

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OPERATÖR DENKLEMLER İÇİN TEMEL ÇÖZÜM VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zafer BEKİRYAZICI

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OPERATÖR DENKLEMLER İÇİN TEMEL ÇÖZÜM VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Zafer BEKİRYAZICI
(509091020)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU

HAZİRAN 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509091020 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Zafer BEKİRYAZICI**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**LİNEER OPERATÖR DENKLEMLER İÇİN TEMEL ÇÖZÜM VE UYGULAMALARI**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Fatma ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **02 Mayıs 2012**
Savunma Tarihi : **04 Haziran 2012**

Başta çok değerli annem olmak üzere aileme ve sevdiklerime ,

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU (İ.T.Ü.) hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Mayıs 2012

Zafer BEKİRYAZICI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xiii
1. OPERATÖR DENKLEMİN TEMEL ÇÖZÜMÜ	1
1.1 Operatör Denklemin Temel Çözümü	1
1.2 Genelleştirilmiş Temel Çözüm	4
1.3 Fredholm Denklemlerinin Bir Sınıfı	7
2. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER ADI DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN TEMEL ÇÖZÜM ...	13
2.1 Problemin Sunulması.....	13
2.2 Eş Problem ve Green Fonksiyoneli	15
2.3 Green ve Cauchy Tipli Fonksiyonlarla Karşılaştırma	26
3. SONUÇLAR.....	33
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ	37

LİNEER OPERATÖR DENKLEMLER İÇİN TEMEL ÇÖZÜM VE UYGULAMALARI

ÖZET

Diferansiyel denklemler teorisinde temel çözüm kavramının önemli bir yeri vardır. Matematik ve matematiksel fizik alanları ve pek çok mühendislik probleminde yaygın kullanımı vardır.

Bu çalışmada lineer operatör denklemler için temel çözüm kavramı incelendi. Birinci bölümde genel formda verilmiş olan operatör denklem için temel çözüm ve genelleştirilmiş temel çözüm kavramları tanımlandı. Bu çözümlerin varlığı için gerekli olan koşullar elde edildi. Sağ düzenleyici operatöre sahip olan Fredholm tipli bir problem sınıfı için temel ve genelleştirilmiş temel çözümler incelendi. Bu çözümlerin varlığı için gerekli koşullar araştırıldı. Böyle bir denklemin temel çözümünün var olması için ancak ve ancak bu denkleme karşı gelen homojen denklemin sadece sıfır çözüme sahip olması gerektiği ispatlandı. Ek olarak eğer bu denklem temel çözüme sahip değil ise daima genelleştirilmiş çözüme sahiptir. Bu durumda genelleştirilmiş temel çözümün ve bu çözümün nasıl olacağı incelendi.

İkinci bölümde birinci bölümde verilmiş metoda uygun olarak bir problem ele alındı. Bu problemin denklemi ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan denklem ve diğer iki sınır koşulu da tanım aralığının içinde bilinmeyen fonksiyon değerlerini de içeren koşullardır. Katsayılar ve sağ taraf fonksiyonu sadece $L_p(G)$ den olan yani p -inci mertebeden integrallenebilir ve bazı sınırlılık koşullarını sağlıyorlar. Sınır koşulları ise ara noktalarda değerleri içermektedir. Bu problem için önce eş problem tanımlandı. Bu eş problem bir integro-cebirselsel denklem sistemi olarak elde edildi. Bu sistem $f = (f_2(\zeta, x), f_1, f_0) \in E_q$ bilinmeyen fonksiyoneline göre bir tanesi integral denklem diğer iki tanesi cebirselsel denklemden oluşmaktadır. Integral denklem $f_2(\zeta, x)$ elemanını bilinmeyen fonksiyon olarak içerir. Diğer iki elemanı ise parametre olarak içerir. Diğer iki tanesi ise f_1, f_0 bilinmeyenlerine göre cebirselsel denklemlerdir. Bu cebirselsel denklemler $f_2(\zeta, x)$ elemanını fonksiyonel olarak içerebilirler. Cebirselsel denklemler çözülüp integral denklemde yerleştirildiğinde tamamı ile $f_2(\zeta, x)$ bilinmeyenine bağlı bir ikinci çeşit integral denklem elde edilir. Bu integral denklemin çözülebilme koşulları incelenerek Green ya da genelleştirilmiş Green fonksiyoneli elde edilebileceği gösterildi. Dolayısı ile bunlar yardımı ile problemin çözümünün elde edilebileceği gösterildi.

Daha sonra başlangıç ve sınır değer problemleri ele alınarak bunlar için eş sistem oluşturuldu. Bu eş sistemlerin özel halde klasik yöntemler ile Cauchy ve Green fonksiyonlarının oluşturulması problemlerine denk olduğu gösterildi. Temel çözümün bu şekilde oluşturulması klasik metotlardan hem farklı hem de daha önemlidir. Bu metod kullanılarak klasik yada fonksiyel analiz metotlarının yetersiz olduğu pek çok problem sınıfı araştırılabilir. Ayrıca lineer olmayan problemlerin çözümleri bu metod aracılığı ile nonlinear integral denklemlerinin çözümlerine indirgenebilir. Sayısal metodlar yardımı ile çözümler elde edilebilir.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF LINEAR OPERATOR EQUATIONS AND APPLICATIONS

SUMMARY

The fundamental solution has an important place in the theory of differential equations. It is widely used in the fields of mathematics, mathematical physics and many engineering problems.

In this study, the fundamental solution for linear operator equations concept is examined. In the first part, fundamental solution and generalized fundamental solution concepts for solutions of operator equations given in general form are defined. The conditions for the existence of these solutions are obtained. For a Fredholm type problem class with right regulator operator, fundamental and generalized fundamental solutions are examined. The conditions for the existence of these solutions are investigated. It is proved that the fundamental solution for such an equation exists if and only if the corresponding homogenous equation for this equation has only the trivial solution. Additionally if this equation does not have a fundamental solution, then it always has a generalized solution. In this situation, how the solution and the generalized fundamental solution would be is investigated.

In the second part , a problem is dealt with according to the method given in the first part. The equation of this problem is a nonlinear homogenous equation of the second order with linear variable coefficients and other two boundary conditions are the conditions that involve unknown function values in the range. Coefficients and the right-hand function are only of $L_p(G)$, i.e. are integrable of the p -th degree, and provide some conditions of boundedness. Boundary conditions involve values on the intermediate points. First, the adjoint problem is defined for this problem. The adjoint problem is obtained as a system of integro-algebraic equations. This system consists of an integral equation and the algebraic equations according to the unknown functional $f = (f_2(\zeta, x), f_1, f_0) \in E_q$. The integral equation involves the $f_2(\zeta, x)$ element as an unknown function. It involves the other two elements as parameters. The other two are algebraic equations according to the f_1, f_0 unknowns. These algebraic equations may involve the $f_2(\zeta, x)$ element as a functional. Once the algebraic equations are solved and replaced in the integral equation, a second type of integral equation completely according to the $f_2(\zeta, x)$ unknown is obtained. By examining the solvability conditions, it is shown that Green or generalized Green functionals can be obtained. It is shown that the solution of the problem can be obtained by the help of these.

Later, the initial and boundary conditions are handled and an adjoint system for these are generated. It is shown that these systems are equivalent to the problems of obtaining Cauchy and Green functionals in special cases with classical methods. Construction of the fundamental equation with this way is more important and different than the classical methods. Most problem classes where classical and

functional analysis methods are incapable can be researched with this method. Also, solution of nonlinear problems can be reduced to solution of nonlinear integral equations with this method. Solutions can be obtained with the help of numerical methods.

Fundamental solutions of differential operators with constant coefficients and sufficiently smooth coefficients have been examined with the use of generalized functions methods and some other methods in detail. A new fundamental solution concept has been defined by S.S. Akhiev for some linear operator equations in a Banach space of smooth functions in his study titled "Representations of the solutions of some linear operator equations". Some important applications of this concept on local and nonlocal problems with coefficients which are generally not smooth have been given on S.S Akhiev's studies "Representations of the solutions of some linear operator equations", "Green and Generalized Green's Functionals of Linear Local and Nonlocal problems for Ordinary Integro-differential Equations" and S.S. Akhiev and Oruçoğlu K.'s study "Fundamental solutions of some linear operator equations and applications". This concept is generally independent from known fundamental solution concepts. Generally it is associated with the operator of the given problem. The first chapter consists of three parts, in the first part fundamental concept for linear operator equations is defined, in the second part generalized fundamental solution concept for linear operator equations is defined and in the third part, the fundamental solution and generalized fundamental solution concepts are examined for a Fredholm type class of operator equations with right regulator and homeomorphism in between. It is proved in the first chapter that such an equation would have a fundamental solution if and only if its homogeneous equation would have a trivial solution. It is also underlined in the first chapter that if such an equation does not have a fundamental solution then it always has a generalized fundamental solution.

Here the fundamental solution and the generalized fundamental solution are defined as the special solutions of the corresponding adjoint operator equation. The adjoint operator equation defined here is different from formal adjoint differential operator and the given traditional adjoint concept. The structural and other properties of such an adjoint problem depends on the operator of the problem and some structural properties of the solution space. The fundamental solutions which has been defined can be used in producing numerical or approximate solution algorithms changing nonlinear problems to nonlinear integral equations, as it can be seen on Ma R.'s study "Existence theorems for a second order m -point boundary value problem", Karakostas G.L. and Tsamatos P.Ch.'s study "Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem" and Collatz L.'s study "The numerical Treatment of Differential Equations".

The second chapter consists of three parts, in the first part a linear differential equation of the second degree with variable coefficients and boundary conditions that involve values on intermediate points is handled as an application of the fundamental solution that was given in the previous chapter. This problem is examined by using the method given in the previous chapter. The main difficulties that were experienced with this problem that made it harder for the fundamental solution was that it had variable coefficients and it was given with boundary conditions that included values on the intermediate points. The adjoint equation may not be found in this situation if classical methods are used. Therefore the fundamental solution or the generalized fundamental solution may not be found.

In this study, fundamental solution concept for general linear operator equations is discussed. Later, the adjoint problem is created for a linear equation with variable coefficients and intermediate points conditions. The definition of Green functional is given with the help of this adjoint problem. Lastly, it is shown that by assuming the coefficients of the problem has sufficient derivatives, classical problems can be obtained. For this, it is shown that Green function can be obtained by handling a linear equation of the second degree that has variable coefficients with simple boundary conditions and that Cauchy function can be obtained by handling a linear equation of the second degree that has variable coefficients with simple initial conditions.

In this method it is sufficient for the operator coefficients to be integrable. Moreover, the boundary conditions do not need to be local and homogeneous. The entire problem is viewed as non-homogeneous problem. Conditions can be handled as non-local multi-point conditions.

The handled adjoint equation or adjoint system is, unlike the known methods, utmost an integro-algebraic system. This gives us the opportunity to get some important information on the existence and uniqueness of the solution.

Moreover, nonlocal (nonlinear) boundary value problems can be transformed into nonlocal integral equations with this method. These integral equations can be solved numerically under some specific conditions.

1. OPERATÖR DENKLEMİN TEMEL ÇÖZÜMÜ

Yeterince düzgün katsayılı veya sabit katsayılı diferansiyel operatörlerin temel çözümleri klasik ve genelleştirilmiş fonksiyon metodları veya diğer başka metodlar ile ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir [1-6,13,14]. Düzgün fonksiyonlardan oluşan Banach uzayında bazı lineer operator denklemler için [7] de verilen çalışma ile S. S. Akhieiev tarafından yeni bir temel çözüm kavramı tanımlandı. Bu kavramın genelde düzgün olmayan katsayılarla sahip yerel ve yerel olmayan problemler için bazı önemli uygulamaları [7-9] çalışmaları ile verildi. Bu kavram bilinen temel çözüm kavramlarından genelde bağımsız olan bir kavramdır. Genelde verilen problemin operatörü ile ilişkilidir. Bu bölümde lineer operatör denklemler için temel çözüm ve genelleştirilmiş temel çözüm tanımlanacaktır. Temel ve genelleştirilmiş temel çözüm kavramları aralarında homeomorfizm olan sağ düzenleyiciye sahip Fredholm tipli bir sınıf operatör denklemler için de incelenecektir. Burada eğer böyle bir denklemin homojen çözümü ancak ve ancak sıfır çözüme sahip ise temel çözüme sahip olacağı ispatlandı. Eğer böyle bir denklemin temel çözümü yoksa daima genelleştirilmiş temel çözüme sahiptir. Burada temel ve genelleştirilmiş temel çözümler karşı gelen eş operatör denklemin özel çözümleri olarak tanımlandı. Burada tanımlanan eş operatör denklem formal eş diferansiyel operatör ile verilen geleneksel eş kavramından farklıdır. Böyle bir eş problemin yapısal ve diğer özellikleri verilen problemin operatörüne ve çözüm uzayının yapısal bazı özelliklerine bağlıdır. Tanımlanan bu temel çözümler lineer olmayan problemleri lineer olmayan integral denklemlere getirerek yaklaşık ya da nümerik çözüm algoritmaları vermede de kullanılabilir [17-19].

1.1 Operatör Denklemin Temel Çözümü

n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayda G açık bir bölge olsun. Bu uzayda $x \in \mathbb{R}$ noktası $x = (x_1, \dots, x_n)$ şeklindedir. $\bar{G}$ bölgesi G 'nin kapanışı olsun ve $C(\bar{G})$ ile sürekli fonksiyonların uzayı gösterilsin. $W = W(G)$ de $u = u(x)$ fonksiyonunun Banach uzayı olsun. Bu çalışma boyunca $W \subseteq C(\bar{G})$ olduğu varsayılacaktır. W 'nin $C(\bar{G})$

içine daldırılması sınırlıdır. V ile W uzayından E uzayına lineer bir operatör gösterilsin ve E^* eş uzayından W^* eş uzayına V^* eş operatörünün var olduğu varsayalım.

$$Vu = z \quad (1.1.1)$$

operatör denklemini ve bu denklemin

$$V^*f = \varphi \quad (1.1.2)$$

eş denklemini göz önüne alalım. Burada $z \in E$ ve $\varphi \in W^*$ bilinen elemanlardır.

$$\theta(x)(u) = u(x), \quad \forall u \in W \quad (1.1.3)$$

fonksiyoneli tanımlansın. $x \in \bar{G}$ ise bir parametre olarak göz önüne alınmalıdır. Sabit $x \in \bar{G}$ elemanı için fonksiyonel W üzerinde bir Dirac fonksiyoneli olarak düşünülebilir. W 'nın $C(\bar{G})$ içine daldırılışı sınırlı olacağından

$$|\theta(x)(u)| = |u(x)| < \|u\|_{C(\bar{G})} < \alpha_0 \|u\|_W \quad (1.1.4)$$

olacak şekilde pozitif α_0 sabiti vardır.

Burada $\theta(x)$, W üzerinde sınırlı bir fonksiyonel olur. Yani $\forall x \in \bar{G}$ için $\theta(x) \in W^*$ dir. Bu yüzden

$$V^*f = \theta(x) \quad (1.1.5)$$

denklemini $x \in \bar{G}$ bir parametre olmak üzere

$$V^*f = \varphi$$

denkleminin $\varphi = \theta(x)$ olduğu özel bir duruma karşılık gelir.

Tanım 1.1: $f = f(x): \bar{G} \rightarrow E^*$ den E^* içine $V^*f = \theta(x)$ denkleminin keyfi $x \in \bar{G}$ için çözümü olan bir fonksiyon olsun. O zaman bu fonksiyona $Vu = z$ denkleminin ya da V operatörünün temel çözümü denir.

Keyfi bir $x \in \bar{G}$ parametresi için en azından bir $f = f(x)$ temel çözümün varlığı $Vu = z$ denkleminin en az bir $f = f(x)$ çözümünün varlığına eşdeğerdir. $\bar{G}$ den E^* içine $f = f(x)$ tasviri ancak ve ancak her bir $x \in \bar{G}$ için

$$(V^*f(x))(u) = u(x), \quad \forall u \in W \quad (1.1.5^*)$$

ise bir temel çözümdür.

Teorem 1.1: En azından bir $f = f(x)$ temel çözümü var olsun. O zaman $Vu = z$ denkleminin keyfi bir $u \in W$ çözümü

$$u(x) = f(x)(z), \quad x \in \bar{G} \quad (1.1.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Ayrıca $Vu = 0$ homojen denklemi yalnızca trivial yani sıfır çözüme sahip olur.

İspat: Eş operator V^* olduğundan

$$f(Vu) = (V^*f)(u), \quad (1.1.7)$$

$$\forall f \in E^*, \forall u \in W$$

yazılabilir. (1.1.7) denklemi içinde u ve f 'yi sırası ile $Vu = z$ ve $V^*f = \theta(x)$ denklemlerinin çözümleri olarak seçersek

$$f(x)(z) = \theta(x)(u) \quad (1.1.8)$$

denklemini elde ederiz. $\theta(x)(u) = u(x)$, $\forall u \in W$ denkleminde $u(x) = f(x)(z)$, $x \in \bar{G}$ elde edilir. $Vu = 0$ denkleminin çözümünün tekliği (1.1.6) nın basit bir sonucudur. ■

Bu teorem temel çözümün varlığının gereklilik koşulu olarak V operatörünün V_l^{-1} sol ters operatörünün var olmasını gösterir. Yeterlilik koşulunun varlığı için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 1.2: V lineer sınırlı operatör olsun. Eğer V sınırlı sol ters V_l^{-1} operatörüne sahip ise, o zaman en azından bir temel çözüm vardır. Eğer E üzerinde tanımlı bir V^{-1} sınırlı ters operatör varsa o zaman temel çözüm taktır.

İspat: V_l^{-1} var ve sınırlı olduğu için V^* 'ın imajı W^* eşit olacaktır. Yani $Im V = W^*$. Bu yüzden $V^*f = \theta(x)$ denklemi en azından keyfi bir $x \in \bar{G}$ için $f = f(x) \in E^*$ çözümüne sahiptir. Eğer V^{-1} (E üzerinde tanımlı) var ise o zaman W^* üzerinde V^* operatörü sınırlı bir ters operatöre sahip olur. Bu sebeple $V^*f = \theta(x)$ denkleminin $f = f(x)$ çözümü var ve taktır. ■

1.2 Genelleştirilmiş Temel Çözüm

V lineer sınırlı operatör olsun ve V operatörünün çekirdeği sıfırdan farklı yani $\text{Ker} V \neq \{0\}$ olsun. Teorem 1.1'e göre bu durumda temel çözüm yoktur. Operatörün çekirdeği yani sıfır uzayı sıfırdan farklı (sonlu ya da sonsuz olabilir) boş değil ise genelleştirilmiş temel çözüm kavramından yararlanılır. P_0 operatörü W uzayından kendisine lineer sınırlı bir operatör olsun. $P_0^2 = P_0$ ve $\text{Im } P_0 = W_0$ ve $W_0 = \text{Ker } V$ olsun. P_0 , W üzerinde bir izdüşüm (Projeksiyon) operatörü olduğu için $P_1 = I - P_0$ operatörü de W üzerinde bir izdüşüm operatörü ve $W = W_0 \oplus W_1$ şeklinde bir direkt toplam olarak yazılabilir. I özdeşlik operatörü ve $W_1 = \text{Im } P_1$ dir.

Bu yüzden her bir $u \in W$ elemanı

$$u = P_0 u + P_1 u \quad (1.2.1)$$

şeklinde tek olarak gösterilebilir.

$$\theta_1(x)(u) = (P_1 u)(x), \quad \forall u \in W \quad (1.2.2)$$

fonksiyoneli tanımlansın. Burada $x \in \bar{G}$ bir parametredir. P_1 , W üzerinde sınırlı bir operatör olduğu için

$$\begin{aligned} |\theta_1(x)(u)| &= |(P_1 u)(x)| \\ &\leq \|P_1 u\|_{C(\bar{G})} \\ &\leq \alpha_0 \|P_1 u\|_W \\ &\leq \alpha_0 \|P_1\| \cdot \|u\|_W, \\ &\forall u \in W \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

dır. Bu yüzden her $x \in \bar{G}$ için $\theta_1(x)$, W üzerinde lineer sınırlı bir fonksiyoneldir. Yani $x \in \bar{G}$ olduğundan $\theta_1(x) \in W^*$ olur. O zaman

$$V^* f = \theta_1(x) \quad (1.2.4)$$

$\varphi = \theta_1(x)$ denkleminin özel hali olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 1.2: Keyfi bir $x \in \bar{G}$ için

$$f = F(x) \in E^*$$

denkleminin çözümü olsun. O zaman bu çözüme V operatörünün veya $Vu = z$ denkleminin genelleştirilmiş çözümü denir.

Teorem 1.2.1: $f = F(x)$ şeklinde en az bir genelleştirilmiş çözüm olsun, o zaman $Vu = z$ denkleminin keyfi bir $u \in W$ çözümü

$$u(x) = F(x)(z) + (P_0u)(x), \quad x \in \bar{G} \quad (1.2.5)$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $u \in W$, $Vu = z$ denkleminin çözümü olsun. u ve fonksiyonel f sırası ile $f(Vu) = (V^*f)(u), \forall f \in E^*, \forall u \in W$ ifadesinde $Vu = z$ denklemi ve $V^*f = \theta_1(x)$ denkleminin çözümleri olarak alınır ise o zaman

$$F(x)(z) = \theta_1(x)(u) = (P_1u)(x), \quad x \in \bar{G}$$

veya

$$u(x) - (P_0u)(x) = F(x)(z), \quad x \in \bar{G}$$

elde edilir. ■

$u(x) = F(x)(z) + (P_0u)(x)$, $x \in \bar{G}$ denkleminin sağ tarafındaki $u_1(x) = F(x)(z)$ ve $u_0(x) = (P_0u)(x)$ fonksiyonları sırası ile $Vu = z$ denkleminin özel çözümü ve $Vu = 0$ homojen denkleminin çözümleridirler. Ek olarak $u_1(x)$ fonksiyonu $W \setminus W_0$ factor uzayına izomorfik olan W_1 uzayı üzerindeki $u(x)$ çözümünün izdüşümüdür. Bu durumda V nin faktörize operatörü V_0 , V operatörünün W_1 uzayı üzerinde bir kısıtlamasıdır. Bu yüzden

$$(V^*f)(u) = f(Vu) = f(VP_1u) = f(V_0P_1u) = (V_0^*f)(P_1u), \quad \forall u \in W.$$

$V^*f = \theta_1(x)$ denklemi

$(V^*f)(u) = \theta_1(x)(u), \forall u \in W$ ya da $(V_0^*f)(v) = v(x)$ olarak da yazılabilir. Burada $v = P_1u \in W_1$ keyfi bir fonksiyondur.

Bu ve $(V^*f(x))(u) = u(x), \forall u \in W$ denkleminde V 'nin genelleştirilmiş temel çözümünün V 'nin faktörize operatörü V_0 'ın temel çözümü olarak da tanımlanabileceği görülebilir.

Teorem 1.2.2: Eğer $Im V$, E uzayı içinde kapalı ise o zaman en az bir temel çözümü vardır.

İspat: Eğer $Im V$ kapalı ise, o zaman Teorem 3* [10: s.359], $Im V^*$, *annihilator* $(Ker V)^\perp$ ye eşit olur (V 'nin çekirdeği yani $Ker V$). Buradan $Im V^* = (Ker V)^\perp$ 'dir. $\theta_1(x) \in (Ker V)^\perp$ olduğu gösterilecektir. $u \in Ker V$ olsun.

O zaman $P_0 u = u$ ve $P_1 u = 0 \Rightarrow \theta_1(x)(u) = (P_1 u)(x) = 0$. Bu da $\theta_1(x) \in (Ker V)^\perp$ (her $x \in G$ için) olduğunu gösterir. Bu yüzden $V^* f = \theta_1(x)$ denklemi için en az bir $f = F(x) \in E^*$ çözümüne sahiptir. ■

$E_0 = Im V \subset E_1$ olacak şekilde E_1 bir Banach uzayı olsun. V operatörü W dan E uzayına olduğu gibi W den E_1 e bir operatör (tasvir) olarak düşünölsün. Verilen $\varphi \in W^*$ için $V^* f = \varphi$ ve $V_1^* f_1 = \varphi$ şeklinde sırası ile $f \in E^*$ ve $f_1 \in E_1^*$ çözümleri olur. O takdirde

$$f(Vu) = f_1(V_1 u) = f_1(Vu) = \varphi(u), \quad \forall u \in W$$

ya da $f(z) = f_1(z), \forall z \in E_0$ olur. Böylece $f|_{E_0}$ ve $f_1|_{E_0}$ sınırlamaları E_0 üzerinde f ve f_1 'in aynı fonksiyoneller olurlar. Bu da her $x \in \bar{G}$ için $f(x)|_{E_0}$ ve $F(x)|_{E_0}$ sırası ile $f(x)$ temel çözümünün ve $F(x)$ genelleştirilmiş genel çözümün E Banach uzayına göre değişmez (invariant) olduğunu gösterir. Bu yüzden bu sınırlamalar ve

$$u(x) = f(x)(z), \quad x \in \bar{G} \text{ ve } u(x) = F(x)(z) + (P_0 u)(x), \quad x \in \bar{G}$$

denklemlerinin sağ tarafları sadece W üzerinde V 'ye bağlıdır (ya da W üzerinde $Im V$). Sadece $f(x)|_{E_2}$ ve $F(x)|_{E_2}$ sınırlaması E uzayına bağlıdır. Burada $E_2 = E \setminus E_0$ dır. Burada önemli olan Tanımlar 1.1 ve 2.1'de verilen E uzayını herhangi bir E Banach uzayı olarak seçmek önemlidir. Çünkü her zaman E_0 'ı önceden belirleyemeyiz. Sırası ile $f(x)$ ve $F(x)$ 'in bu şekilde sınırlamaları

$$u(x) = f(x)(z), \quad x \in \bar{G} \text{ ve } u(x) = F(x)(z) + (P_0 u)(x), \quad x \in \bar{G}$$

denklemlerini etkilemezler. Uygulamalarda doğal olarak göz önüne alınan probleme göre W ve E uzayları mümkün olabildiğince uygun olarak seçilebilmelidir.

$G \subset R^n$ bölgesi $\Gamma = \partial G$ sınırına sahip açık bir bölge olsun. V^0 , G üzerinde tanımlı fonksiyonların $W = W(G)$ Banach uzayından $E^0 = E^0(G)$ Banach uzayına lineer diferansiyel operatör olsun. $\bar{\Gamma}_k, \Omega_k = \partial \bar{\Gamma}_k$ sınırı ile Γ üzerinde kapalı bir yüzey (ya da eğri) olsun. $\Gamma_k = \bar{\Gamma}_k \setminus \Omega_k$; $E_k = E_k(\Gamma_k)$, Γ_k üzerinde tanımlı fonksiyonların Banach uzayı ($k = 1, 2, \dots, m_1$), ve $E_k = R, k = m_1 + 1, \dots, m$, m_1 ve m verilmiş tamsayılar;

$0 \leq m_1 \leq m$: V_k, W den E_k 'ya lineer bir operatör. Formel olarak yerel ya da yerel olmayan bir problem

$$V^0 u = z^0 \quad (1.2.6)$$

$$V_k u = z_k, k = 1, \dots, m \quad (1.2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Bu problem $V = (V^0, V_1, \dots, V_m)$ ve $z = (z^0, z_1, \dots, z_m)$ olmak üzere

$$Vu = z \quad (1.2.8)$$

şeklinde operatör formda yazılabilir. Eğer

$$V^0 u = z^0 - V_k u = z_k, k = 1, \dots, m$$

probleminin operatörü V, W ve $E = E^0 \times E_1 \times \dots \times E_m$ uzayları arasında bir homeomorfizma oluşturuyor ise Teorem 1.1.2'ye göre bu problem tek bir

$$f(x) = (f^0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)) \in E^*, x \in \bar{G},$$

temel çözümüne sahiptir. Üstelik

$$u(x) = f^0(x)(z^0) + \sum_{k=1}^m f_k(x)(z_k), x \in \bar{G}.$$

Böylece $f(x)$ 'in ilk elemanı olan $f^0(x) \in (E^0)^*$ fonksiyoneli ($n = 1$ olduğunda) Cauchy, Green ve Riemann fonksiyonlarının bir soyut biçimi (varyantı) gibi düşünülebilir.

$$V^0 u = z^0 - V_k u = z_k, k = 1, \dots, m$$

probleminin genelleştirilmiş çözümü

$$F(x) = (F^0(x), F_1(x), \dots, F_m(x)) \in E^*, x \in \bar{G},$$

ilk elemanı olan $F^0(x) \in (E^0)^*$ adi ve eliptik diferansiyel denklemlerin Green fonksiyonlarına bir analogisi olarak düşünülebilir.

1.3 Fredholm Denklemlerinin Bir Sınıfı

$Vu = z$ denklemi E 'den W üzerine lineer homeomorfizma oluşturan sağ düzenleyici N operatörüne sahip olsun [5; s.52]. $u = Ng$ dönüşümü kullanılsa $Vu = z$ denklemi

$(I + Q)g = z$ şeklinde E içinde kanonik Fredholm denklemine indirgenebilir. Burada $Q = VN - I$, E' 'den E' 'ye kompakt bir operatördür. Bu durumda ImV ve ImV^* sırası ile E ve W^* içinde kapalıdır. O zaman Teoremler 3 ve 3* [10; s.359]'dan

$$\begin{aligned} ImV^* &= (KerV)^\perp \quad \text{ve} \\ ImV &= (KerV^*)^\perp \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

yazılabilir. Diğer yandan sırası ile $Vu = 0$ ve $V^*f = 0$ denklemleri $(I + Q)g = 0$ ve $(I + Q^*)f = 0$ denklemlerine eşdeğerdir. Üstelik $Vu = 0$ ve $(I + Q)g = 0$ denklemlerinin çözümleri $g = N^{-1}u$ ile bağlıdır. Bu yüzden $dimKer(I + Q) = dimKer(I + Q^*) < \infty$ 'dur. Buradan $KerV$ ve $KerV^*$ aynı sonlu boyuta sahiptir. $ImV^* = (KerV)^\perp$ ve $ImV = (KerV^*)^\perp$ koşulları ile aşağıdaki Fredholm alternatifleri geçerlidir.

Teorem 1.3.1: $ImV^* = (KerV)^\perp$ ve $ImV = (KerV^*)^\perp$ denklemi sağ düzenleyicisi bir N operatörüne sahip olsun. Bu E Banach uzayından W üzerine bir lineer homomorfizmadır. O zaman $Vu = 0$ homojen denklemi ya da sıfır çözüme ya da W içinde sonlu sayıda lineer bağımsız çözüme sahiptir.

- i) W içinde $Vu = 0$ homojen denklemi sadece trivial çözüme sahip ise o zaman $V^*f = 0$ homojen denklemi de sadece E^* içinde trivial çözüme sahip olur. Bu durumda $Vu = z$ ve $V^*f = \varphi$ denklemleri sırası ile keyfî $z \in E$ ve $\varphi \in W^*$ elemanları için $u \in W$ ve $f \in E^*$ tek çözümlerine sahiptirler.
- ii) Eğer $Vu = 0$ homojen denklemi W içinde $u_1, \dots, u_m$ şeklinde sonlu sayıda lineer bağımsız çözüme sahip ise o zaman $V^*f = 0$ homojen denkleminde $f_1, f_2, \dots, f_m$ şeklinde E^* içinde sonlu sayıda lineer bağımsız çözüme sahip olur. Bu durumda sırası ile ilk verilmiş herhangi bir $z \in E$ ve $\varphi \in W^*$ elemanları için $Vu = z$ ve $V^*f = \varphi$ denklemleri ancak ve ancak

$$f_i(z) = 0, i = 1, \dots, m \quad (1.3.2)$$

$$\varphi(u_i) = 0, i = 1, \dots, m \quad (1.3.3)$$

koşullarını sağlarlar ise $u \in W$ ve $f \in E^*$ çözümlerine sahiptirler.

Teorem 1.3.1 Fredholm alternatiflerinin geçerli olduğu yeni kısmı ya da adi diferansiyel denklemler sınıflarını bulmak için kullanılabilir. Teorem 1.3.1'in koşulları altında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.3.2: Eğer $f = f(x)$ şeklinde en azından bir temel çözüm varsa, o zaman bu çözüm tektir. Eğer varsa temel bir çözüm ancak ve ancak $Vu = 0$ homojen denklemini sadece trivial (sıfır) çözüme sahip olur.

İspat: En azından bir temel çözüm olsun. O zaman Teorem 1.1' den $Vu = 0$ homojen denklemini sadece sıfır çözüme sahip olur ve bu yüzden keyfi $\varphi \in W^*$ elemanı için Teorem 1.3.1' den $V^*f = \varphi$ eş denklemi $f \in E^*$ tek çözümüne sahip olur. Bu sebeple $V^*f = \theta(x)$ denklemi $\forall x \in \bar{G}$ için $f = f(x) \in E^*$ tek çözümüne sahiptir. Bu yüzden temel çözüm tektir. İspatın ikinci kısmı Teorem 1.3.1'in basit bir sonucudur. ■

Teorem 1.3.1'in koşullarını sağlayan $Vu = z$ denklemi için genelleştirilmiş temel çözümünde yararlanılacak olan P_0 operatörünü oluşturalım. Böyle bir P_0 operatörünü oluşturmak için (E, E^*) dual çifti göz önüne alınabilir. Eğer $Ker V, m \geq 1$ sonlu boyutlu ise o zaman

$$g_1 = N^{-1}u_1, g_2 = N^{-1}u_2, \dots, g_m = N^{-1}u_m$$

E' de lineer bağımsızdırlar. Burada $u_1, u_2, \dots, u_m$ 'ler W içinde $Vu = 0$ homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Bu yüzden E^* içinde

$$\begin{aligned} F_k(N^{-1}u_i) &= \delta_{k,i} \\ &= \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

olacak şekilde $F_1, F_2, \dots, F_m$ olacak şekilde bi ortogonal fonksiyonlar sistemi vardır. [10,11]

W üzerinde

$$\begin{aligned} (P_0u)(x) &= \sum_{k=1}^m u_k(x) F_k(N^{-1}u) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

operatörü tanımlansın.

$$\|P_0 u\|_W \leq [\|N^{-1}\| \sum_{k=1}^m \|F_k\| \cdot \|u_k\|_W] \cdot \|u\|_W$$

olduğu için P_0 sınırlıdır. Eğer $u \in W_0 = \text{Ker} V$ ise o zaman

$$u = c_1 u_1 + \cdots c_m u_m, \quad c_k = \text{sabit},$$

ve

$$F_k(N^{-1}u_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}, \quad (P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m u_k(x) F_k(N^{-1}u)$$

denklemleri yardımı ile

$$(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m u_k(x) \sum_{i=1}^m c_i F_k(N^{-1}u_i) = \sum_{k=1}^m c_k \cdot u_k(x) = u(x)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak $P_0 u = u$ olur. Bu durumda $u \in W_0$ 'dır. Diğer yandan eğer $u \in W$ ise o zaman

$$(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k(x)$$

olur. Burada $\alpha_k = F_k(N^{-1}u)$, u üzerinde bağımlı sabitlerdir. Bu yüzden her $u \in W$ için $P_0 u \in W_0$ 'dır. Bu da $P_0^2 = P_0$ ve $\text{Im } P_0 = W_0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak yukarıda P_0 üzerine yüklenen koşullar $(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m u_k(x) F_k(N^{-1}u)$ operatörü için gerçekleşir. $V^* f = \theta_1(x)$ denkleminde $\theta_1(x)$ olarak tanımlanmış olan genelleştirilmiş temel çözüm

$$\theta_1(x)(u) = u(x) - \sum_{k=1}^m u_k(x) F_k(N^{-1}u), \quad \forall u \in W \quad (1.3.6)$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 1.3.3: Teorem 1.3.1'in koşulları sağlatılsın. O zaman genelleştirilmiş $f = F(x)$ çözümü daima vardır. Bu durumda $u \in W$ şeklinde $Vu = z$ denkleminin çözümü verilen z için $f_i(z) = 0$, $i = 1, \dots, m$ koşulları sağlamak koşulu ile

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k(x) + F(x)(z), \quad x \in \bar{G} \quad (1.3.7)$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $\theta_1(x)(u) = u(x) - \sum_{k=1}^m u_k(x)F_k(N^{-1}u)$, $\forall u \in W$ denklemi ile verilen $\theta_1(x)$ fonksiyoneli $\forall x \in \bar{G}$ için W üzerinde sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \theta_1(x)(u_i) &= u_i(x) - \sum_{k=1}^m u_k(x)F_k(N^{-1}u_i) = u_i(x) - u_i(x) = 0, \\ i &= 1, \dots, m, x \in \bar{G} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzden $\theta_1(x)$ için $\varphi_i(z) = 0$, $i = 1, \dots, m$ koşulları gerçekleşir. Bu da $V^*f = \theta_1(x)$ denkleminin keyfi $x \in \bar{G}$ için en az bir $f = F(x) \in E^*$ çözümünün (Teorem 1.3.1) olduğunu gösterir. $u(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k + F(x)(z)$ gösterilimi $(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m u_k(x)F_k(N^{-1}u)$ yardımı ile $u(x) = F(x)(z) + (P_0 u)(x)$, $x \in \bar{G}$ denkleminde kolayca elde edilebilir.

Teorem 1.3.3, Teorem 1.2.2'nin bir sonucu olarak da elde edilebilir.

Genelde

$$(V^*f(x))(u) = \varphi(u), \quad \forall u \in W$$

eş denklemi ya da

$$f(Vu) = \varphi(u), \quad \forall u \in W$$

denklemi W uzayından olan keyfi u fonksiyonlarını içeren fonksiyonel denklemlerdir. Böyle eş denklemleri incelemek için verilmiş olan bir metodun [8,12] çok noktalı sınır koşullara sahip ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem ile verilen bir probleme uygulaması izleyen bölümde verildi. Bu metodun ana fikri çözüm uzayı ve onun eş uzayının izomorfik ayrışımalarını kullanmak ile ilişkilidir. Bu tür problemlerin eş denklemleri integro-cebirselsel yada cebirselsel denklem sistemleri olarak elde edilirler. Temel ve genelleştirilmiş temel çözümler bu sistemlerin özel çözümleri olarak elde edilirler.

2. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER ADI DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN TEMEL ÇÖZÜM

Bu bölümde önceki bölümlerde açıklanan temel çözümün bir uygulaması olarak değişken katsayılı lineer ikinci mertebeden diferansiyel denklem ve ara noktada değerleri barındıran sınır koşulları ile verilmiş bir problem ele alındı. Bu problem bir önceki bölümde verilmiş olan metod kullanılarak incelendi. Bu problemde temel çözümün bulunması sırasında temel zorluklar denklemin genelde düzgün olmayan değişken katsayılarla sahip olması ve sınır koşullarının ara noktada değerler ile birlikte verilmiş olmasıdır. Klasik metotlar kullanılır ise eş denklem bu durumda elde edilmeyebilir. Dolayısı ile temel yada genelleştirilmiş temel çözüm bulunamayabilir.

2.1 Problemin Sunulması

Değişken katsayılarla sahip lineer ikinci mertebeden

$$(V_2 u)(x) \equiv u''(x) + A_1(x)u'(x) + A_0(x)u(x) = z_2(x), \quad (2.1.1)$$
$$x \in G = (0,1)$$

diferansiyel denklemi ve

$$V_0 u = \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(\gamma_1) + \alpha_3 u(1) = z_0 \quad (2.1.2)$$

$$V_1 u = \beta_1 u(0) + \beta_2 u'(\gamma_2) + \beta_3 u(1) = z_1 \quad (2.1.3)$$

sınır koşulları ile verilmiş olan problem ele alındı. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ herhangi verilmiş reel sayılar, $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$ bilinen ara noktalar, z_0, z_1 ve $z_2(x) \in L_p(0,1)$ sırası ile verilmiş sayılar ve verilmiş fonksiyondur. $A_i(x) \in L_p(0,1)$ verilmiş katsayı fonksiyonlarıdır.. Burada $L_p(0,1)$ uzayı ile $(0,1)$ aralığında p-inci mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı gösterilmektedir. $L_p(0,1)$ uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır. Yani tam uzayıdır. Bu uzayda norm $f(x) \in L_p(0,1)$ herhangi bir elemanı olmak üzere

$$\|f\|_{L_p(G)} = (\int_G |f|^p dG)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaydan seçilen her Cauchy dizisinin limiti bu uzayın içindedir. Yani bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak bir dizidir. Bu problem $W_p = W_p^{(2)}(0,1)$ uzayında incelendi. W_p uzayı

$$W_p = W_p^{(2)}(0,1) = \{u = u(x) \in L_p(0,1) \mid \frac{d^k u}{dx^k} \in L_p, k = 0,1,2\}$$

şeklinde tanımlanan bir S. L. Sobolev uzayıdır. Bu uzay da Banach uzayıdır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{W_p} = \sum_{k=0}^2 \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L_p(0,1)}$$

veya eşdeğer olan

$$\|u\|_{W_p} = \|u(0)\|_{\mathbb{R}} + \|u'\|_{L_p(0,1)} + \|u''\|_{L_p(0,1)}$$

tanımları ile verilebilir. (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) denklemleri ile verilen problem tamamı ile homojen olmayan bir problemidir. Bu problem $V = (V_2, V_1, V_0)$ ve $z = (z_2(x), z_1, z_0)$ tanımları yapılrısa

$$Vu = z \quad (2.1.4)$$

şeklinde operatör formda yazılabilir. Bu şekilde problemlerin operatör formda yazılması ile ilgili [15,16] ile verilen kaynaklara bakılabilir. V operatörü W_p Banach uzayından

$$E_p = L_p(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Banach uzayına sınırlı bir operatördür. Burada $z = (z_2(x), z_1, z_0) \in E_p$ elemanı için norm

$$\|z\|_{E_p} = \|z_2\|_{L_p(G)} + |z_1| + |z_0|$$

olur. Eğer verilen bir $z \in E_p$ elemanı için (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) denklemleri ile verilen problemi c_0, z' den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|u\|_{W_p} \leq c_0 \|z\|_p$$

olur ise iyi sunulmuş bir problemidir. Bir problem ancak ve ancak iyi sunulmuş ise V operatörü W_p ve E_p uzayları arasında lineer bir homomorfizma oluşturur. Yani çözüm varsa tek olur. Bu da yukarıda verilen eşitsizlik sağlanır ise mümkündür. Bu kolayca eşitsizlikten elde edilebilir.

2.2 Eş Problem ve Green Fonksiyoneli

Bu problemi önceki bölümde açıklanan eş problem yardımı ile inceleyeceğiz. Herhangi $u \in W_p(0,1)$ fonksiyonunu

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \int_0^x (x - \zeta)u''(\zeta)d\zeta \quad (2.2.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Verilen $\gamma \in (0,1)$ için D_0 ve D_1 iz ya da değer operatörleri $D_0u = u(\gamma)$, $D_1u = u'(\gamma)$ şeklinde tanımlanır. Keyfi v_0 ve v_1 sayıları ve $v_2 \in L_p(G)$ fonksiyonu için $u(0) = v_0$, $u'(0) = v_1$ ve $u''(0) = v_2(x)$ olacak şekilde yalnız bir $u \in W_p$ elemanı vardır. Burada $u(0)$, $u'(0)$ ve $u''(x)$ sayıları ve fonksiyonu birbirleri ile ilişkisizdir. Bu W_p uzayı ve E_p uzayı arasında lineer bir homeomorfizmanın olduğunu gösterir. Yani W_p Banach uzayı

$$W_p = L_p(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

izomorfik ayrışımına (dekompozisyonuna) sahiptir. Dolayısı ile aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1: Eğer $1 \leq p < \infty$ ise o zaman herhangi bir $F \in W_p^*$ lineer fonksiyoneli tek bir $\varphi = (\varphi_2(x), \varphi_1, \varphi_0) \in E_p$, $p + q = pq$ elemanı ile

$$F(u) = \int_0^1 u''(x)\varphi_2(x)dx + u'(0)\varphi_1 + u(0)\varphi_0 \quad (2.2.2)$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: $Nu = (u''(x), u'(0), u(0))$

şeklinde verilen N operatörü W_p den E_p üzerine gözönüne alındığında sınırlı ve

$$u(x) = (N^{-1}g)(x) \equiv \int_0^1 (x - \zeta)g_2(\zeta) d\zeta + g_1x + g_0,$$

$g = (g_2(x), g_1, g_0) \in E_p$ şeklinde tanımlanan N^{-1} ters operatörüne sahiptir. N 'nin çekirdeği $\text{Ker } N$ trivial ve imajı $\text{Im } N = E_p$ olduğu açıktır. Bu yüzden $N^*: E_p^* \rightarrow W_p^*$, $\text{Ker } N^* = \{0\}$ ve $\text{Im } N^* = W_p^*$ olacak şekilde eş operatörü vardır.

Yani verilen $F \in W_p^*$ için

$$F = N^*\psi \text{ ya da } F(u) = \psi(Nu), u \in W_p$$

olacak şekilde tek bir $\varphi \in E_p^*$ vardır. Buradan herhangi $F \in W_p^*$ nin

$$u(x) = u(0) + u'(0) + \int_0^x (x - \xi)u''(\xi)d\xi$$

şeklinde gösterilebilir olduğu çıkar. Verilen $\varphi \in E_q$ için (2.2.1) denklemi ile verilen F fonksiyoneli W_p üzerinde sınırlıdır. ■

Not: $p = \infty$ hali de benzer olarak

$$F(u) = \int_0^1 u''d\varphi_2 + u'(0)\varphi_1 + u(0)\varphi_0$$

şeklinde verilebilir [10].

(2.1.1) – (2.1.3) ya da (2.1.4) denklemleri ile verilen problemin eş operatörünü açıkça bulmak isteyelim. $f = (f_2(x), f_1, f_0) \in E_q$, E_p üzerinde herhangi lineer sınırlı fonksiyon olmak üzere

$$f(Vu) = \int_0^1 f_2(x)(V_2u)(x)dx + f_1(V_1u) + f_0(V_0u), u \in W_p \quad (2.2.3)$$

ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadede (2.1.1) – (2.1.3) açık ifadeleri ve

$$u(x) = u(0) + u'(0) + \int_0^x (x - \xi)u''(\xi)d\xi$$

gösterilimi yerlerine yerleştirilir ise

$$\begin{aligned}
f(Vu) = & \int_0^1 f_2(x)[u''(x) + A_1(x) \left[u'(0) + \int_0^1 u''(\zeta) d\zeta \right] \\
& + A_0(x) \left[u(0) + u'(0)x + \int_0^x u''(\zeta)(x - \zeta) d\zeta \right] \\
& + f_0(\alpha_1 u(0) + \alpha_2) \left[u'(0) + \int_0^{\gamma} u''(\zeta) d\zeta \right] \\
& + \alpha_3 \left[u(0) + u'(0) + \int_0^1 (1 - \zeta) u''(\zeta) d\zeta \right] \\
& + f_1(\beta_1 u(0) + \beta_2 [u'(0) + \int_0^{\gamma_2} u''(\zeta) d\zeta] \\
& + \beta_3 [u(0) + u'(0) + \int_0^1 (1 - \zeta) u''(\zeta) d\zeta])
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

şeklinde yazabiliriz. Bazı düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
f(Vu) = & \int_0^1 f_2(x)(V_2 u)(x) dx \\
& + \sum_{i=0}^1 f_i(V_i u) \\
= & \int_0^1 (w_2 f)(\zeta) u''(\zeta) d\zeta + (w_1 f) u'(0) \\
& + (w_0 f) u(0) \equiv (w f)(u), \\
& \forall f \in E_q, \forall u \in W_p, 1 \leq p \leq \infty
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

özdeşliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
(w_2 f)(\zeta) = & f_2(\zeta) \\
& + \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)] ds \\
& + f_0[\alpha_2 H(\gamma_1 - \zeta) + \alpha_3(1 - \zeta)] \\
& + f_1[\beta_2 H(\gamma_2 - \zeta) + \beta_3(1 - \zeta)]
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$w_1 f = \int_0^1 f_2(x) [A_0(x)(x-0) + A_1(x)] dx + f_0(\alpha_1 + \alpha_3) \\ + f_1(\beta_1 + \beta_3)$$

$$w_2 f = \int_0^1 f_2(x) A_0(x) dx + f_0(\alpha_2 + \alpha_3) + f_1(\beta_2 + \beta_3)$$

ve $H(z)$, $\mathbb{R}$ üzerinde Heaviside fonksiyonudur. w_2, w_1, w_0 operatörleri $f = (f_2(x), f_1, f_0)$ üçlüsünün E_q uzayından sırası ile $L_q(0,1)$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ uzaylarının içine lineer sınırlı operatörlerdir. $wf = (w_2 f, w_1 f, w_0 f)$ olarak tanımlanan $w = (w_2, w_1, w_0)$ operatörü E_q uzayından kendisine sınırlı operatör olur.

$$f(Vu) = \int_0^1 f_2(x)(V_2 u)(x) dx \\ + \sum_{i=0}^1 f_i(V_i u) \\ = \int_0^1 (w_2 f)(\zeta) u''(\zeta) d\zeta + (w_1 f)u'(0) + (w_0 f)u(0) \equiv (wf)(u), \\ \forall f \in E_q, \forall u \in W_p, 1 \leq p \leq \infty$$

özdeşliği ve Teorem 2.2.1'den $1 \leq p \leq \infty$ olduğu zaman w operatörü V operatörü için bir eş operatördür. Yani $V^* = w$ 'dur.

$$S = N^{-1}, g = (g_2, g_1, g_0) \in E_p$$

olmak üzere $u = Sg$ dönüşümü ile $Vu = z$ denklemi

$$VSg = z \tag{2.2.7}$$

şeklinde eş değer integral denkleme indirgenebilir. Eğer $u = Sg$ ise o zaman $u''(x) = g_2(x)$, $u'(0) = g_1$ ve $u(0) = g_0$ dır. Bu yüzden (2.2.5) özdeşliği

$$\begin{aligned}
f(VSg) &\equiv \int_0^1 f_2(x)(V_2Sg)(x)dx \\
&+ \sum_{i=0}^1 f(V_iSg) = \int_0^1 (w_2f)(\zeta)g_2(\zeta)d\zeta \\
&+ (w_1f)g_1 + (w_0f)g_0 \equiv (wf)(g), \\
&\forall f \in E_q, \quad \forall g \in E_p, 1 \leq p < \infty
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

dir. Bu $V^* = (VS)^* = w, 1 \leq p < \infty$ ve $w^* = VS$ eğer $1 \leq p \leq \infty$. Yani en azından VS ve w operatörlerinden biri diğerinin eş operatörü olur.

$f = (f_2(x), f_1, f_0) \in E_q$ bilinmeyen ve bir $\varphi = (\varphi_2(x), \varphi_1, \varphi_0) \in E_q$ verilmiş olmak üzere $Vu = z$ ya da $VSg = z$ denklemlerinin eş denklemi

$$wf = \varphi \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemi

$$\begin{aligned}
(w_2f)(\zeta) &= \varphi_2(\zeta), \quad \zeta \in (0,1) \\
w_1f &= \varphi_1 \\
w_0f &= \varphi_0
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

şeklinde açık olarak yazılabilir. (2.2.6) ifadeleriden $(w_2f)(\zeta) = \varphi_2(\zeta), \zeta \in (0,1)$ denkleminin f_0 ve f_1 ’i parametre olarak içeren $f_2(\zeta)$ ’ya göre bir integral denklem olduğu görülebilir. $w_1f = \varphi_1$ ve $w_0f = \varphi_0$, (f_0, f_1) çiftine göre cebirsel denklemlerdir, $f_2(\zeta)$ üzerinde tanımlı fonksiyoneller içermektedir. (2.2.10) denklem sistemi integro-cebirsel denklem sistemidir. Bu sistem $wf = \varphi$ özdeşliği ile tanımlandığından $wf = \varphi$ ifadesi kısmi integrasyon formülünün klasik olmayan bir formu gibi düşünülebilir. Geleneksel tipte eş problem klasik Green formülü ile tanımlanır.

$$w_1f = \varphi_1, \quad w_0f = \varphi_0$$

denklemlerinde eğer

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \beta_1 + \beta_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \beta_2 + \beta_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.2.11}$$

ise f_0 ve f_1 bulunabilir. f_0 ve f_1 'in ifadeleri $wf = \varphi$ denkleminde yerleştirilir ise karmaşık tipte bir integral denklem elde edilebilir. Bu denklem ise yapısından Volterra tipli bir integral denklem olur. Bu denklemin belli koşullar altında tek çözümü olduğu gösterilebilir. Eğer tek çözüm $f_2(\zeta)$ bulunur ise f_0 ve f_1 de bulunacağından temel çözüm elde edilebilir. Burada $f_2(\zeta, x)$ klasik Green fonksiyonuna karşı gelir. f_0 ve f ise sınır koşullarının birim etkisini gösterir. Tamamı ile homojen olmayan problemin çözülebilirlik koşulları operatör formda olduğuna benzer şekilde verilebilir.

$$\int_0^1 [xA_0(x) + A_1(x)]f_2(x)dx = D \quad (2.2.12)$$

$$\int_0^1 A_0(x)f_2(x)dx = E \quad (2.2.13)$$

tanımlayalım. Bu durumda $wf = \varphi$ denklem sistemini açık olarak yazalım.

$$\begin{aligned} f_2(\zeta) &= \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds \\ &= \varphi_2(\zeta) - f_0[\alpha_2 H(\gamma_1 - \zeta) + \alpha_3(1 - \zeta)] \\ &\quad - f_1[\beta_2 H(\gamma_2 - \zeta) + \beta_3 + (1 - \zeta)] \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3)f_0 + (\beta_1 + \beta_3)f_1 = \varphi_1 - D$$

$$(\alpha_2 + \alpha_3)f_0 + (\beta_2 + \beta_3)f_1 = \varphi_0 - E$$

Cramer kuralı ile

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 - D & (\beta_1 + \beta_3) \\ \varphi_0 - E & (\beta_2 + \beta_3) \end{vmatrix}}{\Delta} \\ f_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \varphi_1 - D \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \varphi_0 - E \end{vmatrix}}{\Delta} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

şeklinde bulunabilir. Bunlar (2.2.14)₁ denkleminde yerleştirilirse $f_2(\zeta)$ 'ye göre Volterra denklemi elde edilir. Bu denklemin her zaman tek olan çözümü vardır. Eğer $\Delta = 0$ ise o zaman bu operatörün çekirdeği boş değil demektir. Bu durumda ise genelleştirilmiş temel çözüm kavramı tanımlanır.

Eğer $\varphi = \theta(x) \in E_q$ yani $\varphi(u)(x) = u(x)$ özel fonksiyoneli göz önüne alınır ise Green fonksiyoneli (2.2.9) eş denkleminin özel hali olan

$$(wf)(u) = u(x), \quad \forall u \in W_p \quad (2.2.16)$$

denklemin çözümü olur.

Tanım 2.2.1: $f(x) = (f_2(\zeta, x), f_1(x), f_0(x)) \in E_q, x \in G$

elemanı

$$(wf)(u) = u(x), \quad \forall u \in W_p$$

denkleminin çözümü ise $f(x)$ ' e V operatörünün ya da $Vu = z$ sisteminin Green fonksiyoneli denir.

$$(wf)(u) = u(x), \quad \forall u \in W_p$$

denklemini açık olarak

$$(w_2f)(\zeta) = (x - \zeta)H(x - \zeta), \quad \zeta \in (0,1)$$

$$w_1f = x \quad (2.2.17)$$

$$w_0f = 1$$

yazılabilir. Bu

$$\varphi_2(\zeta) = (x - \zeta)H(x - \zeta),$$

$$\varphi_1 = x,$$

$$\varphi_0 = 1$$

için

$$(w_2f)(\zeta) = \varphi_2(\zeta), \quad \zeta \in (0,1)$$

$$w_1f = \varphi_1$$

$$w_0f = \varphi_0$$

sisteminin özel halidir. $f(x)$ (2.2.17) denkleminin çözümü ve u ise $Vu = z$ denkleminin çözümü olsun. O zaman (2.2.5) özdeşliği

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f_2(\zeta, x) z_2(\zeta) d\zeta + f_1(x) z_1 + f_0(x) z_0 \\
& = \int_0^1 (x - \zeta) H(x - \zeta) u''(\zeta) d\zeta + u'(0)x \quad (2.2.18) \\
& + u(0) = u(x)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.2: Eğer $Vu = z$ denklemi en azından bir $f(x)$ Green fonksiyoneli varsa o zaman $Vu = z$ denkleminin $u \in W_p$ çözümü

$$u(x) = \int_0^1 f_2(\zeta, x) z_2(\zeta) d\zeta + f_1(x) z_1 + f_0(x) z_0 \quad (2.2.19)$$

şeklinde gösterilebilir. Üstelik $Vu = 0$ homojen denklemi sadece trivial çözüme sahip olur.

Green fonksiyonelinin varlığı için gerekli ve yeterli koşullar $1 < p < \infty$ durumunda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.3: Eğer Green fonksiyoneli varsa o zaman tektir ve bir Green fonksiyoneli ancak ve ancak eğer $Vu = 0$ homojen denklemi trivial çözüme sahip ise vardır.

İspat: Teorem 2.2.2' den eğer Green fonksiyoneli varsa o zaman $Vu = 0$ yalnızca $u = 0$ çözümüne sahip olduğu elde edilir. Bu durumda $w: E_q \rightarrow E_q$ (Teorem 1.3.1'den) bir homeomorfizma olur. Bu yüzden (2.2.17) denklemlerinin Green fonksiyoneli olarak çözümü tektir. Teoremin ikinci kısmı Teorem 1.3.1'den elde edilebilir. ■

Homojen denklem $Vu = 0$ trivial olmayan çözüme sahip olsun. O zaman (2.1.4) denklemi yani $Vu = z$, Teorem 2.2.2'ye göre bir Green fonksiyoneline sahip değildir. Bu durumda z sağ taraf fonksiyonu özel bir yapıya sahip olmadıkça genelde $Vu = z$ bir çözüme sahip olamaz. Örneğin en azından bir $f = (f_2(\zeta), f_1, f_0)$ çözümü homojen eş denklem

$$wf = 0$$

için

$$\int_0^1 f_2(x)z_2(x)dx + f_1z_1 + f_0z_0 = 0 \quad (2.2.20)$$

olmadıkça çözüm yoktur. Bu durumda $Vu = z$ denkleminin çözümünün gösteriliminin varlığı genelleştirilmiş Green fonksiyoneli yardımı ile elde edilir.

Varsayalım ki P_0, W_p üzerinden $C(G)$ uzayına $Im P_0 = Ker V$ olacak şekilde bir lineer projeksiyon (iz) operatörü olsun. $F = (F_2(\zeta), F_1, F_0) \in E_q$ bilinmeyen eleman $x \in G$ bir parametre ve $P_1 = I - P_0, I W_p$ üzerinde özdeşlik operatörü olmak üzere

$$(wF)(u) = (P_1u)(x), \quad \forall u \in W_p \quad (2.2.21)$$

denklemini göz önüne alınsın.

Tanım 2.2.2: Verilmiş $x \in G$ için $(wF)(u) = (P_1u)(x), \forall u \in W_p$ denkleminin $F(x) = (F_2(\zeta, x), F_1(x), F_0(x))$ çözümüne $Vu = z$ denkleminin ya da V operatörünün genelleştirilmiş Green fonksiyoneli denir.

P_0 operatörünün sınırlılığı ($W_p \rightarrow C(\bar{G})$)

$$|(P_0u)(x)| \leq \|P_0u\|_{C(\bar{G})} \leq c_0\|u\|_{W_p}, \quad \forall u \in W_p \quad (2.2.22)$$

olacak şekilde $c_0 > 0$ sayısının varlığını garantiler. Bu yüzden W_p üzerinde $x \in \bar{G}$ için

$$\theta^0(x)(u) = (P_0u)(x), \quad u \in W_p \quad (2.2.23)$$

tanımlanan fonksiyonel sınırlıdır. Yani $\theta^0(x) \in W_p^*, \forall x \in \bar{G}$. O zaman $\theta^0(x)$ fonksiyoneli tek bir $(\theta_2^0(\zeta, x), \theta_1^0(x), \theta_0^0(x)) \in E_q$ elemanı için

$$\begin{aligned} \theta^0(x)(u) &= \int_0^1 \theta_2^0(\zeta, x)u''(\zeta)d\zeta + \theta_1^0(x)u'(0) \\ &\quad + \theta_0^0(x)u(0), \quad u \in W_p, 1 \leq p \leq \infty \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

şeklinde gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
v_2(\zeta, x) &= (x - \zeta)H(x - \zeta) - \theta_2^0(\zeta, x) \\
v_1(x) &= x - \theta_1^0(x) \\
v_0(x) &= 1 - \theta_0^0(x)
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

olmak üzere $u(x)$ 'in gösteriliminden

$$\begin{aligned}
(P_1 u)(x) &= \int_0^1 v_2(\zeta, x) u''(\zeta) d\zeta + v_1(x) u'(0) \\
&\quad + v_0(x) u(0), u \in W_p, x \in \bar{G}
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

elde edilir. Bu denklem ve

$$\begin{aligned}
f(Vu) &= \int_0^1 f_2(x) (V_2 u)(x) dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^1 f_i(V_i u) \\
&= \int_0^1 (w_2 f)(\zeta) u''(\zeta) d\zeta + (w_1 f) u'(0) + (w_0 f) u(0) \equiv (wf)(u), \\
&\quad \forall f \in E_q, \forall u \in W_p, 1 \leq p \leq \infty
\end{aligned}$$

özdeşliğinden

$$(wF)(u) = (P_1 u)(x), \quad \forall u \in W_p$$

denkleminin eşdeğer formunun

$$\begin{aligned}
(w_2 F)(\zeta) &= v_2(\zeta, x), \quad \zeta \in G \\
w_1 F &= v_1(x) \\
w_0 F &= v_0(x)
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

sistemi olduğu elde edilir. Burada $x \in \bar{G}$ bir parametredir.

Teorem 2.2.4: Eğer $Vu = z$ denklemi en az bir $F(x)$ genelleştirilmiş Green fonksiyoneline sahip ise o zaman keyfi bir $u \in W_p$ çözümü

$$u(x) = (P_0 u)(x) + \int_0^1 F_2(\zeta, x) z_2(\zeta) d\zeta + F_1(x) z_1 + F_0(x) z_0 \tag{2.2.28}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: w operatörü (2.2.5) özdeşliği ile tanımlıdır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_2(\zeta, x)(V_2 u)(\zeta) d\zeta + F_1(x)(V_1 u) + F_0(x)(V_0 u) \\ = (wF(x))(u), \quad \forall u \in W_p \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

özdeşliği doğrudur. Sağ taraf $(P_1 u)(x)$ eşittir. Yani

$$(wF(x))(u) = u(x) - (P_0 u)(x)$$

dolayısı ile (2.2.28) doğrudur. ■

P_0 ve P_1 , W_p uzayının üzerinde projeksiyon operatörleri olsunlar ve $P_0 + P_1 = I$ ’dir. Bu yüzden $W_p = W_p^0 \oplus W_p^1$ direkt toplamı olarak gösterilebilir. $W_p^0 = \text{Im } P_0$ ve $W_p^1 = \text{Im } P_1$ (2.2.28) denkleminin özel çözümü

$$u_1(x) = \int_0^1 F_2(\zeta, x)z_2(\zeta) d\zeta + F_1(x)z_1 + F_0(x)z_0$$

olur. $u_1(x)$ çözümü $u(x)$ çözümünün W_p^1 alt uzayındaki projeksiyonudur. $Vu = z$ denkleminin genel çözümü $u = P_0 y + u_1$ ’dir. Burada $y \in W_p$ keyfi bir fonksiyondur.

Uygulamalarda P_0 operatörü $\text{Ker } V$ ’nin bir $\{u_1, \dots, u_m\}$ maksimal sistemi ile

$$(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m F^{(k)}(u)u_k(x), \quad u \in W_p \quad (2.2.30)$$

olarak oluşturulabilir. Burada

$$F^{(k)}(u) = \int_0^1 F_2^{(k)}(\zeta)u''(\zeta) d\zeta + F_1^{(k)}u'(0) + F_0^{(k)}u(0), \quad u \in W_p$$

ve

$$\{F^{(k)} = (F_2^{(k)}(\zeta), F_1^{(k)}, F_0^{(k)})\} \subset E_q$$

ve

$$\{(u_k''(\zeta), u_k'(0), u_k(0))\} \subset E_p$$

fonksiyonel sistemi biortogonal sistemdir. Yani

$$F^{(k)}(u_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

operatörü için (2.2.27) sisteminin sağ tarafı

$$\begin{aligned} v_2(\zeta, x) &= (x - \zeta)H(x - \zeta) - \sum_{k=1}^m F_2^{(k)}(\zeta)u_k(x) \\ v_1(x) &= (x - 0) - \sum_{k=1}^m F_1^{(k)}u_k(x) \\ v_0(x) &= 1 - \sum_{k=1}^m F_0^{(k)}u_k(x) \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

olur.

2.3 Green ve Cauchy Tipli Fonksiyonlarla Karşılaştırma

Bu bölümde

$$(V_2 u)(x) \equiv u''(x) + A_1(x)u'(x) + A_0(x)u(x) = z_2(x), \quad x \in G = (0,1)$$

$$V_0 u = \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(\gamma_1) + \alpha_3 u(1) = z_0$$

$$V_1 u = \beta_1 u(0) + \beta_2 u'(\gamma_2) + \beta_3 u(1) = z_1$$

probleminin (ya da $Vu = z$) özel halleri olan sınır değer ve başlangıç değer problemlerini göz önüne alarak sırası ile klasik Green ve Cauchy fonksiyonları ile olan ilişkisini göstereceğiz.

$$Vu = z$$

denkleminin bir özel hali

$$\begin{aligned} (V_2 u)(x) &\equiv u''(x) + A_1(x)u'(x) + A_0(x)u(x) = z_2(x) \\ V_1 u &\equiv u(1) = z_1 \\ V_0 u &\equiv u(0) = z_0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

sınır değer problemini ($x \in (0,1) = G$) düşünelim. Bu durumda

$$(w_2 f)(\zeta) = (x - \zeta)H(x - \zeta), \quad \zeta \in (0,1)$$

$$w_1 f = x$$

$$w_0 f = 1$$

denklemleri

$$\begin{aligned} (w_2 f(\zeta)) &\equiv f_2(\zeta) + \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds \\ &\quad + f_1(1 - \zeta) = (x - \zeta)H(x - \zeta) \\ w_1 f &\equiv \int_0^1 f_2(s)[sA_0(s) + A_1(s)]ds + f_1 = x \\ w_0 f &\equiv \int_0^1 f_2(s)A_0(s)ds + f_0 + f_1 = 1 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Son iki denklemden

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - \int_0^1 f_2(s)[sA_0(s) + A_1(s)]ds \\ f_2 &= 1 - f_1 - \int_0^1 f_2(s)A_0(s)ds \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

olarak elde edilir. (2.3.3) denkleminde f_1 ' in ifadesi (2.3.2) sisteminin ilk denkleminde yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} f_2(\zeta) &+ \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds - (x_1 - \zeta) \\ &\quad \times \int_0^1 f_2(s)[A_0(s)s + A_1(s)]ds \\ &= (x - \zeta)H(x - \zeta) - (1 - \zeta)x, \zeta \in G \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

elde edilir. Yani (2.3.1) probleminin çözümü olan Green fonksiyoneli

$f_2(\zeta) = f_2(\zeta, x)$, $f(x) = (f_2(\zeta, x), f_1(x), f_0(x))$ 'ın son iki elemanı $f_1(x)$ ve $f_0(x)$ 'den bağımsız integral denklem olmaktadır. (2.3.4) denkleminin Teorem 2.2.3' ye göre eğer

$$Vu = 0$$

trivial çözüme sahip ise tek çözümü vardır. Eğer $Vu = 0$ trivial olmayan çözüme sahip ise o zaman Green fonksiyoneli yoktur. Ancak

$$F(x) = (F_2(x, \zeta), F_1(x), F_0(x))$$

genelleştirilmiş Green fonksiyoneli daima vardır.

$$(P_0 u)(x) = \sum_{k=1}^m F^{(k)}(u) u_k(x), \quad u \in W_p$$

projeksiyon operatörü

$$\begin{aligned} (w_2 f)(\zeta) &\equiv F_2(\zeta) + \int_{\zeta}^1 F_2(\zeta) [A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)] ds \\ &\quad + F_1(1 - \zeta) = v_2(\zeta, x), \quad \zeta \in G \\ w_1 F &\equiv \int_0^1 F_2(s) [A_0(s)s + A_1(s)] ds + F_1 = v_1(x) \\ w_0 F &\equiv \int_0^1 F_2(s) A_0(s) ds + F_0 + F_1 = v_0(x) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

denkleminin çözümüdür. Burada $v_2(\zeta, x)$, $v_1(x)$, $v_0(x)$

$$\begin{aligned} v_2(\zeta, x) &= (x - \zeta)H(x - \zeta) - \sum_{k=1}^m F_2^{(k)}(\zeta) u_k(x) \\ v_1(x) &= (x - 0) - \sum_{k=1}^m F_1^{(k)} u_k(x) \\ v_0(x) &= 1 - \sum_{k=1}^m F_0^{(k)} u_k(x) \end{aligned}$$

ile verilmiştir.

Green fonksiyoneli klasik Green fonksiyonu ile karşılaştırmak için (2.3.4) denklemini gözönüne alalım. Eğer $f_2(\zeta) = f_2(\zeta, x) \in L_q(0, 1)$, (2.3.4) denkleminin çözümü ise o zaman verilen $x \in \bar{G}$ için ζ değişkenine göre $f_2(\zeta, x)$, $\bar{G}$ üzerinde mutlak süreklidir. Bu yüzden (2.3.4) denklemini ζ 'ya göre türetelim;

$$\begin{aligned}
& \frac{df_2(\zeta)}{d\zeta} - f_2(\zeta)A_1(\zeta) - \int_{\zeta}^1 f_2(s)A_0(s)ds \\
& + \int_0^1 f_2(s)[A_0(s)s + A_1(s)]ds \\
& = -H(x - \zeta) + x, \quad \zeta \in G
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

elde edilir. $A_1(x)$, $\bar{G}$ ' de mutlak sürekli olsun. O takdirde $\frac{df_2}{d\zeta}$, $[0, x]$ aralığı ve $[x, 1]$ aralığı üzerinde ζ 'ya göre mutlak sürekli olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
(V_2^* f_2)(\zeta) & \equiv \frac{\partial^2 f_2(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (f_2(\zeta)A_1(\zeta)) + f_2(\zeta)A_0(\zeta) = 0, \\
& \zeta \in (0, x) \cup (x, 1)
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

olur. Sınır koşulları bu denklem için (2.3.4) ve (2.3.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
f_2(0) & = f_1(1) = 0 \\
f_2(x+0) & = f_2(x-0) \\
\frac{\partial f_2(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=x+0} & = \frac{\partial f_2(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=x-0} + 1
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
f_2(\zeta) & + \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds - (x_1 \\
& - \zeta) \int_0^1 f_s[A_0(s)s + A_1(s)]ds = (x - \zeta)H(x - \zeta) - (1 - \zeta)x, \zeta \in G
\end{aligned}$$

denkleminin çözümü (2.3.7)-(2.3.8) probleminin çözümüne eş değer olur. Bu yüzden $f_2(\zeta, x)$, ζ 'nin fonksiyonu olarak verilen klasik Green fonksiyonu olur. Yani

$$(V_2^* f)(\zeta) = \psi_2(\zeta), \quad \zeta \in G$$

ve

$$f_2(0) = f_2(1) = 0$$

şeklinde geleneksel $(\psi_2 \in L_1(G))$ eş probleme karşı gelen bilinen klasik Green sonksiyonu olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 (V_2 u) &\equiv u''(x) + A_1(x)u'(x) + A_0(x)u(x) = z_2(x), \\
 x &\in G \\
 V_1 u &\equiv u'(0) = z_1 \\
 V_0 u &\equiv u(0) = z_0
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Bu durumda verilen bir $x \in \bar{G}$ için

$$f(x) = (f_2(\zeta, x), f_1(x), f_0(x))$$

Green fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
 (w_2 f)(\zeta) &\equiv f_2(\zeta) \\
 &+ \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds \\
 &= (x - \zeta)H(x - \zeta)
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

$$w_1 f \equiv \int_0^1 f_2(s)[A_0(s)s + A_1(s)]ds + f_1 = x$$

$$w_0 f \equiv \int_0^1 f_2(s)A_0(s)ds + f_0 = 1$$

sisteminin çözümüdür. Bu ikinci çeşit bir Volterra tipi integral denklemdir. Bu yüzden verilen $x \in \bar{G}$ için $f_2(\zeta) = f_2(\zeta, x) \in L_q(0,1)$ tek çözümüne sahiptir ve

$$f_2(\zeta, x) = 0, \quad \zeta \in (x, 1) \tag{2.3.11}$$

olur.

$(0, x)$ aralığında

$$(w_2 f)(\zeta) \equiv f_2(\zeta) + \int_{\zeta}^1 f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds = (x - \zeta)H(x - \zeta)$$

denklemini

$$f_2(\zeta) + \int_{\zeta}^x f_2(s)[A_0(s)(s - \zeta) + A_1(s)]ds = (x - \zeta), \quad \zeta \in (0, x) \quad (2.3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin $[0, x]$ aralığında mutlak sürekli ve ζ 'ya göre türevi

$$\frac{\partial f_2(\zeta)}{\partial \zeta} - f_2(\zeta)A_1(\zeta) - \int_{\zeta}^x f_2(s)A_0(s)ds = -1, \quad \zeta \in (0, x) \quad (2.3.13)$$

olur. Eğer $A_1(x)$, $[0, 1]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ise o zaman

$$(V_2^* f_2)(\zeta) \equiv \frac{\partial^2 f_2(\zeta)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (f_2(\zeta)A_1(\zeta)) + f_2(\zeta)A_0(\zeta) = 0 \quad (2.3.14)$$

olur. Bu denklemin başlangıç koşulları (2.3.12) ve (2.3.13) denklemlerinden

$$f_2(\zeta)|_{\zeta=x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=x-0} = -1 \quad (2.3.15)$$

olarak elde edilir. Bu yüzden $f_2(\zeta, x)$, V_2^* operatörünün ζ değişkenine göre Cauchy fonksiyonudur. İspatlanabilir ki $f_2(\zeta, x)$, x değişkenine göre V operatörünün Cauchy fonksiyonudur.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada genel lineer operatör denklemler için temel çözüm kavramı tartışıldı. Daha sonra ara nokta koşullarına sahip lineer değişken katsayılı denklem için eş problem oluşturuldu. Bu eş problem yardımı ile Green Fonksiyoneli tanımı verildi. Son olarak lineer denklemin katsayılarının yeterince türeve sahip oldukları varsayılarak klasik problemlere ulaşılabileceği gösterildi. Bunun için ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı denklem için önce basit sınır koşulları ele alınarak Green Fonksiyonu, basit başlangıç koşulları ele alınarak Cauchy Fonksiyonunun klasik yollarla bulunuşunu verecek problemlere ulaşılabildiği gösterildi.

Bu yöntemde operatörün katsayılarının integrallenebilir olması yeterlidir. Ayrıca sınır koşullarının yerel ve homojen olmasına gerek yoktur. Bütün problem homojen olmayan problem olarak göz önüne alınır. Koşullar ise yerel olmayan çok noktalı koşullar olarak ele alınabilir.

Elde edilen eş denklem ya da eş sistem bilinen yöntemlerin aksine en fazla integro-cebirselsel sistemdir. Bu da bize çözümün varlığı ve tekliği bakımından önemli bilgiler edinme imkanı vermektedir.

Ayrıca yerel olmayan (nonlinear) sınır değer problemleri buradaki metod yardımı ile yerel olmayan integral denkleme dönüştürülebilir. Bu integral denklemler belli koşullar altında sayısal olarak çözülebilirler.

KAYNAKLAR

- [1] **Shilov, G.E.:** Generalized Functions and Partial Differential Equations. Gordon and Breach, New York (1968)
- [2] **Naimark, M.A.:** Linear Differential Operators. Nauka, Moscow, Russia (1969), in Russian
- [3] **Stackgold, I.:** Greens's Functions and Boundary Value Problems. Wiley, New York (1979)
- [4] **Tikhonov, A.N., Vasil'eva, A.B., Sveshnikov, A.G.:** Differential Equations. Nauka, Moscow, Russia (1980), in Russian
- [5] **Krein, S.G.:** Linear Equations in Banach Space. Nauka, Moscow, Russia (1971), in Russian
- [6] **Hörmander, L.:** Linear Partial Differential Operators. Springer, Berlin Heidelberg New York (1976)
- [7] **Akhiev, S.S.:** Representations of the solutions of some linear operator of equations. Sov. Math., Dokl. **21**(2), 555-558 (1980)
- [8] **Akhiev, S.S.:** Green and Generalized Green's Functionals of Linear Local and Nonlocal problems for Ordinary Integro-differential Equations, Acta. Appl.Math. Vol 95, 2007, 73-93.
- [9] **Akhiev, S.S., Oruçoğlu, K.:** Fundamental solutions of some linear operator equations and applications. Acta. Appl. Math. **71**, 1-30 (2002)
- [10] **Kantorovich, L.V., Akilov, G. P.:** Functional Analysis. Pergamon, New York (1982)
- [11] **Brown, A.L., Page, A.:** Elements of Functional Analysis. Van Nostrand, New York (1970)
- [12] **Akhiev, S.S.:** A new fundemantal solution concept and application to some local and nonlocal problems. Istanbul Tek. Üniv. Bül. **47**(3), 93-99 (1994)
- [13] **Halanay A.:** Differential Equations. Academic, New York (1966)
- [14] **Nakhushev, A.M.:** Nonlocal problem and Goursat problem for the loading hyperbolic equation and their applications to prediction of soil humidity. Dokl. Akad. Nauk SSSR **242**(5), 1008-1011 (1978), in Russian
- [15] **Lions, J.L. and Manges, E.:** Proble'mes aux limites non homogènes et applications Vols 1-3, Paris 1968
- [16] **Berezansky, Yu. M. and Roitberg, Ja. A.:** A theorem about homeomorphism and Green's functions for general elliptical boundary value problems, Ukrainian Math. J. **19**(5) 1967 3-32 (in Russian)
- [17] **Ma, R.:** Existance theorems for a second order m -point boundary value problem. J.Math. Anal. Appl. **211**(2), 545-555 (1997)

- [18] **Karakostas, G.L., Tsamatos, P.Ch.:** Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem. Appl. Math. Lett. Math. Lett. **15**(4), 401-407 (2002)
- [19] **Collatz, L.:** The Numerical Treatment of Differential Equations. Springer, Berlin Heidelberg New York (1996)

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Zafer BEKİRYAZICI

Doğum Yeri ve Tarihi: Eminönü - 30.06.1986

Adres: Yalı Mah. Vatan Cad. Aydınkent sit. L1 Blok D:23
Merkez/TRABZON

E-Mail: zaferb@gmail.com

Lisans: Marmara Üniversitesi – Matematik Bölümü - 2009