

KALIN ÇUBUKLARIN TİTREŞİM FREKANSLARI VE DİNAMİK
STABİLİTESİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ

66791

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Ali Bahçivan

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Ocak 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Şubat 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Vedat KARADAĞ 18.3.1997

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Teoman KURTAY 18.3.97

Doç. Dr. Vahit MERMERTAS 18.3.1997

ŞUBAT 1997

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÖNSÖZ

Danışmanım sayın Prof. Dr. Vedat KARADAĞ' a değerli katkı ve yardımlarından ötürü teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmalarım boyunca sabrını eksik etmeyen sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 1997

Ali BAHÇIVAN



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
SEMBOLLER.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xiv
SUMMARY.....	xvi
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 TEMEL DENKLEMLER.....	3
2.1.Enerji Denklemleri.....	3
2.1.1.Potansiyel Enerji Denklemleri.....	3
2.1.2. Kinetik Enerji Denklemleri.....	5
2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	6
2.3. Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi.....	8
2.3.1. İnterpolasyon Fonksiyonları.....	8
2.4. Burkulma Problemi.....	16
2.5. Bilgisayar Kodları.....	18
BÖLÜM 3 KÜTLE MATRİSİ.....	22
3.1. Eğilme Etkisi (ince çubuk elemanı için).....	22
3.2. Boyuna Yer Değişimi Etkisi.....	24
3.3. Eleman Kütle Matrisi (ince çubuk elemanı için) - (Boyuna+Eğilme).....	24
3.4. Nokta Kütlenin Eklenmesi.....	25
3.5.Eğilme Etkisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	26
3.6. Eleman Kütle Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için) (Boyuna+Eğilme).....	26

BÖLÜM 4 RİJİTLİK MATRİSİ	29
4.1. Eğilme Rijitlik Matrisi (ince çubuk elemanı için).....	29
4.2. Boyuna Yer Değişimi Rijitlik Matrisi.....	30
4.3. Eleman Rijitlik Matrisi (ince çubuk için)-(Boyuna+Eğilme).....	31
4.4. Eğilme Rijitlik Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı).....	32
4.5. Eleman Rijitlik Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı) - (Boyuna+Eğilme).....	32
4.6. Geometrik Rijitlik Matrisi (ince çubuk ve 4 serbestlikli kalın çubuk için).....	33
BÖLÜM 5 6 SERBESTLİKLİ KALIN ÇUBUK ELEMANI İÇİN KÜTLE VE RİJİTLİK MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ	34
5.1. Rijitlik Matrisi.....	37
5.1.1. Eğilme Rijitlik Matrisi.....	37
5.1.2. Eleman Rijitlik Matrisi.....	41
5.1.3. Geometrik Rijitlik Matrisi (6 serbestlikli kalın çubuk için).....	41
5.2. Kütle Matrisi.....	43
5.2.1. Eğilme Kütle Matrisi.....	43
5.2.2. Eleman Kütle Matrisi.....	47
BÖLÜM 6 SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARININ ANALİZİ	48
6.1. Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Serbest Titreşim Frekansları.....	48
6.2. Dönme Atalet Etkileri Ve P eksenel kuvvetinin Serbest Titreşim Frekanslarına Etkisi.....	50
6.3. Dönme Atalet Etkileri Ve Nokta Kütlenin Ankastre-Serbest Halde Serbest Titreşim Frekanslarına Etkisi.....	50
6.4. Dönme Atalet Etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Serbest Titreşim Frekansları (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	54
6.4.1. Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi Ve Serbest Titreşim Frekansları.....	54

6.4.2. Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi Ve M_e Eleman Kütle Matrisi Ve Serbest Titreşim Frekansları.....	56
6.5. Kesit Kalınlığı Arttıkça Değişen Serbest Titreşim Frekansları Ve Bu Frekanslara Etki Eden Dönme Atalet Etkileri Ve Kayma Deformasyonlarının İncelenmesi.....	59
6.6. λ Ve α Frekans Parametrelerinin Karşılaştırılması.....	60
6.7. Dönme Atalet Etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Serbest Titreşim Frekansları (6 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	61
BÖLÜM 7 BURKULMA ANALİZİ.....	64
7.1. Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Çubukların Burkulma Analizi.....	64
7.2. Dönme Atalet Etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Çubukların Burkulma Analizi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	69
7.2. 1.Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi Ve Çubukların Burkulma Analizi.....	69
7.2.2. Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi Ve M_e Eleman Kütle Matrisi Ve Çubukların Burkulma Analizi.....	72
7.3. Dönme Atalet Etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Çubukların Burkulma Analizi (6 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	75
BÖLÜM 8 VERİLER VE SAYISAL SONUÇLAR.....	78
8.1. Veriler.....	78
8.2. Sayısal Sonuçlar.....	80
8.3. Yapılabilecek Çalışmalar ve Öneriler.....	82
KAYNAKLAR.....	83
EKLER.....	86
EK-A Bilgisayar Programları Ve Akış Diyagramları.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	110

SEMBOLLER

A	:Çubuğun Kesit Alanı [m^2]
b	:Çubuğun Genişliği [m]
$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ve $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1$	:İnterpolasyon fonksiyonları
d	:Türev Operatörü
h	:Çubuğun Kalınlığı [m]
$[K]_g$	:Geometrik Rijitlik Matrisi
E	:Elastisite Modülü [N/m^2]
f	:Çubuk özfrekansı [Hz]
P	:Burkulma Yüğü [N]
I	:Kesit Atalet Momenti [m^4]
$[K]$	:Rijitlik Matrisi
$[M]$	:Kütle Matrisi
ℓ	:Sonlu Çubuk Eleman Boyu [m]
L	:Çubuk Uzunluğu [m]
P_x	:Boyuna Yöndeki Yayılı Yüğü
P_y	:Enine Yöndeki Yayılı Yüğü
U_i	:Çubuk Elemanının Potansiyel Enerjisi [J/sn]
V_i	:Potansiyel Enerji [J/sn]
T_i	:Çubuk Elemanının Kinetik Enerjisi [J/sn]
u	:Boyuna Yer Değıştirme [m]
w	:Eğılme Yer Değıştirmesi [m]
ϕ	:Kesit Dönmesi Şeklinde Yer Değıştirmesi [rad]
ψ	:Kayma Yer Değıştirmesi [rad]
A	:Virtüel İş
v	:Çubuk Elemanı Hacmi [m^3]
q_k	:Genelleştirilmiş koordinatlar
α	:Katsayılar Vektörü { }

G	:Kayma Modülü [N/m^2]
k	:Kayma Katsayısı
m	:Çubuğun Birim Kütlesi [kg/m]
r	:Jirasyon Yarıçapı [m]
k'	:Kayma Katsayısının Tersi
η	:Poisson Oranı
ϕ_s	:Kayma Deformasyonu Katsayısı
L	:Kinetik Potansiyel
$[N]_u$	:(2.24) eşitliği
$[N]_w$	:(2.30) eşitliği
$[X]$	:Katsayılar Matrisi
$[C]$	:Çubuk Uçlarındaki Döğümelerde Bulunan Yer Değıştirmelerin Elde Edilmesinde Katsayılar Matrisi
I	:İterasyon sayısı
n	:Eleman Numarası
$w_1, \phi_1, \psi_1, w_2, \phi_2, \psi_2$	:Bir Elemanın 1. ve 2. Döğüm Noktasındaki Eğilme, Dönme ve Kayma Şekil Değıştirmeler
x,y,z	:Koordinat Sistemi
$[]^T$	:Matris Transpozese
$[]^{-1}$	:Matris Tersi
$()_{eu}$	:Boyuna Yer Değıştirme
$()_{ew}$	:Eğilme Yer Değıştirmesi
$()_{ey}$	:Kayma Şekil Değıştirmesi
$()_{ewd}$	:Kesit Dönmesi Şeklinde Yer Değıştirmesi
$\xi=x/l$	:Birim Uzama
∂	:Kısmi Türev Operatörü
δ	:Virtüel İşlem Operatörü
$\{\delta_e\}$	:Genelleştirilmiş Koordinat Vektörü
λ	:Frekans Parametresi
ρ	:Yoğunluk [kg/m^3]
σ_x	:Normal Gerilme [N/m^2]

- τ_{xy} :Kayma Gerilmesi [N/m^2]
 n_d :Motorun Devir Sayısı
 ω :Çubuk Öz Frekansı [rad/sn]
 Ω :Tahrik Frekansı [rad/sn]
 m_{ek} :Serbest Uca Eklenen Kütle [m]



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Sonlu Elemanlar Bilgisayar Akış Diyagramı.....	2
Şekil 2.1. L Uzunluğunda Dikdörtgen Kesitli Çubuk.....	3
Şekil 2.2. Ankastre-Serbest Çubuğun İki Değişik Modeli.....	9
Şekil 2.3. Tek Elemanlı Çubuğun Eğilme Kordinatları.....	10
Şekil 2.4. Ankastre-Serbest Mesnet Şartında Burkulan Kiriş.....	11
Şekil 2.5. Üç Elemana Bölünmüş Çubuk Ve Eleman Düğüm noktalarına Ait Yer Değiştirmeler.....	17
Şekil 2.6. Çubuk Üzerinde Herhangi Bir Noktada ψ Kayma Şekil Değişiminin Gösterilmesi.....	21
Şekil A.1. Serbest Titreşim Analizi (ince ve 4 serbestlikli kalın çubuk).....	87
Şekil A.2. Serbest Titreşim Analizi (6 serbestlikli kalın çubuk için).....	88
Şekil A.3. Burkulma Analizi (ince ve 4 serbestlikli kalın çubuk için).....	89
Şekil A.4. Burkulma Analizi (6 serbestlikli kalın çubuk için).....	89

TABLolar LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 6.1. Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları.....	48
Tablo 6.2. Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları.....	48
Tablo 6.3. Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Titreşim Frekansları.....	49
Tablo 6.4. Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Titreşim Frekansları.....	49
Tablo 6.5. P Eksenel Kuvvetinin Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekanslarına Etkisi.....	51
Tablo 6.6. P Eksenel Kuvveti Ve Dönme Atalet Etkilerinin Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekanslarına Etkisi.....	51
Tablo 6.7. P Eksenel Kuvvetinin Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Titreşim Frekanslarına Etkisi.....	52
Tablo 6.8. P Eksenel Kuvveti Ve Dönme Atalet Etkileri Halinde Ankastre- Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları.....	52
Tablo 6.9. Dönme Ataletli Ve Dönme Ataletsiz Olmak Üzere Nokta Kütlenin Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Özfrekanslarına Etkisi.....	53
Tablo 6.10. Dönme Ataletli Ve Dönme Ataletsiz Olmak Üzere Nokta Kütlenin Ankastre - Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Özfrekanslarına Etkisi.....	53
Tablo 6.11. Sadece Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Karşılaştırma).....	54

Tablo 6.12. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Atalet Etkileri Halinde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Matrisi) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	55
Tablo 6.13. Sadece Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Karşılaştırma).....	55
Tablo 6.14. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Atalet Etkileri Halinde Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Matrisi) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	56
Tablo 6.15. Sadece Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Karşılaştırma).....	57
Tablo 6.16. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Atalet Etkileri Halinde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Eleman M_0 Kütle Matrisinde) - (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	57
Tablo 6.17. Sadece Dönme Atalet Etkilerinin Hesaba Katıldığı Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Karşılaştırma).....	58
Tablo 6.18. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Atalet Etkileri Halinde Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Ve M_0 Eleman Kütle Matrisi) - (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	58
Tablo 6.19. Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuk İçin, Artan Kesitlerde İnce Çubuğun Ve 4 Serbestlikli Kalın Çubuğun Özfrekanslarının Karşılaştırılması.....	59
Tablo 6.20. Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuk İçin, Artan Kesitlerde İnce Çubuğun Ve 4 Serbestlikli Kalın Çubuğun Özfrekanslarının Karşılaştırılması.....	60

Tablo 6.21. Referans Olarak Alınan Kalın Çubuğa Ait α Frekans Parametresi ile Tezimizdeki 4 serbestlikli kalın çubuğa Ait λ Frekans Parametresinin Karşılaştırılması	60
Tablo 6.22. Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuk İçin, İnce Ve Kalın Kenarına Göre Titreşimlerin İncelenip İnce Çubuk Ve 6 Serbestlikli Kalın Çubuğun Özfrekanslarının Karşılaştırılması.....	61
Tablo 6.23. Dikdörtgen Kesitli Çelik Çubuk İçin, İnce Ve Kalın Kenarına Göre Titreşimlerin İncelenip İnce Çubuk Ve 6 Serbestlikli Kalın Çubuğun Özfrekanslarının Karşılaştırılması.....	62
Tablo 7.1. Plastik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	65
Tablo 7.2. Dönme Ataletinin Hesaba Katıldığı Plastik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	66
Tablo 7.3. Çelik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	67
Tablo 7.4. Dönme Ataletinin Hesaba Katıldığı Çelik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	68
Tablo 7.5. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Plastik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Matrisi) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	70
Tablo 7.6. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Çelik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri (Kayma Etkisi Sadece K_0 Rijitlik Matrisinde) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	71
Tablo 7.7. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Plastik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Kütle Matrisi) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	73
Tablo 7.8. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Çelik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri (Kayma Etkisi Halinde K_0 Eleman Rijitlik Ve Eleman Kütle Matrisi) (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	74

Tablo 7.9. Plastik Çubukta Basit-Basit Halde Statik Ve Dinamik Olarak Burkulma Yükleri (İnce çubuk elemanı için) (karşılaştırma).....	76
Tablo 7.10. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Plastik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Basit-Basit Mesnet Şartında Burkulma Yükleri (6 serbestlikli kalın çubuk elemanı)..	76
Tablo 7.11. Çelik Çubukta Basit-Basit Halde Statik Ve Dinamik Olarak Burkulma Yükleri (İnce çubuk elemanı için) (karşılaştırma).....	77
Tablo 7.12. Kayma Deformasyonu Ve Dönme Ataleti Etkileri Halinde Çelik Çubukta Statik Ve Dinamik Halde Basit-Basit Mesnet Şartında Burkulma Yükleri (6 serbestlikli kalın çubuk elemanı için).....	77



ÖZET

Bu çalışmada Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılmak suretiyle kesit dönme ataletlerinin hesaba katıldığı elastik ince çubukların; dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmelerinin hesaba katıldığı 4 ve 6 serbestlik dereceli iki ayrı kalın çubuk elemanının, değişik mesnet şartlarında titreşim analizi ve statik ve dinamik halde burkulma yükleri incelenmiştir.

Çubukların titreşim analizi, ankastre-ankastre, ankastre-serbest, basit-basit mesnet hallerinde boyuna uzama da hesaplara dahil edilerek incelenmiştir. Bu analizde kesit dönme ataleti ve kayma deformasyonu hesaba katılmış ve bunların etkileri de incelenmiştir. Boyuna uzama için lineer sonlu elemanlar kullanılmıştır. Yine dönme ataleti etkisinde ankastre-serbest halde çubuğun serbest ucundaki nokta kütle etkisi de hesaplanmıştır. Bunun yanında, ele aldığımız kalın çubuklardan 4 serbestlikli için, ankastre-serbest, ankastre-ankastre, basit-basit mesnet hallerinde serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. 6 serbestlikli için, sadece basit-basit mesnet halinde serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Buna ek olarak, ele aldığımız kalın çubuklardan 4 serbestlikli için, ankastre-serbest, ankastre-ankastre, basit-basit mesnet hallerinde burkulma yükleri elde edilmiştir. 6 serbestlikli için, sadece basit-basit mesnet halinde burkulma yükleri elde edilmiştir.

Kalın çubukların kesit kalınlığı arttıkça değişen serbest titreşim frekansları ve bu frekanslara etki eden dönme ataleti ve kayma etkileri incelenmiştir.

Kalın çubukların ince ve kalın kenarına göre serbest titreşim frekansları ile bu frekanslara etki eden dönme ataleti ile kayma etkileri incelenmiştir.

Teorik çalışmalar için birisi sert plastik diğeri çelik olmak üzere iki çubuk kullanılmıştır. Çubukların elastik modülleri daha önce yapılan deneysel olarak elde edilen bir çalışmadan alınmıştır.

Teorik alışmalar sonucu elde edilen çeşitli parametrelerin etkileri tablolarda gösterilerek sonuçlar yorumlanmış ve dizayn açısından önlemleri gösterilmiştir.

Sonuçta, dönme atalet etkisi sebebiyle ince çubuklarda serbest titreşim frekanslarının azaldığı incelendi. P eksenel kuvveti etkisi altında, kuvvet arttıa frekansların azaldığı incelendi. P eksenel kuvveti kritik burkulma yüküne eşit olduğunda 1. zfrekansın 0'a eşit olduğu incelendi. Bunun yanında, ankastre-serbest halde nokta kütle etkisinde serbest titreşim frekanslarının azaldığı gözlendi.

Dönme atalet etkisi ve kayma deformasyonları sebebiyle kalın çubuklarda serbest titreşim frekanslarında ve burkulma yüklerinde bir azalma grlmştir. Bu azalmanın ihmal edilemeyecek derecede büyük olduğu gözlendi. Sadece dönme ataleti etkisi sebebiyle frekanslardaki azalmanın ihmal edilecek derecede küçük olduğu elde edildi. Dönme atalet etkisinin dinamik halde burkulma yüklerinde azalmaya sebep olduğu fakat statik halde burkulma yüklerine etki etmediği grlmştir. Bunun yanında dinamik halde devir sayısı arttıa burkulma yüklerinin azaldığı ve kritik devir sayısında burkulma yükünün 0 olduğu görüldü.

Kalın çubuklarda çubuk kütlesi etkilerine dahil edilen kayma deformasyonunun, çubuğun geometrik matrisine etki eden kayma deformasyonundan ve aynı zamanda dnme atalet etkilerinden fazla olduğu grlmştir.

SUMMARY

VIBRATION FREQUENCIES AND DYNAMIC STABILITY OF THICK BEAMS BY FINITE ELEMENT METHOD

The vibration frequencies and stability of rectangular cross-section uniform beams, considering shear deformation and rotatory inertia are analyzed by the finite element method.

The Finite Element Model approximates a structure in two different ways. The first approximation made in finite element modelling is to separate the structure into number of discrete elements. These discrete elements are called finite elements. For each element, differential equation of motion is determined and numerically solved for whole system.

In the analysis of free vibration frequencies and stability, for elastic thin beam, rotatory inertia is considered. In these analyses, two different thick beam elements are used. The first 4 degrees of freedom thick beam element has two nodes, with three degrees of freedom at each node. In the first thick beam element, w_1 and w_2 are transverse displacements at nodes 1 and 2, and ϕ_1 and ϕ_2 are cross-section rotations at nodes 1 and 2. In the second beam element, the nodal variables are the transverse displacement w , the cross-section rotation ϕ and shear deformation ψ . Axial displacement of the beam is also considered. For axial displacement of the beam, linear finite element method. A lumped mass on the beam's free end is also considered. In the stability analysis, both static and dynamic stability calculations are presented. In the free vibration analysis of thick beams, P axial force effect is examined considering only rotatory inertia.

For this purpose, beam is considered as a rectangular cross-section beam. The beam has rectangular cross-section area A , width b , thickness h length L , Shear's Modules G , Young's Modules E , radius of gyration r , mass

per unit length m , shear coefficient k and cross-sectional area moment of inertia about the z axis.

For thin beams, transverse bending deflection of beam $w(x)$ and axial deflection of the beam $u(x)$ are defined by 1st and 3rd degree polynomials. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ are real constants of the polynomials.

$$w(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 \quad (1)$$

$$u(x) = c_5x + c_6 \quad (2)$$

In addition to, for thick beams with four degrees of freedom, cross-section slope is given by the expression,

$$\phi = \frac{dw}{dx} + \psi \quad (3)$$

Furthermore, for thick beam elements with six degrees of freedom, the bending displacements at the nodes at each end of the beam can be written as:

$$U = C\alpha \quad (4)$$

where U is the vector of nodal displacements, $[w_1, \phi_1, \psi_1, w_2, \phi_2, \psi_2]^T$, with subscripts 1 and 2 referring to ends $x=0$ and $x=L$ of the element, and

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

In eq(4), α is a vector of coefficients, $[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1]^T$.

The equation of motion of the system by using Hamilton's principle can be written as:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 \quad (6)$$

where T is kinetic energy, U is potential energy and δA is virtual work done by active forces.

As a result, the equation of motion of the system can be written as:

$$[K] - [M]\omega_i^2 \{\delta\}_i = 0 \quad (7)$$

where $[M]$ is the mass and $[K]$ is the stiffness matrices.

For a beam undergoing transverse vibration, the potential energy can be given as:

$$V_{ew} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8)$$

For thin beams and thick beams with four degrees of freedom, the potential energy stored in the element due to stresses created by axial force P used in the buckling problems is defined as follows:

$$V_g = \frac{1}{2} \int_0^l A \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (9)$$

For a beam undergoing axial vibration, the potential energy is as follows:

$$V_{eu} = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (10)$$

For a beam undergoing shear deformation, the potential energy can be written as:

$$V_{e\psi} = \frac{1}{2} \int_0^l kGA\psi^2 dx \quad (11)$$

For thick beams with six degrees of freedom, the potential energy stored in the element due to stresses created by axial force P used in the buckling problems is defined as follows:

$$V_g = \frac{1}{2} \rho I \int_0^l \phi^2 dx \quad (\rho I \rightarrow P) \quad (12)$$

For thin beams and thick beams with four degrees of freedom, the total stiffness matrices is formed as follows:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e]_{ew}^{4 \times 4} & [0] \\ [0] & [K_e]_{eu}^{2 \times 2} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (13)$$

For thick beams with six degrees of freedom, the total stiffness matrice is also formed as:

$$[K_e]^{kd6} = \begin{bmatrix} [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [K_e]_{ew}^{kd3} \\ [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [K_e]_{ew}^{kd3} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (14)$$

In order to obtain the mass matrix, the kinetic energy which is equal to transverse bending deflection,

$$T_{ew} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \quad (15)$$

For a beam undergoing axial deflection, the kinetic energy can be given as follows:

$$T_{eu} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx \quad (16)$$

For a beam with rotatory inertia, the kinetic energy can be given as:

$$T_{ewd} = \frac{1}{2} \rho I \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dx \quad (17)$$

The kinetic energy due to the point mass on free end of clamped-free beam is given below:

$$T_{ek} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx(L)}{dt} \right)^2 \quad (18)$$

The element matrices given above are combined to form the global stiffness and mass matrices according to FEM formulation. Using these matrices the system equations are formed as:

$$[K] - [M]\omega_i^2 \{\delta\}_i = 0 \quad (19)$$

and solved numerically.

The buckling loads of the beam can be calculated as follows:

$$P = \chi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (20)$$

P_{cr} is called the critical load and when P is equal to P_{cr} , the first free vibration frequency becomes zero. In that case, the beam takes a non-zero but static deflected shape.

In the buckling problem, the critical buckling loads of an elastic structure are investigated. This corresponds to the calculations of eigenvalues of the generalized eigenvalue problem.

For thin beams and thick beams with four degrees of freedom, in the case of a structure subjected to an initial stress field σ_x , the equation (9) must be added to the strain energy of the system.

For thick beams with six degrees of freedom, when a structure subjected to initial shear stress field τ_{xy} , the equation (12) must be added to strain energy of the system.

Since the geometric stiffness expression has the same form as in the linear stiffness one, it is obvious that the linear equation of motion are replaced in the prestressed case by

$$\left[\lambda [K]_g + [K] \right] \{\delta\}_i + [M] \{\delta\}_i = 0 \quad (21)$$

and related to eigen value problem takes the form (In the case of harmonic motion).

$$\left[\lambda [K]_g + [K] \right] \{\delta\}_i - \Omega^2 [M] \{\delta\}_i = 0 \quad (22)$$

when $\Omega=0$, we get an eigenproblem with eigenvalues λ_i corresponding to the critical loads.

$$[K] + \lambda[K]_g \{\delta\}_i = 0 \quad (23)$$

The eq(23) consists an eigenvalue problem in which we seek to determine the eigenvalues λ_i ($i=1,2,\dots$). The eigenvalue λ_{min} gives the prestress state in which the system buckles.

For theoretical calculations, two different beams which one is a plastic beam and the other is a metal beam are used.

As a result of this study, the free vibration frequencies and buckling loads of elastic thick beams, considering rotatory inertia and shear deformation are examined by the finite element model. Both buckling and vibration analyses are implemented for different boundary conditions. These conditions are simple-simple beam, clamped-free beam and fixed-fixed beam.

In vibration analysis, the free vibrations of elastic thin beam considering only rotatory inertia are obtained by numerical calculations. Because of rotatory inertia, it is observed that the free vibration frequencies decrease considerably. But this decrease is so small that it can be neglected.

For an elastic thin beam, considering only rotatory inertia, the beam is subjected to an axial force P . When the axial force P increases, the free vibration frequencies of the beam decrease. When the axial force P is equal to the critical buckling load of beam, the first eigenfrequency becomes zero. The eigenfrequencies are symmetrically lowered by a compression load and increased by an axial tensional force. For thick beams, considering rotatory inertia and shear deformation, the free vibration frequencies are investigated. In conclusion, the eigenfrequencies decreased substantially. These decreases aren't neglected.

Consideration of shear deformations in thick beam are made in two ways. In the first study, shear deformation regarded only in stiffness matrice $[K]$. In the second study, shear deformation regarded both in stiffness matrice $[K]$ and mass matrice $[M]$. It is obtained that the shear deformation

effects due to the terms in mass matrix $[M]$ is higher than the terms in stiffness matrix $[K]$. In thick beams, the vibrations are also examined in two ways. these are flapwise and edgewise vibrations. In conclusion, it is determined that shear deformation and rotatory inertia in vibrations of edgewise motion of the beam are higher than flapwise one.

In the buckling analysis, the critical buckling loads of the beams considering shear deformation and rotatory inertia are obtained by the numerical analysis. In the dynamic case, the first buckling load is equal to zero, when the beam is excited by the first eigenfrequency. In the dynamic case, when the revolution speed increases, the buckling loads are lowered.

In the static analysis, the buckling loads of the beams considering only rotatory inertia are constant. i.e. rotatory inertia doesn't affect the buckling loads of the beam.

In the static and dynamic analysis, the buckling loads of the beams considering both shear deformation and rotatory inertia are investigated. As a result of this, it has been observed that the buckling loads of the beams decrease substantially. These decreases aren't neglected.

In the present work as a comparison, λ frequency parameters which are used in our thesis related to thick beams, α frequency parameters which are taken from M. İPEK's research report and associated with thick beams are also compared and a good agreement has been found.

BÖLÜM 1

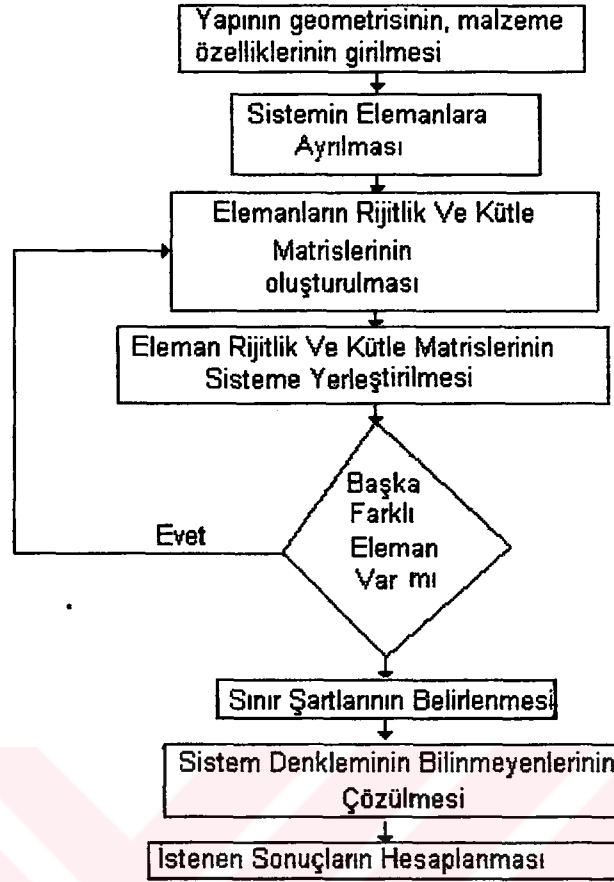
GİRİŞ

Mekanikte sonlu ve karmaşık cisimlerin her türlü mukavemet sorunlarını sayısal matematik yardımı ile çözmeye yarayan metodların başında Sonlu Elemanlar Yöntemi gelmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin bugün mühendislikte yaygın olarak kullanılmasıındaki en büyük etken bilgisayar teknolojisinde meydana gelen hızlı gelişmedir. Sonlu elemanlar yöntemi temel olarak sürekli ortamların çok küçük bölgelere ayrılarak temsil edilmesi düşüncesine dayanır. Böyle küçük bölgelere sonlu eleman denir.

Sonlu elemanlar yöntemi çubuk, kiriş, plaka, kabuk ve bunun gibi elemanların titreşim problemlerinin çözülmesinde ve eksenel bir yük ile zorlanan kirişlerin burkulma yüklerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Yapılacak iş çubuğu elemanlarına ayırmaktır. Bu işlem aynı zamanda sonsuz serbestlik dereceli asıl sistemi, sonlu serbestlik dereceli sisteme dönüştürmek demektir. Seçilen elemanların boyutları ve sayıları hem sistemi en iyi şekilde temsil edecek hem de hesaplamaları en aza indirecek şekilde olmalıdır. Dolayısı ile sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturan denklem sistemleri zorunlu olarak matris hesapları yardımı ile kurulur. Sistemin sonuçlarında kesinlik seçilen eleman sayısına bağlıdır. Eleman sayısı arttıkça sonuçtaki kesinlik de o derece artar. Bununla birlikte elemanların boyutları ve sistemin serbestlik derecesi de sonucu etkiler. Çünkü eleman sayısı arttıkça serbestlik derecesi de artacağından elde edilecek matris boyutları da artacaktır. Sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturan denklem sistemleri matris hesaplamaları yardımı ile kurulur. Sonlu elemanlar yönteminin bilgisayar akış diyagramı Şekil 1.1' de görülmektedir.

Hesaplamalar için birisi metal diğeri plastik dikdörtgen kesitli iki çubuk kullanılmıştır. Bu malzemelerin elastiklik modülleri daha önce yapılan eğilme



Şekil 1.1. Sonlu Elemanlar Bilgisayar Akış Diyagramı

deneylerinin olduğu çalışmadan alınmıştır.

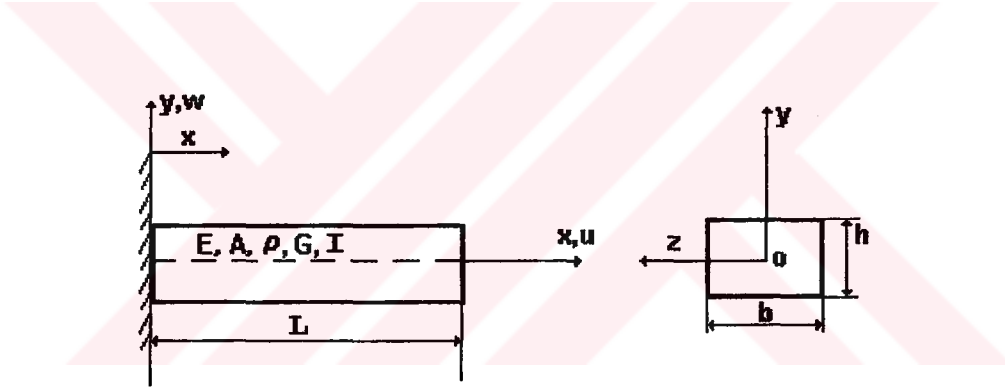
Teorik Hesaplar için Fortran IV dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu program kendi içerisinde iki şekilde düzenlenmiştir. Yani, her iki kalın çubuk için program içerisinde iki ayrı kod programı yazılmıştır. Bu program değişik mesnet şartlarında, kesit dönme ataleti etkisinde elastik ince çubukların, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkilerinde kalın çubukların özfrekans değerlerini, burkulma yüklerini; burkulma yüklerini ise statik ve dinamik haldeki etkisi ile beraber ve son olarak da kesit dönme ataleti etkisi ve nokta kütlelerin serbest titreşim frekanslarına etkisi hesaplanabilmektedir. Mesnet şartı olarak basit-basit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest mesnetler kullanılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL DENKLEMLER

2.1. Enerji Denklemleri

Dikdörtgen kesitli L uzunluğunda, kesit alanı A ve yoğunluğu ρ olan elastik bir çubuk için, Şekil 2.1' de görüldüğü üzere koordinat sistemi; çubuğun asal eksenini x ekseni, kalınlığını z ekseni ve yüksekliğini de y ekseni gösterecek şekilde $oxyz$ eksen takımı seçilmiştir.



Şekil 2.1. L Uzunluğunda Dikdörtgen Kesitli Çubuk

2.1.1. Potansiyel Enerji Denklemleri

Enerji denklemlerinin elde edilmesinde titreşimin, çubuğun bir düzleminde olacağı varsayılmıştır. Şekil 2.1'de xy düzlemi çubuğun titreştiği düzlemdir. Herhangi bir dönme hareketi yapmayan y doğrultusunda w yer değiştirmesi yapan elastik bir çubukta iç kuvvetlerden dolayı meydana gelen potansiyel enerji şu şekilde elde edilir.

Herhangi bir noktadaki boyuna yer değiştirme u ,

$$u(x, y) = -y \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1)$$

ve ξ_x birim uzaması ise,

$$\xi_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

olmaktadır. Dolayısıyla çubukta depolanmış olan potansiyel enerji ise aşağıdaki gibidir.

$$V_{ew} = \int_V \sigma_x \xi_x dV \quad (2.3)$$

$\sigma_x = E \xi_x$ ve $dV = dA dx$ eşitlikleri ve (2.2) denklemlerinin (2.3) denkleminde yerlerine yazılmasıyla,

$$V_{ew} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Bu ifade eğilmeden dolayı çubukta depolanan potansiyel enerjiyi ifade eder. Bu ifadede kesit atalet momenti I aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \int_A y^2 dA \quad (2.5)$$

Bir çubukta dış kuvvetlerden dolayı, burkulma probleminde olduğu gibi gerilmelerin bulunması durumunda ise potansiyel enerji şu şekilde ifade edilir.

$$V_g = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV \quad (2.6)$$

Çubukta meydana gelen boyuna yöndeki u yer değiştirmelerinden dolayı çubukta depolanan enerji ise,

$$dV_{eu} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dA \quad (2.7)$$

denklemlerle elde edilir. Çubuğun toplam boyuna yer değiştirme potansiyel enerjisi ise,

$$V_{eu} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.8)$$

Çubuğun eğilmesi esnasında dönmeden dolayı oluşan kayma şekil değiştirmesi sebebiyle çubukta depolanan potansiyel enerji aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V_{e\psi} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} kGA \psi^2 dx \quad (2.9)$$

2.1.2. Kinetik Enerji Denklemleri

Çubuk kütlelerinin atalet kuvvetlerinin yaptıkları işe eşit olan kinetik enerji eğilme titreşimi halinde,

$$T_{ew} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \quad (2.10)$$

Boyuna uzaması halinde,

$$T_{eu} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx \quad (2.11)$$

ve son olarak da büyük yer deşiştirmeler sırasında kesit d6nmesi halinde

$$T_{ewd} = \frac{1}{2} \rho I \int_L \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dx \quad (2.12)$$

ifade edilir.

Bunun yanısıra çubuk ucuna bir nokta kütle eklendiğinde bu kütleden dolayı meydana gelecek kinetik enerjinin de düşünülmesi gerekir. ubuk serbest ucuna eklenecek kütlenin miktarı m_{ek} olmak üzere kinetik enerji,

$$T_{ek} = \frac{1}{2} m_{ek} \left(\frac{dx(L)}{dt} \right)^2 \quad (2.13)$$

ifadesiyle elde edilir.

2.2. Sonlu Elemanlar Y6ntemi

6nceki b6lmde elde ettiğimiz enerji ve iş denklemlerinin sisteme etkisini incelemek için, elastik cisimlere teşmil edilmiş Hamilton prensibini kullanmak gerekir [1]. Hamilton prensibi ise,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta A) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} A dt = 0 \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} A dt = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde T kinetik enerjiyi, U potansiyel enerjiyi, L kinetik potansiyeli, δA ise virtüel işi ifade etmektedir. Buradan boyuna

yöndeki yayılı yük P_x , enine yöndeki yayılı yük P_y olmak üzere bu iki durum için virtüel işler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\delta A_x &= \int_0^L P_x \delta u dx \\ \delta A_y &= \int_0^L P_y \delta w dx\end{aligned}\quad (2.15)$$

Hamilton prensibinden hareketle kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin yazılması ile, serbest titreşimler için;

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (2.16)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, aktif kuvvetlerin potansiyel fonksiyonu mevcut olduğu için bu halde Lagrange denklemleriyle de elde edilebilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n) \quad (2.17)$$

sistemin ω frekansıyla harmonik yer değişimi yaptığını kabul ederek (2.16) denklemi,

$$[K] - \omega^2 [M] \{\delta\}_i = 0 \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemde $i=1, 2, 3, \dots, n$ adet lineer, homojen bilinmeyen vardır. $\{\delta\}_i$ ifadesinin sıfır olmamasından dolayı,

$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = |K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.19)$$

olmalıdır. (2.19) denkleminin n adet kökü vardır ve bunlar özdeğerler olarak adlandırılmaktadır [2]. Sonlu elemanlar yöntemi, (2.16) denkleminin çözülebilmesi amacıyla $[K]$ ve $[M]$ matrislerini elde etmek için yeterli yaklaşımı sağlamaktadır.

2.3. Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi

Şekil (2.2)'de gösterilen çubuk, asal eksen x - doğrultusunda eşit uzunlukta yeterli sayıda elemana bölünmektedir. Uzunluğu l olan sonlu elemanın x - eksen x - doğrultusundaki yer değişimi u , y - eksen y - doğrultusundaki yer değişimi w , eleman uçlarındaki dönme miktarı ϕ ve kesme dönmesi ψ polinom olarak ifade edilirler.

Boyuna yer değiştirmesi u , iki düğüm ve x - eksen x - doğrultusunda tek değişken olduğundan bu polinomun derecesi birdir. Aynı şekilde w polinomunun düğüm sayısı iki ve her düğümdeki değişken sayısı eğilme ve dönme olarak belirlendiğinden dolayı derecesi üçtür. Kesme dönmesi ψ polinomunun düğüm sayısı iki ve her düğümde tek değişken olduğundan bu polinomun derecesi birdir.

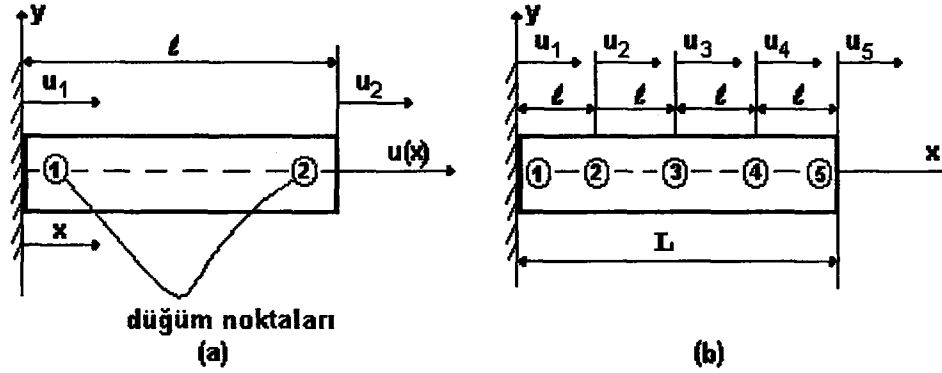
Bu şekilde sonsuz sayıdaki değişken sonlu sayıda değişkenle tanımlanmış olur. u ve w polinomlarının katsayılarının elde edilmesi bir sonraki bölümde ve ψ polinomunun katsayısının elde edilmesi ise 5. bölümde anlatılacaktır

2.3.1 İnterpolasyon fonksiyonları

Ankastre-serbest çubuğun iki değişik modeli Şekil 2.2'de gösterilmektedir. Şekil 2.2.a' daki tek elemanlı model olarak düşünülecek olursa, bu çubuk elemanın statik uzaması

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.20)$$

denklemini $[0, \ell]$ aralığında x ' in her değeri için sağlamalıdır.



Şekil 2.2. Ankastre-serbest cubuğun iki değişik Modeli.

a-Tek elemanlı, iki düğüm noktalı,

b-Dört elemanlı, beş düğüm noktalı.

Denklem (2.20) integre edildiği zaman c_5 ve c_6 reel integral sabitleri olmak üzere,

$$u(x) = c_5 x + c_6 \quad (2.21)$$

denklemini elde edilir. Elemanın sınır şartlarından c_5 ve c_6 katsayıları elde edilerek (2.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_1 + \frac{x}{\ell} u_2 \quad (2.22)$$

elde edilir [3]. Burada $\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$ ve $\left(\frac{x}{\ell}\right)$ fonksiyonları şekil fonksiyonlarını

ifade eder ve $x = \xi \ell$ olması şartıyla,

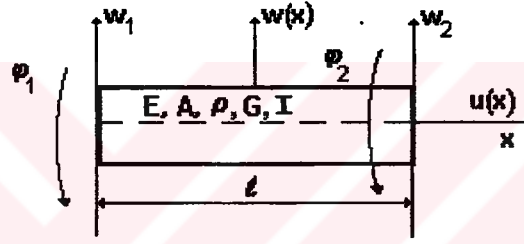
$$u = [N]_u \{\delta\}_u \quad (2.23)$$

$$[N]_u = [(1 - \xi); \xi] \quad (2.24)$$

$$\{\delta\}_u = \{u_1(t); u_2(t)\}^T \quad (2.25)$$

bağıntıları elde edilir.

Birçok sonlu ve karmaşık şekilli cisimler sadece boyuna titreşimlerin incelenmesiyle modellenmez. Dolayısıyla eğilme titreşimlerinde gözönüne alınması gerekir. Çubukların eğilme titreşimleri incelenirken, eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmesi yani kesme dönmesi de hesaba katılmış ve incelenmiştir. Bu şekilde elde edilen teoriye Kalın Çubuk Teorisi denir. Şekil 2.3' te tek elemanlı çubuğun düğüm noktalarının eğilme, dönme koordinatları verilmiştir.



Şekil 2.3. Tek elemanlı çubuk modelinin eğilme koordinatları.

Harmonik hareket halinde, sürekli sistem denkleminin

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.26)$$

çubuk boyunca her x için sağlanması gerekmektedir. EI değeri sabit

olduğundan $\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = 0$ olmalıdır. Bu da,

$$w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \quad (2.27)$$

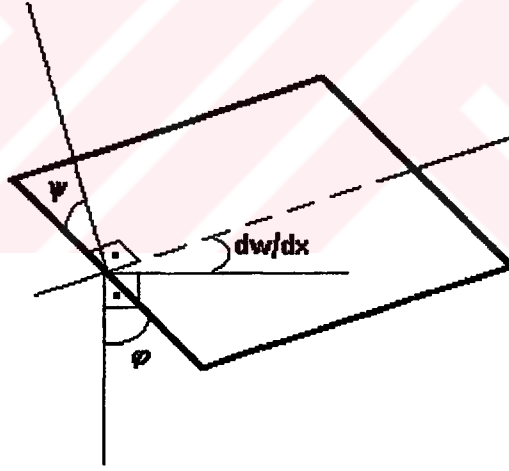
denklemini verir. Yine Şekil 2.3' te gösterilen modelin sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 x=0 \text{ için } w(0) &= w_1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w(x)}{\partial x} = \phi_1 \\
 x=L \text{ için } w(L) &= w_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w(x)}{\partial x} = \phi_2
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki sınır şartları yardımıyla (2.27) ifadesinin integrasyon sabitleri elde edilir. Bu durumda (2.27) ifadesi,

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \left[1 - 3\frac{x^2}{\ell^2} + 2\frac{x^3}{\ell^3} \right] u_1 + L \left[\frac{x}{\ell} - 2\frac{x^2}{\ell^2} + 2\frac{x^3}{\ell^3} \right] u_2 \\
 &= \left[3\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3} \right] u_3 + L \left[-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right] u_4
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir [3]. Şekil 2.4' teki ise ψ kayma şekil değiştirmesinin herhangi bir noktasındaki gösterimi sunulmuştur [4].



Şekil 2.4. Çubuk üzerindeki herhangi bir noktada ψ kayma şekil değiştirmesinin gösterimi.

$x=\xi\ell$ eşitliğinin (2.28) denklemine konulmasıyla,

$$w = [N]_w \{\delta\}_w \tag{2.29}$$

$$[N]_w = \left\{ \left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \right); \ell \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 \right); \left(3\xi^2 - 2\xi^3 \right); \ell \left(-\xi^2 + \xi^3 \right) \right\} \tag{2.30}$$

$$\{\delta\}_w = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}^T \quad (2.31)$$

denklemleri elde edilir. $\{\delta\}_w$ ve $\{\delta\}_u$ çubuğun düğüm noktalarındaki değişkenlerinin vektörleridir. Eğilme yer değiştirmesi esnasında dönmeden oluşan kesit dönmesine ait ifade,

$$\varphi = w' = [N']_w \{\delta\}_w \quad (2.32)$$

şeklindedir. Ve bu ifadede kesit dönmesinin şekil fonksiyonu,

$$[N']_w = \left\{ (-6\xi + 6\xi^2); \ell(1 - 4\xi + 3\xi^2); (6\xi - 6\xi^2); (-2\xi + 3\xi^2) \right\} \quad (2.33)$$

şeklinde elde edilmiştir. Aşağıdaki şekil fonksiyonu ise, rijitlik matrisine ait eğilme potansiyel enerjisinin eldesinde kullanılan fonksiyondur.

$$[N'']_w = \left\{ (-6 + 12\xi); \ell(-4 + 6\xi); (6 - 12\xi); (-2 + 6\xi) \right\} \quad (2.34)$$

Her eleman için bu fonksiyonlarla iş ve enerji denklemleri yazılır. Matris formundaki bu değerler daha önceki bölümlerde tanımlanan iş ve enerji denklemlerinde yerlerine yazılırsa kinetik enerji,

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M]_i \{\dot{\delta}\} \quad (2.35)$$

ve potansiyel enerji ise,

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]_i \{\delta\} \quad (2.36)$$

şeklini alır. Lineer olmayan terimler varsa, bunlarında lineer kabul ile ifade edilmesi gerekir. Kütle ve rijitlik matrisleri $[M]_i$, $[K]_i$ ayrı ayrı süperpoze edilirler. Eğilme için ew, boyuna uzama için eu alt indislerini; 4 serbestlikli

ince çubukta eğilme esnasında meydana gelen kesit dönmesi halinde, kütle matrisinde d4 üst indisini, eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmeleri halinde kütle matrisinde kd4 üst indisini, rijitlik matrisinde k4 üst indisini, ve yine 6 serbestlikli kalın çubukta eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmeleri halinde kütle ve rijitlik matrislerinde, kd6 üst indisi kullanılır.

Yukarıda ifade edilen, kd4 ve k4 üst indislerinin kullanıldığı kayma şekil değiştirmesi ve dönme ataleti etkilerini içeren 4 serbestlikli kalın çubuk sonlu elemanı [5] referanslı araştırma yayınından alınmıştır. Bu bahsettiğimiz etkiler 4*4 eğilme kütle ve rijitlik matrislerinde incelenmiştir. Bu kalın çubuk elemanı tezimizde 4 serbestlikli kalın çubuk elemanı şeklinde kullanılacaktır.

Yukarıda ifade edilen, kd6 üst indisinin kullanıldığı kayma şekil değiştirmesi ve dönme atalet etkilerinin hesaba katıldığı 6 serbestlikli kalın çubuk sonlu elemanı [4] referanslı makaleden alınmıştır. Bu bahsettiğimiz etkiler 6*6 eğilme kütle ve rijitlik matrislerinde incelenmiştir. Bu kalın çubuk elemanı tezimizde 6 serbestlikli kalın çubuk elemanı şeklinde kullanılacaktır.

$$[K_e]_{ew} = \sum_{i=1}^n [K_e]_{ewi}$$

$$[K_e]_{ew}^{k4} = \sum_{i=1}^n [K_e]_{ewi}^{k4}$$

$$[K_e]_{ew}^{kd6} = \sum_{i=1}^n [K_e]_{ewi}^{kd6}$$

$$[K_e]_{eu} = \sum_{i=1}^n [K_e]_{eui}$$

$$[M_e]_{ew} = \sum_{i=1}^n [M_e]_{ewi}$$

$$[M_e]_{ew}^{d4} = \sum_{i=1}^n [M_e]_{ewi}^{d4}$$

$$\begin{aligned}
[M_e]_{ew}^{kd4} &= \sum_{i=1}^n [M_e]_{ewi}^{kd4} \\
[M_e]_{ew}^{kd6} &= \sum_{i=1}^n [M_e]_{ewi}^{kd6} \\
[M_e]_{eu} &= \sum_{i=1}^n [M_e]_{eui}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Eğilme ve boyuna uzama için rijitlik ve kütle matrislerinin elde edilmesinden sonra her eleman için yapılan tanımlar ve kabuller gereği, ince çubuklar için eleman kütle ve rijitlik matrisi çiftimiz aşağıdaki şekilde gibidir.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e]_{ew}^{4*4} & [0] \\ [0] & [K_e]_{eu}^{2*2} \end{bmatrix}_{6*6} \tag{2.38.a}$$

$$[M_e]^{d4} = \begin{bmatrix} [M_e]_{ew} + [M_e]_{ew}^{d4} & [0] \\ [0] & [M_e]_{eu}^{2*2} \end{bmatrix}_{6*6} \tag{2.38.b}$$

4 serbestlikli kalın çubuk için eleman kütle ve rijitlik matrisi çiftimiz aşağıdaki gibidir.

$$[K_e]^{k4} = \begin{bmatrix} [K_e]_{ew}^{k4} & [0] \\ [0] & [K_e]_{eu}^{2*2} \end{bmatrix}_{6*6} \tag{2.39.a}$$

$$[M_e]^{kd4} = \begin{bmatrix} [M_e]_{ew}^{kd4} & [0] \\ [0] & [M_e]_{eu}^{2*2} \end{bmatrix}_{6*6} \tag{2.39.b}$$

Aşağıdaki eşitlikleri göz önüne alarak,

$$[K_e]_{ew}^{kd6} = \begin{bmatrix} [K_e]_{ew}^{kd3} \\ [K_e]_{ew}^{kd3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{ve} \quad [M_e]_{ew}^{kd6} = \begin{bmatrix} [M_e]_{ew}^{kd3} \\ [M_e]_{ew}^{kd3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (2.40.a)$$

$$[K_e]_{eu}^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [M_e]_{eu}^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} [M_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [M_e]_{eu}^{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.40.b)$$

6 serbestlikli kalınçubuk için, eleman kütle ve rijitlik matrisi çiftimiz ise,

$$[K_e]^{kd6} = \begin{bmatrix} [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [K_e]_{ew}^{kd3} \\ [K_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [K_e]_{ew}^{kd3} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad [M_e]^{kd6} = \begin{bmatrix} [M_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [M_e]_{ew}^{kd3} \\ [M_e]_{eu}^{1 \times 1} \\ [M_e]_{ew}^{kd3} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (2.41)$$

şeklinde elde edilmiştir.

İnce çubuk ve 4 serbestlikli kalın çubuk elemanının genelleştirilmiş koordinatlarını gösteren vektör,

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\}_{ew}^{4 \times 1} \\ \{\delta\}_{eu}^{2 \times 1} \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{6 \times 1} \quad (2.42)$$

6 serbestlikli kalın çubuk elemanının genelleştirilmiş koordinatlarını gösteren vektör,

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\}_{eu}^{1 \times 1} \\ \{\delta\}_{ew}^{3 \times 1} \\ \{\delta\}_{eu}^{1 \times 1} \\ \{\delta\}_{ew}^{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}_{8 \times 1} \quad (2.43)$$

şeklinde olmak üzere 2 tip formda elde edilir.

2.4. Burkulma Problemi

Burkulma problemi, bir sistemin elastik dengesizliğine sebep olan yüklerin hesaplanmasıyla ilgilidir. Elastiklik sınırı içinde aksenal artan kuvvete maruz bir çubuk, aksenal kuvvetin kritik bir değerinde burkulmaktadır. Burkulmaya sebep olan bu kuvvet kritik burkulma yükü olarak adlandırılmaktadır.

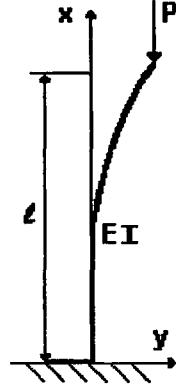
Dikdörtgen kesitli L uzunluğunda bir çubuğun burkulma yükleri aşağıdaki ifadeden faydalanılarak hesaplanır.

$$P = \chi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (2.44)$$

Denklem (2.44)' ün aldığı en küçük değer kritik burkulma yükü olarak adlandırılmaktadır [6]. Çubuğun asal eksenini doğrultusunda uygulanan kuvvet, kritik burkulma yüküne eşit olduğu an birinci özfrekans değeri sıfır olmaktadır. Bu durumda çubuk sıfır olmayan fakat statik olarak şekil değiştirmiş olmaktadır. Kritik yükün değeri, elemanın boyutlarına ve malzemenin elastiklik modülüne bağlıdır. Birisi yüksek kalite çelikten diğeri adi çelikten yapılmış iki çubuğun malzemelerinin mukavemeti çok farklı olduğu halde aynı kritik burkulma yükünde burkulurlar.

Şekil 2.5' te ankastre-serbest mesnet şartında verilmiş bir kiriş bulunmaktadır. Burkulma problemindeki amaç, bu kirişlerin burkulma yüklerinin tayin edilmesidir.

Eksenel kuvvetin burkulma yüküne eşit olması durumunda çubuğun ilk özfrekans değeri 0 olmaktadır. Ayrıca özfrekans değerleri eksenel kuvvetin artmasıyla azalmakta, çekme kuvveti ile artmaktadır.



Şekil 2.5. Ankastre-serbest halde burkulan kiriş.

Çubuk asal eksenini boyunca uygulanan kuvvet iç gerilmelere neden olur. Bu durum (2.6) ifadesinin, sistemin potansiyel enerjisine eklenmesini gerektirir. Bu enerji denkleminden faydalanılarak, $[K]_g$ geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki ifadeden elde edilir.

$$U_g = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K]_g \{\delta\}_w \quad (2.45)$$

Bu durumda elde edilen potansiyel enerji ifadesinin lagrange denkleminde yerine yazılmasıyla sistemin hareket denklemini aşağıdaki şekli alır.

$$\left[\lambda [K]_g + [K] \right] \{\delta\}_i + [M] \{\ddot{\delta}\}_i = 0 \quad (2.46)$$

Harmonik hareket kabulüyle (2.46) ifadesi,

$$\left[\lambda [K]_g + [K] \right] \{\delta\}_i - \Omega^2 [M] \{\delta\}_i = 0 \quad (2.47)$$

halini alır. Burada $[K]$ rijitlik matrisi, λ özdeğer ve $[K]_g$ ise geometrik rijitlik matrisidir. Bu denklem aynı zamanda minimum λ değerini elde etmek için aradığımız özdeğer problemini içerir. Statik burkulma probleminin teorik analizi' de aşağıdaki denklemde ifade edilen özdeğer probleminin çözülmesi gerekir. Ω değerinin sıfır olması durumunda (2.47) denklemi şu şekli alır.

$$[K] + \lambda[K]_g \{\delta\}_i = 0 \quad (2.48)$$

Bu ifadedeki minimum λ değeri çubuğun burkulmasına sebebiyet veren burkulma yükünü verir.

2.5. Bilgisayar Kodları

İnce çubuk elemanı ile 4 serbestlikli kalın çubuk elemanının eğilme ve burkulma probleminin hesabında bulunması gereken 6 değişken vardır. 6 serbestlikli kalın çubuk elemanının eğilme ve burkulma probleminin hesabında bulunması gereken 8 değişken vardır. Bu değişkenlerin bazılarının değerleri elemanın bulunduğu şartlardan dolayı engellenir. Bu değerlerin kodları sıfır olarak kodlanır. Ankastre-serbest bir çubuğun iki elemanlı modeli için bilgisayar kodları aşağıda verilmiştir. Çubuk ankastre-serbest olduğundan 1. elemanın 1. düğüm noktasının kodları sıfırdır.

İnce cubuk elemanı ile 4 serbestlikli kalın cubuk elemanı probleminde kullanılmak üzere bulunması gereken değişkenlere ait bilgisayar kodlarının ankastre-serbest bir çubuğun iki elemanlı modeli için ifadesi,

1. Eleman için:

Değişken Sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	w_1	0
2	φ_1	0
3	w_2	1
4	φ_2	2
5	u_1	0
6	u_2	3

İkinci elemanın birinci düğüm noktası birinci elemanın ikinci düğüm noktası ile çakışıkır. Dolayısıyla bu çakışıklık sebebiyle birinci elemanın ikinci düğüm noktasının kodlarıyla ikinci elemanın birinci düğüm noktası kodları aynıdır.

2. Eleman için:

Değişken Sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	w_1	1
2	φ_1	2
3	w_2	3
4	φ_2	4
5	u_1	5
6	u_2	6

şeklinde yazılır.

6 serbestlikli kalın cubuk elemanı probleminde kullanılmak üzere bulunması gereken değişkenlere ait bilgisayar kodlarının ankastre-serbest bir çubuğun iki elemanlı modeli için ifadesi,

1. Eleman için:

Değişken sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	u_1	0
2	w_1	0
3	φ_1	0
4	ψ_1	0
5	u_2	1
6	w_2	2
7	φ_2	3
8	ψ_2	4

2. Eleman için:

Değişken sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	u_1	1
2	w_1	2
3	φ_1	3
4	ψ_1	4
5	u_2	5
6	w_2	6
7	φ_2	7
8	ψ_2	8

şeklinde yazılır.

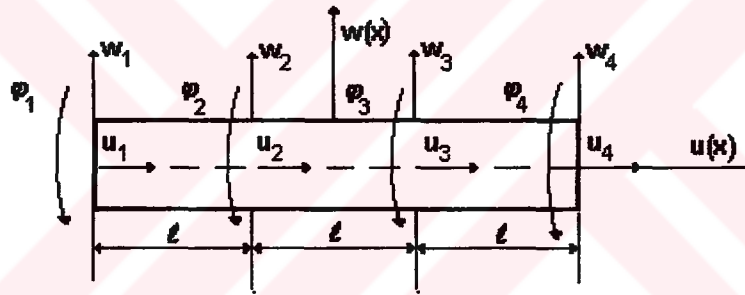
Aşağıda 3 elemana bölünmüş bir çubuğun eğilme ve burkulma halindeki kodları iki şekilde gösterilmiştir. Mesnet şartları olarak basit-basit, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre kullanılmıştır.

Birinci şekilde ince cubuk elemanı ile 4 serbestlikli kalın cubuk elemanı için gerekli olan değişkenlerin bilgisayar kodları aşağıdaki gibidir [3]

Basit-basit:									
Elemanın adı:	1		2		3		Burkulmada son eleman:		
w	0	2	2	5	5	0	5	0	
φ	1	3	3	6	6	8	6	8	
u	0	4	4	7	7	0	7	9	
Ankastre-serbest:									
w	0	1	1	4	4	7	4	7	
φ	0	2	2	5	5	8	5	8	
u	0	3	3	6	6	9	6	9	
Ankastre-ankastre:									
w	0	1	1	4	4	0	4	0	
φ	0	2	2	5	5	0	5	0	
u	0	3	3	6	6	0	6	7	

İkinci şekilde 6 serbestlikli kalın cubuk elemanı için gerekli olan değişkenlere ait bilgisayar kodları aşağıdaki gibidir.

Basit-basit:								
Eleman adı:	1		2		3		Burkulmada son eleman:	
u	0	3	3	7	7	0	7	11
w	0	4	4	8	8	0	8	0
φ	1	5	5	9	9	11	9	12
ψ	2	6	6	10	10	12	10	13
Ankastre-serbest:								
u	0	1	1	5	5	9	5	9
w	0	2	2	6	6	10	6	10
φ	0	3	3	7	7	11	7	11
ψ	0	4	4	8	8	12	8	12
Ankastre-ankastre:								
u	0	1	1	5	5	0	5	9
w	0	2	2	6	6	0	6	0
φ	0	3	3	7	7	0	7	0
ψ	0	4	4	8	8	0	8	0



Şekil 2.6. Üç elemana bölünmüş L uzunluğunda bir cubuk ve eleman düğüm noktalarına ait değişkenler.

Sistemin genelleştirilmiş koordinatları bu şekilde kodlandıktan sonra eleman rijitlik ve kütle matrisleri uygun bir şekilde yerleştirilir ve (2.18), (2.47) ve (2.48) denklemleri çözülerek titreşim frekansları ve burkulma yükleri hesaplanır. Fortran IV dilinde yazılmış program bulunmaktadır.

BÖLÜM 3

KÜTLE MATRİSİ

3.1. Eğilme Etkisi (ince çubuklar için)

Bu bölümde dönme atalet etkilerinin hesaba katıldığı ince çubuk elemanına ait kütle matrisi elde edilmiştir.

Kütle matrisinin bulunabilmesi amacıyla, bölüm 2' de tanımlanan (2.10), (2.11) ve (2.12) kinetik enerji denklemini (2.35)' deki gibi kuadratik formda yazmak gerekir.

Bir eleman için çubuğun eğilme kinetik enerjisi,

$$T_{ew} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \quad (3.1)$$

(2.29) ifadesinin zamana göre türevi alınıp (3.1)' de yerine yazılırsa,

$$T_{ew} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \{\dot{\delta}\}_w^T [N]_w^T [N]_w \{\dot{\delta}\}_w dx \quad (3.2)$$

elde edilir. (2.35) denklemine göre kütle matrisi,

$$[M_e]_{ew} = \rho A \int_{\ell} [N]_w^T [N]_w dx \quad (3.3)$$

olmakta ve aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$[M_e]_{ew} = \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & \\ 22\ell & 4\ell^2 & \text{symmetric} & \\ 54 & 13\ell & 156 & \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Bu bağıntı, lineer eğilme titreşimi için kütle matrisi olarak ifade edilir [6].

Kesit dönmesi sebebiyle bir eleman için çubuğun eğilme kinetik enerjisi,

$$T_{ewd} = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dx \quad (3.5)$$

(2.32) ifadesinin zamana göre türevi alınıp (3.5) de yerine yazılırsa,

$$T_{ewd} = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} \{\dot{\delta}\}_w^T [N']_w^T [N']_w \{\dot{\delta}\}_w dx \quad (3.6)$$

Kesit dönmesi, büyük yer değiştirmeler sırasında kesit düzleminin asal eksene dik kalmadığı durumlarda oluşur. (2.35) denklemine göre kesit dönmesinin kütle matrisi elemanlarına etkisi ise,

$$[M_e]_{ew}^{d4} = \rho I \int_{\ell} [N']_w^T [N']_w dx \quad (3.7)$$

$$[M_e]_{ew}^{d4} = \frac{1}{30} \frac{\rho I}{\ell} \begin{bmatrix} 36 & & & \\ 3\ell & 4\ell^2 & \text{symmetric} & \\ -36 & -3\ell & 36 & \\ 3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir [7].

3.2. Boyuna Yer Değişimi Etkisi

Sistemin sadece boyuna titreşim yaptığı varsayılırsa kinetik enerji bağıntısı,

$$T_{eu} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \dot{u}^2 dx \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. (2.23) ifadesinin zamana göre türevi alınarak (3.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$T_{eu} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \{\dot{\delta}\}_u^T [N]_u^T [N]_u \{\dot{\delta}\}_u dx \quad (3.10)$$

olmakta ve aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$[M_e]_{eu} = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Bu bağıntı lineer boyuna yer değiştirme için kütle matrisi olarak ifade edilmektedir [6].

3.3. Eleman Kütle Matrisi (ince çubuk için)-(boyuna+eğilme yer değişimi)

Çubuğun kütle matrisinin elde edilmesi için, (3.3) ve (3.7) bağıntıları,

$$[M_e]_{ew}^* = [M_e]_{ew} + [M_e]_{ew}^{d4} \quad (3.12)$$

şeklinde süperpoze edilirler. (3.11) ve (3.12) uygun şekilde (2.38.b)' ye yerleştirilir.

$$[M_e]^{d4} = \begin{bmatrix} [M_e]_{ew}^* & [0] \\ [0] & [M_e]_{eu} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$[M_e]^{d4} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 4l^2 & \text{symmetric} \\ 54 & 13l & 156 & -13l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{30} \frac{\rho I}{l} \begin{bmatrix} 36 & \text{symmetric} & 3l & 4l^2 \\ -36 & -3l & 36 & 3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Bu şekilde oluşan matris eleman kütle matrisi denir.

3.4. Nokta Kütlenin Eklenmesi

Çubuk üzerinde herhangi bir nokta kütlenin bulunması durumunda bu kütle değerinde yukarıda elde edilen eğilme ve boyuna uzama matrislerine uygun şekilde eklenmesi gerekir. Nokta kütle bulunduğu konuma göre kütle matrisinin uygun satır ve sütununa eklenmelidir. Ankastre-serbest çubuğun serbest ucunda m_{ek} kütlelerinin eleman eğilme ve boyuna uzama kütle matrislerine eklenmesi aşağıdaki şekilde olmaktadır. Nokta kütle etkisi ve dönme ataleti etkileri beraber ankastre-serbest mesnet şartında göze alınmıştır.

$$[M_e] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 156 & 22\ell & 4\ell^2 & \text{symmetric} & \\ \frac{\rho A \ell}{420} & 54 & 13\ell & 156 + m_{ek} \frac{420}{\rho A \ell} & \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 & \end{array} \right] + [M_e]_{\text{ewd}} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 4 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left[\frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 + m_{ek} \frac{6}{\rho A \ell} \end{bmatrix} \right] \end{array} \right] \quad (3.15)$$

3.5. Eğilme Etkisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için)

Bu bölümde eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan kayma deformasyonları ile dönme atalet etkilerini göze alan 4 serbestlikli kalın çubuk elemanına ait kütle matrisinin elde edilmesi mevcuttur. Bu 4 serbestlikli kalın çubuk için eğilme kütle matrisini (3.16) bağıntısı ile elde edebiliriz.

3.6. Eleman Kütle Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için)

Eleman kütle matrisinin elde edilebilmesi için denklem (2.37)' de gösterildiği şekilde (3.16) ve (3.11) bağıntıları (2.39.b)' de gösterilen formda birleştirilip yazılırsa dönme ataleti ve kayma etkilerinin göze alındığı eleman kütle matrisi (3.18) bağıntısı ile elde edilir.

$$\begin{aligned}
[M_e]_{ew}^{kd4} &= \frac{\rho A \ell}{(1 + \phi_s)^2} \left[\begin{array}{c} \frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi_s + \frac{1}{3} \phi_s^2 \\ (\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi_s + \frac{1}{24} \phi_s^2) \ell \\ \frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2 \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi_s + \frac{1}{120} \phi_s^2 \\ (\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \end{array} \right] \quad \text{symmetric} \\
&+ \frac{\rho A \ell}{(1 + \phi_s)^2} \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \left[\begin{array}{c} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi_s \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{2}{15} + \frac{1}{6} \phi_s + \frac{1}{3} \phi_s^2 \\ (-\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \phi_s) \ell \\ \frac{6}{5} \\ (-\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \phi_s) \ell \end{array} \right] \quad \text{symmetric} \\
&\left[\begin{array}{c} \frac{1}{15} + \frac{1}{60} \phi_s + \frac{1}{120} \phi_s^2 \\ (\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi_s + \frac{1}{120} \phi_s^2 \\ (\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi_s + \frac{1}{6} \phi_s^2) \ell \end{array} \right] \quad \text{symmetric}
\end{aligned}$$

(3.16)

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12},$$

$$\phi_s = \frac{12EI}{k'AGL^2} = 12k \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 = k \frac{h^2}{\ell^2} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 [M_E]^{kd4} = & \left[\begin{array}{c} \frac{\rho A \ell}{(1+\phi_s)^2} \left[\begin{array}{c} \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2 \\ (\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\phi_s + \frac{1}{24}\phi_s^2)\ell \\ \frac{9}{70} + \frac{3}{10}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2 \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2)\ell \end{array} \right] \begin{array}{c} \frac{1}{105} + \frac{1}{60}\phi_s + \frac{1}{120}\phi_s^2 \\ (\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi_s + \frac{1}{24}\phi_s^2)\ell \\ -(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\phi_s + \frac{1}{120}\phi_s^2)6\ell^2 \\ -(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2)\ell \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{symmetric} \\ \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2 \\ -(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\phi_s + \frac{1}{24}\phi_s^2)\ell \\ (\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\phi_s + \frac{1}{120}\phi_s^2)\ell^2 \end{array} \\ \\ + \frac{\rho A \ell}{(1+\phi_s)^2} \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \left[\begin{array}{c} \frac{6}{5} - \frac{1}{10} \\ (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_s)\ell \\ -\frac{6}{5} \\ (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_s)\ell \end{array} \right] \begin{array}{c} \frac{2}{15} + \frac{1}{6}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2 \\ (-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\phi_s)\ell \\ \frac{6}{5} - \frac{1}{10} \\ (-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2)\ell^2 \end{array} \begin{array}{c} \text{symmetric} \\ \frac{6}{5} - \frac{1}{10} \\ (-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\phi_s)\ell \\ (\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2)\ell^2 \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \frac{\rho A \ell}{6} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \right] \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

BÖLÜM 4

RİJİTLİK MATRİSLERİ

4.1. Eğilme Rijitlik Matrisi (ince çubuk için)

Çubuğun z eksenini etrafındaki lineer eğilme titreşimleri incelendiğinde (2.4) denkleminde verilen potansiyel enerji ifadesinin kullanılması gerekmektedir. Bir eleman için çubuk içindeki asal eksene x- ekseni denirse potansiyel enerji,

$$U_{ew} = \frac{1}{2} EI \int_{\ell} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.1)$$

olur. Bu ifadedeki w'' tanımı, (2.32)'nin x' e göre bir defa türetilmesi ile,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [N'']_w \{\delta\}_w \quad (4.2)$$

şeklini alır. Bu ifadedeki ℓ , bir elemanın boyunu göstermek kaydıyla, $x=\ell \xi$ olacak şekilde tanımlanmıştır. (4.2) ifadesi, (4.1)' de yerine yazılıp gerekli düzenleme yapılırsa,

$$U_{ew} = \frac{1}{2} EI \int_{\ell} \{\delta\}_w^T [N'']_w^T [N'']_w \{\delta\}_w dx \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Bunun yanısıra (2.36) denkleminde göre,

$$U_{ew} = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K_e]_w \{\delta\}_w \quad (4.4)$$

tarzında yazılır. Ve bu şekilde eğilme rijitlik matrisi aşağıdaki ifadeden elde edilir.

$$[K_e]_{ew} = EI \int_{\ell} [N']_w^T [N']_w dx \quad (4.5)$$

ve sonuç itibariyle,

$$[K_e]_{ew} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & 4\ell^2 & \text{symmetric} \\ -12 & -6\ell & 12 & \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir [3].

4.2. Boyuna Yer Değişimi Etkisi

Elastik çubuğun boyuna yer değiştirmesinin rijitlik matrisine etkisini bulmak için,

$$U_{eu} = \frac{1}{2} \int_{\ell} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir. (2.23) ifadesinin x' e göre türevi alınır,

$$U'_{eu} = [N']_u \{\delta\}_u \quad (4.8)$$

bağıntısı elde edilir. (4.8) ifadesi (4.7)' de yerine yazılacak olursa,

$$U_{eu} = \frac{1}{2} EA \int_{\ell} \{\delta\}_u^T [N']_u^T [N']_u \{\delta\}_u dx \quad (4.9)$$

kuadratik(matrisel) formda potansiyel enerji elde edilmiş olur. Buradan,

$$[K_e]_{eu} = EA \int_{\ell} [N']_u^T [N']_u dx \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) denkleminde çubuğun boyuna titreşim yapması durumunda eleman rijitlik matrisi aşağıda gösterildiği şekilde elde edilir [3].

$$[K_e]_{eu} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{A\ell^2}{I} & -\frac{A\ell^2}{I} \\ -\frac{A\ell^2}{I} & \frac{A\ell^2}{I} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.3. Eleman Rijitlik Matrisi (ince çubuk için)-(Boyuna+Eğilme yer değişimi)

Denklem (2.37)' de gösterildiği şekilde eğilme ve boyuna yer değiştirme matrisleri aşağıdaki formda birleştirilebilir.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e]_{ew} & [0] \\ [0] & [K_e]_{eu} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Bu şekilde (4.12) denkleminde (4.6) ve (4.11) ifadeleri yerlerine konursa rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K_e] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ & & 12 & -6\ell & 0 & 0 \\ & & & 4\ell^2 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{A\ell^2}{I} & -\frac{A\ell^2}{I} \\ & & & & -\frac{A\ell^2}{I} & \frac{A\ell^2}{I} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.4. Eğilme Rijitlik Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için)

Burada eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan dönme ataleti ve kayma deformasyonları sebebiyle, eğilme rijitlik matrisinde sadece kayma deformasyonlarının mevcut olduğunu kabul ederek bir eleman için eğilme rijitlik matrisi aşağıdaki şekildeki gibi elde edilir [5].

$$[K_e]_{ew}^{k4} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{krl} & \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \text{symmetric} \\ \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \text{symmetric} & \frac{12}{krl} \\ -\frac{12}{krl} & -\frac{6\ell}{krl} & \frac{12}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) \\ \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} - 1 \right) & -\frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$krl = 1 + 12k \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \quad (4.15)$$

4.5. Eleman Rijitlik Matrisi (4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için)

Denklem (2.37)' da gösterildiği şekilde (4.14) ve (4.11) bağıntıları (2.39.a)' da gösterilen formda birleştirilip yazılırsa kayma deformasyonu etkilerinin göze alındığı eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K_e]_{ew}^{k4} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{krl} & \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \text{symmetric} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 \times 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \text{symmetric} & \frac{12}{krl} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 \times 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\frac{12}{krl} & -\frac{6\ell}{krl} & \frac{12}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 \times 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} - 1 \right) & -\frac{6\ell}{krl} & \ell^2 \left(\frac{3}{krl} + 1 \right) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 \times 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.6. Geometrik Rijitlik Matrisi (ince ve 4 serbestlikli kalın çubuk için)

Burkulma probleminde, çubuk asal eksenini boyunca bir burkulma yükünün etkimesinden dolayı çubukta gerilme meydana gelir. Gerilmeden dolayı oluşan rijitliğe gerilme veya geometrik rijitlik denir.

Eğer gerilmeden dolayı oluşan potansiyel enerji ifadesini yeniden yazarsak,

$$U_g = \frac{1}{2} A \int_{\ell} \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.17)$$

elde edilir. (2.32)'deki $\phi = w'$ ifadesi (4.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_g = \frac{1}{2} \sigma_x A \int_{\ell} (\delta)_w^T [N']_w^T [N']_w (\delta)_w dx \quad (4.18)$$

bağıntısı elde edilir. Kuadratik formdaki bu ifadeden,

$$[K_e]_g = \sigma_x A \int_{\ell} [N']_w^T [N']_w dx \quad (4.19)$$

geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K_e]_g = \frac{\sigma_x A}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{\ell}{10} & \frac{2\ell^2}{15} & \text{symmetric} \\ \frac{\ell}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{\ell}{10} & \frac{2\ell^2}{15} \\ \frac{2\ell^2}{15} & -\frac{\ell}{10} & \frac{6}{5} & \frac{\ell}{10} \\ \frac{\ell}{10} & \frac{2\ell^2}{15} & \frac{\ell}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

BÖLÜM 5

6 SERBESTLİKLİ KALIN ÇUBUK ELEMANININ KÜTLE VE RİJİTLİK MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Çubuk elemanının iki nodu, her nodunda üç değişken olması sebebiyle nod değişkenleri; w , enine yer değiştirmesi, φ , kesit dönmesi, ve ψ , kayma deformasyonudur. Eleman matrisleri aşağıdaki kabullere bağlı olarak elde edilmiştir [4].

1- Eğilme için deformasyonun asal eksen yönünde sınırlı olması

2- Kesit şeklinin iki asal eksenine göre simetrik olması

3- Çubuk ekseninin düz olması

4- Kesit özelliklerinin çubuk eksen boyunca lineer olarak değişmesi (Bunun yanında, enine yer değiştirmenin kübik olarak, kayma deformasyonunun lineer olarak değiştiği kabul edilir).

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \quad (5.1)$$

Kesit dönmesini denklem (5.1)' deki gibi alarak çubuk elemanı düğümlerindeki yer değiştirmeleri aşağıda gösterildiği gibi interpolasyon fonksiyonu şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} w &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ \varphi &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + b_0 + b_1x \\ \psi &= b_0 + b_1x \end{aligned} \quad (5.2)$$

Genel olarak bu kalın çubuk için eleman düğümlerindeki yer değiştirmeleri,

$$u = \{w, \phi, \psi\}^T \quad (5.3)$$

şeklinde gösterebiliriz.

$$\alpha = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_0 \ b_1\}^T \quad (5.4)$$

Denklem (5.4) katsayılar vektörünü ifade eder.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Denklem (5.5) katsayılar matrisini ifade eder.

$$u = X\alpha \quad (5.6)$$

Sonuç itibariyle genelde bu kalın çubuk için düğümdeki yer değiştirmeler denklem (5.6) ile elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Ve bu yer değiştirmeler açık olarak kuadratik formda yukarıdaki gibi yazılabilir.

Öncelikle bir çubuk elemanını ele alırsak, bu çubuğun her iki ucundaki düğümlerdeki yer değiştirmeler,

$$U = \{w_1, \varphi_1, \psi_1, w_2, \varphi_2, \psi_2\}^T \quad (5.8)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ell \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$x_1 = 0$ ve $x_2 = \ell$ sınır şartlarını göstermek üzere bu çubuk elemanı için sınır değerlerini yerine koyarsak yukarıda (5.9) denklemiyle ifade edilen katsayılar matrisini elde ederiz.

Sonuç itibariyle çubuğun her bir ucundaki düğümlerdeki yer değiştirmeler aşağıda gösterildiği şekilde elde edilir.

$$U = C\alpha \quad (5.10)$$

Biz bu yer değiştirmeleri açık olarak kuadratik formda aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

(5.11) denkleminde hareketle çubuk elemanının her bir ucuna ait düğümlerdeki yer değişimlerinde kullanılmak üzere katsayılar vektörünü aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} = [C]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

5.1. Rijitlik Matrisi

5.1.1. Eğilme Rijitlik Matrisi

Bir eleman için eğilme potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$U_{(ew)_1} = \frac{1}{2} \int_{\ell} EI \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (5.13)$$

Çubuk elemanı düğüm noktalarının yer değişimlerinden kesit dönmesini,

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu ifadenin önce x'e göre türevi sonra da karesi alınır ve bu ifadeye (5.12) eşitliğinin uyarlanması ile elde edilen bağıntının (5.13) denkleminde yerine yazılması ile,

$$U_{(ew)_1} = \frac{1}{2} EI \int_{\ell} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [C]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 1 \end{bmatrix} [C]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} dx \quad (5.15)$$

şeklinde kuadratik formda potansiyel enerji ifadesi elde edilir. Ve biz bu ifadeyi aşağıdaki tarzda yazabiliriz.

$$U_{(ew)_1} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [K_e]_{(ew)_1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Dolayısı ile potansiyel enerjinin bu tarzda yazılmasıyla elde edilen eğilme rijitlik matrisi integrasyon sonucunda aşağıdaki şekilde gösterildiği gibidir.

$$[K_e]_{(ew)_1} = EI[C]^{-1T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell & 6\ell^2 & 0 & 2\ell \\ 0 & 0 & 6\ell^2 & 12\ell^3 & 0 & 3\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\ell & 3\ell^2 & 0 & \ell \end{bmatrix} [C]^{-1} \quad (5.17)$$

k_1

Bir eleman için, kesme deformasyonu sebebiyle eğilme potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$U_{(ew)_2} = \frac{1}{2} \int_{\ell} kGA(\psi)^2 dx \quad (5.18)$$

Çubuk elemanı düğüm noktalarının yer değişimlerinden kayma deformasyonu,

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadenin önce karesi alınır, daha sonra bu ifadeye (5.12) eşitliği uyarlanır ve son olarak ta elde edilen ifade (5.18) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_{(ew)_2} = \frac{1}{2} kGA \int_{\ell} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [C]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} [C]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} dx \quad (5.20)$$

şeklinde kuadratik formda potansiyel enerji ifadesi elde edilir. Ve biz bu ifadeyi aşağıdaki tarzda yazabiliriz.

$$U_{(ew)_2} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [K_e]_{(ew)_2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Ve potansiyel enerjinin bu tarzda yazılmasıyla kesme deformasyonu sebebiyle eğilme rijitlik matrisi integrasyon sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K_e]_{(ew)_2} = kGA[C]^{-1T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & \frac{\ell^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^3}{3} \end{bmatrix} [C]^{-1} \quad (5.22)$$

k_2

Böylece elde edilen eğilme rijitlik matrisleri aşağıdaki şekilde toplanarak toplam eğilme rijitlik matrisi elde edilir.

$$[K_e]_{(ew)} = [K_e]_{(ew)_1} + [K_e]_{(ew)_2}$$

$$[K_e]_{(ew)} = EI [C]^{-1T} [k_1] [C]^{-1} + kGA [C]^{-1T} [k_2] [C]^{-1} \quad (5.23)$$

Toplam eğilme rijitlik matrisi (2.40.a) formunda yazılırsa,

$$[K_e]_{ew} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ 6\ell & 4\ell^2 & & & & \\ & & \text{symmetric} & & & \\ -6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & & & \\ -12 & -6\ell & 6\ell & 12 & & \\ & 6\ell & 2\ell^2 & -3\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \\ -6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & 6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 \end{bmatrix} + \frac{kGA}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & \text{symmetric} & & & \\ & & & \frac{\ell^4}{3} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{\ell^4}{6} & 0 & 0 & \frac{\ell^4}{3} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Bu bağıntı lineer eğilme titreşimi için rijitlik matrisidir [4].

5.1.2. Eleman Rijitlik Matrisi (Eğilme+boyuna Yer Değişimi)

Çubuğun eleman rijitlik matrisinin elde edilebilmesi için, (5.24) ve (4.11) matrisleri denklem (2.41) formunda süperpoze elde edilir. Bu şekilde elde edilen matrise eleman rijitlik matrisi denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$[K_e]^{kd6} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{A\ell^2}{I} & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & & & \\ 0 & -6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & & \\ -\frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 & 0 & \frac{A\ell^2}{I} & \\ 0 & -12 & -6\ell & 6\ell & 0 & 12 \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -3\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \\ 0 & -6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & 0 & 6\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 \end{bmatrix} + \frac{kGA}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \text{symmetric} & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^4}{3} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^4}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^4}{3} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

5.1.3. Geometrik Rijitlik Matrisi

Burkulma probleminde, çubuk asal eksenini boyunca bir burkulma yükünün etkimesinden dolayı çubukta gerilme meydana gelir. Gerilmeden dolayı oluşan rijitliğe geometrik rijitlik denir.

Gerilmeden dolayı eğilme potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$U_g = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} (\phi)^2 dx \quad (5.26)$$

Çubuk elemanı düğüm noktalarının yer değişimlerinden kesit dönmesi şeklinde yer değişimini,

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ve daha sonra da bu kesit dönmesi şeklinde yer değişiminin karesi alınıp, (5.26) denkleminde yerine konursa,

$$U_g = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [C]^{-1T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3 & 2x & 2x^2 \\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 & 3x^2 & 3x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 & x & x^2 \end{bmatrix} [C]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} dx \quad (5.28)$$

şeklinde kuadratik formda potansiyel enerji ifadesi elde edilir. Ve biz bu ifadeyi aşağıdaki tarzda yazabiliriz.

$$U_g = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [K_e]_g \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Dolayısı ile potansiyel enerjinin bu tarzda yazılmasıyla integrasyon ve matrisler çarpımı şeklinde bir takım işlemlerden sonra sonuç eğilme geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki gibi şekilde edilir [4].

$$[K_e]_g = \frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & & & \\ \frac{1}{10}\ell & \frac{2}{15}\ell^2 & & & & \\ -\frac{6}{10}\ell & -\frac{1}{20}\ell^2 & \frac{6}{20}\ell^2 & & & \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}\ell & \frac{6}{10}\ell & \frac{6}{5} & & \\ \frac{1}{10}\ell & -\frac{1}{30}\ell^2 & -\frac{1}{20}\ell^2 & -\frac{1}{10}\ell & \frac{2}{15}\ell^2 & \\ -\frac{6}{10}\ell & -\frac{1}{20}\ell^2 & \frac{6}{20}\ell^2 & \frac{6}{10}\ell & -\frac{1}{20}\ell^2 & \frac{6}{20}\ell^2 \end{bmatrix} \quad \text{symmetric} \quad (5.30)$$

5.2. Kütle Matrisi

5.2.1. Eğilme Kütle Matrisi

Bir eleman için eğilme kinetik enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_{(ew)_1} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \rho A (\dot{w})^2 dx \quad (5.31)$$

Çubuk elemanı düğüm noktalarının yer değişimlerinden enine yer değişimini,

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ve daha sonra bu enine yer değişiminin zamana göre türevi alınıp, $\dot{w} = \dot{w}$ şeklinde kabul edilir. Bu ifadenin önce karesi alınır, sonra (5.12) eşitliği bu ifadeye uyarlanır ve son olarak ta elde edilen ifade (5.31) denkleminde yerine konursa,

$$T_{(ew)_1} = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\}^T [C]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} [C]^{-1} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\} dx \quad (5.33)$$

şeklinde kuadratik formda kinetik enerji ifadesi elde edilir. Ve biz bu ifadeyi aşağıdaki tarzda yazabiliriz.

$$T_{(ew)_1} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\}^T [M_e]_{(ew)_1} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\} \quad (5.34)$$

Ve kinetik enerjinin bu tarzda yazılmasıyla integrasyon sonucunda eğilme kütle matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M_e]_{(ew)_1} = \rho A [C]^{-1} \begin{bmatrix} \ell & \frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^4}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^4}{4} & \frac{\ell^5}{5} & 0 & 0 \\ \frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^4}{4} & \frac{\ell^5}{5} & \frac{\ell^6}{6} & 0 & 0 \\ \frac{\ell^4}{4} & \frac{\ell^5}{5} & \frac{\ell^6}{6} & \frac{\ell^7}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [C]^{-1} \quad (5.35)$$

m_1

Bir eleman için kesit dönmesi sebebiyle eğilme kinetik enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_{(ew)_2} = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} (\dot{\phi})^2 dx \quad (5.36)$$

Çubuk elemanı düğüm noktalarının yer değişimlerinden kesit dönmesi şeklinde yer değişimini,

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu kesit dönmesi şeklinde yer değişiminin zamana göre türevi alınır, $\dot{\phi} = \dot{\phi}$ şeklinde kabul edilir ve bu ifadenin karesi alınıp elde edilen bağıntıda (5.12) eşitliğinin yazılması ve son olarak ta bu bağıntının (5.36) denkleminde yerine konulması ile,

$$T_{(ew)_2} = \frac{1}{2} \rho I \int_{\ell} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [C]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3 & 2x_1 & 2x^2 \\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 & 3x_1^2 & 3x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 1 & x \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 & x & x^2 \end{bmatrix} [C]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} dx \quad (5.38)$$

şeklinde kuadratik formda kinetik enerji ifadesi elde edilir. Ve biz bu ifadeyi aşağıdaki tarzda yazabiliriz.

$$T_{(ew)_2} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}^T [M_e]_{(ew)_2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Ve kinetik enerjinin bu tarzda yazılmasıyla kesit dönmesi sebebiyle eğilme kütle matrisi integrasyon sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M_e]_{(ew)_2} = \rho I [C]^{-1T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & \ell^2 & \ell^3 & \ell & \frac{\ell^2}{2} \\ 0 & \ell^2 & \frac{4}{3}\ell^3 & \frac{3}{2}\ell^4 & \ell^2 & \frac{2}{3}\ell^3 \\ 0 & \ell^3 & \frac{3}{2}\ell^4 & \frac{9}{5}\ell^5 & \ell^3 & \frac{3}{4}\ell^4 \\ 0 & \ell & \ell^2 & \ell^3 & \ell & \frac{\ell^2}{2} \\ 0 & \frac{\ell^2}{2} & \frac{2}{3}\ell^3 & \frac{3}{4}\ell^4 & \frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^3}{3} \end{bmatrix} [C]^{-1} \quad (5.40)$$

m_2

Böylece elde edilen eğilme kütle matrisleri aşağıdaki şekilde toplanarak toplam eğilme kütle matrisi elde edilir.

$$[M_e]_{(ew)} = [M_e]_{(ew)_1} + [M_e]_{(ew)_2} \quad (5.41)$$

$$[M_e]_{(ew)} = \rho A [C]^{-1T} [m_1] [C]^{-1} + \rho I [C]^{-1T} [m_2] [C]^{-1}$$

(5.23) denklemi ile verilen toplam eğilme rijitlik matrisi ile yukarıda (5.41) denklemi ile verilen toplam eğilme kütle matrislerindeki matris işlemleri (ki bunlar, matrislerin tersi, transpozesi ve çarpımı olmak üzere) ℓ değişkenine bağlı olarak Mathematica paket programında yapılmıştır.

Toplam eğilme kütle matrisi (2.40.a) formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 [M_e]_{ew} = & \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & \\ 22\ell & 4\ell^2 & & & & \\ & & \text{symmetric} & & & \\ -22\ell & -4\ell^2 & 4\ell^2 & & & \\ 54 & 13\ell & -13\ell & 156 & & \\ -13\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 & \\ 13\ell & 3\ell^2 & -3\ell^2 & 22\ell & -4\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & & & & & \\ 42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 56 \left(\frac{h^2}{12} \right) & & & & \\ & & \text{symmetric} & & & \\ -252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 126 \left(\frac{h^2}{12} \right) & & & \\ -504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & -42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & & \\ 42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -14 \left(\frac{h^2}{12} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & -42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 56 \left(\frac{h^2}{12} \right) & \\ -252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 126 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 126 \left(\frac{h^2}{12} \right) \end{bmatrix} \\
 & (5.42)
 \end{aligned}$$

Bu bağıntı lineer eğilme titreşimleri için kütle matrisi olarak adlandırılır [4].

5.2.2. Eleman Kütles Matrisi (Eğilme+Boyuna Yer Değişimi)

$$[M_e]^{kds} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A \ell}{420} & \frac{\rho A \ell}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho A \ell}{420} & 140 & 0 & 156 & 0 & 22\ell & 4\ell^2 \\ 0 & 0 & 22\ell & 4\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22\ell & -4\ell^2 & 4\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 54 & 13\ell \\ 0 & 54 & 13\ell & -3\ell & 0 & 156 & 0 & 0 \\ 0 & -13\ell & -3\ell^2 & 3\ell^2 & 0 & -22\ell & 4\ell^2 & 0 \\ 0 & 13\ell & 3\ell^2 & 3\ell^2 & 0 & 22\ell & 4\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 56 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 128 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & -42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 0 & 504 \left(\frac{h^2}{12\ell^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -14 \left(\frac{h^2}{12} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 0 & -42 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & 56 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & -252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 128 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 0 & 252 \left(\frac{h^2}{12\ell} \right) & -21 \left(\frac{h^2}{12} \right) & 128 \left(\frac{h^2}{12} \right) \end{bmatrix} \quad \text{symmetric} \quad (5.43)$$

Çubuğun kütle matrisinin elde edilebilmesi için, (5.42) ve (3.11) matrislerinin denklem (2.41) formunda süperpoze edilir. Bu şekilde elde edilen matris eleman kütle matrisi denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

BÖLÜM 6

SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARININ ANALİZİ

6.1. Dönme Atalet etkilerinin Hesaba Katıldığı Serbest Titreşim Frekansları

Bu bölümde ince çubukta dönme ataleti etkilerinin göze alınması suretiyle değişik mesnet şartlarında, plastik ve C67 çelik malzeme için, serbest titreşim frekanslarının analizi yapılmıştır. Titreşim frekansları, fortran VI dilinde yazılan programla elde edilmiştir. Mesnet şartları olarak ankastre-serbest, ankastre-ankastre ve basit basit mesnetler göz önüne alınmıştır.

Tablolarda gösterilen λ frekans parametresini, f ise [Hz] olarak frekansı ifade etmektedir.

TABLO 6.1 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f [Hz]	λ	f [Hz]	λ	f [Hz]
97.410	58.958	12.362	21.003	500.598	133.656
1558.87	235.858	485.550	131.632	3805.52	368.513
7898.57	530.909	3808.48	368.656	14646.4	722.950
25019.4	944.89	14645.1	722.924	40154.9	1197.05
61362.2	1479.77	40145.4	1196.91	90158.2	1793.69

TABLO 6.2 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f [Hz]	λ	f [Hz]	λ	f [Hz]
97.391	58.952	12.361	21.002	500.474	133.640
1557.63	235.765	485.233	131.589	3801.99	368.342
7884.45	530.434	3802.55	368.369	14617.3	722.238
24940.0	943.397	14603.0	721.884	40016.5	1194.99
61058.5	1476.11	39961.2	1194.16	89680.5	1788.93

Yukarıda verilen tablo (6.1)' de, plastik çubuk için üç farklı mesnet şartında serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. (Tablo 6.2)' de ise, aynı çubuk için dönme ataleti etkisi göz önüne alınarak serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Sonuçta dönme ataleti etkisi sebebiyle, dönme ataleti etkilerini göze almaksızın elde edilen frekanslarda gözle görülür bir düşme kaydedilmiştir. Frekanstaki bu azalma ihmal edilebilir derecede küçüktür. Bunun yanında yüksek frekanslarda (örneğin 5.frekans), bu dönme ataleti etkisi sebebiyle azalma daha büyüktür.

TABLO 6.3 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.410	36.915	12.362	13.150	500.598	83.684
1558.87	147.675	485.550	82.417	3805.52	230.732
7898.57	332.410	3808.48	230.821	14646.4	452.655
25019.4	591.615	14645.1	452.634	40154.9	749.498
61362.2	926.512	40145.4	749.400	90158.2	1123.06

**TABLO 6.4 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları
Dönme Atalet Etkisi Mevcut**

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.409	36.914	12.362	13.150	500.593	83.684
1558.83	147.672	485.589	82.416	3805.38	230.728
7898.04	332.399	3808.26	230.815	14645.4	452.638
25016.4	591.580	14643.5	452.610	40149.8	749.449
61350.8	926.426	40138.5	749.345	90140.4	1122.95

Bu sefer (Tablo 6.3)' de, C67 çelik çubuk için farklı mesnet şartlarında serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. (Tablo 6.4)' te ise, yine dönme ataleti etkisi göz önüne alınması suretiyle serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuç; (Tablo 6.1) ve (Tablo 6.2)' de olduğu gibi,

dönme ataleti etkisi sebebiyle titreşim frekanslarında azalma görülmüştür. Fakat bu azalma ihmal edilebilir derecede küçüktür.

6.2. Dönme Atalet Etkileri Ve P Eksenel Kuvvetinin Serbest Titreşim Frekanslarına Etkisi

(Tablo 6.5) ve (Tablo 6.6)'da plastik çubuk için, (Tablo 6.7) ve (Tablo 6.8)' de C67 çelik çubuk için dönme atalet etkileri ve P eksenel kuvvetinin serbest titreşim frekanslarına etkisi incelenmiştir. P (N) olarak serbest uca etkiyen kuvveti göstermektedir. Sonuçta, P eksenel kuvvetin artırılması suretiyle çubuk özfrekansının azaldığını görüyoruz. Eksenel kuvvetin kritik burkulma yüküne eşit olduğu anda çubuğun 1. özfrekansının değerinin 0 olduğunu görüyoruz. Frekansı 0 yapan P eksenel kuvveti tablolarda gösterilmiştir. Mesnet şartı olarak ankastre-serbest mesnet hali alınmıştır. Bunun yanında dönme atalet etkilerinin serbest titreşim frekanslarını düşürdüğünü, fakat 1.frekansı 0 yapan kritik burkulma yüküne eşit olan P eksenel kuvvetin değerini değiştirememiştir. Yani,kritik burkulma yükü hemen hemen hem dönme atalet etkileri altında hem de dönme atalet etkileri olmadığı durumda aynıdır [6].

6.3. Dönme Atalet Etkileri Ve Nokta Kütlenin Ankastre-Serbest Halde Serbest Titreşim Frekanslarına Etkisi

Bu bölümde ankastre-serbest halde dönme atalet etkileri ve nokta kütlenin serbest titreşim frekanslarına etkisi incelenmiştir. Bu incelemeler (Tablo 6.9) ve (Tablo 6.10)' da sırasıyla plastik çubuk ve C67 çubuk için gösterilmiştir. m kg olarak serbest uca eklenen kütleyi göstermektedir.

Sonuçta, serbest uca eklenen kütle attıkça frekansın azaldığını görüyoruz. Bunun yanında dönme atalet etkilerinin de serbest titreşim frekanslarının çok az derecede azalmasına sebep olduğunu gözliyoruz. Bu azalma da ihmal edilebilecek derecede küçüktür. Bu değerlendirme dönme atalet etkilerinin hesaba katılmadığı duruma göre yapılmıştır [6].

TABLO 6.5 Ankastre-Serbest halde Plastik Çubuğa uygulanan P (Eksenel Kuvvetin) Çubuk Özfrekanslarına Etkisi

P [Ekseneel Kuwvet]									
10 N		20 N		33.4730 N		33.4732 N		33.4733 N	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
8.8658	17.787	5.2134	13.639	0.00009	0.0593	0.000018	0.0256	-0.00002	0.027
461.1	128.34	437.62	124.96	405.22	120.25	405.22	120.25	405.22	120.2

**TABLO 6.6 Ankastre-Serbest halde Plastik Çubuğa uygulanan
P (Eksenel Kuvvetin) Çubuk Özfrekanslarına Etkisi
Dönme Atalet Etkisi Mevcut**

P [Eksenesel Kuweti]									
10 N		20 N		33.4730 N		33.4732 N		33.4733 N	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
8.8649	17.786	5.212	13.639	0.00009	0.0593	0.000018	0.0256	-	0.0277
								0.00002	
461.05	128.30	437.33	124.92	404.95	120.21	404.95	120.21	404.95	120.21
								404.95	120.21

TABLO 6.8 Ankaşre-Serbest halde C67 Çubuğa uygulanan P (Eksenel Kuwetin) Çubuk Özfrekanslarına Etkisi

P (Ekseneri Kuuvet)											
1 N		3 N		3.35 N		3.35300 N		3.35317 N		4 N	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
8.872	11.14	1.400	4.425	0.0128	0.423	0.0008	0.106	0.000123	0.0416	-2.637	6.074
461.64	80.363	413.694	76.074	405.287	75.297	405.215	75.291	405.211	75.280	389.672	73.833

TABLO 6.9 Ankastre-Serbest halde Plastik Çubuk için:

Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz		Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz		Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz	
m=0.085 kg				m=0.4 kg				m=2 kg			
λ	$f[Hz]$	λ	$f[Hz]$	λ	$f[Hz]$	λ	$f[Hz]$	λ	$f[Hz]$	λ	$f[Hz]$
1.498	7.312	1.499	7.315	0.3511	3.539	0.3514	3.5414	0.0718	1.6008	0.0718	1.6015
253.24	95.064	253.32	95.078	241.13	92.763	241.19	92.775	238.37	92.230	238.42	92.241
2549.7	301.64	2552.1	301.78	2507.12	299.11	2509.3	299.24	1185.1	205.65	1186.2	205.74
10977.	625.89	10998.	626.49	5741.46	452.64	5746.5	452.84	2497.5	298.54	2499.7	298.67

TABLO 6.10 Ankastre-Serbest halde C67 Çubuğu için:

Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz		Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz		Dönme Ataletli		Dönme Ataletsiz							
m=0.02 kg						m=0.05 kg						m=0.1 kg					
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]		
1.611	4.747	1.611	4.747	0.6976	3.1244	0.6976	3.1241	0.3586	2.240	0.3586	2.240	0.3586	2.240	0.3586	2.240		
254.56	59.676	254.56	59.676	244.72	58.510	244.72	58.511	24.126	58.096	24.126	58.096	241.27	58.096	241.27	58.096		
2556.4	189.11	2556.5	189.11	2521.5	187.81	2521.6	187.81	2509.4	187.36	2509.4	187.36	2509.5	187.37	2509.5	187.37		
11007.	392.41	11008.	392.43	10933.5	391.09	10934.	391.11	10908.	390.64	10908.	390.64	10909.	390.65	10909.	390.65		

6.4. Dönme Atalet etkileri ve Kayma Deformasyonları Halinde Serbest Titreşim Frekansları (4 serbestlikli kalın çubuk için)

6.4.1. Kayma Deformasyonları Halinde K_0 Eleman Rijitlik Matrisi Ve Serbest Titreşim Frekansları

Bu bölümde 4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için, dönme atalet etkileri ve kayma deformasyonları hesaba katılmış, kayma deformasyonları ise sadece eleman rijitlik matrisinde göz önüne alınmış ve bunun sonucunda elde edilen serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Bunun yanında bu işlem hem plastik çubuk hem de C67 çelik çubuğu için farklı mesnet şartlarında gerçekleştirilmiştir. Ve bunun yanında bu elde edilen frekanslar dönme atalet etkilerinin göze alındığı ince çubuk elemanı ile mukayese edilmiştir. Bunun amacı kayma deformasyonu etkilerinin sadece eleman rijitlik matrisinde ele alınmışken, incelenmesidir [8]. İlk olarak (Tablo 6.11) ve (Tablo 6.12)' de plastik çubuk için incelersek,

TABLO 6.11 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları
Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.391	58.952	12.361	21.002	500.474	133.640
1557.63	235.765	485.233	131.589	3801.99	368.342
7884.45	530.434	3802.55	368.369	14617.3	722.238
24940.0	943.397	14603.0	721.884	40016.5	1194.99
61058.5	1476.11	39961.2	1194.16	89680.5	1788.93

TABLO 6.12 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut**Kayma etkisi Halinde Ke Eleman rijitlik matrisi**

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.374	58.948	12.360	21.001	500.061	133.584
1556.62	235.688	484.971	131.554	3795.16	368.011
7873.21	530.056	3797.74	368.136	14573.2	721.148
24878.8	942.239	14569.6	721.059	39837.7	1192.32
60833.7	1473.39	39819.8	1192.05	89132.1	1783.45

Elde edilen sonuç, kayma etkilerinin titreşim frekansını azalttığını, bu azalmanın gözle görülebilir olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bu azalma ihmal edilebilir derecede küçüktür. Bunun yanında kayma etkilerinin dönme atalet etkilerine oranla titreşim frekanslarında daha az bir azaltmaya sebep olduğunu gözlüyoruz. Ayrıca, ankastre-ankastre mesnet şartında kayma etkilerinin dönme atalet etkilerine oranla titreşim frekanslarında daha fazla bir azaltmaya sebep olduğunu da görebiliyoruz. İkinci olarak (Tablo 6.13) ve (Tablo 6.14)' te çelik çubuk için incelersek;

TABLO 6.13 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.409	36.914	12.362	13.150	500.593	83.684
1558.83	147.672	485.589	82.416	3805.38	230.728
7898.04	332.399	3808.26	230.815	14645.4	452.638
25016.4	591.580	14643.5	452.610	40149.8	749.449
61350.8	926.426	40138.5	749.345	90140.4	1122.95

TABLO 6.14 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut
Kayma etkisi Halinde Ke Eleman rijitlik matrisi

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
97.409	36.914	12.362	13.150	500.578	83.682
1558.79	147.671	485.529	82.415	3805.13	230.720
7897.62	332.390	3808.08	230.809	14643.7	452.613
25014.1	591.553	14642.3	452.590	40143.0	749.387
61342.4	926.363	40133.2	749.295	90119.7	1122.82

Elde edilen sonuç, kayma etkilerinin titreşim frekansını azalttığını, bu azalmanın gözle görülebilir olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bu azalma ihmal edilebilir derecede küçüktür. Bunun yanında kayma etkilerinin dönme ataleti etkilerine oranla titreşim frekanslarında daha az bir azaltmaya sebep olduğunu gözliyoruz. Bunun yanında ankastre-ankastre mesnet şartında kayma etkilerinin dönme ataleti etkilerine oranla titreşim frekanslarında daha fazla bir azaltmaya sebep olduğunu da görebiliyoruz.

6.4.2. Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi, M_e Eleman Kütle Matrisi Ve Serbest Titreşim Frekansları

Bu bölümde 4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için, dönme ataleti etkileri ve kayma deformasyonları hesaba katılmış, kayma deformasyonları ise hem eleman rijitlik matrisinde hem de eleman kütle matrisinde göz önüne alınmış ve bunun sonucunda elde edilen serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Bunun yanında bu işlem hem plastik çubuk hem de C67 çelik çubuğu için farklı mesnet şartlarında gerçekleştirilmiştir. Ve bunun yanında bu elde edilen frekanslar dönme atalet etkilerinin göze alındığı ince çubuk elemanı ile mukayese edilmiştir. Bunun amacı kayma deformasyonu etkilerinin hem eleman rijitlik matrisinde hem de eleman kütle matrisinde ele alınmışken, incelenmesidir [8]. İlk olarak

(Tablo 6.15) ve (Tablo 6.16)' da plastik çubuk için incelersek,

TABLO 6.15 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.391	58.952	12.361	21.002	500.474	133.640
1557.63	235.765	485.233	131.589	3801.99	368.342
7884.45	530.434	3802.55	368.369	14617.3	722.238
24940.0	943.397	14603.0	721.884	40016.5	1194.99
61058.5	1476.11	39961.2	1194.16	89680.5	1788.93

TABLO 6.16 Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Kesme Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Kayma etkisi Halinde Me Eleman kütle ve Ke Eleman rijitlik matrisi

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
93.709	57.827	11.895	20.602	481.239	131.046
1498.04	231.211	466.723	129.055	3652.39	361.022
7577.19	519.996	3654.92	361.147	14025.9	707.475
23945.7	924.400	14022.7	707.394	38347.0	1169.80
58563.3	1445.63	38330.6	1169.55	85820.4	1750.01

Kayma etkilerinin hem eleman kütle matrisinde hem de eleman rijitlik matrisinde göz önüne alınması sonucu, titreşim frekanslarında bir azalma görülmüş fakat öncekilerine nazaran bu azalmanın o derece küçük olmadığı ve ihmal edilemeyeceği gözlenmiştir. Dolayısıyla çubuk kütlesi terimlerine etkiyen kayma deformasyonu sebebiyle serbest titreşim frekanslarında meydana gelen azalma, diğerlerine nazaran yani, dönme atalet etkilerinin ve çubuk geometrik matrisine etkiyen kayma deformasyonunun sebep olduğu titreşim frekanslarındaki azalmadan oldukça fazladır. İkinci olarak (Tablo 6.17) ve (Tablo 6.18)' de C67 çubuk için incelersek;

TABLO 6.17 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.409	36.914	12.362	13.150	500.593	83.684
1558.83	147.672	485.589	82.416	3805.38	230.728
7898.04	332.399	3808.26	230.815	14645.4	452.638
25016.4	591.580	14643.5	452.610	40149.8	749.449
61350.8	926.426	40138.5	749.345	90140.4	1122.95

TABLO 6.18 C67 Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları

Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut**Kayma etkisi Halinde Me Eleman kütle ve Ke Eleman rijitlik matrisi**

Basit-basit		Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
λ	f[Hz]	λ	f[Hz]	λ	f[Hz]
97.263	36.887	12.343	13.140	499.829	83.620
1556.46	147.560	484.803	82.353	3799.44	230.547
7885.82	332.142	3802.39	230.637	14621.8	452.275
24976.8	591.112	14620.4	452.252	40083.3	748.829
61251.3	925.675	40073.5	748.737	89986.5	1121.99

Kayma etkilerinin hem eleman kütle matrisinde hem de eleman rijitlik matrisinde göz önüne alınması sonucu, titreşim frekanslarında bir azalma görülmüş fakat öncekilerine nazaran bu azalmanın o derece küçük olmadığı ve ihmal edilemeyeceği görülmüştür. Dolayısıyla çubuk kütlesi terimlerine etkileyen kayma deformasyonu sebebiyle serbest titreşim frekanslarında meydana gelen azalma, diğerlerine nazaran yani, dönme atalet etkilerinin ve çubuk geometrik matrisine etkileyen kayma deformasyonunun sebep olduğu titreşim frekanslarındaki azalmadan oldukça fazladır.

6.5. Kesit Kalınlığı Arttıkça Değişen Serbest Titreşim Frekansları Ve Bu Frekanslara Etki Eden Dönme Atalet Etkileri ve Kayma Deformasyonlarının İncelenmesi

Bu bölümde, dikdörtgen kesitli çubuğumuzun kesiti bh olmak üzere, $2*bh$, $3*bh$, $4*bh$ şeklinde artırılarak elde edilen frekanslardaki dönme ve kayma etkileri incelenmektedir. Burada ince çubuk ile 4 serbestlikli kalın çubuk kullanılmıştır. Mesnet şartı olarak sadece basit-basit mesnet halinde incelenmiştir. Malzemede ise, hem plastik çubuk hem de C67 çelik çubuk kullanılmıştır [9].

Tablo 6.19 Plastik Çubuk

Basit-basit								
Artan İnce Çubuk Kesitleri					Artan 4 Serbestlikli Kalın Çubuk Kesitleri			
[Hz]	bh	$2*bh$	$3*bh$	$4*bh$	bh	$2*bh$	$3*bh$	$4*bh$
1	58.958	117.91	176.876	235.835	57.827	110.185	155.872	196.771
2	235.858	471.71	707.576	943.352	231.211	439.843	620.573	780.529
3	530.909	1061.8	1592.727	2092.533	519.996	986.668	1386.23	1733.55
4	944.897	1889.7	2092.533	2123.636	924.400	1748.02	2442.42	3031.19
5	1479.77	2092.5	2834.691	3779.588	1445.63	2722.43	3779.26	4651.83

Yukarıda (6.19)'da görüldüğü gibi plastik çubuk için, çubuğun kesiti arttırılmak suretiyle elde edilen serbest titreşim frekanslarında dönme ve kayma etkileri incelenmiştir. Sonuç itibariyle artan kesitlerde titreşim frekansının yükseldiğini görüyoruz. Artan kesitlerde dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisi altındaki titreşim frekanslarının daha da düştüğünü gözluyoruz. Frekanslardaki bu düşme büyük kesitlerde çok daha fazladır. Yani, dönme ataleti ve kayma etkileri bu büyük kesitlerde çok daha etkilidir. Aşağıda

(Tablo 6.20)' de, aynı incelemeler C67 çelik çubuk için yapılmış ve aynı sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 6.20 Çelik Çubuk

Basit-basit								
Artan İnce Çubuk Kesitleri					Artan 4 Serbestlikli Kalın Çubuk Kesitleri			
[Hz]	bh	2*bh	3*bh	4*bh	bh	2*bh	3*bh	4*bh
1	36.915	73.830	110.745	147.660	36.887	73.608	110.005	145.93
2	147.675	295.35	443.025	590.700	147.560	294.440	439.988	583.60
3	332.410	664.82	997.232	1329.643	332.142	662.688	990.108	1313.0
4	591.615	1183.2	1774.84	2366.461	591.615	1179.22	1761.47	2335.2
5	926.512	1853.0	2779.53	3706.050	926.512	1846.36	2757.29	3654.0

6.6. λ Ve α Frekans Parametrelerinin Karşılaştırılması

Serbest titreşim frekanslarının elde edilmesinde tezimizde kullandığımız λ frekans parametresi ile referans olarak aldığımız bir araştırma yayınındaki kalın çubuğa ait α frekans parametresinin mukayesesi (Tablo 6.21)' de yapılmıştır. Burada amaç elle, analitik olarak çözülen, referans olarak aldığımız çalışmaya ait, bu frekans parametresini bilgisayar programıyla elde ederek kaba sonuçlardan hassas sonuca ulaşmaktır. Bu işlemin yapılması için programda aşağıdaki değerler kullanılmıştır. Hesaplamalar basit-basit, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet şartlarında gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar ilk on değer için alınmıştır. ($(r/L)= 0.034641$ ve $k=240/87$ için).

Tablo 6.21

Basit-basit			Ankastre-serbest		Ankastre-ankastre	
n	λ	α	λ	α	λ	α
1	9.517260	9.658715	3.390870	3.522944	21.560820	21.795975
2	38.04821	36.45449	21.23786	21.41571	59.378994	56.399520
3	85.55705	75.67193	59.42242	56.44632	116.32082	101.98908
4	152.0682	122.8502	116.3696	101.9802	192.26750	154.22141
5	237.7765	174.8460	192.3574	154.2243	287.54200	210.43982
6	343.1711	229.6847	287.6483	210.4380	402.77026	269.03644
7	469.1385	286.1680	402.7870	269.0083	538.80989	329.00331
8	616.9403	343.5711	538.4690	328.9993	695.67625	389.98534
9	787.2634	401.4524	694.4795	390.0042	862.10769	452.12866
10	1050.281	459.5415	859.9584	451.7676	1159.3929	512.51378

Sonuçta, frekans parametrelerinin 1. değerlerinde çok yakınlık, diğerlerinde yani, yüksek parametre değerlerinde bir uzaklık elde edilmiştir.

6.7. Dönme Atalet etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Serbest Titreşim Frekansları (6 serbestlikli kalın çubuk için)

Bu bölümde dönme ataleti ve kayma etkilerinin hesaba katıldığı 6 serbestlikli kalın çubuğa ait serbest titreşim frekansları incelenmiştir. Burada mesnet şartı olarak sadece basit-basit mesnet kullanılmıştır. Çubuğun ince kenarına göre incelenen serbest titreşim frekanslarında yukarıda bahsettiğimiz etkiler küçük olduğundan, buna ek olarak çubuğun kalın kenarına göre serbest titreşim frekansları da incelenmiştir. Burada hem ince kenarına hem de kalın kenarına göre incelenen 6 serbestlikli kalın çubuğu ait serbest titreşim frekansları ince çubuk ve 4 serbestlikli kalın çubuğa ait aynı şekilde elde edilen serbest titreşim frekanslarıyla karşılaştırılmıştır [7]. Bu bölüme ait serbest titreşim frekanslarının eldesinde fortran IV dilinde yazılan program içerisinde ayrı bir kod programı oluşturulmuştur.

Tablo 6.22 Plastik Çubuk

İnce Kenara Göre Titreşimler				Kalın Kenara Göre Titreşimler			
Basit-basit				Basit-basit			
İnce çubuk için		6 serbestlikli kalın çubuk için		İnce çubuk için		6 serbestlikli kalın çubuk için	
λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
97.410	58.958	97.330	58.934	97.410	1243.632	72.325	1071.606
1558.879	235.858	1553.783	235.473	275.782	2092.533	275.782	2092.533
7898.570	530.909	7840.770	528.962	1558.879	4975.028	681.047	3288.350
25019.422	944.897	24696.44	938.773	2523.110	6329.325	2102.374	5777.558
61362.209	1479.777	60139.76	1464.96	7240.836	10722.194	2523.110	6329.325

Yukarıda (Tablo 6.22)' de plastik çubuk için basit-basit mesnet şartında, çubuğun ince ve kalın kenarına göre serbest titreşim frekansları incelendiğinde öncelikle kalın kenara göre elde edilen frekansların, ince kenara göre, son derece yüksek olduğu gözlenir. Bunun yanında kalın çubuğun ince kenarına göre elde edilen titreşim frekanslarında dönme ve kayma etkilerinin gözle görülebilir derecede küçük olduğu saptanır. Tabii ki bu etkiler titreşim frekansını düşürmüştür. Bu düşme çok azdır. Ayrıca kalın çubuğun kalın kenarına göre incelenen titreşim frekanslarındaki dönme ve kayma etkileri oldukça yüksektir ve kendini göstermektedir. Bu etkiler, ince çubuğun titreşim frekansları ile karşılaştırıldığında ortaya çıkmaktadır. Aşağıda (Tablo 6.23)' de, aynı incelemeler C67 çelik çubuk için yapılmıştır. İnceleme sonuçları da aynıdır.

Tablo 6.23 C67 Çelik Çubuk

İnce Kenara Göre Titreşimler				Kalın Kenara Göre Titreşimler			
Basit-basit				Basit-basit			
6 serbestlikli kalın çubuk için		İnce çubuk için		6 serbestlikli kalın çubuk için		İnce çubuk için	
λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
97.407	36.914	97.410	36.915	95.568	920.204	97.410	926.028
1558.688	147.666	1558.879	147.675	1448.322	3582.277	1558.879	3716.488
7896.401	332.365	7898.570	332.410	5204.98	6791.043	5204.989	6791.043
25007.22	591.471	25019.42	591.615	6756.192	7736.516	7898.570	8366.672
61315.65	926.161	61362.20	926.512	19312.59	13081.179	25019.42	14888.98

Tablo 6.24 Plastik Çubuk

İnce Kenara Göre Titreşimler				Kalın Kenara Göre Titreşimler			
Basit-basit				Basit-basit			
6 serbestlikli kalın çubuk için		4 serbestlikli kalın çubuk için		6 serbestlikli kalın çubuk için		4 serbestlikli kalın çubuk için	
λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
97.330	58.934	93.709	57.827	72.325	1071.606	42.124	817.816
1553.783	235.473	1498.04	231.211	275.782	2092.533	472.588	2739.244
7840.770	528.962	7577.19	519.996	681.047	3288.350	1554.058	4967.330
24696.44	938.773	23945.7	924.400	2102.374	5777.558	3125.060	7048.453
60139.76	1464.96	58563.3	1445.63	2523.110	6329.325	4694.267	8533.228

(Tablo 6.24)' te ise plastik çubuk için, 4 serbestlikli kalın çubuk ile 6 serbestlikli kalın çubuğun ince ve kalın kenarlarına göre elde edilen titreşim frekanslarındaki dönme atalet etkileri ile kayma deformasyonu etkileri karşılaştırılmıştır. Sonuçta 4 serbestlikli kalın çubuğa ait dönme ve kayma etkilerinin 6 serbestlikli kalın çubuktaki dönme ve kayma etkilerine nazaran daha büyük olduğu ortaya çıkmıştır. Tabii ki bu etkiler titreşim frekanslarını düşürme açısından incelenmiştir. Bu etkiler daha çok her iki çubukta da kalın kenara göre yapılan titreşim frekansı analizinde belirginleşir. Yani daha etkilidir.

Aşağıda (Tablo 6.25)' te ise yine aynı incelemeler C67 çelik çubuk için yapılmış ve aynı sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 6.25 C67 Çelik Çubuk

İnce Kenara Göre Titreşimler				Kalın Kenara Göre Titreşimler			
Basit-basit				Basit-basit			
6 serbestlikli kalın çubuk için		4 serbestlikli kalın çubuk için		6 serbestlikli kalın çubuk için		4 serbestlikli kalın çubuk için	
λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
97.410	36.915	97.263	36.887	97.410	926.028	62.701	745.357
1558.879	147.675	1556.46	147.560	1558.879	3716.488	978.862	2945.014
7898.570	332.410	7885.82	332.142	5204.989	6791.043	4770.659	6501.533
25019.42	591.615	24976.8	591.112	7898.570	8365.672	14370.65	11285.575
61362.20	926.512	61251.3	925.675	25019.42	14888.98	33266.00	17168.284

BÖLÜM 7

BURKULMA ANALİZİ

7.1. Dönme Atalet Etkisinin Hesaba Katıldığı Çubukların Burkulma Analizi

Bu bölümde ince çubukta dönme atalet etkilerinin göze alınması suretiyle değişik mesnet şartlarında statik ve dinamik olarak, plastik ve C67 çelik malzeme için, burkulma yüklerinin analizi yapılmıştır. Burkulma yükleri, fortran IV dilinde yazılan programla elde edilmiştir. Mesnet şartları olarak ankastre-serbest, ankastre-ankastre ve basit basit mesnetler göz önüne alınmıştır. Dinamik olarak çeşitli devir sayılarında hesaplar yapıp göz önüne alınmıştır [6]. Tablolarda gösterilen f , [Hz] olarak frekansı, λ , boyutsuz katsayıyı, P ise [N] olarak burkulma yükünü göstermektedir. C67 çelik ve plastik çubuk için yapılan bu hesaplamayı incelersek,

(Tablo 7.1) ve (Tablo 7.3)' de, sırasıyla plastik çubuk ve C67 çelik çubuklar için üç farklı mesnet şartında statik ve dinamik halde burkulma yükleri elde edilmiştir. (Tablo 7.2) ve (Tablo 7.4)' de ise, sırasıyla aynı çubuklar için dönme atalet etkisi göz önüne alınarak statik ve dinamik halde burkulma yükleri elde edilmiştir. Sonuçta dinamik halde, dönme atalet etkisi sebebiyle elde edilen burkulma yüklerinde, dönme atalet etkileri göze almaksızın elde edilen burkulma yüklerine nazaran gözle görülür bir düşme kaydedilmiştir. Fakat bu Burkulma yüklerindeki azalma ihmal edilebilir derecede küçüktür. Bunun yanında statik halde dönme atalet etkisinin burkulma yüklerine herhangi bir etkisi yoktur. Ayrıca, dinamik devir sayısı arttıkça burkulma yükü azalmaktadır. Belirli bir devir sayısında 1. burkulma yükü 0' a yaklaşmaktadır. Bu devir sayısına kritik devir sayısı denir. Bunun yanında 1. frekansı 0 yapan bu anlamda eksenel kuvvete eşit olan kritik burkulma yükleri de her mesnet şartı için tablolarda verilmiştir.

TABLO 7.1 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=1260$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
2.46740300	33.4732436	2.10485304	28.5548240	0.95898376	13.0097504	0.00095211	0.01291650		
22.2081124	301.279344	21.8749693	296.759862	20.9256703	283.881498	20.2341224	274.499831		
61.7166161	587.258982	61.6383594	836.197336	61.4079190	833.071139	61.2316304	830.679576		
121.133808	1643.32355	121.079732	1642.58995	120.919880	1640.42136	120.797043	1638.75494		
200.866503	2724.99198	200.839905	2724.63114	200.760683	2723.55640	200.699202	2722.72233		
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=3000$ dev/dak		$\Omega=5000$ dev/dak		$\Omega=8018$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
39.4867898	535.685064	34.1290475	463.000945	24.4542504	331.750865	0.01421600	0.19285698		
80.8326816	1096.59105	79.3850184	1076.95178	76.8067942	1041.97512	70.4517040	955.760793		
158.419932	2149.15397	157.106647	2131.33772	154.878462	2101.10973	149.875709	2033.24147		
240.390632	3261.18358	239.899307	3254.51818	239.028763	3242.70822	236.906373	3213.91549		
360.596066	4891.91264	359.997146	4883.78759	358.959473	4869.71032	356.542572	4836.92219		
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=3000$ dev/dak		$\Omega=3537$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
9.86973674	133.894666	9.08104736	123.195161	2.77153274	37.5991236	0.00294204	0.03991230		
39.4867897	535.685062	39.2896177	533.010191	37.7122422	511.611223	37.0200958	502.221438		
88.9195221	1206.29861	88.8318919	1205.10981	88.1308495	1195.59934	87.8232348	1191.42618		
158.419932	2149.15397	158.370644	2148.48532	157.976343	2143.13617	157.803325	2140.78898		
248.596160	3372.50130	248.564625	3372.07348	248.312344	3368.65099	248.201644	3367.14921		

TABLO 7.2 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Ankastre-serbest											
Ω=0 dev/dak		Ω=500 dev/dak			Ω=1000 dev/dak			Ω=1260 dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
2.46740300	33.4732436	2.10481419	28.5542970	0.95882701	13.0076239	0.00070224	0.00952673				
22.2081124	301.279344	21.8749300	296.759330	20.9255135	283.879370	20.2338734	274.496453				
61.7166161	837.258982	61.6383201	836.196803	61.4077621	833.069011	61.2313813	830.676197				
121.133808	1643.32355	121.079693	1642.58942	120.919723	1640.41924	120.796794	1638.75156				
200.866503	2724.99198	200.839866	2724.63061	200.760526	2723.55427	200.698953	2722.71896				
Ankastre-ankastre											
Ω=0 dev/dak		Ω=3000 dev/dak			Ω=5000 dev/dak			Ω=8018 dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
39.4867898	535.685064	34.1276359	462.981794	24.4503292	331.697670	0.00413242	0.05606119				
80.8326816	1096.59105	79.3836068	1076.93263	76.8028729	1041.92192	70.4416204	955.623996				
158.419932	2149.15397	157.105236	2131.31857	154.874540	2101.05654	149.875709	2033.10467				
240.390632	3261.18358	239.897895	3254.49903	239.024842	3242.65503	236.896289	3213.77869				
360.596066	4891.91265	359.995735	4883.76844	358.955551	4869.65712	356.532488	4836.78540				
Basit-basit											
Ω=0 dev/dak		Ω=1000 dev/dak			Ω=3000 dev/dak			Ω=3537 dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
9.86973674	133.894666	9.08089076	123.193037	2.77012089	37.5799702	0.00097970	0.01329087				
39.4867897	535.685062	39.2894610	533.008065	37.7108304	511.592071	37.0181335	502.194817				
88.9195221	1206.29861	88.8317351	1205.10768	88.1294378	1195.58019	87.8212725	1191.39956				
158.419932	2149.15397	158.370487	2148.48320	157.974931	2143.11702	157.801136	2140.76236				
248.596160	3372.50130	248.564468	3372.07136	248.310932	3368.63184	248.199681	3367.12259				

TABLO 7.3 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak			$\Omega=600$ dev/dak			$\Omega=789$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	χ	χ	P[N]
2.46738565	3.35317709	1.52335140	2.07023455	1.08797336	1.47855580	0.00028424	0.00038629		
22.2081090	30.1808201	21.3748359	29.0484020	21.0254201	28.5735459	20.2337092	27.4976108		
61.7166150	83.8728797	61.5184438	83.6035651	61.4327062	83.4870477	61.2315213	83.2136375		
121.133815	164.620855	120.996660	164.434460	120.937116	164.353541	120.796969	164.163081		
200.866506	272.977582	200.798844	272.885629	200.769264	272.845430	200.699165	272.750165		
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=5021$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	χ	χ	P[N]
39.4867868	53.6625433	37.9748120	51.6077696	25.6990465	34.9250042	0.00125680	0.00170800		
80.8326803	109.851161	80.4225640	109.294265	77.1361782	104.828066	70.4483884	95.7393599		
158.419931	215.292686	158.042986	214.780418	155.155832	210.856775	149.873254	203.677752		
240.390629	326.690864	240.251250	326.501449	239.139668	324.990809	236.905266	321.954256		
360.596062	490.050049	360.425151	489.817780	359.090064	488.003398	356.541346	484.539689		
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=2000$ dev/dak			$\Omega=2214$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	χ	χ	P[N]
9.86974884	13.4129887	7.85788314	10.6788632	1.82233595	2.47655456	0.00805117	0.01094155		
39.4867955	53.6625551	38.9838257	52.9790191	37.4749483	50.9284547	37.0213774	50.3120519		
88.9195227	120.841631	88.6959864	120.537845	88.0253880	119.626502	87.8238087	119.352556		
158.419932	215.292688	158.294204	215.121823	157.917025	214.609237	157.803651	214.455162		
248.596166	337.842189	248.515719	337.732862	248.274389	337.404894	248.201853	337.306318		

TABLO 7.4 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak		$\Omega=600$ dev/dak		$\Omega=789$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
2.46738565	3.35317709	1.52335724	2.07024249	1.08797025	1.47855156	0.00033684	0.00045777		
22.2081090	30.1808201	21.3748378	29.0484045	21.0254003	28.5735190	20.2336820	27.4975738		
61.7166150	83.8728797	61.5184348	83.6035529	61.4326979	83.4870364	61.2315153	83.2136293		
121.133815	164.620855	120.996656	164.434455	120.937103	164.353523	120.6796961	164.163070		
200.866506	272.977582	200.798839	272.885622	200.769255	272.845418	200.699155	272.750151		
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=3000$ dev/dak		$\Omega=5021$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
39.4867868	53.6625433	37.9748020	51.6077559	25.6989133	34.9248232	0.00090422	0.00122884		
80.8326803	109.851161	80.4225501	109.294246	77.1360424	104.827828	70.4480219	95.7388617		
158.419931	215.292686	158.042971	214.780398	155.155691	210.856584	149.872885	203.677251		
240.390629	326.690864	240.251242	326.501438	239.139525	324.990615	236.904905	321.953766		
360.596062	490.050049	360.425147	489.817775	359.089924	488.003207	356.540989	484.539204		
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=2000$ dev/dak		$\Omega=2214$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
9.86974884	13.4129887	7.85787591	10.6788534	1.82228028	2.47647890	0.00797579	0.01083911		
39.4867955	53.6625551	38.9838157	52.9790055	37.4748868	50.9283711	37.0213009	50.3119480		
88.9195227	120.841631	88.6959722	120.537826	88.0253238	119.626415	87.8237326	119.352453		
158.419932	215.292688	158.294188	215.121801	157.916959	214.609148	157.803575	214.455058		
248.596166	337.842189	248.515701	337.732838	248.274325	337.404808	248.201776	337.306213		

7.2. Dönme Atalet etkileri Ve Kayma Deformasyonları Halinde Çubukların Burkulma Analizi (4 serbestlikli kalın çubuk için)

7.2.1. Kayma Deformasyonları Halinde K_0 Eleman Rijitlik Matrisi Ve Çubukların Burkulma Analizi

Bu bölümde 4 serbestlikli kalın çubuk elemanı için, dönme ataleti etkileri ve kayma deformasyonları hesaba katılmış, kayma deformasyonları terimleri ise sadece eleman rijitlik matrisinde göz önüne alınmış ve bunun sonucunda elde edilen burkulma yüklerinin statik ve dinamik halde analizi yapılmıştır. Bunun yanında bu işlem hem plastik çubuk hem de C67 çelik çubuğu için farklı mesnet şartlarında gerçekleştirilmiştir. Ve bunun yanında bu elde edilen frekanslar dönme ataleti etkilerinin göze alındığı ince çubuk elemanı ile mukayese edilmiştir. Bunun amacı kayma deformasyonu etkilerinin sadece eleman rijitlik matrisinde ele alınmışken, incelenmesidir. Mesnet şartları olarak ankastre-serbest, ankastre-ankastre ve basit-basit mesnetler göz önüne alınmıştır. Dinamik olarak çeşitli devir sayılarında hesaplar yapıp göz önüne alınmıştır [9]. C67 çelik ve plastik çubuk için yapılan bu hesaplamayı incelersek ;

(Tablo 7.5) ve (Tablo 7.6)' de sırasıyla plastik ve C67 çelik çubuklar için dönme ataleti etkisi ve kayma deformasyonları (kayma deformasyonları ise sadece eleman rijitlik matrisinde) göz önüne alınarak statik ve dinamik halde burkulma yükleri elde edilmiştir. Sonuçta kayma deformasyonu ve dönme ataleti etkisi sebebiyle burkulma yüklerinde bir azalma gözlenmiştir. Bu azalma ihmal edilebilecek seviyede küçük değildir. Bunun yanında, (Tablo 7.2) ve (Tablo 7.4)' de, sırasıyla plastik çubuk ve C67 çelik çubuklar için elde edilen, sadece dönme atalet etkilerinin incelendiği burkulma yükleri ile karşılaştırıldığında, kayma etkilerinin dönme atalet etkilerine nazaran burkulma yüklerine daha fazla etki ettiğini (yani burkulma yüklerinde daha fazla bir azalma mevcut olduğunu) gözlütürüz. Ayrıca, dinamik devir sayısı arttıkça burkulma yükü azalmaktadır. Belirli bir devir sayısında 1. burkulma yükü 0' a yaklaşmaktadır. Bu devir sayısına kritik devir sayısı denir.

**TABLO 7.5 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut---Kayma etkisi sadece Ke rijitlik matrisinde**

Ankastre-serbest											
Ω=0 dev/dak			Ω=500 dev/dak			Ω=1000 dev/dak			Ω=1260 dev/dak		
χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]
2.46730		33.4718	2.1047		28.5528	0.9586		13.005	0.0004		0.0067
22.199		301.168	21.866		296.64	20.917		283.768	20.225		274.385
61.654		836.417	61.576		835.355	61.345		832.227	61.169		829.834
120.901		1640.17	120.847		1639.43	120.687		1637.26	120.564		1635.59
260.249		2716.61	200.222		2716.25	200.143		2715.17	200.081		2714.34
Ankastre-ankastre											
Ω=0 dev/dak			Ω=3000 dev/dak			Ω=5000 dev/dak			Ω=8015 dev/dak		
χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]
39.461		535.336	34.101		462.629	24.423		331.32	0.0009		0.013
80.716		1095.008	79.266		1075.34	76.685		1040.32	70.330		954.115
158.028		2143.84	156.713		2126.008	154.48		2095.74	149.479		2027.86
239.483		3248.87	238.990		3242.18	238.116		3230.33	235.989		3201.47
358.718		4866.44	358.117		4858.28	357.075		4844.14	354.651		4811.27
Basit-basit											
Ω=0 dev/dak			Ω=1000 dev/dak			Ω=3000 dev/dak			Ω=3536 dev/dak		
χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]	χ		P[N]
9.868		133.872	9.079		123.170	2.768		33.557	0.004		0.066
39.461		535.336	39.263		532.659	37.685		511.243	36.993		501.865
88.792		1204.57	88.704		1203.38	88.002		1193.85	87.694		1189.68
158.028		2143.84	157.979		2143.17	157.583		2137.81	157.410		2135.46
247.668		3359.91	247.636		3359.48	247.38		3356.04	247.271		3354.53

**TABLO 7.6 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut-----Kayma etkisi sadece Ke rijitlik matrisinde**

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak		$\Omega=600$ dev/dak		$\Omega=789$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
2.46741	3.3532	1.52338	2.07027	1.08802	1.47861	0.00034	0.00047		
22.2078	30.1804	21.3745	29.0480	21.0251	28.5731	20.2333	27.4971		
61.7143	83.869	61.516	83.6004	61.4303	83.4839	61.229	83.210		
121.125	164.609	120.987	164.422	120.928	164.341	120.788	164.151		
200.843	272.946	200.775	272.854	200.746	272.814	200.676	272.718		
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=3000$ dev/dak		$\Omega=5020$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
39.485	53.661	37.973	51.606	25.697	34.923	0.015	0.021		
80.828	109.845	80.418	109.288	77.131	104.821	70.447	95.7384		
158.405	215.272	158.028	214.760	155.141	210.836	149.861	203.661		
240.356	326.644	240.217	326.455	239.105	324.944	236.872	321.909		
360.525	489.954	360.355	489.722	359.019	487.907	356.472	484.445		
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak		$\Omega=2000$ dev/dak		$\Omega=2214$ dev/dak			
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]	χ	P[N]
9.8696	13.4128	7.85781	10.6787	1.82220	2.4763	0.00791	0.01075		
39.485	53.661	38.982	52.977	37.473	50.927	37.0203	50.3106		
88.914	120.835	88.691	120.531	88.020	119.619	87.8189	119.346		
158.405	215.272	158.279	215.101	157.902	214.589	157.788	214.435		
248.561	337.795	248.481	337.685	248.239	337.357	248.167	337.259		

7.2.2. Kayma Deformasyonları Halinde K_e Eleman Rijitlik Matrisi M_e Eleman Kütle Matrisi Ve Çubukların Burkulma Analizi

Bu bölümde 4 serbestlikli kalın çubuk elemanına için dönme ataleti etkilerinin ve kayma deformasyonlarının (kayma deformasyonları hem eleman rijitlik hem de eleman kütle matrisinde) etkilerini içine alan ve bunun sonucu olarak da elde edilen burkulma yüklerinin analizi verilmiştir [8]. Bu işlem (Tablo 7.7) ve (Tablo 7.8)' de sırasıyla hem plastik çubuk hem de C67 çelik çubuk için statik ve dinamik halde çeşitli devir sayılarında farklı mesnet şartlarında yapılmıştır. Buradaki sonuçlar, (Tablo 7.2) ve (Tablo 7.4)' te elde edilen sadece dönme ataleti etkilerinin incelendiği ince çubuğa ait burkulma analizi ile kıyaslanmıştır. Sonuçlar irdelendiğinde;

Kayma etkilerinin burkulma yüklerini azalttığını görüyoruz. Bunun yanında çubuk kütlesi terimlerine etkiyen kayma etkileri sonucu elde edilen burkulma yüklerini incelediğimizde, bu kayma etkilerinin hem dönme atalet etkilerine hem de çubuğun geometrik matrisine etkiyen kayma etkilerine nazaran daha kuvvetli olduğunu, yani burkulma yüklerinde daha fazla bir azalmaya sebep olduğunu gözliyoruz. Bu bölümdeki kayma etkilerinin gözle görülebilir olduğunu bu sebeple ihmal edilemeyecek derecede büyük olduğunu da söyleyebiliriz.

**TABLO 7.7 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut---Kayma etkisi Me kütle ve Ke rijitlik matrisinde**

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak			$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=1236$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
2.4673	33.471	2.090	28.357		0.896		12.162	0.00076	0.010
22.199	301.168	21.853	296.473		20.869		283.124	20.225	274.388
61.654	836.417	61.573	835.313		61.333		832.066	61.169	829.835
120.901	1640.17	120.845	1639.40		120.679		1637.15	120.564	1635.59
200.249	2716.61	200.221	2716.24		200.138		2715.12	200.081	2714.34
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=5000$ dev/dak			$\Omega=7862$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
39.461	535.336	33.890	459.768		23.825		323.225	0.008	0.113
80.716	1095.008	79.209	1074.57		76.527		1038.18	70.332	954.144
158.028	2143.84	156.663	2125.32		154.350		2093.94	149.481	2027.88
239.483	3248.87	238.971	3241.92		238.063		3229.61	235.990	3201.49
358.718	4866.44	358.094	4857.96		357.013		4843.30	354.653	4811.29
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=3469$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
9.868	133.872	9.048	122.752		2.490		33.790	0.003	0.052
39.461	535.336	39.256	532.555		37.615		510.301	36.993	501.862
88.792	1204.57	88.701	1203.33		87.971		1193.43	87.694	1189.68
158.028	2143.84	157.977	2143.15		157.566		2137.57	157.410	2135.46
247.668	3359.91	247.635	3359.46		247.371		3355.89	247.272	3354.53

TABLE 7.8 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut---Kayma etkisi Me kütle ve Ke rijitlik matrisinde

Ankastre-serbest									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=500$ dev/dak			$\Omega=600$ dev/dak			$\Omega=788$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
2.46741	3.35321	1.5218	2.0682	1.0858	1.0858	1.4756		0.0030	0.0041
22.2078	30.1804	21.3732	29.0463	21.0233	21.0233	28.5707		20.2332	27.4997
61.7143	83.869	61.5158	83.6009	61.4299	61.4299	83.4833		61.2296	83.2111
121.125	164.609	120.987	164.422	120.928	120.928	164.341		120.788	164.151
200.843	272.946	200.775	272.854	200.746	200.746	272.813		200.676	272.719
Ankastre-ankastre									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=5017$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	λ	λ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
39.4858	53.6612	37.9715	51.6033	25.6769	25.6769	34.8949		0.0035	0.0048
80.8283	109.845	80.4175	109.287	77.1261	77.1261	104.814		70.4445	95.7342
158.405	215.272	158.027	214.759	155.136	155.136	210.830		149.859	203.658
240.356	326.644	240.217	326.455	239.103	239.103	324.942		236.871	321.908
360.525	489.954	360.354	489.722	359.017	359.017	487.904		356.471	484.444
Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=2000$ dev/dak			$\Omega=2213$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
9.8696	13.4128	7.8547	10.6746	1.8101	1.8101	2.4600		0.0020	0.0028
39.4858	53.6612	38.9821	52.9766	37.4709	37.4709	50.9229		37.0188	50.3086
88.9147	120.835	88.6908	120.530	88.0192	88.0192	119.618		87.8183	119.345
158.405	215.272	158.279	215.101	157.901	157.901	214.588		157.788	214.434
248.561	337.795	248.480	337.685	248.239	248.239	337.357		248.166	337.258

7.3. Dönme Atalet etkileri, Kayma Deformasyonları Ve Çubukların Burkulma Analizi (6 serbestlikli kalın çubuk için)

Bu bölümde 6 serbestlikli kalın çubuk elemanı için, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkilerinin hesaba katıldığı statik ve dinamik halde burkulma analizi yapılmıştır. Mesnet şartı olarak sadece basit-basit mesnet hali ele alınmıştır. Malzeme olarak plastik çubuk ve C67 çelik çubuğu kullanılmıştır. Çeşitli devir sayılarında burkulma yükleri hesaplanmıştır [7].

Sonuçta, devir sayısı arttıkça burkulma yükünün azaldığını görüyoruz. Bunun yanında dönme ataletinin ve kayma deformasyonunun burkulma yüklerinde gözle görülebilir bir azalmaya sebep olduğunu görmekteyiz. Bu azalma plastik çubuk için ihmal edilemeyecek derecede büyüktür. C67 çubuk için bu azalma ihmal edilebilir. Ayrıca, burkulma yükünü 0 yapan kritik devir sayıları verilmiştir. Bu etkiler statik halde de etkisini göstermiştir. Bu bölümle ilgili hesaplamalar plastik ve C67 çelik çubuğu için sırasıyla (Tablo - 7.9), (Tablo 7.10) ve (Tablo 7.11), (Tablo 7.12)' de verilmiştir. Dönme atalet etkilerini ve kayma deformasyonu etkilerini incelemek amacıyla ince çubuk elemanı ile karşılaştırılmıştır.

TABLO 7.9 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri

Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=3537$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	χ	χ	P[N]
9.86973674	133.894666	9.08104736	123.195161	2.77153274	37.5991236		0.00294204	0.03991230	
39.4867897	535.685062	39.2896177	533.010191	37.7122422	511.611223		37.0200958	502.221438	
88.9195221	1206.29861	88.8318919	1205.10981	88.1308495	1195.59934		87.8232348	1191.42618	
158.419932	2149.15397	158.370644	2148.48532	157.976343	2143.13617		157.803325	2140.78898	
248.596160	3372.50130	248.564625	3372.07348	248.312344	3368.65099		248.201644	3367.14921	

TABLO 7.10 Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayma Deformasyonu ve Dönme Atalet Etkisi Mevcut

Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=3000$ dev/dak			$\Omega=3477$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	χ	χ	P[N]	χ	χ	P[N]
9.868756	133.876	9.046766	122.859	2.495666	33.854		0.003654	0.04323	
39.46124	535.544	39.26625	532.677	37.63542	510.404		37.00342	501.995	
88.89334	1205.298	88.75423	1204.445	88.00231	1194.561		87.77543	1190.221	
158.2253	2146.454	157.9985	2144.678	157.7763	2140.876		157.6684	2137.352	
247.8763	3364.234	247.8765	3362.561	247.9942	3359.332		247.9901	3357.965	

TABLO 7.11 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri

Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=2000$ dev/dak			$\Omega=2214$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
9.86974884	13.4129887	7.85788314	10.6788632	1.82233595	2.47655456	0.00805117	0.01094155		
39.4867955	53.6625551	38.9838257	52.9790191	37.4749483	50.9284547	37.0213774	50.3120519		
88.9195227	120.841631	88.6959864	120.537845	88.0253880	119.626502	87.8238087	119.352556		
158.419932	215.292688	158.294204	215.121823	157.917025	214.609237	157.803651	214.455162		
248.596166	337.842189	248.515719	337.732862	248.274389	337.404894	248.201853	337.306318		

TABLO 7.12 C67 Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri
Kayna Deformasyonu ve Dönme Ataleti Etkisi Mevcut

Basit-basit									
$\Omega=0$ dev/dak		$\Omega=1000$ dev/dak			$\Omega=2000$ dev/dak			$\Omega=2213$ dev/dak	
χ	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]	P[N]	χ	P[N]
9.8696783	13.4129031	7.8557789	10.675712	1.856781	2.470056	0.006032	0.009921		
39.486054	53.6618214	38.982214	52.977345	37.47123	50.92345	37.01999	50.31028		
88.916834	120.838213	88.693336	120.53421	88.02234	119.6212	87.82111	119.3483		
158.41435	215.282346	158.29420	215.11235	157.9082	214.6001	157.9123	214.4449		
248.58721	337.801233	248.50012	337.69029	248.2532	337.3872	248.1834	337.2871		

BÖLÜM 8

VERİLER VE SONUÇLAR

8.1. Veriler

Serbest titreşim frekansı ile burkulma analizini elde ettiğimiz programda kullanılan veriler aşağıdaki tablodaki gibidir:

Özellikler	Plastik çubuk için	C67 çubuk için
$E(N/m^2)$	$3.3 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^{11}$
$\rho(kg/m^3)$	1180	6790
$b(m)$	0.0656	0.0151
$h(m)$	0.00311	0.0006
$L(m)$	0.2	0.2

Yukarıda tabloda verilen plastik ve C67 çelik çubuğa ait veriler, ince çubukların stabilitesi üzerine yapılan çalışma olan [6]' dan alınmıştır.

Yine yukarıda geçen bu veriler dikdörtgen kesitli çubuğun ince kenarına göre titreşim frekanslarının incelenmesinde verilmiş değerleri olduğundan çubuğun kalın kenarına göre titreşim frekanslarının incelenmesinde b çubuğun kalınlığı ile h çubuğun genişliği yer değiştirmek suretiyle kullanılmıştır. Bu işlem burkulma analizinde de geçerlidir.

Programda kullanılan;

Burkulma yükü ile burkulma boyutsuz katsayısı arasındaki bağıntı,

$$P = \chi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (8.1)$$

Serbest titreşimlere ait frekans parametresi ile serbest titreşim frekansı arasındaki bağıntı,

$$\lambda^2 = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI} \quad (8.2)$$

4 serbestlikli kalın çubuğa ait rijitlik matrisinde kullanılan krl değişkenindeki **kayma katsayısı** $k=5/6$ alınmıştır. Bu da aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

$$krl = 1 + 12k \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \quad (8.3)$$

Jirasyon yarıçapı r aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} \quad (8.4)$$

4 serbestlikli kalın çubukta geçen kayma deformasyonu katsayısı ϕ_s aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir. (E elastisite modülü G kayma modülüne eşit alınmıştır.)

$$\phi_s = \frac{12EI}{k'AGL^2} = 12k \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 = k \frac{h^2}{\ell^2} \quad (8.5)$$

6 serbestlikli kalın çubukta geçen G kayma modülü, her iki malzeme (plastik ve C67 çelik çubuk) için poisson oranı $\eta=0.3$ alınarak aşağıdaki gibi elde edilir [10].

$$G = \frac{E}{2(1+\eta)} \quad (8.6)$$

4 serbestlikli kalın çubukta kullanılan λ boyutsuz katsayısının referans tezdeki boyutsuz katsayı α ile karşılaştırılmasında, 1. kalın çubukta kullanılan **kayma katsayısı $k=240/87$** dir.

8.2. Sayısal Sonuçlar

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak dönme atalet etkisinde ince çubukların, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisinde [5] referanslı kalın çubuk sonlu elemanının ve aynı etkiler altında [4] referanslı kalın çubuk sonlu elemanının serbest titreşim frekansları, statik ve dinamik halde burkulma yükleri incelenmiştir. İncelemeler değişik sınır şartlarında yapılmıştır. Serbest titreşim frekanslarının ve burkulma yüklerinin analizi, basit-basit, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet şartlarında yapılmıştır. Sadece 6 serbestlikli kalın çubuk için bu her iki analiz basit-basit mesnet şartında yapılmıştır. Çeşitli devir sayılarında burkulma yükleri hesaplanmıştır. Dönme atalet etkisi ve nokta kütle etkisi altında serbest titreşim frekansları incelenmiştir. Yine dönme atalet etkisi ve P eksenel kuvvetinin etkisi altında serbest titreşim frekansları incelenmiştir.

Serbest uçta nokta kütle bulunması durumunda frekansların azaldığı görülmüştür. P eksenel kuvvetin artmasıyla titreşim frekansının azaldığı incelenmiştir. 1. öz frekansı 0 yapan bu sebeple kritik burkulma yüküne eşit olan eksenel kuvvetler elde edilmiştir.

Çubuk asal eksenini boyunca eksenel bir kuvvetin etkimesi durumunda, özfrekans değerleri azalmakta, çekme kuvvetleri ile artmaktadır. Çubuğa eksenel kuvvetin etkimesi, sonlu elemanlar yöntemi uygulanmasında hareket denkleminde geometrik rijitlik matrisinin eklenmesini gerektirir.

İnce çubukların dönme atalet etkileri altında serbest titreşim frekansları ve statik ve dinamik halde burkulma yükleri incelenmiştir. Sonuçta, dönme atalet etkilerinin çubuğun özfrekansını azalttığını fakat bu azalmanın ihmal edilecek derecede küçük olduğu gözlenmiştir. Bu etkilerin statik halde burkulma yüklerine etkmediği dinamik halde ise

burkulma yüklerinde bir azalmaya sebep olduğu görülmüştür. Bu azalma ihmal edilecek derecede küçüktür. Bunun yanında dinamik halde, devir sayısı arttıkça burkulma yüklerinin azaldığı görülmüştür.

[5] referanslı kalın çubuk sonlu elemanın dönme atalet etkileri ve kayma deformasyonu etkisi altında serbest titreşim frekansları ve burkulma yükleri incelenmiştir. Sonuçta, bu etkilerin çubuğun titreşim frekanslarını ve burkulma yüklerini azalttığı incelenmiştir. Bu etkilerden dönme ataletinin ihmal edilecek derecede küçük olduğu fakat kayma deformasyonunun ihmal edilemeyecek derecede küçük olmadığı elde edilmiştir. Bu kayma deformasyonu etkilerinden, çubuğun kütle matrisine eklenen kayma etkilerinin, gerek dönme ataleti etkisinden gerek de çubuğun geometrik yapısına etkiyen kayma etkilerinden büyük olduğu, ihmal edilemeyeceği incelenmiştir. Kayma deformasyonu etkisi dönme ataleti etkisine nazaran, statik halde burkulma yüklerine etkir. Dönme ataleti ise bu yüklere etkir.

[4] referanslı kalın çubuk sonlu elemanın yine dönme atalet etkisi ve kayma etkileri altında serbest titreşim frekansları ve burkulma yükleri incelenmiştir. Yine aynı şekilde bu etkilerin çubuğun özfrekanslarını ve burkulma yüklerini azalttığı incelenmiştir. Bu azalmaların plastik çubuk için ihmal edilemeyecek derecede küçük olmadığı, çelik çubuk için ihmal edilecek derecede küçük olduğu görülmüştür. Bunun yanında, bu kalın çubuğun kalın kenarına göre bu bahsettiğimiz etkiler altında titreşim frekansları incelendiğinde, ince kenara göre elde edilen frekanslara nazaran frekanslarda büyük bir artış gözlenmiş ve aynı zamanda dönme ataleti ve kayma etkilerinde bir artış gözlenmiştir.

Referans olarak aldığımız [4]'e ait kalın çubuk sonlu elemanında elde edilen α boyutsuz katsayıları hassas değerlerde λ adı altında bizim tezimizde bilgisayar programı ile elde edilmiştir.

Artan kesitlerde dönme atalet etkisinin ve kayma etkilerinin hesaba katıldığı serbest titreşim frekansları da incelenmiştir. Sonuçta artan kesitin çubuğun özfrekanslarını azalttığı ve artan kesitlerde yukarıda bahsettiğimiz etkilerin daha da arttığı görülmektedir.

8.3. Yapılabilecek Çalışmalar ve Öneriler

Bu çalışmanın devamı olabilecek incelemeleri aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1- Çubuğun malzemesinde ve geometrik yer değiştirmeleri için nonlineer hallerinin incelenmesi.

2- Sıcaklık etkisi altında burkulma analizi.

3- Plakların titreşim ve burkulma analizi.

4- İki ve üç boyutlu sonlu elemanlar kullanılması.

5- Sıcaklık etkisi altında zorlanmış titreşimler.

6- Kafes sistemlerin burkulması.

7- Elastik-plastik şekil değişimi halinde konunun incelenmesi.

8- Çubuk sistemlerinin titreşimleri.

9- Kabukların titreşim ve burkulma analizi.

10- Sönümleyici etkilerin analizi.

KAYNAKLAR

- [1] PASİN, F., "Mekanik Sistemler Dinamiği", İTÜ Kütüphanesi Sayı:1540, İstanbul, (1994)
- [1] CAREY, G.F., ve ODEN, J.T., "Finite Elements Computational Aspects" Vol I, II, III, IV, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1983)
- [2] CEYHAN, A.G., "Sonlu Elemanlar Yöntemi", TÜBİTAK Elektronik Bilgi İşlem Merkezi, Aralık (1989)
- [3] MORGÜL, Ö.K., "Ani Sıcaklık Değişimi Etkisindeki Türbin Kanadı Nonlineer Titreşimlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi", Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, (1993)
- [4] TIMOSHENKO, S.P., Vibration Problems In Engineering, New York, Van Nostrand, Third Edition, (1955)
- [5] İPEK, M., "A Mass Matrix For Beam Element Derived From Dynamic Considerations", Research Report 79-03 Dpt. Of Architecture Faculty Of England, August, (1979)
- [6] YENİ, U., "İnce Çubukların Burkulma Yüklerinin Ve Serbest Titreşim Frekanslarının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi", Msc. Tezi, İTÜ., (1996)
- [7] HUANG, T.C., "The Effect Of Rotary Inertia And Of Shear Deformation On the Frequency And Normal Mode Equations Of Uniform Beams With Simple End Conditions", Journal Of Applied Mechanics, Vol.28, pp. 579-584, (1961)

- [8] COWPER, G.R., "The Shear Coefficient In Timoshenko's Beam Theory", Journal Of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335-340, (1966)
- [9] SEVERN, R.T., "Inclusion Of Shear Deformation In The Stiffness Matrix For A Beam Element", Journal Of Strain Analysis, Vol.5, pp.239-241, (1970)
- [10] İNAN, M., "Cisimlerin Mukavemeti", İTÜ Vakfı, İstanbul, (1988)
- [11] MOHR, G.A., "The Finite Elements", Oxford Science Publications, Oxford, (1992)
- [12] PETYT, M., "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambrige University Press, Cambrige, (1991)
- [13] MERMERTAŞ, V., "Değişken Kalınlıklı Halka Plakların Statik Ve Dinamik Stabilitesi", Doktora Tezi, İTÜ, (1990)
- [14] MORGÜL, Ö.K., "Ani Sıcaklık Değişimi Etkisindeki Türbin Kanadı Nonlinear Titreşimlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi", Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, (1993)
- [15] CLOUGH, R.W., Ve PENZIEN, J., "Dynamics Of Structures", McGraw Hill, (1975)
- [16] PRZEMIENIECKI, J.S., "Theory Of Structural Analysis", McGraw Hill, New York, (1968)
- [17] FAGAN, M.J., "The Finite Element Analysis:Theory And Practice", Longman Scientific Technical, New York, (1992)

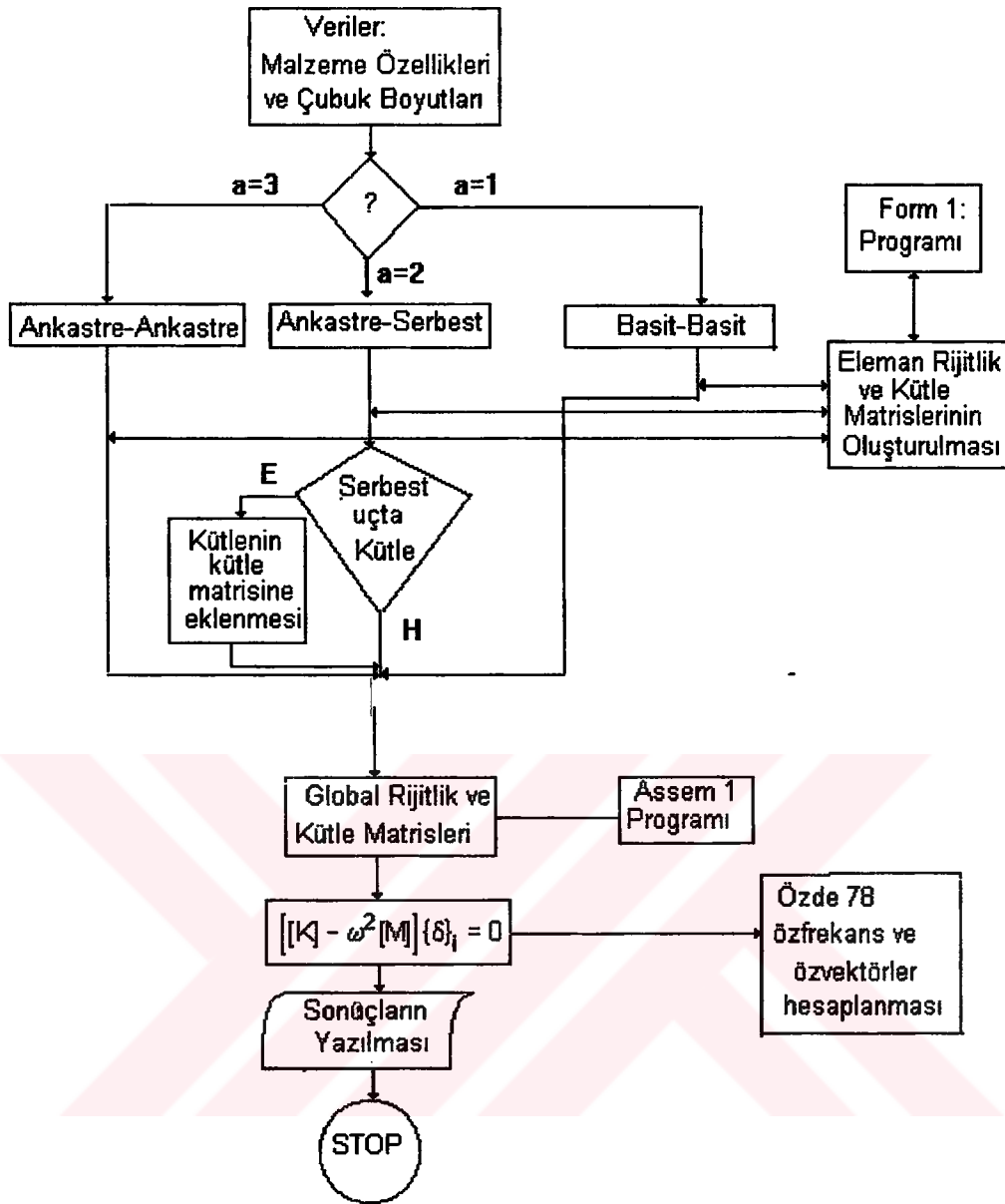
- [18] INMAN, D.J., "Engineering Vibration", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1993)
- [19] RIXEN, D., Ve GERADIN, M., "Mechanical Vibrations: Theory And Application To Structural Dynamics", John Wiley -Sons Ltd., Paris, (1994)
- [20] KNIGHT, C.E., "The Finite Element Method In Mechanical Design", PWS-KENT Publishing, Boston, (1993)



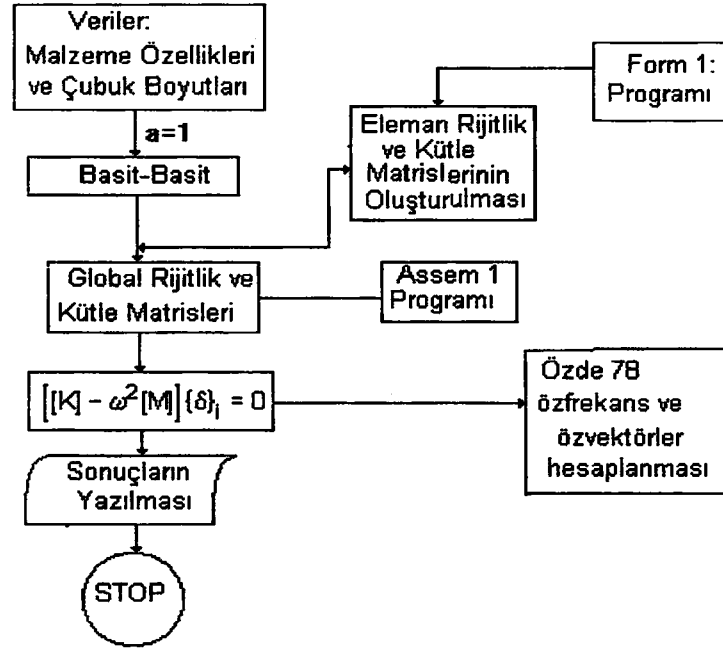
EK-A
BİLGİSAYAR PROGRAMLARI VE AKIŞ DİYAGRAMLARI

A.1. Programda Kullanılan Notasyonlar

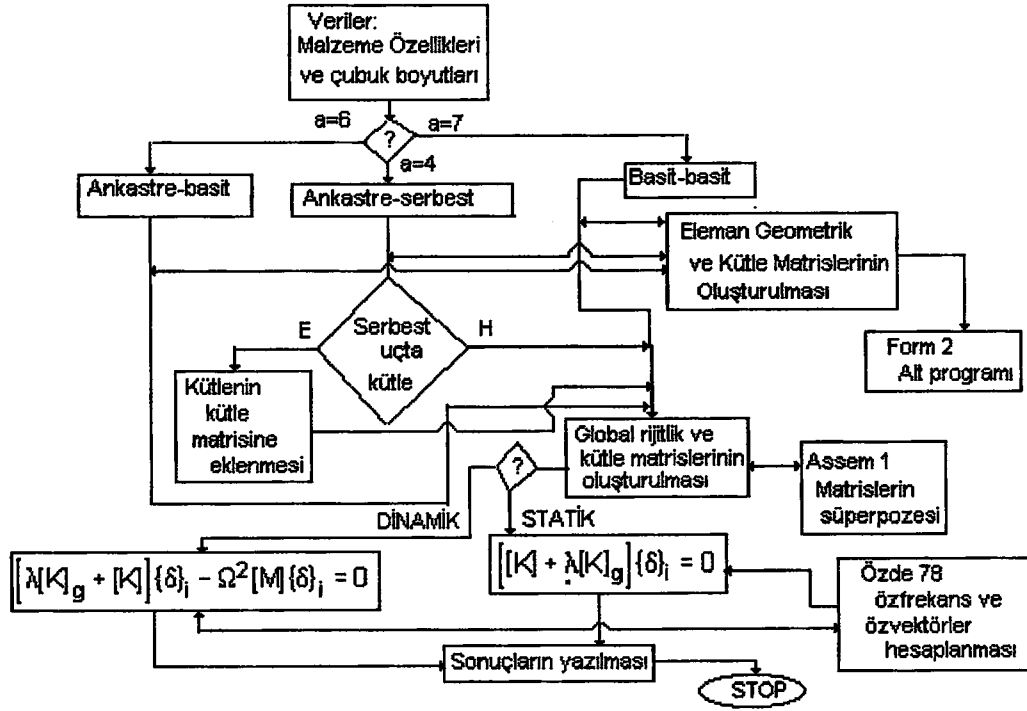
eb	:Çubuğun Genişliği [m].
et	:Çubuğun Kalınlığı [m].
e	:Elastiklik Modülü [N/m^2].
ro	:Malzemenin Yoğunluğu [kg/m^3].
ai	:Çubuk Kesitinin z- Eksenine Göre Atalet Momenti [m^4].
ndf	:Çubuğun Serbestlik Derecesi
ndin	:Dinamik Halde Devir Sayısı [dev/dak].
kkk	:Kayma Katsayısı
nr	:Yazdırılması İstenen Özdeğer Sayısı.
P	:Eksenel Kuvvet [N].
a	:1 Basit-Basit Kiriş
a	:2 Ankastre-Serbest Kiriş
a	:3 Ankastre-Ankastre Kiriş
a	:4 Ankastre-Serbest Çubuk Burkulma
a	:6 Ankastre-Mafsallı Çubuk Burkulma
a	:7 Basit-Basit Mafsallı Burkulma
ekut	:Çubuk Serbest Ucuna Eklenen Kütlev [kg].
al	:Çubuk Uzunluğu [m].
el	:Çubuk Elemanı Uzunluğu [m].
emk	:Çubuğun Birim Ağırlığı [kg/m].
ncode(i)	:n. Elemanın i.bilgisayar Kodu
fs	:Kayma Deformasyonu Katsayısı.



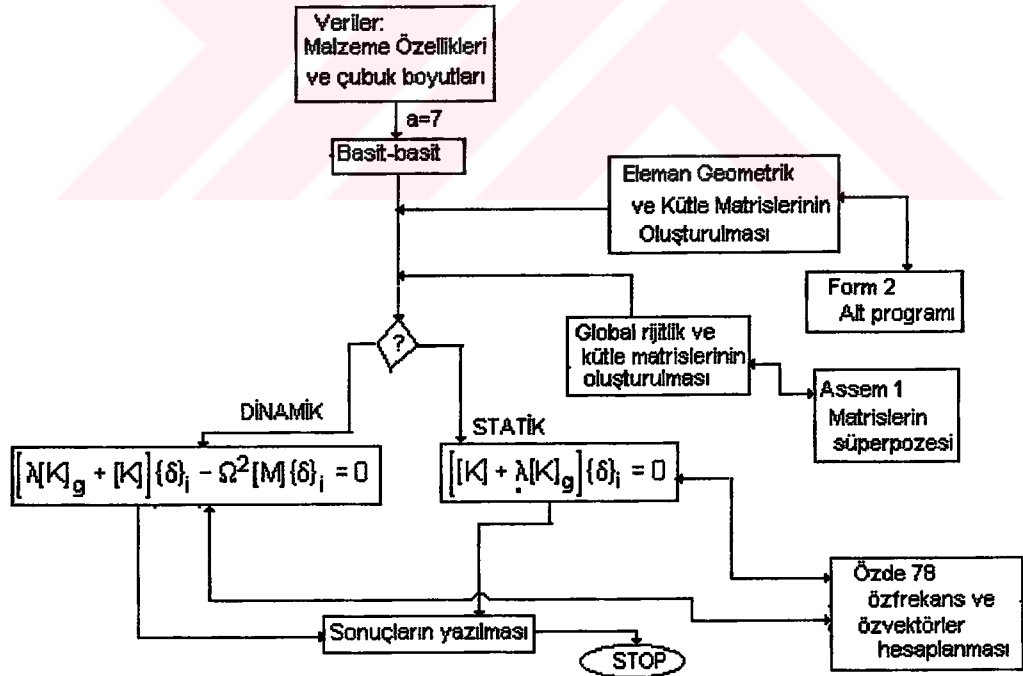
Şekil A.1. Serbest Titreşim Analizi (İnce çubuk ve 4 serbestlikli kalın çubuk için)



Şekil A.2. Serbest Titreşim Analizi (6 serbestlikli kalın çubuk)



Şekil A.3. Burkulma Analizi (ince çubuk ve 4 serbestlikli kalın çubuk için)



Şekil A.4. Burkulma Analizi (6 serbestlik dereceli kalın çubuk için)

```

C  a=1  Basit- Basit   Kiris
c  a=2  Ankastre-Serbest Kiris
c  a=3  Ankastre-Ankastre Kiris
C  a=4  Ankastre-Serbest Cubuk Burkulma
c  a=5  Ankastre-Ankastre Cubuk Burkulma
c  a=6  Ankastre-Mafsalli Cubuk Burkulma
c  a=7  Basit- Basit Mafsalli Cubuk Burkulma

implicit double precision (a-h,o-z)
dimension ak(42,42),am(42,42),eval(42),wks1(42),wks2(42),ncode(6)
dimension evec(42,42),ek(6,6),em(6,6)
real*8 kkk,krl,alb,fs
open(5,file='cubuk.dat',status='old')
open(6,file='cubuk.son',status='unknown')
read(5,*)a,nmax,ro,al,e,eb,et,ndin,ekut,p
n=nmax
kkk=5.0/6.0
el=al/float(n)
fs=(kkk*et*et)/(el*el)
api=8.0*atan(0.1d+01)
emk=ro*(eb*et)
ai=eb*et**3.0/12.0
alb=(12.0*el*el)/(et*et)
krl=1+(kkk*et*et)/(el*el)
if(a.gt.3)go to 11
if(a.eq.1.)then
write(6,25)'Basit-Basit Cubuk'
ndf=3*n-1
else
if(a.eq.2) then
write(6,25)'Ankastre serbest cubuk'
ndf=3*n
else

```

```

write(6,25)'Ankastre-Ankastre Cubuk'
ndf=3*n-3
endif
endif

26 write(6,290)nmax,ro,al,e,eb,et
290 format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
*d9.3,'et=',d9.3/)
25 format(5x,a26/)
write(6,280)n
write(6,616)ekut
616 format(5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)
do 99 i=1,42
do 99 j=1,42
ak(i,j)=0.0
am(i,j)=0.0
99 continue
c   iii=0.0
ep=p*(el**2)/(ai*e)
call form1(ek,em,el,emk,ekut,iii,ep,alb,krL,fs,et)
do 13 iii=1,n
if(a.gt.1)go to 14
if(iii.eq.10)goto 16
if(iii.gt.1)goto 17
ncode(1)=0
ncode(2)=1
ncode(3)=2
ncode(4)=3
ncode(5)=0
ncode(6)=4
go to 19
16 ncode(1)=26
ncode(2)=27

```

```

ncode(3)=0
ncode(4)=29
ncode(5)=28
ncode(6)=0
goto 19
14 if(iii.eq.10.and.a.eq.3) goto 18
   if(iii.gt.1) goto 17
   ncode(1)=0
   ncode(2)=0
   ncode(3)=1
   ncode(4)=2
   ncode(5)=0
   ncode(6)=3
   goto 19
17 ncode(1)=ncode(3)
   ncode(2)=ncode(4)
   ncode(3)=ncode(3)+3
   ncode(4)=ncode(4)+3
   ncode(5)=ncode(6)
   ncode(6)=ncode(6)+3
   goto 19
18 ncode(1)=25
   ncode(2)=26
   ncode(3)=0
   ncode(4)=0
   ncode(5)=27
   ncode(6)=0
19 if(iii.eq.n.and.a.eq.2)goto 189
   goto 199
189 if(ekut.eq.0)goto 199
   call form1(ek,em,el,emk,ekut,iii,ep,alb,krL,fs,et)
199 call assem1(ek,em,ncode,ak,am)

```

```

13 continue
   i=1
   call ozde78(ak,42,am,42,ndf,eval,evec,42,wks1,wks2,i)
   if(i.eq.0)go to 100
   write(6,200)i
200 format(1h0,'failure,ifail=',i5)
   stop
100 aml=e*ai/(emk*(al**4))
   nr=ndf/2
   do 30 i=1,nr
   eval(i)=eval(i)*420.0*(float(n)**4)
   omega=eval(i)*aml
   if(omega.gt.0.0) go to 101
   omega=-omega
101 omega=dsqrt(omega)/api
   write(6,210) i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
30 continue
210 format(1h0,5x,'lamda',i2,'=',d16.9,5x,'omega',i2,'=',d16.9,2x,
   *'hz',//,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,6d16.9)/)
280 format(5x,'ELEMEN SAYISI=',i2,/)
   stop
11 if(a.eq.4)then
   ndf=3*n
   write(6,65) 'Ankastre-Serbest Cubuk Burkulma '
else
   if(a.eq.5)then
   write(6,65) 'Ankastre-Ankastre Cubuk Burkulma '
   ndf=3*n-2
else
   if(a.eq.6)then
   ndf=3*n-1
   write(6,65) 'Ankastre-Mafsalli Cubuk Burkulma '

```

```

else
ndf=3*n
write(6,65) 'Basit-Basit mafsalli Burkulma '
endif
endif
endif

65 format(5x,a35/)
51 write(6,2901)nmax,ro,al,e,eb,et
2901 format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
*d9.3,'et=',d9.3,/)
write(6,294) ndin,ekut
294 format(5x,'ndin=',i4,'dev/dak',5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)

p=1
write(6,281)n
do 991 i=1,42
do 991 j=1,42
ak(i,j)=0.0
am(i,j)=0.0
991 continue
iii=0.0

call form2(ek,em,ndin,el,emk,e,ai,api,
*ekut,iii,alb,krL,fs,et)
do 131 iii=1,n
if(iii.gt.1)goto 191
if(a.lt.7)then
ncode(1)=0
ncode(2)=0
ncode(3)=1
ncode(4)=2
ncode(5)=0
ncode(6)=3
go to 411

```

```

endif
ncode(1)=0
ncode(2)=1
ncode(3)=2
ncode(4)=3
ncode(5)=0
ncode(6)=4
go to 411
191 ncode(1)=ncode(3)
ncode(2)=ncode(4)
ncode(3)=ncode(3)+3
ncode(4)=ncode(4)+3
ncode(5)=ncode(6)
ncode(6)=ncode(6)+3
if(iii.eq.n) go to 181
goto 411
181 if(a.eq.4)goto 411
if(a.eq.5)then
ncode(4)=0
ncode(3)=0
ncode(6)=ncode(6)-2
goto 411
endif
ncode(3)=0
ncode(6)=ncode(6)-1
ncode(4)=ncode(4)-1
c 411 write(6,*)ncode(1),ncode(2),ncode(3),ncode(4),ncode(5),ncode(6)
c 67 format(1h0,5x,/, (5x,6d16.9)/)
411 if(iii.eq.n.and.a.eq.4)goto 412
goto 413
412 call form2(ek,em,ndin,el,emk,e,ai,api,
*ekut,iii,alb,krL,fs,et)

```

```

413 call assem1(ek,em,ncode,ak,am)
131 continue
    i=1
    call ozde78(ak,42,am,42,ndf,eval,evec,42,wks1,wks2,i)
    write(*,*) eval(1),eval(2),eval(3)
    if(i.eq.0)go to 1001
    write(6,2000)i
2000 format(1h0,'Hata,ifail=',i5)
    stop
1001 aml=e*ai/al**2.0
    nr=ndf/2
    do 301 i=1,nr
        eval(i)=eval(i)*(float(n)**2)
        omega=eval(i)*aml
c
        write(6,211) i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
301 continue
211 format(1h0,5x,'lamda ',i2,'=',d16.9,5x,'Pkrt',i2,'=',d16.9,2x,
    *'N',//,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,6d16.9)/)
281 format(5x,'ELEMAN SAYISI=',i2,/)
    stop
end
c
c
c
    subroutine form2(ek,em,ndin,el,emk,e,ai,api,
    *ekut,iii,alb,krL,fs,et)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    dimension ek(6,6),em(6,6)
    real*8 krL,alb,fs
    do 50 i=1,6
    do 50 j=1,6

```

$ek(i,j)=0.0$

$em(i,j)=0.0$

50 continue

$ek(1,1)=12./krl$

$ek(1,2)=(6.*el)/krl$

$ek(1,3)=-12./krl$

$ek(1,4)=(6.*el)/krl$

$ek(2,2)=el*el*(3./krl+1)$

$ek(2,3)=(-6.*el)/krl$

$ek(2,4)=el*el*(3./krl-1)$

$ek(3,3)=12./krl$

$ek(3,4)=(-6.*el)/krl$

$ek(4,4)=el*el*(3./krl+1)$

$ek(5,5)=alb$

$ek(5,6)=-alb$

$ek(6,6)=alb$

$em(1,1)=6.0/5.0$

$em(1,2)=el/10.0$

$em(1,3)=-6.0/5.0$

$em(1,4)=el/10.0$

$em(2,2)=2.0*el**2./15.0$

$em(2,3)=-el/10.0$

$em(2,4)=-el*el/30.0$

$em(3,3)=6.0/5.0$

$em(3,4)=-1.0*el/10.0$

$em(4,4)=2.0*el*el/15.0$

$em(5,5)=emk*el*el/3.0$

$em(5,6)=-emk*el*el/6.0$

$em(6,6)=emk*el*el/3.0$

$ewk=(ndin*api/60.0)**2.$

$ew=(ewk*emk*el)/(1+fs)**2.$

$aib=el**3/(ai*e)$

```

ek(1,1)=ek(1,1)-(13./35.+(7./10.)*fs+(1./3.)*fs**2.+
&et**2./(12.*el*el)*(6./5.))*ew*aib
ek(1,2)=ek(1,2)-((11./210.+(11./120.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./(12.*el)*(1./10.-(1./2.)*fs))*ew*aib
ek(1,3)=ek(1,3)-(9./70.+(3./10.)*fs+(1./6.)*fs**2.+
&et**2./(12.*el*el)*(-6./5.))*ew*aib
ek(1,4)=ek(1,4)-(-(13./420.+(3./40.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./(12.*el)*(1./10.-(1./2.)*fs))*ew*aib
ek(2,2)=ek(2,2)-((1./105.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(2./15.+(1./6.)*fs+(1./3.)*fs**2.))*ew*aib
ek(2,3)=ek(2,3)-((13./420.+(3./40.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./(12.*el)*(-1./10.+(1./2.)*fs))*ew*aib
ek(2,4)=ek(2,4)-(-(1./140.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(-1./30.-(1./6.)*fs+(1./6.)*fs**2.))*ew*aib
ek(3,3)=ek(3,3)-(13./35.+(7./10.)*fs+(1./3.)*fs**2.+
&et**2./(12.*el*el)*(6./5.))*ew*aib
ek(3,4)=ek(3,4)-(-(11./210.+(11./120.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./12.*(-1./30.-(1./6.)*fs+(1./6.)*fs**2.))*ew*aib
ek(4,4)=ek(4,4)-((1./105.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(2./15.+(1./6.)*fs+(1./3.)*fs**2.))*ew*aib
ek(5,5)=ek(5,5)-((1./3.)*(1+fs)**2.)*ew*aib
ek(5,6)=ek(5,6)-((1./6.)*(1+fs)**2.)*ew*aib
ek(6,6)=ek(5,5)
if(iii.gt.0)then
ek(3,3)=ek(3,3)-ekut*ewk*aib
ek(6,6)=ek(6,6)-ekut*ewk*aib
endif
do 6 i=1,6
do 6 j=1,6
ek(j,i)=ek(i,j)
em(j,i)=em(i,j)
c  write(6,*)i,j,em(i,j),ek(i,j)

```

6 continue

return

end

c

subroutine form1(ek,em,el,emk,ekut,iii,ep,alb,krL,fs,et)

implicit double precision(a-h,o-z)

real*8 krL,alb,fs

dimension ek(6,6),em(6,6)

do 50 i=1,6

do 50 j=1,6

ek(i,j)=0.0

em(i,j)=0.0

50 continue

ek(1,1)=12./krL-ep*6./5.

ek(1,2)=6.*el/krL-ep*el/10.

ek(1,3)=-12./krL+ep*6./5.

ek(1,4)=6.*el/krL-ep*el/10.

ek(2,2)=el*el*(3./krL+1)-2.*ep*el*el/15.

ek(2,3)=-6.*el/krL+ep*el/10.

ek(2,4)=el*el*(3./krL-1)+ep*el*el/30.

ek(3,3)=12./krL-ep*6./5.

ek(3,4)=-6.*el/krL+ep*el/10.

ek(4,4)=el*el*(3./krL+1)-2.*ep*el*el/15.

ek(5,5)=alb-ep

ek(5,6)=-alb+ep

ek(6,6)=alb-ep

em(1,1)=13./35.+(7./10.)*fs+(1./3.)*fs**2.+

&et**2./(12.*el*el)*(6./5.)

em(1,2)=(11./210.+(11./120.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+

&et**2./(12.*el)*(1./10.-(1./2.)*fs)

em(1,3)=9./70.+(3./10.)*fs+(1./6.)*fs**2.+

&et**2./(12.*el*el)*(-6./5.)

```

em(1,4)=- (13./420.+(3./40.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./ (12.*el)*(1./10.-(1./2.)*fs)
em(2,2)=(1./105.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(2./15.+(1./6.)*fs+(1./3.)*fs**2.)
em(2,3)=(13./420.+(3./40.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./ (12.*el)*(-1./10.+(1./2.)*fs)
em(2,4)=- (1./140.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(-1./30.-(1./6.)*fs+(1./6.)*fs**2.)
em(3,3)=13./35.+(7./10.)*fs+(1./3.)*fs**2.+
&et**2./ (12.*el*el)*(6./5.)
em(3,4)=- (11./210.+(11./120.)*fs+(1./24.)*fs**2.)*el+
&et**2./12.*(-1./30.-(1./6.)*fs+(1./6.)*fs**2.)
em(4,4)=(1./105.+(1./60.)*fs+(1./120.)*fs**2.)*el*el+
&et**2./12.*(2./15.+(1./6.)*fs+(1./3.)*fs**2.)
em(5,5)=(1./3.)*(1+fs)**2.
em(5,6)=(1./6.)*(1+fs)**2.
em(6,6)=(1./3.)*(1+fs)**2.
if(iii.gt.0)then
em(3,3)=em(3,3)+(1+fs)**2.*ekut/(emk*el)
em(6,6)=em(6,6)+(1+fs)**2.*ekut/(emk*el)
endif
do 6 i=1,6
do 6 j=1,6
ek(j,i)=ek(i,j)
em(j,i)=em(i,j)
6 continue
return
end

```

c a=1 Basit- Basit Kiris

implicit double precision (a-h,o-z)

dimension ak(72,72),am(72,72),eval(72),wks1(72),wks2(72),ncode(8)

dimension evec(72,72),ek(8,8),em(8,8)

real*8 kkk,alb

open(5,file='cubuk.dat',status='old')

open(6,file='cubuk.son',status='unknown')

read(5,*)a,nmax,ro,al,e,eb,et,ndin,ekut,p

n=nmax

kkk=5.0/6.0

el=al/float(n)

api=8.0*datan(0.1d+01)

emk=ro*(eb*et)

ai=eb*et**3/12.0

alb=(12.0*el*el)/(et*et)

ep=p*(el**2.0)/(ai*e)

if(a.eq.1)then

write(6,25) 'basit-basit cubuk '

endif

26 write(6,290)nmax,ro,al,e,eb,et

290 format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
*d9.3,'et=',d9.3,/))

25 format(5x, a26/)

write(6,280) n

write(6,616)ekut

616 format(5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)

do 99 i=1,72

do 99 j=1,72

ak(i,j)=0.0

am(i,j)=0.0

99 continue

```

a=1
ndf=4*(n+1)-3
iii=0.0
call form1(ek,em,el,emk,ekut,iii,ep,alb,et,kkk)
do 131 iii=1,n
if(iii.gt.1) goto 191
ncode(1)=0
ncode(2)=0
do 12 i1=1,6
i2=i1+2
12 ncode(i2)=i1
go to 411
191 if(iii.eq.n) go to 181
do 13 i3=1,8
13 ncode(i3)=4*iii+i3-6
go to 411
181 ncode(1)=ndf-6
ncode(2)=ndf-5
ncode(3)=ndf-4
ncode(4)=ndf-3
ncode(5)=ndf-2
ncode(6)=0
ncode(7)=ndf-1
ncode(8)=ndf
go to 411
411 call assem1(ek,em,ncode,ak,am)
131 continue

i=1
call ozde78(ak,72,am,72,ndf,eval,evec,72,wks1,wks2,i)
if(i.eq.0) go to 100
write(6,200)i

```

```

200 format(1h0,'failure,ifail=',i5)
    stop
100 aml=e*ai/(emk*(al**4))
    nr=ndf/2
    do 30 i=1,nr
        eval(i)=eval(i)*420.0*(float(n)**4)
        omega=eval(i)*aml
        if(omega.gt.0.0)go to 101
        omega=-omega
101 omega=dsqrt(omega)/api
    write(6,210)i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
30 continue
210 format(1h0,5x,'lamda',i2,'=',d16.9,5x,'omega',i2,'=',d16.9,2x,
    *hz',//,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,8d16.9)/)
280 format(5x,'eleman sayisi=',i2,/)
    stop
11 if(a.eq.4)then
c
    write(6,65) 'Ankastre-Serbest Cubuk Burkulma '
    else
        if(a.eq.5)then
            write(6,65) 'Ankastre-Ankastre Cubuk Burkulma '
        else
            if(a.eq.6)then
                write(6,65) 'Ankastre-Mafsalli Cubuk Burkulma '
            else
                write(6,65) 'Basit-Basit mafsalli Burkulma '
            endif
        endif
    endif
65 format(5x,a35/)
51 write(6,2901)nmax,ro,al,e,eb,et

```

```

2901 format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
      *d9.3,'et=',d9.3,/)
      write(6,294) ndin,ekut
294 format(5x,'ndin=',i4,'dev/dak',5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)
      p=1
      write(6,281)n
      do 991 i=1,72
      do 991 j=1,72
      ak(i,j)=0.0
      am(i,j)=0.0
991 continue
      i=1
      call ozde78(ak,72,am,72,ndf,eval,evec,72,wks1,wks2,i)
      if(i.eq.0)go to 1001
      write(6,2000)i
2000 format(1h0,'Hata,ifail=',i5)
      stop
1001 aml=e*ai/al**2.0
      nr=ndf/2
      do 301 i=1,nr
      eval(i)=eval(i)*(float(n)**2)
      omega=eval(i)*aml
c
      write(6,211) i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
301 continue
211 format(1h0,5x,'lamda ',i2,'=',d16.9,5x,'Pkrt',i2,'=',d16.9,2x,
      **N',//,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,8d16.9)/)
281 format(5x,'ELEMEN SAYISI=',i2,/)
      stop
      end
c
c

```

c

```

subroutine form2(ek,em,ndin,el,emk,e,ai,api,ekut,iii,
&alb,et,kkk)
implicit double precision(a-h,o-z)
real*8 kkk,alb
dimension ek(8,8),em(8,8)
do 50 i=1,8
do 50 j=1,8
ek(i,j)=0.0
em(i,j)=0.0
50 continue
ek(1,1)=alb
ek(1,5)=-alb
ek(2,2)=12.0
ek(2,3)=6.0*el
ek(2,4)=-6.0*el
ek(2,6)=-12.0
ek(2,7)=6.0*el
ek(2,8)=-6.0*el
ek(3,3)=4.0*el*el
ek(3,4)=-3.0*el*el
ek(3,6)=-6.0*el
ek(3,7)=2.0*el*el
ek(3,8)=-3.0*el*el
ek(4,4)=3.0*el*el+(1.5*kkk*el**4)/(et*et)
ek(4,6)=6.0*el
ek(4,7)=-3.0*el*el
ek(4,8)=3.0*el*el+(0.75*kkk*el**4)/(et*et)
ek(5,5)=alb
ek(6,6)=12.0
ek(6,7)=-6.0*el
ek(6,8)=6.0*el

```

$ek(7,7)=4.0*el*el$
 $ek(7,8)=-3.0*el*el$
 $ek(8,8)=3.0*el*el+(1.5*kkk*el**4)/(et*et)$
 $em(1,1)=emk*el*el/3.0$
 $em(1,5)=-emk*el*el/6.0$
 $em(2,2)=6.0/5.0$
 $em(2,3)=el/10.0$
 $em(2,4)=-6.0/10.0$
 $em(2,6)=-6.0/5.0$
 $em(2,7)=el/10.0$
 $em(2,8)=-6.0/10.0$
 $em(3,3)=2.0*el**2/15.0$
 $em(3,4)=-1.0/20.0*el*el$
 $em(3,6)=-1.0/10.0*el$
 $em(3,7)=-1.0/30.0*el*el$
 $em(3,8)=-1.0/20.0*el*el$
 $em(4,4)=6.0/20.0*el*el$
 $em(4,6)=6.0/10.0*el$
 $em(4,7)=-1.0/20.0*el*el$
 $em(4,8)=6.0/20.0*el*el$
 $em(5,5)=emk*el*el/3.0$
 $em(6,6)=6.0/5.0$
 $em(6,7)=-1.0*el/10.0$
 $em(6,8)=6.0/10.0*el$
 $em(7,7)=2.0*el*el/15.0$
 $em(7,8)=-1.0/20.*el*el$
 $em(8,8)=6.0/20.0*el*el$
 $ewk=(ndin*api/60.0)**2$
 $ew=ewk*emk*el/420.0$
 $aib=el**3/(ai*e)$
 $ek(1,1)=ek(1,1)-(140.0)*ew*aib$
 $ek(1,5)=ek(1,5)-(70.0)*ew*aib$

```

ek(2,2)=ek(2,2)-(156.0+504.0*(et*et/(12.0*el*el)))*ew*aib
ek(2,3)=ek(2,3)-(22.0*el+42.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(2,4)=ek(2,4)-(-22.0*el-252*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(2,6)=ek(2,6)-(54.0-504.0*(et*et/(12.0*el*el)))*ew*aib
ek(2,7)=ek(2,7)-(-13.0*el+42.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(2,8)=ek(2,8)-(13.0*el-252.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(3,3)=ek(3,3)-(4.0*el*el+56.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(3,4)=ek(3,4)-(-4.0*el*el-21.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(3,6)=ek(3,6)-(13.0*el-42.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(3,7)=ek(3,7)-(-3.0*el*el-14.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(3,8)=ek(3,8)-(3.0*el*el-21.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(4,4)=ek(4,4)-(4.0*el*el+126.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(4,6)=ek(4,6)-(-13.0*el+252.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(4,7)=ek(4,7)-(3.0*el*el-21.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(4,8)=ek(4,8)-(-3.0*el*el+126.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(5,5)=ek(5,5)-(140.0)*ew*aib
ek(6,6)=ek(6,6)-(156.0+504.0*(et*et/(12.0*el*el)))*ew*aib
ek(6,7)=ek(6,7)-(-22.0*el-42.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(6,8)=ek(6,8)-(22.0*el+252.0*(et*et/(12.0*el)))*ew*aib
ek(7,7)=ek(7,7)-(4.0*el*el+56.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(7,8)=ek(7,8)-(-4.0*el*el-21.0*(et*et/12.0))*ew*aib
ek(8,8)=ek(8,8)-(4.0*el*el+126.0*(et*et/12.0))*ew*aib
do 6 i=1,8
  do 6 j=1,8
    ek(j,i)=ek(i,j)
    em(j,i)=em(i,j)
c    write(6,*)i,j,em(i,j),ek(i,j)
  6 continue
  return
end
c
subroutine form1(ek,em,el,emk,ekut,iii,ep,alb,et,kkk)

```

```

implicit double precision(a-h,o-z)
real*8 kkk,alb
dimension ek(8,8),em(8,8)
do 50 i=1,8
do 50 j=1,8
ek(i,j)=0.0
em(i,j)=0.0
50 continue
ek(1,1)=alb-ep
ek(1,5)=-alb+ep
ek(2,2)=12.0-(6.0*ep/5.0)
ek(2,3)=6.0*el-(ep*el/10.0)
ek(2,4)=-6.0*el
ek(2,6)=-12.0+(6.0/5.0*ep)
ek(2,7)=6.0*el-(el/10.0*ep)
ek(2,8)=-6.0*el
ek(3,3)=4.0*el*el-(2.0*el*el/15.0*ep)
ek(3,4)=-3.0*el*el
ek(3,6)=-6.0*el+el/10.0*ep
ek(3,7)=2.0*el*el+el*el/30.0*ep
ek(3,8)=-3.0*el*el
ek(4,4)=3.0*el*el+(1.5*kkk*el**4)/(et*et)-ep
ek(4,6)=6.0*el
ek(4,7)=-3.0*el*el
ek(4,8)=3.0*el*el+(0.75*kkk*el**4)/(et*et)+ep
ek(5,5)=alb-ep
ek(6,6)=12.0-6.0/5.0*ep
ek(6,7)=-6.0*el+el/10.0*ep
ek(6,8)=6.0*el
ek(7,7)=4.0*el*el-2.0*el*el/15.0*ep
ek(7,8)=-3.0*el*el
ek(8,8)=3.0*el*el+(1.5*kkk*el**4)/(et*et)-ep

```

```

em(1,1)=140.0
em(1,5)=70.0
em(2,2)=156.0+504.0*(et*et/(12.0*el*el))
em(2,3)=22.0*el+42.0*(et*et/(12.0*el))
em(2,4)=-22.0*el-252*(et*et/(12.0*el))
em(2,6)=54.0-504.0*(et*et/(12.0*el*el))
em(2,7)=-13.0*el+42.0*(et*et/(12.0*el))
em(2,8)=13.0*el-252.0*(et*et/(12.0*el))
em(3,3)=4.0*el*el+56.0*(et*et/12.0)
em(3,4)=-4.0*el*el-21.0*(et*et/12.0)
em(3,6)=13.0*el-42.0*(et*et/(12.0*el))
em(3,7)=-3.0*el*el-14.0*(et*et/12.0)
em(3,8)=3.0*el*el-21.0*(et*et/12.0)
em(4,4)=4.0*el*el+126.0*(et*et/12.0)
em(4,6)=-13.0*el+252.0*(et*et/(12.0*el))
em(4,7)=3.0*el*el-21.0*(et*et/12.0)
em(4,8)=-3.0*el*el+126.0*(et*et/12.0)
em(5,5)=140.0
em(6,6)=156.0+504.0*(et*et/(12.0*el*el))
em(6,7)=-22.0*el-42.0*(et*et/(12.0*el))
em(6,8)=22.0*el+252.0*(et*et/(12.0*el))
em(7,7)=4.0*el*el+56.0*(et*et/12.0)
em(7,8)=-4.0*el*el-21.0*(et*et/12.0)
em(8,8)=4.0*el*el+126.0*(et*et/12.0)
do 6 i=1,8
  do 6 j=1,8
    ek(j,i)=ek(i,j)
    em(j,i)=em(i,j)
  6 continue
return
end

```

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Adapazarı'nda doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adapazarı Ali Dilmen İlkokulu ve Ortaokulu'nda tamamladı. Lise eğitimini Adapazarı Fatih Teknik Meslek Lisesi'nin Elektronik bölümünde tamamladı. 1989'da İTÜ. Sakarya Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1993'te Makina Mühendisi olarak mezun oldu. Yine 1993'te İTÜ. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü Makina Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilimdalında yüksek lisans eğitimine başladı. 1 sene İ.T.Ü. Yabancı Diller Bölümünde İngilizce Hazırlık Sınıfında İngilizce eğitimi gördü. Evlidir. Halen D.P.Ü. Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.