

2195

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ İNŞAAT FAKÜLTESİ

BURKULMA YÜKÜNÜ EN BÜYÜK YAPAN MALZEME YAYILIŞI

İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesince
«Doktor»
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdır.

Y. Müh. Sumru PALA

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 15 Kasım 1977
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Şubat 1978

Doktorayı Yöneten Profesör : Prof. Adnan ÇAKIROĞLU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Enver ÇETMELİ
Prof. Dr. Fikret KESKİNEL

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜH.-MİM FAKÜLTESİ MATBAASI
1978

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Çalışmalarımın her aşamasında sürekli ilgi ve değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Adnan Çakıroğlu'na teşekkürü borç bilirim.

Çalışmalarım süresince sürekli teşviklerini gördüğüm Sayın Prof.Dr.Fikret Keskinel'e, ilgi ve yardımları nedeni ile İTÜ Elektronik Hesap Bilimleri Enstitüsünün değerli yönetici ve personeline, tezi büyük bir sabır ve titizlikle daktilo eden Bn. Güngör Gür'e şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
SUMMARY	III
1- GİRİŞ	1
1.1- Konu	1
1.2- Konu ile İlgili Çalışmalara Toplu Bakış	2
1.2.1- Yapı Sistemlerinin Optimizasyonu İçin Genel Yöntemler	2
1.2.2- Burkulma Yükleri İçin Yapı Sistemlerinin Optimizasyonu	3
2- YAPI SİSTEMLERİNİN İKİNCİ MERTEBE HESABI VE BURKULMA YÜKLERİNİN BULUNMASI	7
2.1- Tanım ve Varsayımlar	7
2.2- Yapı Sistemlerinin Burkulma Yönünden Sınıflandırılması	8
2.3- İkinci Mertebe Teorisine Ait Fiktif Yükler	10
2.4- Rayleigh Oranının Genel Olarak Elde Edilmesi	11
3- BURKULMA YÜKÜNÜ EN BÜYÜK YAPAN MALZEME YAYILIŞININ BULUNMASI	15
3.1- Giriş	15
3.2- Gerek Şartın Çıkarılışı	15
3.3- Yeter Şartın Çıkarılışı	19
3.4- Malzeme Yayılışının Bulunması	23
3.4.1- Malzeme Yayılışının Bulunması İçin Uygulanan Ardışık Yaklaşım Yöntemi	23
3.4.2- Burkulma Modu ve Yükünün Bulunması İçin Uygulanan Ardışık Yaklaşım Yöntemi	24
3.5- Özel Durumlar	26
3.5.1- Kesit Rijitliklerinin Özel Değişimleri	26
3.5.2- Yapı Ağırlığının Göz Önüne Alınmaması	30
3.5.2.1- Yalnız Eğilme Şekil Değiştirmelerinin Hesaba Katılması	30
3.5.2.2- Eğilme Şekil Değiştirmeleri ile Birlikte Kayma Şekil Değiştirmelerinin de Hesaba Katılması	35
3.6- Kesitler İçin Sınırlamalar	37

4- YAPI SİSTEMLERİNİN İKİNCİ MERTEBE HESABINDA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	39
4.1- Kullanılan Sonlu Elemanların Birinci ve İkinci Mertebe Rijitlik Matrisleri	39
4.1.1- Çubuk Elemanının Birinci ve İkinci Mertebe Rijitlik Matrisleri	40
4.1.2- Dikdörtgen Plak Elemanının Birinci Mertebe Rijitlik Matrisi	45
4.1.3- Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi	52
4.1.3.1- Düzlemsel P_x Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi	56
4.1.3.2- Düzlemsel P_y Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi	61
4.1.3.3- Düzlemsel $P_{xy} = P_{yx}$ Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi	64
4.1.3.4- Lineer Yayılı P_x ve P_y Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi	67
4.2- Sistemin Birinci ve İkinci Mertebe Rijitlik Matrislerinin Kurulması	71
5- ÇUBUK SİSTEMLERDE BURKULMA YÜKÜNÜ EN BÜYÜK YAPAN MALZEME YAYILIŞININ SAYISAL OLARAK BULUNMASI	74
5.1- Yalnız Eğilme Şekil Değiştirmeleri Göz Önüne Alınarak Yapılan Uygulamalar	74
5.2- Eğilme ve Kayma Şekil Değiştirmelerinin Birlikte Hesaba Katılması Hali	81

6- DİKDÖRTGEN PLAKLARDA BURKULMA YÜKÜNÜ EN BÜYÜK YAPAN MALZEME YAYILIŞININ TAYİNİ	89
6.1- Bir Doğrultuda Düzgün Yayılı Basınç Kuvveti Etkisindeki Basit Mesnetli Dikdörtgen Plaklar	91
6.2- İki Dik Doğrultuda Düzgün Yayılı Basınç Kuvveti Etkisindeki Basit Mesnetli Dikdörtgen Plaklar	100
6.3- Bir Doğrultuda Düzgün Yayılı Basınç Kuvveti Etkisindeki Değişik Mesnetlenme Durumlu Dikdörtgen Plaklar	108
6.3.1- Basınç Doğrultusuna Dik İki Kenarı Boyunca Basit Mesnetli, Diğer Kenarları Boşta Olan Dikdörtgen Plaklar	108
6.3.2- Basınç Doğrultusuna Dik İki Kenarı Boyunca Ankastre, Diğer Kenarları Boşta Olan Dikdörtgen Plaklar	113
6.3.3- Basınç Doğrultusuna Dik İki Kenarı Boyunca Ankastre, Diğer Kenarları Basit Mesnetli Olan Dikdörtgen Plaklar	118
7- ELEKTRONİK HESAP MAKİNASI PROGRAMLARI	122
7.1- ENKES1 Programı	122
7.2- ENKES2 Programı	126
7.3- FIYU Programları	131
7.4- Alt Programlar	132
8- SONUÇLAR	136
NOTASYON	139
YARARLANILAN KAYNAKLAR	141
ÖZGEÇMİŞ	144

Ö Z E T

Bu çalışmada, yapı sistemlerinde verilmiş bir malzeme miktarı için elastik burkulma yükünü en büyük yapan sürekli malzeme yayılışını veren genel şart denklemi çıkartılmış ve çeşitli sistemlere uygulanmıştır.

Çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu tanıtılmakta ve daha önce bu konuda yapılan çalışmalar özetlenmektedir.

İkinci bölümde, yapı sistemlerinin ikinci merteye hesabı ve burkulma yüklerinin bulunması için gerekli tanım ve varsayımlar verilmekte ve sistemlerin burkulma yönünden sınıflandırılmaları yapılmaktadır. İkinci bölümün son kısmında, Rayleigh oranı virtüel iş teoreminden yararlanarak genel olarak elde edilmektedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, yapı sistemlerinde burkulma yükünü en büyük yapan sürekli malzeme yayılışını elde etmek için gerekli olan genel şart denklemi çıkartılmış ve daha sonra bu gerek şartın aynı zamanda yeter olduğu da gösterilmiştir. Bu şart, sistemdeki dış etkilerin ve şekil değiştirmelerin özelliklerinden bağımsız olarak çıkartılmıştır. Malzeme yayılışının tayini ve burkulma yükünün hesabı için bir sayısal ardışık yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir.

Daha sonra dış etkiler, şekil değiştirmeler ve kesit şekilleri için yapılan bazı kabullerle, genel olan gerek ve yeter şart denkleminin özel durumları elde edilmiş ve doğru eksenli çubuklarla, dikdörtgen ince plakların yanal burkulması hallerine uygulanmıştır.

II

Dördüncü bölümde, sayısal çözümde kullanılan sonlu elemanlar yöntemi anlatılarak, çubuk ve dikdörtgen plak elemanlarının birinci ve ikinci merteye rijitlik matrisleri elde edilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde, yalnız eğilme şekil değiştirmeleri göz önüne alınan doğru eksenli çubuklarda değişik mesnet halleri ve dış etkiler için çözümler yapılarak en büyük burkulma yükünü veren malzeme yayılışları bulunmuştur. Bundan başka, eğilme ve kayma şekil değiştirmelerinin birlikte hesaba katılması hali için de çözümler yapılmış ve sonuçlar, yalnız eğilme şekil değiştirmeleri göz önünde tutularak bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde, dikdörtgen plakların, verilmiş bir malzeme miktarı için burkulma yüklerini en büyük yapan malzeme yayılışları tayin edilmiştir. Bu çözümler plakların değişik mesnet halleri, kenar oranları ve dış etkiler için yapılmıştır. Bulunan sonuçlar tablo ve şekillerle verilmiştir.

Yedinci bölümde, çalışmanın dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerinde verilen sayısal sonuçların elde edilmesi için hazırlanan elektronik hesap makinası programlarının ayrıntıları verilmiştir. Bu programlar FORTRAN IV dilinde kodlanmıştır.

Çalışmanın sekizinci bölümünde, elde edilen sonuçlar açıklanmıştır.

III

S U M M A R Y

One of the major aims of engineering is to find the most convenient solution for the design of structural systems. A successful design requires the complete satisfaction of two opposite conditions, namely safety and economy. In some engineering problems one of these conditions may become more important than the other. In certain structures, in order to provide sufficient stiffness against static and dynamic effects, the safety condition may dominate over the cost as in the design of nuclear power plants. However, in some other problems another aspect, namely weight may have greater importance. For example in designing aerospace vehicles or long-span structures, weight becomes one of the major parameters. In these types of structures the principle of the minimization of weight is more important than that of cost.

In recent years there has been a number of studies investigating the minimization problem of a component of the displacement vector, or the maximization of the buckling load for a given amount of material. In the study of this kind of design problem secondary conditions of the type mentioned above have also been taken into consideration as much as possible. In this study the design problem of continuous systems which provide a maximum buckling load for a given amount of material, has been investigated.

IV

The contents of this thesis are divided into eight chapters. The description of the problem, the fundamental concepts and existing literature on this subject are outlined in the first chapter.

The second chapter contains the second order theory and the definitions and assumptions which are used in the determination of the buckling load. The Rayleigh quotient is obtained using the principle of virtual work in the most general form in matrix notation.

In the third chapter the conditional equation which provides the maximum buckling load for a given amount of material is obtained. This conditional equation is completely independent of the external effects and deformations.

The acting loads can be shown as follows

$$[P] = \rho [n] \quad ,$$

where ρ is the parameter of buckling load and $[n]$ is the matrix of the ratio of the loads acting on the system. The loads are considered in the most general form. The weight of the system is also taken as an external load. Thus the matrix $[n]$ is not a constant matrix.

The given amount of material V may be expressed in the form

$$V = \int_{\ell} F ds \quad ,$$

where s is the system variable. In a system composed of one dimensional members, ds is an element of the length. On the other hand in two dimensional problems, such as plates, ds stands for $dx dy$, which is an element of the area. F is density (per unit length, area or volume depending on the dimensionality of the system.).

The problem is to determine the maximum value of the load parametre $\mathcal{P}_k$. Therefore it can be treated as a variational problem. But there is a constraint condition, because the amount of the material is constant. In this case the first variation of the function $(\mathcal{P}_k - \lambda V)$ must be equal to zero, i.e.,

$$\delta(\mathcal{P}_k - \lambda V) = 0$$

Here λ is introduced as a Lagrange's multiplier. Using the above relation, the necessary condition has been found in Eq.(3.14), which makes the buckling load maximum for a given amount of material. As mentioned above, this condition has been obtained in the most general form.

Other conditions obtained in previous work are only special cases of the general condition given by Eq.(3.14). It is also shown that this condition is sufficient. This is given by the expression (3.26).

The main problem is to find the function F which describes the optimal distribution of the material. The buckling load and the buckling mode must also be determined. These unknowns can be obtained by using the following equations which are : the condition given by Eq. (3.14), the differential equilibrium equations due to the acting loads and the boundary conditions. Except in some special cases the solution of the system is extremely difficult. In this study a numerical method of successive approximations is used to determine the distribution of the material and the buckling load.

In the last section of the third chapter, some special forms of the generalized "necessary and sufficient condition" have been obtained by introducing some assumptions on the form of the cross-section, the displacements and the external loads. Eq.(3.14) takes a very simple form upon introduction the following assumption on the cross-sectional rigidity D and the cross-section function F ,

VI

$$D_i = k_i F^{p_i},$$

where k_i and p_i are constants. The condition which is obtained by neglecting the weight according to the above assumptions coincides with the condition found in reference [9]. The special cases obtained are applied to the problems of buckling of slender bars and lateral buckling of the plates.

In this study, the finite element method has been used in the analysis of the system. As the aim of this study is to obtain the distribution of material which provides the maximum buckling load, the cross-section of the system will be variable. This variation of the cross-section can be accomplished by dividing the system into sufficiently small finite elements. In the fourth chapter, the first and second order stiffness matrices of the finite elements of bars and plates, are obtained. These are then used in the numerical analysis.

During the construction of the second order stiffness matrix of the rectangular plate element, the applied loads P_x , P_y are considered to be uniformly distributed compressive forces, $P_{xy} = P_{yx}$ shear forces and $P_x(2\eta-1)$, $P_y(2\xi-1)$ linearly distributed compressive forces.

In chapter five, the "necessary and sufficient condition" obtained in chapter three is applied to slender bars. Two cases are investigated. In the first case only the bending deformations are taken into account. In the second case, shear deformations have also been considered together with the bending deformations. In the first case, the axial load P is considered as acting on the top point of the bar and supports are taken as hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-free, clamped-clamped. The results obtained are compared with the system having constant cross-section and equal volume. For example in simply supported columns with circular cross-section this comparison shows that same buckling load gives 15% relative material

VII

profit. Similar calculations are also carried out for columns subjected to more general loads, whose supports are hinged-hinged and clamped-free.

The systems which have small shear stiffnesses have been considered and the effect of the shear deformation on the section variation and buckling load has been investigated in this part as well. In composite columns shear deformations have a great effect on the solution. In this case the value of buckling load decreases. Compared to the system where only the bending deformation effects have been taken into consideration, it is only a half.

In chapter six, some parametrical investigations have been carried out for rectangular thin plates. All the solutions are found for simply supported rectangular plates with sides a, b subjected to uniformly distributed P_x compressive forces, and the optimal variations of plate thickness obtained. The comparison of a square plate having constant thickness with a plate having optimal thickness variation subjected to the same buckling load, gives 10,59% relative material profit. Also the maximum buckling load and thickness variation are found for a simply supported plate by changing the ratios a/b and $\alpha = P_x/P_y$. Here the plate is considered as loaded by the forces P_x, P_y in the directions x and y respectively. The maximum buckling loads obtained are considerably greater than the buckling load of a plate of equal volume, with constant thickness. The relative increase is 67% for $a/b = 1$ and $\alpha = 1$.

Similar calculations have also been carried out for the plates which are supported simple-free, clamped-free and clamped-simple in the x and y directions respectively. The results obtained are outlined in tables and figures.

VIII

The finite element method and the numerical method of successive approximations that has been developed is applied to the solution of plate and bar systems using computer programs. The details of these programs are given in chapter seven. The programs are coded in FORTRAN IV, and are independent of the form of the cross-sections, supports and the symmetry properties of the system.

The results are summarized in chapter eight.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. KONU

Yapı mühendisliğinin başlıca görevlerinden biri sistemlerin en uygun şekilde boyutlandırılmasıdır. Bu ise ancak yapının,

- Amaç ve kullanılmasına ait istekleri sağlaması,
- Statik ve dinamik dış etkiler altında kırılmaya ve stabiliteye karşı istenen bir emniyetinin ve yeterli bir rijitliğinin bulunması,
- İşletme yükleri altındaki bazı davranış koşullarını sağlaması

gibi özellikleri yerine getiren çeşitli çözümleri arasından maliyeti en küçük olanının seçilmesiyle yerine getirilebilir. Gerçekleştirilmesi istenen bu özelliklerin önemleri, yapı cinsine göre farklı olduğundan, önemli olanlara daha fazla ağırlık verilerek yapılar boyutlandırılmaktadır.

Örneğin, narin sistemlerde burkulma olayı kırılma olayından daha önce meydana geldiği için burkulmaya göre, çok büyük rijitlik istenen sistemlerde ise yerdeğiştirmelere göre hesap yapılmaktadır.

Ayrıca, uzay araçlarında ve aynı tür malzeme ile daha büyük açıklık geçilmesinin istenmesi gibi hallerde ağırlığın azaltılması çok önem kazanabilir. Bu durumda maliyetin en küçük olması ilkesinin yerini, malzeme miktarının en az olması ilkesi alır. Bunun için son yıllarda, verilmiş bir malzeme miktarı için bir yerdeğiştirme bileşenini minimum, veya burkulma yükünü maksimum yapan boyutlandırma problem-

leri üzerinde çok çalışılmaktadır. Ancak bu şekilde boyutlandırılan sistemlerde, yan etkiler olarak yukarıda açıklanan diğer koşulların da yerine getirilmesine çalışılmalıdır.

Bu çalışmada, yapı sistemlerinde verilmiş bir malzeme miktarı için elastik burkulma yükünü en büyük yapan sürekli boyutlandırma problemi incelenmiştir.

1.2. KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALARA TOPLU BAKIŞ

1.2.1. Yapı Sistemlerinin Optimizasyonu İçin Genel Yöntemler

Yapı optimizasyonunda kullanılan yöntemler, sürekli sistemler için varyasyon yöntemleri ve ayrık sistemler için de programlama yöntemleri olmak üzere iki ana grupta toplanabilir.

Sürekli sistemlerde uygulanan varyasyon hesabı bilindiği gibi basit olarak

$$I = I[y(x)]$$

şeklindeki bir fonksiyoneli ekstremum yapan $y(x)$ fonksiyonunu bularak I nin ekstremum değerini tayin eder. Direkt varyasyon metotları ile yeter yaklaşıklıkla, fonksiyoneli ekstremum yapan $y(x)$ fonksiyonu hesap edilebilir. Sonlu farklar, Rayleigh-Ritz, Kontrovich, Galerkin, Trefftz yöntemleri direkt varyasyon yöntemlerine örnek olarak verilebilir.

Ayrık veya öyle kabul edilebilen ortamlarda optimum boyutlandırma, bir matematiksel programlama problemi olarak ele alınabilir. Burada istenen, n boyutlu bir boyutlama uzayında

$$f_k(\vec{D}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

$$h_j(\vec{D}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, j \quad (1.2)$$

şartlarını sağlayan ve $M(\vec{D})$ amaç fonksiyonunu minimum yapan bir $\vec{D}$ vektörünün bulunmasıdır. $\vec{D}$ vektörünün, her biri hesap değişkenini gösteren sonlu sayıda elemanı vardır. Bu hesap değişkenleri boyutlama uzayının koordinatlarını meydana getirirler. (1.1) ve (1.2) de verilen eşitlik ve eşitsizlik şartları ise uzayı kabul edilebilir ve edilemez bölgelere ayırırlar. Amaç ve şart fonksiyonlarının özelliklerine göre çok sayıda programlama yöntemleri geliştirilmiştir. Bu özelliklere göre hangi metodun kullanılmasının uygun olabileceği Fletcher [1] tarafından ayrıntılı bir şema ile çok iyi bir şekilde özetlenmiştir.

1.2.2. Burkulma Yükleri İçin Yapı Sistemlerinin Optimizasyonu

Değişik mesnetlenme durumlu tek veya çok açıklıklı kirişler ve düzlem çerçevelerin burkulma yüklerini en büyük yapacak malzeme yayılışını belirlemek için çoğu analitik olmak üzere bir çok araştırma yapılmıştır.

1936 da Ratzersdorfer [2] üst ucundan P yükü ile yüklü basit mesnetli bir kolonun, verilen malzeme miktarı için P yükünü en büyük yapacak kesit değişiminin diferansiyel denklemini, dairesel ve dikdörtgen kesitler için vermiştir. Bu diferansiyel denklem varyasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Keller [3] eşkenar üçgen enkesitli bir kolonun en kuvvetli kolon olduğunu göstermiştir. Eşkenar üçgen enkesitli değişken kalınlıklı bir kolonun burkulma yükünün, dairesel enkesitli üniform kalınlıklı bir kolonun burkulma yüküne oranla %61,2 daha fazla olduğunu göstermiştir.

Tadjbakhsh ve Keller [4], mesnetleri ankastre-ankastre, ankastre-serbest, ankastre-mafsallı olan kolonlar için çözüm vermişlerdir.

Çakıroğlu ve Yazar [5], basınç kuvveti etkisindeki minimum hacimli narin kolonların hesabı için sayısal bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu çalışmada malzeme yayılışının

hesabı için, çubuğun ilk denge konumundan farklı kararlı denge durumunda, dış liflerdeki gerilmelerin çubuk eksenine boyunca sabit olması özelliğinden yararlanmışlardır. Bu özellik yardımı ile elde edilen diferansiyel denklemlerin [2] de varyasyon yöntemi ile elde edilen denklemlerle aynı olduğunu göstermişlerdir. Çözüm için sayısal bir ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak, sabit kalınlıklı dikdörtgen kesitli bir kolonla aynı burkulma yükünü taşıyan değişken kalınlıklı dikdörtgen kesitli bir kolonun malzeme hacminin, sabit kesitlinin hacminin %88 'i olduğu gösterilmiştir.

Keller ve Niordson [6] bir ucu ankastre, diğer ucu boşta olan bir kolonun kendi ağırlığı altında burkulmadan en uzun olabilmesi için malzeme yayılımını elde etmişlerdir. Böyle bir kolonun boyunun sabit kesitli kolona oranla yaklaşık olarak iki katı olduğunu göstermişlerdir.

Taylor [7] da, [4] de incelenen problemleri enerji yaklaşımı ile inceleyerek tekrar formüle etmiştir. Diğerine oranla çok daha kısa olması bakımından ilginçtir.

Taylor ve Liu [8] kesitlerin verilen bir kesitten daha büyük olmaması yan şartını kullanarak sandviç kesitler için malzeme yayılımını vermişlerdir.

Prager ve Taylor [9] rijitlik ve kesit alanı arasındaki bağıntının lineer olduğu kesitlerde, varyasyon yöntemini kullanarak maksimum rijitlik, özel frekans, burkulma yükü ve emniyet için bir optimum olma şartı elde etmişlerdir. Bu şart birim hacme düşen şekil değiştirme enerjisinin bütün yapı boyunca sabitliğini ifade eder. Rijitlik ve kesit alanı arasında lineer bir bağıntı olması kabulü hesabı oldukça kolaylaştırmaktadır. Bu tip kesitlere örnek olarak sandviç kesitler ile yüksekliği sabit, genişliği değişken dikdörtgen kesitler verilebilir. Bu kabul yapıldığı takdirde, optimizasyon şartı rijitlikten bağımsız olmaktadır.

Tek açıklıklı kolonlar üzerinde yukarıdakilere benzer çalışmalar Plaut, Trahair-Booker ve Frauenthal tarafından da yapılmıştır [10], [11], [12].

Murthy ve Murthy-Christiano [13], [14] aynı problemin çözümünü sonlu elemanlar yöntemi ile çok açıklıklı kirişlere ve düzlem çerçevelere uygulamışlardır.

Huang [15] elastik kirişlerin optimum boyutlandırılmasına kayma şekil değiştirmesinin etkisini incelemiştir. Bu çalışmada optimizasyon şartı olarak [9] da verilen şart kullanılmıştır.

Yukarıda özetlenen bütün çalışmalar çubuk sistemler için yapılmıştır. Aynı konuda plak sistemler için yapılan araştırmalar çok azdır. Frauenthal [16] radyal üniform yüklü, basit mesnetli, aksenal simetrik dairesel plaklarda minimum kalınlığın verilen bir değerden küçük olmaması yan şartı ile problemin çözümünü varyasyon metodu ile vermiştir.

Yapı sistemlerinin burkulma yükünü en büyük yapan malzeme yayılışını veren şart denklemi, sistemin bir veya iki boyutlu olmasına, sistemin özelliğine, dış etkilerin yapı ağırlığı, ilave yük, sıcaklık değişmesi, statik ve dinamik olması gibi türlerine ve ayrıca hesaplarda gözönünde tutulan şekil değiştirmelere bağlıdır. Yukarıda özetlenen çalışmalar bunlardan birini veya ancak bir kaçının bir arada olması durumunu incelemişlerdir. Örneğin [16] dışındaki bütün çalışmalar bir boyutlu sistemler içindir. Yine [15] dışındaki bütün çalışmalarda optimum kesit tayinine kayma şekil değiştirmesinin etkisi ihmal edilmiştir.

Bu çalışmada, sürekli yapı sistemlerinde verilmiş bir malzeme miktarı için burkulma yükünü maksimum yapan malzeme yayılışını veren gerek ve yeter şart denklemi, sistemdeki dış etkilerin ve şekil değiştirmelerin özelliklerinden bağımsız olarak çıkarılmıştır. Çözüm için, ancak bazı çok basit hallere uygulanabilen analitik yöntemler yerine, genel bir sayısal ardışık yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir.

Elde edilen gerek ve yeter şart denklemi doğru eksenli çubuklara ve dikdörtgen plakların yanal burkulması haline uygulanmış ve geliştirilen ardışık yaklaşım yöntemi

ile, verilmiş bir malzeme miktarı için maksimum burkulma yükünü ve buna ait kalınlık değişimini veren FORTRAN IV kodlama dilinde elektronik hesap makinası programları hazırlanmıştır (bkz. Bölüm 7).

Bu programlar yardımı ile yalnız eğilme şekil değiştirmeleri gözönüne alınan doğru eksenli çubuklarda, değişik mesnet halleri ve dış etkiler için çözümler ile dikdörtgen plağın çeşitli dış etkiler, mesnet halleri ve kenar oranları için kalınlık değişimi ve maksimum burkulma yükleri hesap edilerek bulunan sonuçlar tablolar ve şekillerle verilmiştir. Burada sabit kesitli çubuğa ve plağa oranla elde edilen malzeme kazançları da gösterilmiştir. Bundan başka, doğru eksenli çubuklarda kayma şekil değiştirmeleri de hesaba katılarak çözümler yapılmış ve sonuçlar yalnız eğilme şekil değiştirmeleri gözönünde tutularak bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. (bkz. Bölüm 5)

BÖLÜM 2

YAPI SİSTEMLERİNİN İKİNCİ MERTEBE HESABI VE BURKULMA
YÖKLERİNİN BULUNMASI

2.1. TANIM ve VARSAYIMLAR

Yüksek mukavemetli yapı malzemelerinin kullanılması ile narinleşen yapılarda yer değiştirmeler çoğu kez yeter derecede küçük olmamaktadır. Bu nedenle, bazı durumlarda birinci mertebe teorisi yetersiz kalmakta ve ikinci mertebe teorisi ile hesap yapmak gerekmektedir.

İkinci mertebe teorisi ile hesap yapılırken, aşağıdaki varsayımlar gözönünde tutulacaktır.

a- Geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi gözönüne alınmakta, geometrik uygunluk şartlarına etkisi ise ihmal edilebilmektedir.

b- Sistem homogen, izotrop ve lineer elastik malzemeden yapılmıştır.

c- Yer değiştirmeler sırasında dış kuvvetler ilk doğrultularını korurlar.

d- Sistem,geometri değişimi nedeni ile lineer olmadığından süperpozisyon kuralı geçerli değildir. Bu nedenle sisteme etkiyen dış yüklerin, aralarındaki oranlar sabit kalarak değiştikleri varsayılmıştır. Bu durumda,

- ρ : Yükleme şiddetini belirleyen yük parametresini,
 $[n]$: Yükler arasındaki sabit oranlardan oluşan kolon matrisi

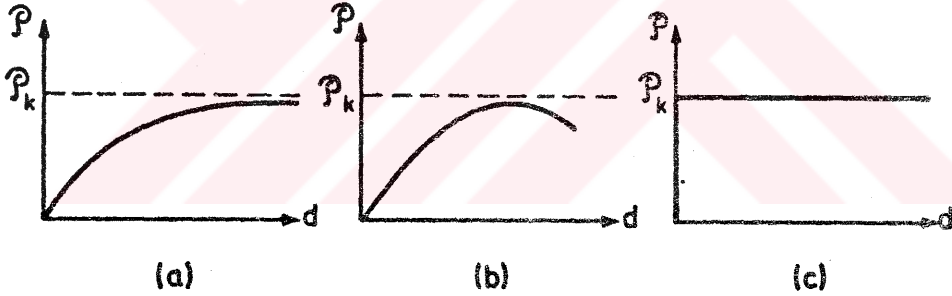
göstermek üzere $[P]$ yükleme matrisi

$$[P] = \mathcal{P} [n] \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. YAPI SİSTEMLERİNİN BURKULMA YÖNÜNDEN SINIFLANDIRILMASI

Yapı sistemlerinin II.mertebe hesabında sistemleri, burkulmadan önce şekil değiştirme yapan ve yapmayan olmak üzere, iki gruba ayırarak incelemek mümkündür. Bu iki grup; $\mathcal{P}$ yükleme şiddetini belirleyen yük parametresi, d karakteristik bir deplasmanı göstermek üzere, $\mathcal{P}$ - d bağıntısı çizilerek belirlenebilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

Burkulmadan önce şekil değiştirme yapan sistemlerin davranışları Şekil 2.1-a,b ye, burkulmadan önce şekil değiştirme yapmayan sistemlerin davranışları ise Şekil 2.1-c ye uyar.

Burkulmadan önce şekil değiştirme yapan sistemlerin yük parametresi belli bir P_k değerinden büyük olamamaktadır. Bu P_k değerine burkulma yükü adı verilir. Burkulmadan önce şekil değiştirme yapmayan ve davranışları Şekil 2.1-b'ye uyan özel sistemlerde yük parametresi belli bir P_k değerine ulaşmaya kadar burkulmaya sebep olacak bütün yer değiştirmeler sıfır kalırlar. Yani bu konum kararlı denge konumudur ve bunun civarında başka bir denge durumu daha yoktur. P yük parametresi P_k değerine ulaşınca sistem "farksız denge konumu" haline gelir, yani ilk konumdan farklı denge konumları da olabilir. Bu halde P_k değerindeki çok ufak bir artım sistemin aniden diğer denge durumlarına atlamasına neden olabilir ve sistemde büyük şekil değiştirmeler meydana gelir. Dallanma türünden olan bu olaya dallanma burkulması denir. P_k yüküne ise kritik yük veya Euler burkulma yükü adı verilir [19].

Bu çalışmada incelenen sistemlerin burkulmadan önce şekil değiştirme yapmadıkları kabul edilmiştir. Bu tip sistemlerin burkulma yüklerinin hesabı için çok sayıda kesin ve yaklaşık hesap metodu vardır. Bu metotlar şu şekilde sınıflandırılabilir [17].

Kesin metotlar ;

- a) Diferansiyel denklem metodu [18]
- b) Deplasman metodu [20]
- c) Kuvvet metodu [19]
- d) Diğer metotlar (Cross metodu, Travers metodu, sabit noktalar metodu v.b.) [20].

Yaklaşık metotlar ;

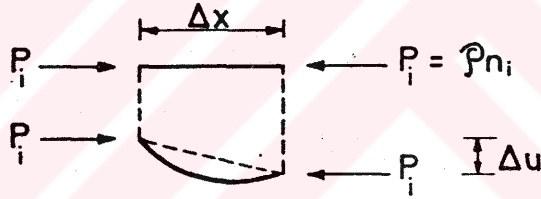
- a) Sonlu farklar metodu
- b) Enerji metotları
- c) Vianello-Stodola metodu.

Bu metotlardan, çözümü aranan sistemin özelliklerine en uygunu seçilerek hesap yapılabilir. Bu çalışmada gözönüne

alınan sistemler çok bilinmeyenli ve sınır şartları bakımından hiperstatik olabileceklerdir. Bu nedenle burkulma yüklerinin hesabında Bölüm 3 de açıklanan Vianello-Stodola metodunun genelleştirilmesi ile elde edilen bir ardışık yaklaşım yöntemi uygulanmıştır.

2.3. İKİNCİ MERTEBE TEORİSİNE AİT FİKTİF YÖKLER

$[P] = \mathcal{P}[n]$ yüklerinin etkisindeki bir sistemin sonlu bir Δx parçasını ele alalım. Düzlemi içindeki bir şekil değiştirme sırasında dış kuvvetlerin doğrultularını değiştirmedikleri varsayımına göre, denge denklemleri şekil değiştirmiş eksen üzerinde yazıldığında Şekil 2.2 den de görülebileceği gibi elemana $P_i \Delta u$ momentleri etkir.



Şekil 2.2

Bu durumda, birim boya gelen yayılı moment yükü;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_i \frac{\Delta u}{\Delta x} = P_i \frac{du}{dx} = P_i u'$$

şeklinde elde edilecektir. Bu ifade matris gösterilimi ile yazılırsa

$$\mathcal{P}[n][u'] \quad (2.2)$$

olur. Sisteme etkiyen verilmiş yüklere bu fiktif momentler de eklenirse, şekil değiştirmiş eksen yerine şekil değiştirmemiş eksen kullanılabilir [19].

2.4. RAYLEIGH ORANININ GENEL OLARAK ELDE EDİLMESİ

Dış yüklerin etkisindeki bir yapı sistemi burkularak, tabii denge konumundan ayrılıp ikinci bir denge konumuna geçtiğinde, virtüel iş teoremi uyarınca dış kuvvetlerin işi, iç kuvvetlerin işine eşit olacağından

$$I_d = I_i \quad (2.3)$$

yazılabilir. Burada dış kuvvetlerin işini gösteren I_d ve iç kuvvetlerin işini gösteren I_i

$$I_d = I_{d1} + I_{d2} \quad (2.4)$$

$$I_i = I_{i1} + I_{i2} \quad (2.5)$$

şeklinde iki işin toplamı olarak düşünülebilir. Bu ifadelerde

$$I_{d1} = \text{Verilen dış yüklerin işini,}$$

$$I_{d2} = \text{Denge denklemlerinde ikinci mertebe etkileri hesaba katmaya yarayan fiktif yüklerin işini,}$$

I_{i_1} = Tabii denge konumundaki iç kuvvetlerin işini,

I_{i_2} = Burkulma şekil değiştirmeleri sırasında doğan iç kuvvetlerin işini

göstermektedir.

(2.4) ve (2.5) i, (2.3) ifadesinde yerleştirecek genel iş ifadesi olarak,

$$I_{d_1} + I_{d_2} = I_{i_1} + I_{i_2} \quad (2.6)$$

bulunur.

Burkulmadan önce, yani tabii denge konumunda da dış kuvvetlerin işi, iç kuvvetlerin işine eşit olduğuna göre,

$$I_{d_1} = I_{i_1} \quad (2.7)$$

yazılabilir. (2.6) ve (2.7) beraber düşünülürse,

$$I_{d_2} = I_{i_2} \quad (2.8)$$

elde edilir. Yani sistemdeki fiktif yüklerin işi, burkulma şekil değiştirmeleri sırasında doğan iç kuvvetlerin işine eşit olmaktadır.

I_{d_2} ve I_{i_2} nin belirlenmesi için bazı büyüklükleri tanımlamak gerekir. Bunlar şöyle sıralanabilir :

- [u] : Tabii denge konumundan itibaren ölçülen burkulma yer değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris,
- [ε] : Burkulma sırasında meydana gelen şekil değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris,

$[\sigma]$: Burkulma sırasında doğan kesit tesirlerinden oluşan kolon matrisi,

$[D]$: Kesit rijitlik matrisidir.

(2.2) de belirtildiği gibi ikinci mertebe fiktif yükler,

$$\mathcal{P}[n][u']$$

şeklindedir. Bu yüklerin $[u']$ dönmelerinde yaptığı iş yazılırsa I_{d2} elde edilir. Bu durumda I_{d2} için

$$I_{d2} = \frac{1}{2} \int_{\ell} [\mathcal{P}[n][u']]^T [u'] ds \quad (2.9)$$

veya

$$I_{d2} = \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_{\ell} [u']^T [n][u'] ds \quad (2.10)$$

bulunur. Burada s sistemin değişkenidir. ℓ bir karakteristik büyüklüğü göstermek üzere $s\ell$ şeklinde yazılabilir. Buna göre, s , çubuk sistemlerde uzunluğu gösteren tek boyutlu, plaklarda ise $dx dy$ alan elemanını gösteren iki boyutlu bir değişken olacaktır.

Benzer şekilde $[\sigma]$ iç kuvvetlerinin $[\epsilon]$ şekil değiştirmelerinde yaptığı iş yazılırsa I_{i2} elde edilir. Bu durumda I_{i2} için

$$I_{i2} = \frac{1}{2} \int_{\ell} [\sigma]^T [\epsilon] ds \quad (2.11)$$

yazılabilir. Varsayımlarda da belirtildiği gibi, malzeme lineer-elastik olduğundan sistemde iç kuvvet-şekil değiştirme bağıntısı

$$[\sigma] = [D] [\epsilon] \quad (2.12)$$

şeklindedir. (2.12) ifadesi (2.11) integralinde yerleştirilirse

$$I_{i_2} = \frac{1}{2} \int_{\ell} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] ds \quad (2.13)$$

elde edilir.

I_{d_2} ve I_{i_2} in bulunan bu ifadeleri ile (2.8) eşitliği yazılırsa

$$\frac{1}{2} \int_{\ell} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] ds = \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds \quad (2.14)$$

veya

$$\int_{\ell} \left\{ \frac{1}{2} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] - \frac{1}{2} \mathcal{P} [u']^T [n] [u'] \right\} ds = 0 \quad (2.15)$$

elde edilir. Tabii denge konumundan başka bir ikinci denge konumu olduğu düşünülerek bulunan bu sonuç farksız denge konumu olarak adlandırılır [18]. Bu durumda yük parametresinin kritik değerini bulmak mümkündür. (2.15) ifadesinden $\mathcal{P}$ yük parametresi çözülürse;

$$\mathcal{P} = \frac{\int_{\ell} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] ds}{\int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds} \quad (2.16)$$

oranı elde edilir. Bu oran Rayleigh oranı olarak bilinmektedir. Burada geometrik sınır şartları yerine konduğunda $\mathcal{P}$ 'nin aldığı değere $\mathcal{P}_k$ kritik yük parametresi adı verilir.

BÖLÜM 3

BURKULMA YOKONU EN BOYOK YAPAN MALZEME
YAYILIŞININ BULUNMASI

3.1. GİRİŞ

Çubuk, plak gibi bir veya iki boyutlu yapı sistemlerinin geometrisi, sınır şartları, malzeme özellikleri ve malzeme miktarı verilmiştir. İstenen, bu malzeme çubuk sistemlerde eksen eğrisi, plak sistemlerde ortalama düzlem üzerinde sürekli olarak nasıl yayılmalıdır ki elastik burkulma yükü en büyük olsun sorusunun cevabıdır. Aynı problemi ters yönde tanımlamak da mümkündür. Şöyle ki, malzeme sistem üzerinde sürekli olarak nasıl yayılmalıdır ki, burkulma yükünün verilmiş bir değeri için malzeme miktarı minimum olsun.

Bu çalışmada burkulma yükünü en büyük yapacak malzeme yayılışını veren şart çıkartılırken dış etki olarak verilmiş statik yükler, II. mertebe fiktif yüklerle birlikte yapı ağırlığı da gözönüne alınmış ve malzeme yayılışının bulunması için bir sayısal ardışık yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir.

3.2. GEREK ŞARTIN ÇIKARILIŞI

Bir veya iki boyutlu bir sistem kendi ağırlığı, verilmiş sabit yükler ve II. mertebe fiktif yüklerin etkisi altındadır. Yapı ağırlığı gözönüne alındığına göre (2.1) ifadesindeki $[n]$ kolon matrisi kesidin fonksiyonu olarak değişecektir.

Verilmiş malzeme miktarı V ile gösterilirse

$$V = \int_L F ds \quad (3.1)$$

yazılabilir. Burada F , s parametresinin birim değerine ait hacmi göstermektedir. Bu, çubuk sistemlerde kesit alanını, plak sistemlerde ise kalınlığı ifade eder.

Problem $\mathcal{P}_k$ yük parametresinin en büyüğünün bulunması olduğuna göre $\mathcal{P}_k$ bir varyasyon problemi olarak ele alınabilir. Ancak bu arada kullanılacak malzeme miktarının da sabit kalması koluşu, problemi "şartlı varyasyon" problemi haline sokacaktır. Bu halde, λ Lagrange belirsizlik çarpanını göstermek üzere $(\mathcal{P}_k - \lambda V)$ nin birinci varyasyonunun sıfır olması gerekmektedir. Yani,

$$\delta(\mathcal{P}_k - \lambda V) = 0 \quad (3.2)$$

olmalıdır. $\mathcal{P}_k$ ve V nin (2.16) ve (3.1) deki ifadeleri (3.2) de yerleştirilirse

$$\delta \left(\frac{\int_{\ell} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] ds}{\int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds} - \lambda \int_{\ell} F ds \right) = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Bu ifade u ve F değişkenlerine bağlıdır. Büyük parantezin içi K ile gösterilerek K ya u ve F ye göre varyasyonlar verilecektir.

γ küçük bir sayı, η sınırlarda sıfır olan herhangi bir fonksiyonu göstermek üzere $u(s)$ e $u(s) + \gamma\eta(s)$ artımı verip K nın u ya göre varyasyonu yazılırsa

$$\delta_u K = \frac{\partial K(u + \gamma\eta, F)}{\partial \gamma} \bigg|_{\gamma=0} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu varyasyon yeni bir şart vermez. Burkulma probleminin diferansiyel denklemini ifade eder. Benzer şekilde α küçük bir sayı, η sınırlarda sıfır olan herhangi

bir fonksiyon ve $[D]=[D(F)]$, $[n]=[n(F)]$ olduğuna göre $F(s)$ a $F(s) + \alpha \eta(s)$ artımı verilirse, K nın F ye göre varyasyonu

$$\delta_F K = \left. \frac{\partial K(u, F + \alpha \eta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (3.5)$$

olarak bulunur. (3.4) ve (3.5) şartları yazılırken $u(s)$, $F(s)$ ve $\eta(s)$ in türevlerinin var ve sürekli oldukları kabul edilmiştir.

$[D(F + \alpha \eta)]$ ve $[n(F + \alpha \eta)]$ nın Taylor serisine açılımları

$$D(F + \alpha \eta) = D(F) + \alpha \eta \frac{dD(F)}{dF} + \frac{\alpha^2 \eta^2}{2} \frac{d^2 D(F)}{d^2 F} + \dots \quad (3.6)$$

$$n(F + \alpha \eta) = n(F) + \alpha \eta \frac{dn(F)}{dF} + \frac{\alpha^2 \eta^2}{2} \frac{d^2 n(F)}{d^2 F} + \dots \quad (3.7)$$

şeklinde dir. Bu ifadelerin α ya göre türevleri alınır ve $\alpha = 0$ yazılırsa

$$\left. \frac{\partial D(F + \alpha \eta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \eta \frac{dD(F)}{dF} \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial n(F + \alpha \eta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \eta \frac{dn(F)}{dF} \quad (3.9)$$

elde edilir. F ye verilen değişim $[\epsilon]$ ve $[u']$ yü etkilemediğinden, sadece $[D]$ ve $[n]$ de meydana gelen değişimler gözönüne alınmıştır.

(3.8) ve (3.9) düşünülerek, (3.5) ifadesi açık olarak

$$\frac{1}{\left(\int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds \right)^2} \left(\int_{\ell} [\epsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\epsilon] \eta ds \int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds - \int_{\ell} [u']^T \frac{d[n]}{dF} [u'] \eta ds \int_{\ell} [\epsilon]^T [D] [\epsilon] ds \right) - \lambda \int_{\ell} \eta ds = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{\left(\int_{\ell} [\epsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\epsilon] ds - \mathcal{P}_k \int_{\ell} [u']^T \frac{d[n]}{dF} [u'] ds \right) \eta}{\int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds} - \lambda \int_{\ell} \eta ds = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_{\ell} \left\{ [\epsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\epsilon] - \mathcal{P}_k [u']^T \frac{d[n]}{dF} [u'] - \lambda \int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds \right\} \eta ds = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. $\eta \neq 0$ olduğuna göre (3.12) nin sağlanabilmesi için integral içindeki birinci terim sıfır olmalıdır. Bu durumda (3.12) yerine

$$[\varepsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\varepsilon] - \mathcal{P}_k [u']^T \frac{d[n]}{dF} [u'] - \lambda \int_{\ell} [u']^T [n] [u'] ds = 0 \quad (3.13)$$

yazılabilir. Burada 3. terim sabit olduğuna göre

$$[\varepsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\varepsilon] - \mathcal{P}_k [u']^T \frac{d[n]}{dF} [u'] = \text{Sabit} \quad (3.14)$$

elde edilir. Bu şart verilmiş bir malzeme miktarı için burkulma yükünü en büyük yapan, genel gerek şart olarak çıkarılmıştır. Gerek şart olarak verilen ifadenin sol tarafındaki ikinci terim, verilmiş yüklerle birlikte yapı ağırlığının da hesaba katılması nedeni ile ortaya çıkmıştır. [9] da (3.14) e benzer olarak elde edilen şart, (3.14) ifadesinin birinci teriminin özel bir hali olarak elde edilebilir. Burada elde edilen gerek şartın aynı zamanda yeter olduğunu da göstermek mümkündür.

3.3. YETER ŞARTIN ÇIKARILIŞI

Burkulma yük parametresinin verilmiş $\mathcal{P}_k$ değerinde minimum malzeme yayılışına ait kesit fonksiyonu F ve burkulma modu $[u_1]$ ise $[\varepsilon]$, $[u']$, $[D]$ ve $[n]$ matrisleri $[\varepsilon_1]$, $[u'_1]$, $[D]$ ve $[n]$ değerlerini alırlar. $[u_a]$ aynı burkulma yükü ve kesit için geometrik uygunluk şartlarını sağlayan herhangi bir yer değiştirme durumu olduğuna göre, aynı büyüklükler sırası ile $[\varepsilon_a]$, $[u'_a]$, $[D]$ ve $[n]$ değerlerini alırlar. Bu durumda $[u_1]$ burkulma moduna karşı gelen $\mathcal{P}_k$ en küçük olduğuna göre F kesit fonksiyonu için

$$\mathcal{P}_k = \frac{\int_{\ell} [\varepsilon_1]^T [D] [\varepsilon_1] ds}{\int_{\ell} [u'_1]^T [n] [u_1] ds} < \frac{\int_{\ell} [\varepsilon_a]^T [D] [\varepsilon_a] ds}{\int_{\ell} [u'_a]^T [n] [u_a] ds} \quad (3.15)$$

veya

$$0 = \int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T [D] [\varepsilon_1] - \mathcal{P}_k [u_1']^T [n] [u_1'] \right\} ds \leq \int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_a]^T [D] [\varepsilon_a] - \mathcal{P}_k [u_a']^T [n] [u_a'] \right\} ds \quad (3.16)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi aynı burkulma yükü için minimum malzeme yayılışına ait F kesit fonksiyonu yerine, herhangi bir malzeme yayılışını veren $\hat{F}$ fonksiyonu düşünelim. Aynı $[u_1]$ burkulma modu için yukardaki büyüklükler $[\hat{\varepsilon}_1]$, $[\hat{u}_1']$, $[\hat{D}]$ ve $[\hat{n}]$ olurlar. $[\hat{u}_a]$ bu yeni durumda geometrik uygunluk şartlarını sağlayan herhangi bir yer değiştirme durumu olduğuna göre aynı matrisler sırası ile $[\hat{\varepsilon}_a]$, $[\hat{u}_a']$, $[\hat{D}]$ ve $[\hat{n}]$ değerlerini alırlar. Yukarıda söylenen nedenlerle $\hat{F}$ fonksiyonu için de aşağıdaki gibi bir eşitsizlik yazılabilir.

$$\mathcal{P}_k = \frac{\int_{\ell} [\hat{\varepsilon}_1]^T [\hat{D}] [\hat{\varepsilon}_1] ds}{\int_{\ell} [\hat{u}_1']^T [\hat{n}] [\hat{u}_1'] ds} \leq \frac{\int_{\ell} [\hat{\varepsilon}_a]^T [\hat{D}] [\hat{\varepsilon}_a] ds}{\int_{\ell} [\hat{u}_a']^T [\hat{n}] [\hat{u}_a'] ds} \quad (3.17)$$

veya

$$0 = \int_{\ell} \left\{ [\hat{\varepsilon}_1]^T [\hat{D}] [\hat{\varepsilon}_1] - \mathcal{P}_k [\hat{u}_1']^T [\hat{n}] [\hat{u}_1'] \right\} ds \leq \int_{\ell} \left\{ [\hat{\varepsilon}_a]^T [\hat{D}] [\hat{\varepsilon}_a] - \mathcal{P}_k [\hat{u}_a']^T [\hat{n}] [\hat{u}_a'] \right\} ds \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.16) ve (3.18) eşitsizliklerinin her ikisinin de sol tarafları sifere eşit olduğuna göre (3.16) nın sol tarafı, (3.18) in sol tarafına yerleştirilebilir.

Bu durumda

$$\int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T [D] [\varepsilon_1] - \mathcal{P}_k [u_1']^T [n] [u_1'] \right\} ds \leq \int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_a]^T [\hat{D}] [\varepsilon_a] - \mathcal{P}_k [\hat{u}_a']^T [\hat{n}] [\hat{u}_a'] \right\} ds \quad (3.19)$$

elde edilir. Burada $[\hat{u}_a]$ geometrik uygunluk şartlarını sağlayan herhangi bir yerdeğiştirme durumu olduğuna göre, $[\hat{u}_a] = [u_1]$ olarak alınabilir. Bu eşitlik (3.19) da yerleştirilirse

$$\int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T [D] [\varepsilon_1] - \mathcal{P}_k [u_1']^T [n] [u_1'] \right\} ds \leq \int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T [\hat{D}] [\varepsilon_1] - \mathcal{P}_k [u_1']^T [\hat{n}] [u_1'] \right\} ds \quad (3.20)$$

veya

$$\int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T [\hat{D}-D] [\varepsilon_1] - \mathcal{P}_k [u_1']^T [\hat{n}-n] [u_1'] \right\} ds \geq 0 \quad (3.21)$$

eşitsizliğine varılır. Burada bilindiği gibi $[D]$ ve $[n]$ matrisleri F in, $[\hat{D}]$ ve $[\hat{n}]$ matrisleri $\hat{F}$ nin fonksiyonlarıdır. Yani açık olarak

$$[D] = [D(F)] , [n] = [n(F)] , [\hat{D}] = [\hat{D}(\hat{F})] , [\hat{n}] = [\hat{n}(\hat{F})]$$

şeklinde gösterilebilir.

Buna göre (3.21) eşitsizliğindeki $[\hat{D}-D]$ ve $[\hat{n}-n]$ ifadeleri F ye göre Taylor serisine açılabilir.

$$[\hat{D}-D] = (\hat{F}-F) \frac{d[D]}{dF} + \frac{1}{2} (\hat{F}-F)^2 \frac{d^2[D]}{dF^2} + \dots \quad (3.22)$$

$$[\hat{n}-n] = (\hat{F}-F) \frac{d[n]}{dF} + \frac{1}{2} (\hat{F}-F)^2 \frac{d^2[n]}{dF^2} + \dots \quad (3.23)$$

Burada $(\hat{F}-F)^2$ ikinci mertebeden terim olduğu için ihmal edilebilir. Bu durumda (3.21) ifadesi

$$\int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T (\hat{F}-F) \frac{d[D]}{dF} [\varepsilon_1] - \rho_k [u'_1]^T (\hat{F}-F) \frac{d[n]}{dF} [u'_1] \right\} ds \geq 0 \quad (3.24)$$

veya

$$\int_{\ell} \left\{ [\varepsilon_1]^T \frac{d[D]}{dF} [\varepsilon_1] - \rho_k [u'_1]^T \frac{d[n]}{dF} [u'_1] \right\} (\hat{F}-F) ds \geq 0 \quad (3.25)$$

şeklini alır. (3.25) de integral içindeki birinci terim (3.14) gerek şartı dolayısı ile sabit olduğuna göre bu eşitsizliğin sağlanabilmesi için

$$\int_{\ell} (\hat{F}-F) ds \geq 0 \quad (3.26)$$

olmalıdır. (3.26), F in herhangi bir $\hat{F}$ dan daha küçük olduğunu gösterir. Bu durumda (3.14) ile verilen gerek şartı aynı zamanda yeter şart da olmaktadır. Yani verilen malzeme, çubuklarda eksen eğrisi, plaklarda ortalama düzlem üzerinde "gerek ve yeter" olan bu şart sağlanacak şekilde yayılırsa burkulma yükü en büyük olacaktır.

3.4. MALZEME YAYILIŞININ BULUNMASI

Problemin matematik çözümünde, malzeme yayılışının belirlenmesi için gerekli olan F kesit fonksiyonu ile birlikte P_k burkulma yük parametresi ve $[u]$ burkulma modunun da bulunması gerekir. Bu fonksiyonlar ve burkulma yükü, (3.14) şartı, verilen yüklere ait denge diferansiyel denklemi ve sınır şartlarından yararlanarak belirlenir. (3.14) şartındaki sabit (3.1) den yararlanarak hesap edilebilir. Birbirine bağlı ve lineer olmıyan bu denklem sisteminin çözümü bazı basit haller dışında oldukça zordur. Bu çalışmada çözüm için bir ardışık yaklaşım yöntemi kullanılacaktır. Bu ardışık yaklaşım, biri kesit değişimi, diğeri burkulma modu ve yükü üzerinde olmak üzere iki kademeli olarak uygulanacaktır.

3.4.1. Malzeme yayılışının bulunması için uygulanan ardışık yaklaşım yöntemi

Uygulanan ardışık yaklaşım yönteminde, istenilen sonuca ulaşabilmek için belirli bir noktadan işleme başlanarak, her adımda elde edilen değerler bir sonrakinin başlangıç değeri kabul edilecek ve adım adım sonuca yaklaşılmaya çalışılacaktır. Bu problemde ardışık yaklaşım hesabına toplam malzeme hacmini minimum yapan bir F fonksiyonu tahmin edilerek başlanır. Böylece kesitleri belirlenmiş olan bu sistemde ikinci işlem olarak burkulma yükü, modu, kesit tesirleri ve yer değiştirmeler hesap edilir. Bulunan bu değerler (3.14) şartında yerine konursa F fonksiyonu için bir değer grubu ortaya çıkar. Bu değerlere göre yapının hacmi hesaplanırsa bulunan sonuç verilen hacme eşit

olmayacaktır.Çünkü (3.14)deki sabit herhangi bir değer olarak alınmıştır.Bu halde F değeri grubu sabit bir sayı ile çarpılarak sistemin hacmi verilen hacma eşit yapılabilir. Böylece elde edilen F değerleri,işlemin başında tahmin edilen F lerden farklı olacaktır.Bulunan bu F değerleri grubu ile hesaplar tekrarlanarak elde edilen sonuç verilenlere yeter derecede yakın oluncaya kadar hesaba devam edilir.

Ardışık yaklaşım yöntemlerinde aranan en önemli nokta olan yaklaşım hızı mertebesinin,işleme üniform kesit yayırlışından başlansa bile yeterli olduğu yapılan sayısal örneklerde görülmüştür.

3.4.2. Burkulma modu ve yükünün bulunması için uygulanan ardışık yaklaşım yöntemi

Kısım 3.4.1 de anlatılan ardışık yaklaşım yönteminde F kesit fonksiyonunun ilk tahmininden sonra ikinci işlem olarak burkulma yükü ve modunun bulunulduğuna değinilmişti. Gerçekte işlemin bu noktasında yani,burkulma yükü ve modunun bulunuşunda da bir ikinci ardışık yaklaşım yöntemi uygulanır.Buna göre,kesit seçiminin ardından burkulma yükü ve sistemin sınır şartlarına uygun burkulma modu tahmin edilir. Seçilen kesitlerden yararlanarak $[S]$ II. mertebe sistem rijitlik matrisi kurulur. Bu matris

$$[S]^* = [S] + [\Delta S] \quad (3.27)$$

şeklinde iki matrisin toplamı olarak yazılabilir.Burada $[S]$, sisteme ait birinci mertebe rijitlik matrisini $[\Delta S]$ ise sadece ikinci mertebe etkileri kapsayan P burkulma yüküne bağlı, $[S]$ ile aynı mertebeden bir başka matrisi göstermektedir. Seçilen moda ait yer değiştirmelerden oluşan kolon matris $[d]$ olduğuna göre, burkulma modu tanımından

$$[S]^* [d] = 0 \quad (3.28)$$

yazılabilir. $[S]^*$ ın (3.27) deki şekli (3.28)de kullanılırsa

$$[S] [d] + [\Delta S] [d] = 0 \quad (3.29)$$

(3.30)

Okunmuş ve okunulmuş olan bütün kitaplar [S₀] sabit-
lenmiş ve bu sabitlenmiş kitaplar artık başka etkileri-
ni taşıyamazlar. Yani okunmuş kitaplar değildir. Bu ne-
dendir? Bu okunmuş kitaplar, kitabın yazarı değil, oku-
lmuş ve okunulmuş olan bütün kitaplar için geçerli-
dir. Bu okunmuş kitaplar artık başka etkileri taşı-
yamazlar.

$$[A] + [B] = 0 \quad (3.31)$$

gastgeber von 1922 bis 1923,

Seçilen bir elemanı olarak seçilen $[d_i]$ yer değiştirme-
leri ve F_i baskıların yardımıyla $[S_i]$ hesaplanıp (3.31) çö-
zülür. $[d_i]$ den sonra $[S_i]$ yerdeğiştirme-leri elde edil-
dir. Şekil 3.1 ve 3.2 elemanlar tekli baskıların yükü ve
moda dağılımını, Şekil 3.3 elemanlar yükü ile yeni değe-
ri V ile ilgili olarak göstermektedir.

çakırlar $d_1, d_2, \dots, d_n$ bu işlev her adında d_1 ile verilir. Bu durumda bulunan d_2 ve d_2^1 alınıp tekniğin d_2^1 değeri d_2 burthama yüküne, d_2^1 burthama yüküne d_2 burthama yüküne yaklaşıp.

İzmit'ten burasına gitti ve modenden yararlanarak Kısım 3.4.3'de belirtildiği gibi yeni kesitler elde edilir. Bu yeni kesitlerden oluşan sistemin burkulma yükü ve modu yukarıda belirtildiği şekilde yaklaşımda hesaplandıktan sonra tekrar kesit kayını yapılıp, kesit iterasyonuna, bulunan değerler kullanılana yeten derecede yakın oluncaya kadar devam edilir. İterasyon sonunda bulunan kesitler, P_k yükü altında en büyük çapın olması gerekenlerdir.

3.5. ÖZEL DURUMLAR

Malzeme yayıllığı tayininde kullanılan (3.14) şartı bütün dış etkiler, şekil değiştirmeler ve kesit şekilleri için genel olarak çıkarılmıştır. Bu etki ve şekil değiştirmelerin bir veya bir kaçının gözönüne alınmaması ve bazı özel kesitler için (3.14) şartı daha basit haller alır. Bunlara özel durumlar denir.

3.5.1. Kesit rijitliklerinin özel değişimleri

[D] kesit rijitliği ile F kesit fonksiyonu arasında, k ve p sabit sayılar olmak üzere

$$D_i = k_i F^p_i \quad (3.33)$$

bağıntısının bulunduğu kabul edilebilir. Bu uygulamada oldukça geniş bir alanı kapsar, örneğin,

F çubuk sistemlerde kesit alanını göstermek üzere;

1) b genişliği sabit, h yüksekliği değişken olan dikdörtgen kesitlerde

Eğilme rijitliği :

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = \frac{E}{12b^2} F^3 \quad ; \quad k = \frac{E}{12b^2} \quad p = 3$$

Burulma rijitliği :

$$GJ = G \frac{bh^3}{12} = \frac{G}{12b^2} F^3 \quad ; \quad k = \frac{G}{12b^2} \quad p = 3$$

Uzama rijitliği : EF ; $k = E$ $p = 1$

Kayma rijitliği : $G'F$; $k = G'$ $p = 1$

dir.

2) h yüksekliği sabit, b genişliği değişken olan dikdörtgen kesitlerde ise

Eğilme rijitliği :

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = \frac{Eh^2}{12} F \quad ; \quad k = \frac{Eh^2}{12} \quad p = 1$$

Burulma rijitliği :

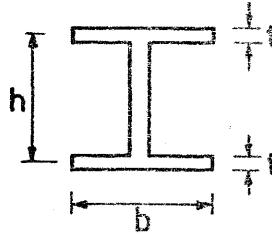
$$GJ = G\alpha b h^3 = G\alpha h^2 F \quad ; \quad k = G\alpha h^2 \quad p = 1$$

Uzama rijitliği : EF ; $k = E$ $p = 1$

Kayma rijitliği : $G'F$; $k = G'$ $p = 1$

dir.

3) Gövdesi terk edilebilen, b genişliği ve h yüksekliği sabit t başlık kalınlığı değişebilen I kesitlerinde (şekil 3.1),



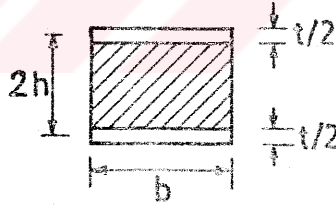
Şekil 3.1

Eğilme rijitliği :

$$EI = \frac{Ebt}{2} h^2 = \frac{Eh^2}{4} F \quad ; \quad k = \frac{Eh^2}{4} \quad p = 1$$

dir.

4) b genişliği ve $2h$ çekirdek yüksekliği sabit, t başlık kalınlığı değişken sandviç kesitlerde



Şekil 3.2

Eğilme rijitliği :

$$EI = Eh^2 bt = Eh^2 F \quad ; \quad k = Eh^2 \quad p = 1$$

dir.

5) D çapı değişken olan daire kesitlerde :

Eğilme rijitliği :

$$EI = E \frac{\pi D^4}{64} = \frac{E}{4\pi} F^2 \quad ; \quad k = \frac{E}{4\pi} \quad p = 2$$

dir. Daire kesit gibi homotetik olarak değişken kesitlerde eğilme rijitliği için $p = 2$ dir.

6) Plaklarda F, h kalınlığını ifade eder. Bu durumda:

$$\text{Eğilme rijitliği : } \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \quad k = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \quad p = 3$$

olur.

(3.33) bağıntısı gözönüne alınarak (3.14) şartındaki rijitliğin F ye göre türevi yazılırsa,

$$\frac{dD_i}{dF} = k_i p_i F^{p_i-1} = \frac{k_i p_i F^{p_i}}{F} = p_i \frac{D_i}{F}$$

elde edilir. p_i ler aynı bir p ye eşitseler

$$\frac{d[D]}{dF} = p \frac{[D]}{F} \quad (3.34)$$

elde edilir.

3.5.2. Yapı ağırlığının gözönüne alınmaması

Yapı ağırlığı hesaba katılmaz ise $[P] = \mathcal{P}[n]$ ifadesindeki $[n]$ kolon matrisi sabit bir matris olacağından F kesit fonksiyonundan bağımsızdır. Bu durumda $[n]$ in F ye göre türevi sıfır olacağı için (3.14) şartının ikinci terimi ortadan kalkar ve gerek ve yeter şart olarak

$$[\varepsilon]^T \frac{d[D]}{dF} [\varepsilon] = \text{Sabit} \quad (3.35)$$

elde edilir.

(3.35) şartının iki özel durumu düşünülebilir. Biri yalnız eğilme şekil değiştirmelerinin hesaba katılması hali, diğeri ise eğilme şekil değiştirmeleri ile birlikte kayma şekil değiştirmelerinin de düşünülmesidir.

3.5.2.1. Yalnız eğilme şekil değiştirmelerinin hesaba katılması

Yalnız eğilme şekil değiştirmeleri gözönüne alındığında (3.34) ve (3.35) beraber düşünülürse

$$[\varepsilon]^T \frac{[D]}{F} [\varepsilon] = \text{Sabit} \quad (3.36)$$

$$\frac{[\varepsilon]^T [D] [\varepsilon]}{F} = \text{Sabit}$$

bulunur. Bu özel şart [9] da Kısım 3.5.1 de anlatılan sandviç kesitler için çıkarılmıştır. (3.36) şartı çubuk ve plak sistemlerde daha açık olarak yazılabilir.

Çubuk sistemlerde :

Eğilme rijitliği : $D = EI$

Eğilme şekil değiştirmelerinin $\epsilon = \frac{M}{EI}$ olduğu düşünülerek (3.36) tekrar yazılırsa

$$\frac{\frac{M}{EI} EI \frac{M}{EI}}{F} = \text{Sabit} \quad (3.37)$$

veya

$$\frac{\frac{M^2}{EI}}{F} = \text{Sabit} \quad (3.38)$$

elde edilir.

Bu ifadenin payı bilindiği gibi eğilme şekil değiştirme enerjisini, paydası ise birim hacmi vermektedir. Bu durumda (3.14) ün özel bir hali olan (3.38) şartı, burkulma sırasında birim hacme gelen eğilme şekil değiştirme enerjisinin sabitliğini ifade etmektedir. Yani yalnız eğilme şekil değiştirmelerinin gözönüne alındığı çubuk sistemlerde verilen malzeme, birim hacme karşı gelen eğilme şekil değiştirme enerjisi sabit kalacak şekilde eksen eğrisi üzerinde yayılırsa en büyük burkulma yükü elde edilir. Bu şart

çubuklarda bir başka şekilde de gösterilebilir. I.F in kesit mukavemet momentinin karesi ile orantılı olduğu düşünülürse (3.38) yerine

$$\left(\frac{M}{W} \right)^2 = \text{Sabit} \quad (3.39)$$

veya

$$\sigma = \text{sabit} \quad (3.40)$$

yazılabilir. Bu şart, verilen malzeme, dış liflerdeki gerilmeler burkulma şekil değiştirmesi sırasında sabit kalacak şekilde çubuk eksenini üzerinde yayılacak olursa en büyük burkulma yükünün elde edileceğini ifade etmektedir. (3.40) şartı [5] de kullanılmış ve bu şart yardımı ile çıkarılan diferansiyel denklemin [2] de varyasyon prensibi ile elde edilen diferansiyel denklemle aynı olduğu gösterilmiştir.

$EI = kF^p$ olduğu düşünülürse (3.38) için

$$\frac{M^2}{F^{p+1}} = \text{sabit} \quad (3.41)$$

yazılabilir. M_o ve F_o seçilen bir referans kesidinin değerleri olduğuna göre

$$\frac{M_o^2}{F_o^{p+1}} = \text{sabit} \quad (3.42)$$

dir. (3.41) ve (3.42) deki sabitler aynı sistem için birbirlerine eşittir, buna göre

$$\frac{M^2}{F^{p+1}} = \frac{M_o^2}{F_o^{p+1}} \quad (3.43)$$

veya

$$\frac{F}{F_o} = \sqrt[p+1]{\frac{M^2}{M_o^2}} \quad (3.44)$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi seçilen bir referans

kesidine göre kesit değişimi boyutsuz olarak elde edilebilmektedir.

Plak sistemlerde:

İzotrop malzeme için eğilme rijitliğinin

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

olduğu bilinmektedir. Burada ν Poisson oranıdır. Daha önce belirtildiği gibi $D_i = k_i F_i$ ifadesindeki F plaklarda h kalınlığına karşı gelmektedir ve bu durumda $p = 3$ dür. Plaklar için (3.36) şartı

$$\frac{[\epsilon]^T [D] [\epsilon]}{h} = \text{sabit} \quad (3.45)$$

şeklindedir. Bu ifadenin her iki tarafı $[I] = [D]^{-1} [D]$ birim matrisi ile çarpılırsa

$$\frac{[\epsilon]^T [D]^T [D]^{-1} [D] [\epsilon]}{h} = \text{sabit} \quad (3.46)$$

elde edilir. (2.12) ye göre $[\sigma] = [D] [\epsilon]$ olduğu düşünülürse

$$\frac{[\sigma]^T [D]^{-1} [\sigma]}{h} = \text{sabit} \quad (3.47)$$

yazılabilir. (3.44) in inversi alınırsa $[D]^{-1}$ için

$$[D]^{-1} = \frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

bulunur. Bu durumda (3.47)

$$\frac{[\sigma]^T \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} [\sigma]}{\frac{Eh^4}{12}} = \text{sabit} \quad (3.49)$$

şeklini alır. Burada ν ye bağlı matrisi $[\bar{D}]$ ile göstere-
rek $p = 3$ olduğu düşünülürse, (3.14) gerek ve yeter şartı
için

$$\frac{[\sigma]^T [\bar{D}] [\sigma]}{h^{p+1}} = \text{sabit} \quad (3.50)$$

elde edilir.

3.5.2.2. Eğilme şekil değiştirmeleri ile birlikte kayma şekil değiştirmelerinin de hesaba katılması

Kayma şekil değiştirmeleri de hesaba katılmak istendiğinde $[\epsilon]$ şekil değiştirmelerini ve $[D]$ kesit rijitliklerini iki kısımda düşünmek gerekir. Bu durumda (3.36) ifadesi

$$[\epsilon_M]^T \frac{d[D_M]}{dF} [\epsilon_M] + [\epsilon_T]^T \frac{d[D_T]}{dF} [\epsilon_T] = \text{Sabit} \quad (3.51)$$

şeklini alır. Burada;

$[\epsilon_M]$: Eğilme şekil değiştirmelerini,

$[\epsilon_T]$: Kayma şekil değiştirmelerini,

$[D_M]$: Eğilme rijitliğini,

$[D_T]$: Kayma rijitliğini

gösteren matrislerdir.

(3.33) deki k ve p sabitleri (Kısım 3.5.1) de açıklandığı gibi eğilme ve kayma rijitlikleri için farklıdır.

$$D_M = k_1 F^{p_1}$$

$$D_T = k_2 F^{p_2}$$

olarak gösterilirse, bu rijitliklerin F ye göre türevleri (3.34) yardımıyla

$$\frac{d[D_M]}{dF} = p_1 \frac{[D_M]}{F}$$

$$\frac{d[D_T]}{dF} = p_2 \frac{[D_T]}{F}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (3.51) için

$$\frac{p_1 [\epsilon_M]^T [D_M] [\epsilon_M] + p_2 [\epsilon_T]^T [D_T] [\epsilon_T]}{F} = \text{Sabit} \quad (3.52)$$

elde edilir. Bu ifade çubuk sistemler için açık olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\epsilon_M = \frac{M}{EI}$$

$$\epsilon_T = \frac{T}{G'F}$$

$$D_M = EI = k_1 F^{p_1}$$

$$D_T = G'F = k_2 F^{p_2}$$

olduğuna göre (3.52) tekrar yazılırsa

$$\frac{p_1 \frac{M}{EI} \frac{M}{EI} + p_2 \frac{T}{G'F} \frac{T}{G'F}}{F} = \text{sabit}$$

$$\frac{p_1 \frac{M^2}{EI} + p_2 \frac{T^2}{G'F}}{F} = \text{sabit} \quad (3.53)$$

veya

$$p_1 \frac{M^2}{k_1 F^{p_1+1}} + p_2 \frac{T^2}{k_2 F^{p_2+1}} = \text{sabit} \quad (3.54)$$

elde edilir.

Bilindiği gibi dolu kesitli yapı elemanlarında kesme kuvvetinin kritik yüke etkisi çok azdır. Buna karşın çubuk çok parçalı ise kesme kuvvetinin etkisi artar. Örneğin bileşik kolonlarda kesme kuvvetinin etkisi ihmal edilemeyecek kadar fazladır. Bağ levhalı çubuklarda, burkulma yükünü maksimum yapan malzeme yayılışının (3.54) yardımı ile nasıl tayin edileceği Bölüm 5 de gösterilmiştir.

3.6. KESİTLER İÇİN SINIRLAMALAR

(3.14) gerek ve yeter şartı ile elde edilen F değerleri başka nedenlerle sınırlamalara uğrayabilir. Bunların en önemlileri geometrik ve gerilme kökenli sınırlamalardır. Geometrik sınırlamalar kullanışlılık ve estetik yönünden gerekebilir. Benzer şekilde yapının her noktasında mukavemet yönünden gerilmelerin sınır değerlerini aşmamaları

için de bazı gerilme sınırlamaları koyulabilir.

Bu durumda ardışık yaklaşım yöntemi uygulanırken her adımda F fonksiyonunun değerleri elde edilirken yukarıda söylenilen sınırlamaların da gözönünde tutulması gerekir. Ancak bu şekilde elde edilen F değerlerinin kesin optimum çözümü verecekleri söylenemez. Gerçek optimum çözüm için konmak istenen sınırlamaları yan şart olarak (3.2) ye eklemek gerekir. Bununla birlikte ardışık yaklaşım hesaplarında kesitlere ait sınırlamaların yukarıda açıklandığı gibi yaklaşık olarak hesaba katılmasının optimum çözümde önemli bir değişikliğe yol açmayacağı beklenebilir. Yalnız eğilme şekil değiştirmelerinin hesaba katılması özel durumunda, gerilmelerin belli bir değerden büyük olmaması yan şartını gözönüne alan çalışmalar yapılmıştır [8] , [12] , [16].

BÖLÜM 4

YAPI SİSTEMLERİNİN İKİNCİ MERTEBE HESABINDA

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Bu çalışmada gözönüne alınan yapı sistemlerinin hesabında sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem sistemdeki geometrik, mekanik ve bünyesel süreksizliklerin hesaba katılabilmesi ve matris metodlarının kullanılabilmesi açısından uygun olmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin bu problem için bir üstünlüğü de kesit değişimlerinin kolayca gözönüne alınabilmesidir. Amacımız burkulma yükünü en büyük yapacak malzeme yayılışını belirlemek olduğuna göre, çözüm sonucu elde edilen sistemler değişken kesitli olacaklardır. İşte bu kesit değişimlerini, sistemi yeter derecede küçük sonlu elemanlara ayırarak hesaba katmak mümkün olacaktır.

Sonlu elemanlar yönteminde sistem, sonlu sayıda yeter derecede küçük elemanlara bölünerek ayrı bir sistem olarak idealleştirilir. Bu elemanların düğüm noktalarından birbirlerine bağlı oldukları kabul edilir. Düğüm noktalarındaki yer değiştirmelere, uç yer değiştirmeleri iç kuvvet bileşenlerine de uç kuvvetleri denir. Sonlu elemanların birim kuvvet, birim yer değiştirme ve yükleme matrislerini belirlemek için eleman içinde yer değiştirme alanları tarif edilir. Bu yer değiştirme alanları elemanın iç bölgelerinde ve ayrıtlar boyunca denge denklemlerini ve geometrik uygunluk şartlarını sağlamalıdır. Ayrıca eleman boyutları sonsuz küçük yapıldığında bulunan çözüm klasik elastisite teorisindeki çözüme gitmelidir.

4.1. KULLANILAN SONLU ELEMANLARIN BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBE RİJİTLİK MATRİSLERİ

Birinci mertebe etkileri ifade eden $[S]$ ve ikinci mertebe etkileri ifade eden $[\Delta S]$ matrislerinin kurulabilmesi için önce sistemi meydana getiren elemanların $[K]$ birinci

mertebe ve $[\Delta K]$ ikinci mertebe rijitlik matrislerinin kurulması gerekir.

İkinci mertebe etkilerin gözönüne alındığı herhangi bir ij elemanında $[P]_{ij}$ uç kuvvetleri ve $[d]_{ij}$ uç yer-değiştirmeleri arasında

$$[P]_{ij} = [K^*]_{ij} [d]_{ij} \quad (4.1)$$

bağıntısı vardır [19]. Burada $[K^*]$ elemanın rijitlik matrisidir. Mertebesi elemanın uç yer değiştirmeleri sayısına göre değişen bu matris esas köşegenine göre simetriktir.

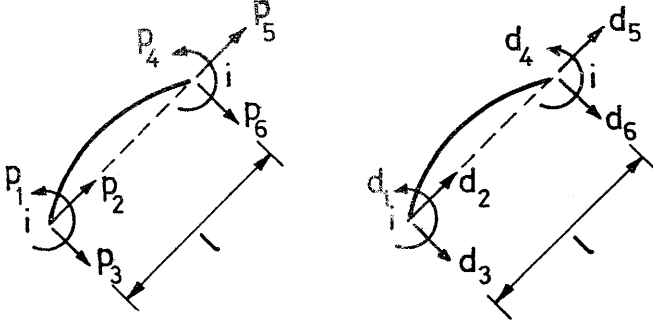
$[K^*]$ matrisi $[S]$ de olduğu gibi iki kısımda düşünülebilir.

$$[K^*] = [K] + [\Delta K] \quad (4.2)$$

Burada $[K]$, birinci mertebe rijitlik matrisidir. Bu matris, elemanın elastik ve geometrik özelliklerine bağlı, fakat iç kuvvetlerden bağımsızdır. $[\Delta K]$ ikinci mertebe rijitlik matrisi ise, $[K]$ ile aynı mertebeden olan ve elemanın elastik, geometrik özelliklerine ve elemana etkiyen normal kuvvete bağlı bir matristir.

4.1.1. Çubuk elemanın birinci ve ikinci mertebe rijitlik matrisleri

Düzlemde herhangi bir ij çubuğunun uç kuvvet ve uç yer değiştirmeleri Şekil 4.1 de gösterildiği gibidir.



Şekil 4.1

$[P]_{ij}$ uç kuvvetleri ve $[d]_{ij}$ yer değiştirmeleri

$$[P]_{ij} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} \quad [d]_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde kolon matrislerdir. Bu durumda (4.2) deki $[K]$ ve $[\Delta K]$ matrisleri 6×6 mertebesinde. $[K]$, uç noktalarındaki yer değiştirmelere göre gruplanırsa, her birinin mertebesi 3×3 olan dört alt matrise ayrılabilir.

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Benzer gruptama $[\Delta K]$ matrisi için de aynı şekilde yapılabilir. Eğilme rijitliği EI , uzama rijitliği EF ve boyu ℓ olan bir çubuk elemanda $[K]$ rijitlik matrisi aşağıdaki gibidir [19].

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & 0 & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & \frac{-EF}{\ell} & 0 \\ \frac{-6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{-6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{-12EI}{\ell^3} \\ \frac{2EI}{\ell} & 0 & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{-EF}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{-12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix}$$

(4.5)

$[\Delta K]$ matrisi için elemana etkiyen P normal kuvveti-
ne bağlı bazı büyüklükleri tariflemek gerekir.

$$\varphi = l \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (4.6)$$

olarak tariflenirse, buna bağlı olarak hesaplanan φ_1 ,
 φ_2 , φ_3

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{4} \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi}$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi}{2} \frac{\varphi - \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi} \quad (4.7)$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi^2}{6} \frac{1 - \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi}$$

büyüklükleri yardımı ile $[\Delta K]$ matrisi (4.8) deki gibi
elde edilir [19].

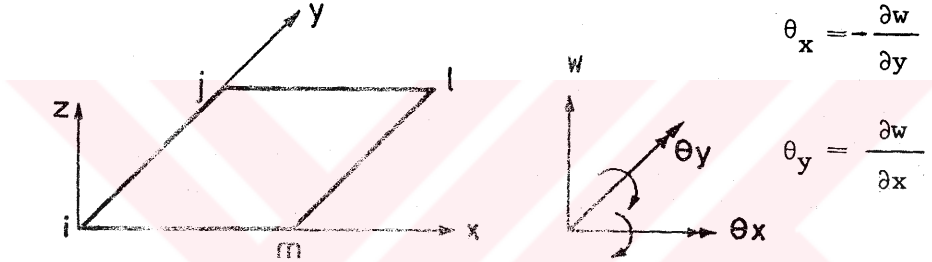
[AK] =

$\frac{4EI}{l}(\varphi_1 - 1)$	0	$-\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	$\frac{2EI}{l}(\varphi_2 - 1)$	$\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$
0	0	0	0	0
$-\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	0	$\frac{12EI}{l^3}(\varphi_3 - 1) - \frac{P}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	$-\frac{12EI}{l^3}(\varphi_3 - 1) + \frac{P}{l}$
$\frac{2EI}{l}(\varphi_2 - 1)$	0	$-\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	$\frac{4EI}{l}(\varphi_1 - 1)$	$\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$
0	0	0	0	0
$\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	0	$-\frac{12EI}{l^3}(\varphi_3 - 1) + \frac{P}{l}$	$\frac{6EI}{l^2}(\varphi_3 - 1)$	$\frac{12EI}{l^3}(\varphi_3 - 1) - \frac{P}{l}$

(4.8)

4.1.2. Dikdörtgen plak elemanın birinci mertebe rijitlik matrisi

Kısım (4.1) de tanımlanan birinci mertebe rijitlik matrisi dikdörtgen plak elemanı için aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Bir ijm dikdörtgen plak elemanın uç yer değiştirmeleri olarak, dikdörtgenin tepe noktasındaki w çökmeleri θ_x ve θ_y dönmeleri alınır, uç yer değiştirmeleri sayısı $3 \times 4 = 12$ olur, Şekil 4.2.



Şekil 4.2

Herhangi bir i noktasının uç yer değiştirmeleri

$$[d_i] = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

olarak gösterilmek üzere, mertebesi 12×1 olan uç yer değiştirmeleri kolon matrisi

$$[d] = \begin{bmatrix} [d_i] \\ [d_j] \\ [d_k] \\ [d_m] \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılabilir. Eleman içindeki yerdeğiştirme bileşenlerinin bu uç yerdeğiştirmelerine bağlı ifadelerini elde edebilmek amacı ile yerdeğiştirme bileşenleri için koordinatlara bağlı fonksiyonlar seçilir. Bu işlem için polinomlardan yararlanılabilir. Seçilen polinomların terim sayısı uç yerdeğiştirmelerinin sayısına eşit olmalıdır. Bu durumda Şekil 4.2 deki eleman için 12 terimli olan

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (4.11)$$

ifadesi seçilebilir. Burada a_i ler koordinatlara bağlı katsayılardır. w fonksiyonu uç yerdeğiştirmelerine bağlı olarak matris gösterilimi ile

$$w = [A][d] \quad (4.12)$$

olarak yazılabilir. $[A]$ matrisi

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1-\xi\eta-(3-2\xi)\xi^2(1-\eta)-(1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2b \\ -\xi(1-\xi)^2(1-\eta)a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2+\xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2b \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2\eta-\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2b \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta)+\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)a \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

şeklindedir. [21]. 1×12 mertebesinde olan bu matrisin herhangi bir i sütunu, d_i yer değiştirmesi 1, diğerleri sıfır iken w fonksiyonunun ifadesidir. (4.13) deki a ve b plak elemanın boyutları olmak üzere $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ olan boyutsuz değişkenlerdir.

[K] eleman rijitlik matrisini yukarıda verilen w fonksiyonuna bağlı olarak elde edebilmek için şu tariflerin verilmesi gerekir.

U şekil değiştirme enerjisi bilindiği gibi

$$U = \frac{1}{2} \iint [\sigma]^T [\epsilon] \, dx \, dy \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. Burada $[\epsilon]$ şekil değiştirme matrisi, ince plak teorisinde

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

şeklindedir. $[\sigma]$ iç kuvvet matrisi ise

$$[\sigma] = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T \quad (4.16)$$

dir.

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

olarak tanımlanan bir $[\partial]$ matrisi (4.12) ve (4.15) ile beraber düşünülürse $[\epsilon]$ için

$$[\epsilon] = [\partial] [A] [d] = [B] [d] \quad (4.18)$$

yazılabilir. Ayrıca (2.3) iç kuvvet-şekil değiştirme bağıntısı hatırlanacak olursa

$$[\sigma] = [D] [B] [d] \quad (4.19)$$

elde edilir. Bunlara göre (4.14) de verilen şekil değiştirme enerjisi ifadesi

$$U = \frac{1}{2} \iint [d]^T [B]^T [D] [B] [d] \, dx \, dy \quad (4.20)$$

halini alır. Oysa şekil değiştirme enerjisi $[K]$ rijitlik matrisine bağlı olarak

$$U = \frac{1}{2} [d]^T [K] [d] \quad (4.21)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (4.21) ve (4.20) ifadeleri karşılaştırılacak olursa $[K]$ için

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] \, dx \, dy \quad (4.22)$$

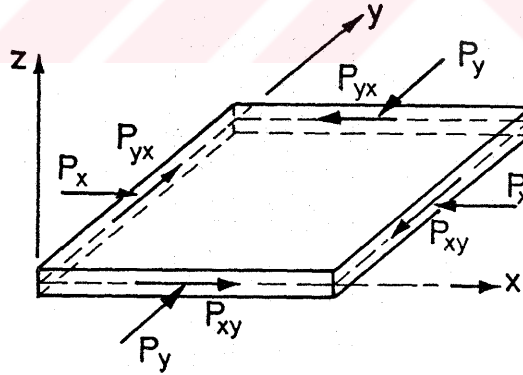
gösterilimi bulunur. (4.19) ve (4.22) açık olarak görülmek istenirse, matris çarpımları ve integraller yapılarak elemanın rijitlik ve iç kuvvet matrisleri (4.23) ve (4.24) deki gibi elde edilir [19].

Yukarıda elde edilen $[K]$ matrisi görüldüğü gibi 12x12 mertebeden kare bir matristir. Bu matris çubuk elemanda olduğu gibi uç noktalarındaki yer değiştirmelere göre gruplanırsa, her birinin mertebesi 3x3 olan 16 alt matrise ayrılabilir (4.25).

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} & [k]_{il} & [k]_{im} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} & [k]_{jl} & [k]_{jm} \\ [k]_{li} & [k]_{lj} & [k]_{ll} & [k]_{lm} \\ [k]_{mi} & [k]_{mj} & [k]_{ml} & [k]_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.1.3. Dikdörtgen plak elemanın ikinci merteye rijitlik matrisi

Plak elemanın ortalama düzlemine P_x , P_y , $P_{xy} = P_{yx}$ kuvvetleri etkimektedir. (Şekil 4.3). Bu kuvvetlerin, aralarındaki oran sabit kalacak şekilde değiştikleri kabul edilmiştir.



Şekil 4.3

Ortalama düzlemde şekil değiştirme meydana getirmeyen bir sınırlı eğilmede P_x , P_y , P_{xy} kuvvetlerinin yaptığı iş bilindiği gibi

$$V = \frac{1}{2} \iint \left\{ P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + P_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2P_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy$$

(4.26)

olarak yazılabilir [22]. Bu iş ifadesini matris gösterilimi ile yazabilmek amacı ile aşağıdaki tarifler yapılabilir. x e ve y ye göre olan türevler ile tanımlanan

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$[\Delta]$ matrisi (4.12) ye uygulanırsa (4.26) daki türev ifadeleri için

$$[\Delta w] = [\Delta] [A] [d] \quad (4.28)$$

yazılabilir.

Elemana etkiyen kuvvetler ise

$$[P] = \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{xy} & P_y \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

şeklinde bir matris ile gösterilebilir.

(4.28) ve (4.29) dan yararlanarak (4.26) iş ifadesi matris gösterilimi ile

$$v = \frac{1}{2} \iint [\Delta w]^T [P] [\Delta w] dx dy \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu ifade de $[\Delta w]$ nın eşiti yerleştirilirse

$$v = \frac{1}{2} \iint [d]^T [A]^T [\Delta]^T [P] [\Delta] [A] [d] dx dy \quad (4.31)$$

bulunur. Bu ifade $[\Delta K]$ ikinci mertebe rijitlik matrisine bağlı olarak

$$v = \frac{1}{2} [d]^T [\Delta K] [d] \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\Delta K]$ yukarıdan görüleceği üzere

$$[\Delta K] = \iint [A]^T [\Delta]^T [P] [\Delta] [A] dx dy \quad (4.33)$$

olarak elde edilir. (4.13), (4.27) ve (4.29), (4.33) deki yerlerine konursa,

$$[\Delta K] = \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]^T}{\partial x} & \frac{\partial [A]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x & P_{xy} \\ P_{yx} & P_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial [A]}{\partial x} \\ \frac{\partial [A]}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy$$

veya

$$\begin{aligned}
 [\Delta K] = \iint \left\{ \frac{\partial [A]^T}{\partial x} P_x \frac{\partial [A]}{\partial x} + \frac{\partial [A]^T}{\partial y} P_y \frac{\partial [A]}{\partial y} + \right. \\
 \left. \frac{\partial [A]^T}{\partial x} P_{yx} \frac{\partial [A]}{\partial y} + \frac{\partial [A]^T}{\partial y} P_{xy} \frac{\partial [A]}{\partial x} \right\} dx dy
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

bulunur. Görüldüğü gibi (4.34) P_x , P_y ve $P_{xy} = P_{yx}$ kuvvetlerine bağlı 3 matrisin toplamı olarak

$$[\Delta K] = [\Delta K]_{P_x} + [\Delta K]_{P_y} + [\Delta K]_{P_{xy}} \tag{4.35}$$

düşünülebilir. Bu matrisin elemanları (4.34) den yararlanılarak tek tek yazılırsa

$$[\Delta K]_{P_x} = P_x \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial x} \frac{\partial [A]}{\partial x} dx dy \tag{4.36}$$

$$[\Delta K]_{P_y} = P_y \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial y} \frac{\partial [A]}{\partial y} dx dy \tag{4.37}$$

$$[\Delta K]_{P_{xy}} = P_{xy} \iint \left\{ \frac{\partial [A]^T}{\partial y} \frac{\partial [A]}{\partial x} + \frac{\partial [A]^T}{\partial x} \frac{\partial [A]}{\partial y} \right\} dx dy$$

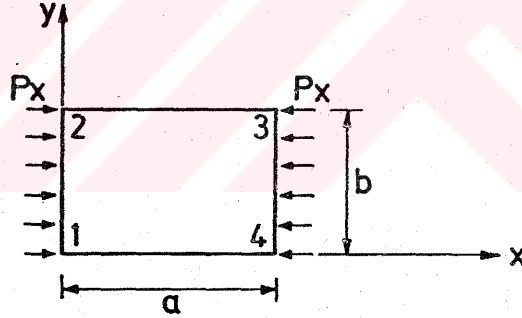
(4.38)

elde edilir.

Sistemde, P_x , P_y , P_{xy} kuvvetlerinden hangisi varsa, bunlarla ilgili matrislerin toplamı sistemin ikinci mertebe rijitlik matrisini meydana getirir. Bu şekilde elde edilen $[\Delta K]$, $[K]$ matrisi gibi 12×12 mertebeden bir matristir ve uç noktalarındaki yer değiştirmelere göre gruplanırsa (4.25) de olduğu gibi mertebesi 3×3 olan 16 alt matrise ayrılır.

4.1.3.1. Düzlemsel P_x Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi

Elemana Şekil (4.4) de olduğu gibi yalnız P_x kuvvetleri etkiyorsa ikinci mertebe rijitlik matrisi (4.36) ya eşit olur. Yani $[\Delta K]$



Şekil 4.4

$$[\Delta K]_{P_x} = P_x \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial x} \frac{\partial [A]}{\partial x} dx dy$$

şeklindedir. $[A]^T$ matrisi (4.13) de verilmiştir. Bu matrisin x e göre türevi alınır

$$\frac{\partial [A]^T}{\partial x} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -6\xi - \eta + 6\xi^2 + 6\xi\eta + 3\eta^2 - 6\xi^2\eta - 2\eta^3 \\ (-\eta + 2\eta^2 - \eta^3)b \\ (-1 + 4\xi - 3\xi^2 + \eta - 4\xi\eta + 3\xi^2\eta)a \\ (-3\eta^2 + 2\eta^3 + \eta - 6\xi\eta + 6\xi^2\eta) \\ (\eta^2 - \eta^3)b \\ (-\eta + 4\xi\eta - 3\xi^2\eta)a \\ 6\xi\eta - 6\xi^2\eta - \eta + 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ (-\eta^2 + \eta^3)b \\ (2\xi\eta + 3\xi^2\eta)a \\ 6\xi - 6\xi\eta - 6\xi^2 + 6\xi^2\eta + \eta - 3\eta^2 + 2\eta^3 \\ (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)b \\ (2\xi - 2\xi\eta - 3\xi^2 + 3\xi^2\eta)a \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

elde edilir.

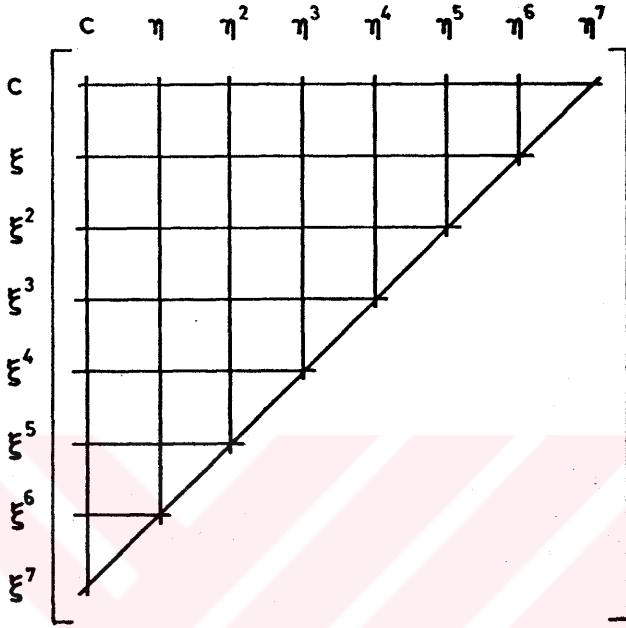
(4.36) ya göre $[K]_{p_x}$ matrisini elde etmek için (4.39) da verilen kolon matrisi kendi transpozesi ile çarpmak ve plak sınırlarında integre etmek gerekmektedir. Bu işlemler Bölüm 7 de anlatılan FIYUL programı ile yapılmıştır. (4.39) matrisinin kendi transpozesi ile çarpımı sonucu elde edilen 12×12 mertebeden olan matrisin her elemanı, iki polinomun çarpımıyla elde edilen yeni bir polinom olacaktır. Bu polinom çarpımlarını elektronik hesap makinasında yapabilmek için polinomların her biri, bir yarım matris şeklinde gösterilmiştir. Polinomların her birinin bir sabit teriminin olduğu ve toplam en büyük üssün 3 olduğu düşünülerek kurulan 4 satır ve 4 sütunlu bir yarım matrisin katsayıları Şekil 4.5 de verildiği gibi düzenlenmiştir.

	c	η	η^2	η^3
c				
ξ				
ξ^2				
ξ^3				

Şekil 4.5

Örneğin 2. satır 3. kolonun kesim yerindeki sayı $\xi\eta^2$ nin katsayısıdır. Bu matrisin sol üst yarısında eleman vardır. Sağ alt yarı ise boştur. (4.39), bu şekilde kurulmuş 12 alt matrise ayrılarak bu matrislerin çarpımları yapılır. Çarpım sonucu elde edilen bu polinomun en büyük üssü 6 olacaktır. Bir de sabit terim olduğu düşünülürse bu polinomun katsayıları 7×7 lik bir yarım matrise Şekil 4.6 daki gibi yerleştirilecektir.

Böylece her terimin katsayısı belirlenmiş olacaktır. Bu matris elde edildikten sonra integrasyon için, her terimin katsayısını bulunduğu satır sütun numarası çarpımına bölmek ve bütün sayıları toplamak yetecektir.



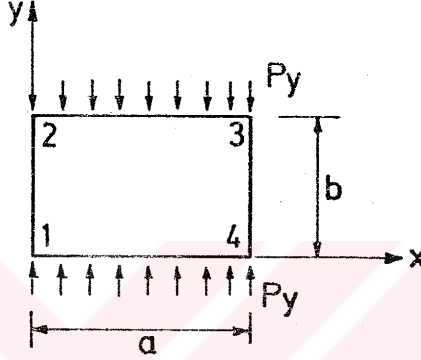
Şekil 4.6

Çünkü her elemanın bulunduğu satır ve sütun numarası x in ve y nin üssünden bir fazladır, ve $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ tipinde boyutsuz değişkenler olduğu için integrasyon sonucu plak sınırlarının değerleri yerlerine konduğunda her terimde axb çarpanı olacaktır. Bu şekilde hesap edilen katsayıların toplamı, 12×12 mertebeden olan $[\Delta K]_p$ matrisinin bir elemanını verecektir. Bütün çarpım ve integrasyonlar bu şekilde yapılarak $[\Delta K]_p$ matrisi (4.40) da olduğu gibi elde edilmiştir.

[illegible]

(4.40)

4.1.3.2. Düzlemsel P_y Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi



Şekil 4.7

Şekil 4.7 de verilen dikdörtgen plak elemanı, y doğrultusunda düzgün yayılı P_y kuvvetlerinin etkisindedir. Bu şekilde yüklü olan elemanın ikinci mertebe rijitlik matrisi (4.37) ye eşit olacaktır. Yani $[\Delta K]$

$$[\Delta K]_{P_y} = P_y \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial y} \frac{\partial [A]}{\partial y} dx dy$$

şeklindedir. (4.13) de verilen $[A]^T$ matrisinin y değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial [A]^T}{\partial y} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} -6\eta - \xi + 6\eta^2 + 3\xi^2 + 6\xi\eta - 2\xi^3 - 6\xi\eta^2 \\ (1 - 4\eta + 3\eta^2 - \xi + 4\xi\eta - 3\xi\eta^2)b \\ (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)a \\ 6\eta - 6\eta^2 - 6\xi\eta + 6\xi\eta^2 + \xi - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ (-2\eta + 3\eta^2 + 2\xi\eta - 3\xi\eta^2)b \\ (-\xi + 2\xi^2 + \xi^3)a \\ (3\xi^2 - 2\xi^3 - \xi + 6\xi\eta - 6\xi\eta^2) \\ (-2\xi\eta + 3\xi\eta^2)b \\ (\xi^2 - \xi^3)a \\ -3\xi^2 + 2\xi^3 + \xi - 6\xi\eta + 6\xi\eta^2 \\ (\xi - 4\xi\eta - 3\eta^2)b \\ (-\xi^2 + \xi^3)a \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

elde edilir.

(4.37) den görüldüğü gibi, $[\Delta K]_{P_y}$ matrisini elde etmek için, (4.41) matrisinin kendi transpozesi ile çarpımı sonunda elde edilen 12×12 mertebeden olan yeni matrisin elemanlarını plak sınırlarında integre etmek gerekmektedir. Bu işlemler Kısım 4.1.3.1 de anlatılan düşünce ile FIYU1 programı ile yapılmış ve $[\Delta K]_{P_y}$ için (4.42) deki matris elde edilmiştir.

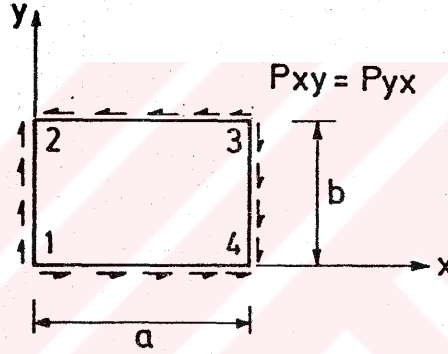
天

[illegible]

(4.42)

4.2.3.3. Düzlemsel $P_{xy}=P_{yx}$ Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi

Şekil 4.8 de gösterildiği gibi yalnız $P_{xy} = P_{yx}$ kuvvetleri etkisindeki plak elemanının ikinci mertebe rijitlik matrisi (4.38) e eşit olur. Yani $[\Delta K]$



Şekil 4.8

$$[\Delta K]_{P_{xy}} = P_{xy} \iint \left\{ \frac{\partial [A]^T}{\partial y} \frac{\partial [A]}{\partial x} + \frac{\partial [A]^T}{\partial x} \frac{\partial [A]}{\partial y} \right\} dx dy$$

şeklindedir. Burada parantez içindeki ilk terimin hesabı, (4.39) ve (4.41) de verilen matrislerden yararlanarak FIYU1 programı ile yapılırsa, (4.43) de verilen $[\Delta K]_{P_{xy}}$ matrisi elde edilir.

(4.38) deki ikinci terim, görüldüğü gibi birinci terimin transpozesi şeklindedir. Buna göre (4.43) nin transpozesi alınır ve kendisi ile toplanırsa $[\Delta K]_{P_{xy}}$ elde edilir, (4.44).

1
[OK] P_{xy1} 5040

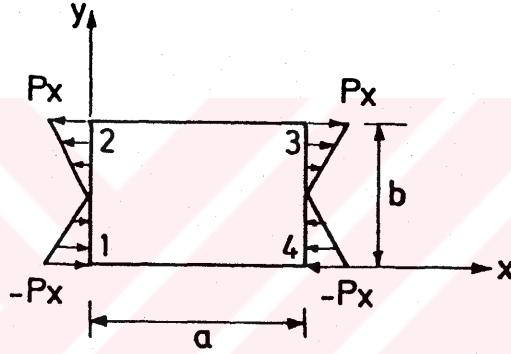
1260	-252b	-252a	-1260	252b	252a	-1260	252b	-252a	1260	-252b	252a
252b	0	-35ab	-252b	42b ²	35ab	-252b	42b ²	-35ab	252b	0	252a
252a	-35ab	0	-252a	35ab	0	252a	-35ab	42a ²	-252a	35ab	-252a
1260	252b	-252a	-1260	-252b	252a	-1260	-252b	-252a	1260	252b	252a
-252b	-42b ²	35ab	252b	0	-35ab	252b	0	35ab	-252b	-42b ²	-35ab
252a	35ab	0	-252a	-35ab	0	252a	35ab	42a ²	-252a	-35ab	-42a ²
-1260	-252b	252a	1260	252b	-252a	1260	252b	252a	-1260	-252b	-252a
252b	42b ²	-35ab	-252b	0	35ab	-252b	0	-35ab	252b	42b ²	35ab
-252a	-35ab	42a ²	252a	35ab	-42ab	-252a	-35ab	0	252a	-35ab	0
-1260	252b	252a	1260	-252b	-252a	1260	-252b	252a	-1260	252b	-252a
-252b	0	35ab	252b	-42b ²	-35ab	252b	-42b ²	35ab	-252b	0	-35ab
-252a	35ab	42a ²	252a	-35ab	-42a ²	252a	-35ab	0	252a	-35ab	0

(4.43)

[illegible]

4.2.3.4. Lineer Yayılı P_x ve P_y Kuvvetlerinin Etkisindeki Dikdörtgen Plak Elemanının İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi

Plak elemanına x doğrultusunda lineer yayılı olarak etkiyen P_x kuvveti, y değişkeninin bir fonksiyonudur. Şekil 4.9 dan da görüldüğü gibi bu fonksiyon $P_x(2\eta-1)$ şeklindedir.



Şekil 4.9

Bu durumda ikinci mertebe rijitlik matrisi

$$[\Delta K]_{P_x(2\eta-1)} = P_x \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial x} (2\eta-1) \frac{\partial [A]}{\partial x} dx dy \quad (4.45)$$

şeklini alır. $[A]^T$ nin, x e göre türevi (4.39) da verilmişti, bundan yararlanarak (4.45) deki matris çarpımları ve plak sınırlarındaki integraller FIYU2 programı ile yapılmış ve $[\Delta K]_{P_x(2\eta-1)}$ için (4.46) matrisi elde edilmiştir.

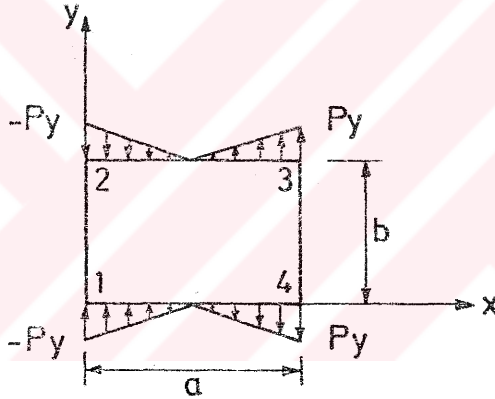
$$[\Delta K]_{P_X(2n-1)} = \frac{P_X \cdot b}{5040a}$$

-1176	-12b ²	-112a ²	0	1176	12b ²	112a ²	0	1176	12b ²	112a ²	0	112a ²	-1176	-12b ²	-112a ²
-96b	0	0	0	-96b	0	-84a	0	96b	-12b ²	-84a	0	-96b	0	-84a	0
84a	0	0	0	0	0	-1176	96b	-12b ²	0	-28a ²	0	0	0	0	0
0	12b	0	0	1176	-96b	0	0	-84a	0	0	-12b	0	-12b	0	0
12b	0	0	0	-96b	12b ²	0	112a ²	0	96b	-12b ²	0	-84a	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-84a	0	-1176	96b	-12b ²	0	-96b	84a	0	112a ²
0	-12b	0	0	0	0	0	84a	1176	-96b	12b ²	0	0	112a ²	0	0
-12b	0	0	0	0	0	0	0	-96b	-12b ²	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-84a	0	-12b	0	0	0	-28a ²	0	0	0	0	0
1176	96b	-84a	0	0	0	-12b	0	0	0	0	12b	0	-1176	-96b	-84a
96b	12b ²	0	-12b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84a	0	28a ²	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(4.46)

FIYU2 programının ikinci aşaması Kısım 4.1.3.1 de FIYU2 ile elemanların için bir eleman burada (4.45) ifade edilmiş olduğu gibi verilen bir eleman polinomların sayısı 11'e artarak dört katı artırılmıştır. Bu sebepten polinomları ifade eden 4x4 lük yarım matrisler yerine 5x5 lük yarım matrisler, 7x7 lük sonuç matrisinle yerine de 9x9 lük bir yarım matris kurmak gerekecektir.

Plak elemanına y doğrultusunda lineer yayılı P_y kuvvetleri etki ettiği düşünülürse bu kuvvetlerin $P_y(2\xi-1)$ şeklinde x in bir fonksiyonu olduğu Şekil 4.10 dan görülebilir.



Şekil 4.10

Bu durumda elemanın ikinci mertebe rijitlik matrisi

$$[\Delta K]_{P_y(2\xi-1)} = P_y \iint \frac{\partial [A]^T}{\partial y} (2\xi-1) \frac{\partial [A]}{\partial y} dx dy \quad (4.47)$$

şeklindedir. $[A]^T$ nun y 'ye göre türevlerinden oluşan matris (4.41) de verilmiştir. (4.47) deki matris çarpımları ve integralier FIYU2 programı ile yapılmış ve $[\Delta K]_{P_y(2\xi-1)}$ için (4.48)matrisi elde edilmiştir.

4.2. SİSTEMİN BİRİNCİ ve İKİNCİ MERTEBE RİJİTLİK MATRİS- LERİNİN KURULMASI

Sistemdeki her eleman için Kısım 4.1 de anlatıldığı gibi birinci ve ikinci mertebe rijitlik matrisleri tayin edildikten sonra, sistemin birinci ve ikinci mertebe matrislerini kurmak sistematik bir yerleştirme işleminden ibarettir, [19].

Bu yerleştirme işlemi $[S]$ sistem birinci mertebe rijitlik matrisi için açıklanacaktır. Aynı düzen $[\Delta S]$ ikinci mertebe matrisi için de geçerlidir.

$[S]$ matrisinde sistemde bulunan düğüm noktası sayısı kadar satır ve kolon ayrılır. Bu satır ve kolonlar ait oldukları noktalardaki yer değiştirme bileşenleri sayısı kadar alt satır ve kolonlardan oluşurlar. Bu yer değiştirme bileşenlerinin sayısı çubuk ve plak elemanlarında 3 olduğu bilinmektedir. Bu durumda her i satır ve j kolonunun karşılaştığı yere mertebesi 3×3 olan bir kare matris yerleştirilecektir.

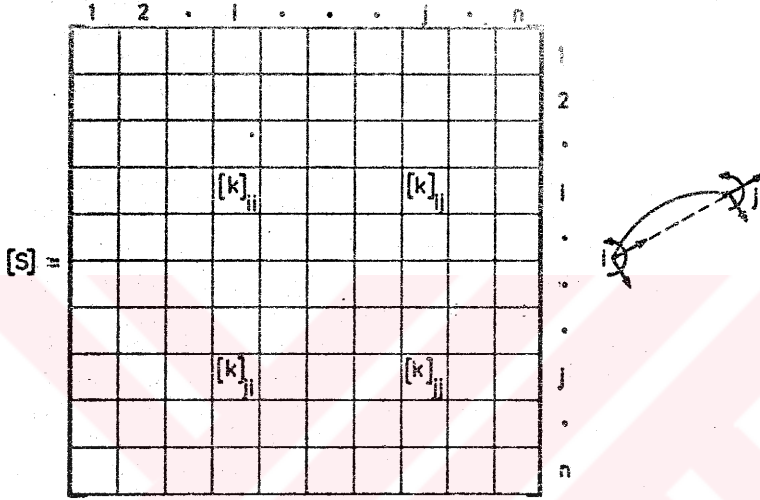
Her eleman teker teker ele alınarak, rijitlik matrisleri tayin edilir ve bunların ilk indisleri satıra, ikinci indisleri kolona gelecek şekilde $[S]$ matrisine yerleştirilir. $[S]$ matrisindeki bir yere birden fazla rijitlik matrisinin gelmesi halinde, bu matrisler toplanır. Her elemanın rijitlik matrisi bu şekilde yerleştirildiğinde $[S]$ matrisi elde edilmiş olur.

Örneğin, bir ij çubuk elemanının i ve j uçlarındaki rijitlik matrisleri 3×3 mertebeden 4 tane

$$[k]_{ii} \quad [k]_{ij}$$

$$[k]_{ji} \quad [k]_{jj}$$

olduğu daha önce söylenmiştir. Bu matrisler sırası ile $[S]$ matrisinde $(i-i)$, $(i-j)$, $(j-i)$ ve $(j-j)$ numaralı yerlere yerleştirilirler, Şekil 4.11. Burada ilk indisler satır ikinci indisler kolonu göstermektedir.

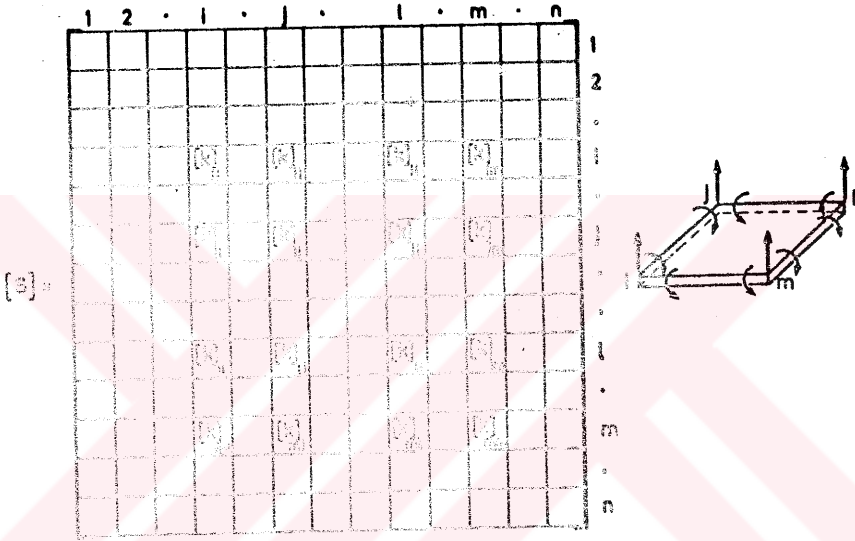


Şekil 4.11

Diğer bir örnek olarak $ijlm$ plak elemanı düşünülürse, bu elemanın i, j, l, m uç noktalarındaki rijitlik matrislerinin 3×3 mertebeden 16 tane

$$\begin{array}{cccc}
 [k]_{ii} & [k]_{ij} & [k]_{il} & [k]_{im} \\
 [k]_{ji} & [k]_{jj} & [k]_{jl} & [k]_{jm} \\
 [k]_{li} & [k]_{lj} & [k]_{ll} & [k]_{lm} \\
 [k]_{mi} & [k]_{mj} & [k]_{ml} & [k]_{mm}
 \end{array}$$

dir. Bu $n \times l$ boyutlu bir $\{a_{ij}\}$ matrisinin $(i-1), (i-j), (i-2), (i-m), (j-1), (j-i), (j-2), (j-m), (l-1), (l-j), (l-2), (l-m), (m-1), (m-j), (m-2), (m-m)$ yerlerine yerleştirilirler Şekil 4.12. Burada da indis satırı, ikinci indis kolonu göstermektedir.



Şekil 4.12

BÖLÜM 5

**ÇUBUK SİSTEMLERDE BURKULMA YÖKÖNÖ EN BÖYÖK YAPAN
MALZEME YAYILIŞININ SAYISAL OLARAK BULUNMASI**

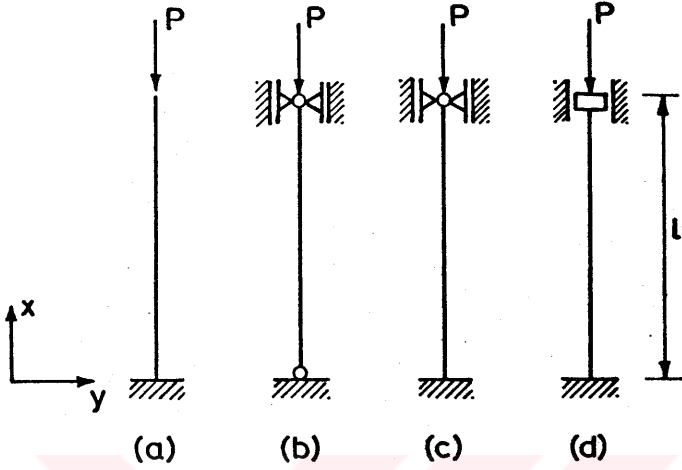
Bu bölümde, bazı çubuk sistemlerin verilen bir malzeme miktarı için burkulma yükünü en büyük yapan malzeme yayılışı sayısal olarak hesaplanmıştır.

Sayısal çözüm iki kısımda yapılmıştır. Birinci kısımda yalnız eğilme şekil değiştirmeleri, ikinci kısımda ise eğilme şekil değiştirmeleri ile birlikte, kayma şekil değiştirmeleri de hesaba katılmıştır. Malzeme yayılışını belirlemek için birinci tip örneklerde (3.41) ikinci tip örneklerde ise (3.34) gerek ve yeter şart denklemi kullanılmıştır.

**5.1. YALNIZ EĞİLME ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİ GÖZÖNÖNE ALINARAK
YAPILAN UYGULAMALAR**

Bu kısımda değişik mesnetlenme durumlu daire enkesitli kolonların eksenel yükler altındaki çözümleri yapılarak, burkulma yüklerini en büyük yapan malzeme yayılışları hesaplanmıştır. Çözölen örneklerde kesitlerin dairesel seçilmelerinin bir özelliği yoktur. ENKES1 programında yapılacak data değişiklikleri ile diğer kesit tipleri için de çözümler yapılabilir.

Birinci örnek grubu olarak dört klasik hal gözönüne alınmıştır, Şekil 5.1.



Şekil 5.1

D ve I sırası ile referans kesidinin çapı ve atalet momenti olmak üzere her kesit için D/D_0 değerleri ve P_k kuvveti Tablo 5.1 de verilmiştir. Referans kesidi olarak Şekil 5.1-a ve c de $x = 0$ kesidi, diğerlerinde $x = l/2$ kesidi alınmıştır.

İki ucu mafsallı çubuklarda, Şekil 5.1-b de Ratzersdorfer'in [2] varyasyon prensiplerinden yararlanarak çıkardığı diferansiyel denklemin çözümü sonucu elde edilen kesitler ve burkulma yükü ile Tablo. 5.1 de verilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 5.2 de verilmiştir. Görüldüğü gibi analitik ve sayısal çözümün neticeleri birbirinden çok az fark etmektedir. Bu şekilde elde edilen çubuğun hacmi

$$V = 0,75226 F_0 \cdot l$$

dır. Burada F_0 referans kesitinin alanıdır.. $\bar{F}_0$ sabit kesit alanlı bir çubuğun taşıyabileceği burkulma yükü bilindiği gibi

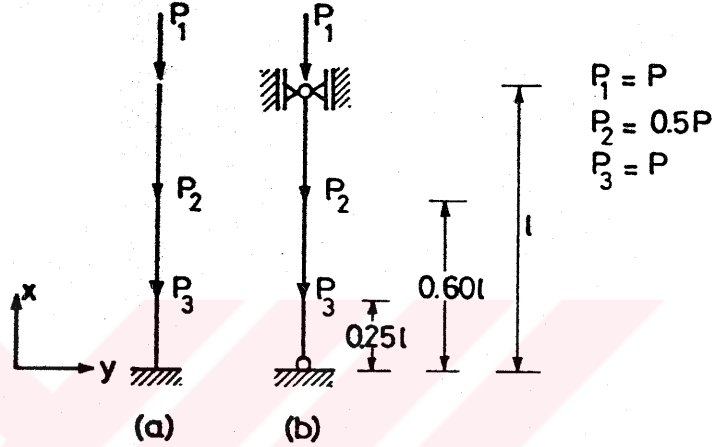
$\xi = \frac{x}{l}$	D/D_0			
0,0	1,00	0,00	1,000	0,9999
0,05	0,9995	0,6000	0,9764	0,9877
0,10	0,9968	0,7314	0,9372	0,9489
0,15	0,9923	0,8141	0,8756	0,8741
0,20	0,9868	0,8732	0,7866	0,7352
0,25	0,9794	0,9172	0,6311	0,0616
0,30	0,9712	0,9497	0,3500	0,7352
0,35	0,9618	0,9714	0,0786	0,8741
0,40	0,9491	0,9891	0,7876	0,9489
0,45	0,9331	0,9975	0,8513	0,9877
0,50	0,9148	1,0000	0,8918	1,0000
0,55	0,8952	0,9975	0,9151	0,9877
0,60	0,8721	0,9891	0,9268	0,9489
0,65	0,8442	0,9714	0,9269	0,8741
0,70	0,8123	0,9437	0,9168	0,7352
0,75	0,7752	0,9172	0,8917	0,0616
0,80	0,7297	0,8732	0,8519	0,7352
0,85	0,6730	0,8141	0,8115	0,8741
0,90	0,5983	0,7314	0,7370	0,9489
0,95	0,4868	0,6000	0,6157	0,9877
1,00	0,000	0,00	0,00	0,9999
P_k	$1,84 \frac{EI_0}{l^2}$	$7,41 \frac{EI_0}{l^2}$	$11,50 \frac{EI_0}{l^2}$	$28,81 \frac{EI_0}{l^2}$

Tablo 5.1

$\xi = x/l$		0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	P_k
D/D_0	Analitik çözüm	0,725	0,870	0,947	0,987	1,00	$7,402 \frac{EI_0}{l^2}$
	Sayısal çözüm	0,7314	0,8732	0,9497	0,9891	1,00	$7,410 \frac{EI_0}{l^2}$

Tablo 5.2

İkinci olarak, mesnetleri ankastre-serbest ve mafsallı-mafsallı olan çubuklarda genel bir yükleme alınarak sayısal çözüm yapılmıştır Şekil 5.3.



Şekil 5.3

P_k burkulma kuvvetinin değeri ve her kesit için D/D_0 oranları Tablo. 5.3 de verilmiştir. D_0 ve I_0 daha önceden de verildiği gibi seçilen referans kesidinin çapı ve atalet momentleridir.

Çubuğun değişik kesitlerine bir kuvvetin tek başına etkimesi halinde P_{ik} burkulma yükleri biliniyorsa, bu kuvvetlerin birlikte etkimesi durumunda burkulma yükü ayrı bir hesap yapmadan [5] de verilen p_i geçiş sayıları yardımı ile

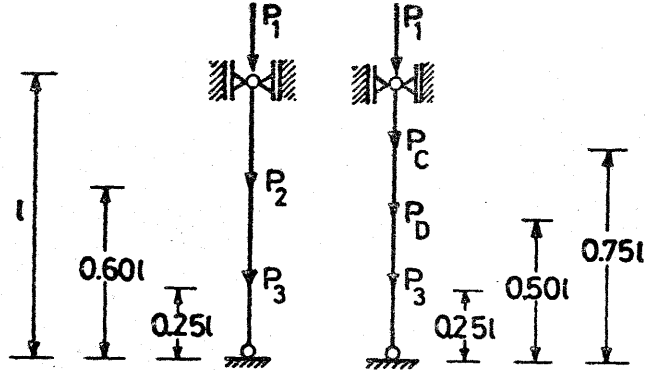
$$P_k = \frac{1}{\frac{P_1}{P_{1k}} + \frac{P_2}{P_{2k}} + \dots + \frac{P_n}{P_{nk}}}$$

şeklinde hesap edilebilir.

$\xi = \frac{x}{\ell}$	D/D_0	
		
0,00	1,0000	0,0000
0,05	0,9982	0,6620
0,10	0,9933	0,7977
0,15	0,9857	0,8831
0,20	0,9747	0,9434
0,25	0,9603	0,9868
0,30	0,9496	1,0006
0,35	0,9361	1,0086
0,40	0,9196	1,0109
0,45	0,9002	1,0082
0,50	0,8772	1,0000
0,55	0,8499	0,9859
0,60	0,8180	0,9656
0,65	0,7923	0,9424
0,70	0,7624	0,9132
0,75	0,7276	0,8768
0,80	0,6854	0,8309
0,85	0,6325	0,7717
0,90	0,5625	0,6911
0,95	0,4581	0,5679
1,00	0,0000	0,0000
P_k	$1,46 \frac{EI_0}{\ell^2}$	$4,42 \frac{EI_0}{\ell^2}$

Tablo 5.3

Şekil 5.3b deki durum için p_i sayıları [5] yardımı ile



Şekil 5.4

$$P_C = 0,09P_2 = 0,09 \cdot 0,5 P_1 = 0,045P_1$$

$$P_D = 0,91P_2 = 0,91 \cdot 0,5 P_1 = 0,455P_1$$

$$P_1 = 1 \quad P_2 = 0,045 \quad P_4 = 0,455 \quad P_3 = 1$$

olarak bulunmuştur.

P_1 , P_C , P_D ve P_3 kuvvetlerinin tek olarak yukarıda gösterilen kesitlere etkimesi halinde burkulma yükleri ENKES1 programı ile hesap edilmiş ve

$$P_{1k} = 7,4108 \frac{EI_0}{l^2} \quad , \quad P_{Ck} = 11,23 \frac{EI_0}{l^2}$$

$$P_{Dk} = 14,22 \frac{EI_0}{l^2} \quad , \quad P_{3k} = 20,14 \frac{EI_0}{l^2}$$

olarak bulunmuştur. Bu durumda sistemin burkulma yükü yukarıda verilen formül yardımı ile

$$P_k = \frac{1}{\frac{1}{7,4108} + \frac{0,045}{11,23} + \frac{0,455}{14,22} + \frac{1}{20,14}} \cdot \frac{EI_o}{l^2} = 4,53 \frac{EI_o}{l^2}$$

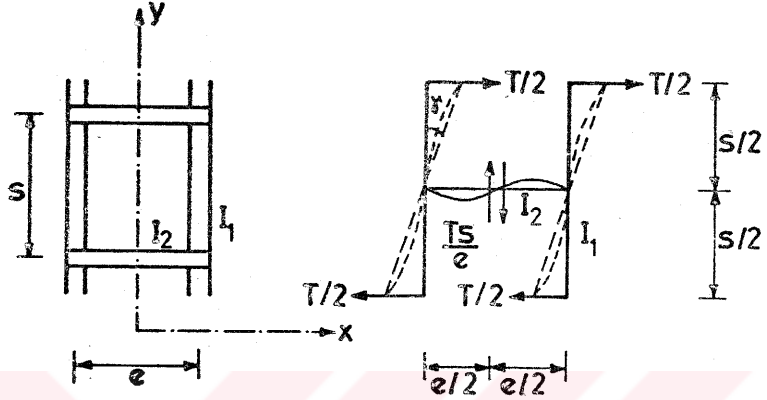
hesap edilebilir. Bu değerle Tablo 5.3 de verilen arasında çok az fark olduğu görülmektedir.

5.2. EĞİLME ve KAYMA ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİNİN BİRLİKTE NESABA KATILMASI HALİ

Kayma rijitliği büyük olan sistemlerde, kayma şekil değiştirmelerinin burkulma yüküne etkisi çok küçüktür ve ihmal edilebilir. Aynı kayma sistemin kayma rijitliği küçük olduğu takdirde, kayma şekil değiştirmelerinin burkulma yüküne etkisini inceleyebilmek için idealleştirilmiş bir bağ levhala bileşik çubuk gözönüne alınmıştır. Bilindiği gibi bu tip çubuklarda eğilmeye meydana gelen kayma şekil değiştirmelerinin burkulma yüküne etkisi ihmal edilemeyecek kadar büyüktür [18]. Bir bağ levhala çubukta Şekil 5.5, kayma ve eğilme rijitlikleri

$$G'F = \frac{12EI_2}{se} + \frac{24EI_1}{s^2} \quad (5.1)$$

$$EI = E(2I_1 + F_1 \frac{e^2}{2}) \quad (5.2)$$



Şekil 5.5

dir, [18] . Bu ifadelerde

- T = Kesme kuvveti,
- e = Bağ levhalarının boyu,
- s = Bağ levhaları arasındaki uzaklık,
- I_2 = Bağ levhalarının atalet momenti,
- I_1 = Düşey çubukların atalet momentleri,
- E = Elastisite modülü

dir. (5.1) bağıntısının sağındaki ilk terim, ikinci terimin yanında ihmal edilir ve düşey çubukların atalet momentleri ile kesit alanları arasındaki bağıntısının

$$I_1 = kF_1$$

şeklinde lineer olduğu kabul edilirse, eğilme ve kayma rijitlikleri

$$EI = k_1 F_1^2 = E(2kF_1 + F_1 \frac{e^2}{2}) = E(2k + \frac{e^2}{2})F_1; k_1 = E(2k + \frac{e^2}{2}) \quad p_1 = 1$$

$$G'F = k_2 F_2^2 = \frac{24EkF_1}{s^2} \quad ; k_2 = \frac{24Ek}{s^2} \quad p_2 = 1$$

olarak elde edilir.

Daha önce de belirtildiği gibi, eğilme ve kayma şekil değiştirmeleri birlikte düşünüldüğünde en büyük burkulma yükünü veren malzeme yayılışı (3.54) şart denklemini sağlamalıdır. Bu durumda elde edilen eğilme ve kayma rijitlikleri (3.54) denkleminde yerlerine yerleştirilirse

$$\frac{M^2}{k_1 F_1^2} + \frac{T^2}{k_2 F_2^2} = \text{Sabit}$$

veya

$$\frac{\frac{M^2}{k_1} + \frac{T^2}{k_2}}{F_1^2} = \text{Sabit} \quad (5.3)$$

elde edilir. M_o , T_o , $F_{1,o}$ herhangi bir referans kesidin değerleri olduğuna göre,

$$\frac{\frac{M_o^2}{k_1} + \frac{T_o^2}{k_2}}{F_{1,o}^2} = \text{Sabit} \quad (5.4)$$

yazılabilir. (5.3) ve (5.4) ifadelerindeki sabit aynı sistem için birbirine eşittir. Bu durumda

$$\frac{\frac{M^2}{k_1} + \frac{T^2}{k_1}}{F_1^2} = \frac{\frac{M_o^2}{k_1} + \frac{T_o^2}{k_2}}{F_{1,o}^2}$$

veya

$$\frac{F_1}{F_{1,o}} = \sqrt{\frac{\frac{M^2}{k_1} + \frac{T^2}{k_2}}{\frac{M_o^2}{k_1} + \frac{T_o^2}{k_2}}} \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) den görüldüğü gibi, seçilen bir referans kesidine göre kesit değişimi boyutsuz olarak elde edilebilmektedir.

Çözülen örneklerde, düğey çubukların enkesiti, gövdesi terk edilebilen, b genişliği ve h yüksekliği sabit, t başlık kalınlığı değişken olan I kesit olarak alınmıştır. Böyle kesitlerde

$$k = \frac{h^2}{4}, \quad p = 1$$

dir. (Bkz. Kısım 3.4.1). Bu durumda k_1 ve k_2 için

$$k_1 = E \left(\frac{h^2}{2} + \frac{e^2}{2} \right) \quad (5.6)$$

$$k_2 = \frac{6Eh^2}{s^2} \quad (5.7)$$

elde edilir.

Bağ levhali çubuklarda bağ levhaları arasındaki uzaklık büyüdükçe kayma şekil değiştirmesi de büyüdüğü için, kayma şekil değiştirmelerinin burkulma yüküne ve kesit değişimine etkisi artar. Bu etkinin değişimini inceleyebilmek için gözönüne alınan ℓ uzunluğundaki bir çubuk 3, 5, 7, 9, 13 ve 19 parçaya ayrılarak kayma rijitlikleri hesaplanmış ve buna göre çözüm yapılmıştır.

Gözönüne alınan sistemlerin burkulma yükü ve modunu bulmak için yapılan sayısal ardışık yaklaşımda sistem sürekli olarak düşürüldüğünden çubuğun 3, 5, 7 gibi az parçaya bölünmesi hallerinde sonuçlar yaklaşık olarak elde edilmiştir.

Yapılan sayısal çözümlerde eğilme ve kayma rijitlikleri

$$\ell = 4,5 \text{ m}$$

$$h = 0,10 \text{ m}$$

$$e = 0,125 \text{ m}$$

$$s = \ell/3, \ell/5, \ell/7, \ell/9, \ell/13, \ell/19$$

değerleri alınarak hesap edilmiştir.

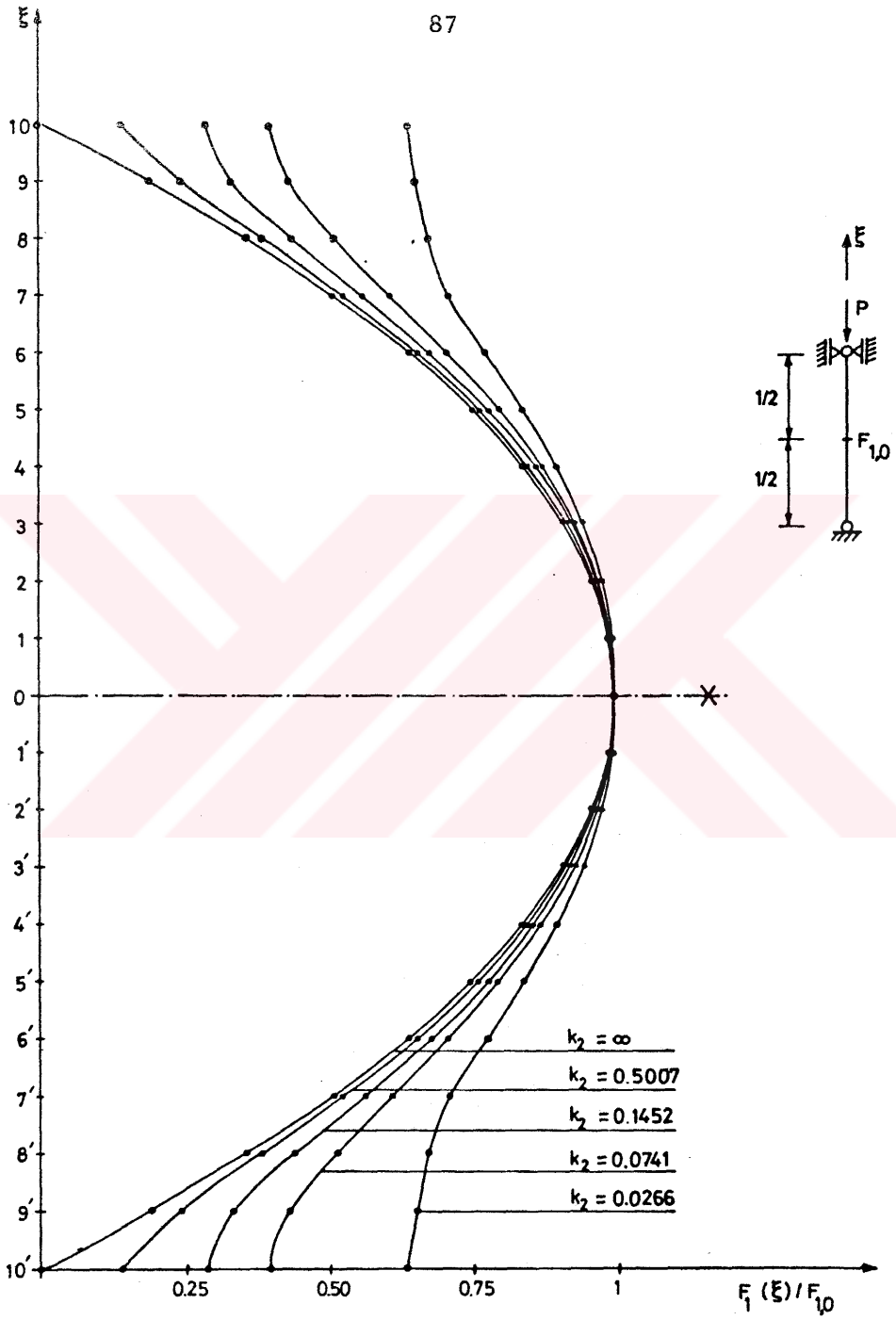
Sonuçta bulunan kesit değişimleri ve burkulma yük parametreleri Tablo 5.4 de verilmiş ve kesit değişimi Şekil 5.6 da çizilmiştir. Görüldüğü gibi kayma rijitliği küçük olan örneklerde kesitler, yalnız eğilme şekil değiştirmeleri gözönüne alınarak yapılan çözümdeki kesitlerden çok fark etmektedir. Böyle sistemlerde kayma şekil değiştirmeleri etkisinin ihmal edilmesi hatalı sonuçlar verecektir.

Tablo 5.4 den de anlaşılabileceği gibi, çözülen örneklerde kullanılan malzeme miktarı aynı değildir. Bu malzemeler eşitlenerek her çubuğun taşıyabileceği burkulma yükü hesaplanmış ve kayma rijitliğine göre değişimi Şekil 5.7 de çizilmiştir.

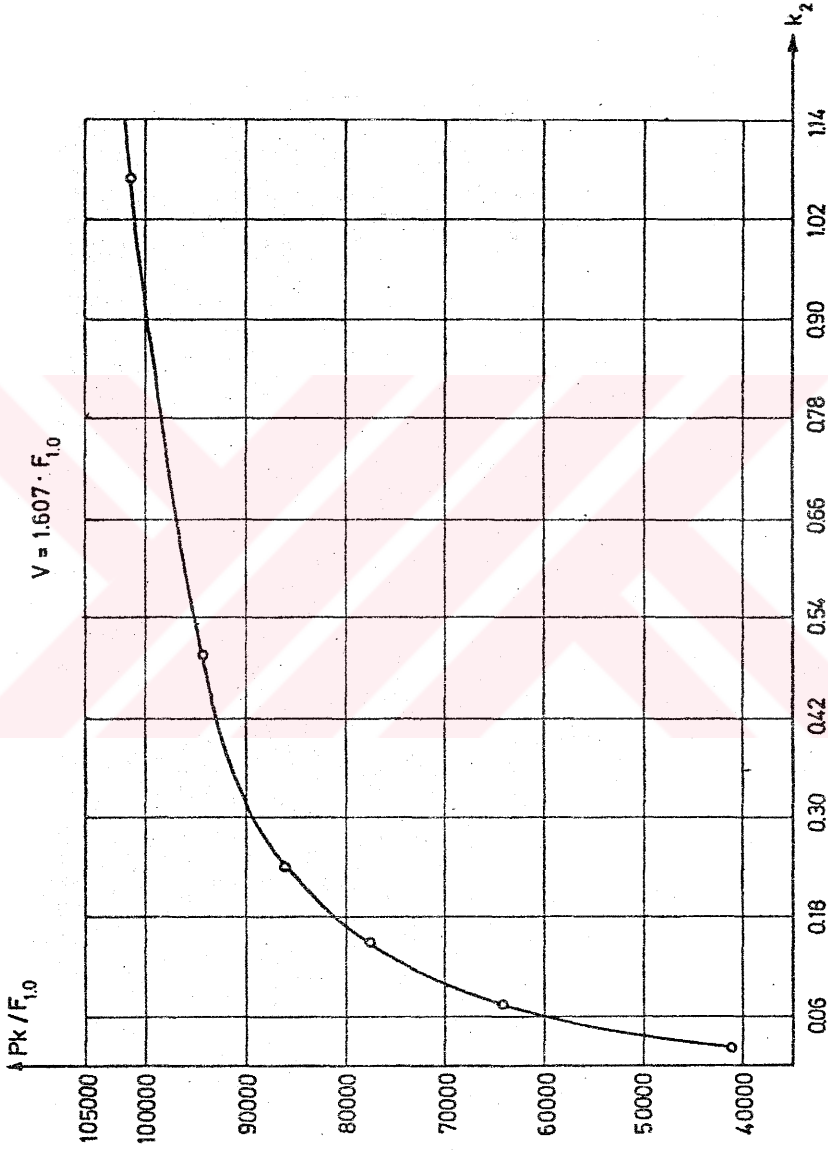
$\xi = \frac{x}{l}$	$F_1(\xi)/F_{1,0}$						
	$k_2 = 6h^2/s^2$						
	0,0266	0,0741	0,1452	0,2400	0,5007	1,0700	∞
0,00	0,6400	0,4066	0,2920	0,2135	0,1424	0,0953	0,0000
0,05	0,6596	0,4339	0,3327	0,2864	0,2401	0,2154	0,1886
0,10	0,6748	0,5106	0,4427	0,4185	0,3877	0,3758	0,3589
0,15	0,7149	0,6129	0,5699	0,5518	0,5169	0,5100	0,5092
0,20	0,7807	0,7135	0,6835	0,6708	0,6564	0,6487	0,6394
0,25	0,8442	0,8014	0,7810	0,7716	0,7613	0,7562	0,7496
0,30	0,9015	0,8742	0,8609	0,8473	0,8460	0,8442	0,8391
0,35	0,9466	0,9307	0,9228	0,9193	0,9147	0,9113	0,9098
0,40	0,9781	0,9704	0,9666	0,9646	0,9624	0,9612	0,9599
0,45	0,9951	0,9934	0,9923	0,9916	0,9908	0,9904	0,9899
0,50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,55	0,9951	0,9934	0,9923	0,9916	0,9908	0,9904	0,9899
0,60	0,9781	0,9704	0,9666	0,9646	0,9624	0,9612	0,9599
0,65	0,9466	0,9307	0,9228	0,9193	0,9147	0,9113	0,9098
0,70	0,9015	0,8742	0,8609	0,8473	0,8460	0,8442	0,8391
0,75	0,8442	0,8014	0,7810	0,7716	0,7613	0,7562	0,7496
0,80	0,7807	0,7135	0,6835	0,6708	0,6564	0,6487	0,6394
0,85	0,7149	0,6129	0,5699	0,5518	0,5169	0,5100	0,5092
0,90	0,6748	0,5106	0,4427	0,4185	0,3877	0,3758	0,3589
0,95	0,6596	0,4339	0,3327	0,2864	0,2401	0,2154	0,1886
1,00	0,6400	0,4066	0,2920	0,2135	0,1424	0,0953	0,0000
P_k	$4,01 \frac{EI_0}{l^2}$	$5,61 \frac{EI_0}{l^2}$	$6,44 \frac{EI_0}{l^2}$	$6,92 \frac{EI_0}{l^2}$	$7,38 \frac{EI_0}{l^2}$	$7,71 \frac{EI_0}{l^2}$	$8,00 \frac{EI_0}{l^2}$

Tablo 5.4

Bu şekilden de görüldüğü gibi kayma rijitliği küçük olan sistemlerde taşınabilecek burkulma yükünün azalarak, yalnız eğilme şekil değiştirmeleri için yapılan çözümle elde edilen değerin yarısına kadar inmektedir.



Şekil 5.6



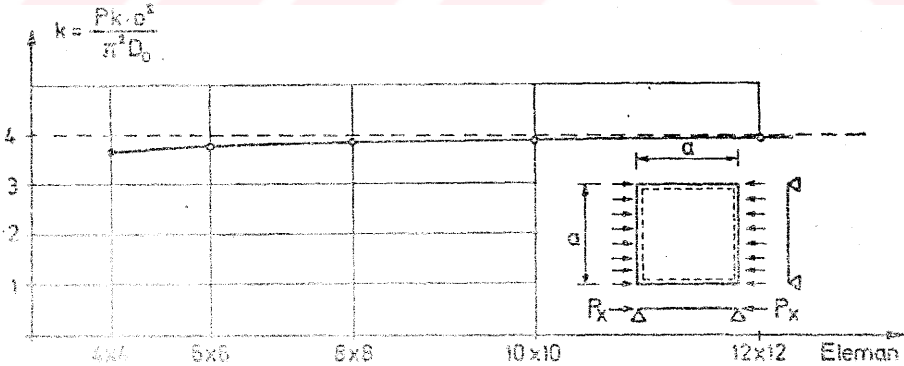
Şekil 5.7

BÖLÜM 6

**DİKDÖRTGEN PLAKLARDA BURKULMA YÜKÜNE EN BOYUK YAPAN
MALZEME YAYILIŞININ TAYİNİ**

Bu bölümde dikdörtgen plaklarda verilmiş bir malzeme miktarı için burkulma yükünü en büyük yapan malzeme yayılışı sayısal olarak hesaplanmış, sonuçlar tablo ve şekillerle verilmiştir. Çözümler plakların değişik kenar oranları, mesnetlenme durumları ve çeşitli yükleme şekilleri için yapılmıştır.

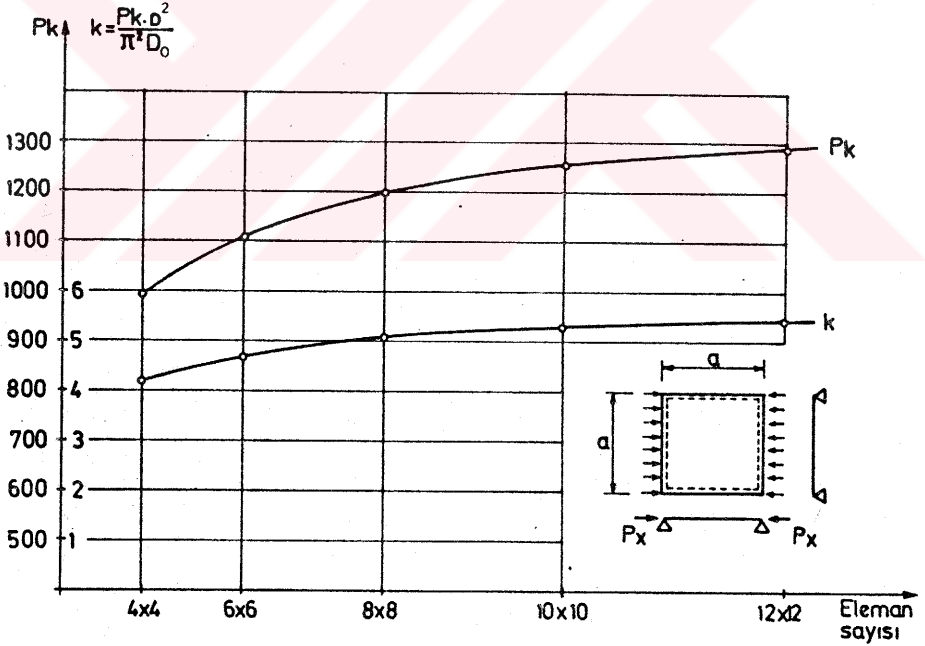
Daha önce de belirtildiği gibi sayısal çözümde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Sonuçların doğruluğu için, sistemin kaç elemana ayrılması gerektiğini belirlemek amacı ile, P_x kuvvetleri etkisindeki basit mesnetli bir kare plak 4x4, 5x5, 6x6, 8x8, 10x10, 12x12 elemana ayrılarak ayrı ayrı çözülmüştür. Sabit kesitli plağın k kritik yük parametresi ENKES2 programı ile hesaplanmış ve sonuçların eleman sayısına göre değişimi Şekil 6.1 de gösterilmiştir.



Şekil 6.1

Bilindiği gibi P_x kuvvetleri etkisindeki sabit kesitli ve basit mesnetli olan kare plakta kritik yük parametresi $k = 4,00$ dür. Şekil 6.1 den de görüldüğü gibi 12x12 elemana yapılan çözümde elde edilen kritik yük parametresinin $k = 3,98$ değeri %0,5 hata ile sonucu vermektedir.

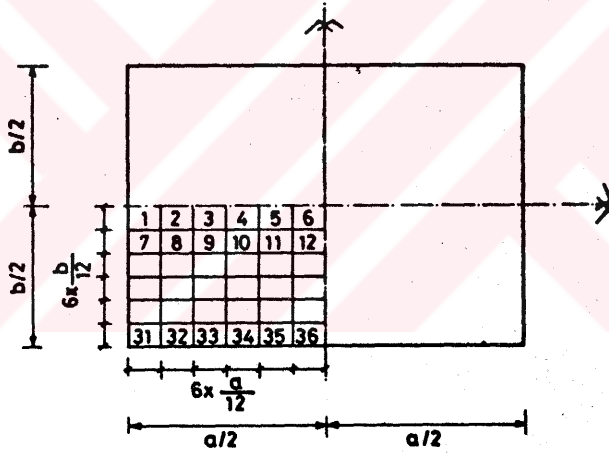
Şekil 6.2 de aynı plağın verilmiş bir malzeme miktarı için taşıyabileceği en büyük burkulma yükünün ve bu yüke ait kritik yük parametresinin eleman sayısına göre değişimi çizilmiştir. Her iki şekilden de görüldüğü gibi, plağın 12x12 elemana ayrılması ile elde edilen sonuçlarda hata çok küçük olmaktadır. Bu incelemeden yararlanarak, gözönüne alınan bütün plakların çözümü 12x12 elemana ayrılarak yapılmıştır.



Şekil 6.2

Çözümü yapılan plakların tümünün hacmi, $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$ ve ortalama yükseklikleri $h_0 = 0,2 \text{ m}$ alınmıştır. Bu durumda plakların alanı $a.b = 64 \text{ m}^2$ olarak belli olmaktadır. ENKES2 programı ile, bu plakların en büyük burkulma yükleri ve en uygun kesit değişimleri hesaplanmıştır. $k = P_k a^2 / \pi^2 D_0$ olarak bulunan burkulma yük parametresindeki D_0 rijitliği, $h_0 = \text{Hacim/Alan}$ olarak tanımlanan ortalama yükseklikten yararlanılarak $D_0 = E h_0^3 / 12(1-\nu^2)$ şeklinde hesap edilmektedir. $E = 2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ olarak alınmıştır.

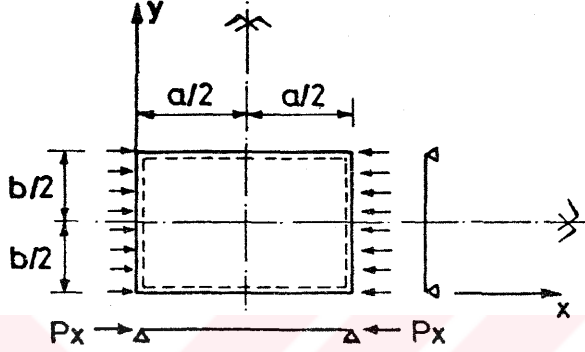
Hesabı yapılan sistemler x ve y doğrultularında simetrik olduklarından çözüm plakların dörtte bir parçalarında yapılmıştır. Plakların sonlu elemanlara ayrılışı ve numaralanışı Şekil 6.3 de gösterilmiştir.



Şekil 6.3

6.1. BİR DOĞRULTUDA DÜZGÜN YAYILI BASINÇ KUVVETİ ETKİSİNDEKİ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLAR

Çözümü yapılan plakların bütün kenarları basit mesnetlidir ve plak $x = 0$ ve $x = a$ kenarları boyunca ortalama düzlemi içindeki düzgün yayılı P_x basınç kuvvetlerinin etkisindedir.



Şekil 6.4

Bu plakta sınır ve simetri şartları

$$\begin{aligned}
 x = 0 \quad \text{da} \quad w &= 0 & x = \frac{a}{2} \quad \text{de} \quad \theta_y &= 0 \\
 \theta_x &= 0 \\
 y = 0 \quad \text{da} \quad w &= 0 & y = \frac{b}{2} \quad \text{de} \quad \theta_x &= 0 \\
 \theta_y &= 0
 \end{aligned}$$

olarak verilmiştir.

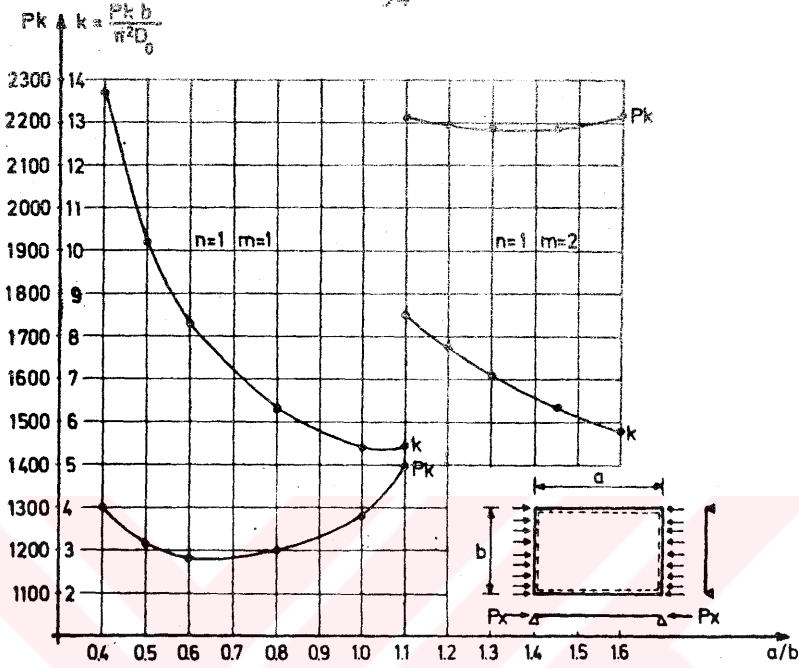
P_x kuvvetleri arttırıldığında, P_x in belli bir P_k değerinde plak burkulacaktır. Basit x mesnetli plaklarda burkulmuş plağın elastik yüzeyi

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

şeklindedir, [22]. Burada m ve n elastik yüzeyin x ve y doğrultularındaki dalga sayısını göstermektedir. Bilindiği gibi plaklar basınç doğrultusunda bir çok yarı dalga, buna dik doğrultuda ise yalnız bir yarı dalga ile burkulur. Yani $n = 1$, $m = 1, 2, 3, \dots, k$ değerlerini alır. $a/b \leq \sqrt{2}$ olan sabit kesitli plaklarda burkulma yükünün en küçük değeri $m = 1$, yani plağın basınç doğrultusunda da tek dalga ile burkulduğu zaman meydana gelir $\sqrt{2} \leq a/b \leq \sqrt{6}$ arasında ise $m = 2$ dir. ENKES2 programında yapılan ardışık yaklaşım hesaplarında $a/b \leq 1$ olan plaklar için $n = 1$, $m = 1$ alınarak, plağın her iki doğrultuda bir yarı dalga şeklinde burkulduğu düşünülerek çözüm yapılmıştır. $1 < a/b \leq \sqrt{2}$ olan plaklarda $n = 1$, $m = 1$ ve $n = 1$, $m = 2$ alınarak her iki hal için de ardışık yaklaşım yapılmıştır. $a/b > \sqrt{2}$ durumunda ise, $n = 1$, $m = 2$ ile yani plağın basınç doğrultusunda iki yarı dalga ile burkulduğu düşünülerek çözüm bulunmuştur. Kenar oranları $1.1 < a/b < \sqrt{2}$ olan plaklarda $n = 1$, $m = 1$ halinde, ardışık yaklaşım adımlarında plağın kesidi değişikçe burkulma modunda salınımlar meydana geldiğinden ardışık yaklaşım bozulmuş ve sonuç alınamamıştır. Çözülen örneklerde elde edilen burkulma yükünü belirleyen kritik yük parametresinin kenar oranına göre değişimi Şekil 6.5 de gösterilmiştir. Kenar oranları $1.1 < a/b < \sqrt{2}$ olan plaklarda en küçük burkulma yükünün $m = 1$, $n = 1$ hali için elde edildiği bilinmesine rağmen, yukarıda anlatılan nedenle, Şekil 6.5 de bu hale ait sonuç verilememiştir. Aynı kenar oranlarında $m = 2$, $n = 1$ için elde edilen değerler ise, ancak plağın herhangi bir nedenle bu şekilde burkulmaya zorlanması halinde kullanılabilir. Çünkü bu değerler $m = 1$, $n = 1$ ile bulunacaklardan daha büyük olacaktırlar.

Daha Öncede açıklandığı gibi hesaplar plağın dörtte bir parçasında yapılmış ve kesit yükseklikleri her elemanın köşe noktalarında tayin edilmiştir. $a/b = 1.0$ olan plakta eleman köşelerinin numaralanma düzeni ve hesap edilen kesit yüksekliklerinin plak içindeki değişimi Şekil 6.6 da gösterilmiştir.

Bu kesit kalınlıklarının, ortalama düzlem üzerinde yayılması ile elde edilen plağın perspektif görünüşü Şekil 6.7 de verilmiştir.

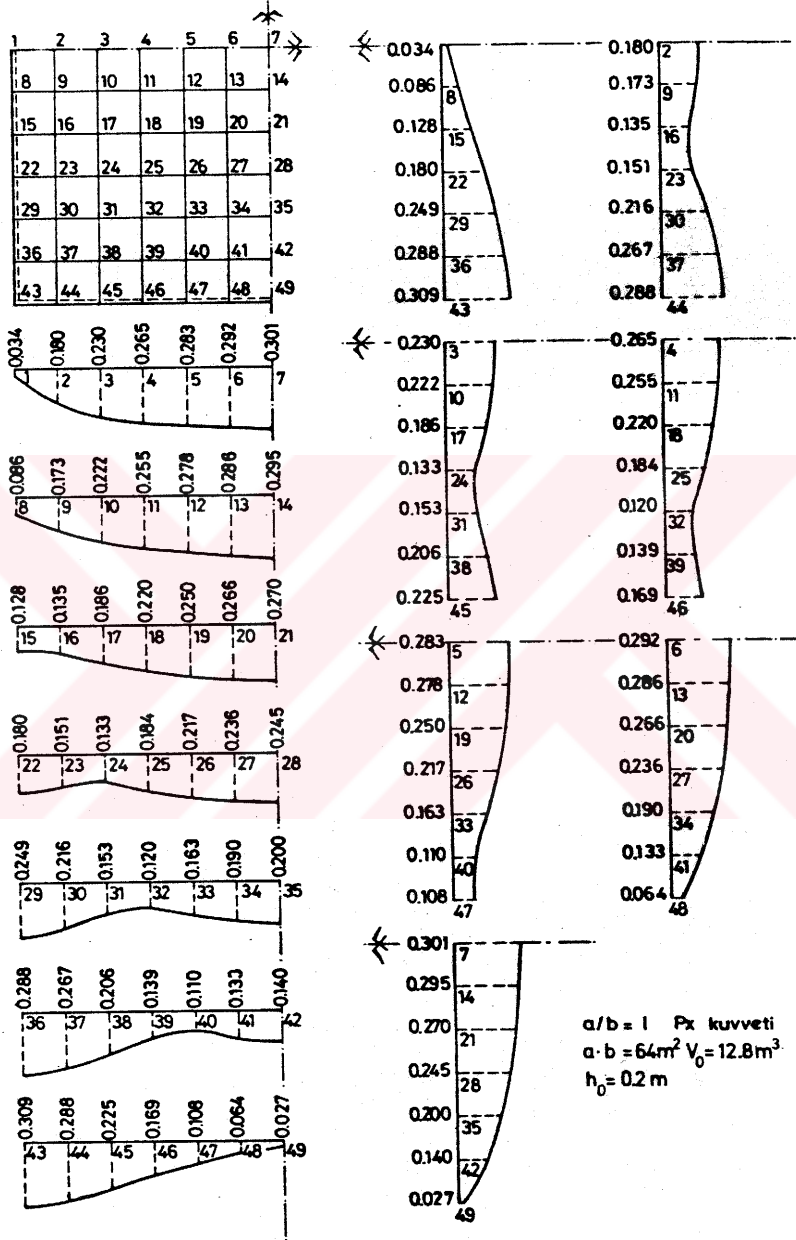


Şekil 6.5

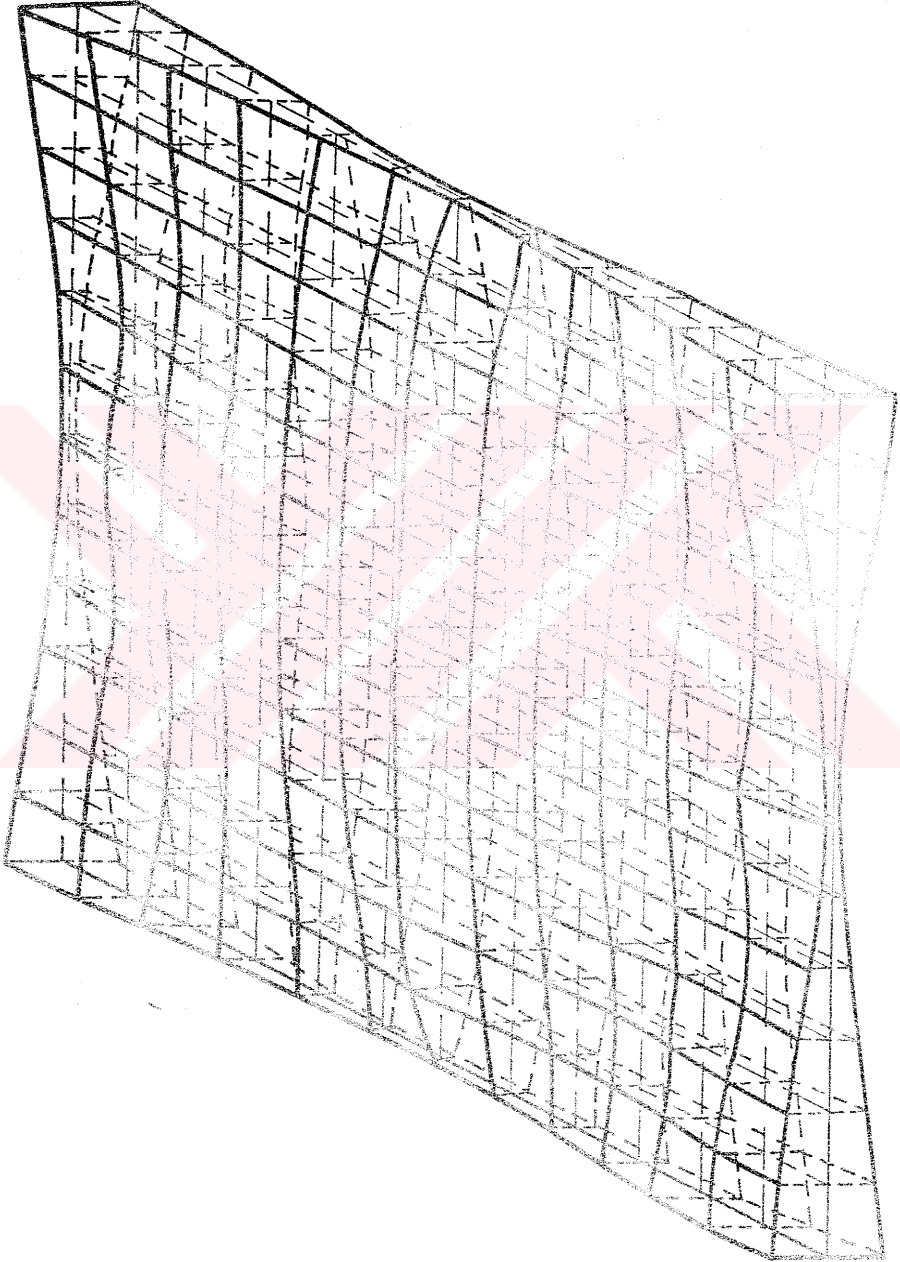
a/b kenar oranının diğer değerleri için elde edilen kalınlık değişimleri, $m = 1$, $n = 1$ için Tablo 6.1 de, $m = 2$, $n = 1$ için Tablo 6.2 de verilmiştir. Bu değerler elemanların köşelerindeki kesit yükseklik değerleridir. Köşelerin numaralanışı Şekil 6.6 daki gibidir.

Şekil 6.5 de verilen en büyük burkulma yükleri ve Tablo 6.1, Tablo 6.2 de verilen en uygun kesit değişimleri, daha önce de belirtildiği gibi, ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2m$, alanı $a, b = 64m^2$ ve hacmi $V_0 = 12,8 m^3$ olan plaklara aittir. $k = P_k b^2 / \pi^2 D_0$ olarak tanımlanan burkulma yük parametresindeki D_0 rijitliği, $h_0 = \text{Hacım/Alan}$ ortalama yüksekliği kullanılarak $D_0 = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ bağıntısından hesap edilmiştir.

a, b boyutları ve V hacmi verilen herhangi bir dikdörtgen plağın en büyük burkulma yükü, Şekil 6.5 den alınacak k parametresi yardımı ile hesap edilebilir. Ancak burada geçen D_0 rijitliği, verilen plağın $h_0 = V/a.b$ ortalama yüksekliğinden hesap edilmelidir. Verilmiş V hacmine ait en uygun kesit değişimi ise, $V_0 = 12,8 m^3$ hacmine ait olan tablodaki h değerleri, V/V_0 ile çarpılarak elde edilebilir.



Şekil 6.6



Seksi 01

No	$m = 1$ $n = 1$ $a, b = 64 \text{ m}^2$ $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$					
	a/b					
	0,4 $h(m)$	0,5 $h(m)$	0,6 $h(m)$	0,8 $h(m)$	1,0 $h(m)$	1,1 $h(m)$
1	0,025	0,023	0,031	0,033	0,034	0,037
2	0,175	0,150	0,203	0,197	0,180	0,185
3	0,227	0,252	0,265	0,245	0,230	0,232
4	0,259	0,291	0,302	0,275	0,265	0,260
5	0,279	0,315	0,325	0,293	0,283	0,278
6	0,291	0,329	0,335	0,304	0,292	0,289
7	0,294	0,333	0,338	0,308	0,301	0,292
8	0,293	0,340	0,338	0,307	0,306	0,294
9	0,175	0,168	0,187	0,175	0,173	0,170
10	0,228	0,243	0,242	0,228	0,222	0,220
11	0,262	0,276	0,275	0,260	0,255	0,251
12	0,284	0,297	0,297	0,282	0,278	0,271
13	0,295	0,309	0,309	0,294	0,286	0,283
14	0,299	0,312	0,313	0,298	0,295	0,287
15	0,094	0,091	0,049	0,095	0,125	0,124
16	0,173	0,133	0,144	0,124	0,135	0,132
17	0,227	0,209	0,183	0,178	0,186	0,184
18	0,256	0,240	0,224	0,222	0,220	0,224
19	0,277	0,258	0,247	0,250	0,250	0,250
20	0,288	0,269	0,262	0,267	0,265	0,264
21	0,291	0,273	0,267	0,272	0,270	0,269
22	0,091	0,101	0,151	0,175	0,180	0,181
23	0,131	0,104	0,111	0,141	0,151	0,147
24	0,194	0,168	0,125	0,105	0,133	0,129
25	0,222	0,198	0,169	0,165	0,184	0,180
26	0,244	0,217	0,204	0,206	0,217	0,215
27	0,254	0,232	0,223	0,229	0,236	0,235
28	0,258	0,256	0,229	0,236	0,245	0,241
29	0,162	0,219	0,251	0,256	0,249	0,247
30	0,122	0,191	0,219	0,225	0,216	0,220
31	0,120	0,106	0,151	0,160	0,153	0,151
32	0,154	0,130	0,099	0,077	0,120	0,123
33	0,188	0,165	0,155	0,151	0,163	0,168
34	0,207	0,189	0,181	0,181	0,190	0,194
35	0,213	0,197	0,191	0,193	0,200	0,202
36	0,271	0,322	0,343	0,338	0,288	0,304
37	0,232	0,272	0,295	0,300	0,267	0,277
38	0,158	0,177	0,194	0,221	0,206	0,212
39	0,056	0,110	0,123	0,148	0,139	0,136
40	0,124	0,100	0,084	0,073	0,110	0,111
41	0,146	0,133	0,127	0,125	0,133	0,137
42	0,154	0,142	0,138	0,135	0,140	0,146
43	0,322	0,366	0,381	0,375	0,309	0,328
44	0,273	0,303	0,320	0,334	0,288	0,300
45	0,180	0,191	0,204	0,248	0,225	0,234
46	0,111	0,135	0,141	0,173	0,169	0,163
47	0,076	0,082	0,162	0,111	0,108	0,101
48	0,053	0,058	0,101	0,065	0,064	0,062
49	0,029	0,024	0,022	0,027	0,027	0,026

Tablo 6.1

No	m = 2 n = 1 a.b = 64 m ² V ₀ = 12,8 m ³				
	a/b				
	1,1 h(m)	1,2 h(m)	1,3 h(m)	1,45 h(m)	1,6 h(m)
1	0,045	0,051	0,052	0,051	0,050
2	0,261	0,272	0,267	0,257	0,243
3	0,320	0,327	0,315	0,300	0,288
4	0,336	0,341	0,328	0,313	0,301
5	0,320	0,325	0,315	0,301	0,289
6	0,261	0,269	0,266	0,259	0,246
7	0,045	0,050	0,051	0,052	0,051
8	0,058	0,060	0,048	0,056	0,077
9	0,251	0,251	0,247	0,238	0,228
10	0,302	0,299	0,295	0,285	0,277
11	0,316	0,313	0,309	0,300	0,292
12	0,302	0,297	0,294	0,286	0,279
13	0,251	0,247	0,246	0,240	0,231
14	0,058	0,057	0,047	0,056	0,078
15	0,044	0,045	0,061	0,084	0,106
16	0,218	0,198	0,198	0,191	0,188
17	0,262	0,248	0,252	0,249	0,247
18	0,275	0,261	0,267	0,267	0,266
19	0,262	0,246	0,251	0,250	0,248
20	0,218	0,196	0,197	0,192	0,191
21	0,044	0,047	0,061	0,084	0,107
22	0,075	0,094	0,101	0,119	0,143
23	0,169	0,146	0,143	0,131	0,124
24	0,218	0,196	0,199	0,197	0,200
25	0,235	0,222	0,227	0,228	0,231
26	0,218	0,194	0,198	0,198	0,201
27	0,169	0,143	0,142	0,133	0,126
28	0,075	0,094	0,100	0,120	0,144
29	0,145	0,189	0,191	0,206	0,220
30	0,094	0,140	0,142	0,159	0,166
31	0,168	0,152	0,154	0,151	0,154
32	0,191	0,170	0,175	0,176	0,181
33	0,168	0,150	0,153	0,152	0,155
34	0,094	0,141	0,142	0,158	0,166
35	0,145	0,187	0,190	0,207	0,222
36	0,237	0,276	0,276	0,287	0,291
37	0,191	0,228	0,227	0,235	0,235
38	0,090	0,110	0,104	0,108	0,104
39	0,137	0,126	0,128	0,129	0,132
40	0,090	0,112	0,105	0,106	0,103
41	0,191	0,227	0,227	0,236	0,236
42	0,237	0,273	0,275	0,289	0,293
43	0,279	0,320	0,319	0,327	0,323
44	0,228	0,262	0,260	0,266	0,262
45	0,122	0,151	0,148	0,150	0,145
46	0,023	0,024	0,020	0,017	0,132
47	0,122	0,152	0,148	0,150	0,145
48	0,228	0,261	0,260	0,267	0,264
49	0,279	0,318	0,318	0,328	0,325

Tablo 6.2

Görüldüğü gibi malzemenin büyük bir kısmı plağın köşe ve orta bölgelerinde toplanmıştır. Buna neden, köşelerde burulma momentinin, orta bölgede ise eğilme momentinin büyük değerler almasıdır.

Değişken kalınlıklı plağın ortalama yüksekliği h_0 ile gösterilirse, bu plağın taşıyabileceği en büyük burkulma yükü

$$P_k = 5,41 \frac{\pi^2}{b^2} \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

dir. Plağın hacmi ise,

$$V = h_0 a b$$

olarak yazılabilir. $\bar{h}_0$ sabit kalınlıklı bir kare plağın taşıyabildiği burkulma yükü, bilindiği gibi,

$$\bar{P}_k = 4,0 \frac{\pi^2}{b^2} \frac{E \bar{h}_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

dir. Sabit kalınlıklı plağın, değişken kalınlıklı plağın taşıyabildiği P_k yükünü taşıyabilmesi için, kalınlığının

$$\bar{h}_0 = \sqrt[3]{\frac{5,41}{4}} h_0 = 1,10589 h_0$$

olması gerekir. Bu durumda sabit kalınlıklı plağın hacmi

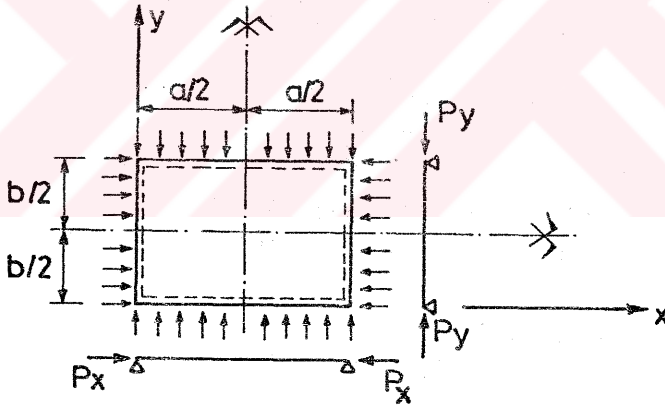
$$\bar{V} = 1,10589 h_0 a b$$

olur. Aynı burkulma yükünü taşıyan sabit ve değişken kalınlıklı plaklarda kullanılan malzemeler karşılaştırılırsa, değişken kalınlıklı plağın hacmindeki rölatif malzeme kazancının

$$\frac{1,10589 - 1}{1} = 0,10589$$

olduğu görülür.

6.2. İKİ DİK DOĞRULTUDA DÜZGÜN YAYILI BASINÇ KUVVETİ ETKİSİNDEKİ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLAR

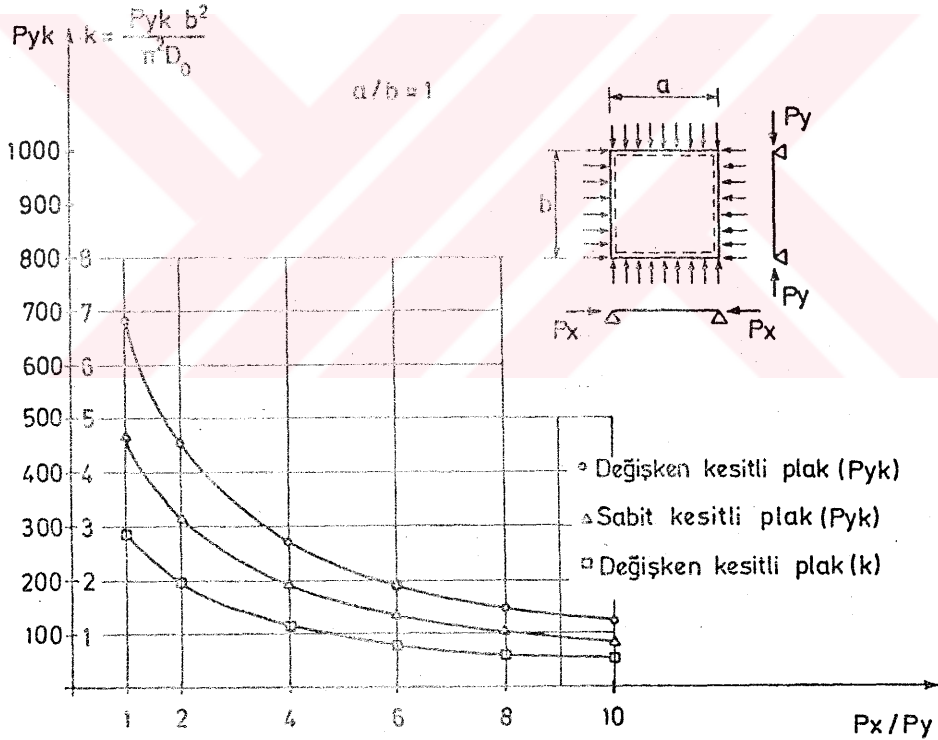


Şekil 6.8

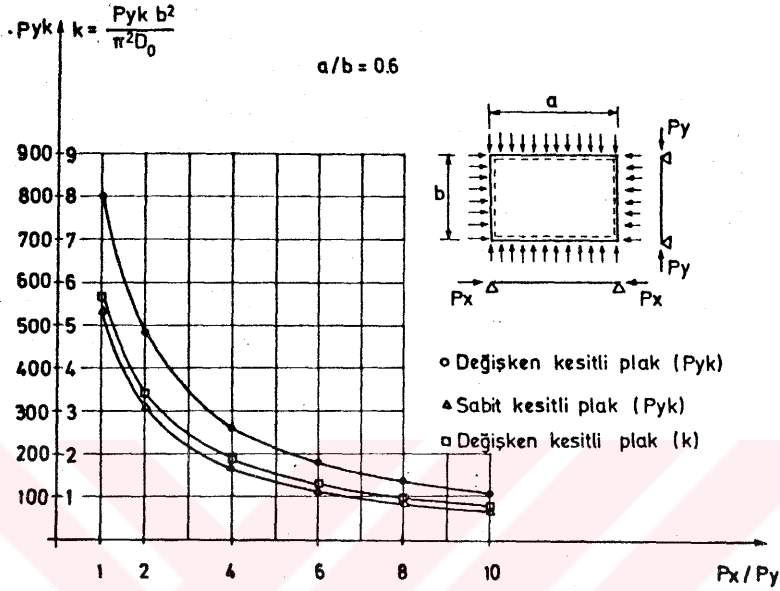
Kenarları basit mesnetli bir plak, düzgün yayılı P_x ve P_y basınç kuvvetlerinin etkisindedir. Bu iki kuvvetin arasında

$$\alpha = \frac{P_x}{P_y}$$

sabit oranının bulunduğu kabul edilmiştir. Kenarları arasındaki oranlar $a/b = 1,0$ ve $a/b = 0,6$ olan iki plakta α ya çeşitli değerler verilerek çözümler yapılmıştır. Her iki plak için taşınabilecek burkulma yükünün α ya göre değişimi Şekil 6.9 ve Şekil 6.10 da gösterilmiştir.



Şekil 6.9



Şekil 6.10

Aynı şekillerde, değişken kalınlıklı plakla eşit malzeme hacımlı sabit kalınlıklı plağın burkulma yükünün α ya göre değişimi de çizilmiştir. Sabit kesitli plak yerine, aynı malzeme ile yapılmış optimum kesit değişimli plağın alınması halinde, burkulma yükünde önemli bir artış meydana geldiği bu şekillerden görülmektedir. Değişken kalınlıklı plağın eleman köşe noktalarındaki kesit yüksekliklerinin değerleri Tablo 6.3 ve Tablo 6.4 de verilmiştir. $\alpha = 1$ için her iki plaktaki kesit değişimi Şekil 6.11 ve Şekil 6.12 de çizilmiştir. α nın diğer değerleri için kesit değişiminin benzer olduğu tablolardan görülmektedir.

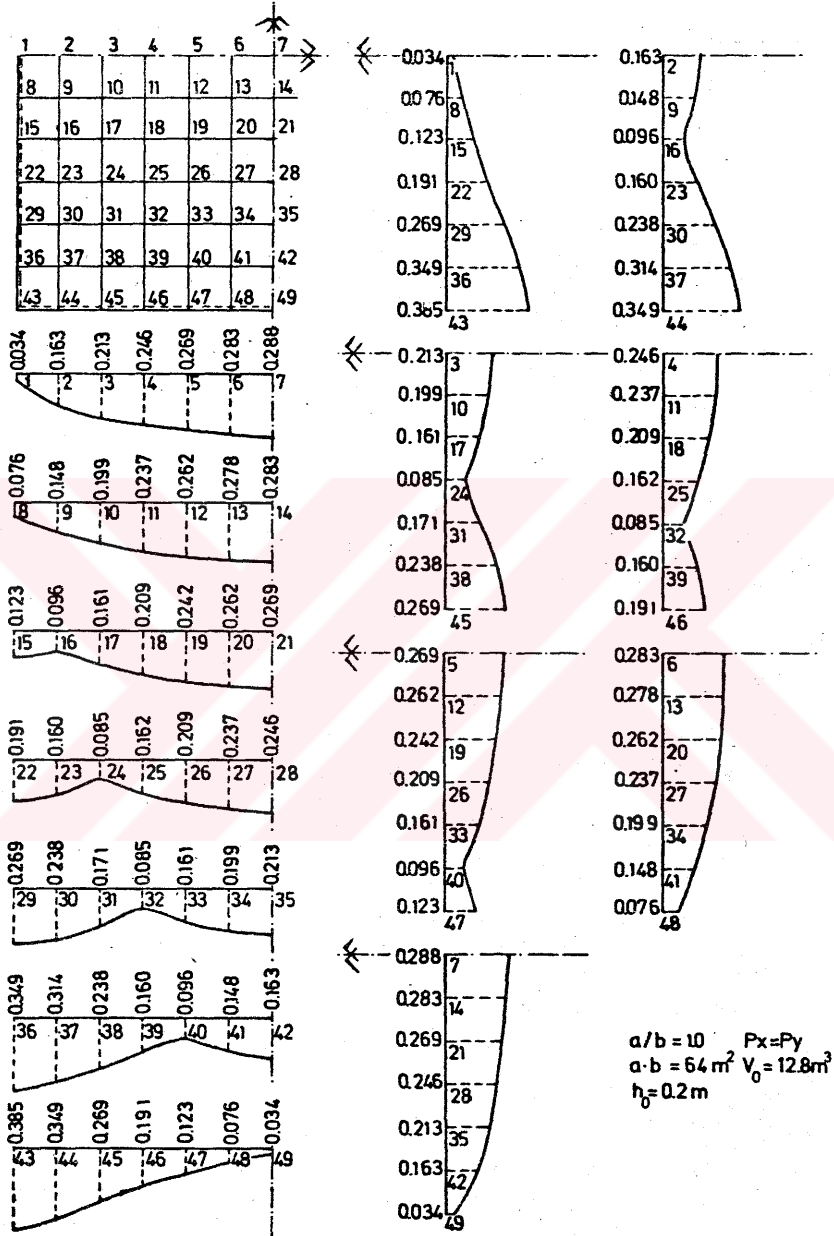
Şekil 6.9, Şekil 6.10 da verilen en büyük burkulma yükleri ve Tablo 6.3, Tablo 6.4 de verilen en uygun kesit değişimleri, ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2$ m, alanı $a.b = 64$ m² ve hacmi $V_0 = 12,8$ m³ olan plaklara aittir. k parametresindeki D_0 rijitliği, $h_0 = V_0/a.b$ ortalama yüksekliğinden hesap edilmektedir. Boyutları ve hacmi verilen herhangi bir dikdörtgen plağın en büyük burkulma yükü ve en uygun kesit değişimi Kısım 6.1 de anlatıldığı gibi tayin edilebilir.

No	a/b = 1 a.b = 64 m ² V ₀ = 12,8 m ³					
	$\alpha = P_x/P_y$					
	1 h(m)	2 h(m)	4 h(m)	6 h(m)	8 h(m)	10 h(m)
1	0,034	0,036	0,038	0,039	0,039	0,040
2	0,163	0,168	0,172	0,174	0,175	0,176
3	0,213	0,217	0,220	0,222	0,227	0,223
4	0,246	0,248	0,251	0,252	0,253	0,253
5	0,269	0,271	0,273	0,274	0,274	0,275
6	0,283	0,284	0,286	0,286	0,287	0,287
7	0,288	0,289	0,290	0,291	0,291	0,292
8	0,076	0,078	0,081	0,082	0,082	0,083
9	0,148	0,152	0,155	0,157	0,157	0,158
10	0,199	0,203	0,205	0,206	0,207	0,208
11	0,237	0,239	0,241	0,242	0,243	0,243
12	0,262	0,264	0,265	0,266	0,266	0,267
13	0,278	0,278	0,280	0,281	0,281	0,281
14	0,283	0,284	0,284	0,285	0,285	0,285
15	0,123	0,123	0,129	0,131	0,131	0,131
16	0,096	0,100	0,100	0,100	0,101	0,101
17	0,161	0,162	0,164	0,164	0,165	0,165
18	0,209	0,210	0,211	0,211	0,211	0,212
19	0,242	0,243	0,243	0,243	0,244	0,244
20	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262
21	0,269	0,268	0,268	0,268	0,268	0,268
22	0,191	0,194	0,198	0,200	0,201	0,201
23	0,160	0,163	0,165	0,166	0,166	0,167
24	0,085	0,084	0,085	0,084	0,084	0,084
25	0,162	0,162	0,162	0,162	0,162	0,162
26	0,209	0,208	0,207	0,207	0,206	0,206
27	0,237	0,234	0,233	0,233	0,232	0,232
28	0,246	0,243	0,241	0,241	0,240	0,240
29	0,269	0,273	0,275	0,276	0,277	0,277
30	0,238	0,241	0,242	0,242	0,243	0,243
31	0,171	0,172	0,171	0,171	0,171	0,171
32	0,085	0,084	0,083	0,082	0,082	0,081
33	0,161	0,159	0,157	0,157	0,156	0,156
34	0,199	0,196	0,193	0,192	0,191	0,191
35	0,213	0,209	0,205	0,204	0,203	0,202
36	0,349	0,351	0,351	0,351	0,351	0,351
37	0,314	0,314	0,313	0,313	0,313	0,312
38	0,238	0,236	0,233	0,232	0,232	0,232
39	0,160	0,157	0,155	0,154	0,153	0,153
40	0,096	0,094	0,091	0,090	0,089	0,089
41	0,148	0,143	0,139	0,137	0,135	0,135
42	0,163	0,157	0,151	0,149	0,147	0,146
43	0,385	0,385	0,384	0,383	0,383	0,383
44	0,349	0,348	0,346	0,345	0,344	0,344
45	0,269	0,265	0,262	0,260	0,259	0,259
46	0,191	0,187	0,184	0,182	0,181	0,180
47	0,123	0,119	0,116	0,115	0,114	0,113
48	0,076	0,072	0,070	0,068	0,068	0,067
49	0,034	0,032	0,030	0,029	0,029	0,028

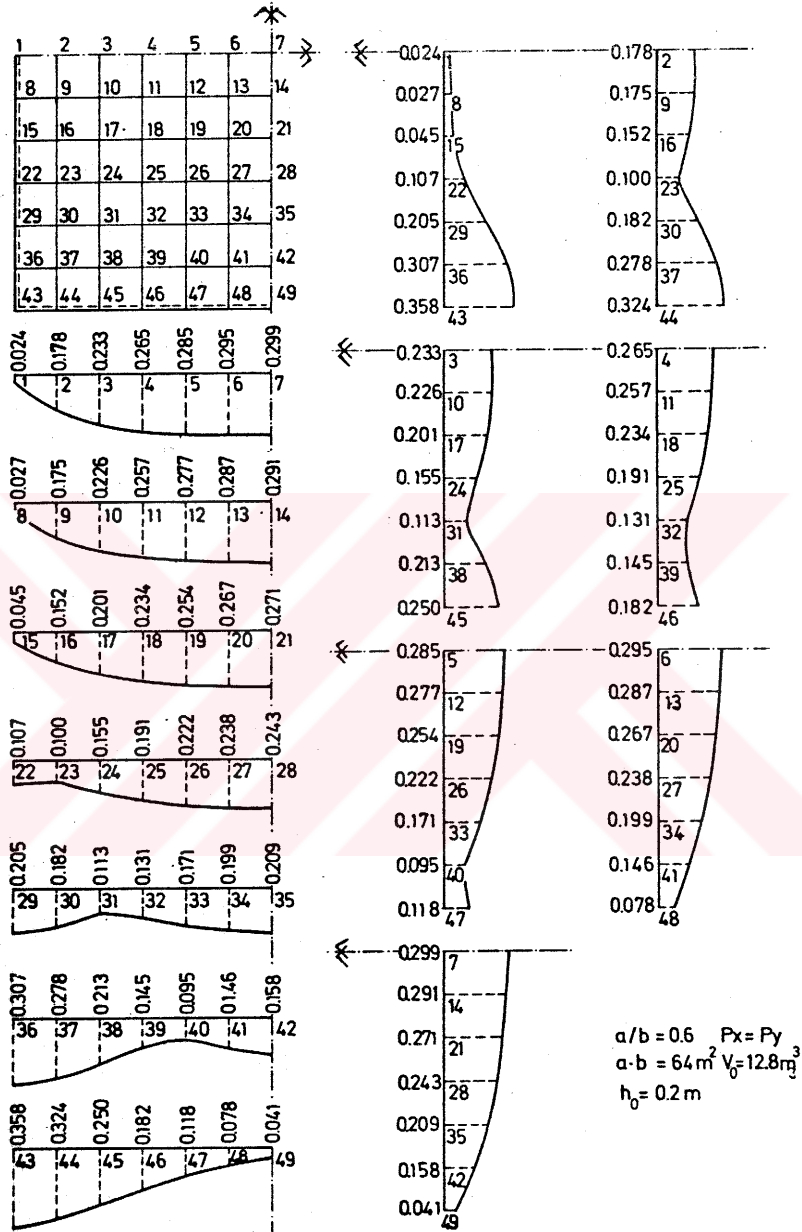
Tablo 6.3

No	$a/b = 0,6$ $a \cdot b = 64 \text{ m}^2$ $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$					
	$\alpha = P_x/P_y$					
	1	2	4	6	8	10
	$h(\text{m})$	$h(\text{m})$	$h(\text{m})$	$h(\text{m})$	$h(\text{m})$	$h(\text{m})$
1	0,024	0,025	0,026	0,026	0,026	0,026
2	0,178	0,188	0,192	0,195	0,196	0,197
3	0,233	0,245	0,252	0,255	0,257	0,258
4	0,265	0,278	0,287	0,291	0,292	0,294
5	0,285	0,297	0,307	0,311	0,313	0,314
6	0,295	0,308	0,318	0,322	0,324	0,326
7	0,299	0,311	0,321	0,326	0,328	0,329
8	0,027	0,029	0,034	0,036	0,037	0,037
9	0,175	0,178	0,185	0,187	0,188	0,189
10	0,226	0,230	0,238	0,241	0,242	0,243
11	0,257	0,262	0,270	0,273	0,274	0,275
12	0,277	0,282	0,291	0,294	0,295	0,296
13	0,287	0,293	0,302	0,305	0,306	0,307
14	0,291	0,297	0,305	0,308	0,310	0,311
15	0,045	0,052	0,041	0,039	0,038	0,037
16	0,152	0,144	0,152	0,153	0,154	0,154
17	0,201	0,189	0,198	0,200	0,200	0,201
18	0,234	0,225	0,232	0,233	0,234	0,234
19	0,254	0,248	0,253	0,255	0,255	0,255
20	0,267	0,262	0,267	0,268	0,268	0,269
21	0,271	0,268	0,272	0,272	0,273	0,273
22	0,107	0,145	0,119	0,117	0,116	0,115
23	0,100	0,104	0,087	0,087	0,087	0,087
24	0,155	0,131	0,143	0,144	0,144	0,144
25	0,191	0,173	0,179	0,179	0,180	0,180
26	0,222	0,208	0,212	0,212	0,212	0,212
27	0,238	0,227	0,230	0,230	0,229	0,229
28	0,243	0,233	0,236	0,235	0,235	0,235
29	0,205	0,245	0,221	0,218	0,217	0,216
30	0,182	0,217	0,196	0,194	0,193	0,192
31	0,113	0,155	0,135	0,132	0,130	0,129
32	0,131	0,095	0,114	0,116	0,116	0,117
33	0,171	0,157	0,160	0,159	0,159	0,159
34	0,199	0,185	0,187	0,186	0,186	0,186
35	0,209	0,196	0,197	0,196	0,195	0,195
36	0,307	0,346	0,321	0,317	0,315	0,313
37	0,278	0,304	0,283	0,280	0,278	0,276
38	0,213	0,213	0,203	0,200	0,198	0,197
39	0,145	0,141	0,136	0,133	0,132	0,131
40	0,095	0,077	0,084	0,085	0,086	0,086
41	0,146	0,134	0,133	0,132	0,131	0,131
42	0,158	0,147	0,144	0,143	0,142	0,141
43	0,358	0,392	0,367	0,362	0,360	0,358
44	0,324	0,339	0,320	0,316	0,313	0,312
45	0,250	0,235	0,228	0,224	0,222	0,221
46	0,182	0,166	0,162	0,159	0,157	0,156
47	0,118	0,108	0,101	0,100	0,097	0,096
48	0,078	0,069	0,066	0,064	0,063	0,063
49	0,041	0,034	0,030	0,028	0,027	0,026

Tablo 6.4

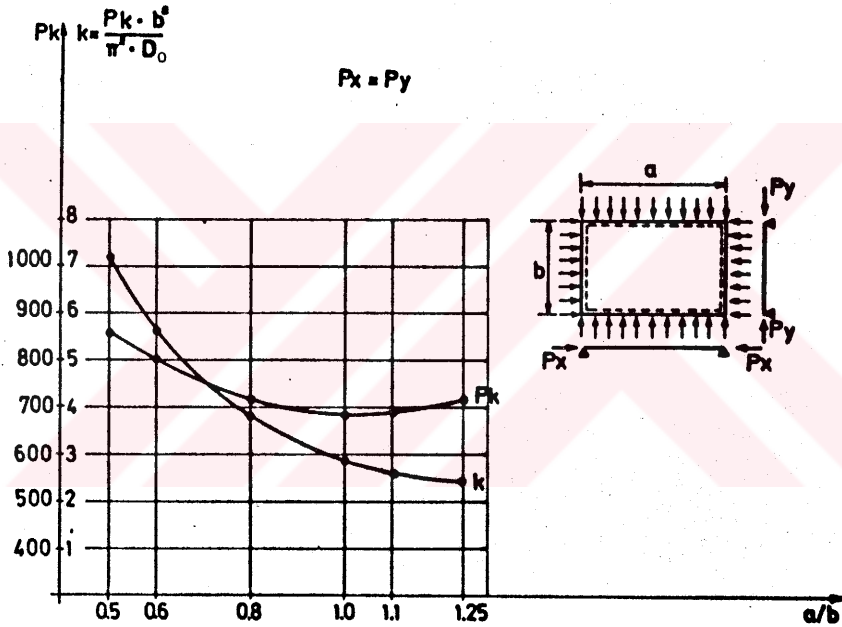


Şekil 6.11



Şekil 6.12

Yukarıda anlatılan örneklerde, plağın kenarları arasındaki oran sabit tutulup α nın değişiminin burkulma yüküne ve kesit değişimine etkisi incelenmişti. Bu araştırmaya ilave olarak yükler arasındaki oran sabit tutulup, plağın kenarları arasındaki a/b oranının değişimi incelenmiştir. $\alpha = 1$ durumunda yani iki dik doğrultudan eşit basınç etkisindeki plakta a/b oranının çeşitli değerleri için çözüm yapılmıştır. Hesaplanan en büyük burkulma yükünün ve bu yüke ait kritik yük parametresinin a/b ye göre değişimi Şekil 6.13 de gösterilmiştir.



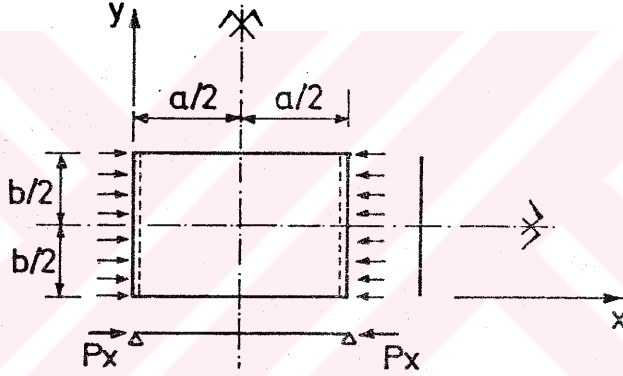
Şekil 6.13

Burada bulunan en büyük burkulma yükleri ve en uygun kesit değişimleri ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2$ m, alanı $b \cdot a = 64$ m² ve hacmi $V_0 = 12,8$ m³ olan plaklara aittir. k parametresindeki D_0 rijitliği ise daha önce açıklandığı gibi $h_0 = \text{Hacım/Alan}$ olarak tanımlanan ortalama yükseklikten yararlanılarak $D_0 = E h_0^3 / 12(1 - \nu^2)$ şeklinde hesap edilmektedir. Boyutları ve hacmi verilen herhangi bir dikdörtgen plak için çözüm Kısım 6.1 deki gibi yapılabilir.

$\alpha = 1$, $a/b = 1$ ve $a/b = 0,6$ durumları için plaktaki kesit değişimi Şekil 6.11, Şekil 6.12 de çizilmiştir. a/b nin diğer değerleri için de kesit değişimi bu şekillere benzer olduğundan ayrıca çizilmemiştir. Fakat elemanların köşe noktalarındaki kesit yükseklikleri Tablo 6.5 de toplu olarak verilmiştir.

6.3. BİR DOĞRULTUDA DÜZGÜN YAYILI BASINÇ KUVVETİ ETKİSİNDEKİ DEĞİŞİK MESNETLENME DURUMLU DİKDÖRTGEN PLAKLAR

6.3.1. Basınç doğrultusuna dik iki kenarı boyunca basit mesnetli, diğer kenarları boşta olan dikdörtgen plaklar



Şekil 6.14

Çözümü yapılan plaklar $x = 0$ ve $x = a$ kenarlarında basit mesnetlidir ve bu kenarlar boyunca düzgün yayılı P_x basınç kuvvetlerinin etkisindedir. $y = 0$ ve $y = b$ kenarları ise boştaadır. Böyle mesnetlenmiş bir plakta sınır ve simetri şartları ;

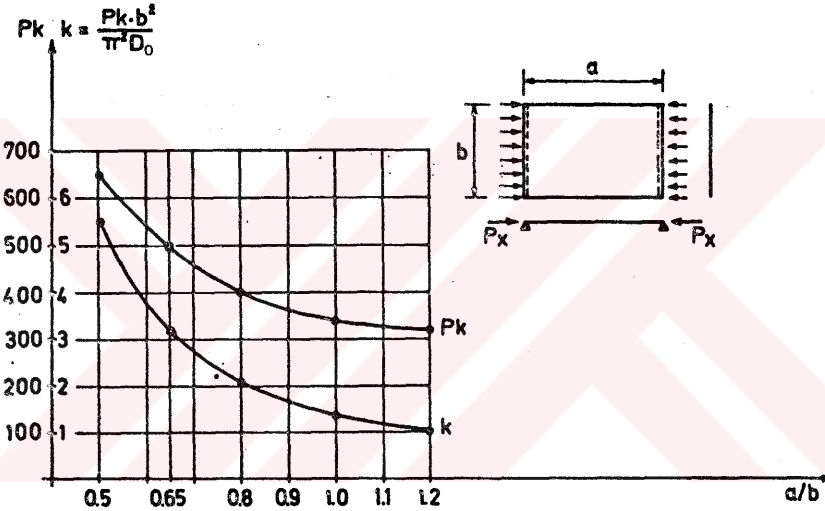
$$\begin{aligned}
 x = 0 \quad \text{da} \quad w &= 0 & x = \frac{a}{2} \quad \text{de} \quad \theta_y &= 0 \\
 &\theta_x = 0 \\
 y = \frac{b}{2} \quad \text{de} \quad \theta_x &= 0
 \end{aligned}$$

No	$\alpha = 1 \quad a, b = 64 \text{ m}^2 \quad v_0 = 12,8 \text{ m}^3$					
	a/b					
	0,5	0,6	0,8	1,0	1,1	1,25
	h(m)	h(m)	h(m)	h(m)	h(m)	h(m)
1	0,021	0,024	0,027	0,034	0,036	0,037
2	0,167	0,178	0,197	0,163	0,157	0,152
3	0,220	0,233	0,227	0,213	0,208	0,203
4	0,253	0,265	0,258	0,246	0,242	0,239
5	0,273	0,285	0,277	0,269	0,268	0,267
6	0,284	0,295	0,289	0,283	0,284	0,286
7	0,288	0,299	0,293	0,288	0,289	0,293
8	0,030	0,027	0,055	0,076	0,078	0,077
9	0,168	0,175	0,161	0,148	0,143	0,138
10	0,219	0,226	0,215	0,199	0,195	0,189
11	0,250	0,257	0,247	0,237	0,234	0,231
12	0,270	0,277	0,269	0,262	0,262	0,262
13	0,280	0,287	0,282	0,278	0,279	0,282
14	0,284	0,291	0,286	0,283	0,285	0,289
15	0,021	0,045	0,092	0,123	0,127	0,128
16	0,162	0,152	0,118	0,096	0,091	0,082
17	0,211	0,201	0,172	0,161	0,158	0,154
18	0,241	0,234	0,216	0,209	0,208	0,206
19	0,259	0,254	0,245	0,242	0,243	0,245
20	0,269	0,267	0,262	0,262	0,265	0,269
21	0,273	0,271	0,267	0,269	0,272	0,278
22	0,069	0,107	0,173	0,191	0,194	0,194
23	0,139	0,100	0,141	0,160	0,162	0,164
24	0,184	0,155	0,101	0,085	0,083	0,073
25	0,216	0,191	0,165	0,162	0,164	0,165
26	0,238	0,222	0,206	0,209	0,212	0,216
27	0,250	0,238	0,231	0,237	0,241	0,247
28	0,254	0,243	0,239	0,246	0,251	0,258
29	0,157	0,205	0,256	0,269	0,270	0,270
30	0,128	0,182	0,227	0,238	0,238	0,238
31	0,127	0,113	0,167	0,171	0,168	0,167
32	0,170	0,131	0,073	0,085	0,093	0,101
33	0,198	0,171	0,154	0,161	0,166	0,172
34	0,217	0,199	0,189	0,199	0,206	0,215
35	0,224	0,209	0,203	0,213	0,219	0,227
36	0,251	0,307	0,347	0,349	0,348	0,354
37	0,231	0,278	0,312	0,314	0,311	0,312
38	0,181	0,213	0,238	0,238	0,233	0,227
39	0,113	0,145	0,164	0,160	0,152	0,141
40	0,134	0,095	0,082	0,096	0,106	0,118
41	0,163	0,146	0,138	0,148	0,154	0,161
42	0,169	0,158	0,152	0,163	0,170	0,179
43	0,297	0,358	0,391	0,385	0,382	0,391
44	0,278	0,324	0,353	0,349	0,345	0,348
45	0,231	0,250	0,271	0,269	0,263	0,256
46	0,175	0,182	0,194	0,191	0,184	0,173
47	0,123	0,118	0,128	0,123	0,113	0,092
48	0,083	0,078	0,077	0,076	0,071	0,055
49	0,046	0,041	0,037	0,034	0,031	0,027

Tablo 6.5

olarak verilmiştir. Plağın kenarları arasındaki a/b oranı değiştirilerek çözümler yapılmış ve en büyük burkulma yükleri ile bu yüklere ait kalınlık değişimleri tayin edilmiştir.

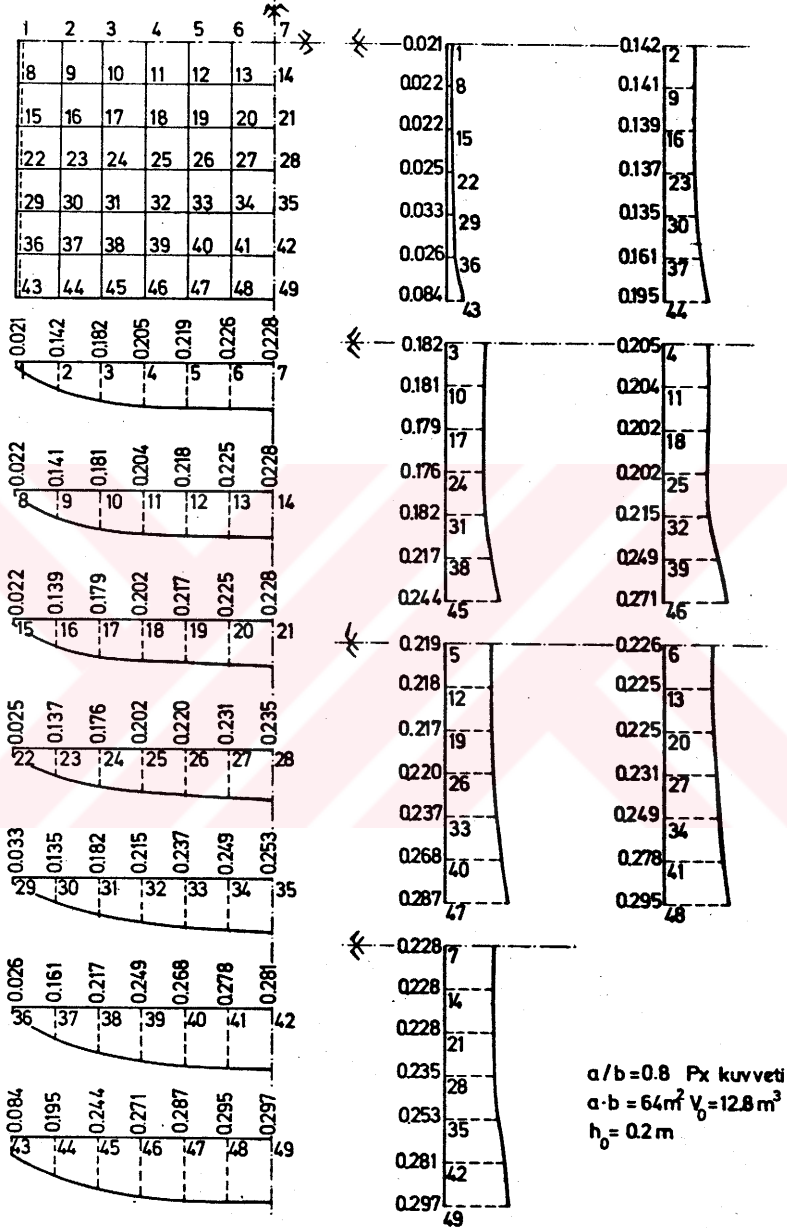
Şekil 6.15 de, hesaplanan burkulma yüklerinin ve kritik yük parametresinin kenar oranlarına göre değişimi verilmiştir.



Şekil 6.15

$a/b = 0,8$ için elde edilen kalınlık değişimi, Şekil 6.16 da çizilmiştir. Diğer kenar oranları için bulunan değerler toplu olarak Tablo 6.6 da verilmiştir.

Hesaplanan en büyük burkulma yükleri ile en uygun kesit değişimleri yukarıda açıklandığı gibi, ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2$ m, alanı $a \cdot b = 64 \text{ m}^2$ ve hacmi $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$ olan plaklara aittir. k parametresi ve D_0 nın hesabı ise Kısım 6.1 de anlatıldığı gibi yapılabilir. Boyutları ve hacmi verilen bir dikdörtgen plağın en büyük burkulma yükünün ve uygun kesit değişiminin hesabı da Kısım 6.1 de anlatıldığı gibi yapılabilir.

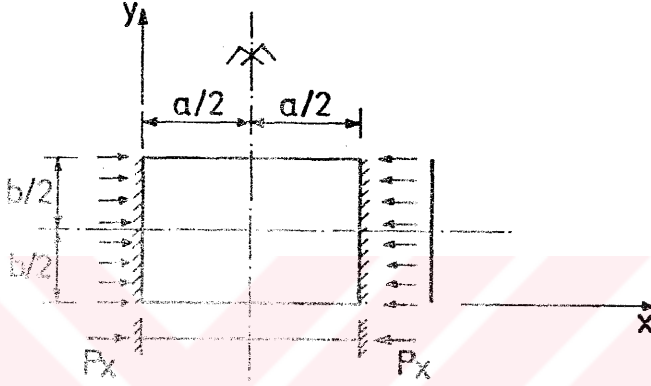


Şekil 6.16

No.	$a \cdot b = 64 \text{ m}^2$ $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$				
	a/b				
	0,5 h(m)	0,65 h(m)	0,8 h(m)	1,0 h(m)	1,2 h(m)
1	0,021	0,021	0,021	0,022	0,025
2	0,152	0,145	0,142	0,139	0,132
3	0,200	0,187	0,182	0,175	0,159
4	0,230	0,211	0,205	0,194	0,172
5	0,249	0,226	0,219	0,203	0,176
6	0,260	0,234	0,226	0,208	0,177
7	0,263	0,236	0,228	0,209	0,177
8	0,025	0,021	0,022	0,024	0,035
9	0,151	0,145	0,141	0,137	0,128
10	0,198	0,186	0,181	0,173	0,157
11	0,227	0,210	0,204	0,191	0,168
12	0,246	0,225	0,218	0,201	0,172
13	0,256	0,233	0,225	0,205	0,172
14	0,259	0,236	0,228	0,206	0,172
15	0,030	0,022	0,022	0,028	0,048
16	0,147	0,143	0,139	0,134	0,128
17	0,191	0,184	0,179	0,167	0,150
18	0,217	0,208	0,202	0,185	0,158
19	0,232	0,223	0,217	0,195	0,158
20	0,241	0,232	0,225	0,200	0,157
21	0,244	0,236	0,228	0,202	0,156
22	0,026	0,025	0,025	0,036	0,053
23	0,138	0,141	0,137	0,128	0,122
24	0,175	0,181	0,176	0,162	0,140
25	0,196	0,207	0,202	0,182	0,145
26	0,208	0,224	0,220	0,197	0,147
27	0,215	0,234	0,231	0,206	0,148
28	0,217	0,237	0,235	0,209	0,148
29	0,033	0,031	0,033	0,051	0,080
30	0,130	0,138	0,135	0,133	0,144
31	0,164	0,183	0,182	0,175	0,173
32	0,183	0,213	0,215	0,208	0,190
33	0,194	0,223	0,237	0,232	0,209
34	0,199	0,246	0,249	0,247	0,224
35	0,201	0,248	0,253	0,252	0,229
36	0,051	0,024	0,026	0,062	0,132
37	0,154	0,154	0,161	0,180	0,226
38	0,203	0,208	0,217	0,244	0,295
39	0,235	0,238	0,249	0,284	0,344
40	0,254	0,256	0,268	0,308	0,376
41	0,266	0,265	0,278	0,321	0,394
42	0,269	0,268	0,281	0,325	0,400
43	0,057	0,084	0,084	0,047	0,133
44	0,179	0,185	0,195	0,215	0,245
45	0,239	0,230	0,244	0,286	0,356
46	0,278	0,256	0,271	0,326	0,422
47	0,304	0,270	0,287	0,349	0,461
48	0,319	0,278	0,295	0,360	0,480
49	0,324	0,281	0,297	0,369	0,486

Tablo 6.6

6.3.2. Basınç doğrultusuna dik iki kenarı boyunca ankastre, diğer kenarları boşta olan dikdörtgen plaklar



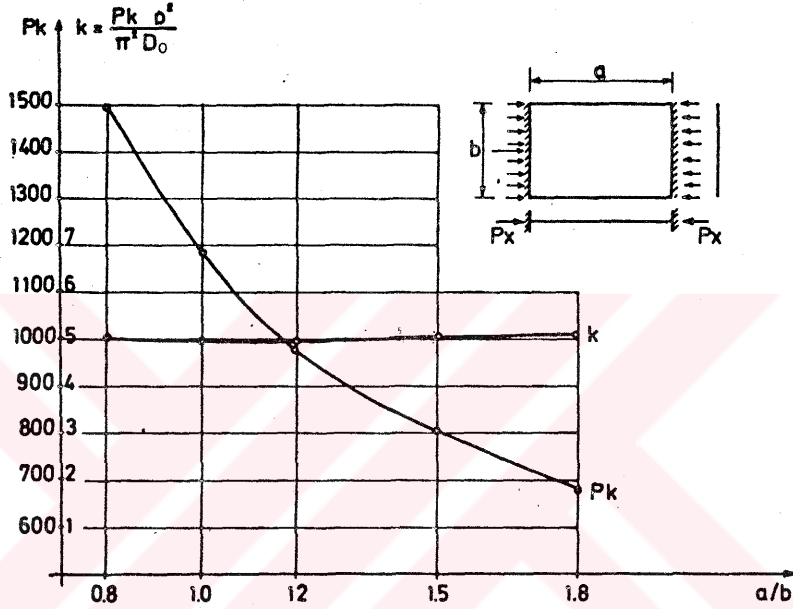
Şekil 6.17

Şekil 6.17 den de görüldüğü gibi plâğın, $x = 0$ ve $x = a$ kenarları ankastredir ve bu kenarları boyunca düzgün yayılı P_x basınç kuvvetleri etkimektedir. Diğer kenarlar ise boştaadır. Mesnetleri bu şekilde olan plakta sınır ve simetri şartları

$$\begin{aligned}
 x = 0 \quad \text{da} \quad w &= 0 & x = \frac{a}{2} \quad \text{de} \quad \theta_y &= 0 \\
 \theta_x &= 0 \\
 \theta_y &= 0 \\
 y = \frac{b}{2} \quad \text{de} \quad \theta_x &= 0
 \end{aligned}$$

olarak verilmiştir.

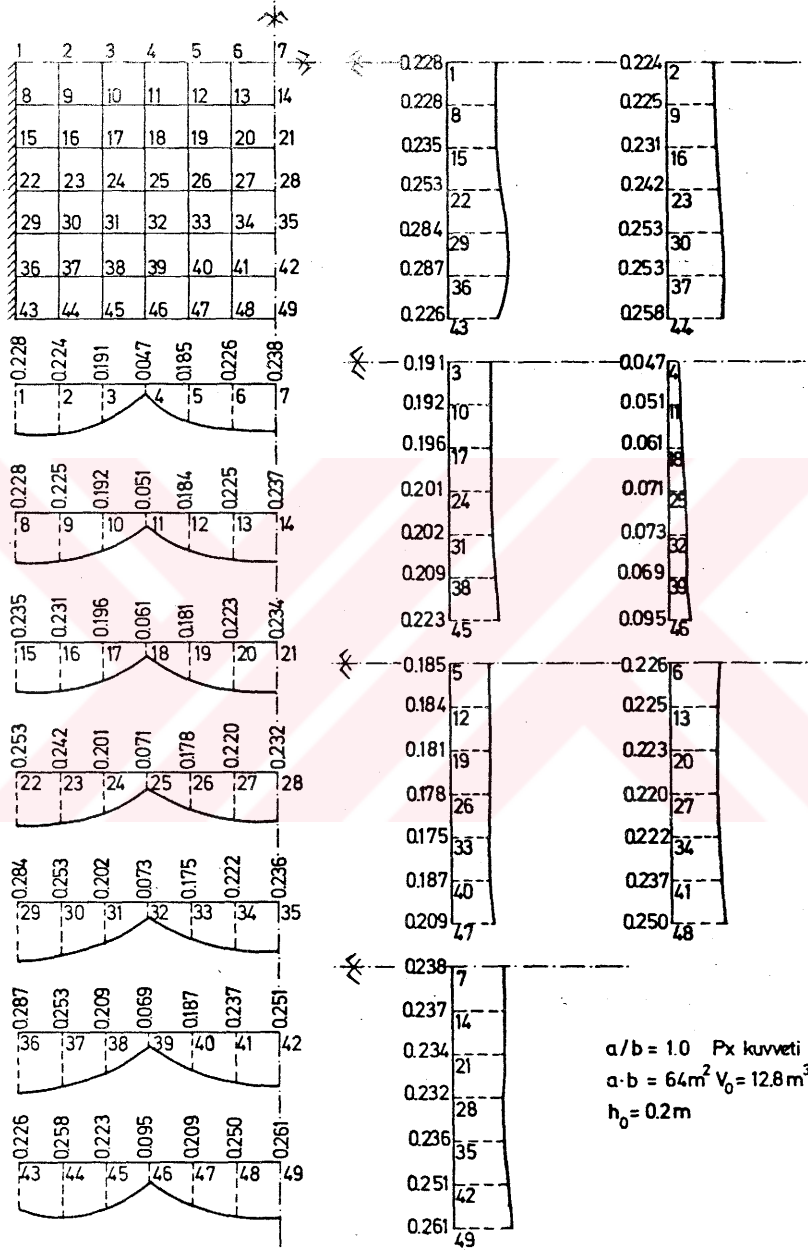
Plâğın a/b kenar oranının değiştirilmesiyle yapılan çözümler elde edilen en büyük burkulma yüklerinin ve bu yüklere ait kritik yük parametrelerinin a/b ye göre değişimi Şekil 6.18 de gösterilmiştir.



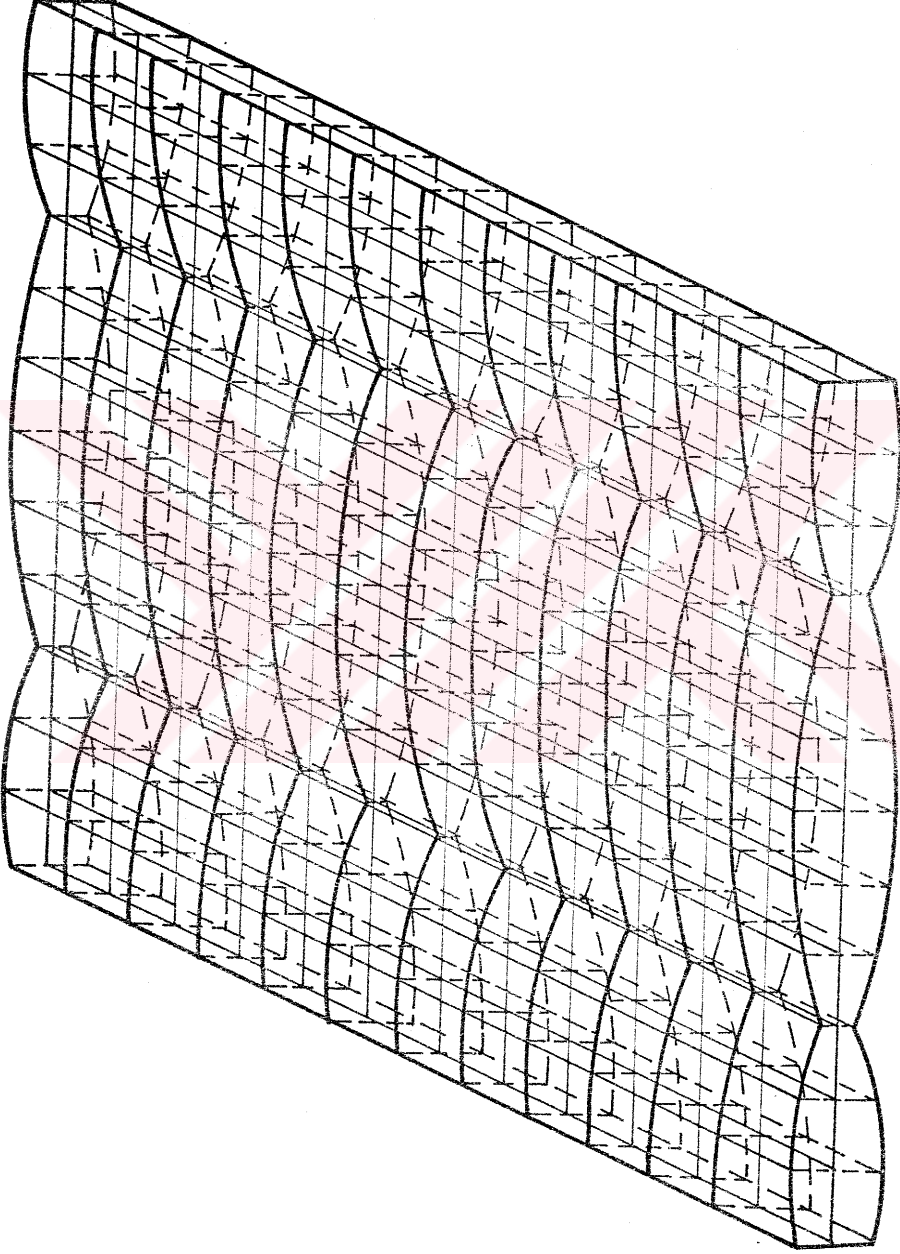
Şekil 6.18

a/b = 1 olan plakta, eleman köşe noktalarında hesap edilen kesit yüksekliklerinin plak içindeki değişimi Şekil 6.19 da gösterilmiştir. Bu yüksekliklerin ortalama düzlem üzerinde yayılması ile plakta elde edilen kesit değişiminin perspektif görünüşü Şekil 6.20 de çizilmiştir. Diğer kenar oranları için elde edilen yüksekliklerin eleman tepe noktalarındaki değerleri Tablo 6.7 de toplu olarak verilmiştir.

Hesaplanan en büyük burkulma yükleri ve uygun kesit değişimleri ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2$ m, alanı $a, b = 64 \text{ m}^2$ ve hacmi $V_0 = 12,8 \text{ m}^3$ olan plaklara aittir. k parametresinin hesabı ile a, b boyutları ve hacmi verilen bir dikdörtgen plâğın en büyük burkulma yükünün ve uygun kesit değişiminin hesabı Kısım 6.1 de anlatıldığı gibi tayin edilebilir.



Şekil 6.19

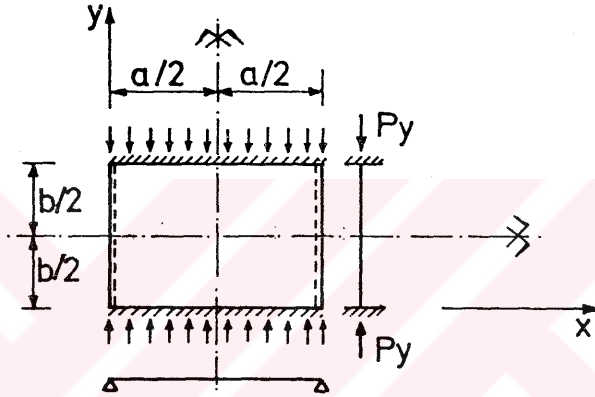


Şekil 6.20

No	$a \cdot b = 64 \text{ m}^2$		$V_0 = 12,8 \text{ m}^3$		
	a/b				
	0,8 h(m)	1,0 h(m)	1,2 h(m)	1,5 h(m)	1,8 h(m)
1	0,242	0,228	0,221	0,202	0,212
2	0,230	0,224	0,222	0,218	0,230
3	0,189	0,191	0,193	0,198	0,210
4	0,032	0,047	0,066	0,101	0,122
5	0,194	0,185	0,178	0,164	0,153
6	0,236	0,226	0,219	0,209	0,198
7	0,248	0,238	0,231	0,221	0,209
8	0,237	0,228	0,224	0,224	0,226
9	0,228	0,225	0,225	0,201	0,236
10	0,190	0,192	0,195	0,102	0,211
11	0,023	0,051	0,068	0,163	0,122
12	0,191	0,184	0,177	0,208	0,153
13	0,234	0,225	0,219	0,219	0,197
14	0,246	0,237	0,230	0,241	0,207
15	0,230	0,235	0,237	0,241	0,265
16	0,228	0,231	0,233	0,207	0,252
17	0,195	0,196	0,199	0,104	0,213
18	0,061	0,061	0,073	0,162	0,119
19	0,183	0,181	0,176	0,204	0,151
20	0,227	0,223	0,218	0,215	0,193
21	0,239	0,234	0,229	0,259	0,203
22	0,244	0,253	0,262	0,291	0,309
23	0,242	0,242	0,245	0,259	0,265
24	0,207	0,201	0,202	0,210	0,211
25	0,093	0,071	0,076	0,102	0,111
26	0,172	0,178	0,174	0,159	0,148
27	0,217	0,220	0,217	0,203	0,193
28	0,228	0,232	0,230	0,216	0,206
29	0,292	0,284	0,291	0,319	0,315
30	0,264	0,253	0,255	0,268	0,265
31	0,215	0,202	0,202	0,209	0,208
32	0,108	0,073	0,073	0,095	0,102
33	0,163	0,175	0,174	0,161	0,155
34	0,208	0,222	0,223	0,215	0,212
35	0,221	0,236	0,238	0,231	0,231
36	0,298	0,287	0,285	0,283	0,255
37	0,263	0,253	0,254	0,261	0,253
38	0,219	0,209	0,212	0,223	0,225
39	0,106	0,069	0,071	0,094	0,106
40	0,168	0,187	0,191	0,191	0,195
41	0,225	0,237	0,242	0,250	0,260
42	0,237	0,251	0,255	0,265	0,277
43	0,222	0,226	0,221	0,199	0,171
44	0,257	0,258	0,261	0,263	0,251
45	0,227	0,223	0,229	0,242	0,246
46	0,120	0,095	0,098	0,114	0,124
47	0,189	0,209	0,216	0,222	0,229
48	0,240	0,250	0,255	0,272	0,288
49	0,254	0,261	0,266	0,284	0,302

Tablo 6.7

6.3.3. Basınç doğrultusuna dik iki kenarı boyunca ankastre diğer kenarları basit mesnetli olan dikdörtgen plaklar.



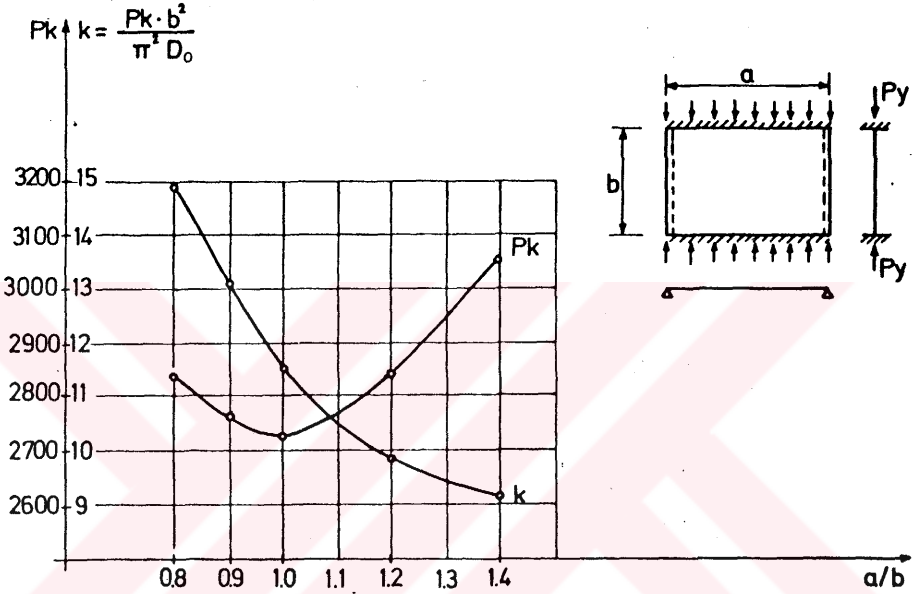
Şekil 6.21

Çözümü yapılan plaklar $y = 0$ ve $y = b$ kenarlarında ankastredir ve bu kenarları boyunca düzgün yayılı P_y basınç kuvvetlerinin etkisindedir. $x = 0$ ve $x = a$ kenarları ise basit mesnetlidir. Bu şekilde mesnetlenmiş plaklarda sınır ve simetri şartları,

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{da} & w = 0 \\ & & \theta_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} x = \frac{a}{2} & \text{de} & \theta_y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{da} & w = 0 \\ & & \theta_x = 0 \\ & & \theta_y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} y = \frac{b}{2} & \text{de} & \theta_x = 0 \end{array}$$

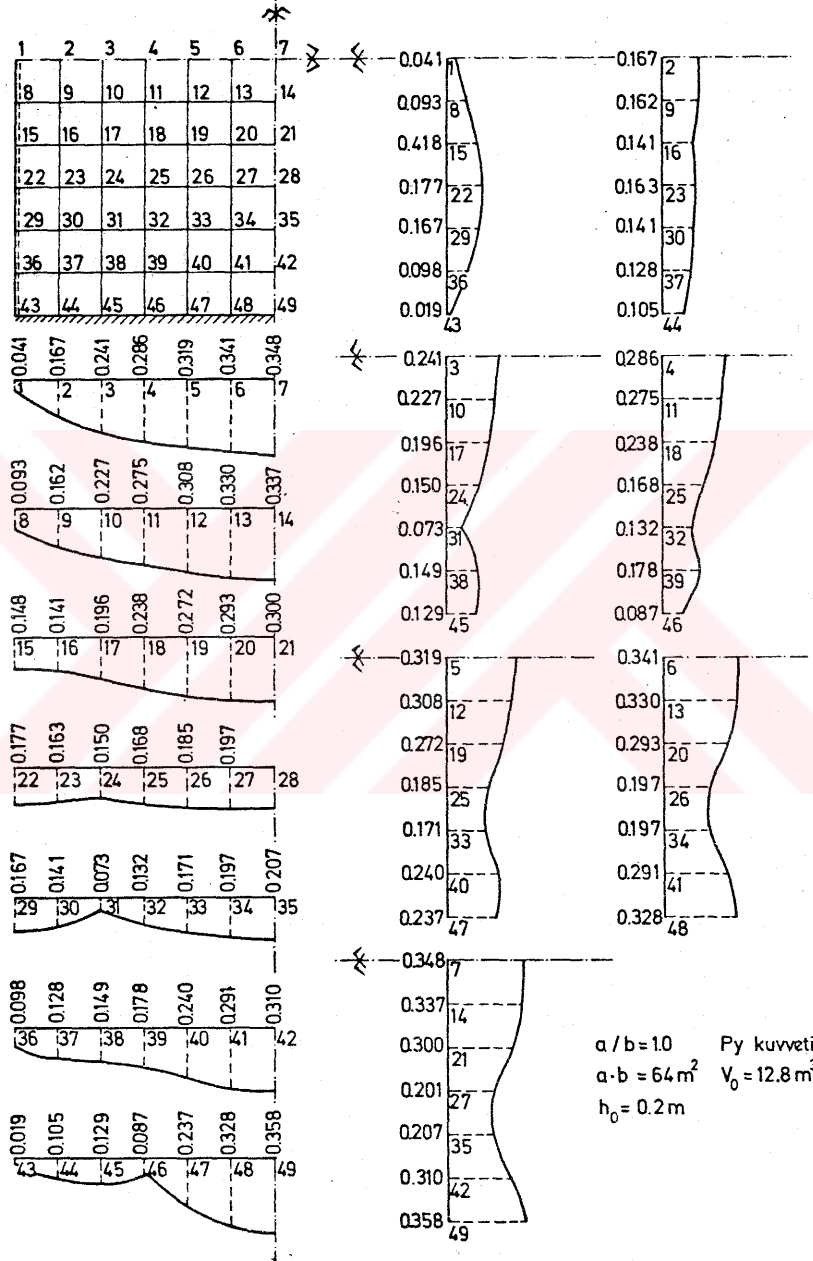
olarak verilmiştir. Plâğın kenarları arasındaki a/b oranı değiştirilerek çözüm yapılmıştır. Hesaplanan en büyük burkulma yükleri ve bu yüklere ait kritik yük parametrelerinin kenar oranına göre değişimi Şekil 6.22 de verilmiştir.



Şekil 6.22

$a/b = 1,0$ olan plakta eleman tepe noktalarında hesap edilen kesit yüksekliklerinin plak içindeki değişimi Şekil 6.23 de gösterilmiştir. Diğer kenar oranları için elde edilen kesit yüksekliklerinin eleman tepe noktalarındaki değerleri Tablo 6.8 de verilmiştir. Her plak için kesit yüksekliklerinin plak içindeki değişimi Şekil 6.23 e benzer olduğu için ayrı ayrı çizilmemiştir. Bu benzerlik Tablo 6.8 ile Şekil 6.23 karşılaştırılarak görülebilir.

Verilen en büyük burkulma yükleri ve uygun kesit değişimleri, ortalama yüksekliği $h_0 = 0,2$ m, alanı $a \cdot b = 64$ m² ve hacmi $V_0 = 12,8$ m³ olan plaklara aittir. k parametresindeki D_0 rijitliği, $h_0 = \text{Hacim/Alan}$ olarak tanımlanan ortalama yükseklikten yararlanılarak hesap edilmektedir. Boyutları ve hacmi verilen bir dikdörtgen plâğın en büyük burkulma yükü ve uygun kesit değişimi Kısım 6.1 de anlatıldığı gibi hesap edilebilir.



Şekil 6.23

No	$\alpha \cdot b = 64 \text{ m}^2$				
	$V_0 = 12,8 \text{ m}^3$				
	a/b				
	0,8 h(m)	0,9 h(m)	1,0 h(m)	1,2 h(m)	1,4 h(m)
1	0,032	0,036	0,041	0,042	0,026
2	0,170	0,173	0,167	0,171	0,199
3	0,240	0,244	0,241	0,243	0,262
4	0,248	0,289	0,286	0,281	0,291
5	0,314	0,321	0,319	0,310	0,310
6	0,332	0,342	0,341	0,331	0,325
7	0,338	0,350	0,348	0,340	0,332
8	0,075	0,083	0,093	0,089	0,072
9	0,163	0,165	0,162	0,169	0,190
10	0,228	0,231	0,227	0,231	0,253
11	0,274	0,278	0,275	0,272	0,282
12	0,305	0,311	0,308	0,300	0,298
13	0,323	0,331	0,330	0,320	0,311
14	0,329	0,339	0,337	0,328	0,316
15	0,127	0,136	0,148	0,142	0,112
16	0,139	0,139	0,141	0,147	0,167
17	0,199	0,198	0,196	0,202	0,223
18	0,243	0,242	0,238	0,237	0,248
19	0,275	0,275	0,272	0,263	0,257
20	0,293	0,295	0,293	0,279	0,262
21	0,299	0,302	0,300	0,285	0,263
22	0,183	0,183	0,177	0,172	0,159
23	0,161	0,157	0,163	0,155	0,120
24	0,159	0,150	0,150	0,150	0,167
25	0,190	0,176	0,168	0,157	0,166
26	0,210	0,193	0,185	0,162	0,152
27	0,223	0,205	0,197	0,164	0,123
28	0,227	0,209	0,201	0,164	0,105
29	0,193	0,181	0,167	0,178	0,163
30	0,170	0,154	0,141	0,128	0,117
31	0,119	0,079	0,073	0,113	0,125
32	0,065	0,125	0,132	0,156	0,158
33	0,130	0,167	0,171	0,182	0,192
34	0,164	0,196	0,197	0,205	0,220
35	0,176	0,207	0,207	0,212	0,231
36	0,120	0,092	0,098	0,111	0,075
37	0,125	0,126	0,128	0,172	0,145
38	0,162	0,150	0,149	0,156	0,147
39	0,168	0,166	0,178	0,120	0,170
40	0,217	0,225	0,240	0,243	0,244
41	0,278	0,290	0,291	0,288	0,300
42	0,305	0,319	0,310	0,304	0,314
43	0,017	0,018	0,019	0,032	0,027
44	0,101	0,106	0,105	0,040	0,132
45	0,142	0,136	0,129	0,150	0,135
46	0,123	0,110	0,087	0,180	0,067
47	0,136	0,170	0,237	0,257	0,259
48	0,298	0,324	0,328	0,328	0,345
49	0,351	0,381	0,358	0,349	0,357

Tablo 6.8

BÖLÜM 7

ELEKTRONİK HESAP MAKİNASI PROGRAMLARI

Gözönüne alınan sistemlerde, verilmiş bir malzeme miktarı için, burkulma yükünü en büyük yapan malzeme yayılışının sayısal olarak belirlenmesi amacıyla çeşitli elektronik hesap makinası programları hazırlanmış ve FORTRAN IV dilinde kodlanmıştır.*

Kısım 3.4.1, Kısım 3.4.2 ve Bölüm 4 de anlatılan sayısal ardışık yaklaşımlar ve sonlu elemanlar yöntemi bu programlar yardımı ile uygulanmıştır.

Hazırlanan programlardan ENKES1 çubuk sistemler, ENKES2 ise plak sistemler için kullanılarak en büyük burkulma yükleri ve malzeme yayılışları hesaplanmıştır. Bu programların icra zamanları sistemin ayrıldığı sonlu eleman sayısına bağlıdır. 20 elemana ayrılmış bir çubuk sistemde ENKES1 programının ortalama çalışma süresi 10 dakikadır. ENKES2 programı, 12x12 parçaya ayrılmış bir plak sistem için ortalama olarak 35-40 dakika çalışmaktadır.

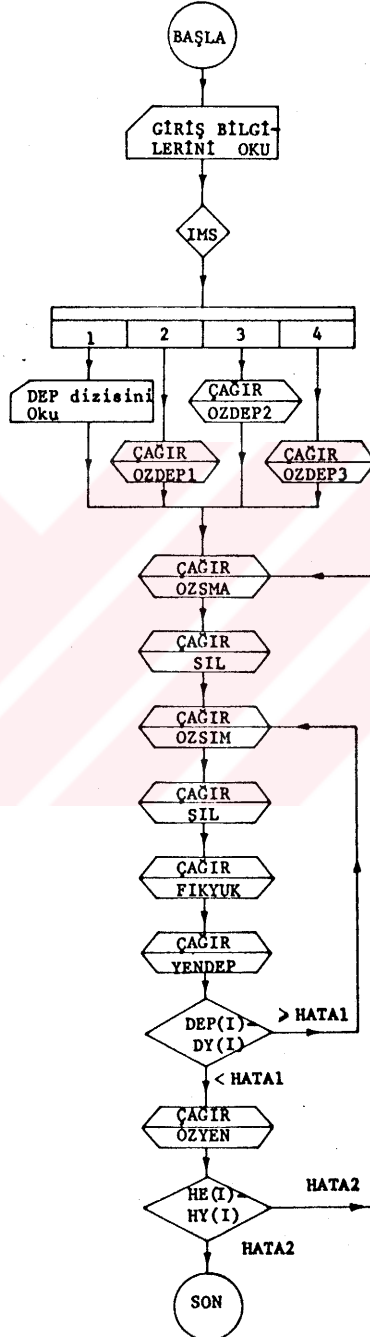
Bu iki ana programdan ayrı olarak hazırlanan FIYU programı, Kısım 4.1.3 de anlatılan, plak elemanının ikinci mertebe matrislerini hesap etmektedir. Bu programın icra süresi 5 dakikadır.

7.1. ENKES1 PROGRAMI

ENKES1; çubuk sistemlerde verilmiş bir malzeme miktarı için en büyük burkulma yükünü veren malzeme yayılışına ait kesit değerlerini hesaplamaktadır. Programın genel akış diyagramı Şekil 7.1 de verilmiştir. Buradan da görüldüğü gibi, program giriş bilgilerinden sonra birbiri ardından çağrılan alt programlardan oluşmaktadır.

* Programların geliştirilmesi ve uygulanması için İ.T.Ü. Elektronik Hesap Bilimleri Enstitüsünde bulunan Burroughs B3700 sisteminden yararlanılmıştır.

ENKES1



Şekil 7.1

Kısım 3.4.1 ve Kısım 3.4.2 de anlatılan iterasyonlardan, mod iterasyonu akış diyagramında işaret edilen iç çevrimde, kesit iterasyonu ise dış çevrimde yapılmaktadır.

ENKES1 programı, çözümü istenen sistemin mesnetlenme durumu, dış yükleri, kesit ve malzeme özelliklerinden bağımsız olarak hazırlanmıştır. Bu tip özel bilgilerin data olarak verilmesi ile değişik örnekler çözülebilir. Programın giriş bilgileri Tablo. 7.1 de verilmiştir.

ENKES1 Programının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No	Programın Sembolu	Giriş değişkeninin tanımı	Kolon No	FORMAT
1	1	MM	Çubuk eleman sayısı	1-5	I5
	2	KS	Çubuk elemanının rijitlik matrisi eleman sayısı	6-10	I5
	3	IS	ELOZ dizisi boyutu	11-15	I5
	4	IBG2	Sistem rijitlik matrisi bant genişliği	16-20	I5
	5	NSS	MSS dizisi boyutu	21-25	I5
	6	ISS	Kesit üzerinde yapılacak maksimum iterasyon sayısı	26-30	I5
	7	KSS	Çubuk elemanının rijitlik matrisi satır sayısı	31-35	I5
	8	ISS1	Mod üzerinde yapılacak maksimum iterasyon sayısı	36-40	I5
	9	IMS	Mesnetlenme tipini gösteren değişken	41-45	I5

Tablo 7.1

ENKES1 Programının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No.	Program Sembolü	Giriş Değişkeninin Tanımı	Kolon No.	FORMAT
2	10	IOS	Referans kesidinin numarası	46-50	I5
	11	AN	Atalet momenti hesaplamak için gerekli $\bar{u}$ ($I = EK.FAN$)	51-55	I5
	12	LS	Problemin simetrik olup olmadığını gösteren değişken	56-60	I5
	1	EL	Çubuk elemanının uzunluğu	1-10	E10.0
	2	E	Elastisite modülü	11-20	E10.0
	3	HATA1	Mod iterasyonunda izin verilebilecek maksimum hata	21-30	E10.0
	4	HATA2	Kesit iterasyonunda izin verilebilecek maksimum hata	31-40	E10.0
	5	FOR	Sistemin ilk kesit alanı değeri	41-50	E10.0
	6	FSABİT	Referans kesidinin alanı	51-60	E10.0
	7	EK	Atalet momenti hesabı için gerekli çarpan ($I = EK.FAN$)	61-70	E10.0
3 ^x	8	P	Normal kuvvetin başlangıç değeri	71-80	E10.0
		ELOZ	Çubuk elemanının özelliklerini gösteren tek boyutlu dizi	1-80	8E10.0
	1		Herhangi bir ij elemanında; Elemanın i ucunun numarası	1-10	E10.0
	2		Elemanın j ucunun numarası	11-20	E10.0
4 ^x	3		Kesit alanı	21-30	E10.0
	4		Normal kuvvet çarpanı	31-40	E10.0
		MSS	Silinecek yer değiştirme bileşenlerinin numaralarını gösteren tek boyutlu dizi	1-80	16I5

* Yeterli kadar kartla okunur.

Tablo 7.1 (Devam)

Problemle ilgili bütün giriş bilgileri bu ana programda okutulmuştur. Alt programlarda ek olarak okunan yeni değerler yoktur. Alt programlar gerekli bilgilerini ana programdan argümanlarla veya COMMON alanı yardımı ile alırlar.

Her mod iterasyonu sonunda elde edilen burkulma yükü ve burkulma modunun değerleri ile, bunlardan faydalanarak hesap edilen sistemin hacmi ve her elemanın kesit alanı çıkış bilgisi olarak alınmaktadır.

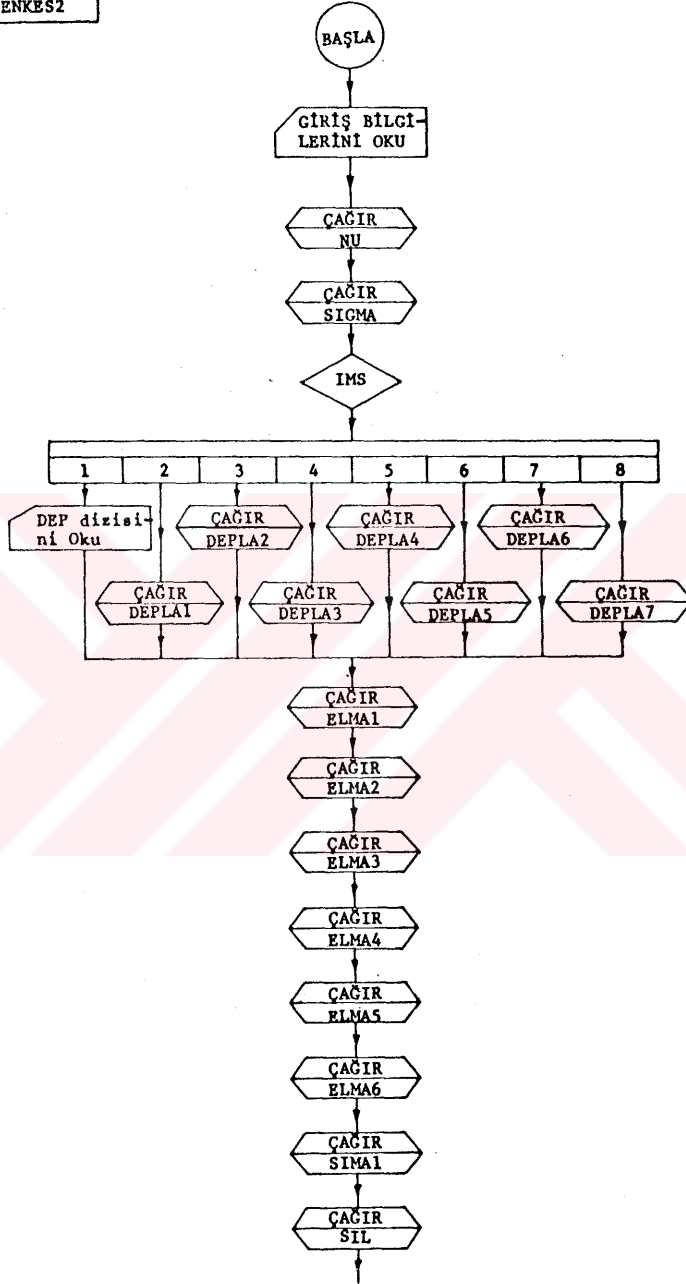
7.2. ENKES2 PROGRAMI

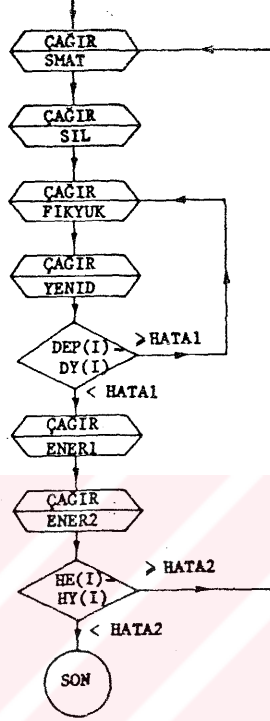
ENKES2 programında, plak sistemlerde verilmiş bir malzeme miktarı için en büyük burkulma yükünü veren malzeme yayılışına ait kesit yükseklikleri, Bölüm 4 de anlatılan sonlu elemanlar yöntemi ve Kısım 3.4 de verilen sayısal ardışık yaklaşım uygulanarak hesap edilmektedir. Program birbiri ardından çağrılan alt programlardan meydana gelmiştir. Bu alt programların çağrılma sıraları akış diyagramında gösterilmiştir, Şekil 7.2. Mod ve kesit iterasyonunun yapıldığı çevrimler akış diyagramında işaretlenmiştir. İç çevrimde mod iterasyonu, dış çevrimde kesit iterasyonu yapılmaktadır.

ENKES2 ; çözümü aranan sistemin mesnetlenme durumu, dış yükleri, simetrisi gibi özelliklerinden bağımsız olarak hazırlanmış genel bir programdır. Sistem ile ilgili özel bilgiler data olarak programa eklenirse, değişik örnekler çözülebilir. Problemle ilgili bütün giriş bilgileri ana programda okutulmaktadır. Alt programlarda ek olarak okunan yeni değerler yoktur. Alt programlar gerekli bilgileri ana programdan argümanlarla veya COMMON alanı ile alırlar. Programın giriş bilgileri Tablo.7.2 de verilmiştir.

Her mod iterasyonu sonunda elde edilen burkulma yükü ve burkulma modunun değerleri ile, bunlardan yararlanarak hesap edilen sistemin hacmi ve her elemanın yükseklikleri, çıkış bilgisi olarak alınmaktadır.

ENKES2





Şekil 7.2

ENKES2 Programının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No.	Program Sembolü	Giriş Değişkeninin Tanımı	Kolon No.	FORMAT
1	1	MM	Plağın yatayda bölündüğü parça sayısı	1-5	I5
	2	LL	Plağın düşeyde bölündüğü parça sayısı	6-10	I5
	3	KS	Plak elemanının rijitlik matrisi eleman sayısı	11-15	I5
	4	IS	ELOZ dizisi boyutu	16-20	I5
	5	IBG2	Sistem rijitlik matrisi bant genişliği	21-25	I5
	6	NSS	Silenecek yer değiştirme bileşenlerinin sayısı	26-30	I5

Tablo 7.2

ENKES2 Programının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No.	Program Sembolü	Giriş Değişkeninin Tanımı	Kolon No.	FORMAT
2	7	ISS	Mod üzerinde uygulanacak maksimum iterasyon sayısı	31-35	I5
	8	KSS	Plak elemanının rijitlik matrisi satır sayısı	36-40	I5
	9	ISS1	Kesit üzerinde uygulanacak maksimum iterasyon sayısı	41-45	I5
	10	IMS	Mesnetlenme şeklini gösteren değişken	46-50	I5
	11	IDS	Referans yer değiştirme bileşeninin numarası	51-55	I5
	12	IR	Referans kesidinin numarası	56-60	I5
	1	A	Plak elemanının yatay doğrultusundaki uzunluğu	1-10	E10.0
	2	B	Plak elemanının düşey doğrultudaki uzunluğu	11-20	E10.0
	3	E	Elastisite modülü	21-30	E10.0
	4	NU	Poisson oranı	31-40	E10.0
	5	HATA1	Mod iterasyonunda yapılabilecek maksimum hata	41-50	E10.0
	6	HATA2	Kesit iterasyonunda yapılabilecek hata	51-60	E10.0
	7	HOR	Plak kalınlığı için verilen ilk değer	61-70	E10.0
	8	FSABIT	Referans kesidinin kalınlığı	71-80	E10.0

Tablo 7.2 (Devam)

ENKES2 Programının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No.	Program Sembolü	Giriş Değişkeninin Tanımı	Kolon No	FORMAT
3	1	ALFA1	P_x kuvvetinin çarpanı	1-10	E10.0
	2	ALFA2	P_y kuvvetinin çarpanı	11-20	E10.0
	3	ALFA3	P_{xy} kuvvetinin çarpanı	21-30	E10.0
	4	ALFA4	$(2\xi-1)P_y$ kuvvetinin çarpanı	31-40	E10.0
	5	ALFA5	$(2\eta-1)P_x$ kuvvetinin çarpanı	41-50	E10.0
4 ^x		ELOZ	Eleman özelliklerini gösteren dizi Herhangi bir i,j,m elemanında;	1-80	8E10.0
	1		i ucunun numarası	1-10	E10.0
	2		j ucunun numarası	11-20	E10.0
	3		ℓ ucunun numarası	21-30	E10.0
	4		m ucunun numarası	31-40	E10.0
	5		Elemanın kesit yüksekliği	41-50	E10.0
	6		P_x kuvvetinin değeri	51-60	E10.0
	7		P_y kuvvetinin değeri	61-70	E10.0
	8		P_{xy} kuvvetinin değeri	71-80	E10.0
5 ^x		MSS	Silinecek yer değiştirme bileşenlerinin numaralanışını gösteren tek boyutlu dizi	1-80	16I5
6 ^x		KONO	Ortalama alınacak kesitlerin numaralarını gösteren tek boyutlu dizi	1-80	16I5
x Yeteri kadar kartla okunur.					

Tablo 7.2 (Devam)

7.3. FIYU PROGRAMI

FIYU programı kullanılırken, adları FIYU1 ve FIYU2 olan 2 programa ayrılmıştır. Bu iki programın kuruluş düşüncesi ve birbirinden farkları Kısım 4.1.3 de anlatılmıştır. Bu programlar polinomlardan meydana gelen iki matrisin çarpımı ve integrasyonunu yaparlar. Bu işlemler sonunda plak elemanının ikinci merteye rijitlik matrisleri elde edilir (Bkz. Bölüm 4).

Programa giriş bilgisi olarak, çarpılacak polinomların katsayılarından meydana getirilen yarım matrisler verilmektedir. Bu matrisler, WX1 ve WX2 olarak gösterilen üç boyutlu başka bir matris içinde okutulmaktadır, Tablo. 7.3. Bu matrisin 1. indisi, çarpılacak polinomun sıra numarasını, 2. ve 3. indisleri ise polinomların katsayılarından oluşan matrislerin boyutlarını göstermektedir.

FIYU1 ve FIYU2 Programlarının Giriş Bilgileri					
Kart No.	Sıra No.	Program sembolü	Giriş değişkenlerinin tanımı	Kolon No.	FORMAT
1 ^x		WX1	Polinom katsayılarından oluşan matris	1-80	8E10.0
2 ^x		WX2	Polinom katsayılarından oluşan matris	1-80	8E10.0
x Yeteri kadar kartla okunur.					

Tablo 7.3

Programın her icrasında bir alt matrisin çarpımı yapılmakta ve çıkış bilgisi olarak sonuçta elde edilecek ikinci merteye rijitlik matrisinin bir elemanı basılmaktadır.

7.4. ALT PROGRAMLAR

Bu kısımda, ENKES1 ve ENKES2 de çağırılan alt programların yaptıkları işlemler hakkında kısa bilgiler verilecektir. Bu alt programların bazıları küçük değişikliklerle her iki programda da kullanılmaktadır. Böyle olanlar aynı başlık altında anlatılacaktır.

OZDEP ve DEPLA Programları

ENKES1 de çağırılan OZDEP1, OZDEP2, OZDEP3 ve ENKES2 de çağırılan DEPLA1, DEPLA2, DEPLA3, DEPLA4, DEPLA5, DEPLA6 ve DEPLA7 programları, mesnetlenme durumuna göre verilen fonksiyonlar yardımı ile, uç yer değiştirmelerinin başlangıç değerlerini hesaplarlar ve en büyük yer değiştirmenin değerine göre diğerlerini normalize ederler. Mod iterasyonuna, bulunan bu değerlerden başlanır. İlk yer değiştirmeleri dışarıdan okutmak da mümkündür. Bu durumda OZDEP ve DEPLA programlarının çağırılmasına gerek yoktur.

ELMA Programları

ENKES2 de çağırılan bu altı programdan;

ELMA1; (4.23) de verilen $[K]$ plak elemanının birinci mertebe rijitlik matrisini,

ELMA2; P_x kuvvetleri etkisindeki plak elemanının (4.40) da verilen $[\Delta K]_{P_x}$ ikinci mertebe rijitlik matrisini,

ELMA3; P_y kuvvetleri etkisindeki plak elemanının (4.42) da verilen $[\Delta K]_{P_y}$ ikinci mertebe rijitlik matrisini,

ELMA4; P_{xy} kuvvetleri etkisindeki plak elemanının (4.44) da verilen $[\Delta K]_{P_{xy}}$ ikinci mertebe rijitlik matrisini,

ELMA5; $P_x(2n-1)$ kuvvetlerinin etkisindeki plak elemanının (4.46) da verilen $[\Delta K]_{P_x(2n-1)}$ ikinci mertebe rijitlik matrisini,

ELMA6; $P_y(2\xi-1)$ kuvvetlerinin etkisindeki plak elemanının (4.48) de verilen $[\Delta K]_{P_y(2\xi-1)}$ ikinci mertebe rijitlik matrisini, plak elemanının boyutlarına göre hesaplıyan programlarıdır.

OZSMA ve SMAT PROGRAMLARI

Bu alt programlar, çözümü aranan sistemin $[S]$ birinci merteye rijitlik matrisini, sonlu elemanlar yönteminden faydalanarak kurarlar. Sonuçta $[S]$ matrisi, sağ üst yarıdaki elemanların esas köşegene paralel olarak dizilmesiyle, tek boyutlu olarak elde edilir.

ENKES1 in alt programı olan OZSMA da çağrılan OZEL1 programında (4.5) de verilen çubuk elemanın birinci merteye rijitlik matrisi hesaplanmaktadır. Bu alt program, her eleman için çağrılarak, elemanın $[K]$ birinci merteye rijitlik matrisi hesaplanır ve bulunan bu değerler $[S]$ matrisinde yerlerine OZSMA programında yerleştirilir.

Plak elemanının birinci merteye rijitlik matrisinin elemanları kesitten bağımsızdır. Kesit ile ilgili terim, matrisin çarpanı şeklinde olduğundan, eleman rijitlik matrisini bir kere hesaplamak yeterli olmaktadır. Bu matrisin elemanları yukarıda anlatıldığı gibi ELMA1 de hesaplanır. Argüman olarak SMAT ta giren $[K]$ matrisinin elemanları $[S]$ matrisindeki yerlerine bu programda yerleştirilirler.

$[S]$ matrisi her iki programda da mesnetlenme durumu düşünülmeden genel olarak kurulmaktadır.

SIL PROGRAMI

Bu programda, $[S]$ sistem birinci merteye ve $[\Delta S]$ sistem ikinci merteye rijitlik matrislerinde satır, sütun silme işlemi yapılarak matrisler küçültülür. Mesnetlenme durumuna göre, silinmesi gereken satır ve sütun numaraları giriş bilgilerinden MSS dizisinde verilmiştir. Bu dizi SIL programına COMMON alanı olarak girmektedir. Bu silme işlemi $[S]$ ve $[\Delta S]$ matrislerinde ayrı ayrı yapıldığından bu program iki kez çağrılmaktadır.

OZSIM ve SIMA1 Alt Programları

Bu programlar, çözümü aranan sistemin $[\Delta S]$ ikinci mertebe rijitlik matrisini sonlu elemanlar yönteminden faydalanarak kurarlar $[\Delta S]$, $[S]$ de olduğu gibi, sağ üst yarı elemanlarının esas köşegene paralel olarak dizilmesiyle meydana gelmiş tek boyutlu bir dizi şeklinde elde edilir.

Çubuk sistemlerin $[\Delta S]$ matrisini kuran, OZSIM de, çağrılan OZEL2 alt programı, (4.8) de verilen $[\Delta K]$ yı, yani çubuk elemanın ikinci mertebe rijitlik matrisini hesap etmektedir. Bu programın çağrılması her eleman için tekrarlanmaktadır.

Plak sistemlerin $[\Delta S]$ matrisini kuran SIMA1 programı, sistemin dış yüklerinin durumuna göre $[\Delta K]_p$, $[\Delta K]_{p_y}$, $[\Delta K]_{p_{xy}}$, $[\Delta K]_{p_x(2n-1)}$ ve $[\Delta K]_{p_y(2\xi-1)}$ matrislerinin birinden veya bir kaçının toplamından yararlanmaktadır. Bu matrisler yukarıda anlatılan ELMA programları ile hesaplanmakta ve COMMON alanı ile bu programa girmektedirler. Sistemin yükleme durumunu ise giriş bilgilerin de verilen ALFA sayıları belirlemektedir.

FIKYUK ve YENDEP Programları

FIKYUK programı, (3.30) da verilen $[S_o]$ fiktif yük matrisini hesaplamaktadır. Bu matrisi hesaplamak için gerekli olan yer değiştirmeler dizisi OZDEP ve DEPLA programlarında, rijitlik matrisleri ise OZSIM ve SIMA1 programlarında hesaplanarak, COMMON alanı ile bu programa girmektedir.

YENDEP programı, (3.31) de verilen denklem takımını Gauss eliminasyonu ile çözerek yeni DY yer değiştirmelerini hesaplamaktadır. Bu hesaplanan DY dizisi ile eski yer değiştirmelerden oluşan DEP dizisinin her elemanı, birbiri ile karşılaştırılarak belli bir hata sınırından küçük kalıp kalmadığı araştırılır. Aradaki fark hata sınırından büyük ise ardışık yaklaşıma devam etmek için DY dizisi DEP dizisinin yerine aktarılarak ENKES1 de OZSIM programına, ENKES2 de FIKYUK programına geri dönlür. Eğer fark,

hata sınırından küçük ise mod iterasyonuna son verilerek deplasmanlar çıkış bilgisi olarak basılır ve ana programda kalınan yere geri dönlür.

OZYEN Programı

Çubuk sistemlerde kesit tayini yapan programdır. YENDEP de hesaplanan yer değıştirmelerden yararlanarak, her elemanda uç kuvvetleri hesaplanır ve aynı noktada birleşen elemanlarda ortalama alınır. Bu uç kuvvetlerinin değıerine göre (3.38) şartından yararlanarak her noktada yeni HY kesitleri hesaplanır. Bu değıerlerle eski HE kesitlerinin karşılaştırılması yapılır. Belli bir hata sınırının altında kalınıyorsa HE yerine HY dizisinin değıerleri alınarak OZSIMA ya geri dönlür ve kesit iterasyonuna devam edilir. Eğer hata sınırı sağlanıyorsa, çıkış bilgisi olarak elemanların HY kesit değıerleri basılır ve ardışık yaklaşıma son verilir.

ENER1 ve ENER2 Programları

ENER1, plak elemanlarının gerekli görülen noktalarında uç kuvvetlerini hesaplayan ve aynı noktada birleşen uç kuvvetlerinin ortalamalarını alan programdır. (4.24) de verilen uç kuvvet matrisi, SIGMA programı ile 9 noktada hesaplanmaktadır. SIGMA matrisleri ve YENDEP de hesaplanan son DY yer değıştirmelerinden yararlanarak, plak elemanının 9 noktasında uç kuvvetleri hesaplanır ve gerekli ortalamlar alınır.

ENER2 programı ile ise ENER1 de bulunan değıerler(3.50) şartında yerine konarak yeni HY kesitleri hesaplanır ve bunların eski HE kesitleri ile karşılaştırılması yapılır. Aradaki fark belli bir hata değıerinden büyük ise HE yerine yeni HY değıerleri alınarak SMAT alt programına geri dönlür. Aksi halde çıkış bilgisi olarak yeni HY değıerleri basılır ve ardışık yaklaşıma son verilir.

BÖLÜM 8

SONUÇLAR

Yapı sistemlerinde, verilmiş bir malzeme miktarı için en büyük burkulma yükünü veren sürekli malzeme yayılışının bulunduğu bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1- Bölüm 3 de verilmiş bir malzeme miktarı için elastik burkulma yükünü en büyük yapan malzeme yayılışını veren genel hale ait "gerek ve yeter şart" denklemi çıkartılmıştır. Bu şart sistemdeki dış etkilerden ve şekil değiştirmelerden bağımsız olarak elde edilmiştir. Daha sonra dış etkiler, şekil değiştirmeler ve kesit şekilleri için yapılan bazı kabullerle genel olan gerek ve yeter şart denkleminin özel durumları elde edilmiş ve doğru eksenli çubuklarla, dikdörtgen plakların yanal burkulması hallerine uygulanmıştır.

2- Çözüm için ancak bazı çok basit hallere uygulanabilen analitik yöntemler yerine, genel bir sayısal ardışık yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir.

3- Sayısal çözümde kullanılan çubuk ve dikdörtgen plak sonlu elemanlarının birinci ve ikinci merteye rijitlik matrisleri Bölüm 4 de elde edilmiştir. Dikdörtgen plak elemanının ikinci merteye rijitlik matrisi bulunurken, elemana P_x , P_y düzgün yayılı basınç kuvvetlerinin, $P_{xy} = P_{yx}$ kesme kuvvetlerinin ve $P_x(2\eta-1)$, $P_y(2\xi-1)$ lineer yayılı basınç kuvvetlerinin etkiyebileceği düşünülmüştür.

4- Bölüm 5 de, Bölüm 3 de elde edilen "gerek ve yeter şart" denklemi doğru eksenli çubuklara uygulanmıştır. Bu uygulama iki kısımda yapılmıştır. Birinci kısımda yalnız eğilme şekil değiştirmeleri, ikinci kısımda ise eğilme şekil değiştirmeleri ile birlikte kayma şekil değiştirmeleri de göz önüne alınmıştır.

a) Birinci kısımda yapılan örneklerde elde edilen malzeme yayılışları ve burkulma yükleri, aynı hacımlı sabit kesitli sisteminkilerle karşılaştırılmıştır. Sabit kesitli kolonla aynı burkulma yükünü taşıyan optimum kesit değişimli basit mesnetli daire kesitli bir kolonda rölatif malzeme kazancı %15 olmaktadır.

b) İkinci kısımda kayma rijitliği küçük olan sistemlerde, kayma şekil değiştirmelerinin kesit değişimine ve burkulma yüküne etkisi incelenmiştir. Kayma rijitliği küçük olan örneklerde kesit değişimleri ve burkulma yükü yalnız eğilme şekil değiştirmeleri göz önüne alınarak yapılan çözümlerdeki kesit değişimlerinden ve burkulma yükünden çok fark etmektedir. Böyle sistemlerde taşınabilecek burkulma yükü azalarak, yalnız eğilme şekil değiştirmeleri için yapılan çözümde elde edilen değerın yarısına kadar inmektedir.

5- Bölüm 6 da plak sistemler için parametrik incelemeler yapılmıştır. x ve y doğrultularındaki mesnetleri basit olan P_x basınç kuvvetleri etkisindeki dikdörtgen plakların, değişik kenar oranları için çözümleri yapılmış ve en uygun kalınlık değişimleri bulunmuştur. Sabit kalınlıklı bir kare plakla aynı burkulma yükünü taşıyan uygun kalınlık değişimli bir kare plakta rölatif malzeme kazancı %10,59 olmaktadır.

Yine basit mesnetli plakların x ve y doğrultularından P_x , P_y kuvvetleri ile yüklü durumlarında a/b kenar oranı ve $\alpha = P_x/P_y$ oranı değiştirilerek çözümler yapılmış, en büyük burkulma yükleri ve kalınlık değişimleri hesaplanmıştır. Bulunan en büyük burkulma yükü, aynı miktar malzeme ile yapılan sabit kalınlıklı plağın burkulma yükünden oldukça büyüktür. Örneğin $a/b = 1$, $\alpha = 1$ olan plakta bu artış %67 dir.

Bunlardan başka x ve y doğrultularındaki mesnetleri basit-boş, ankastre-boş ve ankastre-basit olan plakların değişik kenar oranları için de çözümler yapılmış, sonuçlar tablo ve şekillerle verilmiştir.

6 - Sonlu elemanlar yöntemi ve geliştirilen sayısal ardışık yaklaşım yöntemi, çubuk ve plak sistemler için hazırlanan elektronik hesap makinası programları yardımı uygulanmıştır. Bu programlar genel amaçla hazırlanmıştır. Sistemlerin kesit, mesnet ve simetri durumları gibi özelliklerinden bağımsızdırlar.



NOTASYON

a, b	Plak boyutları
EI	Eğilme rijitliği
EF	Uzama rijitliği
$G'F$	Kayma rijitliği
GJ	Burulma rijitliği
F	Kesiti ifade eden büyüklük
h	Kesit yüksekliği
k	Eğilme rijitliği ile kesit büyüklüğü arasındaki çarpan
p	Eğilme rijitliği ile kesit büyüklüğü arasındaki üs
ρ	Burkulma yük parametresi
P_x, P_y, P_{xy}, P_{yx}	Plaga etkiyen kuvvetler
U	Şekil değiştirme enerjisi
V	Sistemin hacmi
W	Kesit mukavemet momenti
ν	Poisson oranı
w	Plak elemanının uç noktalarındaki çökmeler

θ_x, θ_y	Plak elemanının uç noktalarındaki dönmeler
[A]	Yer değiştirme fonksiyonu matrisi
[D]	Kesit rijitlik matrisi
[d]	Uç yer değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris
[K]	Sonlu elemanların birinci merteye rijitlik matrisi
[K*]	Sonlu elemanın rijitlik matrisi
[ΔK]	Sonlu elemanın ikinci merteye rijitlik matrisi
[n]	Yükler arasındaki oran matrisi
[P]	Yükleme matrisi
[S]	Sistemin birinci merteye rijitlik matrisi
[S*]	Sistemin rijitlik matrisi
[ΔS]	Sistemin ikinci merteye rijitlik matrisi
[S _o]	Fiktif yük matrisi
[u]	Yer değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris
[σ]	İç kuvvet bileşenlerinden oluşan kolon matris
[ε]	Şekil değiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matris

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- [1] GALLAGHER R.H., ZIENKIEWICZ O.C., Ed. *"Optimum structural design"*, John Wiley, 1973, pp. 72-73.
- [2] RATZERSDORFER J., *"Die knickfestigkeit von stäben und stabwerken"*, Springer Verlag Wien, 1936, pp. 103-106.
- [3] KELLER J.B., *"The shape of the strongest column"*, Arch.Rat.Mech.Anal., Vol.5, March 1960, pp.275-285.
- [4] TADJBAKHSI I., KELLER J.B., *"Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues"*, J.App. Mech., Vol.29, No.1, March 1962, pp.154-164.
- [5] ÇAKIROĞLU A., YAZAR E., *"Minimum volume design of axially compressed slender bars"*, İ.T.Ü. Bülteni, Vol.17, 1964.
- [6] KELLER J.B., NIORDSON F.I., *"The tallest column"*, J.Math. Mech., Vol.16, No.5, 1966, pp.433-446.
- [7] TAYLOR J.E., *"The strongest column: An energy approach"*, J.App.Mech., Transactions of the ASME, Vol.34, No.2, June 1967, pp.486-487.
- [8] TAYLOR J.E., LIU C.Y., *"Optimal design of columns"*, AIAA, Vol.6, No.8, Aug. 1968, pp.1497-1502.
- [9] PRAGER W., TAYLOR J.E., *"Problems of optimal structural design"*, J.App. Mech., Transactions of the ASME, Vol.37, No.1, March 1968, pp.102-106.

- [10] LEIPHOLZ H.H.E., Ed. "Stability", University of Waterloo, Study No.6, 1972, pp. 547-573.
- [11] TRAHAI R N.S., BOOKER J.R., "Optimum elastic columns", Int.J.Mech.Sci., Vol.12, 1970, pp.973-983.
- [12] FRAUENTHAL J.C., "Constrained optimal design of columns against buckling", J.Str.Mech., 1(1), 1972, pp. 79-89.
- [13] MURTHY K.N., "Minimum weight design of structural systems under prescribed buckling loads", 1973, Minnesota Üniversitesinde doktora tezi.
- [14] MURTHY K.N., CHRISTIANO P., "Optimal design for prescribed buckling loads", ASCE, ST11, Nov.1974, pp.2175-2189.
- [15] HUANG N.C., "Effect of shear deformation on optimal design of elastic beams", Int.J.Sol.Str. Vol.7, 1971, pp.102-106.
- [16] FRAUENTHAL C.J., "Constrained optimal design of circular plates against buckling", J.Str.Mech., 1(2), 1972, pp. 159-186.
- [17] ÖZMEN G., "Düzlem sistemlerin burkulma yüklerinin hesabı için bir ardışık yaklaşım metodu", Prof.Dr. Mustafa İnan Anısına, 1971, Arı Kitabevi, İstanbul.
- [18] İNAN M., "Cisimlerin mukavemeti", Arı Kitabevi, İstanbul, 1967.
- [19] ÇAKIROĞLU A., ÖZDEN E., ÖZMEN G., "Yapı Sistemlerinin hesabı için matris metodları ve elektronik hesap makinası programları", Cilt I-II, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Cilt I 1970, Cilt II 1974.
- [20] ÇAKIROĞLU A., "Hiperstatik sistemlerin hesap metodları", Arı Kitabevi, 1974, İstanbul.

- [21] PRZEMIENIECKI J.S., *"Theory of matrix structural analysis"*, Mc Graw-Hill, 1968.
- [22] TIMESHONKO S.P., GERE J.M., *"Theory of elastic stability"*, Mc Graw-Hill, 1961.

ÖZGEÇMİŞ

Sumru Pala 1949 yılında Kırklareli'nde doğmuştur.

İlk ve orta tahsilini Anadolu'nun çeşitli kentlerinde yapmış ve Haziran 1966 da Bursa Kız Lisesi'nden mezun olmuştur.

1966 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi'ne girmiş ve Haziran 1971 de aynı fakültenin Tatbiki Mekanik kolundan mezun olmuştur.

Kasım 1971 de İ.T.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Bölümü, Mekanik, Yapı Statığı ve Yapı Malzemesi Kürsüsü'ne asistan olarak girmiştir.

Halen aynı görevini sürdürmektedir.