



## ORTOTROP ZEMİNE OTURAN SÜPER ELİPTİK KESİTLİ AKIŞKAN TANKI İNCE TABAN PLAĞININ SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Akif Kutlu, Bahadır Uğurlu ve Mehmet Hakkı Omurtag  
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

In this study, the free vibration analysis of thin plates forming the bottom of rigid fluid storage tanks with super-elliptic section is performed. The fluid storage tank is considered to rest on orthotropic Pasternak foundation while storing ideal quiescent fluid. The added mass terms included from the fluid domain into plate equation of motion are computed by a boundary element method and the super-elliptic bottom plate interacting with foundation is simulated by a mixed finite element formulation using the Hellinger-Reissner principle. The variation of the natural angular frequency values of the bottom plate with respect to various tank geometries, fluid depth and foundation parameters are investigated intensively.

### ÖZET

Bu çalışmada, süper eliptik kesitli, rijit akışkan tanklarının ince taban plaklarının serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Akışkan tankının ortotrop Pasternak elastik zeminine oturduğu düşünülmüş ve içerideki akışkan ideal olarak alınmıştır. Akışkanın plak davranışı üzerindeki eylemsizlik etkileri sınır eleman yöntemi ile tanımlanırken, zeminle temas eden süper eliptik geometri taban plağı Hellinger Reissner prensibi kullanılarak karışık sonlu eleman formülasyonu ile modellenmiştir. Taban plağı doğal frekans değerlerinin farklı tank geometrisi, akışkan yüksekliği ve zemin parametrelerine bağlı değişimi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

### GİRİŞ

Taşıyıcı sistemleri oluşturan en temel elemanlardan birisi olan plaklar inşaat, gemi inşaatı, uçak ve uzay mühendisliği gibi birçok mühendislik alanında yaygın uygulama alanları bulmaktadır [1]. Kimi zaman sadece yüzeylerine aktarılan yüklere maruz kalan plaklar, birçok durumda da farklı sürekli ortamlarla etkileşime girebilmektedir. Örnek olarak, elastik zemin [2], akışkan [3] ya da zemin ve akışkanın bir arada olduğu [4] etkileşim durumlarında, plak mekanik davranışı yalın çalışma durumuna göre oldukça farklılaşabilmektedir. Elastik zeminle etkileşen çubuk ve plak yapısal elemanlarının mekanik davranışıyla ilgili 2005 yılına kadar yapılan çalışmalar [2]'de derlenmiştir. Plak-zemin etkileşim problemini Kirchhoff-Pasternak modelleriyle ele alan öncü sonlu eleman çözümleri olarak Omurtag ve diğ. [5] ve Omurtag ve Kadioğlu [6] gösterilebilir. Üç boyutlu elastisite denklemlerini kalın dairesel plaklara uyarlayan Zhou ve diğ. [7], plak serbest titreşim probleminde Pasternak zemini etkisini incelemişlerdir. Winkler/Pasternak zeminine oturan, düzlem içi kuvvetlere maruz dikdörtgen Mindlin plaklarının serbest titreşim analizi için kapalı bir kesin çözüm yöntemi Akhavan ve diğ. [8] tarafından geliştirilmiştir. Sonlu eleman ve diferansiyel kuadratur yöntemlerini birleştiren Dehghan ve Baradaran [9], üç boyutlu elastisite denklemlerini kullanarak Pasternak zeminine oturan kalın plakların burkulma ve serbest titreşim davranışını incelemişlerdir. Plak-akışkan etkileşim probleminin araştırıldığı son dönem çalışmaları

arasından bazıları şu şekilde sıralanabilir: Ergin ve Uğurlu akışkan içine kısmen daldırılan ankastre tutulu dikdörtgen plakların [3] ve akışkanla kısmen doldurulmuş tankların [10] serbest titreşim problemini bir sınır eleman yöntemi ile çözmüşlerdir. Rijit duvarlarla çevrili bir akışkan bölgesini sınırlayan iki özdeş dairesel plağın serbest titreşim parametreleri, Jeong [11] tarafından Fourier-Bessel seri açılımı ve Rayleigh-Ritz yöntemi birleştirilerek elde edilmiştir. Benzer koşullar altında dikdörtgen plaklar için çalışmayı Jeong ve Kim [12] Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak yapmıştır. Askari ve Daneshmand [13], silindirik bir cismin içine kısmen daldırılan akışkan dolu bir rijit silindirik tankın daire şeklindeki taban plağının dinamik davranışını incelemiştir. Hasheminejad ve Tafani [14] rijit duvarlı akışkan tanklarının eliptik taban plaklarının serbest titreşim analizini yapmıştır.

Plak-zemin ve plak-akışkan sistemlerinin dinamik davranışı çok sayıda araştırmaya konu olmuşsa da, plak-zemin-akışkan etkileşimini birlikte ele alan çalışmaların oldukça kısıtlı olduğu görülebilir. Göreceli olarak erken bir çalışmada Chiba [15], Winkler zeminine oturan daire kesitli akışkan tankının ince elastik taban plağının aksel simetrik titreşimini analitik olarak ele almıştır. Uğurlu ve diğ. [4], karışık sonlu eleman ve sınır eleman yöntemlerini birlikte kullanarak, Pasternak zeminine üzerine oturan ve sınırsız bir akışkan ortamı ile kısmen etkileşim içinde olan ince dikdörtgen plakların dinamik davranışını incelemiştir. Aynı problem, Hashemi ve diğ. [16] tarafından nispeten kalın plak ve sınırlandırılmış akışkan ortamı için Timoshenko çubuk fonksiyonlarının kullanıldığı bir Rayleigh-Ritz uygulaması ile ele alınmıştır. Hashemi ve diğ. [17], doğrusal değişken düzlem içi yükleme altındaki taban plaklarının burkulma ve serbest titreşim parametrelerini belirlemiştir. Kutlu ve diğ. [18], [4]'de kullanılan fiziksel modelleri ortotrop zemin ve nispeten kalın plak modelleriyle geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, ortotrop elastik zemine oturan süper eliptik kesite sahip rijit duvarlı akışkan tanklarının taban plaklarının serbest titreşim parametreleri incelenmiştir. Akışkan ortamının plak-zemin sistemine uyguladığı eylemsizlik kuvveti formundaki hidrodinamik etkiler sınır eleman yöntemi ile hesaplanmış, plak-zemin etkileşiminin sonlu eleman formülasyonu ise Hellinger Reissner prensibine göre türetilmiştir. Akışkan basınç kuvveti plak yerdeğiştirmeleri cinsinden tanımlanmış ve etkisi yapı hareket denkleminde doğrudan tanımlanmıştır. Sunulan sayısal uygulamalar, süper eliptik plak geometrisi, akışkan yüksekliği ve ortotrop zemin parametrelerindeki değişimlerin taban plağının doğal frekans değerleri üzerindeki etkilerini kapsamaktadır.

## FORMÜLASYON

### Plak-Zemin Etkileşimi Alan Denklemleri

Kirchhoff plak teorisinde yer değiştirme alanı  $U(w)$  çökmesiyle tanımlanır [19]. Plak şekil değiştirmeleri (ortalama düzlem eğrilikleri)  $\epsilon(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$  kartezyen koordinat sisteminde  $(x, y, z)$  Hellinger-Reissner varyasyonel prensibinde kullanılmak üzere yerdeğiştirmeler ( $\epsilon^u$ ) ve iç kuvvetler cinsinden ( $\epsilon^\sigma$ ) tarif edildiğinde:  $\epsilon^u = \epsilon^\sigma$  ifadesi,

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x = -w_{,xx} = \frac{12}{Eh^3}(M_{xx} - M_{yy}\nu) \quad , \quad \kappa_y = -w_{,yy} = \frac{12}{Eh^3}(M_{yy} - M_{xx}\nu) \\ \kappa_{xy} = -w_{,xy} = \frac{12M_{xy}}{Gh^3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Burada,  $E, G, \nu$ , ve  $h$  plağın sırasıyla elastisite modülü, kayma modülü, Poisson oranı ve kalınlığıdır ve  $\mathbf{M}(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})$  eğilme ve burulma momentlerini temsil etmektedir. Ortotrop Pasternak zemin modeli, plak ve zemin arasındaki basıncı

$$p = kw - G_\xi \cos^2 \theta w_{,xx} + 2 \cos \theta \sin \theta w_{,yx} + \sin^2 \theta w_{,yy} - G_\eta \sin^2 \theta w_{,xx} - 2 \sin \theta \cos \theta w_{,yx} + \cos^2 \theta w_{,yy}$$

şeklinde tanımlar.  $k$  Winkler zemin parametresi,  $\theta$  yerel ortotropi doğrultuları  $(\xi, \eta)$  ile  $(x, y)$  global eksenleri arasındaki açıyı ve  $G_\xi, G_\eta$   $\xi, \eta$  doğrultularındaki zemin kayma parametreleridir [18]. Tanımlanan zemin etkileşimi ile plak denge denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} -M_{xx,xx} - M_{yy,yy} - 2M_{xy,xy} + kw - G_\xi (\cos^2 \theta w_{,xx} + 2 \cos \theta \sin \theta w_{,yx} + \sin^2 \theta w_{,yy}) \\ - G_\eta (\sin^2 \theta w_{,xx} - 2 \sin \theta \cos \theta w_{,yx} + \cos^2 \theta w_{,yy}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

### Plak-Zemin Etkileşiminin Birinci Varyasyonu ve Karışık Sonlu Eleman Denklemleri

Yapısal mekanik problemleri için tarif edilen enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu, Hellinger-Reissner prensibine göre aşağıdaki şekilde tarif edilir,

$$\delta \Pi_{HR} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u dV = 0, \quad (3)$$

Burada  $V$  problem bölgesini göstermektedir. Bünye bağıntıları (1) ve denge denklemlerinin (2), (3)'te yerleştirilmesi ile plak-zemin sisteminin fonksiyoneline ait birinci varyasyon,

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR} = \int_\Omega \left[ w_{,x} \delta M_{xx,x} - \frac{12}{Eh^3} (M_{xx} - M_{yy} \nu) \delta M_{xx} \right] d\Omega \\ + \int_\Omega \left[ w_{,y} \delta M_{yy,y} - \frac{12}{Eh^3} (M_{yy} - M_{xx} \nu) \delta M_{yy} \right] d\Omega \\ + \int_\Omega \left[ w_{,x} \delta M_{xy,y} + w_{,y} \delta M_{xy,x} - 2 \frac{12M_{xy}}{Gh^3} \delta M_{xy} \right] d\Omega + \int_\Omega [kw \delta w] d\Omega \\ + \int_\Omega G_\xi \left[ \cos^2 \theta w_{,x} \delta w_{,x} + \cos \theta \sin \theta w_{,y} \delta w_{,x} \right. \\ \left. + \cos \theta \sin \theta w_{,x} \delta w_{,y} + \sin^2 \theta w_{,y} \delta w_{,y} \right] d\Omega \\ + \int_\Omega G_\eta \left[ \sin^2 \theta w_{,x} \delta w_{,x} - \cos \theta \sin \theta w_{,y} \delta w_{,x} \right. \\ \left. - \cos \theta \sin \theta w_{,x} \delta w_{,y} + \cos^2 \theta w_{,y} \delta w_{,y} \right] d\Omega \\ + \int_\Omega [M_{xx,x} \delta w_{,x} + M_{xy,x} \delta w_{,y}] d\Omega + \int_\Omega [M_{xy,y} \delta w_{,x} + M_{yy,y} \delta w_{,y}] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde. Burada  $\Omega$  plak ortalama düzlemidir. Denklem (4)'de verilen integraller 4 düğüm noktalı ve  $C^0$  sürekliliğine sahip şekil fonksiyonları kullanılarak sayısal olarak hesaplandığında,  $[\mathbf{K}]$  sonlu eleman sistem matrisi elde edilir:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{ss}] & [\mathbf{k}_{su}] \\ [\mathbf{k}_{us}] & [\mathbf{k}_{uu}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

Burada  $u$  ve  $s$  sırasıyla, karışık yapıdaki matriste yer alan yer değiştirme ve kuvvet tipi büyüklüklerle ilgili terimlere karşılık gelmektedir. İzoparametrik plak elemanında plak yerdeğiştirmesiyle ( $w$ ) ilişkilendiren yayılı kütle matrisi

$$[\mathbf{m}] = [\rho h [\mathbf{k}_1]] \quad (6)$$

ile verilir. Burada,  $\rho$  plak yoğunluğudur ve  $\hat{N}$  bilineer şekil fonksiyonlarını göstermek üzere  $\mathbf{k}_1 = \int \hat{N}_i \hat{N}_j d\Omega$  şeklindedir.

### Akışkan-Yapı- Etkileşimi

Plakla etkileşim içindeki akışkan ortamı ideal ve hareketi irrotasyonel alındığında, akışkan hız vektörü  $\mathbf{v}$ , bir  $\Phi$  potansiyel fonksiyonu cinsinden  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$  ile tanımlanabilir ve süreklilik şartından  $\Phi$  harmonik bir fonksiyondur:  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Burada,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ ,  $t$  sırasıyla konum vektörünü ve zamanı temsil etmektedir. Bernoulli denkleminin doğrusal formu kullanılarak, plak yüzeyinde oluşan akışkan basıncı

$$p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (7)$$

ile verilir. Burada,  $\rho_f$  akışkan yoğunluğudur. Plak-akışkan arakesitinde akışkan ve plak hızlarının eşitliğini ifade eden kinematik sınır koşulu

$$S_w \text{ 'de } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (8)$$

şeklindedir. Denklemden  $\mathbf{n}$ , plak ıslak yüzeyi  $S_w$  üzerinde akışkan alanından dışa yönelen normal doğrultuyu,  $w$  ise plak ortalama düzleminin çökmesini göstermektedir. Bu çalışmada, plağın yüksek frekanslarda titreştiği öngörülerek akışkan serbest yüzey etkileri ihmal edilmiş, serbest yüzey sınır koşulu olarak sonsuz frekans koşulu uygulanmıştır [3]:

$$\Phi = 0 \quad (9)$$

$\Phi$  için Laplace denklemi ve (8), (9) sınır koşulları ile belirlenen sınır değer problemi, plak ıslak yüzeyinde tanımlı bir sınır integral denklem ile gösterilebilir:

$$c(\mathbf{X}) \Phi(\mathbf{X}) = \iint_{S_w} (\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) q(\mathbf{x}) - q^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \Phi(\mathbf{x})) dS \quad (10)$$

Burada,  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$  ve  $\mathbf{x}$  sırasıyla kaynak ve uygulama noktalarının konumu,  $\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  Laplace denkleminin temel çözümünü ve  $q = \partial \Phi / \partial n$  akışı yüzey normali doğrultusundaki hızı göstermektedir.  $c(\mathbf{X})$  serbest terimi,  $\Phi(\mathbf{X})$ 'in akışkan alanı içinde kalan oranını belirtir. Üç boyutlu homojen bir bölge için  $\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = 1/(4\pi r)$  ve  $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = -(\partial r / \partial n) / 4\pi r^2$  ile verilir. Burada,  $r$  kaynak ve bölge noktaları arasındaki uzaklıktır. Temel çözüm  $4\pi \Phi^* = 1/r - 1/r'$  şeklinde seçilerek, (9) serbest yüzey şartı doğrudan sağlanarak (10) sınır integral denklemi sadece ıslak yüzey üzerinde tanımlanabilir.  $r' = [(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z + Z)^2]^{1/2}$ , uygulama noktası ile kaynak noktasının serbest yüzey simetriği arasındaki uzaklıktır.

Genel bir plak geometrisi için, (10) integral denkleminin tanımlandığı plak ıslak yüzeyi, yüzey elemanları ile ayrıklaştırılır ve  $\Phi$ ,  $q$  dağılımları üzerinde düğüm noktalarındaki değerler cinsinden ifade edilebilir:

$$\Phi^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_j \Phi_{ij} \quad , \quad q^i = \sum_{j=1}^{n_i} N_j q_{ij}. \quad (11)$$

Bu ifadede,  $n_i$  sınır elemandaki düğüm noktası sayısı,  $\Phi^i$ ,  $q^i$   $i$ . sınır eleman için sırasıyla potansiyel fonksiyonu ile akış,  $\Phi_{ij}$  ve  $q_{ij}$  elemanın  $j$ . düğüm noktasının sırasıyla potansiyel ve akış değerleri ve  $N_j$  ilgili şekil fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada, 4 düğüm noktalı dörtgen elemanlar ve bilinear şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Ayrıklaştırmada kullanılan tüm düğüm noktalarının sırayla (10) denkleminde yer alan kaynak noktaları olarak atanması, (8) kinematik sınır koşulunun tanıtılması ve (11) yaklaşımlarının uygulanması ile ıslak yüzey üzerindeki potansiyel fonksiyonu dağılımı için aşağıdaki cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$c_k \Phi_k + \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (\Phi_{ij} \int_{S_i} N_j q^* dS) = i\omega \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_i} (w_{ij} \int_{S_i} N_j \Phi^* dS) \quad ; \quad k=1, \dots, n_n \quad (12)$$

Burada,  $n_n$  ve  $n_p$  sırasıyla toplam düğüm noktası ve sınır eleman sayılarını,  $S_i$   $i$ . sınır elemanın alanını,  $\Phi_k$   $k$ . düğüm noktasındaki potansiyel değerini ve  $w_{ij}$   $i$ . sınır elemanın  $j$ . düğüm noktasındaki çökme değerini göstermektedir. (12) denkleminin sağ tarafındaki  $i\omega$  çarpımı (8) sınır koşulunda harmonik harekete bağlı olarak ortaya çıkar. (12) denkleminde yüzey integrallerin uygulanması ile denklem sistemi,

$$\sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \Phi_j = i\omega \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} w_j \quad ; \quad i=1, \dots, n_n \quad (13)$$

şeklinde yazılabilir ve matris formda

$$\mathbf{H} \Phi = i\omega \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (14)$$

ile verilir. Burada,  $\Phi$  ve  $\mathbf{w}$  sırasıyla düğüm noktalarındaki potansiyel değerleri ve yer değiştirme vektörleridir. (12) eşitliği her ne kadar sadece plak titreşimlerinden kaynaklanan akışkan hareketlenmeleri için çıkartılmış olsa da, rijit duvarlar gibi akışkan alanını sınırlayan yüzeylerin varlığı durumunda geçerli olacak şekilde de düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{pp} & \mathbf{H}^{pr} \\ \mathbf{H}^{rp} & \mathbf{H}^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^p \\ \Phi^r \end{Bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{pp} & \mathbf{G}^{pr} \\ \mathbf{G}^{rp} & \mathbf{G}^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Burada,  $p$  ve  $r$  indisleri sırasıyla plak ıslak yüzeyini ve (8) yerine  $\partial\Phi/\partial n = 0$  sınır şartının uygulandığı rijit duvar yüzeyini simgelemektedir.  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$  katsayı matrisleri ile  $\Phi$ ,  $\mathbf{w}$  vektörleri elastik ve rijit yüzeylerle ilişkili alt bileşenlere ayrılmıştır. Söz konusu matris yapıdan, plak ıslak yüzeyindeki potansiyel fonksiyon dağılımı,

$$\Phi^p = i\omega \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w}, \quad (16)$$

biçiminde elde edilir.  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{H}^{pp} - \mathbf{H}^{pr} (\mathbf{H}^{rr})^{-1} \mathbf{H}^{rp})^{-1} (\mathbf{G}^{pp} - \mathbf{H}^{pr} (\mathbf{H}^{rr})^{-1} \mathbf{G}^{rp})$  ile verilmiştir.

Plak yüzeyi üzerinde dinamik akışkan basıncı  $\mathbf{p}$ , (16) ifadesinin (7) denkleminde kullanılması ile elde edilir:

$$\mathbf{p} = \rho_f \omega^2 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w} = -\mathbf{A} \ddot{\mathbf{w}} \quad (17)$$

$\mathbf{A} = \rho_f \tilde{\mathbf{A}}$  akışkanın plak dinamiği üzerindeki atalet etkisini ifade eden eksu kütle matrisidir.

### Özdeğer Problemi

Plak harmonik hareketini tanımlayan denklem sistemi, plak yayılı kütle matrisi  $\mathbf{B}$  ile eksu kütle matrisinin global sistem matrisinde bir araya getirilmesiyle oluşturulur:

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{ss}] & [\mathbf{k}_{su}] \\ [\mathbf{k}_{us}] & [\mathbf{k}_{uu}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{B} + \mathbf{A}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{M}\}^T \\ \{\mathbf{U}\}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Burada,  $\omega$  zemin ve akışkan ile etkileşim halinde olan taban plağının doğal frekansıdır. Karışık sonlu eleman formülasyonu gereğince, (18) ifadesinde yer değiştirme ve gerilme bileşkesi tipindeki alan değişkenleri birlikte yer alır. Kondense sistem matrisinin

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{k}_{uu}] - [\mathbf{k}_{su}]^T [\mathbf{k}_{ss}]^{-1} [\mathbf{k}_{su}] \quad (19)$$

olarak tanımlanmasıyla, sadece yer değiştirme bileşenlerine bağlı bir özdeğer denklemi,

$$\left( [\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{B} + \mathbf{A}] \right) \{\mathbf{U}^T\} = \{\mathbf{0}\} \quad (20)$$

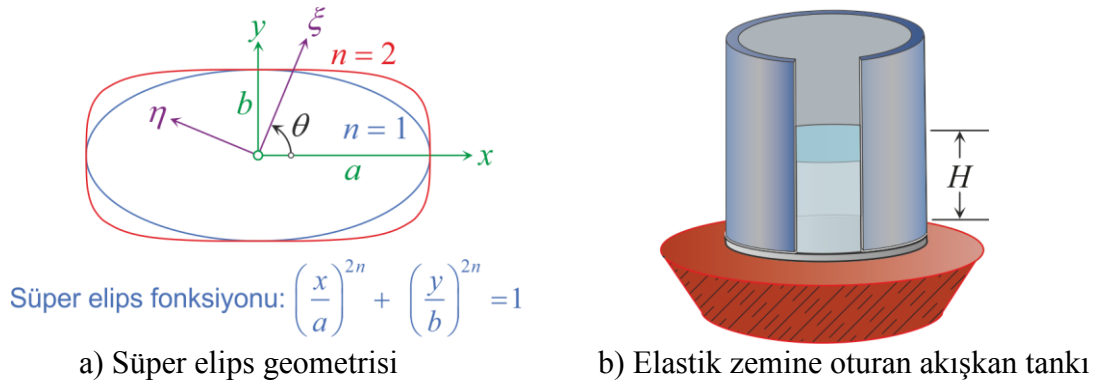
şeklinde elde edilir.

### SAYISAL SONUÇLAR

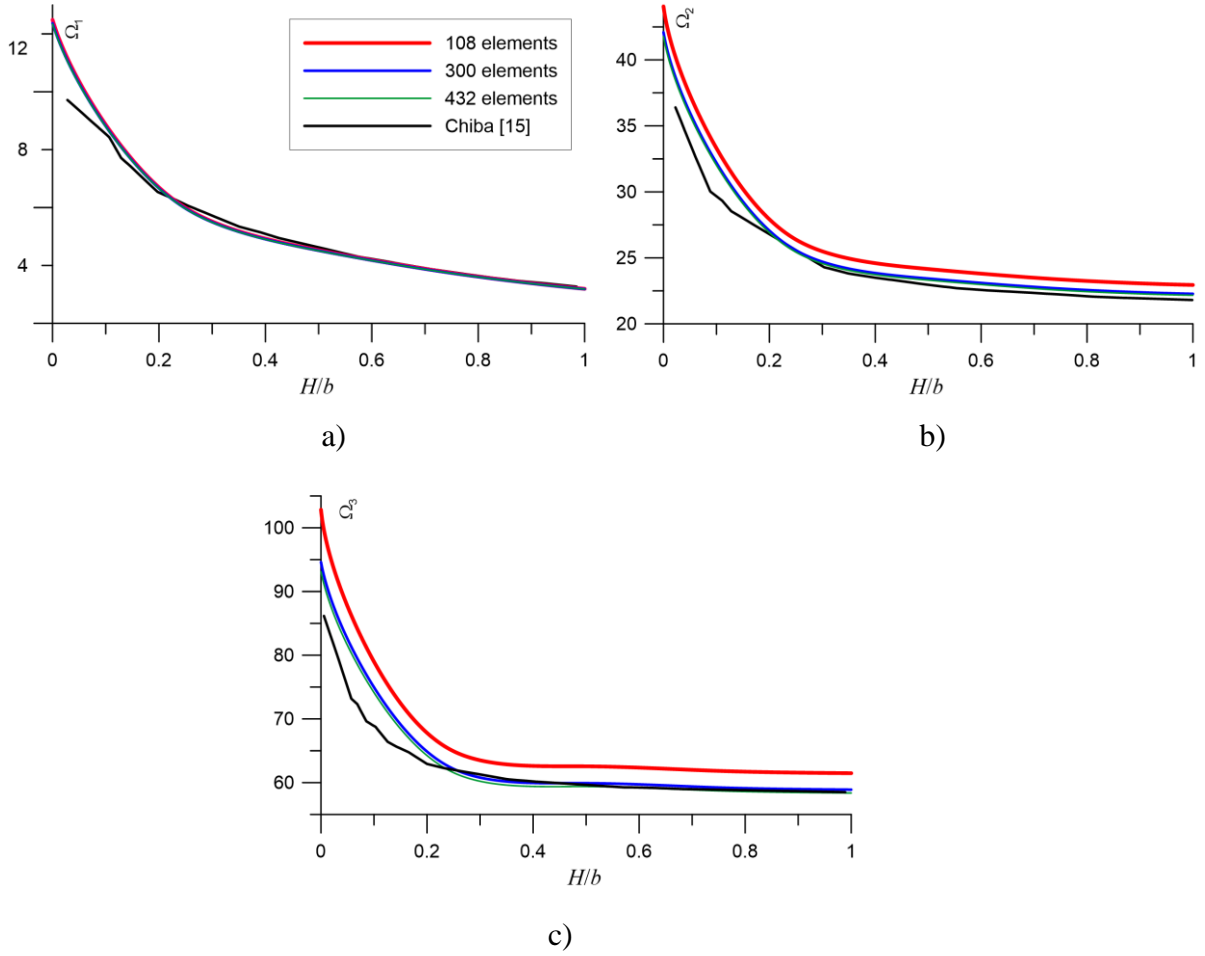
Sunulan sayısal çözüm yöntemi, ilk olarak Winkler zeminine oturan dairesel bir taban plağına ait sonuçlarla doğrulanmış, daha sonra özgün örnek olarak ortotrop Pasternak zeminine oturan süper eliptik bir taban plağı incelenmiştir. Sonuçlar boyutsuz frekans parametresi,  $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ , cinsinden sunulmuştur ve  $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$  plağın eğilme rijitliği,  $\tilde{k} = k b^4 / D$  boyutsuz Winkler parametresi,  $\tilde{G}_f = G_f b^2 / D$  boyutsuz zemin kayma parametresi,  $\lambda = G_\eta / G_\xi$  zemin ortotropi oranı,  $b$  eliptik plak kısa yarıçapı ve  $n$  süper elips geometri parametresidir (Şekil 1a). Örneklerde, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , plak-akışkan yoğunluk oranı  $\rho / \rho_f = 10$  ve plak kalınlık oranı  $h / b = 0.01$  olarak seçilmiştir ve taban plağının rijit tanka ankastre olarak mesnetlendiği kabul edilmiştir.

### Winkler Zeminine Oturan Daire Kesitli Tank: Yakınsama ve Doğrulama

Önerilen sayısal çözüm yöntemini doğrulamak ve yakınsama davranışını incelemek için literatürde yer alan Winkler zeminine ( $\tilde{k} = 100$ ) oturan bir ince dairesel taban plağı [15] seçilmiştir. İlk üç *eksenel simetrik moda* ait doğal frekans değerlerinin akışkan yüksekliğine ( $H / b$ ) göre değişimi Şekil 2'de sunulmuştur. Frekans değerlerinin yakınsaması 108, 300 ve 432 elemandan oluşan üç farklı ağ yapısı kullanılarak araştırılmıştır.



Şekil 1. Elastik zemine oturan süper eliptik kesitli akışkan tankı ve geometri tanımı



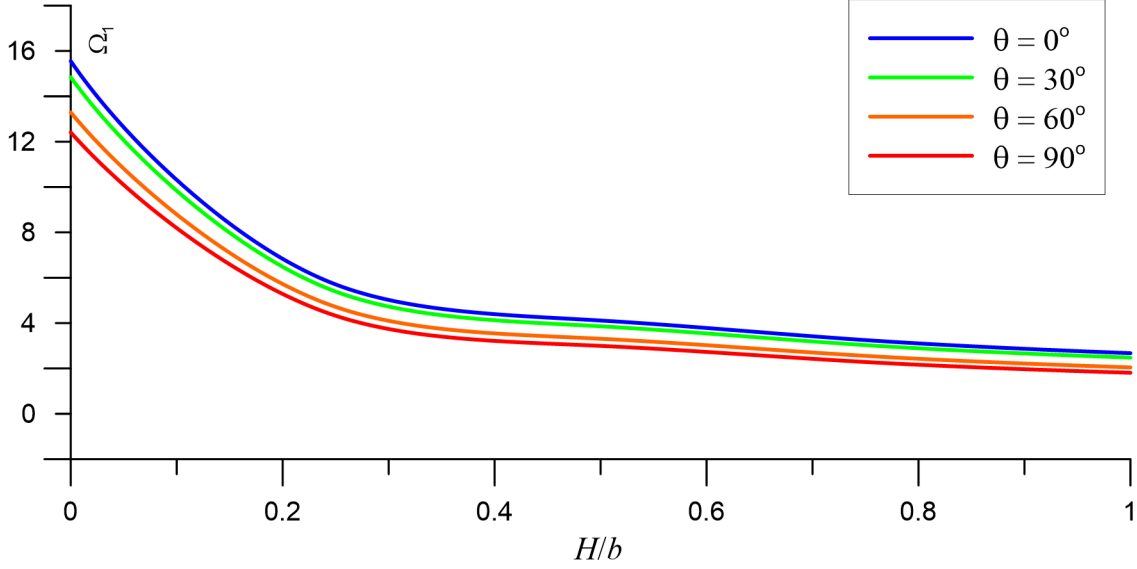
Şekil 2. Winkler zeminine oturan dairesel taban plağı için yakınsama analizi ve karşılaştırma:  
a)  $\Omega_1$  b)  $\Omega_2$  c)  $\Omega_3$

Düzlem içi kuvvetleri dikkate alan [15] çalışmasında verilen sonuçlardan, dinamik davranış üzerindeki etkinin en az olduğu, yerçekimi ivme parametresi  $\bar{g} = \Omega^2 g / h = 10^{-10}$  için verilen sonuçlar karşılaştırmada kullanılmıştır. Yakınsama davranışının ilk üç mod için verilen frekans değerlerinde istikrarlı olduğu görülmektedir. Yüksek mod frekans değerinde ( $\Omega_3$ ) yakınsamanın biraz daha yavaş olduğu gözlemlenmekteyse de, düzenli modlar içinde oldukça yüksek bir moda karşı gelen bu frekans değeri için sayısal çözüm yönteminin bu davranışı olağandır. İlk iki frekans değerinin literatürdeki sonuçla neredeyse üst üste düştüğü ve nispeten gevşek eleman ağlarında bile çok yakın sonuçlar elde edildiği söylenebilir.

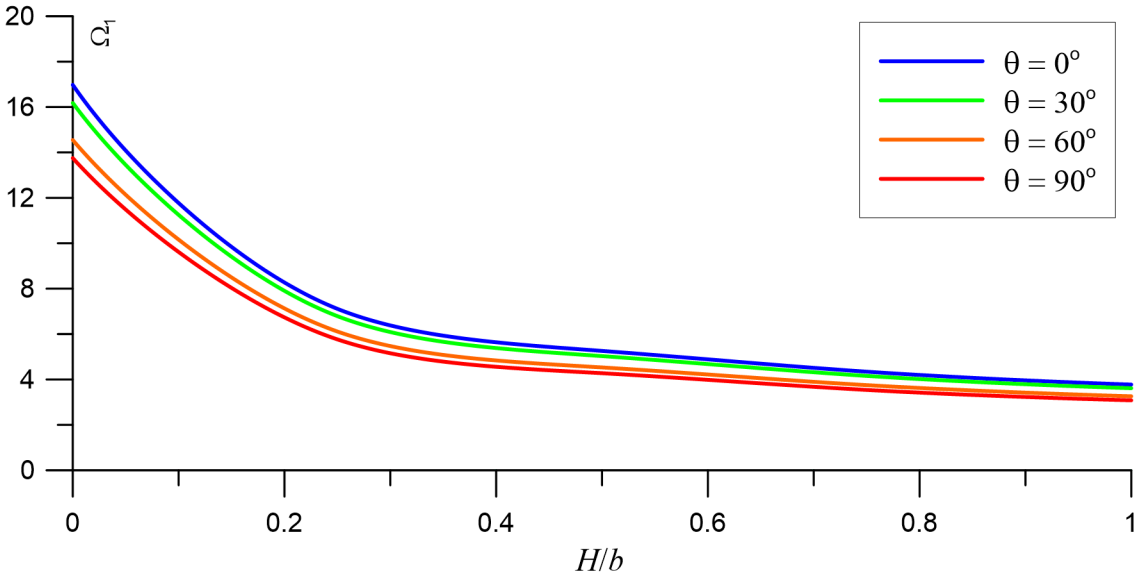
### Ortotrop Pasternak Zeminine Oturan Süper Eliptik Taban Plağı: Temel Frekans

Süper eliptik kesite sahip akışkan tankının ortotrop Pasternak zeminine oturduğu düşünülmüş ve taban plağının temel mod frekans değerleri hesaplanmıştır. Yakınsama analizi sonuçları bazı alınarak, analizlerde 432 elemanlı ağlar kullanılmıştır. Ortotrop Pasternak zemini  $\tilde{k} = 100$ ,  $\tilde{G}_\xi = 5$  ve  $\lambda = 10$  ile tanımlanmıştır. Ortotrop zeminde malzeme doğrultusu olarak  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  değerleri seçilmiş ve frekans değerleri  $H/b$  akışkan yüksekliğine bağlı olarak elde edilmiştir. Plak geometrisinde  $a/b = 2$  oranı sabit olacak şekilde  $n=1$  (elips),  $n=2$  ve  $n=6$  (süper elips) için hesaplanan temel frekanslar sırasıyla Şekil 3-5'te sunulmuştur. Süper elips parametresinin artması ile birlikte, akışkan yüksekliğindeki değişimin frekans değerlerini daha çok etkilediği gözlenmektedir. Ortotropi doğrultusunun

frekans değerlerini doğrudan etkilediği şekillerden açıkça görülmekle birlikte, belirli bir plak geometrisi için ortotropi doğrultusunun değişimi, akışkan yüksekliği değişiminin frekans değerinde yarattığı etki bakımından oransal olarak genelde sabite yakın kalmaktadır. Bütün plak geometrileri için, ortotropi doğrultusundaki değişimin frekans değerlerindeki değişime etkisinin, ortotropi doğrultusunun plak global doğrultularına yakın olduğu bölgelerde ( $0^\circ < \theta < 30^\circ$  ve  $60^\circ < \theta < 90^\circ$ ) göreceli olarak daha az, uzak olduğu bölgelerde ( $30^\circ < \theta < 60^\circ$ ) ise göreceli olarak daha fazla olduğu söylenebilir.

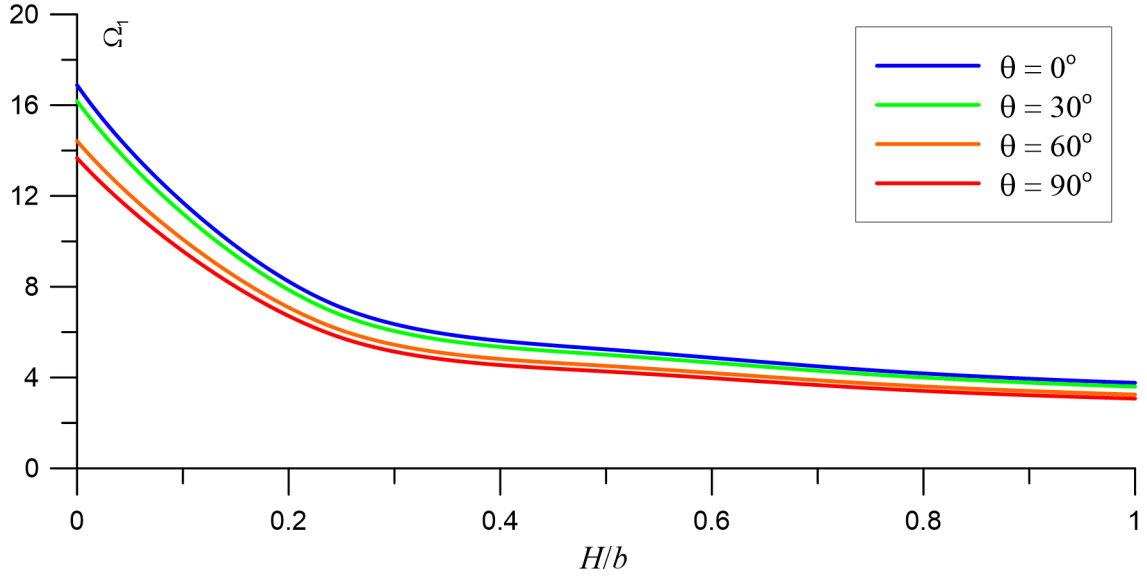


Şekil 3. Ortotrop Pasternak zeminine ( $\lambda = 10$ ) oturan eliptik ( $a = 2b$ ) taban plağının temel frekans değerleri



Şekil 4. Ortotrop Pasternak zeminine ( $\lambda = 10$ ) oturan süper eliptik ( $a = 2b, n = 2$ ) taban plağının temel frekans değerleri





Şekil 5. Ortotrop Pasternak zeminine ( $\lambda = 10$ ) oturan süper eliptik ( $a = 2b$ ,  $n = 6$ ) taban plağının temel frekans değerleri

### SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, bir plak-akışkan-zemin etkileşim problemini incelemek üzere bir karışık sonlu eleman formülasyonu ve sınır eleman yöntemi bir araya getirilmiş ve elastik zemine oturan rijit akışkan tankının taban plağının serbest titreşim problemi incelenmiştir. Kirchhoff kabullerine dayanan plak ve ortotropi özelliği gösteren Pasternak modeliyle tanımlanan zemin sistemi, Hellinger-Reissner prensibinin kullanıldığı bir karışık sonlu eleman yöntemiyle formüle edilmiştir. Akışkanın plak davranışı üzerindeki eylemsizlik etkisi, dinamik akışkan basıncının sınır eleman yöntemi uygulanarak plak çökmeleri cinsinden ifade edilmesi ile probleme tanıtılmıştır. Karışık yapıdaki sistem matrisinde yapılan indirgeme işlemi sonucunda gerilme tipi bilinmeyenler elenmiş ve yapının dinamik karakteristiklerini tanımlayan bir özdeğer problemi elde edilmiştir. Sunulan çözüm yöntemi ile Winkler zeminine oturan dairesel bir taban plağı yakınsama analizi ile birlikte incelenmiş ve eksenel simetrik modlara karşı gelen frekans sonuçları üzerinden doğrulama yapılmıştır. Özgün örnek olarak sunulan analizde ise, ortotrop Pasternak zemini için malzeme doğrultusunun ve plak elips-süper elips geometrisinin temel frekans değeri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

### KAYNAKLAR

- [1] E. Ventsel, T. Krauthammer, Thin Plates and Shells, CRC Press, 2001.
- [2] Y.H. Wang, L.G. Tham, Y.K. Cheung, Beams and plates on elastic foundations: a review, Progress in Structural Engineering and Materials. 7 (2005) 174–182. doi:10.1002/pse.202.
- [3] A. Ergin, B. Uğurlu, Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid, Journal of Fluids and Structures. 17 (2003) 927–939. doi:10.1016/S0889-9746(03)00050-1.
- [4] B. Ugurlu, A. Kutlu, A. Ergin, M.H. Omurtag, Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid, J. Sound. Vib. 317 (2008) 308–328. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.022.
- [5] M.H. Omurtag, A. Özütok, A.Y. Aköz, Y. Özçelikörs, Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40

- (1997) 295–317. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970130)40:2<295::AID-NME66>3.0.CO;2-2.
- [6] M.H. Omurtag, F. Kadioğlu, Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation, *Computers & Structures*. 67 (1998) 253–265. doi:10.1016/S0045-7949(97)00128-4.
- [7] D. Zhou, S.H. Lo, F.T.K. Au, Y.K. Cheung, Three-dimensional free vibration of thick circular plates on Pasternak foundation, *J. Sound. Vib.* 292 (2006) 726–741. doi:10.1016/j.jsv.2005.08.028.
- [8] H. Akhavan, S.H. Hashemi, H.R.D. Taher, A. Alibeigloo, S. Vahabi, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis, *Computational Materials Science*. 44 (2009) 951–961. doi:10.1016/j.commatsci.2008.07.001.
- [9] M. Dehghan, G.H. Baradaran, Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*. 218 (2011) 2772–2784. doi:10.1016/j.amc.2011.08.020.
- [10] A. Ergin, B. Uğurlu, Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method, *Journal of Sound and Vibration*. 275 (2004) 489–513. doi:10.1016/j.jsv.2003.07.034.
- [11] K.-H. Jeong, Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid, *Journal of Sound and Vibration*. 260 (2003) 653–670. doi:10.1016/S0022-460X(02)01012-X.
- [12] K.-H. Jeong, J.-W. Kim, Hydroelastic vibration analysis of two flexible rectangular plates partially coupled with a liquid, *Nuclear Engineering and Technology*. 41 (2009) 335–346. doi:10.5516/NET.2009.41.3.335.
- [13] E. Askari, F. Daneshmand, Free vibration of an elastic bottom plate of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 29 (2010) 68–80. doi:10.1016/j.euromechsol.2009.05.005.
- [14] S.M. Hasheminejad, M. Tafani, Coupled hydroelastic vibrations of an elliptical cylindrical tank with an elastic bottom, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*. 26 (2014) 264–276. doi:10.1016/S1001-6058(14)60030-5.
- [15] M. Chiba, Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*. 169 (1994) 387–394. doi:10.1006/jsvi.1994.1024.
- [16] S. Hosseini Hashemi, M. Karimi, H. Rokni Damavandi Taher, Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method, *Ocean Eng.* 37 (2010) 174–185. doi:10.1016/j.oceaneng.2009.12.001.
- [17] S. Hosseini-Hashemi, M. Karimi, D.T. Hossein Rokni, Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 30 (2010) 1487–1499. doi:10.1016/j.soildyn.2010.06.019.
- [18] A. Kutlu, B. Uğurlu, M.H. Omurtag, A. Ergin, Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid, *Ocean Eng.* 42 (2012) 112–125. doi:10.1016/j.oceaneng.2012.01.010.
- [19] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley and Sons, 2004.