

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞKAN YATAKLI SİSTEMDE BİR KANAT PROFİLİ ÜZERİNDE SONLU ELEMANLAR
METODUNU KULLANARAK NAVİER-STOKES VE DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜH. A. ALEV ERAYDIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih

: 1 Mart 1996

Tezin Savunulduğu Tarih

:25 Mart 1996

Tez Danışmanı
Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. C. Ruhi Kaykayoglu C. Ruhi Kaykayoglu
: Prof. Dr. Zeki Erim Zeki Erim
Prof. Dr. Alsan Meriç Alsan Meriç

MART 1996

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda akışkanlar dinamiğinin bir alanında ne yapılabileceğine yönelik araştırma yaptım. Bugün Türkiye’de ve Dünya’da hala pek çok yeni bulgunun elde edilebileceği bakir bir alan olduğunu gördüm. Bu alanın mutlaka değerlendirilmesi gerekir.

Burada akışkanlar dinamiğini bana sevdiren ve bu yönde çalışmalara destek veren hocam Prof. Dr. C. Ruhi Kaykayoglu’na ve programlardaki yardımları için Uçak Y. Müh. Orhan Gökçöl’e sonsuz teşekkürü borç bilirim.

01/03 / 1996

A. ALEV ERAYDIN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
NOTASYON LİSTESİ.....	V
ÖZET.....	VII
SUMMARY.....	VIII
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
1.1. AKIŞKAN YATAK FIRINLARI	1
1.1.1. Çalışma Prensipleri	1
1.1.2. Akışkan Yatak Sisteminin Avantajları.....	3
1.1.3. Karbür Kaplama.....	3
1.2. TEZİN AMACI VE AŞAMALARI	4
BÖLÜM 2: TEORİK ALT YAPI.....	5
2.1. İKİ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ VİSKOZ AKIŞ	5
2.2. DİFÜZYON DENKLEMİ	6
2.3. KONSANTRASYON DENKLEMİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA FTCS (İZMK) EXPLICIT YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ.....	7
BÖLÜM 3: SONLU ELEMANLAR METODU.....	11
3.1. AĞ OLUŞUMU	12
3.2. AĞ OLUŞTURURKEN DİKKAT EDİLECEK UNSURLAR.....	13
3.3. KATSAYILAR MATRİSİNİN OLUŞTURULMASI	14
3.4. SONLU ELEMANLAR METODU İLE DEĞERLENDİRME	14
BÖLÜM 4: BİLGİSAYAR PROGRAMI.....	18
4.1. ALGORİTMALARIN OLUŞTURULMASI	18
BÖLÜM 5: PROBLEM TANIMI VE ÇÖZÜM AŞAMALARI.....	21
5.1. PROBLEMİN TANIMI.....	21
5.2. SİLİNDİR ETRAFINDA HESAPLANAN DEĞERLER	24
5.2.1. Silindir Etrafındaki Hız Vektörleri.....	24
5.2.2. Akım Fonksiyonları.....	26
5.2.3. Girdaplılık.....	28
5.3. KANAT PROFİLİ ETRAFINDA HESAPLANAN DEĞERLER	30
5.3.1. Hız Vektörleri	30
5.3.2. Akım Fonksiyonu	32
5.3.3. Girdaplılık.....	34
5.4. SİLİNDİR VE PROFİL ETRAFINDA KONSANTRASYON	36

5.5. KONSANTRASYON DAĞILIMLARININ GRAFİKLE GÖSTERİMİ.....	42
5.6. SİLİNDİR CİSİM İÇİNDEKİ KONSANTRASYON DAĞILIMI	44
5.7. SONUÇ	46
KAYNAKLAR :	47
ÖZGEÇMİŞ:.....	48



NOTASYON LİSTESİ

LATİNCE KISALTMALAR

- [A] : Toplam matris
C : Konsantrasyon
 C_α : Bilinmeyen nodal konsantrasyon
 C^n : n. zamandaki konsantrasyon
 C^{n+1} : (n +1). zamandaki konsantrasyon
[D] : Toplam matris
F : Hacimsel kuvvet vektörü
[G] : Bünye denklemine karşılık gelen toplam matris
 J_x : X yönündeki toplam kütle akısı
 J_y : Y yönündeki toplam kütle akısı
 J_B : Normal yönündeki toplam kütle akısı
[K] : Katsayılar matrisi
 k_{nn} : Katsayılar matrisinin bir elemanı
[M] : Toplam matris
p : Basınç vektörü
Re : Reynold sayısı
Sc : Schmidt sayısı
U : Hız Vektörü
u : Hız vektörünün X yönündeki bileşeni
v : Hız vektörünün Y yönündeki bileşeni
w : Nodal akım fonksiyonunun zamana bağlı türevi
 w_α : Bilinmeyen nodal girdaplılık

GREKÇE KISALTMALAR

- δ_c : Konsantrasyon ağırlık fonksiyonu
 δ_v : Akım ağırlık fonksiyonu
 δ_w : Girdaplılık ağırlık fonksiyonu
 Φ_α : Lineer integrasyon fonksiyonu
 ψ : Akım fonksiyonu

ψ_α :Bilinmeyen nodal akım fonksiyonu
 ω :Girdaplılık fonksiyonu
 η :Difüzyon katsayısı
 ν :Kinematik viskozite
 μ :Viskozite
 ρ :Yoğunluk
 Δ^e :Üçgensel elemanın alanı



ÖZET

Günümüzde teknolojinin çok hızlı bir atılım yapmasıyla birlikte bilimsel çalışmalar çok farklı bir konuma gelmiştir. Artık sayfalarca tutan hesaplar, ince ayrıntılı, çok hassas ve pahalı düzenekler yerlerini bilgisayarlara ve bilgisayar programlarına bırakmıştır. Böylece zamandan, paradan ve insan gücünden kazanılmış, bunlar yeni araştırma konularına farklı alanlara yönlitilebilmiştir. Yaşanan baş döndürücü bir hızdır. Özellikle gelişmiş ülkeler bu durumun başının çekmektedir. Bizim gibi gelişmekte olan ülkeler içinse bu gelişmiş ülkeleri yakalamak için son fırsattır. Çünkü sorun artık nitelikli insan gücünü geliştirmeye ve onlara ihtiyaçları olan koşulları yaratmaya kalmıştır.

Bu çerçevede kompleks bir yapıya sahip olan ve hala çözülememiş öğeleri içinde barındıran akışkanlar dinamiği önemli bir alandır. Tez oluşturulmaya karar verildiğinde, tüm bunlar düşünülerek daha sonradan geliştirilmek üzere bir ön çalışma yapılarak bilgisayarla akışkanlar dinamiği çözümleme yöntemlerine giriş yapılmıştır. Bunun için yöntem olarak sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Sayısal çözümleme yöntemlerinin bilgisayarlarla yaygın olarak kullanılmaya başlanması matematik, fizik gibi temel bilim dallarının yeniden gündeme gelmesinin nedenlerinden biridir.

Bugün uçak yapımında kullanılan teknoloji ve malzeme “ileri teknoloji ürünleri”nin başında gelir. Tez, bir kaplama tekniğinin “karbür kaplama” kanat profiline uygulanabilirliğini araştırmaktadır. Bunun için akışkan yataklı bir sistem kullanılmıştır. Belli bir sıcaklık ve hızda içine metal karıştırılmış hava kanat profili üzerinde bir sınır tabaka meydana getirir. Amaç bu sınır tabakayı çözmektir. Bunun için Navier-Stokes ve difüzyon denklemleri kullanılmıştır. Elde edilen tabakanın zamana bağlı değişimi gösterilecektir. Yöntemin uygulanabilirliği ayrıca incelenmelidir.

SUMMARY

In recent years, new technological ways of manufacturing new products has been advancing rapidly. Scientific research has reached a high level, where there is no need for piles of calculations, minute details and expensive experimental arrangements since specialized computer programs take care of all of these. Therefore, time, labor and money are economically spent and the method employed in this context may be expanded to cover other domains of technology forcing the limits of imagination. This era might be the last chance for the developing countries to catch up the developed ones. Because all that remains is to provide the proper conditions for qualified human powers to take place in technological improvements and develop innovations.

Fluid dynamics subject occupies a complex domain of interest in mechanics where many problems still which many objects remain unsolved. This feature was heavily exercised in mind when choosing the topic of this thesis. An introduction for computational fluid dynamics is provided, upon which a further expolation of the subject will take place. As a method, finite element method was chosensing it has found extensive use whenever computer aided numerical solutions needed in the fields of physics and mathematics or science in general.

The technology and materials used in the manufacturing of aircraft components nowadays can be placed on the top of "Advanced Technology Products" listing. This thesis is concerned with the applicability of a new coating technique called "Carbur Coating" of various profiles including airfoils and circular cylinder. Here, an account is made of a system with fluidized bed system. If applied at a given velocity, temperature and metal powder content, there creates a boundary film along the profile where carbur diffusion will occur. In brief the title of this thesis is; "Solutions of the Navier-Stokes and Diffussion Equations via Finite Element Method Over an Airfoil Placed in a Fluidized Bed System "

The Navier-Stokes equation can be derived form the law of conservation of momentum and the continuity equations. This equation is one of the two basic equations that we are going to deal with. Hence;

$$\left(\frac{D\bar{U}}{Dt} \right) = \bar{F} - \bar{\nabla}p + \mu \nabla^2 \bar{U}$$

Expanding the Navier-Stokes equation in the x and y direction we get the followings;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

On the otherhand the stream function and vorticity is related by the following equations;

$$\nabla^2 \psi = -w$$

The vorticity transport equation is then;

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \bar{w}$$

After finding the velocities u and v from the solution of Navier-Stokes equation and diffusion equation is ready to be solved. The diffusion equation gives us the level of concentration in the flow field. Hence;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = \eta \nabla^2 C$$

The numerical solution by use of the finite element method is sought. For the solution, triangular elements were used and in order to determine more accurate results especially around the profiles ends, the number of elements was increased. Employing Galerkin's Finite Element Method approach, the matrices that are determined provide us the solution to the problem which can be shown as :

$$[D]\{\psi\} - [M]\{w\} - \{\Gamma_s\} = \{0\}$$

$$[M]\{\dot{w}\} + [A(\psi)]\{w\} + \nu [D]\{w\} + \{G(C)\} - \{\Gamma_z\} = \{0\}$$

$$[M]\{\dot{C}\} + [A(\psi)]\{C\} + \eta [D]\{C\} + \{\Gamma_j\} = \{0\}$$

By the algorithm and program provided in the literature w and C values can be calculated with Δt intervals. In order for the program to terminate, we execute the program until the flow field reaches a steady state conditions. After finding the concentration distribution on the surface of profile, the diffusion process

was modelled to evaluate the unsteady concentration thickness inside the body.

The concentration around the object is calculated according to the equation mentioned below:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C$$

The approach applied to solve the above equation is "The Finite Difference Method". Thus the level of diffusion that results from the concentration at various time intervals may be computed.

A setting of a cylinder and a wing profile placed in the fluidized bed is prepared. With enriched air charged into the setting the velocity vectors resulting from the air flow are calculated, then the change in the velocity vectors is examined with respect to three Re numbers. Moreover, various calculations are made regarding the stream function and vorticity, and various results are obtained according to miscellaneous Re values. Also, various observed changes that result from different Re values are examined on graphs. Consequently it was observed that the flow had increasingly approached turbulent level and the flow along the object deviated from steady flow.

The concentration distribution was examined for various Re values at the point where the flow reached its developed stage. The value of the concentration was observed to be higher at the first point reached by the flow (attack side) compared to the last point where the flow departed the object (escape side), however eventually. The difference between concentration levels declines at further points away from the object but never reached to a null.

In conclusions the following may be said: By changing the mesh form or the constructions of the body defined in the theoretical part and algorithm are developed, an approach to various problems can be achieved

Moreover the developed here approach, which is based on theoretical and simulation basis may be conveyed to serve industrial applications and thus a development of the "Carbur Coating" technique may be enhanced by the encounterment of theory and practice.

BÖLÜM 1: GİRİŞ

1.1. Akışkan Yatak Fırınları

Bu bölümde “Akışkan Yatak Teknolojisi” kullanılarak gerçekleştirilen ısı işlemlerin doğası hakkında bilgi verilmiştir. Akışkan yatak teknolojisi malzemelerin yüzey özelliklerini iyileştirmek için kullanılan en son teknolojilerden bir tanesidir. Temelde sistem akışkanlaştırılmış ufak partiküllerin içinde bulunan bir cisim üzerinin istenen mekanik özelliklere çıkartılması esasına dayanır [1].

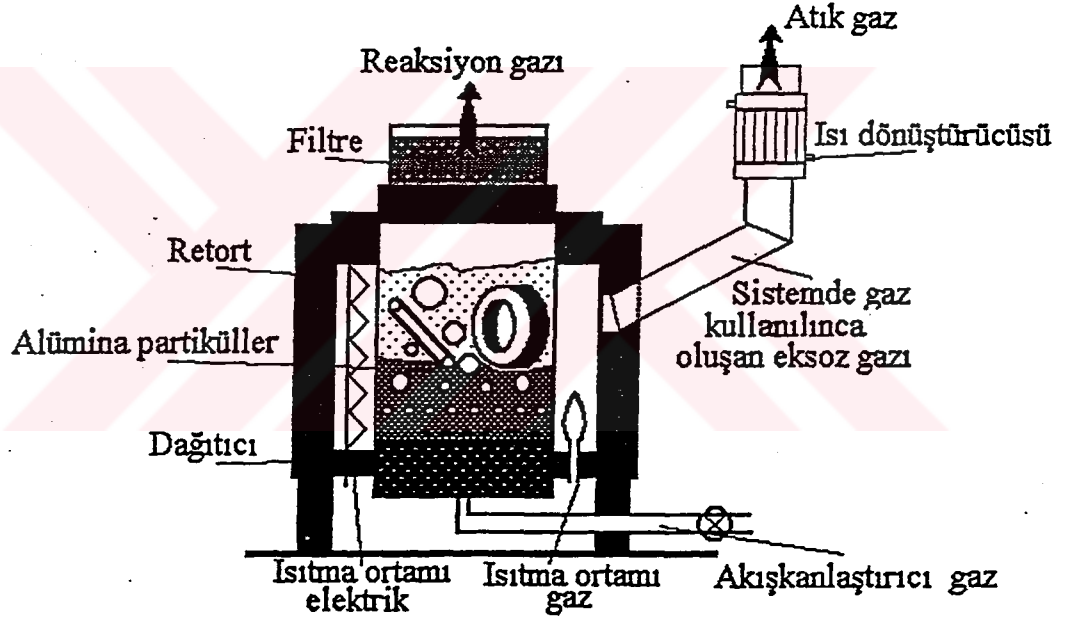
1.1.1. Çalışma Prensibi

Akışkan ortamı oluşturan ve sonsuz ömürlü, yüksek ergime sıcaklığına sahip olan Alümina (Al_2O_3) partikülleri gaz ortamda katı haldeyken sıvı gibi hareket etmektedirler. Yüksek sıcaklığa dayanıklı metal pota (retort) içine yerleştirilen 100 mesh civarındaki boyutlarda alümina toz partikülleri akışkan yatak fırınının alt kısımdan gelen basınçlı akışkanlaştırıcı gazla harekete geçerek akışkanlaşma sağlanmaktadır. Akışkanlaştırıcı gazın fırın giriş hızı, yatağı oluşturan alümina partiküllerinin hareketlerini kontrol eden parametrelerin başında gelir. Gereğinden yüksek hızda gelen gaz yatağın pnömatik olarak taşınmasına yol açarken, düşük hızda gelen gaz akışı da yetersiz ısı transferine ve çalışma ortamına yol açmaktadır. Metal pota içine yerleştirilen çalışma malzemeleri üzerinde aşağıdaki işlemler yapılabilir [2].

- Sertleştirme
- Karbürizasyon

- Karbonitrasyon
- Nitrasyon
- Nitrokarbürizasyon
- Karbür kaplama (Thermo-reaktive diffusion process, Toyota diffusion process)

Şekil 1.1'de bir akışkan yatak fırınının şematik görüntüsü ve ayrıntıları verilmiştir.



Şekil 1.1. Akışkan yatak fırınının şematik görüntüsü

1.1.2 Akışkan Yatak Sisteminin Avantajları

Akışkan yatak sisteminin kullanılmasının avantajları aşağıda sıralanmıştır[1]:

1. Sistem yüksek ısı transferi özelliğine sahiptir.
2. Yüksek ısı transferi özelliğinden dolayı difüzyon kontrollü yüzey işlemleri daha kısa sürede gerçekleşmektedir.
3. İşlem esnasında katı partikülleri iş parçasına tutunamayacağından temizleme sorunu yoktur.
4. Sistem homojen sıcaklık dağılımı göstermektedir.
5. Oksidasyon gibi yüzey problemlerine neden olmaz.
6. İşletme maliyeti düşüktür
7. Çevre ve sağlık açısından diğer sistemlere göre daha ergonomiktir.

1.1.3 Karbür Kaplama

Bu çalışmada incelenen problem Karbür Kaplama prosesine uygundur. Bu nedenle Karbür Kaplama Tekniği kısaca bu bölümde tanıtılmıştır.

Akışkan yatak ortamına ilave edilen karbür yapıcı tozlar 900 - 1250 °C sıcaklık aralıklarında iş parçasının bünyesinde bulunan karbonla birleşerek karbür tabakası oluşturmaktadır. Tabaka kalınlığı ortam bileşenlerinin yanısıra zaman ve sıcaklığa bağlı olarak artmaktadır.

Akışkan ortama ilave edilen V, Nb, Cr gibi karbür yapıcı tozlar malzemenin karbon oranına göre değişen sıcaklıklar arasında çelik yüzeyindeki karbonla reaksiyona girerek metal karbürler oluşturmaktadır. Prosesin difüzyon kontrollü olmasından dolayı tabaka kalınlığının artış hızı zamana bağlı olarak azalan bir değişim göstermektedir.

1.2 Tezin Amacı ve Aşamaları

Tez, bir akışkan yatak firmı içinde yer alan bir silindir ve kanat profili üzerindeki konsantrasyon dağılımını ve bu dağılım sonucu cismin içindeki difüzyon sürecini incelemeyi hedeflemektedir. Akışkan hız alanı ile akışkan içindeki konsantrasyon alanının bulunması için sonlu elemanlar tabanlı hazır bilgisayar programları kullanılmıştır[3]. Konu hem bilgisayarda simülasyon ile hem de deneysel olarak incelenmelidir. Ancak bu karşılaştırma sonucunda akışkan yatak fırnlarm kullanılabilirliği konusunda bir görüş oluşturulabilir. Bu tezin koşulları çerçevesinde ancak simülasyon kısmı gerçekleştirilebilmiştir. Bu çalışma şu aşamalardan geçerek yapılmıştır:

- İki boyutlu, sıkıştırılamaz, daimi bir akış kabul edilmiştir. Bilgisayar programı çalıştırılarak u ve v hızları bulunmuştur.
- Difüzyon denkleminin çözüldüğü program çalıştırılarak, firm içindeki cisim üzerinde ve akış alanında konsantrasyon değerleri hesaplatılmıştır [3].
- Üç farklı Re sayısı için bu işlemler tekrarlanmıştır.
- Cismin yüzeyinde hesaplanan bu değerler kullanılarak cismin içindeki konsantrasyon dağılımı bir boyutlu difüzyon denklemi kullanılarak hesaplatılmıştır [3].
- Tüm bu çözümler için sayısal metod olarak sonlu elemanlar metodu seçilmiştir. Ancak cisim içindeki difüzyon hareketi için “Sonlu Farklar Yaklaşımı” seçilmiştir.

Akışkan yataklar endüstrideki kütle transferi işlemlerinde yaygın olarak kullanılır. Yüzerme (adsorption), iyon alışverişi, kromatografi ve katı yüzeyler tarafından katalize edilen gaz reaksiyonları bu uygulama alanlarından bazılarıdır. Kütle transfer katsayısının ölçümü ve sonuçlarının karşılaştırılması sayısal araştırmalarla mümkündür. Ancak bu araştırmaların deneyle desteklenmesinin güçlüğü sonuçları zayıflatmaktadır. Bu konuda sınırlı sayıda çalışmayı Sherwood, Pigford ve Wilke yapmıştır [4].

BÖLÜM 2: TEORİK ALT YAPI

2.1. İki Boyutlu Sıkıştırılamaz Viskoz Akış

Sıkıştırılamaz, iki boyutlu viskoz bir akışkanın doğası “Süreklilik” ve “Navier-Stokes” denklemleri ile tanımlanır [5].

Süreklilik denklemi kütle korunumu yasasından yola çıkılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.1.1)$$

Bu denklem aşağıdaki gibi açılabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Navier-Stokes denklemlerinin genel ifadesi ise aşağıdaki gibidir ve momentumun korunumu ile bünye denklemlerinin bir sonucudur:

$$\rho \left(\frac{D\vec{U}}{Dt} \right) = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} \quad (2.1.2)$$

$$U = ui + vj$$

Burada Du/Dt ve Dv/Dt 'nin, karşılıkları yazılırsa;

$$\frac{Du}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.1.4)$$

yukarıdaki açılımlar elde edilir.

Böylece denklem (2.1.2)'nin açık ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (2.1.6)$$

Navier-Stokes denklemleri her akışkan parçacığı için Newton'un 2. Yasası'nın kullanıldığı ve akışkan parçacığı üzerindeki kuvvetler ile atalet kuvvetleri arasındaki ilişkiyi gösterir [5].

Akışkana ait temel denklemler kullanılarak akım fonksiyonu, ψ , ve girdaplılık, w , denklemleri elde edilir [3].

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \nabla^2 w \quad (2.1.8)$$

2.2 Difüzyon denklemi

Difüzyon için $\eta (m^2 / s)$ ile ifade edilen difüzyon katsayısı ile Fick'in kanunu uygulanır. Toplam kütle akısı ($kg/m^3.s$) difüzyon ve taşınım akılarına bağlı olarak aşağıda ifade edilir:

$$J_x = -\eta \frac{\partial C}{\partial x} + uC \quad (2.2.1)$$

$$J_y = -\eta \frac{\partial C}{\partial y} + vC \quad (2.2.2)$$

Kütlenin korunumu yasasına göre denklem şu hale getirilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (2.2.3)$$

(2.2.1) ve (2.2.2) denklemleri ile (2.2.3) denklemi birlikte değerlendirilirse aşağıdaki hale gelir [3]. Buna “Taşınım Difüzyon Denklemi” denir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = \eta \nabla^2 C \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = \eta \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]$$

Sınır koşulları aşağıdaki gibi belirlenir. Konsantrasyon sınır üzerinde Γ_c bellidir. Ayrıca cisim üzerinde Γ_j , normal doğrultusundaki difüzyon akışı bilinir:

$$C = C_B \Rightarrow \Gamma_c \quad \text{üzerinde,} \quad (2.2.5)$$

$$-\eta \frac{\partial C}{\partial n} = j_B \Rightarrow \Gamma_j \quad \text{üzerinde,} \quad (2.2.6)$$

Sınırlardan dışarıyla içerisi arasında kütle alışverişinin olmadığı düşünülürse $J_B=0$ alınır. Başlangıç koşulu olarak $C = C^0$ alınır. Bu problem için akış giriş düzleminde $C^0=1$ alınmıştır.

2.3 Konsantrasyon Denkleminin Silindirik Koordinatlarda FTCS (İZMK) Explicit Yaklaşımı İle Çözümü

Bu bölümde, akışkan yatak firmı içine yerleştirilen cismin içindeki konsantrasyon dağılımını hesaplamada kullanılan, sonlu farklar temelli sayısal yöntem kısaca anlatılmıştır[6].

Konsantrasyon denklemi,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta \nabla^2 C \quad (2.3.1)$$

Bu denklem silindirik koordinatlarda ifade edilirse,

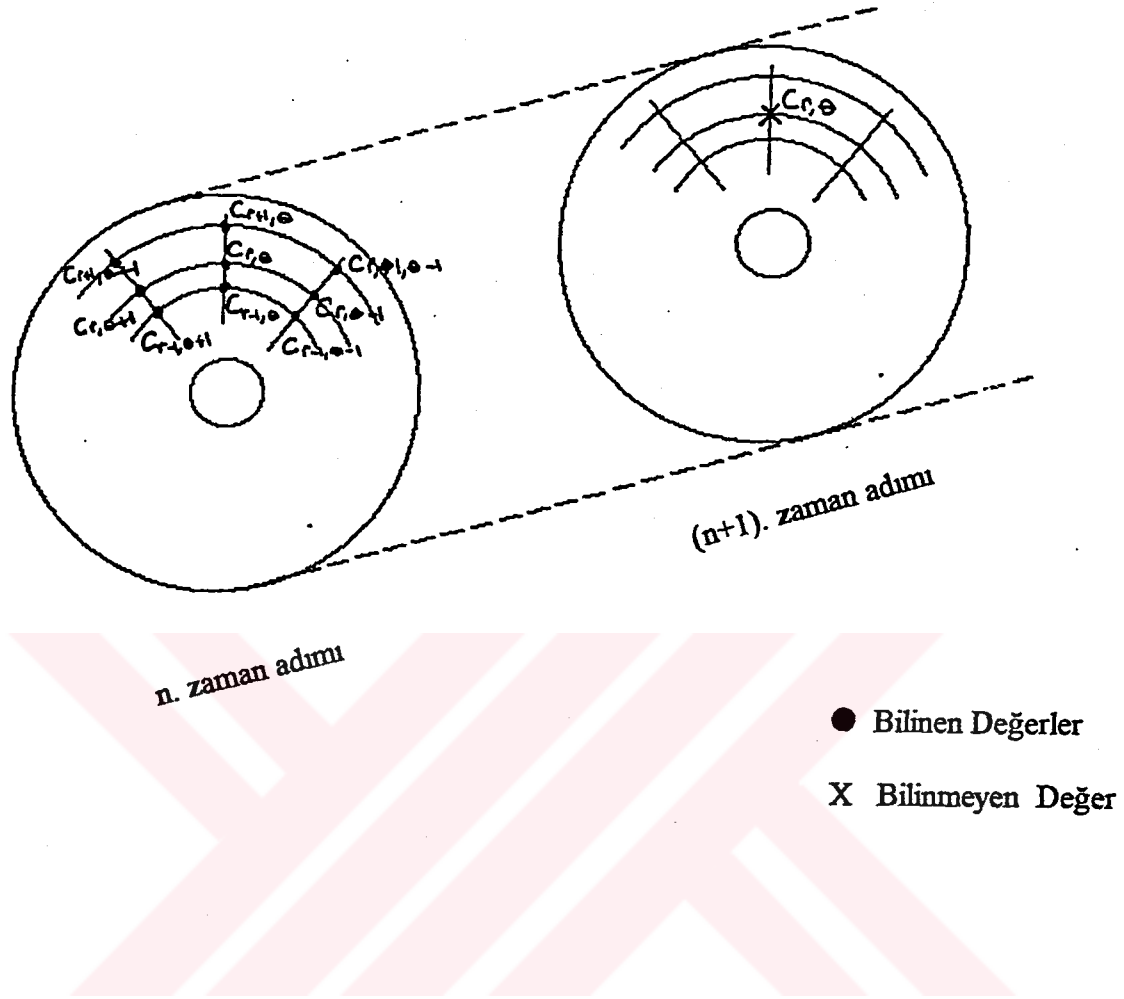
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta \left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.3.2)$$

Konsantrasyon için elde ettiğimiz denklem (2.3.2) zamana bağlı, parabolik kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemden konsantrasyon değerini elde edebilmek için bir sayısal analiz yöntemi olan “Sonlu Farklar Yöntemi” kullanılabilir.

Sonlu farklar yönteminin temeli sürekli kısmi diferansiyel görülen türevlerin, sonlu ve ayrık noktalarda yakın temsili (örneğin Taylor Serisi Yaklaşımı) üzerine kuruludur. Kısmi diferansiyel denklemlerin türevlerinin ve diğer terimlerinin, birbirlerinden sonlu farklı uzaklarla ayrılmış sonlu noktalarda ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan cebirsel denklem sistemlerinin ekonomik ve hızlı çözümü elde edilecektir.

Sonlu noktalarda ayrıklaştırılan sürekli denklemlerin çözüldüğü alan ağ yapısını oluşturur. Sonlu noktalardaki yaklaşık gösterimin derecesi arttıkça ağ noktalarındaki hatalar da azalacaktır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin zamanda ileri, konumda merkezsiz fark yöntemi ile ayrıklaştırılması yöntemine FTCS (Forward Time Central Space - İleri Zaman Merkezi Konum) Yaklaşımı denir. Bu yöntemde (n+1) zaman adımındaki bilinmeyen değerler (n) zaman adımındaki bilinen değerler kullanılarak bulunur. Bu yöntemin silindirik koordinatlarda temsili Şekil 2.1’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Sonlu Farklar Yaklaşımı.

Denklem (2.3.2)'yi Sonlu Farklar Yöntemi'nde FTCS Yaklaşımı ile ayrıklaştırsak;

$$\begin{aligned} \frac{C_{r,\theta}^{n+1} - C_{r,\theta}^n}{\Delta t} = & \eta \left[\frac{C_{r-1,\theta}^n - 2C_{r,\theta}^n + C_{r+1,\theta}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_r} \frac{C_{i+1,\theta}^n - C_{i-1,\theta}^n}{2\Delta r} \right] \\ & + \eta \left[\frac{1}{(r_r)^2} \frac{C_{i,\theta-1}^n - 2C_{i,\theta}^n + C_{i,\theta+1}^n}{(\Delta \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Denklem (2.3.3)'de n , zaman adımı; r ve θ , silindirik koordinatlardaki eksenleri; Δr ve $\Delta \theta$ ise o eksenlerdeki birim adımları temsil etmektedir. Yeni sabitler tanımlayarak denklem tekrar düzenlenirse;

$$d_1 = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta r)^2} \quad , \quad d_2 = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta \theta)^2} \quad , \quad e = \frac{D \cdot \Delta t}{2(\Delta r)}$$

buradan,

$$C_{r,\theta}^{n+1} = \left(d_1 - \frac{e}{r_r} \right) C_{r-1,\theta}^n + \left(1 - 2d_1 - \frac{2d_2}{(r_r)^2} \right) C_{r,\theta}^n + \left(d_1 + \frac{e}{r_r} \right) C_{r+1,\theta}^n + \frac{d_2}{(r_r)^2} [C_{r,\theta-1}^n + C_{r,\theta+1}^n] \quad (2.3.4)$$

Denklem (2.3.4) çözülerek, bilinen (n) zamanındaki konsantrasyon değerleri yardımıyla bilinmeyen ($n+1$) zamanındaki konsantrasyon değerleri bulunabilir. Bu çözümün kararlı olabilmesi için (2.3.4) nolu denklemde 2. parantezin sıfırdan farklı olması gerekir.

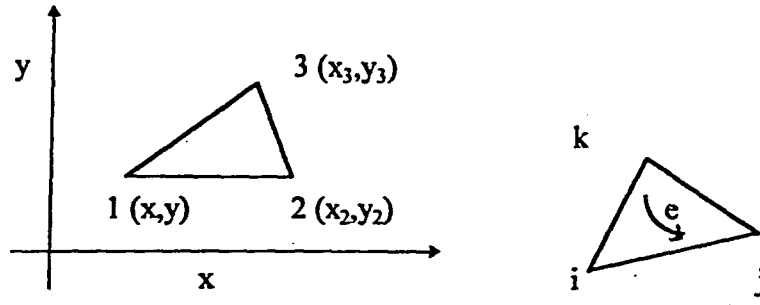
BÖLÜM 3: SONLU ELEMANLAR METODU

3.1 Ağ Oluşumu

Sayısal modellemede çözüm ağının doğru oluşumu, problemin çözümünde en önemli unsurlardan biridir. Çeşitli ağ üretme teknikleri mevcuttur. Problemin niteliğine uygun bir ağ oluşumu, çözümü daha hassas yapacağı için teknikler çok iyi değerlendirilmeli ve en uygunu seçilmelidir [7].

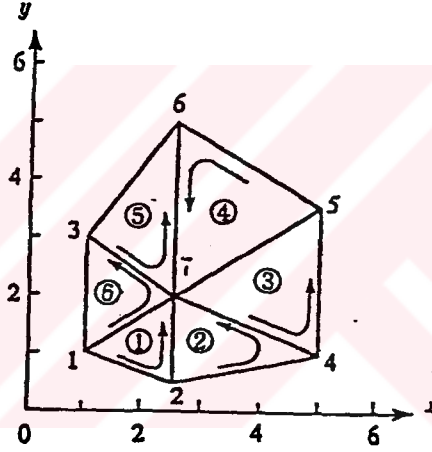
Üçgensel, quadratik dörtgenler, izoparametrik elemanlar vb. ile bir sistem kurmak mümkündür. İki boyutlu sıkıştırılmaz bir akışkan içine yerleştirilen profilde 3 nodlu üçgensel elemanlar kullanılmıştır. Bu elemanlar özellikle sınır tabakanın olduğu kısımlar boyunca sıklaştırılmıştır. Yani Şekil 3.2’de görüldüğü gibi, profil etrafında daha sık elemanlar çevreye doğru azalacak biçimde tasarlanmıştır [3]. Eleman, nod numaraları Şekil 3.1’deki teknik ile verilmiştir [8].

Ayrıca sistemin önemli unsurlarından biri; bir alan üzerinde eleman yaratırken bunun herkes tarafından kabul edilir şekilde açıklanmasıdır. Şekil 3.1’de bir koordinat sistemi üzerinden üçgensel elemanın nodlarının nasıl olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Sonlu elemanların gösterimi.

Her üç nod bir elemanı oluşturur. Aşağıdaki gibi ifade edilir:



Şekil 3.2. Sonlu elemanlardan oluşan bir sistemi

Tablo 3.1. Data giriş yöntemi

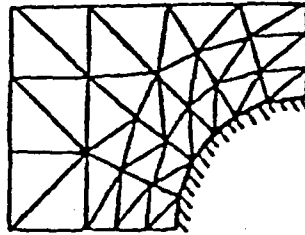
Nod No	(x,y)	Eleman No	Nodlar		
			i_1	i_2	i_3
1	(1.0,1.0)	1	1	2	7
2	(2.5,0.5)	2	2	4	7
3	(1.0,3.0)	3	7	4	5

3.2. Ağ Oluştururken Dikkat Edilecek Unsurlar

Bir alan sonlu sayıda üçgene bölünürken bazı sorunlar çıkar. Hem düz hem de eğri kenarların bulunduğu bir sistemde üçgenler arasında bazı küçük boşluklar kalır ve boşluklar programın hatalı oluşmasına aynı zamanda hesapların istenilen doğrulukta olmamasına neden olur. Bu durumun oluşmaması için şunlar önerilir [3].

- a) Malzeme özelliklerinde, sınır koşullarında ve geometrideki ani değişimlerin çerçevesinde ağ çok hassas kullanılmalıdır.
- b) Düzensiz ağ yaratmaktan kaçınılmalıdır. Ağ yaratırken geniş açılı üçgenler kullanılmamalıdır.
- c) Üçgenler birbirleriyle çakışmamalıdır.
- d) Ağ oluştururken boşluk alanları olmamalıdır.
- e) Nodlar sadece üçgenlerin köşe noktaları olmalıdır.
- f) Model bir simetriye sahipse, alan ona göre bölünür.

Uygun bir ağ örneği Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Bir ağ örneği

3.3 Katsayılar Matrisinin Oluşturulması

Toplam katsayılar matrisi şu şekilde gösterilir;

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & & & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & & \\ k_{31} & k_{32} & & & & & k_{n-3 \ n} \\ k_{41} & k_{42} & & & & & k_{n-2 \ n} \\ 0 & k_{52} & & & & & k_{n-1 \ n} \\ & & & k_{n \ n-3} & k_{n \ n-2} & k_{n \ n-1} & k_{n \ n} \end{bmatrix}$$

Bu matriste simetrik olarak köşelerin "0" olduğu ve ortada sıfırdan farklı değerlere sahip bir alanın varlığı görülür. Buna "band matris" denir. Simetrik problemlerde band matrisin üst yarısını bilmek yeterlidir. Bu şekilde matrisi tanımaya yarayan kısmın kolon sayısına "band genişliği" denir.

3.4 Sonlu Elemanlar Metodu İle Değerlendirme

Akım fonksiyonu (2.1.8), girdaplılık taşınımı denklemini ve taşınım difüzyon denklemini (2.2.4) birlikte değerlendirilir ve bunun için de "Galerkin Sonlu Elemanlar Metodu" kullanılır [3]. $\delta\psi$, δw ve δC ağırlık fonksiyonları bu işlemin sonucunda; Γ_ψ üzerinde $\delta\psi=0$; $\Gamma_w \cup \Gamma_\psi$ üzerinde $\delta w = 0$ ve Γ_c üzerinde $\delta C = 0$ değerleri hariç rastgele belirlenir. Sonlu Elemanlar Metodu uygulanmaya başlanırsa aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir;

$$\int_{\Omega} \delta\psi \nabla^2 \psi d\Omega + \int_{\Omega} \delta\psi w d\Omega = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\int_{\Omega} \delta w \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta w \nu \nabla^2 w d\Omega = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\int_{\Omega} \delta C \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta C \eta \nabla^2 C d\Omega = 0 \quad (3.4.3)$$

İntegrasyonlar aşağıdaki şekle getirilmiştir [3].

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \psi \nabla \psi d\Omega - \int_{\Omega} \delta \psi w d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.4.4)$$

$$\int_{\Omega} \delta w \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta w \nabla w d\Omega - \int_{\Gamma_x} \delta w \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.4.5)$$

$$\int_{\Omega} \delta C \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \eta \nabla \delta C \nabla C d\Omega - \int_{\Gamma_j} \delta C d\Gamma = 0 \quad (3.4.6)$$

Ω alanı, üçgensel sonlu elemanlara bölünür. Her üçgen eleman (e) 3 noddan oluşur ve lokal nod numaraları 1, 2, 3 olarak numaralandırılır. Bilinmeyen akım fonksiyonu, girdaplılık ve konsantrasyon aşağıdaki gibi integre edilirler.

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \psi_{\alpha} & , & & \delta \psi &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \delta \psi_{\alpha} , \\ w &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} w_{\alpha} & , & & \delta w &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \delta w_{\alpha} , \\ C &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} C_{\alpha} & , & & \delta C &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \delta C_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Burada toplama notasyonu $\left(\sum_{\alpha} \right)$ bütün α 'lar ($\alpha=1,2,3$) için toplamı gösterir

ve Φ_{α} lineer integrasyon fonksiyonunu verir.

$$\Phi_{\alpha} = \frac{1}{2\Delta^e} (a_{\alpha} + b_{\alpha}x + c_{\alpha}y)$$

Burada Δ^e üçgenin alanı ve $\psi_{\alpha}, w_{\alpha}, C_{\alpha}$ bilinmeyen nodal değerler ve $\delta \psi_{\alpha}, \delta w_{\alpha}, \delta C_{\alpha}$ rastgele nodal değişimlerdir.

(3.4.7)'deki değerler (3.4.4), (3.4.5) ve (3.4.6) da yerine konur. Bunun sonucunda ψ , w , C ve rastgele seçilen $\delta\psi_\alpha, \delta w_\alpha$ ve δC_α değerlerine bağlı olarak aşağıda gösterilen bir eleman için denklemler elde edilir [3].

$$\sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta}^e \psi_\beta - \sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta}^e w_\beta - \Gamma_{s\alpha}^e = 0 \quad (3.4.8)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta}^e w_\beta + \sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta}^e w_\beta + \sqrt{\sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta}^e w_\beta} + G_{s\alpha}^e(C) - \Gamma_{s\alpha}^e = 0 \quad (3.4.9)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta}^e C_\beta + \sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta}^e C_\beta + \eta \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta}^e C_\beta + \Gamma_{j\alpha}^e = 0 \quad (\alpha=1,2,3) \quad (3.4.10)$$

Katsayılar ise şunlardır:

$$M_{\alpha\beta}^e = \int_e \phi_\alpha \phi_\beta d\Omega = \frac{\Delta^e}{12} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.4.11)$$

$$D_{\alpha\beta}^e = \int_e \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial y} \right) d\Omega = \frac{1}{4\Delta^e} (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta) \quad (3.4.12)$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^e &= \int_e \phi_\alpha \left(\sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial y} \phi_\gamma \frac{\phi_\beta}{\partial x} - \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x} \phi_\gamma \frac{\partial \phi_\beta}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{12\Delta^e} \sum_{\gamma=1}^3 (c_\gamma b_\beta - b_\gamma c_\beta) \phi_\gamma, \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

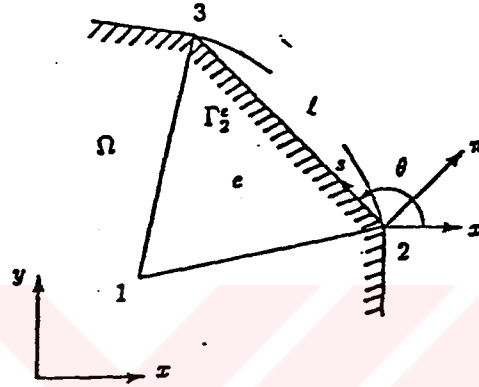
$$G_\alpha^e = g_\alpha \int_e \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\gamma=1}^3 \phi_\gamma C_\gamma \right) d\Omega = \frac{g_\beta}{6} \sum_{\gamma=1}^3 b_\gamma C_\gamma \quad (3.4.14)$$

$$\Gamma_{s\alpha}^e = \int_{\Gamma_s^e} \phi_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = -\frac{V_s}{2} \left| \Gamma_s^e \right| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

$$\Gamma_{z\alpha}^e = \int_{\Gamma_z^e} v \phi_\alpha \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = -\frac{v \chi_n}{2} \left| \Gamma_z^e \right| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

$$\Gamma_{j\alpha}^e = \int_{\Gamma_j^e} \phi_\alpha J_B d\Gamma = \frac{j_B}{2} \left[\Gamma_j^e \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

$$\Gamma_j^e = \Gamma_j U \partial e \quad \text{alınır.}$$



Şekil 3.4. Herhangi bir sınıra komşu sonlu eleman

Bütün elemanların üzerindeki bu değerler birleştirilerek alan üzerinde toplam denklem elde edilir.

$$[D]\{\psi\} - [M]\{w\} - \{\Gamma_s\} = \{0\} \quad (3.4.19)$$

$$[M]\{\dot{w}\} + [A(\psi)]\{w\} + \nu[D]\{w\} + \{G(C)\} - \{\Gamma_z\} = \{0\} \quad (3.4.20)$$

$$[M]\{\dot{C}\} + [A(\psi)]\{C\} + \eta[D]\{C\} + \{\Gamma_f\} = \{0\} \quad (3.4.21)$$

Oluşturulan denklemlerde $[D]$, $[M]$, $[A]$ toplam matrisleri $[G]$ bünye denkleminde karşılık gelen terimi ve $\{\psi\}$, $\{w\}$, $\{C\}$ nodların bilinmeyen kolon vektörlerini, diğer kolonlar ise sınır değerlerini gösterir. Son durumda istenen birinci dereceden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerinin ((3.4.19), (3.4.20), (3.4.21)) $\{\psi\}$, $\{w\}$ ve $\{C\}$ bilinmeyenlerine göre çözümüdür [3].

BÖLÜM 4: BİLGİSAYAR PROGRAMI

4.1. Algoritmaların Oluşturulması

Toplam denklemlerin zaman boyunca değerlendirildiği düşünülür. Sonlu farklar yaklaşımında konsantrasyonun ve nodal hızların zamana bağlı türevleri aşağıdadır [8].

$$\dot{w}_\beta = \frac{dw_\beta}{dt} \approx \frac{w_\beta^{n+1} - w_\beta^n}{\Delta t} \quad (4.1.1)$$

$$\dot{C}_\beta = \frac{dC_\beta}{dt} \approx \frac{C_\beta^{n+1} - C_\beta^n}{\Delta t} \quad (4.1.2)$$

Burada w_β^n ve C_β^n nodal hız ve konsantrasyonların t_n zamanında gösterimidir. $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 'dir ($n= 0, 1, 2, \dots$). Δt , zamanda ne kadar artım olduğunu gösterir. (4.1.1) ve (4.1.2) yaklaşımlarını, t_{n+1} 'de (3.4.19), (3.4.20), ve (3.4.21) denklemlerinin türevi olarak düşünmek mümkündür. Bunun sonucu aşağıda gösterilmiştir.

$$[D]\{\psi^{n+1}\} = [M]\{w^n\} + \{\Gamma_s\} \quad (4.1.3)$$

$$\frac{1}{\Delta t}[M]\{w^{n+1}\} + v[D]\{w^{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t}[M]\{w^n\} - \quad (4.1.4)$$

$$[A]\{\psi^{n+1}\}\{w^n\} - \{G(C^n)\} + \{\Gamma_z^{n+1}\}$$

$$\frac{1}{\Delta t}[M]\{C^{n+1}\} + \eta[D]\{C^{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t}[M]\{C^n\} - \quad (4.1.5)$$

$$[A]\{\psi^{n+1}\}\{C^n\} - \{\Gamma_f^{n+1}\}$$

Temel algoritma prosedürü aşağıdaki gibidir:

- * Topolojik dataları oku
- * Malzemelerin sabitlerini ve sınır koşullarını oku
- * Başlangıç değerlerini gir
- * $n = 0, 1, 2, \dots$, oluşturulan değere göre döngü meydana getir

Hesapla (y^{n+1})

Γ_w üzerinde w duvar sınır değerlerini koy

Hesapla (w^{n+1})

Hesapla (C^{n+1})

Algoritma integrasyon sınırı (n) için özel bir durma yaratıncaya kadar sonlanmaz. Bunun için akım boyunca n değeri $N = (t_f - t_0) / \Delta t$ 'ye gider. Burada t_f sonlanma zamanıdır. Diğer bir deyişle integrasyon akım tam gelişmiş bir hal almaya kadar hesaplanmaya devam eder.

Kullanılan denklemleri boyutsuzlaştırırsak, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$C^* = \frac{C - C^0}{\Delta C} \quad (4.1.5)$$

$$\nabla^{*2} \psi^* = -w^* \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} w^* \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial C^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re Sc} \nabla^{*2} C^* \quad (4.1.8)$$

Burada $Sc = \nu / \eta$ ve

$Re = U_\infty D / \nu$ 'dir.

Tablo 4.1. u ve v hızlarını çözen program parçası.

1	DATA GİR
2	TOPLAM MATRİSLERİ HESAPLA TÛM ELEMANLARIÇIN TAMAMLANDIĞINI GÖR HAYIR İSE 1'E GİT
3	SINIR KOŞULLARINI HESABA KAT
4	U VE V HIZLARINI HESAPLA
5	NAVİER-STOKES DENKLEMİNİ ÇÖZ
6	BİTİR

Tablo 4.2. Modelleme

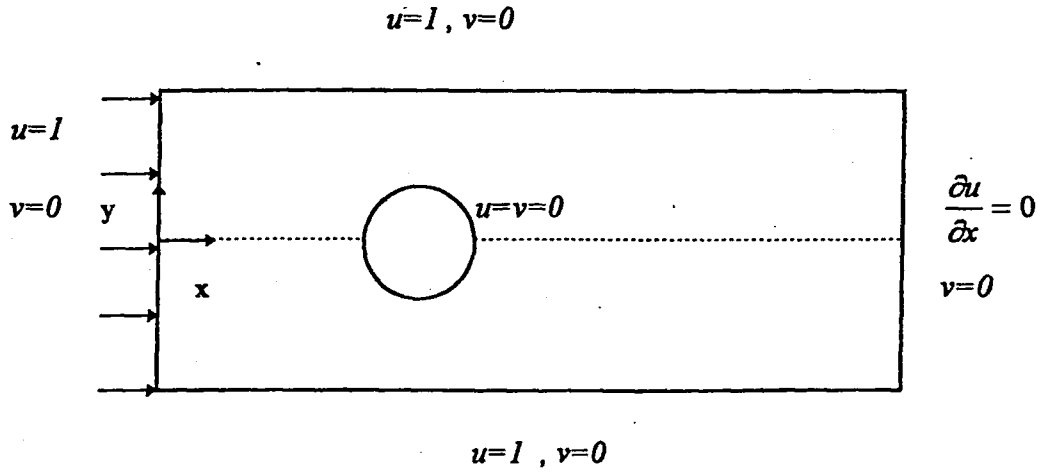
1	MODELİ OLUŞTUR
2	MODELİ ÇÖZ
3	SONUCUN UYGUNLUĞUNU KONTROL ET
4	EVET İSE 5' E GİT, HAYIR İSE 2'YE GİT
5	BİTİR

BÖLÜM 5:PROBLEM TANIMI VE ÇÖZÜM AŞAMALARI

5.1 Problemin Tanımı

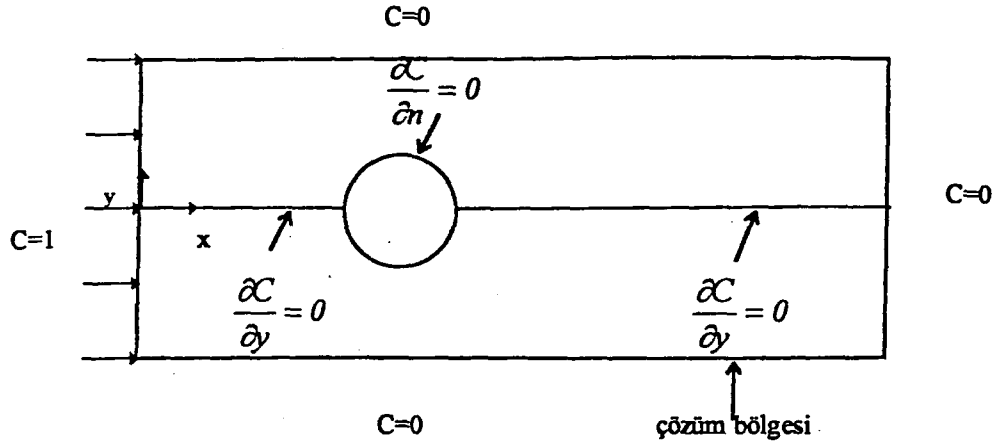
Yapılmak istenen, akışkan yatak firmı içine yerleştirilen silindir ve kanat profili üzerinde akım çizgileri ve girdaplılığının gösterilmesi ve bu cisimler üzerindeki konsantrasyonların hesaplanmasıdır.

Öncelikle her taraftan izole edilmiş bir akışkan yatak firmı düşünülür ve bunun içine istenen cisim yerleştirilir. Problemin ilk kısmı için cismin izole edildiği kabulü yapılmıştır. Bir metal ile zenginleştirilmiş akışkanlaştırıcı gaz firmının bir yüzünden içeri gönderilir. Parçaçıkların çok küçük olmasının gerçek bir akışkan ortamını sağlayacağı varsayımı ile hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Yani akışkan ortam klasik bir akış alanı gibi düşünülmüştür. Hız alanı ve sınır koşulları Şekil 5.1’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. Hız alanı için sınır koşulları.

Şekil 5.2’de ise konsantrasyon sınır koşulları gösterilmiştir.



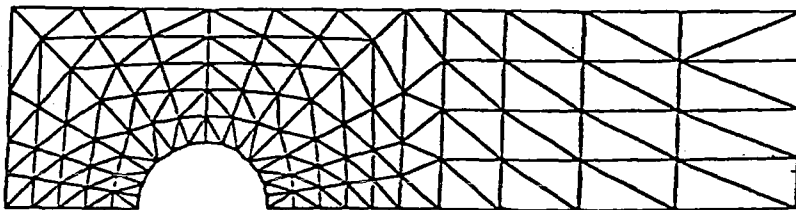
Şekil 5.2. Konsantrasyon için sınır koşulları.

Yapılan kabuller şunlardır:

- * Cisimler simetrik kabul edilmiştir.
- * Model boyunca tam gelişmiş bir akış için cisim üzerindeki konsantrasyonun zamana bağlı değişimi daha sonra incelenmiştir.

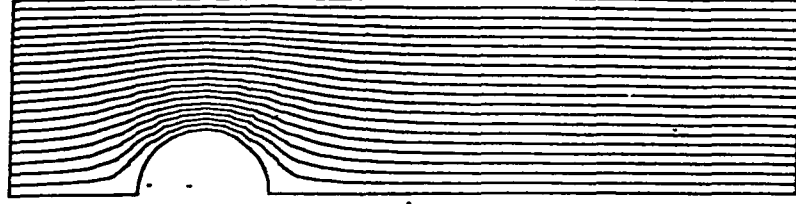
Tüm bu aşamalarda kullanılan sonlu elemanlar metodu için oluşturulan ağ yapısı 115 nokta ve bunların oluşturduğu 180 elementten meydana gelir. Yarı silindir için daha önce hazırlanmış bulunan ağ yapısı kullanılmıştır [3]. Bu ağ yapısı Kutta-Joukowski dönüşümü uygulanarak kanat profiline dönüştürülmüştür. Model için NACA0015 profili kullanılmıştır.

Silindir için ağ yapısı Şekil 5.3.’de gösterilmiştir.



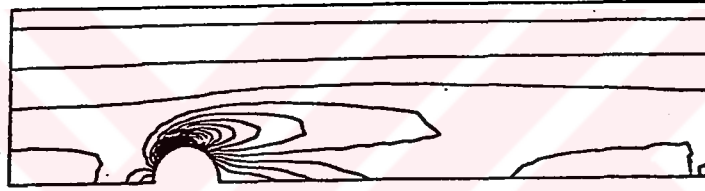
Şekil 5.3. Ağ yapısı

Cisim etrafında oluşacak şematik akım çizgileri ve girdaplılık çizgileri aşağıda gösterilmektedir.



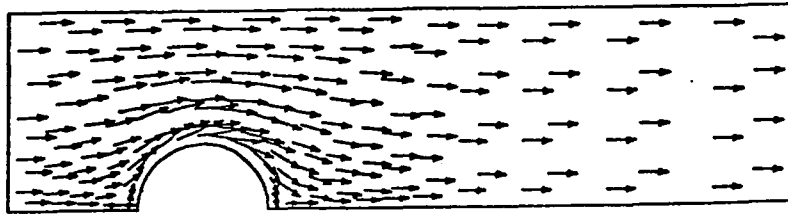
$Re=100$

Şekil 5.4. Akım çizgileri



$Re=100$

Şekil 5.5. Girdaplılık çizgileri



$Re=100$

Şekil 5.6. Hız vektörleri.

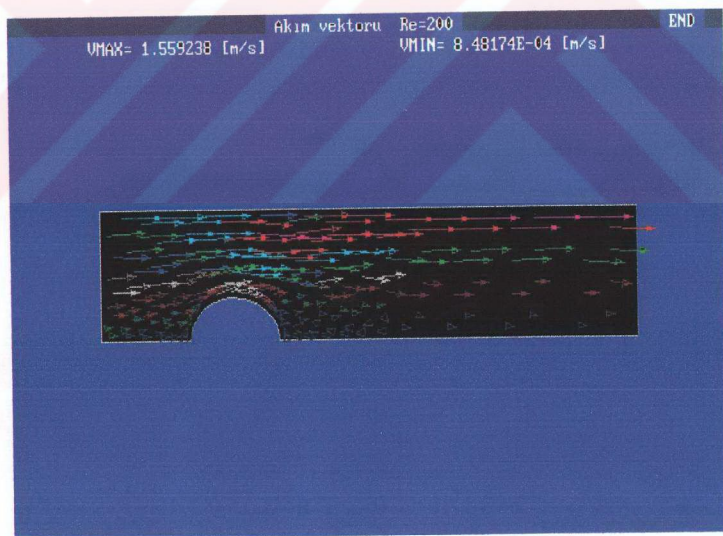
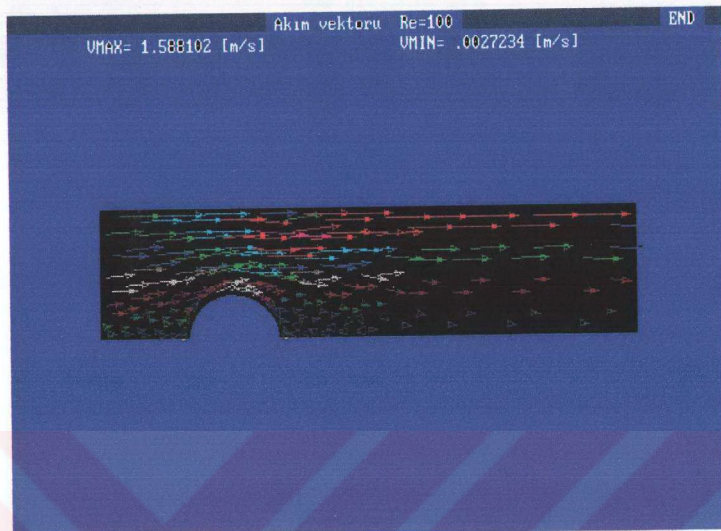
5.2 Silindir Etrafında Hesaplanan Değerler

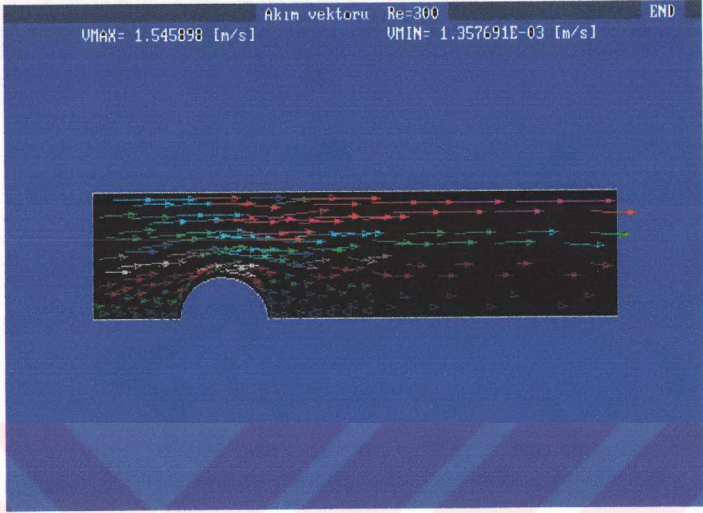
İlk olarak, akışkan yatak fırını içine yerleştirildiği düşünülen silindir etrafında hız vektörü, akım fonksiyonu ve girdaplılık çizgileri hesaplanır. Bunlar akım tam gelişmiş haldeyken hesaplanmıştır.

5.2.1 Silindir Etrafındaki Hız Vektörleri

Akışkan yatak fırını içine yerleştirildiği düşünülen silindir üzerinde ve akış alanı içinde hız vektörleri oluşur. Program önce $Re=100$ ($Re=U_{\infty}D / \nu$) için çalıştırılmıştır. Daha sonra $Re=200$ ve $Re=300$ sayıları için de ayrı ayrı oluşturulmuştur. Cisim etrafında değişkenlik gösteren hız vektörleri cisimden uzaklaştıkça daha düzenli hale gelmektedir. Sınırlarda $u=1$ ve $v=0$ değerlerine sahiptir. Cismin üzerinde $u=0$ ve $v=0$ 'dır.

Reynolds sayısı değiştikçe hız vektörleri de değişmektedir. Maksimum hızın Re sayısına bağlı olarak azaldığı görülmektedir. Silindir etrafındaki hız vektörleri aşağıda gösterilmiştir:



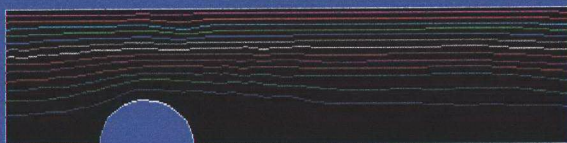


Şekil 5.7. Silindir etrafındaki hız vektörleri

5.2.2 Akım Fonksiyonları

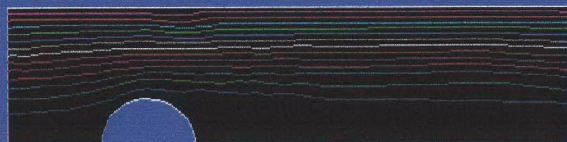
Akışkan yatak firmı içine yerleştirildiği kabul edilen silindir üzerinde, $Re=100$ için bilgisayar programı çalıştırılarak akım fonksiyonları elde edilir. $Re=200$ ve $Re=300$ için de akım fonksiyonları oluşturulur. Maksimum değeri sabit kalırken minimum değerin Re sayısına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Cismin fırar kenarı civarında akım çizgisi çizim programının yetersizliği nedeniyle elde edilememiştir. Her üç Reynold sayısı akım fonksiyonları aşağıda gösterilmiştir.

(1) Akın fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 4 MIN=-9.840168E-03

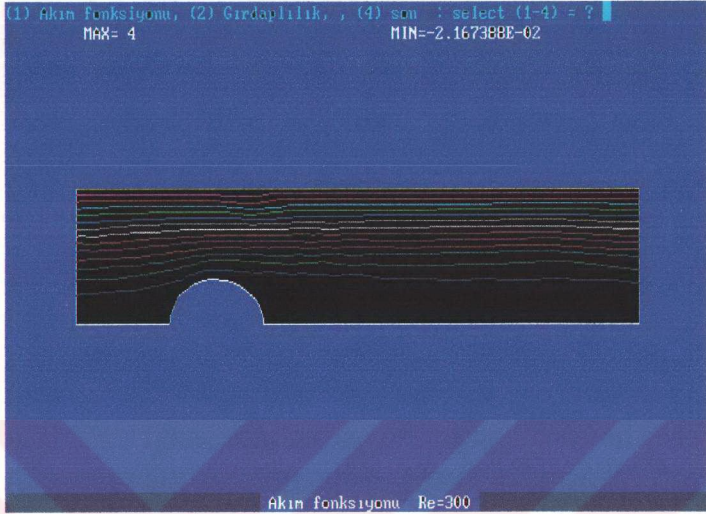


Akın fonksiyonu Re=100

(1) Akın fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 4 MIN=-1.971316E-02



Akın fonksiyonu Re=200



Şekil 5.8. Silindir etrafındaki akın fonksiyonu

5.2.3 Girdaplılık

Akışkan yatak fırını içine yerleştirilen silindirin etrafında, $Re=100$, $Re=200$ ve $Re=300$ sayıları için girdaplılık çizgileri, bilgisayar programı ile oluşturulmuştur. Girdaplılık çizgileri Reynold sayısına bağlı olarak değişmektedir. Re sayısı artarken maksimum girdaplılık artmakta ve minimum girdaplılık azalmaktadır. Görüldüğü gibi cismin üzerinde bir alanda yoğun bir girdaplılık oluşmuştur. Bu alan da Re sayısı ile değişmektedir. Her üç Re sayıları için meydana gelen girdaplılık çizgileri aşağıda gösterilmiştir.

(1) Akın Fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= .1596 MIN=-2.988947

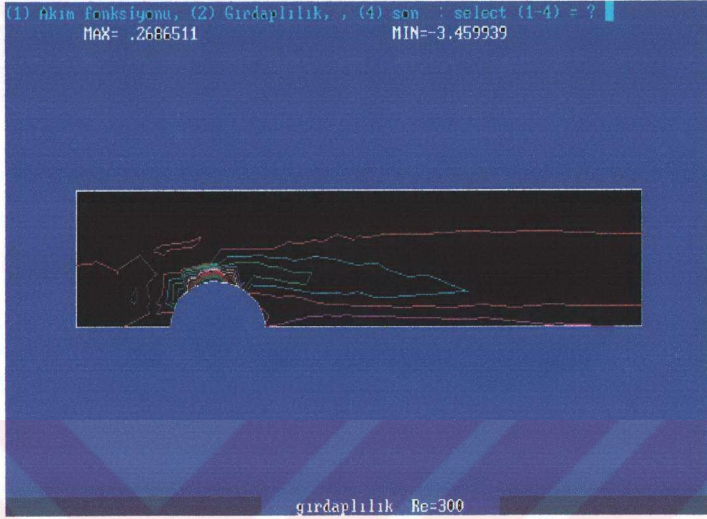


girdaplılık Re=100

(1) Akın Fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= .2424613 MIN=-3.313348



girdaplılık Re=200



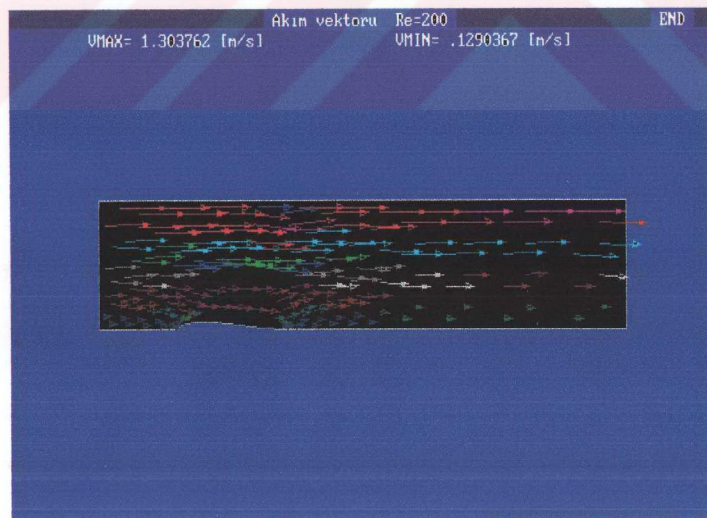
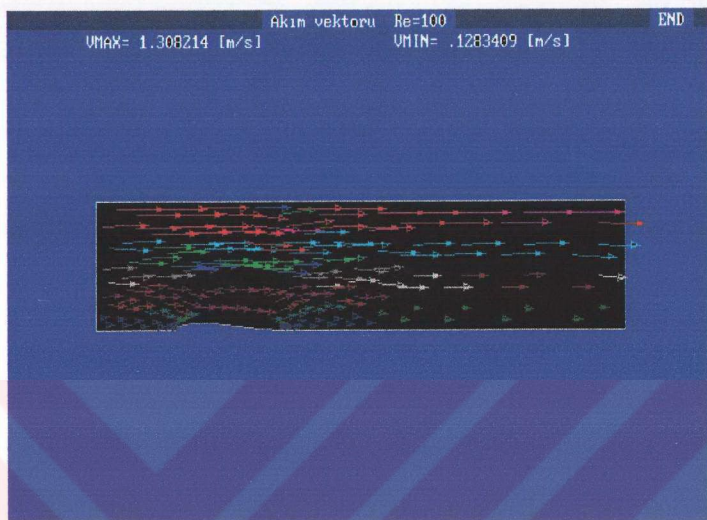
Şekil 5.9. Silindir etrafındaki girdaplılık

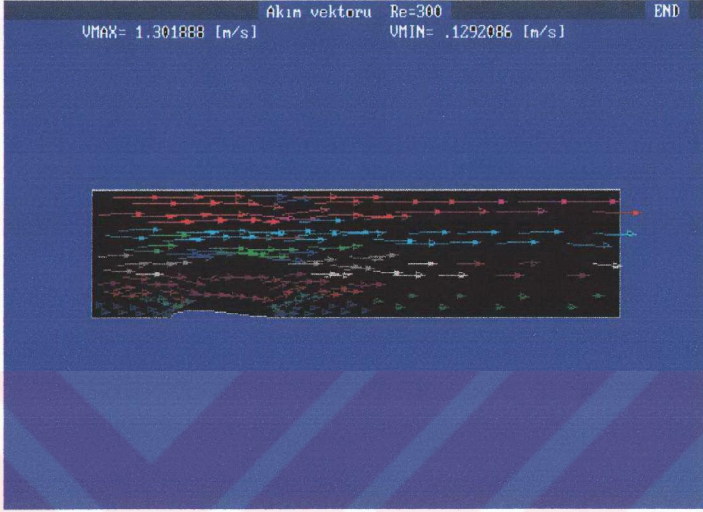
5.3 Kanat Profili Etrafında Hesaplanan Değerler

Akışkan yatak içine yerleştirilen silindir ile kanat profilini karşılaştırabilmek için, kanat profili için de $Re=100$, $Re=200$ ve $Re=300$ sayılarında hız vektörü, akım fonksiyonu ve girdaplılık çizgileri bilgisayar programı ile oluşturulmuştur.

5.3.1 Hız Vektörleri

Kanat profili etrafında, Re sayıları için hesaplanan hız vektörlerinin maksimum değeri silindire göre düşmüş, minimum değeri ise artmıştır. Her üç Reynolds sayısı için hız vektörleri aşağıda gösterilmiştir:



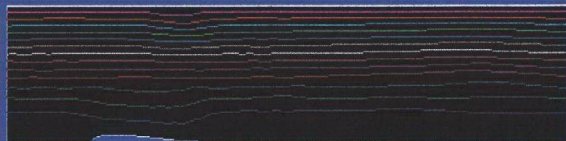


Şekil 5.10. Profil etrafındaki hız vektörü

5.3.2 Akım Fonksiyonu

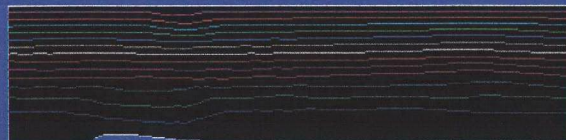
Akışkan yatak fırını içine yerleştirilen kanat profili üzerinde ve akış alanı içersinde, $Re=100$, $Re=200$ ve $Re=300$ sayıları için akım fonksiyonu hesaplanmıştır. Silindir, kanat profiline Kutta-Joukowski dönüşümü kullanılarak çevrilmiştir. NACA0015 profiline uygun olan cisim etrafında maksimum ve minimum değerler sabit kalmıştır. Profil, silindire göre akım çizgilerini daha fazla bozmuştur. Her üç Re sayısı için akım fonksiyonları aşağıda gösterilmiştir:

(1) Akım fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 4 MIN= 0

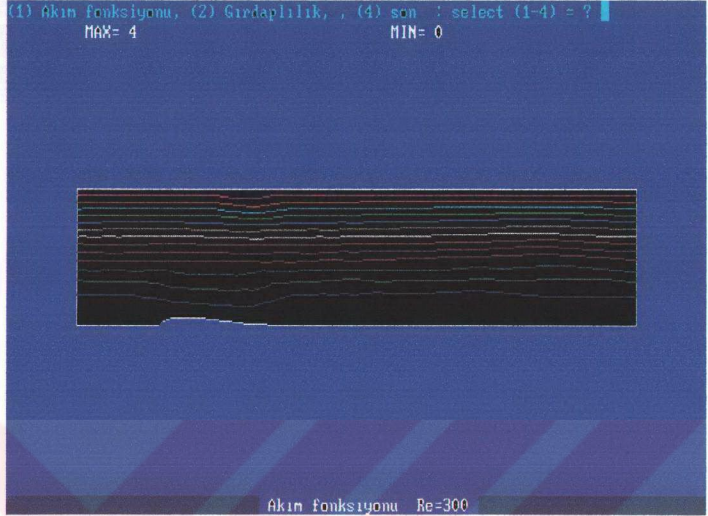


Akım fonksiyonu Re=100

(1) Akım fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 4 MIN= 0



Akım fonksiyonu Re=200

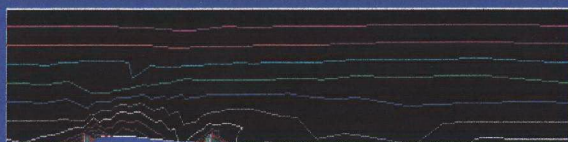


Şekil 5.11.Profil etrafındaki akım fonksiyonu

5.3.3 Girdaplılık

Akışkan yatak fırını içine yerleştirilen kanat profili üzerinde ve akış alanı içinde, $Re=100$, $Re=200$ ve $Re=300$ sayıları için girdaplılık değerleri hesaplanmıştır. Silindirden farklı olarak, hücum ve firar kenarlarında daha yoğun bir girdaplılık oluşmuştur. maksimum girdaplılık sabit kalırken minimum girdaplılık Reynold sayısına bağlı olarak azalmaktadır. Her üç Re sayısı için girdaplılık değerleri aşağıda gösterilmiştir:

(1) Akın Fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 0 MIN=-.9333175

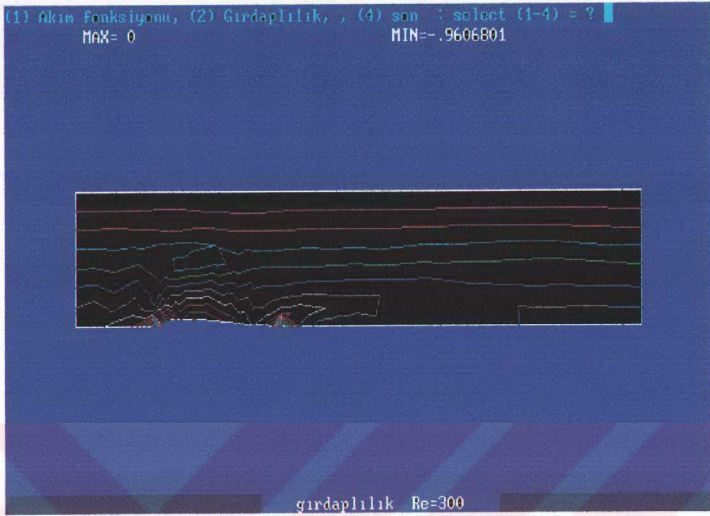


girdaplılık Re=100

(1) Akın Fonksiyonu, (2) Girdaplılık, , (4) son : select (1-4) = ?
MAX= 0 MIN=-.9511939



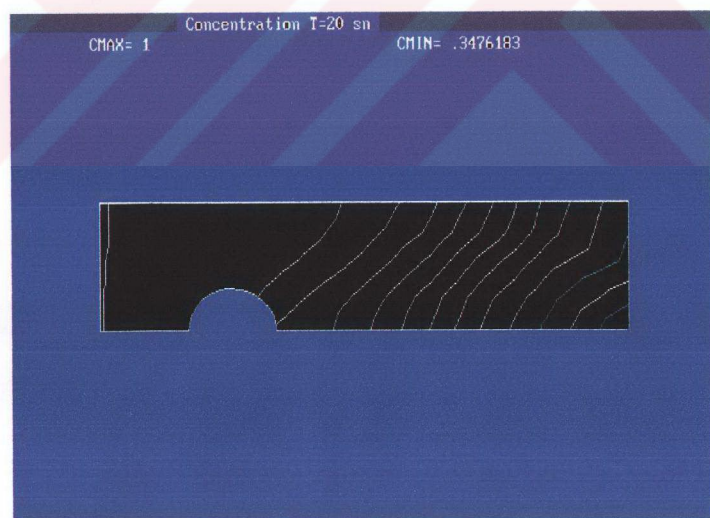
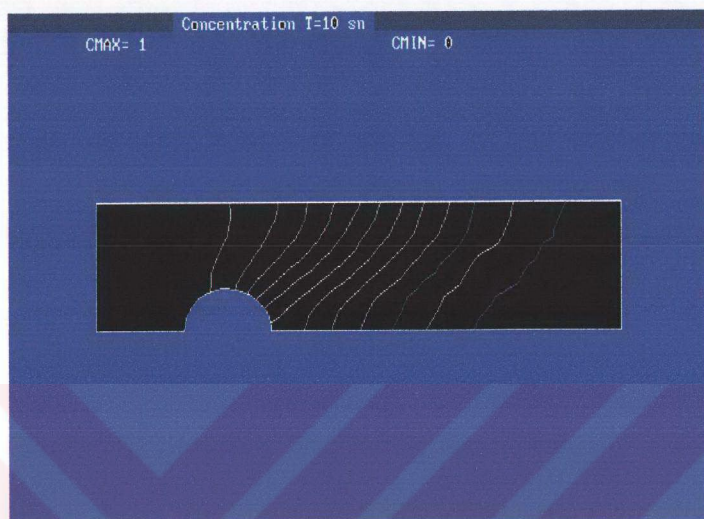
girdaplılık Re=200

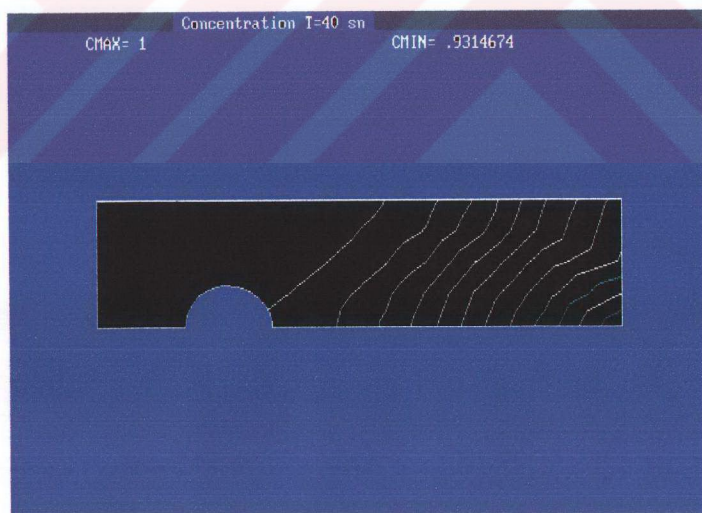


Şekil 5.12.Profil etrafındaki girdaplılık

5.4. Silindir ve Profil etrafında konsantrasyon

Akışkan yatak fırını içine yerleştirilen her iki cisim için oluşan konsantrasyon dağılımları aşağıda gösterilmiştir. Bu dağılım, tam gelişmiş akış halinde her 10 sn için hesaplanır. Sınırdaki konsantrasyonun değeri bir kabul edilmiştir. Zaman içinde konsantrasyon yatağın her yerinde bir değerine çok yaklaşmaktadır. İlk 10 saniye içinde konsantrasyon silindirin üzerine gelir. Bu durumda minimum konsantrasyon sıfırdır. Zaman ilerledikçe minimum konsantrasyon değeri artar. 30. saniyede konsantrasyon dalgaları cisimi geçmek üzeredir. $Re=100$ için 44.4 saniye sonra silindirin fırdan kenarından akım uzaklaşır. Bu adımlarda konsantrasyonun dağılımı Şekil 5.13’de gösterilmiştir.

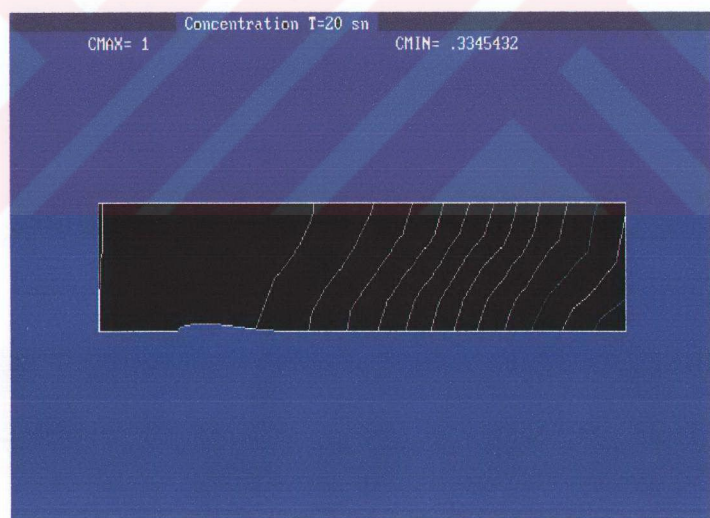
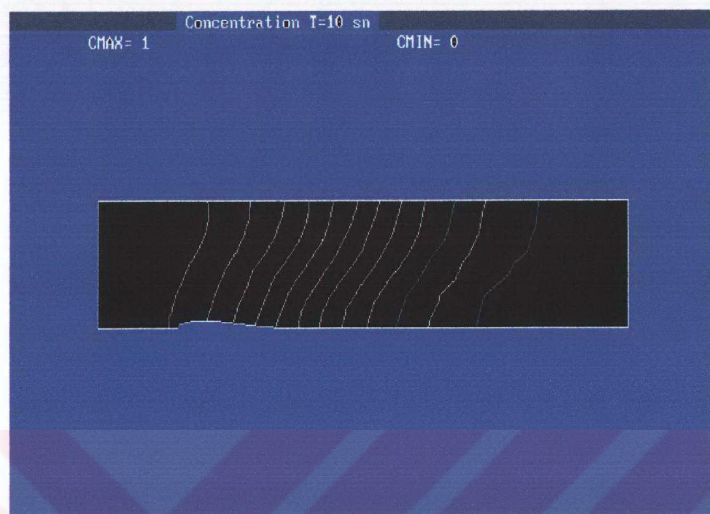


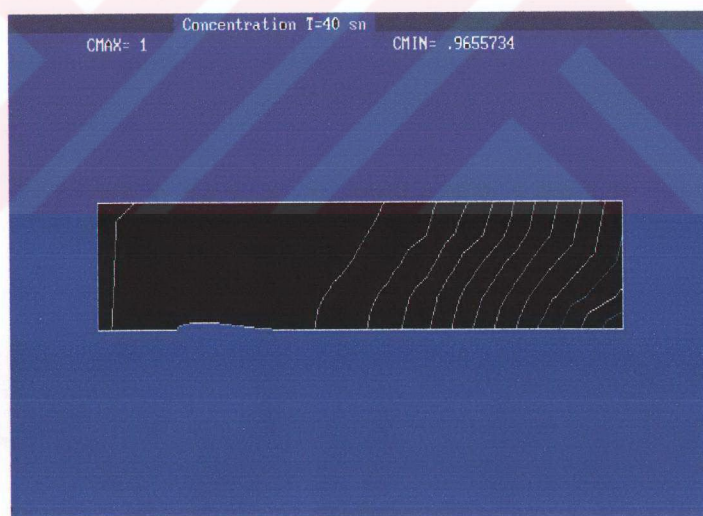
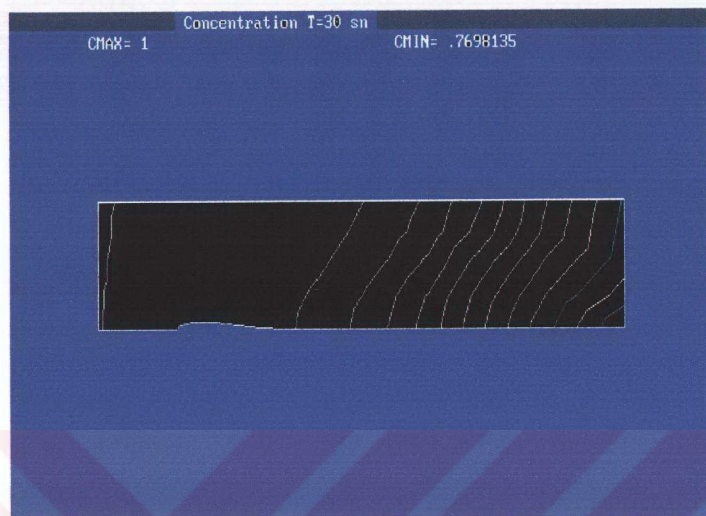


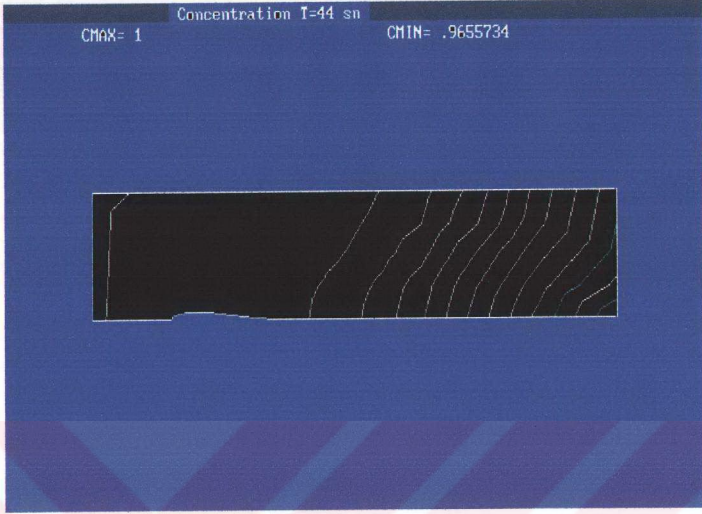


Şekil 5.13. Silindir etrafındaki zamana bağlı konsantrasyon dağılımı

Akışkan yatak fırını içine yerleştirilen kanat profili için de konsantrasyon dağılımları Şekil 5.14’de gösterilmiştir. Konsantrasyon 10 saniye içinde kanat profili üzerine gelmiştir. 20. saniyede profilin firar kenarındadır. Son durumda (44 sn sonra), profili bütünüyle geçmiştir. Minimum konsantrasyon zamanla artmaktadır. 44 saniye sonra maksimum ile minimum konsantrasyon değerleri birbirine yaklaşmaktadır.



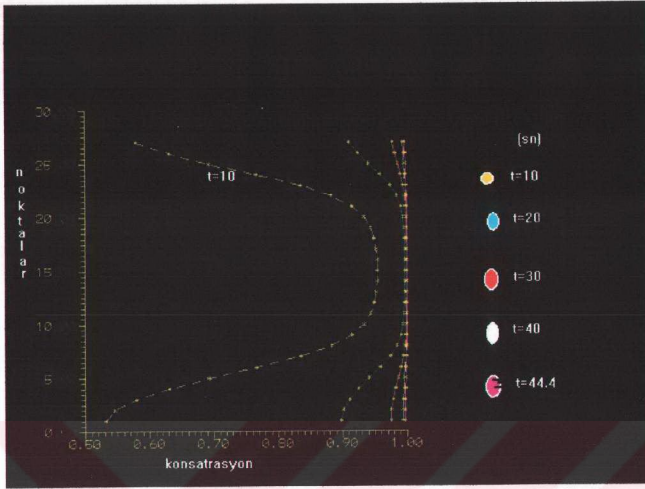




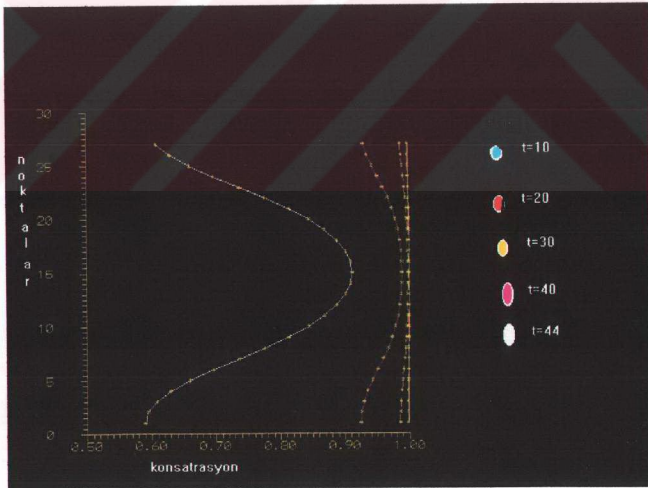
Şekil 5.14. Profil etrafındaki zamana bağlı konsantrasyon dağılımı

5.5 Konsantrasyon Dağılımlarının Grafikle Gösterimi

Bu dağılımlar grafik haline getirilip karşılaştırıldığında, 10. saniyede silindir etrafındaki 10-20. noktalar arasında en yüksek konsantrasyona ulaşırken, profil 15. noktada en yüksek değere ulaşmıştır. 20. saniyede silindirin firar kenarındaki konsantrasyon profilin firar kenarındakinden daha düşüktür. 40 ve 44. saniyelerde silindir ve profil için birbirine çok yakın değerler elde edilmiştir. Grafik 5.1. ve Grafik 5.2.'de bunlar gösterilmiştir.



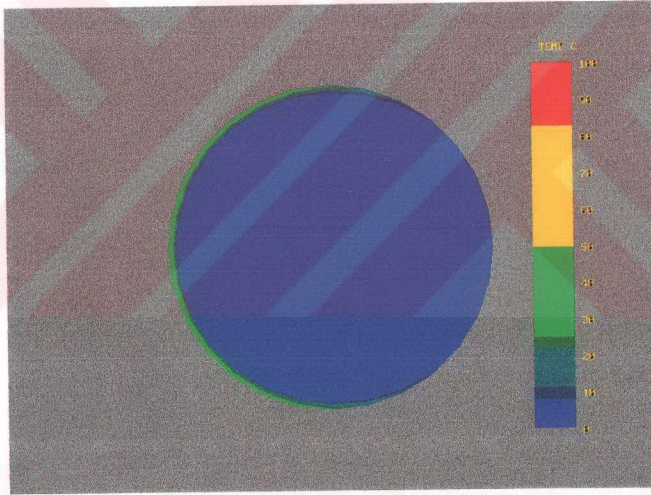
Grafik 5.1. Silindir etrafındaki konsantrasyon dağılımı ($Re=100$)



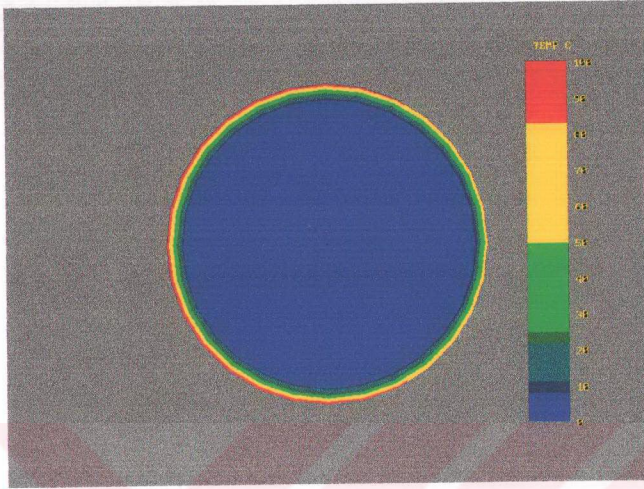
Grafik 5.2. Profil etrafındaki konsantrasyon dağılımı ($Re=100$)

5.6 Silindir cisim içindeki konsantrasyon dağılımı

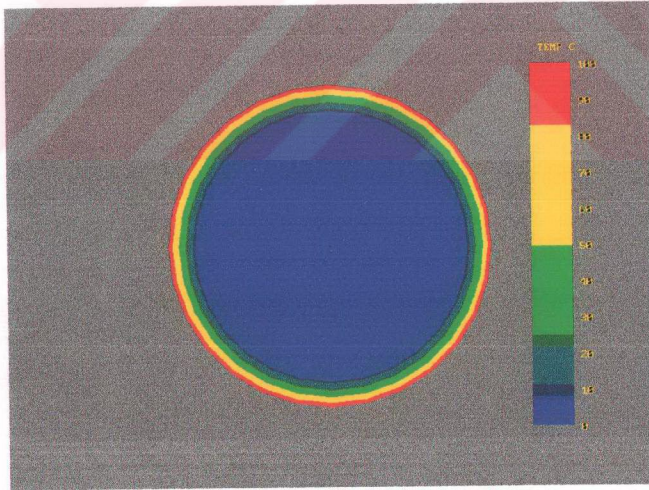
Başta silindirin yüzeyinden madde alışverişi olmadığı kabul edilmiştir. Bir sonraki adım olarak silindir üzerinde hesaplanan konsantrasyon değerlerinin zamanla silindirin içine maddenin difüzyon miktarı hesaplanmıştır. Ancak, çok kaba bir yaklaşım ile, belirli zaman aralıklarında konsantrasyonun sabit kaldığı varsayımı ve bu konsantrasyon altında cismin içine difüzyon olduğu kabul edilmiş ve bu yüzey değerler ile cismin içindeki konsantrasyon dağılımı ($t=0$ da, $C=0$ dır) hesaplanmıştır. Bu sırada hala yüzey konsantrasyonunun sabit kaldığı varsayılmıştır. Bir sonraki adımda konsantrasyon dağılımı aynı yolla cisim içine etkilemektedir. Tüm hesaplar tam gelişmiş akış halinde gerçekleştirilmiştir.



Şekil 5.15. $t=1.8$ için konsantrasyon dağılımı.



Şekil 5.16. $t=10.2$ sn için konsantrasyon dağılımı.



Şekil 5.17. $t=27$ sn için konsantrasyon dağılımı.

5.7 Sonuç

Tez boyunca düşünülen sistemin teorik alt yapısı kurulmuştur. Giriş bölümünde de ifade edildiği gibi akışkan yataklı sistemler endüstride önemli bir uygulama alanı bulmuştur. Ancak yapılan araştırmalar deneysel verilerle yeterli ölçüde desteklenememiştir. Bu çalışmada; sonlu elemanlar yöntemi temelli bir bilgisayar programı, silindir ve kanat profili etrafında karşılaştırmalı olarak çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar karbür kaplama tekniği için umut verici olmuştur.

Fakat bu çalışmayı yapanın tez hazırlığı süresince yaşadığı temel zorluk, endüstride ki pratik uygulaması ile teorik çalışmaların karşılaştırılması üzerine araştırmaların yeterli olmamasıdır. Bu konuda sanayi kuruluşları ve üniversitelerin ortak bir çalışma yapmasının faydalı olacağı düşünülmektedir. Pratik sonuçlarla teorik verilerin karşılaştırılması gelişim hızını artıracaktır.

KAYNAKLAR :

[1] 3T Şirketi ile özel görüşme, Avcılar, İstanbul

[2] Onaran, K.,Malzeme Bilimi Ders Notları, İ.T.Ü.,(1983)

[3] Onishi,K., Ninomiya, H.,Flow Analysis Using PC, Boston,(1991)

[4] Welty, J. R., Wicks, C. E.,Wilson,R. E.,Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer, (1984)

[5] Panton,R. L.,Incompressible Flow, John Wiley & Sons,U.S.A.,(1984)

[6] Kaykayoğlu, C.,R., CFD Yaz Okulu Notları, Y.T.Ü., İstanbul,(1994)

[7] Pepper, D.W.,Heinrich, J.C.,The Finite Elements Method Basic Concepts and Applications, Taylor & Francis,U.S.A.,(1982)

[8] Wearver, Jr. W., Johnston, P. R.,Finite Elements for Structural Analysis, Prentice-Hall, (1984)

ÖZGEÇMİŞ:

1968 yılında Antalya’da doğmuştur. İlkokulu Ankara ve Denizli’nin Acıpayam ilçesinde okumuştur. Aynı ilçede ortaokul ve liseyi de tamamlamıştır. 1985 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Teknolojisi Fakültesi, Uçak Mühendisliği Bölümü’nde öğrenime başlamıştır. 1991 yılında uçak mühendisi olarak mezun olmuş ve aynı yıl Uzay Bilimleri ve Teknolojisi Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başlamıştır. Lisans tezi olarak kompozit malzemelerin mukavemet deneyleri üzerine çalışmıştır. Hazırlanan tez yüksek lisans bitirme tezidir.