HİPERELASTİK BİR TABAKA İLE KAPLI VİSKOELASTİK BİR YARI SONSUZ UZAYDA RAYLEIGH DALGALARI

Semra Ahmetolan[1], Ali Demirci[2] ve Ayşe Peker Dobie[3]
[1,2,3]İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

In this work, the propagation of Rayleigh waves on an isotropic Kelvin-Voigt viscoelastic half space covered by a hyperelastic layer of uniform thickness is considered. It is assumed that both the layer and the half space are composed of different materials with graded inhomogeneous properties in exponential form. Boundary value problem which describes the propagation of linear Rayleigh waves in the layered half space with the corresponding inhomogeneity property is defined. Then, a damped in time solution form of this boundary value problem is taken into account by consideration of the effect of the viscoelastic dissipation energy in the nature of the wave propagation phenomena in viscoelatic waveguides. With the usage of this solution form in the boundary value problem, the explicit form of the secular equation of the linear Rayleigh waves (dispersion relation) is obtained in terms of the wave speed and inhomogeneous profile.

ÖZET

Bu çalışmada düzgün kalınlıklı hiperelastik bir malzemeden oluşan bir tabaka ile kaplı Kelvin-Voigt tipi viskoelastik bir malzemeden oluşan bir yarı sonsuz uzayda Rayleigh tipi dalgaların yayılması problemi ele alınmıştır. Hem tabaka hem de yarı sonsuz uzayın üstel formda derecelenmiş homojen olmayan özelliğe sahip farklı malzemelerden oluştuğu kabul edilmiştir. Bu homojen olmama özelliğiyle tanımlı tabakalı yarım uzayda yayılan lineer Rayleigh dalgalarını tanımlayan sınır-değer problem tanımlanmıştır. Daha sonra viskoelastik sönüm enerjinin bu tür viskoelastik dalga kılavuzunda yayılan dalgaların doğasına etkisi göz önünde bulundurularak, tanımlanan sınır-değer probleminin zamanla sönen bir çözüm formu ele alınmıştır. Bu çözüm formunun sınır-değer probleminde kullanılmasıyla, lineer Rayleigh dalgalarının seküler denkleminin (dispersiyon bağıntısı) açık formu dalga hızı ve homojen olmayan profile göre elde edilmiştir.

GİRİŞ

Rayleigh dalgaları yeryüzü yüzeyinde sismik bir dalganın yayılımını modelleyen, deprem tarafından üretilen en yıkıcı tipte sismik dalga olduğu için jeofizikte önemli bir role sahiptir. Ayrıca bu dalgaların, elektronik dünyasındaki ilerlemelerle birlikte endüstri dünyasında diğer uygulama alanlarına da sahip oldukları bilinmektedir. Bunlardan bazıları: yüksek frekanslı akustik dalga filtrelerinin imalatı; cep telefonları, dedektörler, sensörler, minyatür motorlar gibi günlük elektronik cihazlarda kullanılan transformatörler; otomotiv veya havacılık endüstrisinde kullanılan tahribatsız muayene teknolojilerinde; fizik, tıp, mühendislik alanlarında katıların elastik özelliklerinin akustik dalgalar kullanılarak belirlenmesi; tıp, petrol aramalarında kullanılan ultrasonik görüntüleme teknikleri, şeklinde sıralanabilirler. Teknolojideki ve endüstrideki yaygın uygulama alanlarına sahip oldukları için, izotropik homojen lineer viskoelastik malzemelerden oluşan ortamlarda düzlem dalgalarının yayılması problemleri yoğun olarak literatürde ilgi görmüştür [1-6]. Bu tür problemlerin incelenmesinde bir alt problem sınıfı olarak, gerilme etkileri ve malzeme hafızası arasındaki bağıntıların hem dalgaların biçimini hem de yayılma hızını nasıl etkilediği problemleri ele alınabilir. Yarı-sonsuz uzayı dolduran viskoelastik izotropik katı içindeki Rayleigh yüzey dalgalarının yayılımı üzerine hafıza etkileri birçok makalede araştırılmıştır (bkz. Currie ve diğ. [7], Currie ve O'Leary [8] ve O'Leary [9]). Romeo [10] genel viskoelastik problemin harmonik çözümlerini düşünmüş ve ilgili seküler denklemin incelenmesi için Nkemzi [11] tarafından ortaya konan bir sonucu kullanmıştır. Bu çalışmaların hepsi, homojen dalga çözümünün yavaşlık vektörü / frekans çifti ile temsil edilmesine dayanır, yani $\boldsymbol{u_r}$ parçacık yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini göstermek üzere

$$\boldsymbol{u_r(x,t) = A_r e^{i\omega(s_p x_p - t)}} \tag{1}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{s_p}$, kompleks yavaşlık vektörünün bileşenleri, $\boldsymbol{\omega}$ reel açısal frekans, ve $\boldsymbol{A_r}$ sabit kompleks genlik vektörünün bileşenlerini göstermektedir. Bu çözüm formu sadece elastik malzemeden oluşan dalga kılavuzunda yayılan harmonik çözüm formundan farklıdır. [7] çalışmasında gösterildiği üzere bu çözüm formunda birden fazla yüzey dalga çözümü söz konusu olabilir ve ayrıca dalgaların hızı bünye dalga hızından büyük olabilir [13]. Fakat sonsuz zamandaki bazı özel kriterler altında, belli bir dalga sayısı için tek bir viskoelastik yüzey dalgası çözümü vardır [12]. Ayrıca, [7]'de verilmiş reel değerli açısal frekansa sahip zamanla sönümlü eliptik olarak polarize edilmiş sinüs şeklindeki dalga çözümü (1), üstel derecelendirilmiş ortamlarda yayılan Rayleigh tipi yüzey dalga çözümünü zaman sonsuza gittiğinde sağlayamamaktadır. Buna ek olarak, dalga yayılımı olayının fiziğine ters bir şekilde, (1) çözümü maddesel değişkenlere göre, sonsuz enerji ortaya çıkarabilmektedir [13].

Yukarıda sayılan nedenlerden dolayı üstel derecelendirilmiş ortamlarda (1) çözüm formu kullanılamamaktadır. [13] çalışmasında, Kelvin-Voigt tipi viskoelastik malzemeden oluşan üstel derecelendirilmiş yarı sonsuz uzayda yayılan Rayleigh dalgalarının yayılması problemi için farklı olarak, zamanla sönen

$$\boldsymbol{u_r(x,t) = A_r e^{i\kappa(n_s x_s - vt)}} \tag{2}$$

düzlem dalga çözümü ele alınmıştır. Burada $\boldsymbol{A_r}$ kompleks sabit genlik vektörünü, $\boldsymbol{\kappa}$ reel değerli dalga sayısını ve $\boldsymbol{n_s}$ yayılma yönünü tanımlayan reel birim vektörün bileşenlerini temsil etmektedir. $\boldsymbol{v}$ kompleks bir parametre olmak üzere , $\boldsymbol{Re(v) > 0}$ dalga hızını ve $\boldsymbol{Im(v) \leq 0}$ kabulu altında, $\mathbf{exp}[\boldsymbol{\kappa Im(v) t}]$ terimi zamanla sönümü ifade etmektedir. (2) çözüm formu; dalga hızının kompleks olmasına izin vermekte olup, ayrıca zaman sonsuza gittiğinde çözümün sıfıra gitmesine ve fiziksel gerçeklere uygun olacak şekilde enerjinin zamana ve konuma göre sınırlı kalmasına olanak sağlamaktadır. Ayrıca [13] çalışmasında, (2) çözüm formu kullanılarak ilgili viskoelastik yarı uzayda yayılan Rayleigh dalgalarının sağladığı seküler denklemin (dispersiyon bağıntısı) açık hali hiperelastik ve viskoelastik malzeme sabitlerine bağlı şekilde elde edilmiştir.

Bu çalışmada, [13] çalışmasından farklı olarak hiperelastik bir malzemeden oluşan düzgün ve sonlu kalınlıklı bir tabaka ile kaplı Kelvin-Voigt tipi bir viskoelastik malzemeden oluşan yarı sonsuz uzayda yayılan Rayleigh dalgalarının yayılımı problemi incelenmiştir. [13] çalışmasına benzer şekilde, (2) formundaki çözüm formunu, ilgili yayılma problemini gerilmeler cinsinden betimleyen denklemlerde kullanılarak, Rayleigh dalgalarının sağlaması gereken dispersiyon bağıntısı türetilmiştir. Daha sonra bazı seçilen özel malzeme modelleri için bu dispersiyon bağıntısı sayısal olarak incelenerek, Rayleigh dalgalarının varlığı ve tekliği konusunda bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

TEMEL DENKLEMLER ve FORMÜLASYON

Bu bölüm boyunca düzenli bir B bölgesinin homojen ve izotropik bir Kelvin-Voigt viskoelastik malzeme ile doldurulduğunu varsayalım. Doğal durumun gerilmesiz olduğu göz önüne alındığında, kütle kuvvetinin olmadığı durumda lineer teori için alan denklemler sistemi [14] aşağıda verilmiştir:

Hareket denklemleri,

$$\boldsymbol{T_{rl,r}} = \boldsymbol{\rho \ddot{u}_l}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{0}, \infty) \tag{3}$$

şeklinde olmak üzere, $\boldsymbol{\rho}$, t=0 anındaki yoğunluğu, $\boldsymbol{T_{rl}}$ birinci tür Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün bileşenlerini ve $\boldsymbol{u_l}$ ise yerdeğiştirme vektör alanının bileşenlerini göstermektedir. Bir alan büyüklüğünün üstünde yeralan iki nokta ise zamana göre türevi temsil etmektedir.

Temel (bünye) denklemleri,

$$\boldsymbol{T_{rl}} = \boldsymbol{\lambda_0 e_{mm} \delta_{rl}} + \boldsymbol{2\mu_0 e_{rl}} + \boldsymbol{\lambda_* \dot{e}_{mm} \delta_{rl}} + \boldsymbol{2\mu_* \dot{e}_{rl}} \tag{4}$$

şeklinde olmak üzere, $\boldsymbol{\delta_{rl}}$ Kronecker deltayı, $\boldsymbol{\lambda_0}$ ve $\boldsymbol{\mu_0}$ Lamé sabitlerini, $\boldsymbol{\lambda_*}$ ve $\boldsymbol{\mu_*}$ viskosite sabitlerini göstermektedir ve $\boldsymbol{e_{rl}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{u_{r,l}} + \boldsymbol{u_{l,r}})$ şeklindedir.

Diğer taraftan disipasyon eşitsizliği

$$\boldsymbol{\lambda_* \dot{e}_{mm} \dot{e}_{nn}} + \boldsymbol{2\mu_* \dot{e}_{rl} \dot{e}_{rl}} \geq \boldsymbol{0} \tag{5}$$

formundadır ve $\boldsymbol{\mu_*} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda_*} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\mu_*} \geq \boldsymbol{0}$ ayrıca $\boldsymbol{\mu_0} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda_0} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\mu_0} \geq \boldsymbol{0}$ olduğunu kabul edilmektedir [14]. Bu bağıntılar hareket denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\boldsymbol{\mu_0} \Delta \boldsymbol{u_l} + (\boldsymbol{\lambda_0} + \boldsymbol{\mu_0})\boldsymbol{u_{m,ml}} + \boldsymbol{\mu_*} \Delta \boldsymbol{\dot{u}_l} + (\boldsymbol{\lambda_*} + \boldsymbol{\mu_*})\boldsymbol{\dot{u}_{m,ml}} = \boldsymbol{\rho \ddot{u}_l} \tag{6}$$

Not: viskosite sabitleri özdeş olarak sıfır olduğunda yukarıdaki denklemler homojen, izotropik elastik bir malzeme ile dolu ortama ait denklemlere indirgenmektedir. Elastisite teorisinden bilindiği üzere, disipasyon enerjisinin varlığı nedeniyle (6) denklemi, zaman sınırsız olarak büyürken üstel olarak sıfıra yaklaşan çözümlere sahiptir.

BİR HOMOJEN İSOTROP KELVİN-VOIGT VİSKOELASTİK UZAYDA ZAMANDA SÖNEN DÜZLEM DALGALAR

Bu bölümde zamanla sönen

$$\boldsymbol{u_r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A_r} \boldsymbol{e^{i\kappa(n_s X_s - vt)}} + +\boldsymbol{k.e.} \tag{7}$$

formunda düzlem dalga formunu göz önüne alıyoruz. Burada k.e. kendinden önce gelen ifadenin kompeks eşleniğini göstermektedir. Yukarıda da belirtildiği üzere, $\mathbf{Im}(\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{0}$ olduğu kabul edilmektedir. Burada dikkat edilirse eğer $\mathbf{Im}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ ise bu durumda zamanda harmonik olarak değişen sönümlenmeyen (undamped) dalga elde edilmiş olur. $\mathbf{Im}(\boldsymbol{v}) < \boldsymbol{0}$ durumunda zamanda sönümlenen dalgalar elde edilir. (7) çözüm formu (6) ile verilen hareket denkleminde yerine yazılırsa $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_0} - \boldsymbol{i\kappa v \lambda_*}$ ve $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0} - \boldsymbol{i\kappa v \mu_*}$ olarak tanımlanmak üzere

$$\left[(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\rho v^2})\boldsymbol{\delta_{rl}} + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{n_r n_l}\right]\boldsymbol{A_r} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

denklemi elde edilir. (8) denkleminin sıfırdan farklı çözümü için

$$\mathbf{det}\left[(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\rho v^2})\boldsymbol{\delta_{rl}} + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{n_r n_l}\right] = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

karakteristik denklemin gerçeklenmesi gerekir. (9) denkleminden

$$(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\rho v^2})^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{2\mu} - \boldsymbol{\rho v^2}) = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

denklemi elde edilir. (10) denkleminin $\boldsymbol{v}$ için çözümleri

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4c_1^2 - \kappa^2 c_1^{*4}} - i\kappa c_1^{*2}\right),\ \ \boldsymbol{v_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4c_2^2 - \kappa^2 c_2^{*4}} - i\kappa c_2^{*2}\right),$$

olarak bulunur ve burada, c_1, c_2, c_1^* ve c_2^* sırasıyla

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}},\ \ c_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}},\ \ c_1^* = \sqrt{\frac{\lambda_* + 2\mu_*}{\rho}},\ \ c_2^* = \sqrt{\frac{\mu_*}{\rho}}, \tag{11}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Yukarıdaki bağıntılardan açıktır ki viskoelastik ortamda zamanda sönümlenen bir dalga, eğer $c_1^* < \sqrt{2c_1/\kappa}$ ve $c_2^* < \sqrt{2c_2/\kappa}$ eşitsizlikleri sağlanırsa mümkün olabilmektedir. $v = v_1$ için, (8) denklemi $(-\delta_{rl} + n_r n_l)A_r = 0$ denklemine indirgenir ve bu durumda $A_l = (A_m n_m)n_l$ olur ve bu sonuç (7) çözümünde kullanılırsa,

$$u_r^{(L)}(X,t) = A_l n_l e^{i\kappa\left(n_s X_s - \frac{t}{2}\sqrt{4c_1^2 - \kappa^2 c_1^{*4}}\right)} n_r e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 c_1^{*2}} + k.e. \tag{12}$$

formunda bir uzun dalga çözümü elde edilir. $v = v_2$ için, (8) denklemi $(\lambda + \mu)(A_r n_r)n_l = 0$ formuna indirgenir ve $A_m n_m = 0$ bulunur. Bu durumda da (7) çözümü

$$u_r^{(T)}(x,t) = A_r e^{i\kappa\left(n_s X_s - \frac{t}{2}\sqrt{4c_2^2 - \kappa^2 c_4^{*4}}\right)} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 c_2^{*2}} + k.e. \tag{13}$$

formunda bir enlemesine dalga çözümü olarak elde edilir. Dikkat edilirse viskosite etkisinin olmadığı durumda, $c_1^* < \sqrt{2c_1/\kappa}$ ve $c_2^* < \sqrt{\frac{2c_2}{\kappa}}$ ile verilen kısıtlama özdeş olarak sağlanır ve dalga hızları v_1 ve v_2 elastik dalga hızları sırasıyla c_1 ve c_2 ile çakışır. Bu durumda da dalgaların zamanda sönümlenmeyen dalgalar olacağı açıkça görülür [13].

ELASTİK HOMOJEN OLMAYAN BİR TABAKA İLE KAPLI ÜSTEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ VİSKOELASTİK BİR YARIM UZAYDA RAYLEİGH DALGALARI

Başlangıç konumunda, h>0 olmak üzere

$$D_1 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -h < X_2 < 0, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \tag{14}$$

bölgesini dolduran ve homojen olmayan elastik bir malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka, başlangıç konumunda

$$D_2 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid X_2 > 0, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \tag{15}$$

bölgesini dolduran ve homojen olmayan izotrop Kelvin Voigt viskoelastik malzemeden oluşan yarım uzayı kaplamaktadır. Bu tabakalı yarım uzayda X_1 ekseni boyunca yayılan $x_1 = X_1 + u_1^{(m)}(X_1, X_2, t)$, $x_2 = X_2 + u_2^{(m)}(X_1, X_2, t)$ ve $x_3 = X_3$, m=1,2 denklemleri ile tanımlanan dalga hareketini gözönüne alalım. Burada parantez içindeki üst indis 1 ise ilgili büyüklük tabakayı, 2 ise yarım uzayı temsil etmektedir. Dalga hareketine etki eden kütle kuvvetinin bulunmadığını varsayalım. Elastik tabakaya ve yarım uzaya ait temel denklemler, sırasıyla

$$T_{rl}^{(1)} = \lambda_0^{(1)} e_{mm}^{(1)} \delta_{rl} + 2\mu_0^{(1)} e_{rl}^{(1)},$$

$$T_{rl}^{(2)} = \lambda_0^{(2)} e_{mm}^{(2)} \delta_{rl} + 2\mu_0^{(2)} e_{rl}^{(2)} + \lambda_*^{(2)} \dot{e}_{mm}^{(2)} \delta_{rl} + 2\mu_*^{(2)} \dot{e}_{rl}^{(2)} \tag{16a,b}$$

şeklindedir. Dalga hareketi esnasında $X_2 = -h$ serbest yüzeyi üzerinde gerilmelerin sıfır olması koşulundan $T_{2r}^{(m)} = 0$, r=1,2; $X_2 = 0$ ara yüzeyinde yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olması koşulundan $u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$ ve $T_{2r}^{(1)} = T_{2r}^{(2)}$, r=1,2 ve derinlik arttıkça, $X_2 \to \infty$, yerdeğiştirme ve gerilmelerin sıfıra gitmesi koşullarından, $t > 0$ için $\lim_{x_2 \to \infty} u_r^{(2)}(X,t) = 0$ ve $\lim_{x_2 \to \infty} T_{mn}^{(2)}(X,t) = 0$ sınır koşulları elde edilir.

Bu çalışmada, pozitif X_1 ekseni boyunca κ dalga sayısı ile yayılan inhomojen düzlem dalgaları gözönüne alalım. Tabaka ve yarım uzayı dolduran malzemelerin malzeme parametreleri üstel olarak derinliğe bağlı olarak değişsin, yani, tabaka (m=1) ve yarım uzaya (m=2) ait lineer elastik parametreler üstel derecelendirilmiş formda,

$$\lambda_0^{(m)} = l^{(m)} e^{-2\tau X_2}, \quad \mu_0^{(m)} = m^{(m)} e^{-2\tau X_2}, \ \rho_0^{(m)} = R^{(m)} e^{-2\tau X_2}, \qquad (17)$$

alınırken; yarım uzaya ait lineer viskosite parametreleri de üstel derecelendirilmiş şekilde

$$\lambda_*^{(2)} = L^{(2)} e^{-2\tau X_2}, \ \mu_*^{(2)} = M^{(2)} e^{-2\tau X_2} \qquad (18)$$

formunda olsunlar. Burada, $l^{(m)}$, $m^{(m)}$, $R^{(m)}$, $L^{(2)}$ ve $M^{(2)}$ reel sabitleri sırasıyla $m^{(m)} > 0$, $R^{(m)} > 0$, $l^{(m)} + \frac{2}{3} m^{(m)} > 0$, $M^{(2)} \geq 0$ ve $L^{(2)} + \frac{2}{3} M^{(2)} \geq 0$ koşullarını sağlarlar.

Böyle bir ortamda yayılan dalgalar için aşağıdaki formda çözümleri arayalım [15]:

$$u_j^{(m)}(X,t) = V_j^{(m)} e^{i(\kappa X_1 - \kappa v t)} e^{-(\kappa r^{(m)} X_2 + \tau X_2)} + k.e. \, j = 1,2. \qquad (19)$$

Burada $V_j^{(m)}$ 'ler kompleks parametreler, κ dalga sayısı, v ise $\mathrm{Re}(v) > 0$ ve $\mathrm{Im}(v) \leq 0$ koşullarını sağlayan kompleks bir parametre şeklinde tanımlanmaktadırlar. Ayrıca, dalgaların yarı sonsuz uzayda derinlik arttıkça sönmeleri koşulunun gerçeklenmesi gerektiğinden $r^{(m)}$ kompleks bir parametre olmak üzere, $\mathrm{Re}(r^{(2)}) > |\tau|/\kappa$ koşulunu sağlaması gerektiği kabul edilmektedir. (19)'da verilen çözüm formları (17) ve (18) lineer sabitler ile birlikte (16) da verilen bünye denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(1)} &= i\kappa\left[\left(l^{(1)} + 2m^{(1)}\right)V_1^{(1)} + i l^{(1)}\left(r^{(1)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(1)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(1)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{22}^{(1)} &= i\kappa\left[l^{(1)} V_1^{(1)} + i\left(l^{(1)} + 2m^{(1)}\right)\left(r^{(1)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(1)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(1)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{12}^{(1)} &= i\kappa\left[i m^{(1)}\left(r^{(1)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_1^{(1)} + m^{(1)} V_2^{(1)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(1)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{33}^{(1)} &= i\kappa\left[l^{(1)} V_1^{(1)} + i l^{(1)}\left(r^{(1)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(1)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(1)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{13}^{(1)} &= T_{23}^{(1)} = 0, \qquad (20)\\
T_{11}^{(2)} &= i\kappa\left[\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)V_1^{(2)} + i\lambda^{(2)}\left(r^{(2)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(2)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(2)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{22}^{(2)} &= i\kappa\left[\lambda^{(2)} V_1^{(2)} + i\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)\left(r^{(2)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(2)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(2)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{12}^{(2)} &= i\kappa\left[i\mu^{(2)}\left(r^{(2)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_1^{(2)} + \mu^{(2)} V_2^{(2)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(2)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{33}^{(2)} &= i\kappa\left[\lambda^{(2)} V_1^{(2)} + i\lambda^{(2)}\left(r^{(2)} - \tfrac{\tau}{\kappa}\right)V_2^{(2)}\right] e^{i\kappa[(X_1 - vt) + i(r^{(2)} + \frac{\tau}{\kappa})X_2]} + k.e.,\\
T_{13}^{(2)} &= T_{23}^{(2)} = 0.
\end{aligned}$$

şeklinde gerilme bileşenleri elde edilir.

Burada $\lambda^{(2)} = l^{(1)} - i\kappa v L^{(2)}$, $\mu^{(2)} = m^{(1)} - i\kappa v M^{(2)}$ şeklinde tanımlanmıştır. (20) bağıntıları ve (19) çözüm formları tabaka ve yarımuzaya ait temel denklemlerde yerlerine yazılırsa $(V_1^{(m)}, V_2^{(m)})$ için aşağıdaki homojen cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\left[-c_{66}^{(m)}\left(r^{(m)2} - \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) + c_{11}^{(m)} E_1^{(m)}\right]V_1^{(m)} + i\left[c_{66}^{(m)}\left(r^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right) + c_{12}^{(m)}\left(r^{(m)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)\right]V_2^{(m)} = 0,$$

$$i\left[c_{66}^{(m)}\left(r^{(m)} - \frac{\tau}{\kappa}\right) + c_{12}^{(m)}\left(r^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right)\right]V_1^{(m)} + \left[-c_{11}^{(m)}\left(r^{(m)2} - \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) + c_{66}^{(m)} E_1^{(m)}\right]V_2^{(m)} = 0 \qquad (21)$$

Burada

$$c_{12}^{(1)} = l^{(1)}, c_{66}^{(1)} = m^{(1)}, c_{11}^{(1)} = c_{12}^{(1)} + 2c_{66}^{(1)},$$
$$c_{11}^{(2)} = c_{12}^{(2)} + 2c_{66}^{(2)}, c_{12}^{(2)} = (l^{(2)} - i\kappa v L^{(2)}), c_{66}^{(2)} = (m^{(2)} - i\kappa v M^{(2)}), \quad (22)$$
$$E_1^{(m)} = 1 - \frac{R^{(m)}v^2}{c_{11}^{(m)}}, \qquad E_2^{(m)} = 1 - \frac{R^{(m)}v^2}{c_{66}^{(m)}}$$

şeklinde tanımlanırlar. (21) homojen cebirsel denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerinin var olması, yani dalgaların yayılma koşulundan

$$r^{(m)^4} - \left(E_1^{(m)} + E_2^{(m)} + 2\frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) r^{(m)^2} + E_1^{(m)} E_2^{(m)} + \left(E_1^{(m)} + E_2^{(m)} + 4\frac{c_{12}^{(m)}}{c_{11}^{(m)}}\right)\frac{\tau^2}{\kappa^2} + \frac{\tau^4}{\kappa^4} = 0 \quad (23)$$

bağıntısı elde edilir. Dikkat edilirse (23) denkleminin çözümlerinin τ parametresine bağlı olduğu gözlemlenebilir ve denklemin kökleri

$$r^{(m)^2}{}_{1,2} = \frac{1}{2}[E_1^{(m)} + E_2^{(m)} + 2\frac{\tau^2}{\kappa^2} \pm \sqrt{\left(E_1^{(m)} - E_2^{(m)}\right)^2 - 16\frac{c_{12}^{(m)}}{c_{11}^{(m)}}\frac{\tau^2}{\kappa^2}}] \quad (24)$$

olarak bulunurlar. Burada dikkat edilmesi gereken durum, yarı sonsuz uzayda derinlik arttıkça dalgaların sönmesi koşulundan, Re($r_1^{(2)}$) > $\frac{|\tau|}{\kappa}$ ve Re($r_2^{(2)}$) > $\frac{|\tau|}{\kappa}$ olmalıyken, tabaka için ise böyle bir kısıtlama söz konusu olmamasıdır. Bu nedenle yarı sonsuz uzaya ait çözümlerde sadece $r_1^{(2)}$ ve $r_2^{(2)}$'ye karşı gelen terimler çözüm formuna dahil edilirken, tabakaya ait çözümlerde $\pm r_1^{(1)}$ ve $\pm r_2^{(1)}$' e karşı gelen terimler de dahil edilmelidir. Gerekli ara işlemlerden sonra (19) da yeralan $V_1^{(m)}$ve $V_2^{(m)}$ parametreleri aşağıdaki şekilde bulunurlar:

$r = \pm r_1^{(m)}$ için
$$V_{1\pm}^{(m)} = \frac{1}{\kappa}[\frac{c_{11}^{(m)}}{c_{66}^{(m)}}\left(-(\pm r_1^{(m)})^2 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) + E_2^{(m)}],$$
$$V_{2\pm}^{(m)} = -\frac{i}{\kappa}[(\pm r_1^{(m)})^2 - \frac{\tau}{\kappa} + \frac{c_{12}^{(m)}}{c_{66}^{(m)}}\left((\pm r_1^{(m)}) + \frac{\tau}{\kappa}\right)]. \quad (25a,b)$$

$r = \pm r_2^{(m)}$ için
$$V_{1\pm}^{(m)} = U_{1\pm}^{(m)} = -\frac{i}{\kappa}[(\pm r_2^{(m)})^2 + \frac{\tau}{\kappa} + \frac{c_{12}^{(m)}}{c_{66}^{(m)}}\left((\pm r_2^{(m)}) - \frac{\tau}{\kappa}\right)],$$
$$V_{2\pm}^{(m)} = U_{2\pm}^{(m)} = \frac{1}{\kappa}[\left(-(\pm r_2^{(m)})^2 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) + \frac{c_{11}^{(m)}}{c_{66}^{(m)}}E_1^{(m)}]. \quad (26a,b)$$

Bu çalışmada tabakalı yarım uzayda Rayleigh dalgası yayılım problemi ile ilgilenildiği için çözüm formları aşağıdaki şekilde alınır;

$$u_1^{(1)}(X,t) = \Big[\delta_1^{(1)} V_{1+}^{(1)} e^{-\kappa\left(r_1^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_2^{(1)} U_{1+}^{(1)} e^{-\kappa\left(r_2^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_3^{(1)} V_{1-}^{(1)} e^{-\kappa\left(-r_1^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} +$$
$$\delta_4^{(1)} U_{1-}^{(1)} e^{-\kappa\left(-r_2^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}\Big] e^{i\kappa(X_1 - vt)} + k.e.,$$
$$u_2^{(1)}(X,t) = \Big[\delta_1^{(1)} V_{2+}^{(1)} e^{-\kappa\left(r_1^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_2^{(1)} U_{2+}^{(1)} e^{-\kappa\left(r_2^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_3^{(1)} V_{2-}^{(1)} e^{-\kappa\left(-r_1^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} +$$
$$\delta_4^{(1)} U_{2-}^{(1)} e^{-\kappa\left(-r_2^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}\Big] e^{i\kappa(X_1 - vt)} + k.e., \quad (27a\text{-}d)$$
$$u_1^{(2)}(X,t)2\Big[\delta_1^{(2)} V_{1+}^{(2)} e^{-\kappa\left(r_1^{(1)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_2^{(2)} U_{1+}^{(2)} e^{-\kappa\left(r_2^{(2)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}\Big] e^{i\kappa(X_1 - vt)} + k.e.,$$
$$u_2^{(2)}(X,t) = \Big[\delta_1^{(2)} V_{2+}^{(2)} e^{-\kappa\left(r_1^{(2)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_2^{(2)} U_{2+}^{(2)} e^{-\kappa\left(r_2^{(2)} - \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}\Big] e^{i\kappa(X_1 - vt)} + k.e..$$

Burada $\delta_j^{(m)}, j = 1,2,3,4$ parametreleri, kompleks parametrelerdir. Bu çözüm formları gerilme tensör bileşenlerinde kullanılırsa

$$T_{12}^{(m)} = \Big[\delta_1^{(m)} Y_{12+}^{(m)} e^{-\kappa\left(r_1^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_2^{(m)} Z_{12+}^{(m)} e^{-\kappa\left(r_2^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} + \delta_3^{(m)} Y_{12-}^{(m)} e^{-\kappa\left(-r_1^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2} +$$
$$\delta_4^{(m)} Z_{12-}^{(m)} e^{-\kappa\left(-r_2^{(m)} + \frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}\Big] e^{i\kappa(X_1 - vt)} + k.e., \quad \mathbf{(28a,b)}$$

$$\boldsymbol{T}_{22}^{(m)}=[\boldsymbol{\delta}_1^{(m)}\boldsymbol{Y}_{22+}^{(m)}\boldsymbol{e}^{-\kappa\left(r_1^{(m)}+\frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}+\boldsymbol{\delta}_2^{(m)}\boldsymbol{Z}_{22+}^{(m)}\boldsymbol{e}^{-\kappa\left(r_2^{(m)}+\frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}+\boldsymbol{\delta}_3^{(m)}\boldsymbol{Y}_{22-}^{(m)}\boldsymbol{e}^{-\kappa\left(-r_1^{(m)}+\frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}+\boldsymbol{\delta}_4^{(m)}\boldsymbol{Z}_{22-}^{(m)}\boldsymbol{e}^{-\kappa\left(-r_2^{(m)}+\frac{\tau}{\kappa}\right)X_2}]\boldsymbol{e}^{i\kappa(X_1-vt)}+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{e}..$$

bulunur. Burada açıktır ki $m=2$ için, yani yarı sonsuz uzaya ait gerilme tensör bileşenlerinde $\boldsymbol{Y}_{22-}^{(2)}=0$ **ve** $\boldsymbol{Z}_{22-}^{(2)}=0$'dır. $\boldsymbol{Y}_{12\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Y}_{22\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Z}_{12\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Z}_{22\pm}^{(m)}$ katsayıları, malzeme parametreleri, dalga sayısı ve heterojenlik parametresine bağlı katsayılardır.

(27) çözüm formları ve (28) gerilme tensör bileşenleri sınır koşullarında kullanılırsa

$$M=\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{12+}^{(1)}e^{\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}} & \boldsymbol{Z}_{12+}^{(1)}e^{\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}} & \boldsymbol{Y}_{12-}^{(1)}e^{-\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}} & \boldsymbol{Z}_{12-}^{(1)}e^{-\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{Y}_{22+}^{(1)}e^{\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}} & \boldsymbol{Z}_{22+}^{(1)}e^{\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}} & \boldsymbol{Y}_{22-}^{(1)}e^{-\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}} & \boldsymbol{Z}_{22-}^{(1)}e^{-\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}+}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}+}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}-}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}-}^{(\boldsymbol{1})} & -\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}+}^{(\boldsymbol{2})} & -\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}+}^{(\boldsymbol{2})} \\ \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}+}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}+}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}-}^{(\boldsymbol{1})} & \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}-}^{(\boldsymbol{1})} & -\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}+}^{(\boldsymbol{2})} & -\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}+}^{(\boldsymbol{2})} \\ \boldsymbol{Y}_{12+}^{(1)} & \boldsymbol{Z}_{12+}^{(1)} & \boldsymbol{Y}_{12-}^{(1)} & \boldsymbol{Z}_{12-}^{(1)} & -\boldsymbol{Y}_{12+}^{(2)} & -\boldsymbol{Z}_{12+}^{(2)} \\ \boldsymbol{Y}_{22+}^{(1)} & \boldsymbol{Z}_{22+}^{(1)} & \boldsymbol{Y}_{22-}^{(1)} & \boldsymbol{Z}_{22-}^{(1)} & -\boldsymbol{Y}_{22+}^{(2)} & -\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{22}+}^{(\boldsymbol{2})} \end{pmatrix} \quad \textbf{(29)}$$

ve

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_1^{(1)} \quad \delta_2^{(1)} \quad \delta_3^{(1)} \quad \delta_4^{(1)} \quad \delta_1^{(2)} \quad \delta_2^{(2)}\right)^T \quad \textbf{(30)}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{M\delta}=\boldsymbol{0} \quad \textbf{(31)}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Yukarıda da ifade edildiği üzere böyle bir denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu bağıntı, çalışmada söz konusu olan dalga kılavuzunda yayılan Rayleigh dalgalarının sekuler denklemini verir:

$$\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\xi}_2\boldsymbol{\eta}_1=0. \quad \textbf{(32)}$$

Burada

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{S}_1\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{S}_2\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{S}_3\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right)+\boldsymbol{S}_4\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right),$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{F}_1\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{F}_2\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{F}_3\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right)+\boldsymbol{F}_4\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{K}_1\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{K}_2\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{K}_3\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right)+\boldsymbol{K}_4\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right), \quad \textbf{(33)}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{J}_1\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{J}_2\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_1^{(1)}\right)+\boldsymbol{J}_3\textbf{Cosh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right)+\boldsymbol{J}_4\textbf{Sinh}\left(\boldsymbol{h}\kappa r_2^{(1)}\right),$$

Burada $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{K}_i$ ve $\boldsymbol{J}_i$ (i=1,2,3,4) katsayılarının $\boldsymbol{Y}_{12\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Y}_{22\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Z}_{12\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{Z}_{22\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}\pm}^{(m)}$, $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}\pm}^{(m)}$ ve $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}\pm}^{(m)}$ katsayılarına bağlı oldukları açıktır.

Yarı sonsuz uzaya ait viskosite parametreleri sıfır kabul edildiğinde, ayrıca hem tabaka hem de yarım uzaya ait lineer parametrelerin üstel olarak derecelenmesini gösteren heterojenlik parametresi τ sıfır kabul edildiğinde (32) ile verilen denklem homojen elastik bir tabaka ile kaplı homojen bir elastik yarım uzayda yayılan lineer Rayleigh dalgalarına ait dispersiyon bağıntısına indirgenmektedir. Gelecekte yapılacak bir çalışmada, (32) ile verilen denklemin analizinin, seçilen bazı özel malzeme parametreleri için sayısal olarak gerçekleştirilmesi hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] S. C. Hunter, (1962), Viscoelastic waves. In: Sneddon, I.N., Hill, R. (eds.) *Progress in Solid Mechanics*, vol. I. North-Holland, Amsterdam.

[2] F.J. Lockett, (1962), The reflection and refraction of waves at an interface between viscoelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids* **10**, 53–64

[3] M.A. Hayes, R.S. Rivlin, (1969),Propagation of sinusoidal small-amplitude waves in a deformed viscoelastic solid. *I. J. Acoust. Soc. Am*. **46**, 610–616.

[4] M.A. Hayes, R.S. Rivlin, (1972), Propagation of sinusoidal small-amplitude waves in a deformed viscoelastic solid. II. *J. Acoust. Soc. Am*. **51**, 1652–1663 .

[5] M.A. Hayes, R.S. Rivlin, (1972), Longitudinal waves in a linear viscoelastic material. *Z. Angew. Math. Phys*. **23**, 153–156.

[6] M.A. Hayes, R.S. Rivlin, (1974), Plane waves in linear viscoelastic materials. *Q. Appl. Math.* **32**, 113–121.

[7] P.K. Currie, M.A. Hayes, P.M. O'Leary, (1977), Viscoelastic Rayleigh Waves, *Q. Appl. Math.* **35**, 35-53.

[8] P.K. Currie, P.M. O'Leary, (1977), Viscoelastic Rayleigh Waves II, *Q. Appl. Math.* 36, 444-454.

[9] P.M. O'Leary, (1981), Viscoelastic Rayleigh Waves for constant Poisson's ratio, *Proc. R. Ir. Acad. Sci.* **81A,** 144-155.

[10] M. Romeo, (2001), Rayleigh waves on a viscoealastic solid half space, *J. Acoust. Soc. Am.* **110,** 59-67.

[11] D. Nkemzi, (1997), A new formula fort he velocity of Rayleigh waves, *Wave motion,* **26,** 199-205.

[12] T.P. Ivanov, R. Savova, (2005), Viscoelastic surface waves of an assigned wavelength, *Eur. J. Mech. A., Solids.,* **24,** 305-310.

[13] S. Chirita, M. Ciarletta, V. Tibullo, (2014), Rayleigh Surface Waves on a Kelvin-Voigt Viscoelastic Half-Space, *J. Elast.* **115,** 61-76.

[14] A.C. Eringen, (1967), Mechanics of Continua, Wiley, New York.

[15] M. Destrade, (2007), Seismic Rayleigh waves on an exponentially graded, orthotropic half-
space, *Proc. R. Soc. A*, **463**, 495-502.