısıyla, T^2 tor yüzeyi 1-tipinden bir alt manifoldur.

2. Durum: $a \neq b$ olduğu durumda, (3.2) ve (3.3) denklemlerinden

$$\Delta^2 H - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \Delta H + \frac{1}{a^2 b^2} H = 0$$

bağıntısı elde edilir. Teorem 3.1 göz önüne alındığında, T^2 tor yüzeyi 2-tipinden bir alt manifolddur. Bu örnek için Teorem 3.1'i sağlayan $P(t)$ polinomu

$$P(t) = t^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) t + \frac{1}{a^2 b^2}$$

olur ve $P(t)$ 'nin kökleri de $\frac{1}{a^2}$ ile $\frac{1}{b^2}$ dir.

Bu örnekte, $a^2 + b^2 = 1$ olduğu için $x(T^2) \subset \mathbb{S}^3(1)$ olur ve T^2 tor yüzeyi $\mathbb{S}^3(1)$ küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) e_3 \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Eğer $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise $\hat{H}$ sıfırdır, yani, bu yüzey $\mathbb{S}^3$ hiperküresi içinde minimal olur. $\mathbb{S}^3$ içine daldırılmış $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ yüzeyine *Clifford minimal tor yüzeyi* denir.

4. SONLU TIPTEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili sonuçlar verilecektir.

4.1 Gauss Tasviri

V , $\mathbb{E}^m$ uzayında yönlendirilmiş n -boyutlu bir düzlem olsun. Bu V düzleminin yönlendirilmiş bir ortonormal bazı $e_1, \dots, e_n$ ile gösterilsin. Bu durumda $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ normu 1 olan ayrıştırılamayan bir n -vektördür ve bu n -vektörü V düzleminde bir yönlendirme belirler. Tersine düşünüldüğünde, normu 1 olan ayrıştırılamayan herhangi bir n -vektör, $\mathbb{E}^m$ uzayında yönlendirilmiş tek bir tane n -boyutlu düzlem belirler. Sonuç olarak, $\mathbb{E}^m$ uzayında orjinden geçen n -boyutlu düzlemleri gösteren $G(n, m)$ Grasmaniyen manifoldu, N -boyutlu $\Lambda^n \mathbb{E}^m = \mathbb{E}^N$ Öklid uzayı içinde normu 1 olan n -vektörlerle tanımlanabilir. Burada $N = \binom{m}{n}$ dir. Öte yandan, $\mathbb{S}^{N-1}$, merkezi orjinde olan $\mathbb{E}^N$ uzayında birim hiperküre olmak üzere, $G(n, m)$, Grasmaniyen manifoldu bu birim hiperkürenin $n(m-n)$ -boyutlu bir alt manifoldudur. Yani, $G(n, m) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$ olacak şekilde $i : G(n, m) \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ içine tasviri vardır. $x : M \rightarrow \mathbb{E}^m$, n -boyutlu, kompakt ve yönlendirilmiş M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. $e_1, \dots, e_n$ vektörleri, M 'nin bir ortonormal çatı alanı ise, M manifoldunun *Gauss tasviri*

$$\nu : M \rightarrow G(n, m) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N = \Lambda^n \mathbb{E}^m \quad (4.1)$$

her $p \in M$ için $\nu(p) = (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)(p)$ şeklinde tanımlanır[5]. Burada M 'nin teğet vektörleri dx 'in görüntüsü ile tanımlanmıştır.

Yardımcı Teorem 4.1 [5] $\mathbb{E}^m$ uzayının kompakt ve yönlendirilmiş bir M alt manifoldunun $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ Gauss tasvirinin kütleli simetrik olması, bu tasvirin ν_0 kütle merkezi ile $\mathbb{S}^{N-1}$ hiperküresinin merkezinin çakışmasıdır. Yani, ν_0 vektörünün

sıfır olmasıdır.

Bu bölümün geri kalan kısmında (4.1) denklemi ile tanımlanmış ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni, (2.17) formülü yardımıyla hesaplanacaktır. Bunun için ilk olarak ν tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanır:

$$\begin{aligned} e_i \nu &= e_i(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \sum_j e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i} e_j}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) denkleminde (2.1) formülü kullanılırsa,

$$e_i \nu = \sum_j e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{\left(\sum_k \omega_j^k(e_i) e_k + \sum_r h_{ij}^r e_r \right)}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \quad (4.3)$$

elde edilir. Her $i = 1, \dots, n$ için $e_i \wedge e_i = 0$ ve $\omega_i^i = 0$ olduğu (4.3) denkleminde kullanıldığında

$$e_i \nu = \sum_{j,r} h_{ij}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \quad (4.4)$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} e_i e_i \nu &= e_i \left(\sum_{j,r} h_{ij}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \right) \\ &= \sum_{j,r} e_i (h_{ij}^r) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_{j,k,l,r} h_{ij}^r \omega_k^l(e_i) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_l}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_{j,k,r,s} h_{ij}^r h_{ik}^s e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad - \sum_{j,r} h_{ij}^r h_{ij}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_{j,r,s} h_{ij}^r \omega_r^s(e_i) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} e_i) \nu &= \sum_k \omega_i^k(e_i) e_k (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \sum_{j,k} \omega_i^k(e_i) h_{kj}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) ifadeleri kullanılarak (2.17) formülünden ν tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}
\Delta\nu = & - \sum_{i,j,r} e_i(h_{ij}^r) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& - \sum_{i,j,k,l,r} h_{ij}^r \omega_k^l(e_i) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_l}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& - \sum_{i,j,k,r,s} h_{ij}^r h_{ik}^s e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{i,j,r} h_{ij}^r h_{ij}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\
& - \sum_{i,j,r,s} h_{ij}^r \omega_r^s(e_i) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{i,j,k,r} \omega_i^k(e_i) h_{kj}^r e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak yazılır. (4.7) ifadesinde (2.12) denklemi, $\|h\|^2 = \sum_{i,j,r} h_{ij}^r h_{ij}^r$ ve $nD_{e_j}H = \sum_{i,r} h_{ii,j}^r e_r$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta\nu = & -n \sum_i e_1 \wedge \dots \wedge D_{e_i}H \wedge \dots \wedge e_n \\
& - \sum_{i,j,k,r,s} h_{ij}^r h_{ik}^s e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n + \|h\|^2 \nu
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (2.13) ve (4.8) denklemlerinden aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir.

Yardımcı Teorem 4.2 [5] $x : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, yönlendirilmiş n -boyutlu bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayına izometrik bir daldırma olsun.

$\nu : M \longrightarrow G(n, m) \subset \Lambda^n \mathbb{E}^m$ Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}
\Delta\nu = & -n \sum_i e_1 \wedge \dots \wedge D_{e_i}H \wedge \dots \wedge e_n + \|h\|^2 \nu \\
& + \sum_{j,k,s < r} R^D(e_j, e_k; e_r, e_s) e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ile verilir.

ν tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi M manifoldunun teğet uzayı ile $G(n, m)$ manifoldunun teğet uzayı arasında bir tasvirdir. Yani, $e_i \nu$ Grasmaniyen manifolduna teğettir. Sonuç olarak (4.4) ifadesi yardımıyla, (4.9) denklemindeki birinci terimin $G(n, m)$ manifoldunun teğet uzayına, geri kalan terimlerin ise $G(n, m)$ manifoldunun

normal uzayına ait olduğu görülür. Bu bilgiler ve Yardımcı Teorem 4.2 kullanılarak aşağıdaki iki sonuç verilir.

Sonuç 4.1 [8] $M, \mathbb{E}^m$ uzayının bir alt manifoldu olsun. $\nu : M \longrightarrow G(n, m)$ tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olmasıdır.

$i : G(n, m) \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ içine tasviri göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2 [5] $M, \mathbb{E}^m$ uzayının bir alt manifoldu olsun.

$\bar{\nu} = i \circ \nu : M \longrightarrow G(n, m) \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun normal konneksiyonun düz ve ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır.

4.2 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Alt Manifolddlar

Teorem 4.1 [5] $x : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, kompakt ve yönlendirilmiş bir M Riemann manifoldundan m -boyutlu $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. $\nu : M \longrightarrow \Lambda^n \mathbb{E}^m$ Gauss tasvirinin 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun skaler eğriliğinin sabit, normal konneksiyonunun düz ve ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır.

İspat. M manifoldunun Gauss tasviri 1-tipinden ise bu tasvirin Laplasiyeni λ_p reel sayı olmak üzere $\Delta \nu = \lambda_p \nu$ denklemini sağlar. Bu ifade (4.9) denklemi ile karşılaştırıldığında ν tasvirinin 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul, $DH = 0$, $R^D = 0$ ve $\|h\|$ =sabit olmasıdır. Yani, M 'nin ortalama eğrilik vektörünün paralel ve normal konneksiyonunun düz olduğu sonucu çıkar. Ayrıca $DH = 0$ olması ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun sabit olduğunu da gösterir. Bu durumda (2.14) denklemi yardımıyla M manifoldunun skaler eğriliğinin de sabit olduğu görülür. $\square$

$M, \mathbb{E}^m$ Öklid uzayının hiperyüzeyi ise aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2 [5] $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayının kompakt bir M hiperyüzeyinin 1-tipinden

$\nu : M \longrightarrow \Lambda^n \mathbb{E}^{n+1}$ Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M hiperyüzeyinin bir hiperküreden ibaret olmasıdır.

İspat. $M, \mathbb{E}^{n+1}$ uzayının bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (2.13) denklemi

kullanılarak $R^D = 0$ olduğu, yani, M hiperyüzeyinin normal konneksiyonunun düz olduğu söylenir. Bu yüzden Teorem 4.1'den M hiperyüzeyinin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M hiperyüzeyinin sabit ortalama ve skaler eğrilikli olmasıdır. Ayrıca, $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayının kompakt bir M hiperyüzeyinin sabit ortalama eğrilğe ve sabit skaler eğrilğe sahip olması ancak ve ancak M 'nin bir hiperküreden ibaret olması sonucu [Sonuç 6.1,9] kullanılırsa, M hiperyüzeyinin Gauss tasvirinin 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayının bir hiperküresi olmasıdır sonucuna ulaşılır. $\square$

$M, \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ hiperküresinin bir hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin yer vektörü M 'ye normaldir ve paraleldir, yani, normal kovaryant türevi özdeş olarak sıfırdır. M 'nin $\mathbb{E}^{n+2}$ uzayındaki karşıt boyutu 2 olduğundan, M 'nin normal demetini oluşturacak diğer birim vektör de paralel olur. Dolayısıyla M 'nin normal konneksiyonu düzdür. Bu durumda Teorem 4.1 kullanılırsa M hiperyüzeyinin Gauss tasvirinin 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşulun, M hiperyüzeyinin sabit ortalama eğrilikli ve sabit skaler eğrilikli olması sonucu çıkar. Bu ve Teorem 2[10] kullanıldığında aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 4.3 [5] $M, \mathbb{S}^{n+1}$ hiperküresinin kompakt bir hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M 'nin aşağıdakilerden biri olmasıdır:

- (a) $\mathbb{E}^{n+2}$ Öklid uzayının kütleli simetrik 2-tipinden alt manifoldu,
- (b) $\mathbb{S}^{n+1}$ küresinin küçük hiperküresi,
- (c) $\mathbb{S}^{n+1}$ küresinin sabit skaler eğrilikli minimal hiperyüzeyi.

Aşağıdaki teoremde 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler tamamiyle sınıflandırılmıştır.

Teorem 4.4 [5] $M, \mathbb{E}^m$ içinde kompakt bir yüzey olsun. M yüzeyinin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M 'nin aşağıdaki yüzeylerden biri olmasıdır:

- (a) r yarıçaplı 2-boyutlu bir küre, $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^m$, veya

(b) Yarıçapları a ve b olan iki düzlem çemberinin çarpımı, $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b) \subset \mathbb{E}^4 \subset \mathbb{E}^m$.

İspat. İlk olarak M kompakt yüzeyinin teoremin ifadesindeki yüzeylerden biri olduğu varsayalım. $\mathbb{S}^2(r)$ ve $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$ yüzeylerinin normal konneksiyonları düz, ortalama ve skaler eğrilikleri sabit olduğundan, Teorem 4.1'den dolayı, bu yüzeylerin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür. Tersine olarak, M , 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt bir yüzey ise $DH = 0$, $R^D = 0$ ve skaler eğriliği sabittir. Hem kompakt hem minimal bir yüzey olmadığından H sıfırdan farklıdır. Bu nedenle Teorem 2.1[11,p.106]den M yüzeyi ya $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin minimal bir yüzeyidir veya $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^m$ ya da $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^m$ içinde kalmaktadır. Eğer M yüzeyi $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin minimal bir yüzeyi ise ve $R^D = 0$ olduğundan M yüzeyi $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4 \subset \mathbb{E}^m$ içinde kalır[Açıklama 2.1,11,p.115]. Sonuç olarak, M yüzeyi ya $\mathbb{E}^3$ ya da $\mathbb{S}^3$ içinde kalmaktadır. Eğer M yüzeyi $\mathbb{E}^3$ içinde ise Teorem 4.2 kullanılarak M 'nin $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^3$ hiperküresinden ibaret olduğu görülür. Eğer M yüzeyi $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$ içinde kalıyorsa, Teorem 4.3'den M yüzeyinin ya $\mathbb{E}^3$ içinde bir küre, ya $\mathbb{S}^3$ küresinin sabit Gauss eğrilikli minimal yüzeyi veya $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$ içinde 2-tipinden bir yüzey olduğu sonucu çıkarılır. Eğer M , $\mathbb{S}^3$ küresinin sabit Gauss eğrilikli minimal bir yüzeyi ise M yüzeyi yarıçapları aynı olan iki düzlem çemberinin çarpımıdır[12]. Eğer M , $\mathbb{S}^3$ hiperküresinin 2-tipinden bir yüzeyi ise M kütleli simetriktir[Teorem 2,10]. Bu nedenle sınıflandırma teoremi kullanıldığında [13,p.279] M yüzeyinin yarıçapları farklı olan iki düzlem çemberinin çarpımından ibaret olduğu gösterilmiş olur. $\square$

4.3 2-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Alt Manifoldlar

Bu bölümde 2-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeylerden bahsedilecektir. Bunun için öncelikle $\Delta^2 v$ ifadesi hesaplanacaktır.

$x : M \rightarrow \mathbb{E}^m$, kompakt yönlendirilmiş M yüzeyinden $\mathbb{E}^m$ uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. M , merkezi orjinde olan $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin içinde kalan bir yüzey olduğu varsayalım. Bu durumda yer vektörü x , $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin birim normal vektörüdür. $e_1, e_2, \dots, e_m = x$ ortonormal çatı alanı olarak seçildiğinde (2.2) formülünden $h_{ij}^m = -\delta_{ij}$ ve $\omega_r^m = 0$ olduğu görülür.

M , $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin minimal yüzeyi olduğu varsayalım. Birinci normal uzayı

Imh 'ın boyutu 3'den küçüktür. e_3 ve e_4 vektörlerinin Imh içinde kaldığı varsayılırsa, seçilen ortonormal çatı alanına göre şekil operatörleri

$$A_5 = \dots = A_{m-1} = 0, \quad A_m = -I \quad (4.10)$$

olur. (4.10) ifadesinden dolayı $r, s \neq 3, 4$ için $R^D(e_i, e_j; e_r, e_s)$ sifıra eşittir. Ayrıca $\hat{H} = 0$ olduğundan (2.16) denkleminde $DH = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak (4.9) denklemindeki Laplasiyen ifadesi

$$\Delta v = \|h\|^2 e_1 \wedge e_2 + 2K^D e_3 \wedge e_4 \quad (4.11)$$

şekline dönüşür. Burada $K^D = R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = h_{2i}^3 h_{1i}^4 - h_{1i}^3 h_{2i}^4$ dir.

Geri kalan kısımda gösterim kolaylığı için indislerin aralıkları aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$1 \leq i, j, k \leq 2; \quad 5 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m; \quad 3 \leq r, s, t \leq m.$$

Yardımcı Teorem 4.2 [5] *Yukarıdaki hipotezler altında (4.11) denkleminin Laplasiyeni*

$$\begin{aligned} \Delta^2 v = & 2\{\Delta K^D + 2K^D(\|h\|^2 - 1) + \sum_{\alpha} (\|\omega_3^{\alpha}\|^2 + \|\omega_4^{\alpha}\|^2)\} e_3 \wedge e_4 \\ & + \{\Delta\|h\|^2 + \|h\|^4 + 4(K^D)^2\} e_1 \wedge e_2 \\ & - 2(e_i \|h\|^2)(h_{1i}^r e_r \wedge e_2 + h_{2i}^r e_1 \wedge e_r) \\ & + 4(e_i K^D)\{h_{ij}^3 e_j \wedge e_4 + h_{ij}^4 e_3 \wedge e_j - \omega_3^{\alpha}(e_i) e_{\alpha} \wedge e_4 - \omega_4^{\alpha}(e_i) e_3 \wedge e_{\alpha}\} \\ & - 4K^D\{h_{ij}^4 \omega_3^{\alpha}(e_i) - h_{ij}^3 \omega_4^{\alpha}(e_i)\} e_j \wedge e_{\alpha} \\ & - 2K^D\{(\nabla_{e_i} \omega_3^{\alpha}) e_i + \omega_3^{\beta}(e_i) \omega_{\beta}^{\alpha}(e_i) - \omega_3^4(e_i) \omega_4^{\alpha}(e_i)\} e_{\alpha} \wedge e_4 \\ & - 2K^D\{(\nabla_{e_i} \omega_4^{\alpha}) e_i + \omega_4^{\beta}(e_i) \omega_{\beta}^{\alpha}(e_i) - \omega_4^3(e_i) \omega_3^{\alpha}(e_i)\} e_3 \wedge e_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ile verilir.

Şimdi, $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ küresi içinde 2-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt minimal yüzey örneği verilecektir. Örnek verilmeden önce $\mathbb{S}^{2k}$ küresi içindeki 2-boyutlu $\mathbb{S}^2$ küresinin k -ıncı standart daldırmasının, ψ_k , genel tanımı verilecektir.

k doğal sayı olmak üzere, yarıçapı $r_k = (k(k+1)/2)^{1/2}$ olan $\mathbb{S}^2(r_k)$ küresinin küresel

koordinatları (θ, ϕ) ile gösterilsin. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayı içinde $\mathbb{S}^2(r_k)$ küresinin koordinatları aşağıdaki gibidir:

$$x = r_k \cos \phi, \quad y = r_k \sin \phi \cos \theta, \quad z = r_k \sin \phi \sin \theta.$$

$\mathbb{E}^{2k+1}$ Öklid uzayının koordinat sistemi $(u_0, u_1, \dots, u_{2k})$ olmak üzere, $\mathbb{S}^2(r_k)$ küresinden $\mathbb{S}^{2k}$ küresine tanımlanmış ψ_k k-ıncı standart daldırması

$$u_0 = (r_k / \sqrt{2}) \cdot B_k^0 \cdot P_k^0(\cos \phi)$$

$$u_i = r_k \cdot B_k^i \cdot P_k^i(\cos \phi) \cdot \cos(i\theta),$$

$$u_{k+i} = r_k \cdot B_k^i \cdot P_k^i(\cos \phi) \cdot \sin(i\theta) \quad i = 1, \dots, k,$$

olarak tanımlanır. Burada Legendre fonksiyonları

$$P_k^j(t) = (1 - t^2)^{j/2} \frac{d^{k+j}}{dt^{k+j}} [(1 - t^2)^k], \quad j = 0, 1, \dots, k$$

ile B_k^j fonksiyonları ise

$$B_k^j = \frac{1}{k! 2^k} \left[\frac{(k-j)!(2k+1)}{(k+j)! 2\pi} \right]^{1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

olarak tanımlanmıştır. ψ_k tasviri, $\mathbb{S}^2(r_k)$ küresinden $\mathbb{S}^{2k}$ küresine tanımlanmış minimal izometrik bir daldırmadır. Eğer k tek doğal sayı ise ψ_k bir 1-1 izometrik daldırmadır. Ancak k çift ise ψ_k bire iki tasvirdir. ψ_k izometrik daldırmasını kullanarak Veronese yüzeyi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Herhangi bir k doğal sayısı için $\mathbb{S}^{2k}$, $\mathbb{E}^{2k+1}$ Öklid uzayında bir birim küre olsun. $\psi_k : \mathbb{S}^2(K) \rightarrow \mathbb{S}^{2k}$ izometrik daldırmasına *Veronese-Boruvka küresi* denir. Burada $K = \frac{2}{k(k+1)}$ dir. ψ_k daldırmasında $k = 2$ olarak alınırsa, $\psi_2 : \mathbb{S}^2(\frac{1}{3}) \rightarrow \mathbb{S}^4(1)$ tasvirinin tanımladığı yüzeye *Veronese yüzeyi* denir. Yani, ψ_2 tasviri $\mathbb{S}^2(\frac{1}{3})$ küresinin üzerindeki (x, y, z) ve $(-x, -y, -z)$ noktalarını $\mathbb{S}^4$ küresinin üzerindeki aynı noktaya taşır. Başka bir deyişle, Veronese yüzeyi ψ_2 tasvirinin tanımladığı $\mathbb{S}^4$ küresinin içine daldırılmış reel projektif düzlemdir.

(x, y, z) , $\mathbb{E}^3$ uzayının, $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathbb{E}^5$ uzayının doğal koordinat sistemi olmak üzere $\mathbb{S}^2(\frac{1}{3})$ küresinden $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{E}^5$ küresine ψ_2 minimal izometrik daldırması kapalı olarak

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{yz}{\sqrt{3}}, & u_2 &= \frac{xz}{\sqrt{3}}, & u_3 &= \frac{xy}{\sqrt{3}}, & u_4 &= \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, \\ u_5 &= \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanır. (4.13) denklemindeki gibi tanımlanmış Veronese yüzeyi için gerekli uzun hesaplamalar yapılarak

$$\|h\|^2 = \frac{10}{3}, \quad K^D = -\frac{2}{3} \quad (4.14)$$

bulunur. (4.14) değerleri (4.11) ve (4.12) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta v &= -\frac{4}{3}e_3 \wedge e_4 + \frac{10}{3}e_1 \wedge e_2 \\ \Delta^2 v &= -\frac{56}{9}e_3 \wedge e_4 + \frac{116}{9}e_1 \wedge e_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) denklemi kullanıldığında

$$\Delta^2 v - \frac{14}{3}\Delta v + \frac{8}{3}v = 0 \quad (4.16)$$

denklemine ulaşılır. Bu durumda Teorem 3.2 gözönüne alındığında (4.13) denklemindeki gibi tanımlanmış $\psi_2 : \mathbb{S}^2(\frac{1}{3}) \longrightarrow \mathbb{S}^4 \subset \mathbb{E}^5$ standart daldırmasının 2-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür.

Bu bölümde M alt manifoldunun teğet vektörleri yardımıyla tanımlanmış Gauss tasviri, normal vektörler aracılığıyla da tanımlanabilir. Bu tanım kullanılarak küresel hiperyüzeylerin Gauss tasviri ile ilgili elde edilmiş sonuçlara [14] makalesinden ulaşılabilir.

5. KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP KÜRESEL ALT MANİFOLDLAR

Bir önceki bölümde Gauss tasvirinden detaylı bir şekilde bahsedilmiştir. Bu bölümde ise eğer M alt manifoldu $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayına değil de $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresine daldırıldığında Küresel Gauss tasvir olarak adlandırılan tasvirin detayları verilecektir.

5.1 Küresel Gauss Tasviri

$\mathbb{S}^{m-1}$, merkezi orjinde olan, $\mathbb{E}^m$ uzayının birim hiperküresi olmak üzere, $x : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}$ küresine izometrik bir daldırma olsun. M^n manifoldu üzerindeki bir p noktasındaki $T_p(M)$ teğet uzayının ortonormal bir bazı $e_1, \dots, e_n$ vektörleri ile gösterilsin. Burada her teğet vektör x 'in diferansiyelinin görüntüsü ile tanımlanmıştır. $x, e_1, \dots, e_n$ vektörleri $\mathbb{E}^m$ uzayı içinde $(n+1)$ -boyutlu lineer bir alt uzay belirler. Bu $n+1$ tane vektörün belirlediği alt uzay ile $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin kesişimi, n -boyutlu total jeodezik bir küre verir. M^n manifoldu üzerindeki bir p noktasını, bir n -boyutlu total jeodezik $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresine götüren tasvire *Obata tasviri* denir[15]. Bu n -boyutlu total jeodezik küre, $(n+1)$ -boyutlu lineer alt uzay tarafından tek türlü belirlendiğinden, bu tasvir $G(n+1, m)$ Grasmaniye manifoldlarına genişletilebilir. Yani, $x : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ küresel daldırmasına karşılık gelen Obata tasviri

$$\nu : M^n \longrightarrow G(n+1, m)$$

her $p \in M$ noktası için $\nu(p) = (x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n)(p)$ olarak tanımlanır. Ayrıca, $N = \binom{m}{n+1}$ olmak üzere, $G(n+1, m)$ Grasmaniye manifoldu $\mathbb{S}^{N-1}$ birim hiperküresinin bir alt manifoldu olduğundan $G(n+1, m) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$ olacak şekilde $i : G(n+1, m) \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ içine tasviri vardır. ν ile i tasvirlerinin bileşkesi olarak tanımlanan $\tilde{\nu}$ tasviri

$$\tilde{\nu} = x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n : M^n \longrightarrow G(n+1, m) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N \quad (5.1)$$

Küresel Gauss tasvir olarak adlandırılır[6].

(5.1) ifadesindeki gibi tanımlanan küresel Gauss tasvirinin Laplasiyenini hesaplamak için (2.17) denklemi kullanılmalıdır. Bunun için ilk olarak $\tilde{v}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanır:

$$\begin{aligned} e_i \tilde{v} &= e_i(x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \tilde{\nabla}_{e_i} x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \sum_k x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i} e_k}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

(5.2) denkleminde (2.1) formülü, $i = 1, \dots, n$ için $e_i \wedge e_i = 0$ ve $\omega_i^i = 0$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e_i \tilde{v} &= e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \sum_k x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \left(\sum_l \omega_k^l(e_i) e_l + \sum_r h_{ik}^r e_r \right) \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (5.3)$$

olarak bulunur. Benzer işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned} -e_i e_i \tilde{v} &= -e_i \left(\sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \right) \\ &= - \sum_{r,k} \left(e_i(h_{ik}^r) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \right. \\ &\quad + h_{ik}^r e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_j h_{ik}^r \omega_j^k(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_k}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_{j,s} h_{ik}^r h_{ij}^s x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad \left. - h_{ik}^r h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \sum_s h_{ik}^r \omega_r^s(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir. Ayrıca, (5.3) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} e_i) \tilde{v} &= \sum_j \omega_i^j(e_i) e_j \tilde{v} \\ &= \sum_{j,r,k} \omega_i^j(e_i) h_{jk}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

bulunur. (2.12), (5.4) ve (5.5) denklemleri göz önüne alındığında, küresel Gauss

tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{v} = & nH \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} \\
& - n \sum_k x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge D_{e_k} \hat{H} \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \\
& - \sum_{i,j,k,r,s} h_{ij}^r h_{ik}^s x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklinde elde edilir. (5.6) denkleminde (2.16) ve (2.13) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{v} = & \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + n\hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\
& - n \sum_k x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge D_{e_k} \hat{H} \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{j,k,r,s} R_{sjk}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \quad (5.7)$$

olarak bulunur.

Önerme 5.1 [6] $x : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ izometrik bir daldırma olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler söylenir:

- (a) $\nu : (M^n, g) \rightarrow G(n+1, m)$ Obata tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $x : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ izometrik daldırmasının minimal olmasıdır.
- (b) $\tilde{\nu} : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{E}_{(n+1)}^{(m)}$ Küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $x : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ izometrik daldırmasının total jeodezik olmasıdır.

İspat. $e_r \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ ve $x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge \dots \wedge e_n$ vektörleri $G(n+1, m)$ Grasmaniye manifoldunun teğet uzayının bir bazını oluştururlar. Bu durumda Obata'nın tasviri harmonik ise (5.7) denkleminde bakıldığında bu baz vektörlerini içeren ifadelerin sıfır olması gerekir. Yani, $\hat{H} = 0$ dır. Tersinde aynı ifadeler doğrudur. Ancak (b) şıkkında küresel Gauss tasviri, $\mathbb{E}_{(n+1)}^{(m)}$ Öklid uzayına tanımlandığından bu tasvirin harmonikliği, (5.7) denkleminin sıfıra eşit olmasını getirir. Bu da x izometrik daldırmasının total jeodezik olduğunu gösterir. Bu durum içinde ifadelerin tersi de doğru olduğundan gösterilmek istenen ifadeye ulaşılır. $\square$

Gauss tasviri ile küresel Gauss tasvirinin geometrik davranışları farklıdır. Örneğin; Öklid uzayının her kompakt alt manifoldunun Gauss tasviri kütleli simetrik iken

küresel kompakt alt manifoldların küresel Gauss tasviri genellikle kütleli simetrik değildir.

5.2 1-Tipinden Küresel Gauss Tasvirine Sahip Küresel Alt Manifoldlar

Teorem 5.1 [6] $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin herhangi bir alt manifoldunun kütleli simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu alt manifoldun sabit skaler eğrilikli ve düz normal konneksiyona sahip $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin minimal bir alt manifoldu olmasıdır.

İspat. M , $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin kütleli simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip bir alt manifoldu olsun. Bu durumda, M 'nin küresel Gauss tasviri $\tilde{\nu}$, λ_p sabit olmak üzere $\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p\tilde{\nu}$ denklemini sağlar. Bu ifade, (5.7) denklemiyle kıyaslanırsa M alt manifoldunun kütleli simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\hat{H} = R_{sjk}^r = 0$ ve $\|\hat{h}\|^2 = \text{sabit}$ olmasıdır sonucu çıkarılır. Ayrıca (2.15) denkleminde de M alt manifoldunun sabit skaler eğrilikçe sahip olduğu görülür. $\square$

Teorem 5.2 [6] $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde total jeodezik olmayan bir yüzeyin kütleli simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, tamamiyle total jeodezik $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde kalan Clifford minimal tor yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde total jeodezik olmayan bir yüzeyin Clifford minimal tor yüzeyinin açık bir parçası olduğu kabul edilsin. Clifford minimal tor yüzeyi küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeninin $\Delta\tilde{\nu} = 2\tilde{\nu}$ denklemini sağladığından, bu yüzeyin kütleli simetrik 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olduğu görülür. Tersine, Teorem 5.1 kullanıldığında bu yüzeyin sabit skaler eğrilikli ve düz normal bir konneksiyona sahip minimal bir yüzey olduğu görülür. $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin bu özellikleri sağlayan sadece 2 tane minimal yüzeyi vardır: Total jeodezik 2-boyutlu kürenin açık bir parçası ve Clifford minimal tor yüzeyinin açık bir parçası. Teoremin kabulünden dolayı bu yüzey Clifford minimal tor yüzeyinin açık bir parçasıdır. $\square$

Teorem 5.3 [6] $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin n -boyutlu bir alt manifoldunun kütleli simetrik olmayan 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu manifoldun skaler eğriliği sabit ve total jeodezik $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içine sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip bir hiperyüzeyi olarak daldırılmasıdır.

İspat. $x : M \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, n -boyutlu M Riemann manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}$ küresine tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. İlk olarak, M^n manifoldunun, $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin kütleli simetrik olmayan 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip bir alt manifoldu olduğu varsayalım. Bu durumda, c bir vektör ve λ_p reel sayı olmak üzere küresel Gauss tasviri $\Delta \tilde{v} = \lambda_p(\tilde{v} - c)$ eşitliğini sağlar. Bu denklemin e_j doğrultusunda türevi alınırsa,

$$(\Delta \tilde{v})_j = \lambda_p(\tilde{v})_j \quad (5.8)$$

elde edilir. Burada $e_j(.) = (.)_j$ notasyonu ile gösterilmiştir. Diğer taraftan (5.7) denkleminin (2.1) denklemi ve $R_{sjk}^r + R_{rjk}^s = 0$ kullanıldığında gerekli hesaplamalar yapılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} e_i(\Delta \tilde{v}) = & (\|\hat{h}\|^2)_i \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + 2n D_{e_i} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + n \sum_{r,k} h_{ik}^r \hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & - n \sum_{j \neq k} \omega_j^k(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge \underbrace{e_k}_{j\text{-inci}} \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge \underbrace{D_{e_k} \hat{H}}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & - n \sum_{j \neq k} h_{ij}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge \underbrace{D_{e_k} \hat{H}}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + n \sum_k \langle A_{D_{e_k} \hat{H}} e_i, e_k \rangle \tilde{v} - n \sum_k x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{D_{e_i} D_{e_k} \hat{H}}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + \sum_{r,s,j,k} ((e_i R_{sjk}^r) x + R_{sjk}^r e_i) \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + \sum_{r,s} \sum_{j,k,l \neq} R_{sjk}^r \{ h_{il}^t x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + \omega_l^h(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_h}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \} \\ & + \sum_{r,s,j,k} (R_{sjk}^r \omega_s^t(e_i) - R_{sjk}^t \omega_s^r(e_i)) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \quad (5.9)$$

Burada, ispat iki duruma ayrılır:

1. Durum: $\hat{H} = 0$ olsun. Bu durumda, (5.9) denklemi

$$\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{v}) = & \|\hat{h}\|_i^2 \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{r,s,j,k} ((e_i R_{sjk}^r) x + R_{sjk}^r e_i) \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{r,s} \sum_{j,k,l \neq} R_{sjk}^r \{h_{il}^t x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_h \omega_l^h(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_h}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n\} \\
& + \sum_{r,s,j,k} (R_{sjk}^r \omega_s^t(e_i) - R_{sjk}^t \omega_s^r(e_i)) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{5.10}$$

şekline dönüşür. (5.3), (5.8) ve (5.10) denklemleri karşılaştırıldığında $\|\hat{h}\|_i^2 = R_{sjk}^r = 0$ olduğu görülür. Bu durumda, $\|\hat{h}\|$ sabittir ve M^n manifoldunun normal konneksiyonu düzdür. (2.15) denklemi kullanıldığında M^n manifoldunun skaler eğriliğinin sabit olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, Teorem 5.1'den M 'nin küresel Gauss tasviri $\tilde{v}$ küresel simetrik 1-tipindendir. Teoremin kabulünden bu bir çelişkidir.

2. Durum: $\hat{H} \neq 0$ olsun. $D_{e_i} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ terimi sadece $e_i(\Delta\tilde{v})$ ifadesinde gözüktüğünden (5.3), (5.8) ve (5.9) denklemlerinden $D\hat{H} = 0$ olduğu sonucu çıkarılır. Bu durumda, M^n manifoldu $\mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde paralel sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahiptir. Yani, $\hat{H}$ sabittir. Dolayısıyla, (5.9) denklemi

$$\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{v}) = & n \sum_{r,k} h_{ik}^r \hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_r \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + (\|\hat{h}\|_i^2) \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_r \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{r,s,j,k} \{(e_i R_{sjk}^r) x + R_{sjk}^r e_i\} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \sum_{r,s} \sum_{j,k,l \neq} R_{sjk}^r \{h_{il}^t x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\
& + \omega_l^h(e_i) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_h}_{l\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n\} \\
& + \sum_{r,s,j,k} (R_{sjk}^r \omega_s^t(e_i) - R_{sjk}^t \omega_s^r(e_i)) x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_t}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{5.11}$$

haline indirgenir. (5.3), (5.8) ve (5.11) denklemlerinden $\|\hat{h}\|$ sabit olduğu söylenir. $\hat{H}$ ve $\|\hat{h}\|$ sabit olduğundan (2.15) ifadesinden de skaler eğriliğin sabit olduğu sonucu çıkarılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & n \sum_{r,k} h_{ik}^r \hat{H} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_r \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \\ & + \sum_{r,s,j,k} R_{sjk}^r e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_s}_{k\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

dır. Burada $\hat{H} = |\hat{H}|e_{n+1}$ olarak alınırsa, (5.12) denkleminde $r, s \geq n+2$ için $R_{sjk}^r = 0$ dır. Ayrıca $D\hat{H} = 0$ olduğundan $R_{sjk}^{n+1} = 0$ dır. Yani, M^n manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde normal konneksiyonu düzdür. Bu yüzden (5.12) ifadesi

$$\sum_{r=n+2}^{m-1} \sum_k h_{ik}^r e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_r \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n = 0 \quad (5.13)$$

şekline dönüşür. (5.13) denkleminde birinci normal uzayının, Imh , e_{n+1} vektörü tarafından gerildiği görülür. Erbacher'ın İndirgeme Teoreminden M^n manifoldunun, total jeodezik $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içine daldırıldığı gösterilmiş olur.

Tersine, teoremin varsayımları altında (5.9) denklemi

$$e_i(\Delta\tilde{v}) = \|\hat{h}\|^2 \sum_{r,k} h_{ik}^r x \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge e_r \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n \quad (5.14)$$

olur. Dolayısıyla, (5.3) denklemi kullanılırsa $e_i(\Delta\tilde{v}) = \|\hat{h}\|^2 e_i(\tilde{v})$ olarak yazılır. Yani, c sabit bir vektör iken $\Delta(\tilde{v} - c) = \|\hat{h}\|^2 \tilde{v}$ dir. M^n manifoldu, sabit skaler ve ortalama eğriliği olduğundan (2.15) denkleminde $\|\hat{h}\|$ sabit olduğu görülür. Yani, $\tilde{v}$ tasvirinin Laplasiyenin λ_p sabit olmak üzere $\Delta(\tilde{v} - c) = \lambda_p \tilde{v}$ denklemini sağlar. Bu ifade de, M^n alt manifoldunun küresel olmayan 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olduğunu gösterir. $\square$

5.3 2-Tipinden Küresel Gauss Tasvirine Sahip Küresel Alt Manifoldlar

Bu bölümde 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip Veronese yüzeyi ve eşkenar minimal tor yüzeyinden bahsedilmiştir. Aşağıdaki teorem ile 4. bölümde (4.13) denklemi ile tanımlanmış Veronese yüzeyinin küresel Gauss tasviri ile ilgili bir sonuç verilir.

Teorem 5.1 [6] M , $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin minimal bir yüzeyi olsun. M yüzeyinin, tamamiyle total jeodezik $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde kalan Veronese yüzeyinin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olmasıdır.

İspat. İlk olarak, M^2 yüzeyinin (4.13) denklemindeki gibi tanımlanmış Veronese yüzeyinin açık bir parçası olduğu varsayalım. $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ küresi için

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \sin\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right), \\ y &= \sqrt{3} \sin\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right), \\ z &= \sqrt{3} \cos\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

küresel koordinatlar seçilirse, g metrik tensörü ve Δ Laplasiyen operatörü

$$\begin{aligned} g &= du^2 + \sin^2\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) dv^2 \\ \Delta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cot\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \csc^2\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{aligned}$$

halini alır. Ayrıca M yüzeyi için

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \csc\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{h}(e_1, e_1) = \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \quad \hat{h}(e_1, e_2) = \frac{e_4}{\sqrt{3}}$$

vektörleri $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ üzerinde ortonormal bir çatı alanı oluşturur. Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= h_{12}^4 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad h_{12}^3 = h_{11}^4 = -h_{22}^4 = 0 \\ \omega_3^4 &= 2\omega_1^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cot\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \omega^2, \quad \|\hat{h}\|^2 = -2K^D = \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{5.15}$$

bulunur. (5.15) ifadesinde bulunanlar (5.7) denkleminde kullanıldığında,

$$\Delta \tilde{v} = \frac{4}{3} \tilde{v} - \frac{4}{3} x \wedge e_3 \wedge e_4 \tag{5.16}$$

elde edilir. (5.16) denkleminin Laplasiyeni alınırsa

$$\Delta^2 \tilde{v} = \frac{32}{3} \tilde{v} - \frac{56}{3} x \wedge e_3 \wedge e_4 \tag{5.17}$$

bulunur. Daha sonra

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= \frac{4}{5}\tilde{v} + \frac{2}{5}x \wedge e_3 \wedge e_4, \\ \tilde{v}_2 &= \frac{1}{5}\tilde{v} - \frac{2}{5}x \wedge e_3 \wedge e_4\end{aligned}$$

tasvirlerinin Laplasiyenlerinin $\Delta\tilde{v}_1 = \frac{2}{3}\tilde{v}_1$ ve $\Delta\tilde{v}_2 = 4\tilde{v}_2$ ifadelerini sağladığı görülür. Dolayısıyla, $\tilde{v}$ tasvirinin spektral açılımı $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$ olur. Bu ifade (3.1) denklemiyle karşılaştırıldığında $\tilde{v}$ tasvirinin kütleli simetrik 2-tipinden olduğu sonucuna varılır. İspatın geri kalan kısmında gösterim kolaylığı için indislerin aralıkları aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$1 \leq i, j, k, l \leq 2; \quad 3 \leq r, s, t \leq 4; \quad 5 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m-1.$$

Tersine olarak, $x : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip minimal bir yüzey olsun. $e_{n+1}, \dots, e_{m-1}, e_m$ vektörleri

$$e_m = x, \quad A_{e_5} = \dots = A_{e_{m-1}} = 0$$

olacak şekilde seçilebilir. Bu seçim altında $A_{e_m} = -I$ ve $(r, s) \neq (3, 4), (4, 3)$ olmak üzere $R_{s12}^r = 0$ olur. Bu durumda (5.7) denkleminde

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{v} &= \|\hat{h}\|^2\tilde{v} + 2K^D x \wedge e_3 \wedge e_4 \\ K^D &= \sum_{j=1}^2 (h_{2j}^3 h_{1j}^4 - h_{1j}^3 h_{2j}^4)\end{aligned}\tag{5.18}$$

elde edilir. $\|\hat{h}\|_j^2 = e_j \|\hat{h}\|^2$ ve $K_j^D = e_j K^D$ notasyonu kullanıldığında (5.18) denklemindeki ifadenin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{v} &= (\Delta\|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4)\tilde{v} + 2(K^D\|\hat{h}\|^2 + \Delta K^D)x \wedge e_3 \wedge e_4 \\ &\quad + 2K^D\Delta(x \wedge e_3 \wedge e_4) - 2\sum \|\hat{h}\|_j^2 \tilde{\nabla}_{e_j}\tilde{v} \\ &\quad - 4\sum K_j^D \tilde{\nabla}_{e_j}(x \wedge e_3 \wedge e_4)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, (2.1) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}e_j(x \wedge e_3 \wedge e_4) &= e_j \wedge e_3 \wedge e_4 - \sum_i h_{ij}^3 x \wedge e_3 \wedge e_i \\ &\quad - \sum_i h_{ij}^4 x \wedge e_3 \wedge e_i + \sum_\alpha \omega_3^\alpha(e_j)x \wedge e_\alpha \wedge e_4 \\ &\quad + \sum_\alpha \omega_4^\alpha(e_j)x \wedge e_3 \wedge e_\alpha\end{aligned}\tag{5.19}$$

hesaplanır. (2.12) ve (5.19) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\Delta(x \wedge e_3 \wedge e_4) = & 2K^D \tilde{v} + \left(2 + \|\hat{h}\|^2 + \sum_{\alpha} \|\omega_3^{\alpha}\|^2 + \sum_{\alpha} \|\omega_4^{\alpha}\|^2\right) x \wedge e_3 \wedge e_4 \\
& - 2 \sum_{j,\alpha} \omega_3^{\alpha}(e_j) e_j \wedge e_{\alpha} \wedge e_4 - 2 \sum_{j,\alpha} \omega_4^{\alpha}(e_j) \wedge e_3 \wedge e_{\alpha} \\
& + \sum_i h_{ij,j}^3 x \wedge e_i \wedge e_4 - \sum_i h_{ij,j}^4 x \wedge e_i \wedge e_3 \\
& + 2 \sum_{j,\alpha} (h_{ij}^3 \omega_4^{\alpha}(e_j) - h_{ij}^4 \omega_3^{\alpha}(e_j)) x \wedge e_i \wedge e_{\alpha} \\
& + \sum_{j,\alpha} (e_i(\omega_3^{\alpha}(e_j)) x \wedge e_4 \wedge e_{\alpha} - e_j(\omega_4^{\alpha}(e_j)) x \wedge e_3 \wedge e_{\alpha}) \\
& - \sum_{j,\alpha} (\omega_3^4(e_j) \omega_4^{\alpha}(e_j) + \sum_{\beta} \omega_3^{\beta}(e_j) \omega_{\alpha}^{\beta}(e_j)) x \wedge e_4 \wedge e_{\alpha} \\
& + \sum_{j,\alpha} (\omega_4^3(e_j) \omega_3^{\alpha}(e_j) + \sum_{\beta} \omega_4^{\beta}(e_j) \omega_{\alpha}^{\beta}(e_j)) x \wedge e_3 \wedge e_{\alpha} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.12), (5.18), (5.19), (5.20) ve M yüzeyinin $\mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde minimal olduğu göz önüne alındığında, küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyen

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \tilde{v} = & (\Delta \|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4 + 4(K^D)^2) \tilde{v} \\
& + \left\{ 2\Delta K^D + 2K^D \left(2\|\hat{h}\|^2 + 2 + \sum_{\beta} (\|\omega_3^{\beta}\|^2 + \|\omega_4^{\beta}\|^2) \right) \right\} x \wedge e_3 \wedge e_4 \\
& - 2 \sum_{j,r} \|\hat{h}\|_j^2 (h_{2j}^r x \wedge e_1 \wedge e_r - h_{1j}^r x \wedge e_2 \wedge e_r) \\
& + 4 \sum_{i,j} K_j^D (h_{ij}^3 x \wedge e_i \wedge e_4 - h_{ij}^4 x \wedge e_i \wedge e_3 - e_j \wedge e_3 \wedge e_4) \\
& + 4K^D \sum_{j,\alpha} (h_{ij}^3 \omega_4^{\alpha}(e_j) - h_{ij}^4 \omega_3^{\alpha}(e_j)) x \wedge e_i \wedge e_{\alpha} \\
& + 4K^D \sum_{j,\alpha} \omega_3^{\alpha}(e_j) e_j \wedge e_4 \wedge e_{\alpha} - 4K^D \sum_{j,\alpha} \omega_4^{\alpha}(e_j) e_j \wedge e_3 \wedge e_{\alpha} \\
& + 2 \sum_{j,\alpha} \left\{ K^D \left((\nabla_{e_j} \omega_3^{\alpha}) e_j - \omega_3^4(e_j) \omega_4^{\alpha}(e_j) - \sum_{\beta} \omega_3^{\beta}(e_j) \omega_{\alpha}^{\beta}(e_j) \right) \right. \\
& \quad \left. + 2K_j^D \omega_3^{\alpha}(e_j) \right\} x \wedge e_4 \wedge e_{\alpha} \\
& - 2 \sum_{j,\alpha} \left\{ K^D \left((\nabla_{e_j} \omega_4^{\alpha}) e_j - \omega_4^3(e_j) \omega_3^{\alpha}(e_j) - \sum_{\beta} \omega_4^{\beta}(e_j) \omega_{\alpha}^{\beta}(e_j) \right) \right. \\
& \quad \left. + 2K_j^D \omega_4^{\alpha}(e_j) \right\} x \wedge e_3 \wedge e_{\alpha} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, M yüzeyinin küresel Gauss tasviri, kütleli simetrik ve 2-tipinden ise $\lambda_p \neq \lambda_q$ için $\Delta \tilde{v}_p = \lambda_p \tilde{v}_p$ ve $\Delta \tilde{v}_q = \lambda_q \tilde{v}_q$ olacak şekilde $\tilde{v}$ küresel Gauss

tasviri, $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ spektral açılımına sahiptir. Yani,

$$\Delta^2 \tilde{v} = (\lambda_p + \lambda_q) \Delta \tilde{v} - \lambda_p \lambda_q \tilde{v} \quad (5.22)$$

vardır. (5.21) ile (5.22) denklemleri karşılaştırıldığında $e_j \wedge e_3 \wedge e_\alpha$ ve $e_j \wedge e_\alpha \wedge e_4$ terimleri sadece $\Delta^2 \tilde{v}$ ifadesinin içinde gözüktüğünden $K^D \omega_3^\alpha = K^D \omega_4^\alpha = 0$ sonucu çıkarılır. Burada iki durum söz konusudur:

(a) M^2 yüzeyinde $K^D = 0$ dır veya

(b) M^2 yüzeyinin U gibi bazı boş olmayan açık alt kümelerinde $\omega_3^\alpha = \omega_4^\alpha = 0$ ve $K^D \neq 0$ dır.

1. Durum: M^2 yüzeyinde $K^D = 0$ olsun. Bu durumda $M^2, \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{m-1}$ total jeodezik küresinin minimal yüzeyi olduğundan (5.18) ve (5.21) denklemleri, sırasıyla,

$$\Delta \tilde{v} = \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} \quad (5.23)$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^2 \tilde{v} = & \Delta \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + \|\hat{h}\|^4 \tilde{v} \\ & + 2 \sum_j e_j \|\hat{h}\|^2 \{h_{1j}^3 x \wedge e_2 \wedge e_3 - h_{2j}^3 x \wedge e_1 \wedge e_3\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

haline indirgenir. (5.22), (5.23) ve (5.24) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\|\hat{h}\|_1^2 h_{11}^3 + \|\hat{h}\|_2^2 h_{12}^3 = \|\hat{h}\|_1^2 h_{12}^3 - \|\hat{h}\|_2^2 h_{11}^3 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla, $\|\hat{h}\|$ sabittir. Bu durumda Teorem 3.2'den $\tilde{v}$ tasvirinin 1-tipinden olduğu sonucu çıkar. Ancak M yüzeyinin küresel Gauss tasviri $\tilde{v}$, 2-tipinden olduğu varsayımdan dolayı bu bir çelişkidir. Yani, K^D sıfıra eşit olamaz.

2. Durum: M^2 yüzeyinin U gibi bazı boş olmayan açık alt kümelerinde

$\alpha = 5, \dots, m-1$ için $\omega_3^\alpha = \omega_4^\alpha = 0$ ve $K^D \neq 0$ olsun. U üzerindeki birinci normal demet $Im \hat{h}$ rankı 2 olan normal demetin paralel bir alt demettir. Bu yüzden $U, \mathbb{S}^4 \subset \mathbb{S}^{m-1}$

total jeodezik küresi içinde minimal bir yüzeydir. Bu durumda, (5.21) denklemi

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \tilde{v} = & \{\Delta \|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4 + 4(K^D)^2\} \tilde{v} \\
& + 4K^D \{1 + \|\hat{h}\|^2\} x \wedge e_3 \wedge e_4 + 2\Delta K^D x \wedge e_3 \wedge e_4 \\
& + 2 \sum_{j,r} \|\hat{h}\|_j^2 (h_{1j}^r x \wedge e_2 \wedge e_r - h_{2j}^r x \wedge e_1 \wedge e_r) \\
& - 4 \sum_j K_j^D \{e_j \wedge e_3 \wedge e_4 - \sum_i h_{ij}^3 x \wedge e_i \wedge e_4 \\
& - \sum_i h_{ij}^4 x \wedge e_3 \wedge e_i\} \tag{5.25}
\end{aligned}$$

dönüşür. $e_j \wedge e_3 \wedge e_4$ terimi sadece $\Delta^2 \tilde{v}$ ifadesi içinde gözüktüğünden (5.18), (5.22) ve (5.25) denklemlerinden K^D 'nin sabit olduğunu sonucu çıkar. Eğer K^D =sabit ise, (5.25) ifadesi

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \tilde{v} = & \{\Delta \|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4 + 4(K^D)^2\} \tilde{v} \\
& + 4K^D \{1 + \|\hat{h}\|^2\} x \wedge e_3 \wedge e_4 \\
& + 2 \sum_{j,r} \|\hat{h}\|_j^2 (h_{1j}^r x \wedge e_2 \wedge e_r - h_{2j}^r x \wedge e_1 \wedge e_r) \tag{5.26}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. (5.18), (5.22) ve (5.26) dan U 'nun sabit eğriliğe sahip olduğu söylenir. Dolayısıyla, U , Veronese yüzeyinin açık bir parçasıdır[16]. Yani, süreklilikten dolayı bütün M^2 yüzeyi Veronese yüzeyinin açık bir parçası olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Şimdi $\mathbb{S}^5$ küresi içinde tanımlı eşkenar minimal tor yüzeyinden kısaca bahsedilecektir.

$\bar{y} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^6$ tasviri

$$\begin{aligned}
\bar{y}(s, t) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}t + s}{\sqrt{2}} \right), \sin \left(\frac{\sqrt{3}t + s}{\sqrt{2}} \right), \cos \left(\frac{\sqrt{3}t - s}{\sqrt{2}} \right), \right. \\
& \left. \sin \left(\frac{\sqrt{3}t - s}{\sqrt{2}} \right), \cos \sqrt{2}s, \sin \sqrt{2}s \right) \tag{5.27}
\end{aligned}$$

göz önüne alınsın. (5.27) denklemindeki verilen $\bar{y}$ tasviriden düz $\bar{T}^2$ tor yüzeyinden $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{E}^6$ küresine tanımlanmış bir y izometrik daldırması verir. (5.27) denkleminde indirgenmiş $\bar{T}^2$ tor yüzeyi üzerindeki metrik tensörü $g = ds^2 + dt^2$ dir. $\Delta \bar{y} = 2\bar{y}$ olduğundan $y : \bar{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^5$ izometrik daldırması minimaldir. Bu minimal tor yüzeyi *eşkenar minimal tor yüzeyi* olarak adlandırılır.

Teorem 5.2 [6] $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin bir minimal yüzeyi, tamamiyle total jeodezik $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde kalan eşkenar minimal tor yüzeyinin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşul, bu minimal yüzeyinin kütesel simetrik olmayan 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olmasıdır.

6. 2-TİPİNDEN KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP İZOPARAMETRİK KÜRESEL HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip izoparametrik küresel hiperyüzeyler incelenecektir. Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden tasvirlerine ait örnekler bilinmektedir. Örneğin; 3-boyutlu Öklid uzayında çembersel silindirin yer vektörü sıfırlı 2-tipinden bir tasvirdir[3,17,18,19]. Ancak bilindiği kadarıyla, küresel olup sıfırlı 2-tipinden tasvir veya alt manifold örneği mevcut değildi. Bu çalışmada bazı izoparametrik küresel hiperyüzeylerin küresel Gauss tasvirinin sıfırlı 2-tipinden olduğu gösterildi.

$\mathbb{S}^{n+1}$ küresi içinde minimal olmayan ve izoparametrik bir M hiperyüzeyi alınsın. M hiperyüzeyinin $\mathbb{E}^{n+2}$ içindeki normal vektörleri e_{n+1} ve $e_{n+2} = x$ olduğundan ve $e_{n+2} = x$ vektörü normal uzayda paralel olduğundan e_{n+1} vektörü de paraleldir. Dolayısıyla, M hiperyüzeyinin normal uzayı düzdür, yani, $R^\perp \equiv 0$ dır. M 'nin $\mathbb{S}^{n+1}$ küresindeki $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabit ve $\hat{H} = \hat{\alpha}e_{n+1}$ olduğu için $\hat{H}$ küresel ortalama eğrilik vektörü de paraleldir. Dolayısıyla $D_X\hat{H} = 0$ elde edilir. Böylece, (5.7) denkleminde

$$\Delta\tilde{v} = \|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \quad (6.1)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.1 M , $\mathbb{S}^{n+1}$ küresinin minimal olmayan izoparametrik bir hiperyüzeyi olsun. Bu taktirde, M üzerinde tanımlı $\tilde{v} = e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\tilde{v} = n\hat{\alpha}\tilde{v} + n\tilde{v} \quad (6.2)$$

ile verilir.

İspat. $\bar{v}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi alınır

$$\begin{aligned} e_i \bar{v} &= e_i(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \tilde{\nabla}_{e_i} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \sum_j e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i} e_j}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, (2.1) ve (2.2) formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e_i \bar{v} &= \left(- \sum_j h_{ij}^{n+1} e_j + \sum_r \omega_{n+1}^r(e_i) e_r \right) \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_j e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{\left(\sum_k \omega_j^k(e_i) e_k + \sum_r h_{ij}^r e_r \right)}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

bulunur. Her $i = 1, \dots, n$ değeri için $e_i \wedge e_i = 0$, $\omega_{n+1}^{n+1} = \omega_{n+1}^{n+2} = 0$ ve $h_{ij}^{n+2} = -\delta_{ij}$ olduğundan, gerekli işlemler yapırsa

$$\begin{aligned} e_i \bar{v} &= \sum_{j,r} h_{ij}^r e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{e_r}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &= -e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{i\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} -e_i e_i \bar{v} &= e_i(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{i\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= -h_{ii}^{n+1} e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{i\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + \sum_j \omega_j^i(e_i) e_{n+1} \wedge \dots \wedge \underbrace{e_i}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{i\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad + n e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} e_i) \bar{v} &= \sum_j \omega_i^j(e_i) e_j \bar{v} \\ &= \sum_j \omega_i^j(e_i) (-e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= - \sum_j \omega_i^j(e_i) e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \tag{6.4}$$

bulunur. (6.3) ve (6.4) ifadeleri (2.17) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v} &= n \hat{\alpha} \bar{v} + n \bar{v} - \sum_{i,j} \omega_j^i(e_i) e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \\ &\quad - \sum_{i,j} \omega_i^j(e_i) e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{x}_{j\text{-inci}} \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned} \tag{6.5}$$

ifadesine ulaşılır. $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ olmasından dolayı, (6.5) denkleminde (6.2) elde edilir. $\square$

Teorem 6.1 $\mathbb{S}^{n+1}$ birim küresi içinde sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip her yarı-ombilik olmayan izoparametrik hiperyüzeyi, kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahiptir.

İspat. M , $\mathbb{S}^{n+1}$ birim küresinin sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip izoparametrik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (6.1) formülü geçerlidir ve $\|\hat{h}\|$ ve $\hat{\alpha}$ sabittir. Böylece, $\hat{H} = \hat{\alpha}e_{n+1}$ gözönüne alındığında, $\Delta\tilde{v}$ 'nin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{v} &= \Delta(\|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\tilde{v}) \\ &= \Delta(\|\hat{h}\|^2\tilde{v}) + \Delta(n\hat{\alpha}\tilde{v}) \\ &= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + n\hat{\alpha}\Delta\tilde{v}\end{aligned}\tag{6.6}$$

olur. (6.2) denklemini (6.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{v} &= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + n\hat{\alpha}(n\hat{\alpha}\tilde{v} + n\tilde{v}) \\ &= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + (n\hat{\alpha})^2\tilde{v} + n^2\hat{\alpha}\tilde{v} \\ &= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + (n\hat{\alpha})^2\tilde{v} + n(\Delta\tilde{v} - \|\hat{h}\|^2\tilde{v}) \\ &= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + (n\hat{\alpha})^2\tilde{v} + n\Delta\tilde{v} - n\|\hat{h}\|^2\tilde{v} \\ &= (\|\hat{h}\|^2 + n)\Delta\tilde{v} + ((n\hat{\alpha})^2 - n\|\hat{h}\|^2)\tilde{v}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\Delta^2\tilde{v} - (\|\hat{h}\|^2 + n)\Delta\tilde{v} + n(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2)\tilde{v} = 0\tag{6.7}$$

bulunur. M hiperyüzeyinin Laplasiyen operatörü için $P(\Delta)\tilde{v} = 0$ olacak şekilde bir 2. dereceden $P(\lambda)$ polinomu bulunmuş olur. Bu durumda Teorem 3.2 göz önüne alınırsa M hiperyüzeyinin küresel Gauss tasvirinin 2-tipinden olduğu söylenir.

İspatın devamında bu tasvirin kütleli simetrik olduğu gösterilecektir. $P(\lambda)$ polinomunun kökleri λ_1 ve λ_2 olsun. $\tilde{v}$, 2-tipinden bir tasvir ise, $i = 1, 2$ için $\Delta\tilde{v}_i = \lambda_i\tilde{v}_i$ ve $\lambda_i > 0$ olacak şekilde

$$\tilde{v} = c + \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$$

spektral açılımı vardır. $\tilde{v}$ tasvirinin kütleli simetrik bir tasvir olması için c vektörünün sıfır olması gerekir. (6.7) denkleminde λ_1 ve λ_2 için

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \|\hat{h}\|^2 + n \quad (6.8)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = n(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2) \quad (6.9)$$

yazılır. Δ Laplasiyenin özdeğerleri (6.8) ve (6.9) denklemlerinden

$$\lambda_1 = \frac{\|\hat{h}\|^2 + n - \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}{2}$$

şeklinde elde edilirler. Burada $D = (\|\hat{h}\|^2 - n)^2 + 4n^2\hat{\alpha}^2$ dir. Bu ifadelerle bakılarak λ_2 'nin pozitif olduğu kolaylıkla görülür. Ancak λ_1 pozitif olabilmesi için λ_1 ile λ_2 çarpımının, yani, (6.9) denkleminin sıfırdan büyük olması gerekir. $n\|\hat{h}\|^2 - (n\hat{\alpha})^2$ ifadesi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} n\|\hat{h}\|^2 - (n\hat{\alpha})^2 &= n(\hat{h}_{11}^{n+1})^2 + n(\hat{h}_{22}^{n+1})^2 + \dots + n(\hat{h}_{nn}^{n+1})^2 - (\hat{h}_{11}^{n+1} + \hat{h}_{22}^{n+1} + \dots + \hat{h}_{nn}^{n+1})^2 \\ &= n(\hat{h}_{11}^{n+1})^2 + n(\hat{h}_{22}^{n+1})^2 + \dots + n(\hat{h}_{nn}^{n+1})^2 \\ &\quad - (\hat{h}_{11}^{n+1})^2 - (\hat{h}_{22}^{n+1})^2 - \dots - (\hat{h}_{nn}^{n+1})^2 \\ &\quad - 2\hat{h}_{11}^{n+1}\hat{h}_{22}^{n+1} - 2\hat{h}_{11}^{n+1}\hat{h}_{33}^{n+1} - \dots - 2\hat{h}_{11}^{n+1}\hat{h}_{nn}^{n+1} \\ &\quad - 2\hat{h}_{22}^{n+1}\hat{h}_{33}^{n+1} - 2\hat{h}_{22}^{n+1}\hat{h}_{44}^{n+1} - \dots - 2\hat{h}_{22}^{n+1}\hat{h}_{nn}^{n+1} - \dots - 2\hat{h}_{(n-1)(n-1)}^{n+1}\hat{h}_{nn}^{n+1} \\ &= (\hat{h}_{11}^{n+1} - \hat{h}_{22}^{n+1})^2 + (\hat{h}_{11}^{n+1} - \hat{h}_{33}^{n+1})^2 + \dots + (\hat{h}_{(n-1)(n-1)}^{n+1} - \hat{h}_{nn}^{n+1})^2 \\ &= \sum_{i < j} (\hat{h}_{ii}^{n+1} - \hat{h}_{jj}^{n+1})^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

bulunur. M yarı-ombilik olmayan bir hiperyüzey olduğundan $i \neq j$ için $\hat{h}_{ii}^{n+1} \neq \hat{h}_{jj}^{n+1}$ dir. Yani $\lambda_1 \lambda_2 = n\|\hat{h}\|^2 - n^2\hat{\alpha}^2 > 0$ dır. O halde, $\lambda_2 > 0$ ve $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ olduğundan $\lambda_1 > 0$ olduğu görülür. Buna ek olarak, $\Delta v_1 = \lambda_1 \tilde{v}_1$ ve $\Delta v_2 = \lambda_2 \tilde{v}_2$ şartlarını sağlayan $\tilde{v}_1$ ve $\tilde{v}_2$ tasvirleri de belirlenir. Bu tasvirler $\tilde{v}$ ve $\bar{v}$ tasvirlerinin lineer birleşimi olarak düşünülürse, $\tilde{v}_1 = a_1 \tilde{v} + a_2 \bar{v}$ ve $\tilde{v}_2 = b_1 \tilde{v} + b_2 \bar{v}$ olarak yazılabilir. Bu durumda uygun katsayılar aşağıdaki denklemler yardımıyla belirlenir:

$$\Delta \tilde{v}_1 = \lambda_1 \tilde{v}_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \Delta \tilde{v} + a_2 \Delta \bar{v} = \lambda_1 (a_1 \tilde{v} + a_2 \bar{v}),$$

$$a_1 (\|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + n\hat{\alpha} \bar{v}) + a_2 (n\hat{\alpha} \tilde{v} + n\bar{v}) = a_1 \lambda_1 \tilde{v} + a_2 \lambda_1 \bar{v},$$

$$(a_1 \|\hat{h}\|^2 + a_2 n\hat{\alpha}) \tilde{v} + (a_1 n\hat{\alpha} + a_2 n) \bar{v} = a_1 \lambda_1 \tilde{v} + a_2 \lambda_1 \bar{v}.$$

Buradan $(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_1)a_1 + n\hat{a}a_2 = 0$ ve $n\hat{a}a_1 + (n - \lambda_1)a_2 = 0$ denklem sistemi bulunur. Ancak bu iki denklem lineer bağımlıdır. Benzer şekilde $\Delta\tilde{v}_2 = \lambda_2\tilde{v}_2$ denkleminde de $(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_2)b_1 + n\hat{a}b_2 = 0$ ve $n\hat{a}b_1 + (n - \lambda_2)b_2 = 0$ denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler de lineer bağımlıdır. Dolayısıyla katsayıları belirleyebilmek için iki tane daha denkleme ihtiyaç vardır. Diğer taraftan, $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= (a_1\tilde{v} + a_2\tilde{v}) + (b_1\tilde{v} + b_2\tilde{v}) \\ &= (a_1 + b_1)\tilde{v} + (a_2 + b_2)\tilde{v}\end{aligned}$$

yazılır ve buradan da $a_1 + b_1 = 1$, $a_2 + b_2 = 0$ iki tane denklem elde edilir. Elde edilen denklem sistemleri kullanılırsa katsayılar

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{n - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{n - \|\hat{h}\|^2 + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}}, & a_2 &= \frac{n\hat{a}}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{n\hat{a}}{\sqrt{D}} \\ b_1 &= \frac{\lambda_2 - n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}}, & b_2 &= \frac{n\hat{a}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{n\hat{a}}{\sqrt{D}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$\tilde{v}_1 = \frac{n - \|\hat{h}\|^2 + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}}\tilde{v} - \frac{n\hat{a}}{\sqrt{D}}\tilde{v} \quad (6.11)$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}}\tilde{v} + \frac{n\hat{a}}{\sqrt{D}}\tilde{v} \quad (6.12)$$

bulunur. $i = 1, 2$ için $\Delta\tilde{v}_i = \lambda_i\tilde{v}_i$ olacak şekilde $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$ spektral açılımı bulunur. Bu açılım (3.1) denkleminde kıyaslandığında c vektörünün sıfır olduğu açıktır. Sonuç olarak, M hiperyüzeyinin $\tilde{v}$ küresel Gauss tasvirinin kütleli simetrik 2-tipinden olduğu görülür. $\square$

Örneğin; $a \neq b$ ve $a^2 + b^2 = 1$ olmak üzere, $M^n = \mathbb{S}^{n-k}(a) \times \mathbb{S}^k(b) \subset \mathbb{S}^{n+1}(1)$ çarpım hiperyüzeyi, $\mathbb{S}^{n+1}$ küresinin bir yarı-ombilik olmayan izoparametrik hiperyüzeyidir. Dolayısıyla, küresel Gauss tasviri kütleli simetrik 2-tipindendir.

Teorem 6.2 $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ küresinin her total jeodezik olmayan, yarı-ombilik hiperyüzeyi sıfırlı 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahiptir.

İspat. Bir hiperyüzey için (2.12) Codazzi denklemi

$$e_j(\hat{h}_{ii}^{n+1}) = (\hat{h}_{ii}^{n+1} - \hat{h}_{jj}^{n+1})\omega_i^j(e_i), \quad i \neq j \quad (6.13)$$

olarak yazılabilir. Teoremdeki varsayımdan, yani, $\hat{h}_{ii}^{n+1} = \hat{h}_{jj}^{n+1}$, $i \neq j$ olmasından dolayı $e_j(\hat{h}_{ii}^{n+1}) = 0$ dır. Bu durumda M hiperyüzeyinin $A_{e_{n+1}}$ şekil operatörünün özdeğerleri sabitlerdir. Bu da M 'in izoparametrik bir hiperyüzey olduğunu söyler. Yani, $\tilde{v}$ küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeni (6.7) denklemini sağlar. M yarı-ombilik bir hiperyüzey olduğundan (6.9) sıfıra eşit olduğu görülür. O halde λ_i 'lerden biri sıfıra eşittir. λ_1 sıfır olarak alınırsa, (6.11) ve (6.12) denklemleri

$$\tilde{v}_1 = \frac{2n}{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}(\tilde{v} - \hat{\alpha}\tilde{v}) \quad (6.14)$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{2}{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}\left(\frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D}}{2}\tilde{v} + n\hat{\alpha}\tilde{v}\right) \quad (6.15)$$

olarak elde edilir. Burada M hiperyüzeyinin sıfırlı 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için $\Delta\tilde{v}_1 = 0$ sağlamalıdır. (6.14) denkleminin Laplasiyeni alınırsa,

$$\Delta\tilde{v}_1 = \frac{2n}{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}(\Delta\tilde{v} - \hat{\alpha}\Delta\tilde{v})$$

(6.1), (6.2) denklemleri ve $\lambda_1\lambda_2 = n(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{v}_1 &= \frac{2n}{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}(\|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\tilde{v} - \hat{\alpha}(n\hat{\alpha}\tilde{v} + n\tilde{v})) \\ &= \frac{2}{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D}}(n\|\hat{h}\|^2 - (n\hat{\alpha})^2)\tilde{v} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak M hiperyüzeyi sıfırlı 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahiptir. $\square$

Örneğin, $\mathbb{S}^{n+1}$ küresinin küçük küreleri, $\mathbb{S}^{n+1}$ içinde yarı-ombilik olan izoparametrik hiperyüzeylerdir. Dolayısıyla bu hiperyüzeylerin küresel Gauss tasviri sıfırlı 2-tipindendir.

Teorem 6.3 M , $\mathbb{S}^3(1)$ küresinde ortalama eğriliği sabit ve yarı-ombilik olmayan bir yüzey olsun. Bu taktirde, M yüzeyinin kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin $a \neq b$ olmak üzere $S^1(a) \times S^1(b) \subset S^3(1)$ yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır.

İspat. İlk olarak M yüzeyinin, $a \neq b$ olmak üzere $S^1(a) \times S^1(b) \subset S^3(1)$ yüzeyinin açık bir parçası olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla, M 'nin yer vektörü

$$x = x(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$$

şeklinde yazılır. M yüzeyi için

$$e_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$e_3 = (-b \cos u, -b \sin u, a \cos v, a \sin v), \quad e_4 = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$$

vektörleri ortonormal bir çatı alanı oluşturur. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \frac{b}{a}, & h_{22}^3 &= -\frac{a}{b}, & h_{12}^3 &= h_{12}^4 = 0, & h_{11}^4 &= h_{22}^4 = -1 \\ \omega_1^2 &= \omega_3^4 = 0, & \omega_1^3 &= \frac{b}{a} \omega^1, & \omega_1^4 &= -\omega^1, & \omega_2^3 &= -\frac{a}{b} \omega^2, & \omega_2^4 &= -\omega^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

olarak bulunur. Ayrıca bu yüzeyin Gauss eğriliği, $\mathbb{S}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ içindeki ortalama eğrilik vektörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} K &= \det A_{e_3} + \det A_{e_4} = h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{11}^4 h_{22}^4 = 0, \\ \hat{H} &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) e_3 \end{aligned}$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) e_3 - 2e_4 \right)$$

şeklinde bulunabilir. Buradan, M yüzeyinin küresel minimal olmayan izoparametrik olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 6.1'den M yüzeyi kütleli simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahiptir.

Tersine, teoremin varsayımları altında (5.7) denklemi

$$\Delta \tilde{v} = \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + 2\hat{H} \wedge e_1 \wedge e_2 = \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + 2\hat{\alpha} \tilde{v} \quad (6.17)$$

halini alır. M 'nin ortalama eğriliğinin uzunluğu sabit olduğundan $\hat{\alpha}$ bir sabittir. Yardımcı Teorem 6.1 kullanılarak (6.17) denkleminin ikinci Laplasiyeni hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \Delta^2 \tilde{v} &= \Delta(\|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + 2\hat{\alpha} \tilde{v}) \\ &= \Delta(\|\hat{h}\|^2 \tilde{v}) + 2\hat{\alpha} \Delta \tilde{v} \\ &= \Delta(\|\hat{h}\|^2) \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \Delta \tilde{v} - 2 \sum_i e_i(\|\hat{h}\|^2) e_i \tilde{v} + 2\hat{\alpha}(2\hat{\alpha} \tilde{v} + 2\tilde{v}) \\ &= \Delta(\|\hat{h}\|^2) \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \Delta \tilde{v} - 2 \sum_i e_i(\|\hat{h}\|^2) e_i \tilde{v} + (2\hat{\alpha})^2 \tilde{v} + 2(\Delta \tilde{v} - \|\hat{h}\|^2 \tilde{v}) \\ &= \Delta(\|\hat{h}\|^2) \tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \Delta \tilde{v} - 2 \sum_i e_i(\|\hat{h}\|^2) e_i \tilde{v} + (2\hat{\alpha})^2 \tilde{v} + 2\Delta \tilde{v} - 2\|\hat{h}\|^2 \tilde{v} \\ &= (\|\hat{h}\|^2 + 2)\Delta \tilde{v} + (\Delta(\|\hat{h}\|^2) + (2\hat{\alpha})^2 - 2\|\hat{h}\|^2) \tilde{v} - 2 \sum_i e_i(\|\hat{h}\|^2) e_i \tilde{v} \quad (6.18) \end{aligned}$$

elde edilir. Küresel Gauss tasviri 2-tipinden ise

$$\Delta^2 \tilde{v} = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta \tilde{v} + \lambda_1 \lambda_2 \tilde{v} \quad (6.19)$$

denklemini sağlar. (6.18) ile (6.19) karşılaştırılırsa, $\lambda_1 + \lambda_2 = \|\hat{h}\|^2 + 2$, yani $\|\hat{h}\|^2 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2$ olur. $\lambda_1 + \lambda_2$ sabit olduğundan, $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğu görülür. Bu durumda (6.18) denklemi

$$\Delta^2 \tilde{v} = (\|\hat{h}\|^2 + 2) \Delta \tilde{v} + ((2\hat{\alpha})^2 - 2\|\hat{h}\|^2) \tilde{v}$$

şeklini alır. $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğundan (2.15) denkleminde skaler eğrilik sabittir. İki boyutlu alt manifoldlar için Gauss eğriliği skaler eğriliğin yarısı olduğundan Gauss eğriliği de sabittir. M yüzeyi üzerinde normal demetin $e_3, e_4 = x$ şeklinde bir yerel ortonormal bazı seçilebilir. $\det A_{e_4} = 1$ ve M yüzeyinin Gauss eğriliğinin sabit olması e_3 vektörü doğrultusundaki şekil operatörü matrisinin determinantının, yani $h_{11}^3 h_{22}^3$ çarpımının sabit olduğu sonucunu verir. Eğer h_{11}^3 ile h_{22}^3 toplamı ve çarpımı sabit ise h_{11}^3 ve h_{22}^3 sabittir. Diğer bir deyişle M yüzeyi izoparametrik bir yüzeydir. Dolayısıyla, (6.13) Codazzi denklemi sıfıra eşit olur. M , yarı-ombilik olmayan bir hiperyüzey olduğundan (6.13) denkleminin sıfıra eşit olması $\omega_1^2 = -\omega_2^1 = 0$ olduğunu gösterir. Bu taktirde Gauss eğriliği sıfırdır. Yani, $K = h_{11}^3 h_{22}^3 + 1 = 0$ dan $h_{11}^3 = -\frac{1}{h_{22}^3}$ bulunur. $h_{11}^3 = \mu$ dersek, $h_{22}^3 = -\frac{1}{\mu}$ olur. Ayrıca, $e_3, e_4 = x$ normal bazından, M 'nin normal konneksiyonunun düz olduğu açıktır. Yani, $\omega_4^3 = 0$ dır. M yüzeyi için elde edilenler bir arada yazılırsa

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \mu, & h_{22}^3 &= -\frac{1}{\mu}, & h_{12}^3 &= h_{12}^4 = 0, & h_{11}^4 &= h_{22}^4 = -1, \\ \omega_1^2 &= \omega_3^4 = 0, & \omega_1^3 &= \mu \omega^1, & \omega_1^4 &= -\omega^1, & \omega_2^3 &= -\frac{1}{\mu} \omega^2, & \omega_2^4 &= -\omega^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

olduğu görülür. Böylece, M yüzeyinin ω_A^B konneksiyonları (6.20) ile verilen $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$, $a \neq b$, tor yüzeyinin konneksiyonları ile çakışır. Alt manifoldların temel teoreminden, M yüzeyi yerel olarak $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$ tor yüzeyinin açık bir parçasına yerel olarak izometriktir. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] **Chen, B. Y.** (1996). *A Report on Submanifolds of Finite Type*, Soochow Journal of Mathematics, **22**, n. 2, p. 117-337.
- [2] **Arvanitoyeorgos, A., Kaimakamis, G. ve Magid, M.** (2009). *Lorentz Hypersurfaces in E_1^4 Satisfying $\Delta \vec{H} = \alpha \vec{H}$* , Illinois J. Math., **53**, n. 2, p. 581-590.
- [3] **Dursun, U.** (2009). *On Null 2-Type Submanifolds of Euclidean Space*, Int. Electron. J. Geom., **2**, n. 2, p. 20-26.
- [4] **Dursun, U.** (2007). *Hyperurfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map*, Taiwanese Journal of Mathematics, **11**, n. 5, p. 1407-1416.
- [5] **Chen, B. Y. ve Piccini, P.** (1987). *Submanifolds with Finite Type Gauss Map*, Bull. Austral. Mat. Soc., **35**, p. 161-186.
- [6] **Chen, B. Y. ve Lue, H. S.** (2007). *Spherical Submanifolds with Finite Type Spherical Gauss Map*, J. Korean Math. Soc., **44**, n. 2, p. 407-442.
- [7] **Erbacher, J.** (1971). *Reduction of the Codimension of an Isometric Immersion*, J. Differential Geometry, **5**, p. 333-340.
- [8] **Ruh, E.A. ve Wilms, J.** (1970). *The Tension Field of the Gauss Map*, Trans. Amer. Mat. Soc., **149**, p. 569-573.
- [9] **Chen, B. Y.** (1985). *Finite Type Submanifolds and Generalizations*, Quaderni del Seminario di Topologia Algebrica e Differenziale, Univ. di Roma.
- [10] **Chen, B. Y.** (1986). *2-Type Submanifolds and Their Applications*, Chinese J. Math., **14**, n. 1, p. 1-14.
- [11] **Chen, B. Y.** (1973). *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York.
- [12] **Lawson, Jr. H. B.** (1969). *Local Rigidity Theorems for Minimal Hypersurfaces*, Ann. of Math., **89**, p. 187-197.
- [13] **Chen, B. Y.** (1984). *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, World Scientific.
- [14] **Chen, B. Y. ve Li, S.** (1998). *Spherical Hypersurfaces with 2-Type Gauss Map*, Contributions to Algebra and Geometry, **39**, n. 1, p. 169-179.
- [15] **Obata, M.** (1968). *The Gauss Map of Immersions of Riemannian Manifolds in Spaces of Constant Curvature*, J. Differential Geometry, **2**, p. 217-223.
- [16] **Kenmotsu, K.** (1983). *Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-Dimensional Space Forms*, Proc. Amer. Math. Soc., **89**, n. 1, p. 133-138.

- [17] **Chen, B. Y.** (1988). *Null 2-Type Surfaces in E^3 are Circular Cylinders*, Kodai Math. J., **11**, p. 295-299
- [18] **Chen, B. Y.** (1989). *Null 2-Type Surfaces in Euclidean Spaces*, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, p. 1-18
- [19] **Dursun, U.** (2006). *Null 2-Type Submanifolds of the Euclidean Space E^5 with Non-Parallel Mean Curvature Vector*, J. Geom., **86**, n. 1-2, p. 73-80

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Burcu Bektaş

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul / 13.06.1988

Adres: İTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, B1-319,

Maslak - İSTANBUL

E-Mail: bektasbu@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi, 2006 - 2010