

292

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ İNŞAAT FAKÜLTESİ

YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE BAZI KONULAR

(DOKTORA TEZİ)

Yük. Müh. Ş. Burhanettin ALTAN

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 9 Mayıs 1982

Tezin Müdafaa Edildiği Tarih : 19 Ağustos 1982

Doktorayı Yöneten Öğretim Üyesi : Prof. Dr. Vural CİNEMRE

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ
Prof. Dr. Murat DİKMEN

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT FAKÜLTESİ MATBAASI

1982

T. C.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET	II
SUMMARY	V
I. GİRİŞ	1
II. YEREL OLMAYAN SÜREKLİ ORTAMLARIN	
KORUNUM DENKLEMLERİ	7
2.1. Korunum Denklemleri	7
2.2. Bünye Denklemleri	12
III. YEREL OLMAYAN VİSKOELASTİSİTENİN BAZI	
SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN DEĞİŞİM	
İLKELERİ VE KARŞITLIK TEOREMİ.	21
3.1. Giriş	21
3.2. Temel Denklemler	22
3.3. Karşıtlık Teoremi	25
3.4. Değişim İlkeleri	28
3.5. Sonuç	36
IV. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE TEKLİK	
TEOREMİ	37
4.1. Giriş	39
4.2. Yerel Olmayan Elastisitede Sınır	
Değer Problemleri	39
4.3. Şekil Değiştirme Enerjisinin	
Pozitif Definitliği	41
4.4. Karışık Sınır Değer Probleminin	
Çözümünün Tekliği	52
4.5. Sonuç	55

V. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE ÇATLAK

PROBLEMİ	59
5.1. Giriş	59
5.2. Temel Denklemler	60
5.3. Çatlak Doğrultusunda Kayma Etkisinde Çatlak	61
5.4. Dual Denklemlerin Çözümü	65
5.5. Sonuç	73

Şekil

Kaynaklar

Özgeçmiş

ÖZET

Sunulan çalışma sürekli ortamların yerel olmayan teorilerine bazı katkılar amaçlamaktadır. Bu katkılar üç bölümde toplanabilirler. İlk olarak yerel olmayan lineer viskoelastisitenin yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemleri için iki değişim ilkesi ve karşıtlık teoremi verilerek ispatlanmıştır. İkinci olarak yerel olmayan, homojen, izotrop, lineer elastodinamiğin yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliğini güvence altına alan bir teorem ispatlanmıştır. Son olarak üçüncü mod olarak bilinen bir çatlak problemi yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde çözülmüştür.

Giriş bölümünde sürekli ortamların yerel olmayan teorileri üzerinde yapılmış bazı çalışmalar sıralanmıştır. Bu listenin yerel olmayan teoriler üzerinde yapılmış çalışmaların tümünü içerdini savunmanın olanak dışı olduğu açıktır. Ama yine de bu liste yerel olmayan elastisitenin gelişimini ve bu teorinin yararlı yanlarını ortaya koyacak çalışmaları kapsamaktadır.

Bütünlüğü sağlamak amacını güden ikinci bölümde, ilk olarak yerel olmayan sürekli ortamlar için geçerli temel korunum denklemlerinin bir özeti verilmiştir. Yerel olmama fikri ilk olarak burada ortaya çıkar ve bünye teorisine eklenen yerel olmama aksiyomu ile birlikte ye-

III

rel olmayan sürekli ortamların bünye denklemlerini belirlerler. Bu bölümde ikinci olarak, termodinamiğin ikinci yasasının yerel olmayan biçimi hatırlatılmıştır. Bu bölümde son olarak yerel olmayan viskoelastisitenin bünye denklemlerinin nasıl elde edileceği özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, yerel olmayan lineer kuazi-statik viskoelastisitenin üç tip sınır değer problemi için iki değişim ilkesi ve karşıtlık teoremi verilmiştir. Bu bölümde ilk olarak yerel olmayan kuazi-statik lineer viskoelastisitenin yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemleri tanıtılmıştır. Kısıtlılığı sağlama amacı ile bazı tanımlar yapılmış ve bunun peşisıra karşıtlık teoremi ispatlanmıştır. Bundan sonra yerel olmayan lineer viskoelastisitenin sınır değer problemleri için en genel değişim ilkesi verilerek ispatlanmıştır. Son olarak bünye denklemini, yerdeğiştirme-şekil değiştirme bağıntılarını ve yerdeğiştirme sınır koşulunu sağlayan yerdeğiştirme alanı için bir değişim ilkesi verilmiştir.

Dördüncü bölümde yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin başlangıç koşulları sıfır, yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliğini güvence altına alan bir teorem verilmiştir. Bölümde ilk olarak yerel olmayan elastisitenin sınır değer problemleri tanıtılmıştır. Bunun ardından, şekil değiştirme enerjisini tüm cisim için pozitif definit kılacak koşullar elde edilmiştir. Son olarak, şekil değiştirme enerjisinin pozitif definit olmasının

gözönüne alınan sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliği için yeterli olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, doğrultusu boyunca sabit kayma gerilmesi ile yüklü çizgisel çatlağı bulunan tüm uzayda çatlak ucu civarındaki gerilmeler yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmeğe çalışılmıştır. Problemin çözümünde rastlanılan dual integral denklemlerin çözümünün güçlüğü karşısında yaklaşık çözümle yetinilerek çatlak ucu civarındaki gerilme dağılışı hakkında fikir verici eğriler çizilmiştir.

SUMMARY

The scientists try to enlarge the extent of the fundamental hypotheses of a theory as a last resort when the theory proves insufficient in explaining the problems in its field. These efforts constitute one of the main streams of the advancement of science. The enlargements bring a lot of problems, but the efforts go on for the sake of being able to explain more phenomena. In the elasticity theory, there are many researches made in this direction.

The nonlocal theory of elasticity differs from the local theory in fundamental hypotheses. As is well known, in the local theory, the fundamental conservation laws are assumed to be valid in any portion to be cut from the body. As a result of this assumption in the local theory the conservation laws are formulated in such a form that they stand valid in any point of the elastic body. In the nonlocal theory, the assumption of the validity of conservation laws in any portion of the body has been abandoned and the conservation laws are assumed to be valid only on the whole of the body. These global forms of conservation laws are substituted in global Clausius-Duhem inequality and constitutive equations are obtained with the assistance of some additional hypotheses. These equations are naturally different from the corresponding ones in local theory. Here the value of the dependent constitutive vari-

VI

able (e.g. stress) in a point is obtained as a function of all the values which the independent variable (e.g. strain) takes on all of the points of the body.

The nonlocal theory of elasticity has become popular and developed in the last fifteen years. The problems which the theory solves are sufficient to display its suitability.

The goal of this work is to contribute to the development of the nonlocal theory of continuous media. The contributions are enumerated in the following :

- 1) A reciprocity theorem and two variational principles for displacement-, stress- and mixed boundary value problems of nonlocal, quasi-statical viscoelasticity.

- 2) A uniqueness theorem for boundary value problems with zero initial conditions of linear, homogeneous, isotropic, nonlocal elastodynamics.

- 3) The solution of a crack problem in third mode

The represented work encompasses five chapters. In the First Chapter entitled as "Introduction" after explaining why there is a need for a nonlocal elasticity theory, a literature survey of the research in the field of the nonlocal theory of elasticity is given with emphasis on the papers which display the suitability of using the theory.

In the Second Chapter firstly the fundamental conservation laws of nonlocal continuous media are given. In the nonlocal theory the conservation laws are kept in their global forms, in opposition with the practice in the local

VII

theory. The global conservation laws are substituted in the global Clausius-Duhem inequality. As a result the constitutive equations of nonlocal viscoelasticity are obtained. Secondly, the linearisation is imposed on the obtained equations and the stress-strain relations of linear viscoelasticity are found. According to the other works published on nonlocal theory this relation has been written as follows:

$$t_{ij}(x, t) = \int_0^t \int_{\omega} G_{ijkl}(||x-x'||, t-\tau) \dot{\epsilon}_{kl}(x', \tau) d\tau dV(x')$$

As a special case the equations for the nonlocal elasticity theory are found.

In the Third Chapter, two variational principles and a reciprocity theorem for the displacement-, stress- and mixed boundary value problems of linear, quasi-statical, nonlocal viscoelasticity theory are given. In this chapter, firstly the boundary value problems of linear, quasi-statical viscoelasticity theory are introduced. To keep the volume concise some definitions are given and subsequently the reciprocity theorem is stated and proved. This theorem can be stated as follows :

If $P^{(1)}$ and $P^{(2)}$ are two different regular boundary value problems of a nonlocal viscoelastic body, then between the corresponding regular solutions $D^{(1)}$ and $D^{(2)}$ there is the following reciprocity relation :

$$\int_B (t_{ij}^{(1)} * d\epsilon_{ij}^{(2)}) dV = \int_B (f_i^{(1)} * du_i^{(2)}) dV + \int_S (\gamma_i^{(1)} * du_i^{(2)}) dS =$$

VIII

$$\int_B (t_{ij}^{(2)} * d\varepsilon_{ij}^{(1)}) dV = \int_B (f_i^{(2)} * du_i^{(1)}) dV + \int_S (\gamma_i^{(2)} * du_i^{(1)}) dS$$

Later the variational principles have been considered. The variational principle coined as "First Principle" is the most general variational principle for the boundary value problems of linear, quasi-static, nonlocal theory of viscoelasticity. This principle can be stated as follows:

For a regular problem of a nonlocal viscoelastic body consider the following functional which is established on the admissible states :

$$\Lambda_t(0) = \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}) dV(x') - 2t_{ij} \right] * d\varepsilon_{ij} \right\} dV(x) - \\ - \int_B [(t_{ij,j} + f_i) * du_i] dV + \int_{S_u} (\gamma_i * \hat{u}_i) dS + \int_{S_t} [(\gamma_i - \hat{\gamma}_i) * du_i] dS$$

The first variation of this functional is zero, if and only if the admissible state is a regular solution of the regular problem.

The variational principle named as "Second Principle" is a special case of the first principle and is valid for the kinematically admissible fields. This principle can be stated as follows :

Consider a regular problem which satisfies the displacement-strain equations, stress-strain relations and displacement boundary conditions. The first variation of the functional

$$\Phi_t(0) = \frac{1}{2} \int_B \left[\left(\int_B (G_{ijkl} * d\epsilon_{kl}) dV(x') \right) * d\epsilon_{ij} \right] dV - \int_B (f_i * du_i) dV - \int_{S_t} (\hat{\gamma}_i * du_i) dS$$

is zero if and only if the admissible state is a regular solution of the problem.

From both of the principles it is possible to obtain principles for nonlocal elasticity and local viscoelasticity as special cases.

The Fourth Chapter is devoted to a theorem which pledges the uniqueness for the displacement-, stress- and mixed boundary value problems with zero initial conditions of linear, homogeneous, isotropic, nonlocal elasticity theory. In the beginning of the chapter the work achieved on the subject of the uniqueness of the problems of local elasticity is summarized. In this summary, the main idea inherent in a uniqueness theorem is made clear and the plausibility of using the same concept in the nonlocal theory is explained. Later the boundary value problems of nonlocal elasticity are introduced. Next the conditions for the positive definiteness of the strain energy are determined. Here, as a corollary to a proved theorem, it is shown that for the positive definiteness of the strain energy the interaction kernel must be necessarily symmetrical. Later, with a reference to the theory of integral equations, a theorem is proved which comprises all of the results related to the positive definiteness of strain energy. Following this proof, it is shown that if the strain energy is positive definite, the solution of the mixed boundary value problem with zero initial conditions of homogeneous, linear, iso-

tropic, nonlocal elasticity is unique. As a last item in the chapter, a discussion of the results obtained takes place.

In the Fifth and final Chapter a crack problem in the third mode is taken into consideration in the frame of nonlocal elasticity. Firstly the nonlocal formulation of the problem is given. As a result of boundary conditions and symmetry properties of the problem a system of dual integral equations is arrived at which has a prime importance in the solution . For the solution of the dual integral equations two methods are proposed. But unfortunately both of the methods are shown to be ineffective in solving the present problem and instead an approximation method is applied. After choosing the crack opening identical with the one in local elasticity the stress distribution around the crack is numerically computed and the results are shown diagrammatically. This chapter ends with the discussion of results and some proposals on the solution of crack problems.

I

GİRİŞ

Sürekli ortamlar mekaniğinde yerel olmayan teoriler son yirmi yılda güncellik kazanmış ve birçok bilim adamının ilgisini çekmiştir. Yerel olmayan teorilerde bağlı bünye değişkeni (örneğin gerilme) bağımsız bünye değişkeninin (örneğin şekil değiştirme) fonksiyoneli olarak düşünülmektedir. Bilindiği gibi bu ilişki yerel teorilerde fonksiyon biçimindedir. Önce bu genelleştirmenin temel dayanaklarını, çeşitli sürekli ortamlar için bu genelleştirme kullanılarak elde edilmiş bünye denklemlerini ve bu denklemlerle çözülmüş problemleri özetlemek istiyoruz.

Bilindiği gibi sürekli ortamlar mekaniğinde bünye denklemleri elde etmenin bir yolu korunum denklemlerini Entropi eşitsizliği veya Clausius-Duhem Eşitsizliği olarak anılan termodinamiğin ikinci yasasında değerlendirmek - tir. Yerel teorilerde korunum denklemleri ve entropi eşitsizliğinin cismin herhangi bir parçasında geçerli olduğu varsayılmakta ve böylece bu denklemlerin yerel biçimlerine ulaşılmaktadır. Yerel olmayan teorilerde ise, bu ifadelerin hepsi veya bir kısmı tüm cisim için geçerli olacak yapıda bırakılmakta veya yerelleştirme sonunda cismin atılan kısmının yerelleştirme noktasına etkisini gösteren "Yerelleştirme Artıkları" gözönüne alınmaktadır. Bu doğrultuda yapılmış bazı çalışmaları sıralamak istiyoruz. Örneğin GREEN, LAWS [1] entropi eşitsizliğini global, diğer denklemleri

yerel olarak bunun sürekli ortamların, özellikle termoelastik ve Newtonyen akışkanların bünye denklemi üzerindeki etkisini incelemişlerdir. EDELEN, GREEN, LAWS [2] enerji denklemini ve entropi eşitsizliğini global, diğer denklemleri yerel olarak sürekli ortamların bünye denklemlerini incelemişlerdir. Bu çalışmanın bir devamı olarak GREEN, LAWS [3] sadece entropi eşitsizliğini global olarak iki fazlı bir karışımı incelemişlerdir. Öte yandan EDELEN, LAWS [4] enerji eşitliğini global, bünye denklemini ise global varyasyonel biçimde olarak sonuçları tartışmışlardır. Bu çalışmada ve EDELEN'in diğer çalışmalarında argümanında fonksiyonel bulunan bir fonksiyonelin varyasyonu söz konusudur. Bu varyasyon hesabının temellerini EDELEN bir seri makale [5] ve bir kitapta [6] yayınlamıştır. Yerel olmayan sürekli ortamlar hakkında ilginç bir çalışma olarak GURTIN'i [7] belirtmek istiyoruz. Bu çalışmada bağlı bünye değişkenlerinin, bağımsız bünye değişkenlerinin yüksek gradyanlarına veya bağımsız bünye değişkenlerinin cismin her noktasındaki değerine bağlı olup olmayacağı araştırılmıştır. Korunum denklemleri ve entropi eşitsizliği yerel formda alınınca bu tür bağıllık olamayacağı gösterilmiştir.

Yerel olmayan sürekli ortamlar mekanikini hazırlayıcı mahiyette olan bu çalışmalara daha başkaları da katılabilir. 1970 den sonra yerel olmayan sürekli ortamlar mekanikindeki çalışmalar giderek somutlaşmış ve bugün kullanılan bünye denklemleri ortaya çıkmaya başlamıştır. Örneğin ERİNGEN [8] yerel olmayan polar elastik ortamlar için ERİNGEN, EDELEN [9] yerel olmayan elastik ortamlar için iki

ayrı yoldan, DEMİRAY [10] yerel olmayan dielektrik malzemeler için bünye denklemleri elde etmişlerdir. Bunların yanısıra ERİNGEN [11] yerel olmayan akışkanlar ve yerel olmayan mikroakışkanlar [12] için bünye denklemleri elde etmiştir. Termoelastik cisimlerin yerel olmayan teorisi için ERİNGEN [13] ve BALTA, ŞUHUBİ'nin [14] çalışmalarına başvurulabilir. BALTA, ŞUHUBİ [14] , ERİNGEN [13] den farklı olarak termal dengede mutlak sıcaklığa dönüşen genelleştirilmiş sıcaklık kullanarak, sıcaklığın zamana göre değişimini bünye denklemlerine sokmuşlardır; bunun bir sonucu olarak ısı dalgalarına dispersif özellik kazandırmak mümkün olmuştur. Viskoelastik malzemelerin yerel olmayan teorisi için ERİNGEN'den [15] başka çalışmaya rastlanamamıştır. Yerel olmayan polar elastik ortamlar için ERİNGEN [8] tarafından elde edilen bünye bağıntıları yine ERİNGEN [16] tarafından lineerleştirilmiştir. ERİNGEN, EDELEN'in [9] yerel olmayan elastik ortamlar için elde ettikleri bünye bağıntıları ERİNGEN'de [17] lineerleştirilmiş olarak bulunabilir. Yerel olmayan elastisite için toplu bir çalışma olarak ERİNGEN'e [18] başvurulabilir.

Bilindiği gibi lineer, homogen, izotrop elastisitede deneylerle belirlenmesi gereken iki katsayı vardır. Yine bilindiği gibi viskoelastisitede bu iki katsayının yanısıra, bir de fonksiyonun deneylerle belirlenmesi gerekmektedir. Benzer durum yerel olmayan elastisitede de ortaya çıkmaktadır. "Etkileşme Fonksiyonu" adı verilebilecek olan ve bir noktadaki şekil değiştirme durumunun bir başka noktadaki gerilme durumuna etkisini belirleyen fonksi-

yonun seçimi için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin ERİNGEN [17] bünye denklemini yerel etkileri integral dışında bırakan biçimde alarak tek boyutlu dalga yayılımı için etkileşme fonksiyonu cinsinden dispersiyon bağıntısı elde etmiştir. Bu bağıntıyı kafes dinamiğinin verdiği dispersiyon bağıntısına eşitliyerek etkileşme fonksiyonunu belirlemiştir. ERİNGEN'in bu yoldaki diğer çalışmaları için [16] ve [18]'e bakılabilir. Etkileşme fonksiyonu benzer düşünceler izlenerek ARI [19] tarafından da elde edilmiştir. ARI ilk olarak yerel olmayan elastisitenin iki boyutlu dalga yayılımı için vereceği dispersiyon bağıntısı ile kafes dinamiğinin iki boyutlu kare kafes için verdiği dispersiyon bağıntısını eşitliyerek etkileşme çekirdeği için logaritmik tekilliği olan bir ifade elde etmiştir. ARI aynı çalışmada bünye denkleminin diferansiyel formda yazılmasına olanak veren bir başka çekirdek daha vermiştir.

Yerel olmayan teorilerin bünye denklemleri konusunda yapılmış çalışmaların tümünü burada sıralamak yerine, biraz da yerel olmayan bünye denklemi kullanılarak çözülmüş problemlerden kısaca söz etmeyi yeğ tutuyoruz.

Bilindiği gibi dislokasyonsuz malzeme yoktur ve dislokasyonların yarattıkları geometrik düzensizlikler nedeni ile malzeme içinde gerilmeler oluşur. Dislokasyonların yarattıkları gerilmelerin yerel elastisite çerçevesinde hesabı bazı düzensizlikler göstermektedir. Kenar veya vida dislokasyonuna sahip bir silindirde, silindir merkezinde gerilmeler ve sonlu hacımlı da olsa şekil değiştirme enerjisi sonsuza gitmektedir, LARDNER [20]. Aynı problemler yerel

olmayan teori kullanılarak çözüldüğünde (bu problemlerin her iki teori çerçevesinde formülasyonları arasında bir-cik fark bünye denklemidir) her iki durum düzelmektedir [21],[22]. Anizotrop ortamlarda dislokasyon problemi ERİNGEN, BALTA [23],[24] tarafından çözülmüştür. Problemin yerel çözümünde ortaya çıkan gerilme ve enerjideki tekil-likler yerel olmayan teoride ortadan kalkmaktadır.

Yerel elastisite teorisinde rastlanan bir çelişkili durum da çatlak problemleridir. Kırılma mekanizminden bilin-diği gibi, çizgisel bir çatlak ucunda gerilme sonsuza git-mektedir SIH [29], SNEDDON [30]. Öte yandan deneyler çat-lağı bulunan malzemelerin de bir mukavemeti olduğunu göster-mektedir. Çatlak ucunda gerilmenin sonsuz olması kırılma hipotezlerinin kullanılmasına olanak vermemektedir. Aynı problemlerin yerel olmayan elastisitedeki çözümlerinde çat-lak ucundaki gerilme sonlu çıkmaktadır. Bunun yanı sıra çat-laklar hizasındaki gerilme en büyük değerine çatlağın tam ucunda ulaşmamaktadır. Bu da gözlemlerle uyuşum içindedir. Normal gerilme etkisindeki çatlak problemi ERİNGEN, SPEZIALE KİM [25] tarafından çözülmüştür. Kayma etkisindeki çatlak problemini ERİNGEN [26] çözmüştür. İç basınç etkisindeki çatlak problemi ARI [19] tarafından tekrar ele alınmış ve geliştirilen hesap yöntemi ile gerilmenin maksimum olduğu noktanın koordinatı verilebilmiştir. ARI'nın verdiği so-nuçlar [25] ile büyük ölçüde uyuşum içindedir.

Sunulan çalışma sürekli ortamların yerel olmayan teo-rilerine bazı katkılar amaçlamaktadır. Bu katkılar üç bö-lümde toplanabilir. İlk olarak, yerel olmayan lineer vis-

koelastisite için iki değişim ilkesi ve bir Karşıtlık Teoremi ispatlanmıştır. İkinci olarak yerel olmayan, lineer, homogen, izotrop elastisitenin üç tip sınır değer problemi için çözümlerin tekliğini güvence altına alan bir teorem verilmiştir. Son olarak, "üçüncü mod" olarak adlandırılan çatlak problemi yerel olmayan elastisite çerçevesinde çözülmüştür.



II

YEREL OLMAYAN SÜREKLİ ORTAMLARIN TEMEL DENKLEMLERİ

Bütünlüğü sağlama amacını güden bu bölümde, yerel olmayan sürekli ortamların temel korunum denklemlerini vereceğiz. Bu denklemler çeşitli amaçlarla pek çok yerde yayınlanmışlardır. Geniş olarak [27] de bulunabilir. Biz burada ERİNGEN [15]'i izlemeyi uygun gördük. Zira bu bölüm için özel amacımız, yerel olmayan viskoelastisitenin ve elastisitenin bünye denklemlerinin elde edilmesini göstermektir.

Bölümde ilk olarak soyut bir büyüklük için korunum denklemleri ve sıçrama koşulları elde edilmiştir. Bu sonuçlar kütle, momentum, momentumun momentinin ve enerjinin korunumu için kullanılmıştır. Bunun ardından Entropi Eşitsizliği elde edilmiş ve Helmholtz Serbest Enerjisi ve enerjinin korunumundan yararlanarak entropi eşitsizliğine uygun bir biçim verilmiştir. [28] de bulunabilecek bünye aksiyomları kullanılarak serbest enerji için elde edilen bu eşitsizlikten, yerel olmayan viskoelastik cisimler için bünye denklemleri elde edilmiştir. Gerilme için elde edilen bünye denklemi lineerleştirilmiştir. Son olarak, yerel olmayan elastisitenin gerilme-şekil değiştirme bağıntısı verilmiştir.

2.1. KORUNUM DENKLEMLERİ :

Üç boyutlu Euclides Uzayında bir B bölgesi gözönüne alalım. Gözönüne aldığımız cismin referans olarak aldığımız konumunda bu bölgeyi doldurduğunu varsayıyoruz. Cismin

maddesel noktalarını bu referans konumunda kartezyen koordinatlarda $\underline{X} (X_K, K=1,2,3)$ noktası ile eşleştiriyoruz. Bu $\underline{X}$ noktası hareketle uzayın bir $\underline{x}$ noktasına taşınacaktır. Hareket $\underline{X}$ ve $\underline{x}$ koordinatları arasında bir parametrelili bire bir dönüşümdür. Yani hareket

$$x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) \quad k=1,2,3$$

olarak tanımlanmışsa, bunun

$$X_K = X_K(x_1, x_2, x_3, t) \quad K=1,2,3$$

şeklinde bir tek tersi vardır. Bu özelliğin

$$\det x_{k,K} > 0 \quad B \text{ de}$$

koşulunun sağlanması halinde garanti altında olduğunu biliyoruz. Burada virgülden sonraki indis, ilgili değişkene göre türev anlamındadır.

Korunum denklemlerini kolayca yazmak için önce soyut bir büyüklüğe ait korunum denklemini elde etmek istiyoruz. ψ herhangi mertebeden bir büyüklük olmak üzere bunun bir V hacmindeki miktarı ile ilgileniyoruz. Bu büyüklük bir σ yüzeyi üzerinde süreksizliğe sahip olsun. V hacminin sınırını oluşturan yüzey S olsun. ψ büyüklüğünün S yüzeyinden giren miktarını ζ_k , V hacmi içinde üretilen miktarını g ile gösterelim. ψ büyüklüğüne ait korunum denklemi

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \psi d\sigma - \int_{S-\sigma} \zeta_k da_k - \int_{V-\sigma} g d\sigma = 0 \quad (2.1.1)$$

olarak yazılabilir. V hacminin bir y hız alanına sahip olduğunu ve süreksizlik yüzeyinin bir u hızı ile hareket et-

tiğini varsayıyoruz. σ yüzeyinin V hacmini ayırdığı parçaları (+) ve (-) olarak gösterelim. φ büyüklüğünün σ süreksizlik yüzeyi üzerindeki süreksizliği için

$$\varphi^+ - \varphi^- = [\varphi]$$

gösterimini kullanalım. Bu tanımlarla (2.1.1) denklemini uzun işlemler sonunda n_k yüzeyin birim normalinin bileşenleri olmak üzere

$$\int_{V-\sigma} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi u_k)_{,k} - \zeta_{k,k} - g \right] dv + \int_{\sigma} [\varphi(u_k - u_k) - \zeta_k] n_k da = 0 \quad (2.1.2)$$

olarak yazabiliyoruz. Yerel teorilerde bu korunum denkleminin cismin her parçası için geçerli olduğu varsayılarak doğrudan integrant sıfıra eşitlenir. Yerel olmayan teori- de bu varsayımdan vazgeçilir. (2.1.2) denklemi eşdeğer olarak

$$\int_{V-\sigma} \hat{g} dv + \int_{\sigma} [\hat{G}_k] da_k = 0 \quad (2.1.3)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi u_k)_{,k} - \zeta_{k,k} - g = \hat{g} \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.4)$$

$$[\varphi(u_k - u_k) - \zeta_k - \hat{G}_k] n_k = 0 \quad \sigma \text{ da} \quad (2.1.5)$$

şeklinde yazılır. Burada $\hat{g}$ ve $\hat{G}_k$ belirlenmesi gereken YERELLEŞTİRME ARTIKLARIDIR. (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.5) denklemleri yerel olmayan sürekli ortamların yönetici korunum denklemleridir. Bu denklemlerden yararlanarak sürekli or-

tamların korunum denklemlerini yazalım.

1. KÜTLENİN KORUNUMU : Yüzeyden kütle alış verişi ve cisim içinde kütle üretimi olmadığı varsayılarak $\varphi \rightarrow \rho$ ile

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = \hat{\rho} \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.6)$$

$$[\rho(v_k - u_k) - \hat{R}_k] n_k = 0 \quad \sigma \text{ da} \quad (2.1.7)$$

$$\int_{V-\sigma} \hat{\rho} dv + \int_{\sigma} [\hat{R}_k] n_k da = 0 \quad (2.1.8)$$

elde edilir.

2. MOMENTUM KORUNUMU : v hız, f kütle kuvveti, t_k yüzey kuvveti olmak üzere $\varphi \rightarrow \rho v$, $g \rightarrow \rho f$, $\tau_k \rightarrow t_k$ ile

$$t_{k,k} + \rho(f - \dot{v}) = \hat{\rho} v - \rho \hat{f} \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.9)$$

$$[\rho v(v_k - u_k) - t_k - \hat{E}_k] n_k = 0 \quad \sigma \text{ da} \quad (2.1.10)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \hat{f} dv + \int_{\sigma} [\hat{E}_k] n_k da = 0 \quad (2.1.11)$$

elde edilir. t_{kl} gerilme tansörü olmak üzere, $t_k = t_{kl} \underline{i}_l$ dir. Burada $\underline{i}_l$ kartezyen baz vektörlerini göstermektedir.

3. MOMENTUMUN MOMENTİNİN KORUNUMU : x konum vektörü olmak üzere $\varphi \rightarrow x \times \rho v$, $g \rightarrow x \times \rho f$, $\tau_k \rightarrow x \times t_k$ olarak

$$t_{kl} = t_{lk} \quad V-\sigma \quad \text{da} \quad (2.1.12)$$

$$[\underline{x} \times p \underline{v} (u_k - u_k) - \underline{x} \times \underline{t}_k - \underline{x} \times p \hat{E}_k] \eta_k = 0 \quad \sigma \text{ da} \quad (2.1.13)$$

$$\int_{V-\sigma} \underline{x} \times p \hat{f} d\sigma + \int_{\sigma} [\underline{x} \times p \hat{E}_k] da_k = 0 \quad (2.1.14)$$

elde edilir.

4. ENERJİNİN KORUNUMU : $\mathcal{E}$ birim kütlenin iç enerjisi, h birim kütlede üreyen ısı, q_k yüzeylerden giren ısı olmak üzere $\varphi \rightarrow p\mathcal{E} + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}$, $g \rightarrow p \underline{f} \cdot \underline{v} + p h$, $\tau_k \rightarrow \underline{t}_k \cdot \underline{v} + q_k$ olarak

$$p \dot{\mathcal{E}} - \underline{t}_k \cdot \underline{v}_k - p h = p \hat{h} - p \hat{f} \cdot \underline{v} - \hat{p} (\mathcal{E} + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.15)$$

$$[p (\mathcal{E} + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) (u_k - u_k) - \underline{t}_k \cdot \underline{v} - q_k - \hat{H}_k] \eta_k = 0 \quad \sigma \text{ da} \quad (2.1.16)$$

$$\int_{V-\sigma} p \hat{h} d\sigma + \int_{\sigma} [\hat{H}_k] da_k = 0 \quad (2.1.17)$$

elde edilir.

5. ENTROPİ EŞİTSİZLİĞİ : Termodinamiğin 2.kanunu olan entropi eşitsizliği herhangi bir termodinamik işlem sırasında entropinin artacağını veya değişmeyeceğini ifade eder. Bu yüzden (2.1.4) ve (2.1.5) denklemlerindeki eşitliği ($\geq$) ile değiştirmek gerekir. Buna göre η birim kütlenin entropisi, θ mutlak sıcaklık olmak üzere $\varphi \rightarrow p\eta$, $g \rightarrow p h / \theta$, $\tau_k \rightarrow q_k / \theta$ olarak

$$p \dot{\eta} - \left(\frac{q_k}{\theta} \right)_k - \frac{p h}{\theta} \geq p \hat{b} - \hat{p} \eta \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.18)$$

$$\left[p\eta(u_k - u_k) - \frac{q_k}{\theta} - \hat{B}_k \right] n_k = 0 \quad \sigma \, da \quad (2.1.19)$$

$$\int_{V-\sigma} p \hat{b} \, dv + \int_{\sigma} [\hat{B}_k] \, da_k = 0 \quad (2.1.20)$$

elde edilir. $\hat{b}$ ve $\hat{B}_k$ yerelleştirme artıklarıdır.

(2.1.18) denklemine daha uygun bir form vermek için

$$\psi = \varepsilon - \theta \eta \quad (2.1.21)$$

Helmholtz Serbest Enerjisini tanımlıyoruz. (2.1.15) ile (2.1.18) arasında h yok edilirse

$$\begin{aligned} & -\frac{p}{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{\theta} \dot{t}_k \cdot \dot{u}_k + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} - \\ & -\frac{p}{\theta} (\psi - \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{u}) - \frac{p}{\theta} \hat{f} \cdot \underline{u} + p \left(\frac{\hat{h}}{\theta} - \hat{b} \right) \geq 0 \quad V-\sigma \text{ da} \quad (2.1.22) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

2.2. BÜNYE DENKLEMLERİ :

(2.1.6) (2.1.22) denklemleri her türlü sürekli ortam için geçerlidir. Fakat bu denklemler gözönüne alınan cismin durumunu belirlemeğe yetmez. Seçilecek bağımsız değişkenlerle bağlı değişkenler arasındaki ilişkiyi kuracak "Bünye Denklemleri" ne gereksinme vardır. Bu denklem bir anlamda ortamın karakterini belirleyecektir. Bundan başka yerelleştirme artıklarının da belirlenmesi gerekecektir. Bünye denkleminin elde edilmesi sırasında uyulması gereken

temel hipotezler ERİNGEN [28] de bulunabilir. Kısallığı sağlamak amacı ile bu hipotezleri sıralamıyoruz. Yeri geldikçe kısaca hatırlatacağız. Bu bölümdeki özel amacımız, yerel olmayan viskoelastik ortamlar için bünye denkleminin nasıl elde edildiğini özetlemektir. Bu işlemler ayrıntılı olarak ERİNGEN [15] de bulunabilir.

Yerel olmayan viskoelastik ortamların bünye denklemi-ne ulaşabilmek için şu önermeyi temel varsayım olarak alıyoruz :

Bir bağımlı bünye değişkeni hareketin, sıcaklığın ve bunların gradyanının cismin tüm noktalarında ve geçmişteki tüm değerlerinin fonksiyoneli ve konumun ve zamanın fonksiyonudur.

Bu önermeden açıkça anlaşıldığı gibi, bağımsız bünye değişkenleri hareket, sıcaklık ve bunların gradyanı seçilmiştir. Bunların dışında kalanlar, örneğin Helmholtz Serbest Enerjisi, gerilme, ısı akısı, entropi gibi büyüklükler bağımlı bünye değişkenidir. Yukarıda ifade edilen temel bünye aksiyonumuna göre örneğin

$$\Psi(\underline{X}, t) = \Psi[\underline{x}(\underline{X}', t'), \underline{x}_{, \kappa}(\underline{X}', t'), \theta(\underline{X}', t'), \theta_{, \kappa}(\underline{X}', t'); \underline{X}, t] \quad (2.2.1)$$

yazılacaktır. Burada $\underline{X}'$ cisim üzerindeki her noktaya, t' ise geçmişteki her ana bağıllılığı göstermektedir. Bu temel bünye aksiyomunun yanısıra, yerelleştirme artıklarının sistemin $\underline{X}$ deki durumuna açık olarak bağlı olmadığını (Yerel Olmama Aksiyomu) ve bünye denkleminin objektivite ilkesini sağlayacağını varsayıyoruz. Yani bünye denklemi

eksenlerin ortonormal dönüşümleri ve sabit zaman kaydırmalarına göre biçim yönünden değişmeden kalmalıdır. Objektivite ilkesinin uygulanması ile (2.2.1) bünye fonksiyonelinin

$$C'_K \equiv [\alpha(X', t - \tau') - \alpha(X, t - \tau)] \cdot \alpha_{,K}(X', t - \tau')$$

$$C'_{KL} \equiv \alpha_{,K}(X', t - \tau') \cdot \alpha_{,L}(X', t - \tau') \quad (2.2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} C'^X_{KL} &\equiv C'_{KL}(X', t - \tau') - C_{KL}(X, t) 1^*(\tau') \\ \theta'^X &\equiv \theta'(X', t - \tau') - \theta(X, t) 1^*(\tau') \\ \theta'^X_{,K} &\equiv \theta'_{,K}(X', t - \tau') - \theta_{,K}(X, t) 1^*(\tau') \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanan "Yerel Olmayan Fark Ölçüleri" ile

$$\Psi(X, t) = \Psi[C'_K, C'^X_{KL}, \theta'^X_{,K}, \theta'^X; C_{KL}, \theta, \theta_{,K}, X] \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılmasının uygun olacağı anlaşılmaktadır. (2.2.3) ifadelerinde $1^*(\tau')$ değerini bir olarak koruyan geçmiştir.

Burada $F' \equiv \{C'_K, C'^X_{KL}, \theta'^X_{,K}, \theta'^X\}$ sıralanmış çokluğunun

$$(F'_1, F'_2)_H = \int_0^\infty \int_{V_0} d\tau' \int H(|X - X'|, \tau') F'_1(X', t - \tau') F'_2(X', t - \tau') dV(X') \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma göre bir Hilbert Uzayı oluş-

turduğunu ve Ψ 'nin hem $\hat{F}$ 'ye göre hem de $G \equiv \{C_{KL}, \theta, \theta_{,K}\}$ olarak tanımlanan G 'ye göre sürekli türetilabilir olduğunu varsayıyoruz. Uzun bir türetme işleminden sonra Ψ (2.1.22) de yerleştirilerek

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho}{\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta \theta^2} du' dz + \eta \right) \dot{\theta} - \frac{\rho}{\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_{,K}} - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta \theta_{,K}^2} du' dz \right) \dot{\theta}_{,K} \\ & + \frac{1}{\theta} [t_{KL} - 2\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{KL}} - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta C_{KL}^2} du' dz \right) x_{K,K} x_{L,L}] u_{L,K} - \frac{\hat{\rho}}{\theta} \left(\Psi - \frac{u^2}{2} \right) \\ & - \frac{\rho}{\theta} (\hat{f}_K - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta C_K} x'_{K,K} du' dz) u_K + \frac{1}{\theta^2} q_K \theta_{,K} + \frac{\rho}{\theta} \hat{h} - \rho \hat{b} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$-\frac{\rho}{\theta} \int_0^\infty \int_{V-U} \left\{ \frac{\delta \Psi}{\delta \theta^2} \dot{\theta}' + \frac{\delta \Psi}{\delta \theta_{,K}^2} \dot{\theta}'_{,K} + \frac{\delta \Psi}{\delta C_{KL}^2} \dot{C}'_{KL} + \frac{\delta \Psi}{\delta C_K} [u'_K + (x'_L - x_L) u'_{L,K}] x'_{K,K} \right\} du' dz \geq 0$$

elde edilmektedir. Bu ifade $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_{,K}$, $u_{L,K}$ 'ya göre lineer, u_K cinsinden kuadratik bir ifadedir. Öte yandan bağlı bünye değişkenleri bu büyüklüklere bağlı olmadığından (2.2.6) eşitsizliğinin sağlanabilmesi, ancak ve ancak bu değişkenlerin katsayıların sıfır olması ile olanaklıdır sonucuna varıyor ve

$$\eta = \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta \theta^2} du' dz - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.2.7)$$

$$t_{KL} = 2\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{KL}} - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta C_{KL}^2} du' dz \right) x_{K,K} x_{L,L} \quad (2.2.8)$$

$$\hat{f}_K = \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta C_K} x'_{K,K} du' dz \quad (2.2.9)$$

$$\hat{p}=0 \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_{i,k}} - \int_0^\infty \int_{V-U} \frac{\delta \Psi}{\delta \theta_{i,k}^A} du' dz = 0 \quad (2.2.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{D} \equiv & \int_0^\infty \int_{V-U} \left\{ \frac{\delta \Psi}{\delta \theta^A} \dot{\theta}' + \frac{\delta \Psi}{\delta \theta_{i,k}^A} \dot{\theta}'_{i,k} + \frac{\delta \Psi}{\delta C_{KL}^A} \dot{C}'_{KL} \right. \\ & \left. + \frac{\delta \Psi}{\delta C_K'} [u'_k + (x'_l - x_l) u'_{l,k}] x'_{k,k} \right\} du' dz \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

"Yerel Olmayan Disipasyon Fonksiyonu" olmak üzere

$$\frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{i,k} + \frac{p}{\theta} (\hat{h} - \hat{D}) - p \hat{b} \geq 0 \quad (2.2.13)$$

denklemlerini elde ediyoruz. Bu sonuçların değerlendirilmesi ile Ψ 'nin $\theta_{i,k}$ 'ya bağlı olmadığını, $\theta_{i,k}$ 'nın sıfır olması halinde $q_k=0$ olacağını ve son olarak Ψ 'nin C_K' 'ye bağlı olmayacağını anlıyoruz.

Bağımlı bünye değişkenlerinin bağımsız bünye değişkenlerine lineer bağlı olmasını istiyorsak, Ψ için özel bir yapı kabul etmemiz gerektiği açıktır. Bu amaçla

$$\begin{aligned} p_0 \Psi \equiv \Sigma = & \Sigma^0(\underline{c}, \theta, \underline{x}) + \int_0^\infty \int_{V-U} [\Sigma^0 \dot{\theta}^A(\lambda, t-\tau) + \Sigma_K^1 \dot{\theta}_{i,k}^A(\lambda, t-\tau) \\ & + \Sigma_{KL}^2 \dot{C}_{KL}^A(\lambda, t-\tau)] du(\lambda) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{V-U} \int_{V-U} [\Sigma^3 \dot{\theta}^A(\lambda_1, t-\tau_1) \dot{\theta}^A(\lambda_2, t-\tau_2) \\ & + \Sigma_K^4 \dot{\theta}^A(\lambda_1, t-\tau_1) \dot{\theta}_{i,k}^A(\lambda_2, t-\tau_2) + \Sigma_{KL}^5 \dot{\theta}_{i,k}^A(\lambda_1, t-\tau_1) \dot{\theta}_{i,l}^A(\lambda_2, t-\tau_2)] \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$+ \sum_{KL}^6 \theta_{KL}^x(\underline{a}_1, t - \tau_1) \dot{C}_{KL}^x(\underline{a}_2, t - \tau_2) + \sum_{KLM}^7 \theta_{KL}^x(\underline{a}_1, t - \tau_1) \dot{C}_{LM}^x(\underline{a}_2, t - \tau_2) \\ \sum_{KLMN}^8 \dot{C}_{KL}^x(\underline{a}_1, t - \tau_1) \dot{C}_{MN}^x(\underline{a}_2, t - \tau_2)] d\nu(\underline{a}_1) d\nu(\underline{a}_2) d\tau_1 d\tau_2$$

alıyoruz. Lineer bünye denklemlerine ulaşabilmek için fonksiyonlarının argümanlarına bağıllığını yine özel bir yapıda alıyoruz. Bunun ötesinde lineer teoride U_K maddesel, u_K uzaysal yerdeğiştirme vektörleri ve δ_{KL} Kronecker Deltası, T ise bir sabit T_0 sıcaklığından itibaren ölçülmüş sıcaklık olmak üzere

$$C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}, \quad E_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K}), \quad T = \theta - T_0, \quad T_0 > 0 \\ 2e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}, \quad 2r_{kl} = u_{k,l} - u_{l,k}, \quad U_K = u_K \delta_{KK} \quad (2.2.15)$$

$$x_{k,K} = (\delta_{MK} + U_{M,K}) \delta_{MK}, \quad E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L}$$

olduğu gözönüne alınarak gerilme için bünye denklemi

$$t_{kl}(\underline{x}, t) = \alpha_{kl}(1 - e_{rr}) - \beta_{kl}T + \alpha_{km}(e_{lm} + r_{lm}) + \alpha_{lm}(e_{km} + r_{km}) \\ - \gamma'_{mkl} T_{,m} + \sigma_{klmn} e_{mn} + \int_{V-G} [\beta'_{kl}(\underline{a}, 0) T(\underline{a}, t) \\ + \gamma'_{mkl}(\underline{a}, 0) T_{,m}(\underline{a}, t) + \sigma'_{klmn}(\underline{a}, 0) e'_{mn}(\underline{a}, t)] d\nu(\underline{a}) \\ + \int_{-\infty}^t \int_{V-G} [\beta'_{kl}(\underline{a}, t-\tau) \dot{T}(\underline{a}, \tau) + \gamma'_{mkl}(\underline{a}, t-\tau) \dot{T}_{,m}(\underline{a}, \tau) + \sigma'_{klmn}(\underline{a}, t-\tau) \dot{e}_{mn}(\underline{a}, \tau)] d\nu(\underline{a}) d\tau \quad (2.2.16)$$

olarak elde edilmektedir. Bu denklem yerel olmayan, anizotropik viskoelastik malzeme için en genel gerilme bünye denklemidir. Biz bu denklemi daha özel bir hal için kullanacağız. Sıcaklık sabitse ve cisim doğal konumunda gerilmesizse

$$t_{kl} = \bar{\sigma}_{klmn} e_{mn} + \int_{V-\sigma} \bar{\sigma}'_{klmn}(\underline{a}, 0) e_{mn}(\underline{a}, t) dV(\underline{a}) + \int_{-\infty}^t \int_{V-\sigma} \bar{\sigma}'_{klmn}(\underline{a}, t-\tau) \dot{e}_{mn}(\underline{a}, \tau) d\tau dV(\underline{a}) \quad (2.2.17)$$

elde edilecektir. Ek olarak izotropluğun gözönüne alınması halinde $\bar{\sigma}_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm})$ olacaktır

$$t_{kl} = \lambda e_{rr} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} + \int_{V-\sigma} [\lambda (|\underline{x} - \underline{x}'|, 0) e_{rr}(\underline{x}', t) + 2\mu (|\underline{x} - \underline{x}'|, 0) e_{kl}(\underline{x}', t) + \int_{-\infty}^t \int_{V-\sigma} [\lambda (|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau) \dot{e}_{rr}(\underline{x}', \tau) \delta_{kl} + 2\mu (|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau) \dot{e}_{kl}(\underline{x}', \tau)] dV(\underline{x}') d\tau] dV(\underline{x}') \quad (2.2.18)$$

elde edilmektedir. Yerel olmayan elastisitede yapılmış diğer çalışmalardan (ERİNGEN [18]) esinlenerek bu bünye denklemini

$$\lambda(|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau) = \lambda \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau), \quad \mu(|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau) = \mu \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau)$$

ve süreksizlik yüzeyi olmadığını varsayarsak

$$t_{kl}(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_B \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|, t-\tau) [\lambda \dot{e}_{rr}(\underline{x}', \tau) \delta_{kl} + 2\mu \dot{e}_{kl}(\underline{x}', \tau)] dV' d\tau \quad (2.2.19)$$

formunda yazmayı yeğliyoruz. Yerel olmayan homogen izotrop lineer elastisite için bünye denklemini

$$t_{kl} = \int_V \alpha (1 - \alpha') [\lambda e_{rr}(\mathbf{x}', t) \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\mathbf{x}', t)] dv(\mathbf{x}') \quad (2.2.20)$$

olarak yazıyoruz.

Bünye denklemi konusundaki çalışmaların tamamlanabilmesi için şekil değiştirmeleri gerilmeler cinsinden verecek bağıntıların elde edilmesi gerekir. Yerel olmayan elastisitede EDELEN [49]'in çalışmasından başka çalışmaya rastlanamamıştır. (2.2.20) tipindeki bir bünye denklemini tersine çevirmek 1 nci tür Fredholm İntegral denklemi sistemi çözmekle eşdeğerdir. Bilindiği gibi bu tür denklemlerin çözümü için genel yöntemler henüz gelişmemiştir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi (2.2.20) tipindeki bir denklem sisteminin tersi diferansiyel denklem sistemi olabilmektedir.

III

YEREL OLMAYAN VISKOELASTİSİTENİN BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN DEĞİŞİM İLKELERİ VE KARŞITLIK TEOREMİ

3.1. GİRİŞ :

Bu bölümde yerel olmayan kuazi-statik lineer viskoelastisitenin başlangıç koşulları sıfır olan yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemleri için iki değişim ilkesi ve karşıtlık teoremi verilmiştir.

Yerel olmayan viskoelastisitenin bünye denkleminin elde edilmesi konusunda ERİNGEN [15] 'den başka bir çalışmaya rastlanamamıştır. Bu çalışmanın ana hatları 2.Bölümde verilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada bünye denklemi gerilmeleri şekil değiştirmeler cinsinden veren bir bağıntı olarak elde edilmiştir. Viskoelastisite literatüründe bu tür bağıntı "Gevşeme Tipi Bünye Denklemi" olarak adlandırılmaktadır. "Sünme Tipi Bünye Denklemi" olarak adlandırılan bağıntı ise, şekil değiştirmeleri gerilmeler cinsinden veren bünye denklemidir. Yerel olmayan viskoelastisite için sünme tipi bir bünye denklemi yazmaktan sakınıyoruz.

Değişim ilkeleri kesin çözümün elde edilemediği durumlarda yaklaşık çözümlerin elde edilmesi amacı ile mekanikte ve başka disiplinlerde oldukça yaygın kullanılmaktadır. Yerel elastisite teorisinin sınır değer problemlerinin çözümünde değişim yöntemlerinin ve sonlu elemanların

kullanımı hakkında ayrıntılı bilgi ve geniş bir kaynak listesi WASHIZU [31], ODEN ve REDDY [32] de bulunabilir.

Viskoelastisite teorisi ve bu teorideki değişim ilkeleri için CHRISTENSEN [33], GURTIN-STERNBERG [34], GURTIN [35], LEITMANN-FISHER [36]'e bakılabilir. Viskoelastisitenin dinamik teorisi için değişim ilkeleri, GURTIN [37]'ın elastodinamiğin değişim ilkeleri için geliştirdiği yöntemeye dayandırılarak LEITMANN [38] tarafından verilmiştir.

Sürekli ortamların yerel olmayan teorileri için İEŞAN [39]'ın yerel olmayan elastodinamik için verdiği değişim ilkelerinden başka çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada yazar lineer operatörler için değişim ilkeleri elde etme amacı ile geliştirdiği yöntemi [40] yerel olmayan elastodinamiğe uygulamıştır.

Bu bölümde, ilk olarak yerel olmayan kuazi-statik viskoelastisitenin temel denklemleri ve sınır değer problemleri tanıtılmıştır. Kısallığı sağlamak amacı ile verilen bazı tanımlardan sonra Karşıtlık Teoremi ispatlanmıştır. Bunu iki değişim ilkesi izlemektedir. Değişim ilkelerinden ilki en geneldir, diğeri geometrik koşulları ve bünye denklemini sağlayan yerdeğiştirmeler için geçerlidir. Bu bölümü, verilen teoremlerin bir eleştirisi ile bitireceğiz.

3.2. TEMEL DENKLEMLER :

Yerel olmayan lineer kuazi-statik viskoelastisitenin temel denklemlerini şöyle sıralıyoruz :

Yerdeğiştirme-Şekil Değiştirme Bağlılıları :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad B_x(-\infty, \infty) \text{ da} \quad (3.2.1)$$

Denge Denklemleri :

$$t_{ij,j} + f_i = 0 \quad B_x(-\infty, \infty) \text{ da} \quad (3.2.2)$$

Bünye Denklemleri :

$$t_{ij}(x, t) = \int_B \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(x-x', t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(x', \tau) d\tau dV(x') \quad (3.2.3)$$

veya Stieltjes Konvolüsyonu* kullanılarak

$$t_{ij}(x, t) = \int_B (G_{ijkl} * d\varepsilon'_{kl}) dV(x') \quad (3.2.4)$$

Cismi $t \leq 0$ için doğal durumda varsayacağız.** Yani

$$u_i(x, t) \equiv 0, \quad \varepsilon_{ij}(x, t) \equiv 0, \quad t_{ij}(x, t) \equiv 0 \quad B_x(-\infty, 0] \text{ da} \quad (3.2.5)$$

Bu başlangıç koşullarının yanısıra Yerdeğiştirme Sınır Değer Problemi için

$$u_i(x, t) = \hat{u}_i(x, t) \quad S_x(-\infty, \infty) \text{ da} \quad (3.2.6)$$

Gerilme Sınır Değer Problemi için

$$Y_i(x, t) = t_{ij}(x, t) n_j(x) = \hat{Y}_i(x, t) \quad S_x(-\infty, \infty) \text{ da} \quad (3.2.7)$$

Kanşık Sınır Değer Problemi için

* Stieltjes Konvolüsyonu için [34] 'e bakınız.

** Bu varsayım (3.2.3) de zaman üzerindeki integral artık $(0, t)$ arasında yapılacaktır.

$$U_i(x,t) = \hat{U}_i(x,t) \quad S_u(-\infty, \infty), \quad Y_i(x,t) = \hat{Y}_i(x,t) \quad S_t(-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.2.8)$$

fonksiyonlarının verilmiş olduğunu varsayıyoruz. $\hat{U}_i$, $\hat{Y}_i$ ve f_i fonksiyonlarının $t=0$ da gerekli süreklilik koşullarını sağladığını da varsayımlarımız arasına katıyoruz. Burada S_u ve S_t , B bölgesinin sınırını oluşturan yüzeyin tamamlayıcı alt parçasıdır.

Kısalığı sağlamak amacı ile bazı tanımlar vermek istiyoruz.

DÜZENLİ PROBLEM : $P(B, S_u, S_t, U_i, Y_i, f_i, G_{ijkl})$ çokluğu aşağıda sıralanan koşulları sağlıyorsa, düzenli olarak adlandırılır.

a) B bölgesi, sınırı birbirini aşmayan ve herbirinde genelleştirilmiş Green-Gauss eşitliğinin geçerli olduğu sonlu sayıda yüzeyden oluşan bir bölgedir. B'nin sınırını oluşturan yüzeylerin tümlenmişleri düzenli yüzeylerdir.

b.1) $\hat{U}_i$ fonksiyonları $S_u \times (-\infty, \infty)$ da tanımlı, $S_u \times (-\infty, 0)$ da sıfır ve $S_u \times [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlardır.

b.2) $\hat{Y}_i$ fonksiyonları $S_t \times (-\infty, \infty)$ da tanımlı, $S_t \times (-\infty, 0)$ da sıfır ve $S_t \times [0, \infty)$ da sürekli fonksiyonlardır.

b.3) f_i fonksiyonları $B \times (-\infty, \infty)$ da tanımlı, $B \times (-\infty, 0)$ da sıfır ve $B \times [0, \infty)$ da sürekli fonksiyonlardır.

c) $G_{ijkl}(|x-x'|, t)$ fonksiyonları $B \times (-\infty, \infty)$ da tanımlı, $B \times (-\infty, 0)$ da sıfır ve $B \times [0, \infty)$ da sürekli fonksiyonlardır ve

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk} = G_{klij} \quad (3.2.9)$$

simetri koşullarını sağlarlar.

UYUMLU DURUM : $U_i(\underline{x}, t)$, $\epsilon_{ij}(\underline{x}, t)$, $t_{ij}(\underline{x}, t)$ fonksiyonları $B \times (-\infty, \infty)$ da tanımlı, $B \times (-\infty, 0)$ da sıfır, $B \times [0, \infty)$ da sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, $t_{ij} = t_{ji}$ simetri koşullarını sağlıyorsa, $D(U_i, \epsilon_{ij}, t_{ij})$ çokluğu $B \times (-\infty, \infty)$ da uyumlu durum olarak adlandırılacaktır.

Uyumlu durumların skalerle çarpımlarını ve toplamalarını $D'(U_i, \epsilon'_{ij}, t'_{ij})$, $D''(U_i, \epsilon''_{ij}, t''_{ij})$ iki uyumlu durum olmak üzere

$$D = D' + D'' = (u'_i + u''_i, \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij}, t'_{ij} + t''_{ij}) \quad ; \quad \alpha D = (\alpha u_i, \alpha \epsilon_{ij}, \alpha t_{ij}) \quad (3.2.10)$$

olarak tanımlıyoruz. Uyumlu durumların (3.2.10) tanımları ile bir lineer uzay oluşturdıkları açıktır.

DÜZENLİ ÇÖZÜM : P düzenli bir problem ve D uyumlu bir durum olmak üzere, D uyumlu durumu (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) denklemlerini, (3.2.5) ve (3.2.6) (veya (3.2.7) veya (3.2.8)) koşullarını sağlıyorsa, P problemin düzenli çözümü olarak adlandırılacaktır.

3.3. KARŞITLIK TEOREMİ :

Bu bölümde yerel olmayan kuazi-statik lineer visko-elastisite için, yerel teoride Betti-Karşıtlık Teoremi olarak bilinen önermenin doğru olduğunu göstereceğiz. Teorem şöyle ifade edilebilir.

$P^{(1)}$ ve $P^{(2)}$ yerel olmayan viskoelastik cismin iki ayrı düzenli problemi, $D^{(1)}$ ve $D^{(2)}$ bu düzenli problemlerle eşleşen düzenli çözümler olsun. Bu iki durum arasında $(-\infty, \infty)$ daki her t için

$$I_{\alpha\beta} = \int_B (t_{ij}^{(\alpha)} * d\varepsilon_{ij}^{(\beta)}) dV \quad \text{ve} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$I'_{\alpha\beta} = \int_B (f_i^{(\alpha)} * du_i^{(\beta)}) dV + \int_S (\gamma_i^{(\alpha)} * du_i^{(\beta)}) ds$$

olmak üzere

$$I_{12} = I_{21} = I'_{12} = I'_{21} \quad (3.3.1)$$

bağıntısı vardır.

İSPAT : I_{12} ifadesinde görünen gerilme tansörü simetrik olduğu için ξ_{ij} yerine $U_{i,j}$ konursa sonuç değişmeyecektir. Buna göre I_{12} ifadesi açık olarak

$$I_{12} = \int_B \int_{-\infty}^t t_{ij}^{(1)}(x, t-\tau) \dot{u}_{ij}^{(2)}(x, \tau) d\tau dV$$

yazılabilir. $t_{ij}^{(1)} \dot{u}_{ij}^{(2)} \equiv [t_{ij}^{(1)} \dot{u}_i^{(2)}]_{,j} - t_{ij,j}^{(1)} \dot{u}_i^{(2)}$ özdeşliği yerine konursa

$$I_{12} = \int_B \int_{-\infty}^t [t_{ij}^{(1)}(x, t-\tau) \dot{u}_i^{(2)}(x, \tau)]_{,j} d\tau dV - \int_B \int_{-\infty}^t t_{ij,j}^{(1)}(x, t-\tau) \dot{u}_i^{(2)}(x, \tau) d\tau dV$$

elde edilir. Buradaki ilk integral Green-Gauss Teoremi ile yüzey integraline çevrilir, ikinci integralde de denge denklemlerinden $t_{ij,j}^{(1)} = -f_i^{(1)}$ konursa

$$I_{12} = \int_S \int_{-\infty}^t t_{ij}^{(1)}(x, t-\tau) \dot{u}_i^{(2)}(x, \tau) n_j d\tau ds + \int_B \int_{-\infty}^t f_i^{(1)}(x, t-\tau) \dot{u}_i^{(2)}(x, \tau) d\tau dV$$

veya $t_{ij}^{(1)} n_j = Y_i^{(1)}$ olduğu gözönünde bulundurularak Stieltjes Konvolüsyon gösterimi ile

$$I_{12} = \int_B (f_i^{(1)} * du_i^{(2)}) d\nu + \int_S (Y_i^{(1)} * du_i^{(2)}) dS = I'_{12} \quad (3.3.2)$$

elde edilir. Burada (1) ve (2) indisleri yerdeğiştirse

$$I_{21} = I'_{21} \quad (3.3.3)$$

olacağı açıktır. $I_{12} = I_{21}$ eşitliğini göstermek için I_{12} ifadesinde t_{ij} 'nin (3.2.3) ile verilen tanımını yerleştirmek istiyoruz. Buna göre I_{12} ifadesi açık olarak

$$I_{12} = \int_B \int_{\sigma=-\infty}^t \left\{ \int_B \int_{\tau=-\infty}^{t-\sigma} G_{ijkl}(|x-x'|, t-\tau-\sigma) \dot{\epsilon}_{kl}^{(1)}(x', \sigma) d\sigma d\nu(x') \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}(x, \tau) d\tau d\nu(x) \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada integral sırasını değiştirir ve $G_{ijkl} = G_{klij}$ olduğunu gözönünde bulundurursak

$$I_{12} = \int_B \int_{\sigma=-\infty}^t \left\{ \int_B \int_{\tau=-\infty}^{t-\sigma} G_{ijkl}(|x-x'|, t-\tau-\sigma) \dot{\epsilon}_{kl}^{(2)}(x', \tau) d\tau d\nu(x') \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}(x, \sigma) d\sigma d\nu(x) \right\}$$

veya Stieltjes Konvolüsyon gösterimi ile

$$I_{12} = \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijkl} * d\dot{\epsilon}_{kl}^{(2)}) d\nu' \right] * d\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} \right\} d\nu = I_{21} \quad (3.3.4)$$

elde edilir. (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) gözönüne alınırsa iddia olunan (3.3.1) eşitliği gösterilmiş olur. Q.E.D.

3.4. DEĞİŞİM İLKELERİ :

Bu bölümde yerel olmayan viskoelastik ortamlar için iki tane değişim ilkesi vereceğiz. Bunların ilki en genel değişim ilkesidir ve klasik teoride HU-WASHIZU ilkesi olarak bilinen ilkenin yerel olmayan viskoelastisitedeki eşi olarak düşünülebilir. İkinci ilke ise daha özeldir ve klasik teoride Potansiyel Enerjinin Duraklılığı ilkesi olarak bilinen ilkenin genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

3.4.1. BİRİNCİ DEĞİŞİM İLKESİ :

P düzenli bir problem olmak üzere $(-\infty, \infty)$ daki herhangi bir t için uyumlu durumlar cümlesi üzerinde kurulacak

$$\begin{aligned} \Lambda_t(D) = & \frac{1}{2} \int_B \left[\left[\int_B (G_{ijkl} * d\hat{\epsilon}_{kl}) dV(x') - 2t_{ij} \right] * d\epsilon_{ij} \right] dV(x) \\ & - \int_B [(t_{ij,j} + f_i) * du_i] dV + \int_{S_u} [Y_i * d\hat{u}_i] dS + \int_{S_t} [(Y_i - \hat{Y}_i) * du_i] dS \quad (3.4.1) \end{aligned}$$

fonksiyonelinin uyumlu durumlar cümlesi üzerindeki birinci değişiminin sıfır olması için gerek ve yeter koşul $D(U_i, \hat{\epsilon}_{ij}, t_{ij})$ uyumlu durumunun P düzenli probleminin bir düzenli çözümü olacak şekilde seçilmiş olmasıdır.

İSPAT : İspatı (3.4.1) ile verilen fonksiyonelin uyumlu durumlar cümlesi üzerindeki birinci değişimini doğrudan hesaplayarak yapmak istiyoruz. $\bar{D}(\bar{U}_i, \bar{\epsilon}_{ij}, \bar{t}_{ij})$ uyumlu durumlar cümlesinin herhangi bir elemanını göster-sin. $\Lambda_t(D)$ fonksiyonelinin bu eleman doğrultusundaki bi-

rinci değişimini eğer varsa

$$\delta \Lambda_t(D; \tilde{D}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \Lambda_t(D + \alpha \tilde{D}) \quad (3.4.2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonel olarak anlıyoruz. Bu amaçla

$$\begin{aligned} \Lambda_t(D + \alpha \tilde{D}) = & \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B [G_{ijk} * d(\tilde{\epsilon}_{kl} + \alpha \tilde{\epsilon}'_{kl})] dv' - 2(t_{ij} + \alpha \tilde{t}_{ij}) * d(\tilde{\epsilon}_{ij} + \alpha \tilde{\epsilon}_{ij}) \right] dv \right. \\ & - \int_B \{ [(t_{ij} + \alpha \tilde{t}_{ij}) + f_i] * d(u_i + \alpha \tilde{u}_i) \} dv + \int_{S_u} [(Y_i + \alpha \tilde{Y}_i) * d\hat{u}_i] ds \\ & \left. + \int_{S_t} [(Y_i + \alpha \tilde{Y}_i) - \hat{Y}_i] * d(u_i + \alpha \tilde{u}_i) \right\} ds \end{aligned}$$

yazıyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \Lambda_t(D + \alpha \tilde{D}) = & \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijk} * d\tilde{\epsilon}'_{kl}) dv' - 2\tilde{t}_{ij} \right] * d(\tilde{\epsilon}_{ij} + \alpha \tilde{\epsilon}_{ij}) \right. \\ & + \left[\int_B [G_{ijk} * d(\tilde{\epsilon}_{kl} + \alpha \tilde{\epsilon}'_{kl})] dv' - 2(t_{ij} + \alpha \tilde{t}_{ij}) * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right] dv - \int_B [\tilde{t}_{ij} * d(u_i + \alpha \tilde{u}_i) \\ & + [(t_{ij} + \alpha \tilde{t}_{ij}) + f_i] * d\tilde{u}_i \} dv + \int_{S_u} [\tilde{Y}_i * d\hat{u}_i] ds + \int_{S_t} [\tilde{Y}_i * d(u_i + \alpha \tilde{u}_i) + [(Y_i + \alpha \tilde{Y}_i) - \hat{Y}_i] * d\tilde{u}_i] ds \end{aligned}$$

ve burada $\alpha=0$ koyarak

$$\begin{aligned} \delta \Lambda_t(D; \tilde{D}) = & \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijk} * d\tilde{\epsilon}'_{kl}) dv' \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} + \left[\int_B (G_{ijk} * d\tilde{\epsilon}_{kl}) dv' \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right. \\ & - 2(\tilde{t}_{ij} * d\tilde{\epsilon}_{ij} + t_{ij} * d\tilde{\epsilon}_{ij}) \} dv - \int_B [\tilde{t}_{ij} * du_i + (t_{ij} + f_i) * d\tilde{u}_i] dv \\ & + \int_{S_u} [\tilde{Y}_i * d\hat{u}_i] ds + \int_{S_t} [\tilde{Y}_i * du_i + (Y_i - \hat{Y}_i) * d\tilde{u}_i] ds \quad (3.4.3) \end{aligned}$$

bulunur. Burada Stieltjes Konvolüsyonunun özellikleri ve

$G_{ijkl} = G_{klij}$ simetri özellikleri kullanılarak

$$\int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijkl} * d\tilde{\epsilon}_{kl}) dv' \right] * d\epsilon_{ij} \right\} dv = \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijkl} * d\epsilon'_{kl}) dv' \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right\} dv \quad (3.4.4)$$

olduğu gösterilebilir. (Karşılıklı Teoreminin ispatında bu eşitliği gösterdik) Öte yandan

$$\int_B (\tilde{t}_{ij} * du_i) dv = \int_B (\tilde{t}_{ij} * du_i)_{,j} dv - \int_B (\tilde{t}_{ij} * du_{i,j}) dv$$

ve sağ taraftaki ilk integral için Green-Gauss Teoremi kullanılarak

$$\int_B (\tilde{t}_{ij} * du_i)_{,j} dv = \int_S (\tilde{t}_{ij} * du_i) n_j ds$$

bulunur. $\gamma_i = t_{ij} n_j$ olduğu gözönüne alınarak

$$\int_B (\tilde{t}_{ij} * du_i) dv = \int_S (\tilde{\gamma}_i * du_i) ds - \int_B (\tilde{t}_{ij} * du_{i,j}) dv$$

elde edilmektedir. Buradaki ikinci integralde konvolüsyon çarpımının sırasını değiştirir, $t_{ij} = t_{ji}$ olduğunu gözönüne alırsak, sonuç olarak

$$\int_B (\tilde{t}_{ij} * du_i) dv = \int_S (\tilde{\gamma}_i * du_i) ds - \frac{1}{2} \int_B [(u_{i,j} + u_{j,i}) * d\tilde{t}_{ij}] dv \quad (3.4.5)$$

yazılabilmektedir. (3.4.4) ve (3.4.5), (3.4.3) de yerleştirilerek

$$\delta \Lambda_t(D; \tilde{D}) = \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ijkl} * d\epsilon'_{kl}) dv' - t_{ij} \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right\} dv + \int_B \left\{ \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] * d\tilde{t}_{ij} \right\} dv$$

$$- \int_B [(t_{ij} + t_{ji}) * d\tilde{u}_i] dv + \int_{S_u} [(\hat{u}_i - u_i) * d\tilde{\gamma}_i] ds + \int_{S_t} [(\gamma_i - \hat{\gamma}_i) * d\tilde{u}_i] ds \quad (3.4.6)$$

elde edilir. Bu hazırlıktan sonra teoremin yeterlik ispatı için $D(U_i, \xi_{ij}, t_{ij})$ uyumlu durumunun P düzenli probleminin bir düzenli çözümü olduğunu varsayıyoruz. Buna göre (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4), (3.2.8) eşitlikleri sağlanacağından (yalnız karışık sınır değer problemini gözönüne alıyoruz)

$$\delta \Lambda_t(D; \tilde{D}) = 0 \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Teoremin gereklik ispatı için (3.4.6) fonksiyoneli sıfır kabul ederek bunun $D(U_i, \xi_{ij}, t_{ij})$ uyumlu durumunun P düzenli probleminin bir düzenli çözümü olması anlamına geldiğini göstereceğiz. (3.4.6) ile verilen fonksiyonelin $\tilde{D}$ elemanının seçiminden bağımsız olarak sıfır olması gerektiğine göre $\tilde{D}(\tilde{U}_i, \tilde{\xi}_{ij}, \tilde{t}_{ij})$ elemanını $h(t)$ birim Heaviside Fonksiyonu olmak üzere

$$\tilde{U}_i(x, t) = \bar{U}_i(x) h(t), \quad \tilde{\xi}_{ij}(x, t) = \bar{\xi}_{ij}(x) h(t), \quad \tilde{t}_{ij}(x, t) = \bar{t}_{ij}(x) h(t)$$

olarak seçiyoruz. Heaviside Fonksiyonunun Stieltjes konvolüsyonunda birim eleman olduğunu gözönünde bulundurarak $\delta \Lambda_t(D; \tilde{D})$ bu elemanla

$$\delta \Lambda_t(D; \tilde{D}) = \int_B \left[\int_B (G_{ijk} * d\bar{\xi}_{kl}) d\bar{v} - t_{ij} \right] \bar{\xi}_{ij} d\bar{v} + \int_B (t_{ij} + f_i) \bar{U}_i d\bar{v}$$

$$+ \int_B \left[\frac{1}{2} (U_{ij} + U_{ji}) - \xi_{ij} \right] \bar{t}_{ij} d\bar{v} + \int_{S_u} (\hat{U}_i - U_i) \bar{Y}_i ds + \int_{S_f} (Y_i - \hat{Y}_i) \bar{U}_i ds \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Değişimler Hesabının temel lemmasına göre bu fonksiyonelin gelişigüzel $\bar{U}_i, \bar{\xi}_{ij}, \bar{t}_{ij}$ fonksiyonları için sıfır olabilmesi ancak ve ancak bu fonksiyonların katsayılarının sıfır olması ile olanaklıdır. Buna göre

$$t_{ij} = \int_B (G_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}) dv' \quad Bx(-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.4.9)$$

$$t_{ij,j} + f_i = 0 \quad Bx(-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.4.10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad Bx(-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.4.11)$$

$$Y_i = \hat{Y}_i \quad S_u x(-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.4.12)$$

ve

$$\int_{S_u} (\hat{U}_i - u_i) \bar{Y}_i ds = 0 \quad (3.4.13)$$

elde edilir. İspatı bitirebilmemiz için (3.4.13) koşulunun sağlanması halinde (3.2.6) koşulunun sağlanacağını göstermek gerekir. (3.4.13) koşulu gelişigüzel $\bar{Y}_i$ 'ler için sağlandığına göre $\bar{Y}_i$ 'leri δ_{ij} Kronecker Deltası olmak üzere

$$\bar{Y}_i = (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) n_j f(x) \quad (3.4.14)$$

şeklinde alıyoruz. Burada $f(x)$ S_u üzerinde istenildiği gibi seçilebilen ölçülebilir bir fonksiyondur. (3.4.14) ile tanımlanan $\bar{Y}_i$ 'leri (3.4.13) de yerleştirerek

$$\int_{S_u} [(\hat{U}_k - u_k) n_m + (\hat{U}_m - u_m) n_k] f(x) ds = 0$$

elde edilmektedir. Değişimler Hesabının temel lemmasına göre bu ifadenin gelişigüzel seçilen $f(x)$ 'ler için sağlanabilmesi ancak ve ancak

$$(\hat{U}_k - u_k) n_m + (\hat{U}_m - u_m) n_k = 0 \quad S_u x(-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

ile olanaklıdır. Burada belli bir $(\underline{x}, t)$ için $k=m$ ($n_k \neq 0$) seçilirse

$$u_k = \hat{u}_k \quad S_u \times (-\infty, \infty) \quad \text{da} \quad (3.4.15)$$

elde edilmektedir. Süreklilik nedeni ile bu eşitlik S_u 'daki her $\underline{x}$ ve $(-\infty, \infty)$ daki her t için geçerli olacaktır.

Q.E.D.

Bu en genel değişim ilkesinden sonra geometrik koşulları sağlayan yerdeğiştirme alanı için uygun bir değişim ilkesi vermek istiyoruz. Bu amaçla uyumlu durumlar cümlesinin

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad B \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

yerdeğiştirme-şekil değiştirme bağıntılarını

$$t_{ij}(\underline{x}, t) = \int_B (G_{ijkl} * d\varepsilon'_{kl}) dv' \quad B \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

bünye denklemini ve

$$u_i = \hat{u}_i \quad S_u \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

yerdeğiştirme sınır koşulunu sağlayan alt cümlesini göz

önüne alıyoruz. Bu cümleyi kısaca $\mathcal{K}$ ile göstereceğiz.

Yerel teoride Potansiyel Enerjinin Duraklılığı olarak bilinen ilkenin yerel olmayan viskoelastik ortamlar için bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilecek olan ilke şöyle ifade edilebilir :

3.4.2. İKİNCİ DEĞİŞİM İLKEİ : P düzenli bir problem olmak üzere $\mathcal{K}$ cümlesi üzerinde $(-\infty, \infty)$ daki her t için kurulacak

$$\begin{aligned} \Phi_t(D) = & \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ij,kl} * d\epsilon'_{kl}) dv \right] * d\epsilon_{ij} \right\} dv \\ & - \int_B (f_i * du_i) dv - \int_{S_t} (\hat{Y}_i * du_i) ds \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

fonksiyonelinin birinci değişiminin sıfır olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{K}$ cümlesinden seçilen $D(U_i, \epsilon_{ij}, t_{ij})$ uyumlu durumunun P probleminin bir düzenli çözümü olmasıdır.

İSPAT : Teoremin ispatında izlenecek yol, birinci değişim ilkesinde izlenen yolun tamamı ile eőili olacaktır. Bundan önce (3.4.16) ile fonksiyonelin D uyumlu durumunun $\mathcal{K}$ alt cümlesinden seçilmesi halinde (3.4.1) ile verilen fonksiyonelden elde edilebileceğini göstermek istiyoruz. Gerçekten (3.4.1) ile verilen fonksiyonelde

$$\begin{aligned} \int_B (t_{ij} * du_i) dv = & \int_{S_u} (Y_i * du_i) ds + \int_{S_t} (Y_i * du_i) ds - \int_B (t_{ij} * du_{ij}) dv \\ \text{yerleştirilirse} \\ \wedge_t(D) = & \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[\int_B (G_{ij,kl} * d\epsilon'_{kl}) dv \right] * d\epsilon_{ij} \right\} dv - \int_B [t_{ij} * d(\epsilon_{ij} - u_{ij})] dv \\ & - \int_B (f_i * du_i) dv + \int_{S_u} [Y_i * d(\hat{U}_i - u_i)] ds - \int_{S_t} (\hat{Y}_i * du_i) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $t_{ij} = t_{ji}$ olduğu gözönüne alınırsa D uyumlu durumunun $\mathcal{K}$ alt cümlesinden seçilmesi halinde ikinci ve dördüncü integral düşer ve geriye (3.4.16) ile tanımlanan fonksiyonel kalır.

Teoremi ispatlamağa hazırlık olmak üzere (3.4.16) ile verilen fonksiyonelin $\mathcal{K}$ alt cümlesindeki herhangi bir

$\tilde{D}(\tilde{U}_i, \tilde{\epsilon}_{ij}, \tilde{t}_{ij})$ elemanı doğrultusundaki birinci değişimin

$$\delta\phi_t(D; \tilde{D}) = \frac{1}{2} \int_B \left[\left[\int_B (G_{ijkl} * d\epsilon'_{kl}) dV \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right] dV - \int_B (f_i * d\tilde{u}_i) dV - \int_{S_t} (\hat{Y}_i * d\tilde{u}_i) ds \quad (3.4.17)$$

olduğunu yazıyoruz. Bu fonksiyonelin sıfır olması için K cümlesinden seçilecek D uyumlu durumunun P probleminin bir düzenli çözümü olmasının yeterli olacağını göstermek için

$$t_{ij}(x, t) = \int_B (G_{ijkl} * d\epsilon'_{kl}) dV \quad B \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

ve

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad B \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

olduğunu gözönüne alıyoruz. $t_{ij} = t_{ji}$ olduğu gözönüne alınırsa, ϵ_{ij} yerine u_{ij} alınabileceği görülür. Buna göre (3.4.17) fonksiyonelindeki ilk integral

$$\int_B \left[\left[\int_B (G_{ijkl} * d\epsilon'_{kl}) dV \right] * d\tilde{\epsilon}_{ij} \right] dV = \int_B (t_{ij} * d\tilde{u}_j) dV = \int_{S_t} (Y_i * d\tilde{u}_i) ds - \int_B (t_{ij,j} * d\tilde{u}_i) dV$$

olarak yazılabilir. Buradaki son eşitlik elde edilirken Green-Gauss Teoremi ve $S_t \times (-\infty, \infty)$ da $\tilde{U}_i = 0$ olduğu kullanılmıştır. Bu ifade (3.4.17) de yerleştirilirse

$$\delta\phi_t(D; \tilde{D}) = - \int_B [(t_{ij,j} + f_i) * d\tilde{u}_i] dV + \int_{S_t} [(Y_i - \hat{Y}_i) * d\tilde{u}_i] ds \quad (3.4.18)$$

elde edilir. K cümlesinden seçilmiş D uyumlu durumu P probleminin bir düzenli çözümü ise

$$t_{ij,j} + f_i = 0 \quad B \times (-\infty, \infty) \quad \text{da}$$

ve

$$Y_i = \hat{Y}_i \quad S_t \times (-\infty, \infty)$$

olacağından $\bar{U}_i$ ne olursa olsun

$$\delta\phi_t(D; \bar{D}) = 0 \quad (3.4.19)$$

elde edilecektir. Teoremin gereklik ispatı için (3.4.17) ile tanımlanan fonksiyonelin K cümlesinden seçilmiş herhangi bir $\bar{D}$ elemanı için sıfır olması halinde D uyumlu durumunun P düzenli probleminin çözümü olacağını göstermemiz gerekir. Bu amaçla $h(t)$ birim Heaviside Fonksiyonu olmak üzere

$$\tilde{U}_i(x, t) = \bar{U}_i(x) h(t) \quad \bar{B} \times (-\infty, \infty) \text{ da}$$

seçiyoruz. Burada $\bar{U}_i(x)$ fonksiyonu B de ikinci mertebeye kadar sürekli türetilen ve S_u da sıfır olan herhangi bir fonksiyondur. $\tilde{U}_i(x, t)$ 'yi bu yeni tanımı ile (3.4.18) de yerleştirir $h(t)$ nin Stieltjes Konvolüsyonunda birim eleman olduğunu gözönüne alırsak

$$\int_B (t_{i,j} + f_i) \bar{U}_i(x) dv - \int_{S_t} (\hat{Y}_i - Y_i) \bar{U}_i(x) ds = 0$$

elde edilir. Buradan, değişimler hesabının temel temasına göre

$$t_{i,j} + f_i = 0 \quad \bar{B} \times (-\infty, \infty) \text{ da}$$

ve

$$Y_i = \hat{Y}_i \quad S_t \times (-\infty, \infty) \text{ da}$$

elde edilir. Q.E.D.

3.5. SONUÇ :

Bu bölümde yerel olmayan kuazi-statik viskoelastisitenin başlangıç koşulları sıfır karışık sınır değer problemleri için karşıtlık teoremi ve iki değişim ilkesi verilmiştir. Her üç önerme de özel birer durum olarak yerdeğiştirme ve gerilme türü sınır değer problemleri için geçerli olduğundan bunlar için ayrıca ispat edilmemişlerdir.

Anizotropik durum için henüz incelenmemiş olmakla birlikte, her yönde sonsuza uzanmayan bölgelerde yerel olmayan etkileşme fonksiyonunun homogenliği bozuluyor gibi gözükmemektedir. Bu bölümde verilen her üç önerme için de bu durum gözönüne alınmamıştır. Öte yandan ARI [19] yerel olmayan elastisitenin karışık sınır değer problemlerinde sınır koşullarının bazı uygunluk koşullarını sağlaması gerektiğini öne sürmektedir. Bu çalışmada bu da gözönüne alınmamıştır.

Gerek GURTIN [35], gerek IEŞAN [39] bünye katsayılarında blok simetri varsayımı yapmışlardır. Üç önerme için de gerekli olan bu varsayımın viskoelastisite için Onsager ilkesini bozmadığı yakın bir geçmişte gösterilmiştir [41]. Yerel olmayan viskoelastisiteyi bu yönden inceleyen bir çalışmaya rastlanamamıştır.

Bu bölümde sadece iki değişim ilkesi verilmiş olmasına karşın, yerel olmayan viskoelastisite için ODEN ve REDDY [32]'nin çalışmalarını izleyerek daha başka değişim ilkeleri de verilebilir.

YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE TEKLİK TEOREMİ

4.1.GİRİŞ

Bu bölümde yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin başlangıç koşulları sıfır bazı sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliği için yeter koşullar verilecektir.

Bir fizik olayın matematik modeli olan bir problemin çözümünün varlık ve teklik koşullarını incelemek yalnızca akademik bir çaba olmaktan öte bir anlam taşır. Tekliğin bozulduğu durumlarda kullanılan matematik modelin uygunluğu, matematik modeli belirleyen parametrelerin geçerliliği ve çözümlerin kararlılığı tartışma alanına getirilebilmektedir.

Yerel (klasik) elastostatikğin sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliği ilk olarak 1850 yılında Kirchhoff tarafından incelenmiştir. Kirchhoff elastik enerjinin pozitif definit varsayılması durumunda elastostatikğin sınır değer problemlerinin çözümünün tek olacağını göstermiştir. Homogen, izotrop, lineer elastik ortamlarda elastik enerjinin pozitif definit olması, λ ve μ cismin elastik davranışını belirleyen Lamé Sabitlerini göstermek üzere bizi $3\lambda+2\mu>0, \mu>0$ koşuluna götürmektedir. 1885 yılında Neumann, Kirchhoff'un elastostatik için izlediği yolu elastodinamiğe uygulamış ve Kirchhoff'un elastostatik probleminin çözümlerinin tekliği için elde ettiği elastik

sabitlerin sağlaması gerekli koşulların elastodinamik problemlerinin çözümlerinin tekliği için de aynı olduğunu göstermiştir.

Kirchhoff'la başlayan elastisite problemlerinin çözümlerinin tekliği konusundaki çalışmalar 1910 - 1925 yılları arasında yavaşlamışsa da günümüze kadar süregelmiştir. Bu çalışmalar hakkında ayrıntılı bilgi ve geniş bir kaynak listesi KNOPS, PAYNE [42] de bulunabilir. Bu konudaki çalışmalar teklik için alınan kriterler, incelenen problemlerin boyutu, bölgenin geometrisi gibi noktalarda yoğunlaşmaktadır. Yerel elastodinamiğin sınır değer problemleri için genelleştirilmiş enerji kavramına dayanan bir teklik teoremi ERİNGEN-ŞUHUBİ [43] de bulunabilir.

Yerel olmayan elastisite teorisinin sınır değer problemleri için bir teklik teoremine henüz rastlanamamıştır. Yerel olmayan elastisite teorisinin sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliği için ilk olduğunu sandığımız bu çalışmada en yalın halden başlamayı uygun gördük. Bu yüzden yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliğini garanti altına alan bir teorem vermekle yetindik.

İlk olarak yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin temel denklemlerini ve başlangıç-sınır değer problemlerini tanıtacağız. Bundan sonra elastik enerjinin pozitif definit olması ile ilgili bir teorem ve bir sonuç teorem vereceğiz. Bundan sonraki bölümde teklik teoremi ispatlıyacağız. Son olarak bu bölüm için bir tartışma vererek bölümü bitereceğiz.

4.1. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTEDE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ :

Yerel olmayan homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin başlangıç-sınır değer problemlerinden, üç boyutlu Euclides uzayının açık bir B bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki denklem ve koşulları sağlayan $U_i(\underline{x}, t)$ ($i=1,2,3$) kartezyen bileşenleri ile belli yerdeğiştirme alanının bulunmasını anlıyoruz. Yerdeğiştirme alanının sağlaması gereken denklemler şunlardır :

Yerdeğiştirme-Şekil değiştirme Bağlantıları :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad i,j=1,2,3 \quad B \times (-\infty, \infty) \text{ da} \quad (4.2.1)$$

Gerilme-Şekil değiştirme Bağlantıları :

$$t_{ij}(\underline{x}, t) = \int_B \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) \{ \lambda [\varepsilon_{11}(\underline{x}', t) + \varepsilon_{22}(\underline{x}', t) + \varepsilon_{33}(\underline{x}', t)] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\underline{x}', t) \} dV' \\ i,j=1,2,3 \quad B \times (-\infty, \infty) \text{ da} \quad (4.2.2)$$

Burada δ_{ij} Kronecker Deltası olup, $i=j$ ise bir, $i \neq j$ ise sıfırdır. λ ve μ B bölgesinde olduğunu düşündüğümüz elastik cismin davranışlarını belirleyen Lamé Sabitleridir. $\alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|)$ fonksiyonu ise $\underline{x}'$ noktasındaki şekil değiştirme durumunun $\underline{x}$ noktasındaki gerilme durumuna katkısını belirleyen fonksiyondur. "Etkileşme Fonksiyonu" olarak adlandıracağımız bu fonksiyonun herhangi bir $\underline{x}$ için

$$\iint_B \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) f(\underline{x}') f(\underline{x}) dV' dV > 0 \quad (4.2.3)$$

koşulunu sağladığını varsayacağız.

Hareket Denklemleri :

$$t_{ij,j}(\underline{x},t) + f_i(\underline{x},t) = \rho(\underline{x}) \ddot{u}_i(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad B \times (-\infty, \infty) \text{ da} \quad (4.2.4)$$

Burada $f_i(\underline{x},t)$ hacim kuvvetlerinin kartezyen bileşenlerini $\rho(\underline{x})$ ise kütle yoğunluğudur ve $\rho(\underline{x}) > 0$ olduğu varsayılacaktır.

B bölgesini dolduran cismin $t \leq 0$ için doğal durumda olduğu varsayılacaktır : Bunu

$$u_i(\underline{x},t) \equiv 0, \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x},t) \equiv 0, \quad t_{ij}(\underline{x},t) \equiv 0 \\ i,j=1,2,3, \quad B \times (-\infty, 0] \text{ da} \quad (4.2.5)$$

koşulları ile eşleştiriyoruz. Bu başlangıç koşullarının yanısıra :

Yerdeğiştirme Sınır Değer Problemleri için

$$u_i(\underline{x},t) = \hat{u}_i(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad S \times [0, \infty) \text{ da} \quad (4.2.6)$$

Gerilme Sınır Değer Problemleri için

$$Y_i(\underline{x},t) = t_{ij}(\underline{x},t) n_j(\underline{x}) \quad i=1,2,3 \quad \text{olmak üzere} \quad (4.2.7)$$

$$Y_i(\underline{x},t) = \hat{Y}_i(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad S \times [0, \infty) \text{ da} \quad (4.2.8)$$

Karışık Sınır Değer Problemi için

$$u_i(\underline{x},t) = \hat{u}_i(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad S_u \times [0, \infty) \text{ da}$$

$$Y_i(\underline{x},t) = \hat{Y}_i(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad S_t \times [0, \infty) \text{ da} \quad (4.2.9)$$

sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız. Burada $\hat{U}_i(\underline{x}, t)$ ve $\hat{Y}_i(t)$ verilmiş fonksiyonlar, S_u ve S_y B bölgesinin sınırını oluşturan S yüzeyinin tamamlayıcı alt parçalarıdır. Yani S_u ve S_y yüzeylerinin arakesitleri boş birleşimleri S yüzeyidir.

4.3. ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİNİN POZİTİF DEFINİTLİĞİ

Şekil değiştirme enerjisi, şekil değiştirme nedeni ile cisimde depolanan enerjidir ve dinamik hal için

$$P(t) = \iint_{B-\infty}^t t_{ij}(\underline{x}, \tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\underline{x}, \tau) d\tau dV \quad (4.3.1)$$

olarak tanımlanır. (4.2.5) başlangıç koşulları gözönüne alınarak (4.2.2) bünye bağıntılarından yerine koyarsak

$$P(t) = \iiint_B \int_0^t \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) \{ \lambda \theta(\underline{x}', \tau) \dot{\theta}(\underline{x}, \tau) + 2\mu \epsilon_{ij}(\underline{x}', \tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\underline{x}, \tau) \} d\tau dV' dV \quad (4.3.2)$$

elde edilmektedir. Burada

$$\theta(\underline{x}, t) = \epsilon_{11}(\underline{x}, t) + \epsilon_{22}(\underline{x}, t) + \epsilon_{33}(\underline{x}, t)$$

dir.

(4.3.2) ifadesinde zaman üzerindeki integral hesaplanabilir. Bunu göstermek için bu integralin sonucunun

$$P(t) = \frac{1}{2} \iiint_B \int_0^t \alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) \{ \lambda \theta(\underline{x}', t) \theta(\underline{x}, t) + 2\mu \epsilon_{ij}(\underline{x}', t) \epsilon_{ij}(\underline{x}, t) \} dV' dV \quad (4.3.3)$$

olduğunu söylüyoruz. $\alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) = \alpha(|\underline{x}' - \underline{x}|)$ olduğu gözönüne tutulursa (4.3.3) ve (4.3.2) ifadelerinin türevlerinin aynı olduğu görülür. Bu da (4.3.3) ile (4.3.2) nin aynı olduğu anlamına gelir.

Bu paragrafta amacımız (4.3.3) ile verilen şekil değiştirme enerjisinin herhangi bir şekil değiştirme alanı için pozitif olmasını güvence altına alacak koşulları vermektedir. Bu koşulları elde etmek üzere ilk olarak bir lema vermek istiyoruz. Bu lema tek boyutlu durumlar için YOSIDA [44] (sh: 132) tarafından verilmiş teoremin üç boyutlu durumlar için genelleştirilmesinden başka birşey değildir. Teorem üç boyutlu durum için genelleştirilmiş olmakla birlikte, n boyutlu durum için herhangi bir ekleme yapılmaksızın geçerlidir.

LEMA : B bölgesi üç boyutlu Euclides Uzayında, sınırı genelleştirilmiş Green-Gauss Eşitliğinin geçerli olduğu sonlu sayıda yüzeylerin birleşiminden oluşmuş açık ve sınırlı bir bölge olsun. $s, t \in B$ olmak üzere $K(s, t) \in C^0(B \times B)$ karmaşık değerli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $f(s)$ B bölgesinde tanımlı ve ölçülebilir herhangi bir karmaşık değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$I = \iint_B K(s, t) f(s) \bar{f}(t) ds dt \quad (4.3.4)$$

şeklinde tanımlanan I sayısının $f(s)$ fonksiyonunun seçiminden bağımsız olarak pozitif olması için gerek ve yeter koşul herhangi $s_i \in B$ noktaları ve herhangi karmaşık f_i sayıları ile

$$\sum_{i=1}^n K(s_i, s_j) f_i \bar{f}_j > 0 \quad (4.3.5)$$

olmasıdır.

İSPAT : B bölgesinin herbirinde bir s_i noktası bulunan, arakesitleri boş ve birleşimlerinin B bölgesi ile

farkının ölçüsü sıfır alt bölgelere bölüyoruz. Bu bölgeleri K_i , ölçülerini Γ_i ile göstereceğiz. Buna göre (4.2.4) integrali $n \rightarrow \infty$ $\Gamma_i \rightarrow 0$ olmak üzere

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n K(\xi_i, \xi_j) f(\xi_i) \bar{f}(\xi_j) \Gamma_i \Gamma_j$$

olarak yazılabilir. İspatın yeterlik bölümü için $f(\xi_i) = \xi_i$ tanımlıyoruz. Bu hazırlıkla (4.3.5) koşulunun sağlanması halinde $I > 0$ elde edileceği açıktır.

İspatın gerek bölümü için olmayana ergi yönteminden yararlanacağız. Daha açık olarak söylemek gerekirse, (4.3.5) koşulunun sağlanması durumunda (4.3.4) integralini sıfırdan küçük kılacak bir fonksiyon vererek (4.3.5) koşulunun (4.3.4) ile verilen I sayısının pozitif olması için gerekli olduğunu göstermiş olacağız. Bu amaçla şu hazırlığı yapıyoruz : Bir $c \in B$ noktası için c merkezli η yarıçaplı küreyi $D(c, \eta)$ ve $\varepsilon (\varepsilon > \eta)$ yarıçaplı küreyi $E(c, \varepsilon)$ ile gösterelim. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\theta_{\eta, \varepsilon}(\xi, \xi) \in C^0(B)$ fonksiyonu tanımlıyoruz.

- $D(c, \eta)$ küresinde $\theta_{\eta, \varepsilon}(\xi, \xi) = 1$
- $E(c, \varepsilon)$ küresi ile $D(c, \eta)$ küresi arasında azalan bir fonksiyon (4.3.6)
- $E(c, \varepsilon)$ küresinin dışında $\theta_{\eta, \varepsilon}(\xi, \xi) = 0$

(4.3.6) ile tanımlanan $\theta_{\eta, \varepsilon}(\xi, \xi)$ fonksiyonları ve $\xi \in B$, $E(\xi_i, \xi_i) \subset K_i$ olmak üzere herhangi karmaşık ξ_i sayıları ile

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \theta_{\eta, \varepsilon_i}(\xi, \xi_i) \quad (4.3.7)$$

fonksiyonunu tanımlıyoruz. Amacımız (4.3.5) koşulunun sağ-

lanmaması durumunda (4.3.7) ile tanımlanan $\theta(\underline{s})$ fonksiyonunun (4.3.4) ile tanımlanan I sayısını negatif yapacağını göstermektir. (4.3.4) integralini (4.3.7) fonksiyonu ile daha açık yazmak için B bölgesinde $\underline{s}_i$ merkezli η_i yarıçaplı küreleri D_i , $\underline{s}_i$ merkezli ξ_i yarıçaplı küreleri E_i ile ve bu iki küre arasında kalan bölgeyi de F_i 'lerle gösterelim. Buna göre (4.3.4) integrali

$$I(\theta) = \sum_{i,j=1}^n \iint_{D_i \cap E_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \theta(\underline{s}) \bar{\theta}(\underline{t}) d\underline{s} d\underline{t} + \sum_{i,j=1}^n \iint_{F_i \cap F_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \theta(\underline{s}) \bar{\theta}(\underline{t}) d\underline{s} d\underline{t} \quad (4.3.8)$$

şeklinde yazılacaktır. Burada $F_i \times F_j$ bölgesi üzerindeki integral için bir kestirme verilebilir. $\theta(\underline{s})$ fonksiyonunu tanımlarken kullanılan $\theta_{\eta_i, \xi_i}(\underline{s}, \underline{s}_i)$ fonksiyonları tanımları (4.3.6) gereği

$$0 < \theta_{\eta_i, \xi_i}(\underline{s}, \underline{s}_i) < 1$$

koşulunu sağlayacakları için, $F_i \times F_j$ bölgesinde

$$|\theta(\underline{s}) \bar{\theta}(\underline{t})| < |\xi_i \bar{\xi}_j| \quad \underline{s} \in F_i, \underline{t} \in F_j \quad (4.3.9)$$

yazılabilir. $K(\underline{s}, \underline{t})$ fonksiyonunun $B \times B$ bölgesinde aldığı en büyük değeri M ile gösterelim :

$$M = \sup_{\underline{s}, \underline{t} \in B} |K(\underline{s}, \underline{t})| \quad (4.3.10)$$

Γ_{ij} ile $F_i \times F_j$ bölgelerinin ölçüsünü, Γ ile bunların en büyüğünü gösterelim. Bu hazırlıkla

$$\iint_{F_i \cap F_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \theta(\underline{s}) \bar{\theta}(\underline{t}) d\underline{s} d\underline{t} \leq \left| \iint_{F_i \cap F_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \theta(\underline{s}) \bar{\theta}(\underline{t}) d\underline{s} d\underline{t} \right| \leq$$

$$\iint_{F_i F_j} |K(s, t)| |\theta(s) \theta(t)| ds dt < M \Gamma_{ij} |\bar{f}_i \bar{f}_j|$$

yazılabileceği görülmektedir. Buna göre

$$\sum_{i,j=1}^n \iint_{F_i F_j} K(s, t) \theta(s) \theta(t) ds dt < M \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij} |\bar{f}_i \bar{f}_j| < M \Gamma \left(\sum_{i=1}^n |\bar{f}_i| \right)^2 \quad (4.3.11)$$

elde edilmektedir.

Şimdi $D_i \times D_j$ bölgelerinde hesaplanan integral için bir kestirme vermek istiyoruz. Bu amaçla

$$\begin{array}{ll} |\zeta| < \eta_i & \text{olmak üzere } \underline{s} = \underline{s}_i + \underline{\zeta} \quad \underline{s} \in D_i \\ |\underline{\zeta}| < \eta_j & \text{olmak üzere } \underline{t} = \underline{t}_j + \underline{\zeta} \quad \underline{t} \in D_j \end{array}$$

gösterimini kullanmak istiyoruz. D_j kürelerinin ve dolayısı ile $D_i \times D_j$ bölgelerinin ara kesitlerinin boş olduğunu gözönünde bulundurarak $D_i \times D_j$ bölgeleri üzerindeki integrali

$$\sum_{i,j=1}^n \iint_{D_i D_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \bar{f}_i \bar{f}_j ds dt = \iint_B \sum_{i,j=1}^n K(\underline{s}_i + \underline{\zeta}, \underline{t}_j + \underline{\zeta}) \bar{f}_i \bar{f}_j d\underline{\zeta} \quad (4.3.12)$$

olarak yazabiliriz.

$$\sum_{i,j=1}^n K(\underline{s}_i, \underline{t}_j) \bar{f}_i \bar{f}_j < 0$$

olabileceği varsayılmıştı. Buna göre D_i kürelerinin çaplarını gösteren η_i sayıları uygun seçilirse $K(\underline{s}, \underline{t}) \in C^0(B \times B)$ seçildiğinden (4.3.12) ifadesinin integrantının negatif yapılabileceği sonucuna varılmaktadır. Buna göre

$$\sum_{i,j=1}^n \iint_{D_i D_j} K(\underline{s}, \underline{t}) \xi_i \bar{\xi}_j d\underline{s} d\underline{t} < 0 \quad (4.3.13)$$

elde edilebilecektir. Öte yandan

$$\lim_{\xi_i \rightarrow \eta_i} \Gamma_{ij} \rightarrow 0$$

olacağından (4.2.11) sonucu gözönünde tutularak $F_i \cdot F_j$ bölgeleri üzerindeki integralin sonucunun sıfıra istenildiği kadar yaklaştırılabileceği ortaya çıkmaktadır. Bu sonuç ve (4.2.13) gözönüne alınırsa

$$I(\theta) < 0 \quad (4.3.14)$$

elde edilecektir. Buna göre (4.3.4) ile tanımlanan I sayısını (4.3.5) koşulunun sağlanmaması durumunda negatif yapan bir θ fonksiyonu göstermiş bulunuyoruz. Bu ise (4.3.4) ile tanımlanan I sayısının $f(\underline{s})$ fonksiyonunun seçiminden bağımsız olarak pozitif olması için (4.3.5) koşulunun gerek olduğu anlamına gelir. Q.E.D.

Bu lemaya dayanarak tek boyutlu durumlar için yine YOSIDA [44] tarafından verilmiş bir özelliği yerel olmayan teori açısından önemli olduğu için tekrar vermek istiyoruz.

TEOREM : Yukarıdaki lemanın koşulları sağlanmak üzere (4.3.4) ile verilen I sayısı $f(\underline{s})$ fonksiyonunun seçiminden bağımsız olarak pozitif ise

$$K(\underline{s}, \underline{s}) > 0 \quad (4.3.15)$$

ve

$$K(\underline{s}, \underline{t}) = \overline{K}(\underline{t}, \underline{s}) \quad (4.3.16)$$

dir.

İSPAT : Yukarıda ispatlanan lemaya dayanarak herhangi bir $s_0 \in B$ noktası ve herhangi $\underline{f}_0 \neq 0$ karmaşık sayısı ile

$$K(\underline{s}_0, \underline{s}_0) \underline{f}_0 \overline{\underline{f}_0} > 0$$

yazabiliriz. $\underline{f}_0 \overline{\underline{f}_0} > 0$ olduğuna göre

$$K(\underline{s}_0, \underline{s}_0) > 0$$

elde edilecektir.

Yine yukarıda ispatlanan lemaya dayanarak herhangi $s_1, s_2 \in B$ noktaları ve herhangi $\underline{f}_1, \underline{f}_2 \neq 0$ karmaşık sayıları ile

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) \underline{f}_1 \overline{\underline{f}_2} + K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) \underline{f}_2 \overline{\underline{f}_1} + K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) \underline{f}_1 \overline{\underline{f}_1} + K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) \underline{f}_2 \overline{\underline{f}_2} > 0$$

yazılabilir.

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_1) \underline{f}_1 \overline{\underline{f}_1} > 0, \quad K(\underline{s}_2, \underline{s}_2) \underline{f}_2 \overline{\underline{f}_2} > 0$$

olduğu bilindiğine göre

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) \underline{f}_1 \overline{\underline{f}_2} + K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) \underline{f}_2 \overline{\underline{f}_1} = J(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$$

ifadesinin gerçek sayı olduğu sonucuna varılır. $\underline{f}_1 = 1$ ve $\underline{f}_2 = 1$ seçilirse

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) + K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = J(1, 1) \quad (4.3.17)$$

olarak tanımlanan $J(1, 1)$ sayısı gerçek sayı olacaktır.

$$\underline{f}_1 = 1, \quad \underline{f}_2 = \sqrt{-1} = i \quad \text{seçilirse}$$

$$-iK(\underline{s}_1, \underline{s}_2) + iK(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = J(1, i) \quad (4.3.18)$$

sayısı da gerçek sayı olacaktır.

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) = \alpha_1 + i\beta_1, \quad K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = \alpha_2 + i\beta_2$$

diyelim. Buna göre

$$J(1, i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2) \rightarrow \beta_1 = -\beta_2 = \beta \quad (4.3.19)$$

$$J(i, 1) = (\beta_1 - \beta_2) + i(\alpha_1 - \alpha_2) \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

elde edilmektedir. Buradan

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) = \alpha + i\beta \quad K(\underline{s}_2, \underline{s}_1) = \alpha - i\beta \quad (4.3.20)$$

$$K(\underline{s}_1, \underline{s}_2) = \overline{K(\underline{s}_2, \underline{s}_1)}$$

bulunmaktadır. Q.E.D.

Şekil değiştirme enerjisinin pozitif definitliği için hazırlılığımıza devam ediyoruz. İntegral denklem teorisinden bilindiği gibi (POGORZELSKI [45]) Ω sınırlı bir bölge olmak üzere

$$g(\underline{s}) = \int_{\Omega} K(\underline{s}, \underline{t}) f(\underline{t}) d\underline{t} \quad (4.3.21)$$

şeklindeki ifadelere bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonu ise 1.Tür Fredholm İntegral Denklemi adı verilir. Bu tür denklemlerde

$$\int_{\Omega} K(\underline{s}, \underline{t}) \psi_n(\underline{t}) d\underline{t} = \frac{1}{\chi_n} \psi_n(\underline{s}) \quad (4.3.22)$$

eşitliğini sağlayan $\psi_n(s)$ fonksiyonları varsa bunlar "ÖZFONKSİYON", χ_n 'ler "ÖZDEĞERLER" olarak adlandırılır. Çekirdek adı verilen $K(\underline{s}, \underline{t})$ fonksiyonu için (4.3.4) ile tanımlanan I sayısı pozitif oluyorsa, χ_n 'lerin sonsuza artan pozitif sayılar dizisi oluşturdukları, sonluda yığılma noktaları olmadığını bu özdeğerlerle eşleşen özfonksiyonların karesi integrale edilebilen fonksiyonlar uzayında bir tam ortonormal baz oluşturduğunu biliyoruz. Buna göre böyle bir çekirdek

$$K(\underline{s}, \underline{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\chi_n} \psi_n(\underline{s}) \psi_n(\underline{t}) \quad (4.3.23)$$

olarak ifade edilebilecektir. Ω bölgesinde karesi integre edilebilen herhangi bir f fonksiyonu

$$f_n = \int_{\Omega} f(\underline{s}) \psi_n(\underline{s}) d\underline{s} \quad (4.3.24)$$

sayıları ile

$$f(\underline{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n(\underline{s}) \quad (4.3.25)$$

olarak ifade edilebilir. f_n sayılarına $f(s)$ fonksiyonunun

$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazına göre Genelleştirilmiş Fourier Katsayıları adı verilir. $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ bazı tamsa

$$\int_{\Omega} |f(\underline{s})|^2 d\underline{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (4.3.26)$$

olduğu ispatlanabilir.

İntegral denklemler teorisinden alınan bu hatırlatmalardan sonra (4.3.3) ile verilen şekil değiştirme enerjisine uygun bir görünüm vermek istiyoruz. $\alpha(|\underline{x}-\underline{x}'|)$ etkileşme fonksiyonu için (4.3.4) ile tanımlanan I sayısının pozitif olduğunu varsayalım. Buna göre α_n 'ler sonsuza artan pozitif sayılar dizisi ve $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ B bölgesinde karesi integre edilebilen fonksiyonlar uzayında bir tam ortonormal baz olmak üzere $\alpha(|\underline{x}-\underline{x}'|)$ etkileşme fonksiyonu

$$\alpha(|\underline{x}-\underline{x}'|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi_n(\underline{x}) \psi_n(\underline{x}') \quad (4.3.27)$$

olarak ifade edilebilecektir.

$$E_{ij}^n(t) = \int_B \epsilon_{ij}(\underline{x}, t) \psi_n(\underline{x}) dV \quad (4.3.28)$$

tanımlıyalım. Buna göre (4.3.3) ile verilen şekil değiştirme enerjisi

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left\{ \lambda (E_{11}^n + E_{22}^n + E_{33}^n)^2 + 2\mu E_{ij}^n E_{ij}^n \right\}$$

veya daha açık olarak

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left\{ (\lambda + 2\mu) (E_{11}^{n2} + E_{22}^{n2} + E_{33}^{n2}) + 4\mu (E_{12}^{n2} + E_{13}^{n2} + E_{23}^{n2}) \right. \\ \left. + 2\lambda (E_{11}^n E_{22}^n + E_{11}^n E_{33}^n + E_{22}^n E_{33}^n) \right\}$$

yazılabilir. $\alpha_n > 0$ olduğuna göre herhangi $E_{ij}^n(t)$ 'lerle $P(t) > 0$ olması için

$$Q(t) = (\lambda + 2\mu)(E_{11}^{n^2} + E_{22}^{n^2} + E_{33}^{n^2}) + 4\mu(E_{12}^{n^2} + E_{13}^{n^2} + E_{23}^{n^2}) + 2\lambda(E_{11}^n E_{22}^n + E_{11}^n E_{33}^n + E_{22}^n E_{33}^n) > 0$$

yeterli olacaktır. $Q(t)$ ifadesi E_{ij}^n 'ler cinsinden kuadratik bir ifadedir ve benzerine yerel elastisitenin bazı teklik teoremlerinde rastlanmaktadır. Bu ifadenin herhangi E_{ij}^n 'ler için pozitif olması koşullarını incelemek için onu matris formunda yazmak yararlı olacaktır. Bu amaçla

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} E_{11}^n \\ E_{22}^n \\ E_{33}^n \\ \sqrt{2}E_{12}^n \\ \sqrt{2}E_{13}^n \\ \sqrt{2}E_{23}^n \end{bmatrix}$$

matrisi ve vektörü tanımlıyoruz. Buna göre

$$Q(t) = \underline{\eta}^T \underline{E} \underline{\eta}$$

yazılabilir. Bilindiği gibi $Q(t)$ ifadesinin pozitif definit olması için $\underline{E}$ matrisinin özdeğerlerinin pozitif olması gerek ve yeter koşuldur. $\underline{E}$ matrisinin özdeğerlerinin

$$3\lambda + 2\mu \text{ ve } 2\mu \quad (4.3.30)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Buna göre yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin şekil değiştirme enerjisinin pozitif definit olmasını güvence altına alan

şu teoremi ispat etmiş oluyoruz.

TEOREM : (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4), (4.2.5) ve (4.2.9) denklemleri ile tanımlanan yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer, elastodinamiğin (4.3.3) ile tanımlanan şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa pozitif definittir :

1) α_n sonsuza artan pozitif sayılar ve $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ karesi integre edilebilen fonksiyonlar uzayında tam bir ortonormal baz olmak üzere etkileşme fonksiyonu

$$\alpha(|\underline{x} - \underline{x}'|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi_n(\underline{x}) \psi_n(\underline{x}')$$

yapısındadır.

2) Cismin yerel elastik davranışını belirleyen λ, μ Lamé Sabitleri

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0$$

koşullarını sağlamaktadır.

4.4. KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİ :

Bu bölümde yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin başlangıç koşulları sıfır karışık sınır değer probleminin çözümünün tek olması için şekil değiştirme enerjisinin pozitif definit olmasının yeterli olacağını göstereceğiz. Başlangıç koşullarını sıfır seçmemizin nedeni, şekil değiştirme enerjisini olabildiğince yalın durumda inceleme olanağını elde edebilmektir. Yine aynı amaçla bünye denklemini homogen ve izotrop aldık.

Yerel elastisitede şekil değiştirme enerjisinin pozitif definitliğine dayanan teklik teoremleri olmayana ergi yönteminden yararlanırlar. Burada biz de aynı yolu izleyeceğiz. Bir karışık sınır değer problemi için iki çözüm olduğunu varsayarak bunların aynı olduğunu göstereceğiz.

(4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) denklemlerini ve (4.2.5) başlangıç koşulları ile (4.2.9) sınır koşullarını sağlayan iki çözüm $(U'_i, \xi'_{ij}, t'_{ij})$ ve $(U''_i, \xi''_{ij}, t''_{ij})$ olsun. Lineerlik nedeni ile

$$u_i = u'_i - u''_i, \quad \xi_{ij} = \xi'_{ij} - \xi''_{ij}, \quad t_{ij} = t'_{ij} - t''_{ij} \quad (4.4.1)$$

olarak tanımlanan (U_i, ξ_{ij}, t_{ij})

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i(x, t) &\equiv 0 & x \in S_y, \quad t \in (-\infty, \infty) & \quad i=1,2,3 \\ \hat{U}_i(x, t) &\equiv 0 & x \in S_t, \quad t \in (-\infty, \infty) & \quad i=1,2,3 \\ f_i(x, t) &\equiv 0 & x \in B, \quad t \in (-\infty, \infty) & \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

koşulları ile eşleşen çözüm olacaktır. Buna göre

$$\int_{S_0} \int_0^t Y_i(x, z) \dot{U}_i(x, z) dz ds + \int_{B_0} \int_0^t f_i(x, z) \dot{U}_i(x, z) dz dv = 0 \quad (4.4.3)$$

açık bir özdeşliktir. $Y_i = t_{ij} n_j$ olduğunu hatırlıyarak S yüzeyi üzerindeki integrali Green-Gauss Teoremini kullanarak düzenlemek istiyoruz.

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_B t_{ij}(x,z) n_j(x,z) \dot{u}_i(x,z) dz dv &= \int_0^t \int_B [t_{ij}(x,z) \dot{u}_i(x,z)]_{,j} dz dv \\
 &= \int_0^t \int_B \{t_{ij,j}(x,z) \dot{u}_i(x,z) + t_{ij}(x,z) \dot{u}_{ij}(x,z)\} dz dv
 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Burada $t_{ij} = t_{ji}$ olduğu gözönüne alınırsa, $U_{i,j}$ yerine $\frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) = \varepsilon_{ij}$ alınabileceği görülür. Bu sonuçlar (4.4.3) de yerleştirilirse

$$\int_0^t \int_B t_{ij}(x,z) \dot{\varepsilon}_{ij}(x,z) dz dv + \int_0^t \int_B [t_{ij,j}(x,z) + f_i(x,z)] \dot{u}_i(x,z) dz dv \equiv 0 \quad (4.4.5)$$

elde edilir. Burada ilk integral şekil değiştirme enerjisi göstermektedir. İkinci integrali değerlendirmek için (4.2.4) denklemini gözönüne alıyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_B [t_{ij,j}(x,z) + f_i(x,z)] \dot{u}_i(x,z) dz dv &= \int_0^t \int_B f(x) \ddot{u}_i(x,z) \dot{u}_i(x,z) dz dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_B f(x) \dot{u}_i(x,t) \dot{u}_i(x,t) dv
 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

elde edilmektedir. Bu son ifade B cisminin kinetik enerjisi ve pozitif definittir. Sonuç olarak (4.4.3) özdeşliği

$$\begin{aligned}
 \int_B \int_B \alpha(|x-x'|) \{ \lambda \theta(x',t) \theta(x,t) + 2\mu \varepsilon_{ij}(x',t) \varepsilon_{ij}(x,t) \} dv' dv \\
 + \int_B f(x) \dot{u}_i(x,t) \dot{u}_i(x,t) dv \equiv 0
 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

olarak yazılabilir. Bu özdeşliği oluşturan her iki integral de pozitif definit ifadeler olduğundan, bu özdeşliğin sağlanabilmesi ancak ve ancak

$$\varepsilon_{ij}(x,t) \equiv 0 \quad \text{ve} \quad \dot{u}_i(x,t) \equiv 0 \quad x \in B, t \in (-\infty, \infty) \quad (4.4.8)$$

ile olanaklıdır. (4.2.2) denklemi nedeni ile

$$t_{ij}(x,t) \equiv 0 \quad x \in B, t \in (-\infty, \infty) \quad (4.4.9)$$

olacaktır. Bu sonuçlardan $(U'_i, \varepsilon'_{ij}, t'_{ij})$ ve $(U''_i, \varepsilon''_{ij}, t''_{ij})$ çözümleri arasında yalnız sabit ötemeler ve rijit dönme-ler farkı olabileceğini anlıyoruz.

Verilen ispat karışık sınır değer problemi için olmakla birlikte, yerdeğiştirme ve gerilme sınır değer problemleri için teklik özel birer durum olarak elde edilebilirler.

4.5.SONUÇ:

Bu bölümde yerel olmayan, homogen, izotrop, lineer elastodinamiğin başlangıç koşulları sıfır olan yerdeğiştirme, gerilme ve karışık sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliğini güvence altına alan koşullar verilmiştir. Bu koşullar cismin elastiklik özelliğini belirleyen katsayılar ve yerel olmama özelliğini belirleyen fonksiyon üzerinde olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır. Yerel olmama özelliğini belirleyen etkileşme fonksiyonunun, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon uzayında bir tam baz kuran fonksiyon cümlesi ve α_n 'ler sonluda yığılma noktası olmayan sonsuz sayıda pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$\alpha(|\underline{x}-\underline{x}'|)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \psi_n(\underline{x}) \psi(\underline{x}') \quad (4.5.1)$$

yapısında olması, elastik sabitlerin de

$$3\lambda+2\mu>0 \quad \mu>0 \quad (4.5.2)$$

koşullarını sağlaması durumunda şekil değiştirme enerjisinin pozitif definit olacağını, bunun da tekliği güvence altına alacağını gösterdik. (4.2.2) denkleminde açıkça görüleceği gibi, yerel elastisiteye dönebilmek için $\alpha(|\underline{x}-\underline{x}'|)$ etkileşme fonksiyonunun Dirac Ölçüsüne sahip olması gerekir. Bu durumda bütün $\alpha_n=1$ dir , $\{\psi\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon cümlesi herhangi bir ve (4.5.1) koşulları ile uyum halindedir.

Elastisitenin yerel olmayan biçimi için ilk olduğunu sandığımız bu bölüm birçok yönden tekrar ele alınabilir. Herşeyden önce eksenlerin paralel ötelenmeleri ve döndürülmeleri durumunda etkileşme fonksiyonunun değişmeden kalması gereğinin özfonksiyonlar üzerine getireceği kısıtlamalar incelenebilir. Bu nokta, bu çalışmada gözden uzak tutulmuştur. İkinci olarak etkileşme fonksiyonunun özdeğerlerinden bazısının sıfır olması olasılığı incelenebilir. Bu, kesilmiş cisimlerde, kendini özellikle ayırma yüzeyine yakın yerlerde hissettiren yerdeğiştirme hakkında fikir verir. Bu iki nokta da teklik açısından ele alınmadan önce kendi başlarına incelenmelidir.

Bu bölümde verilen teklik incelemesinde yerel olmayan elastisitenin çözümlerinin aranması gereken fonk-

siyon uzayından açık olarak bahsedilmemiş, kısaca bu uzay karesi integre edilebilen fonksiyonlar uzayı olarak alınmıştır. Bu fonksiyon uzayının gerçekte ne olması gerektiğine karar verebilmek için, yerel olmayan elastisitenin varlık teorisinin gelişmesi gerektiğine inanıyoruz. Bu konuda da henüz herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Yerel olmayan teorinin limitte yerel teoriyi verebilmesi için etkileşme fonksiyonunun

$$\int_B \alpha(|x-x'|) dv' = 1 \quad (4.5.3)$$

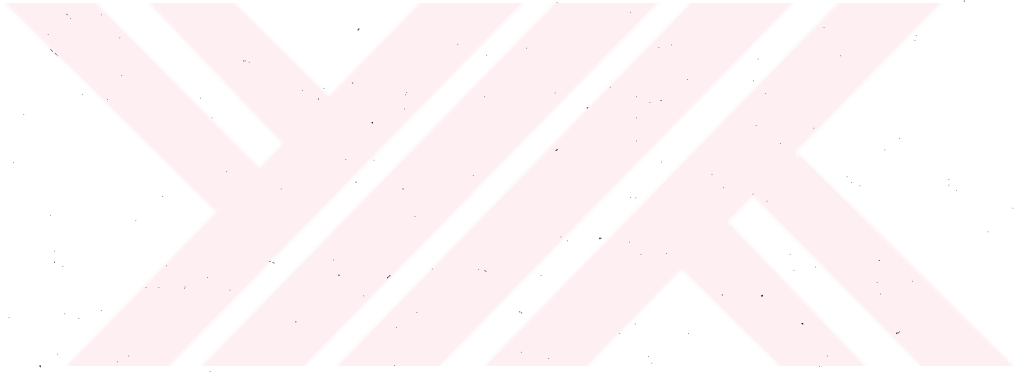
koşulunu sağlaması gerekir. Bu durum, Γ_B B bölgesinin ölçüsünü göstermek üzere etkileşme fonksiyonunun özdeğerlerinden birinin 1 ve bu özdeğerle eşleşen özfonksiyonun $\frac{1}{\sqrt{V_B}}$ olması biçiminde yorumlanabilir. Öte yandan simetrik çekirdeklerin özfonksiyonlarının ortogonal oldukları ([45], Sh.70) gözönüne alınırsa, etkileşme fonksiyonunun özfonksiyonlarının

$$\int_B \psi_n dv = 0 \quad (4.5.4)$$

koşulunu sağlamaları gerekir. Kendi başına incelenmesi gereken bu durumun teklik teoremine etkisi gözönüne alınmamıştır.

Etkileşme fonksiyonunda belirlemesi gereken bir etkileşme parametresi ortaya çıkmaktadır. Bu parametrenin tekliğe etkisi gözönüne alınmamıştır.

İspatlanan teklik teoreminde B bölgesi sınırlı alınmıştır. Sonsuza uzanan bölgeler için teklik ayrıca incelenmek gerekir. Lemanın ispatında etkileşme fonksiyonunun supremumun sonlu olduğu kullanıldığından, bölgede sonsuza giden etkileşme fonksiyonları için verdiğimiz ispat geçerli değildir. Bu durumda tekliğin yeniden incelenmesi gerektiği açıktır.



YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNDE ÇATLAK PROBLEMİ

5.1. GİRİŞ

Yerel (klâsik) elastisitede çözülmüş çatlak problemlerinde gerilmenin çatlak ucunda karekök mertebesinde tekilliğe sahip olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Sezgilerimize ve deneylere aykırı olan bu duruma bir çok araştırmacı değişik açıklıklar getirmişlerdir. Yakın geçmişte geliştirilen yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak çatlak ucundaki gerilmenin sonlu kalacağı gösterilmiştir. Çatlak problemleri içinde "Birinci Mod" olarak adlandırılan normal gerilme etkisindeki çatlak problemi yerel olmayan teori kullanılarak ERİNGEN, SPEZIALE ve KİM [25], tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada çözüm, sınır koşullarının uygulanması ile elde edilen dual integral denklemlerin sayısal yöntemlerle çözülmesi ile elde edilmiştir. "İkinci Mod" olarak adlandırılan çatlak doğrultusuna dik kayma gerilmesi ile yüklü çatlak problemi yerel olmayan teori kullanılarak ERİNGEN [26] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada, sınır koşullarının uygulanması ile ortaya çıkan dual integral denklemler ikinci tür Fredholm integral denklemine dönüştürülerek yaklaşık olarak çözülmüştür. Normal gerilme etkisindeki çatlak problemi ARI [19] tarafından tekrar ele alınmıştır. Bu çalışmada, etkileşme nedeni ile sınır koşullarının yeniden düzenlenmesi gerektiğine işaret edilerek deneylerle daha iyi uyum gösteren

sonuçlar elde edilmiştir. Bu üç çalışmada da maksimum gerilme sonludur, böylece kırılma hipotezlerinin kullanılması olanaklı kılınmıştır.

Sunacağımız çalışma yerel olmayan teori kullanılarak çözülmüş çatlak problemlerinin dizisini tamamlama amacını gütmektedir. "Üçüncü Mod" olarak adlandırılan çözeceğimiz bu problemde ortaya çıkan dual integral denklemi [26] da izlenen yolla çözmeye çalışacağız.

5.2. YEREL OLMAYAN ELASTİSİTENİN TEMEL DENKLEMLERİ

Yerel olmayan homogen, izotrop, lineer elastostatığın sıfır kütle kuvvetleri ile eşleşen temel denklemleri:

$$\text{Kinematik Bağıntılar} : e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (5.2.1)$$

$$\text{Denge Denklemleri} : t_{kl,k} = 0 \quad (5.2.2)$$

$$\text{Bünye Denklemleri} :$$

$$t_{kl}(x) = \int_B \alpha(|x-x'|) \{ \lambda e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(x') \} dv' \quad (5.2.3)$$

olarak sıralanabilir. Burada $\alpha(|x-x'|)$ sadece x ve x' noktaları arasındaki uzaklığın fonksiyonu olan "Etkileşme Çekirdeği" dir. λ , μ Lamé Katsayıları, δ_{kl} Kronecker Delta'sıdır. Bu çalışmada etkileşme çekirdeğini

$$\alpha(|x-x'|) = \pi^{-3/2} \left(\frac{B}{a}\right)^3 \exp\left\{-\left(\frac{B}{a}\right)^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]\right\} \quad (5.2.4)$$

seçeceğiz. β bir sabit, Q karakteristik uzunluk (örneğin atomlar arası uzaklık) tur. (5.2.3) bünye denklemi (5.2.2) denge denkleminde yerleştirilirse, sınırların sonsuzda olması ve sonludaki yüzeylere etkiyen gerilmelerde süreksizlik olmaması durumunda

$$\int_B \alpha(|z-z'|) \{ \lambda e_{rr}(z') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(z') \}_{,k} dv' = 0$$

$$\rightarrow \{ \lambda e_{rr}(z') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(z') \}_{,k} = 0 \quad (5.2.5)$$

elde edilmektedir. Bu sonuç yerel elastisite teorisinin denge denklemidir ve yerel olmayan teoride çatlak problemlerinin çözümü için oldukça yararlıdır.

5.3. ÇATLAK DOĞRULTUSUNDA KAYMA ETKİSİNDE ÇATLAK

Tüm uzayı dolduran elastik bölgede $|x| \leq l$ ve $y=0$ da bir çatlak olduğunu ve bu çatlağın $t_{zy} = S$ kayma gerilmesi ile yüklü olduğunu varsayıyoruz. Bu problem için

$$u(x,y,z) \equiv 0, \quad v(x,y,z) \equiv 0, \quad w(x,y,z) = w(x,y) \quad (5.3.1)$$

şeklinde bir yerdeğiştirme alanı öngörmek yeterli olacaktır. Gerçekten bu durumda (5.2.1) den

$$e_{xx} = 0, \quad e_{yy} = 0, \quad e_{zz} = 0, \quad e_{xy} = 0, \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}$$

ve (1.3) den

$$t_{zx}(x,y) = \pi^{-3/2} \left(\frac{\beta}{Q} \right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{\beta}{Q} \right)^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2] \right\} \mu \frac{\partial w(x',y')}{\partial x'} dx' dy' dz'$$

$$t_{xx} = 0, \quad t_{yy} = 0, \quad t_{zz} = 0, \quad t_{xy} = 0 \quad (5.3.2)$$

$$t_{zy}(x,y) = \pi^{-3/2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]\right\} \mu \frac{\partial w(x',y')}{\partial y'} dx' dy' dz'$$

elde edilmektedir. (5.3.2) gerilme alanı (5.2.5) denge denklemlerinde yerleştirilirse

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5.3.3)$$

elde edilmektedir. Bu denklemin çözümü için Fourier Trans-formuna başvuruyoruz [46].

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x,y); x \rightarrow \xi\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{i\xi x} dx = \bar{f}(\xi,y) \\ \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\xi,y); \xi \rightarrow x\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi,y) e^{-i\xi x} d\xi = f(x,y) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

olmak üzere (5.3.3) denkleminin x değişkenine göre Fourier Dönüşümü

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(\xi,y)}{\partial y^2} - \xi^2 \bar{w}(\xi,y) = 0 \quad (5.3.5)$$

olmaktadır. Bu denklemin çözümünün $A(\xi)$ ve $B(\xi)$ bilinmeyen fonksiyonları ile

$$\bar{w}(\xi,y) = A(\xi) e^{-|\xi|y} + B(\xi) e^{|\xi|y} \quad (5.3.6)$$

şeklinde yazılacağını biliyoruz. $y \rightarrow \infty$ için sonsuza gitmeyen bir yerdeğiştirme alanı isteniyorsa $B(\xi) \equiv 0$ alınması gerektiği açıktır. Buna göre ters dönüşümle yerdeğiştirme

alanı $y \geq 0$ için

$$w(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (5.3.7)$$

olarak bulunacaktır. Problemin $x=0$ düzlemine göre simetrik olacağı gözönüne alınır $A(\xi) = A(-\xi)$ sonucuna varılır ve buradan

$$w(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (5.3.8)$$

elde edilir. Söz konusu çatlak için sınır koşullarını

$$t_{yz} = S \quad y=0 \quad |x| < l \quad (5.3.9)$$

$$w(x,y) = 0 \quad y=0 \quad |x| > l$$

olarak alabiliriz. Bu sınır koşullarını kullanmadan önce (5.3.7) yerdeğiştirme ifadesinin $y \geq 0$ için geçerli olduğunu hatırlıyoruz ve $w(x,y) = -w(x,-y)$ olacağını gözönüne alıyoruz. $w(x,y)$, y 'ye göre tek fonksiyon olduğuna göre w_y , y 'nin çift fonksiyonudur. Buna göre (5.3.2)₃ ifadesinde y üzerindeki integrasyon $(0, \infty)$ aralığında yapılabilir.

Buna göre [47] den

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (z-z')^2} dz' = \frac{a}{\beta} \sqrt{\pi}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (y-y')^2} e^{-\xi y'} dy' = e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 y^2} \frac{\beta}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{[\xi - 2(\frac{\beta}{a})y]^2}{4(\frac{\beta}{a})^2}} \{1 - \phi\left[\frac{\xi - 2(\frac{\beta}{a})y}{2(\frac{\beta}{a})}\right]\}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (x-x')^2} \cos(x'\xi) dx' = \frac{a}{\beta} \sqrt{\pi} e^{-\left[\frac{a}{\beta}(\xi/2)\right]^2} \cos(x\xi)$$

oldukları gözönüne alınırsa (5.3.2)₂ de yerleştirilerek $k = \beta/a$ ile

$$t_{zy} = -\mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \xi A(\xi) e^{-\xi y} \left[1 - \phi\left(\frac{\xi - 2k^2 y}{2k}\right) \right] \cos(x\xi) d\xi \quad (5.3.10)$$

elde edilir. (5.3.9) sınır koşullarının uygulanması ile $A(\xi)$ 'yi verecek dual integral denklemler

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi A(\xi) [1 - \phi(\xi/2k)] \cos(x\xi) d\xi &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \quad |x| < l \\ \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(x\xi) d\xi &= 0 \quad |x| > l \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

olarak elde edilir Bu denklemleri boyutsuz hale getirmek için $x = \lambda l$, $\xi l = \zeta$ dönüşümü yapar $\tilde{E} = 2kl$ tanımlarsak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \zeta A(\zeta) [1 - \phi(\zeta/\tilde{E})] \cos(\lambda \zeta) d\zeta &= -l^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \quad |\lambda| < 1 \\ \int_0^{\infty} A(\zeta) \cos(\lambda \zeta) d\zeta &= 0 \quad |\lambda| > 1 \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

denklemlerine ulaşılmaktadır. Burada

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

dir. Bu denklemleri sağlayan $A(\xi)$ bulunduktan sonra $W(x, y)$ (5.3.8) formülü ile elde edilecektir.

5.4. DUAL İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

(5.3.12) tipindeki denklemlerin çözümü için SNEDDON [48]'un ikinci türden Fredholm İntegral Denkleme getirme yolunu denemek istiyoruz. Fakat bundan önce aynı problemin yerel elastisitedeki formülasyonu ile elde edilen dual integral denklemlerle (5.3.12) denklemlerini karşılaştırmak istiyoruz. (5.3.12) denklemlerinde $\xi=0$ konmakla yerel teoremin vereceği dual integral denklemlerin elde edileceği açıktır. Bu denklemler

$$\int_0^{\infty} \xi A_c(\xi) \cos(x\xi) d\xi = -l^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \quad |x| < 1 \quad (5.4.1)$$

$$\int_0^{\infty} A_c(\xi) \cos(x\xi) d\xi = 0 \quad |x| > 1 \quad (5.4.2)$$

dir. Bu denklemlerin çözümünün

$$A_c(\xi) = -l^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \frac{I_1(\xi)}{\xi} \quad (5.4.3)$$

olduğunu biliyoruz [30].

Bu hatırlatmadan sonra (5.4.1) denklemlerini amacımıza uygun bir açıdan yorumlamak istiyoruz. Sonra aynı yorumu (5.3.12) denklemlerine uygulayıp iki denklem takımını karşılaştırmak istiyoruz.

Üzerine gerilme uygulanan çatlakta bir $U(X)$ yerdeğiştirmesi olacaktır. Gerilme dağılışı simetrikse, bu yerdeğiştirme

$$U(x) = \ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A_c(\xi) \cos(x\xi) d\xi \quad (5.4.3)$$

ile verileceğine göre $A_c(\xi)$ bu yerdeğiştirmenin Fourier-Kosinüs dönüşümüdür. Çatlak üzerinde ve çatlak dışındaki gerilme dağılışı ise, bu yerdeğiştirme cinsinden (5.4.3) ve [46]'dan şöyle ifade edilebilir:

$$A_c(\xi) = \ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} U(x) \cos(x\xi) dx .$$

Parça parça integrasyonla

$$\xi A_c(\xi) = -\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} U'(x) \sin(x\xi) dx$$

elde edilmektedir. Bu sonuç (5.4.1) de değerlendirilirse, gerilmenin yerel teoride çatlak açılmasının birinci türevi ile belirlendiği sonucuna varıyoruz. (5.4.2) çözümü (5.4.3) de konursa çatlak açılması

$$U_c(x) = -\ell \frac{S}{\mu} \sqrt{1-x^2} \rightarrow U_c(x) = -\frac{S}{\mu} \sqrt{\ell^2 - x^2} \quad (5.4.4)$$

olarak bulunmaktadır. Şimdi bu yorumu (5.3.12) denklemlerine uygulamak istiyoruz. Bu amaçla ilk olarak $1 - \phi(\epsilon\xi)$ nın $\xi=0$ civarında

$$1 - \phi(\epsilon\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\epsilon\xi)^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}$$

şeklinde bir açılıma sahip olduğunu hatırlıyoruz. Bunu (5.3.12) de yerleştirerek

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(x\xi) \left\{ \xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\epsilon^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} \xi^{2k} \right\} d\xi &= -\ell^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \quad |x| < 1 \\ \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(x\xi) d\xi &= 0 \quad |x| > 1 \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

elde edilmektedir. Bu denklemlerden ikincisi $y=0$ daki yerdeğiştirmeyi verdiğinden simetrik olduğunu varsaydığımız $U(X)$ çatlak açılması

$$U(X) = \ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\beta) \cos(X\beta) d\beta \quad (5.4.6)$$

olarak ifade edilecektir. Fakat yerel olmayan teoride yerdeğiştirme, etkileşmeyi simgeleyen ε 'a bağlı olacağından $A(\beta)$ bilinmeyen fonksiyonunu çatlak açılması cinsinden

$$A(\beta, \varepsilon) = \ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} U(X, \varepsilon) \cos(X\beta) dX \quad (5.4.7)$$

biçiminde yazmak doğru olacaktır. Buna göre (5.4.5) denklemlerini

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\beta, \varepsilon) \cos(X\beta) \left\{ \beta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k-1)(k-1)!} \beta^{2k} \right\} d\beta &= -\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S}{\mu} \quad |X| < 1 \\ \int_0^{\infty} A(\beta, \varepsilon) \cos(X\beta) d\beta &= 0 \quad |X| > 1 \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

şeklinde yeniden düzenlemek doğru olacaktır. Bu denklemlerin çözümü olan $A(\beta, \varepsilon)$ fonksiyonunun $\varepsilon \gg \beta^{-1}$ için analitik olmaktan çıkması gerekir. Zira bu durumda atomsal boyuttan daha küçük çatlak söz konusu olması gerekir. Öteyandan elde olunan çözümün $\varepsilon=0$ için (5.4.2) ile verilen yerel çözüme eşit olması gerekir. (5.4.8) denklemlerine bir yorum getirmek amacı ile $U(X, \varepsilon)$ nun 'nın bir çift fonksiyonu olduğunu varsayarak (5.4.7) dan parça parça integrasyonla

$$\bar{z} A(\bar{z}, \varepsilon) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial U(X, \varepsilon)}{\partial X} \sin(X\bar{z}) d\bar{z} \quad (5.4.9)$$

ve

$$\bar{z}^{2n} A(\bar{z}, \varepsilon) = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\partial^{2n} U(X, \varepsilon)}{\partial X^{2n}} \cos(X\bar{z}) d\bar{z}$$

elde edilmektedir. Burada integral sınırını sonsuz bırakmamızın nedeni, $U(X, \varepsilon)$ fonksiyonunun $X=1$ noktasında gösterebileceği tekillikleri gözönünde bulundurabilmek içindir. (5.4.8) ve (5.4.9) gözönüne alınırsa, yerel olmayan elastisitede gerilmenin çatlak yerdeğiştirmesinin tüm türevleri ile belirlendiği sonucuna ulaşırız. Bu fikrimizi destekleyici olması açısından (5.4.8) denklemlerine pertürbasyon açılımı uygulamak istiyoruz.

$$A(\bar{z}, \varepsilon) = A_0(\bar{z}) + \varepsilon A_1(\bar{z}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{z}) + \dots \quad (5.4.10)$$

şeklindeki bir açılımla (5.4.8) denklemlerine girer ve ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlersek ilk iki terim için

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad \int_0^{\infty} \bar{z} A_0(\bar{z}) \cos(X\bar{z}) d\bar{z} &= -\ell^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} = \sigma & |X| < 1 \\ \int_0^{\infty} A_0(\bar{z}) \cos(X\bar{z}) d\bar{z} &= 0 & |X| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad \int_0^{\infty} \bar{z} A_1(\bar{z}) \cos(X\bar{z}) d\bar{z} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{z}^2 A_0(\bar{z}) \cos(X\bar{z}) d\bar{z} & |X| < 1 \\ \int_0^{\infty} A_1(\bar{z}) \cos(X\bar{z}) d\bar{z} &= 0 & |X| > 1 \end{aligned}$$

elde edilmektedir. İlk takımın çözümü

$$A_0(\beta) = \sigma \frac{J_1(\beta)}{\beta}$$

dır. Bu çözümle ikinci takımı çözmeye çalışalım. [41] den

$$\int_0^\infty \beta^2 A_0(\beta) \cos(x\beta) d\beta = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \beta A_0(\beta) \sin(x\beta) d\beta = \frac{d}{dx} \int_0^\infty J_1(\beta) \sin(x\beta) d\beta = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

olduğuna göre ikinci takım

$$\int_0^\infty \beta A_1(\beta) \cos(x\beta) d\beta = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} (1-x^2)^{-3/2} \quad |x| < 1$$

$$\int_0^\infty A_1(\beta) \cos(x\beta) d\beta = 0 \quad |x| > 1$$

olarak yazılabilmektedir. Bu denklemin çözümü [48] den

$$A_1(\beta) = \frac{2}{\pi} \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 J_0(\beta t) \left\{ \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{(t^2 - \xi^2)(1 - \xi^2)}} \right\} dt \quad (5.4.11)$$

dır. Yine [41] (3.158-11) den

$$\int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{(t^2 - \xi^2)(1 - \xi^2)}} = \frac{E(\eta, \zeta)}{1 - t^2} \quad 0 < t < 1, \quad \eta = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta = t$$

bulunmaktadır. Burada

$$E(\eta, \zeta) = \int_0^\eta \sqrt{1 - \zeta^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \int_0^{\sin \eta} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

olarak tanımlanan 2.tür eliptik integraldir. Buna göre

$$A_1(\beta) = -\frac{2}{\pi} \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 t J_0(\beta t) \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 \alpha}}{1 - t^2} d\alpha \right\} dt \quad (5.4.12)$$

elde edilmektedir. Bu hesaplarda şunu gözliyoruz :

a) Pertürbasyon açılımındaki ikinci terimi ilk terime ait yerdeğiştirmenin ikinci türevi belirlemektedir. Daha büyük terimleri evvelki çözümlere ait yerdeğiştirmelerin türevlerinin belirleyeceği gözükmektedir.

b) İlk terime ait yerdeğiştirme ve bunun türevlerinin $X=1$ deki değerleri giderek artan mertebede tekilliklere sahiptir. Bu durum (5.4.8) denklemlerinin pertürbasyon açılımı yolu ile çözümünü güçleştirmektedir.

Şimdi (5.4.8) denklemlerini çözmek için SNEDDON [48] un 2. tür Fredholm İntegral Denkleme getirme yolunu denemek istiyoruz. (SNEDDON [48] Paragraf 4.6.)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{-2\alpha} [1+k(u)] A(u) J_{\nu}(xu) du &= f(x) & 0 < x < 1 \\ \int_0^{\infty} A(u) J_{\nu}(xu) du &= 0 & x > 1 \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

biçimindeki bir dual integral denklemini sağlayan $A(U)$ fonksiyonunun $-1 < \alpha < 0$ hali için

$$H(x) = \frac{2^{1+2\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} x^{-\nu} \int_0^x \frac{u^{\nu+1} f(u)}{(x^2 - u^2)^{1+\alpha}} du \quad (5.4.14)$$

ve

$$K(x, u) = x^{-\alpha} u^{1+\alpha} \int_0^{\infty} t k(t) J_{\nu-\alpha}(xt) J_{\nu-\alpha}(ut) dt \quad (5.4.15)$$

olarak tanımlanan $H(x)$ ve $K(x, u)$ ile oluşturulan

$$h(x) + \int_0^1 K(x, u) h(u) du = H(x) \quad (5.4.16)$$

2.tür Fredholm İntegral Denkleminin çözümü olan $h(x)$ fonksiyonu ile

$$A(u) = 2^{-\alpha} u^{1+\alpha} \int_0^1 t^{1+\alpha} J_{\nu-\alpha}(ut) h(t) dt \quad (5.4.17)$$

şeklinde elde edileceğini göstermiştir. Bu gösterime uygun olarak (5.4.8) denklemlerini düzenlemek amacı ile

$$\cos(x\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x\beta} J_{-\frac{1}{2}}(x\beta)$$

olduğunu gözönüne alıyoruz. Buna göre $\sqrt{\beta} A(\beta, \varepsilon) = C(\beta, \varepsilon)$ tanımlıyarak (5.4.8) denklemlerini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta C(\beta, \varepsilon) [1 - \phi(\varepsilon\beta)] J_{-\frac{1}{2}}(x\beta) d\beta &= -\frac{\ell^2}{\sqrt{x}} \frac{S}{\mu} & |x| < 1 \\ \int_0^\infty C(\beta, \varepsilon) J_{-\frac{1}{2}}(x\beta) d\beta &= 0 & |x| > 1 \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

şeklinde yeniden yazıyoruz. Buna göre

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \nu = -\frac{1}{2}, \quad k(\beta) = -\phi(\varepsilon\beta), \quad f(x) = -\frac{\ell^2}{\sqrt{x}} \frac{S}{\mu}$$

ile

$$H(x) = -\ell^2 \frac{S}{\mu} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{x^2 - u^2}} = -\ell^2 \frac{S}{\mu} \sqrt{\pi x} \quad (5.4.19)$$

$$K(x, u) = -\sqrt{xu} \int_0^\infty t \phi(\varepsilon t) J_0(xt) J_0(ut) dt \quad (5.4.20)$$

olmaktadır. Açık olarak hesaplayamadığımız bu fonksiyonun ardışık yaklaşım için gerekli koşulları sağladığını varsayalım. Buna göre ilk yaklaşım olarak

$$h_0(x) = H(x) = -\frac{l^2}{2} \frac{S}{\mu} \sqrt{\pi x}$$

seçelim. Bu seçim için (5.3.29) dan

$$C_0(\beta) = -\frac{l^2}{2} \frac{S}{\mu} \sqrt{2\pi} \sqrt{\beta} \int_0^1 J_0(\beta t) dt = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} l^2 \frac{J_1(\beta)}{\sqrt{\beta}}$$

ve buradan

$$A_0(\beta) = \frac{C_0(\beta)}{\sqrt{\beta}} = -l^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{S}{\mu} \frac{J_1(\beta)}{\beta} \quad (5.4.21)$$

bulunmaktadır. Bu doğrudan (5.4.18) denklemlerinden $\varepsilon=0$ konarak elde edilecek klâsik denklemlerin çözümü olan fonksiyondur. Bu ilk yaklaşım kullanılarak ikinci yaklaşım

$$\begin{aligned} h_1(x) &= -\frac{l^2}{2} \frac{S}{\mu} \sqrt{\pi x} \left\{ 1 + \int_0^1 u \left[\int_0^\infty t \phi(\varepsilon t) J_0(xt) J_0(ut) dt \right] du \right\} \\ &= -\frac{l^2}{2} \frac{S}{\mu} \sqrt{\pi x} \left\{ 1 + \int_0^\infty \frac{\phi(\varepsilon t) J_0(xt) J_1(t)}{t} dt \right\} \end{aligned}$$

ve buradan

$$C_1(\beta) = -l^2 \frac{S}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\beta} \left\{ \frac{J_1(\beta)}{\beta} + \int_0^1 \sqrt{u} J_0(\beta u) \left[\int_0^\infty \frac{\phi(\varepsilon t) J_0(ut) J_1(t)}{t} dt \right] du \right\}$$

bulunacaktır. Burada ikinci terimin küçük ε 'lar için ε gibi davrandığı gözönüne alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [C_1(\beta, \varepsilon) - C_0(\beta)] = O(\varepsilon)$$

sonucuna varılmaktadır. Daha ileri yaklaşımların ε 'nın yüksek kuvvetleri ile geleceği açıktır.

Çözüm olarak (5.4.21) ile verilen $A_0(\beta)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda gerilme $y=0$ için (5.3.10) dan

$$t_{yz} = S \int_0^{\infty} I_1(\xi l) [1 - \phi(\xi/2k)] \cos(x\xi) d\xi$$

ile belirlenecektir. t_{yz}/S oranı çeşitli ξ değerleri için boyutsuz uzaklık cinsinden şekilde gösterilmiştir. Bu eğrilerden şunlar gözlenmiştir:

- i) Gerilme sonsuza gitmemektedir.
- ii) Gerilme en büyük değerine çatlak ucunda değil, daha ileride ulaşmaktadır.
- iii) Gerilme çatlak üzerinde işaret değiştirmektedir.

5.5. SONUÇ :

Bu bölümde doğrultusu boyunca kayma gerilmesi etkisinde çatlak problemi yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde çözülmüştür. Problem bir karışık sınır değer problemidir ve çözümü bir dual integral denklemin çözümüne gelmektedir. Bu dual integral denklemin mevcut yöntemlerle çözümü bazı güçlükler göstermektedir. Bu bölümde ağırlık bu denklemlerin çözümüne verilmiştir.

Çatlak problemlerinin yerel olmayan elastisitedeki çözümlerinde rastlanılan dual integral denklem genel olarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi A(\xi) [1 - \psi(\xi/2)] \cos(x\xi) d\xi &= F(x) & |x| < 1 \\ \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(x\xi) d\xi &= 0 & |x| > 1 \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

yapısındadır. Burada $\psi(\xi/2)$ etkileşme fonksiyonuna bağlı beliren bir fonksiyon, $F(x)$ çatlak üzerindeki gerilmeye bağlı bir fonksiyon, $A(\xi)$ aranılan fonksiyon, ξ etkileşmeye ve çatlak boyuna bağlı bir parametredir. $\psi(0)=0$ olup

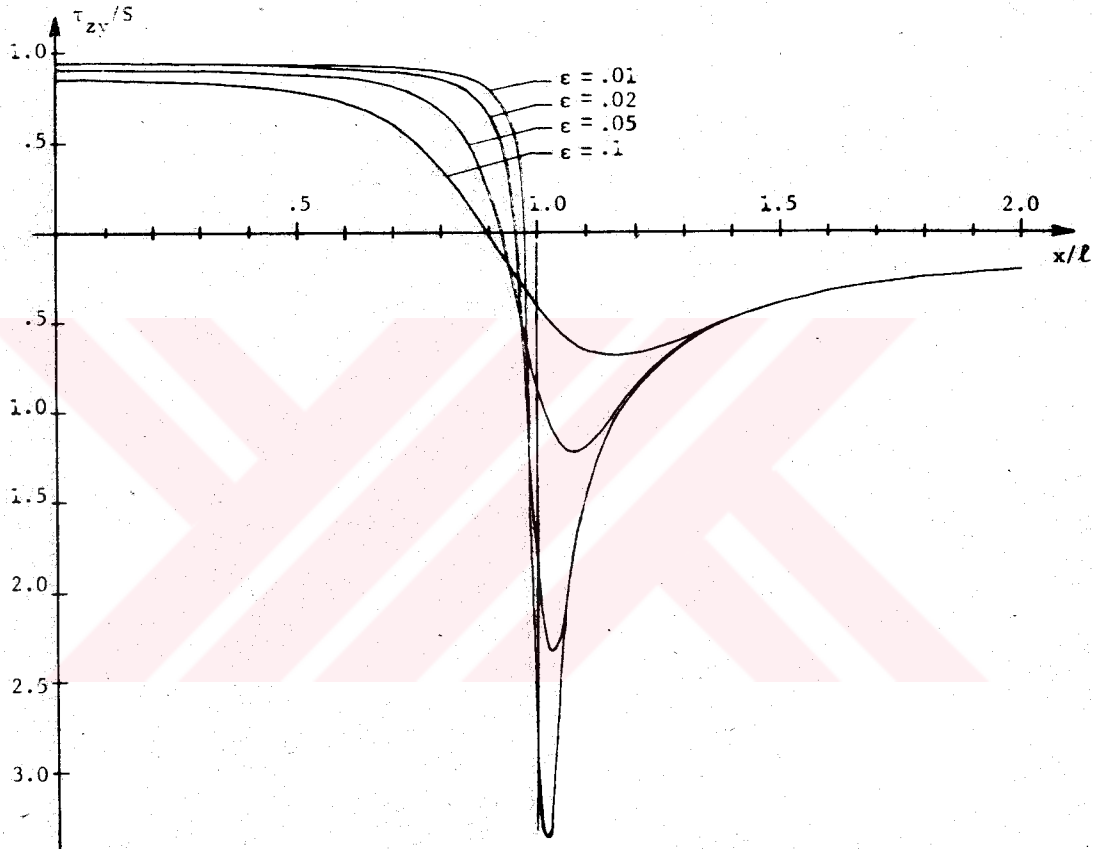
$\xi=0$ için (5.5.1) denklemleri yerel elastisitedeki eşine dönüşmektedir.

(5.5.1) yapısındaki denklemlerin kesin çözümü için elde SNEDDON [48] 'un önerdiği, problemi 2. tür FREDHOLM İntegral Denklemine getirme yöntemi vardır. Fakat bu yolu ortaya çıkan bazı integralleri hesaplayamadığımız için yürütme olanağı bulamadık.

Bundan sonra (5.5.1) denklemlerine, problemin fizikini gözönünde bulundurarak bilinen bir yorum getirdik. Bunun sonucu (5.5.1) denklemlerine, ξ parametresine göre pertürbasyon tekniğine benzer bir yöntem uyguladık. Bu yolla $A(\xi)$ nın hesaplanması için ortaya çıkan integralleri eldeki olanaklarla kapalı olarak bulamadık. Bu yolla hesaba devam edebilmek için bazı düzensiz integrallerle uğraşmak gerekmektedir.

Bütün bu çabalarımızda başarısızlığa uğranılınca, problemi yaklaşık olarak çözmekle yetindik. Çatlak açılması yerel teorideki gibi alınmış, bu yerdeğiştirmenin yarattığı gerilme nümerik olarak hesaplanmıştır. Bu açıdan bakıldığında, bir yerdeğiştirme sınır değer probleminin çözümü yapılmış demektir. Bu hali ile bile, çözülmüş olan problem yerel olmayan teori hakkında bazı bilgiler vermektedir. Bunların içinde bizce en önemlisi, yerel teoride sonsuz gerilme veren problemin yerel olmayan teori kullanılarak çözüldüğünde sonlu gerilme vermesidir. Bu durumun elastisite teorisini kendi içinde daha tutarlı kılacağı açıktır.

Bu bölümü bazı önerilerle bitirmek istiyoruz. Problemi bir karışık sınır değer problemi olarak çözebilmek için, çatlak üzerindeki gerilmeyi sabit verecek bir çatlak açılması öngörülebilir. Yerel olmayan teoride uzaktan etkileşme söz konusu olduğu için, gerilmenin çatlak üzerinde işaret değiştirmesine çatlak ucundaki yüksek gradyanın neden olduğu düşünülebilir. Bunu sınamak için daha uyumlu çatlak açılmalarını almak ve bunun yaratacağı gerilmeleri eliptik çatlak açılmasındaki gerilmelerle karşılaştırmanın yararlı olacağına inanıyoruz.



Şekil.1

Çatlak Üzerinde Gerilme Dağılışı

KAYNAKLAR

- [1] GREEN,A.E.,N.LAWS, "On a Global Entropy Production Inequality,"Quart.Journ.Mech.and Applied Math.25, (1972),1.
- [2] EDELEN,D.G.B.,A.E.GREEN,N.LAWS,"Nonlocal Continuum Mechanics",Arch.Rat.Mech.Anal.,43,(1971),36.
- [3] GREEN,A.E.,N.LAWS, "Global Properties of Mixtures", Arch.Rat.Mech.Anal.,43,(1971),45.
- [4] EDELEN,D.G.B.,N.LAWS, "On the Thermodynamics of Systems with Nonlocality",Arch.Rat.Mech.Anal.,43 (1971),24.
- [5] EDELEN,D.G.B., "On Nonlocal Variational Mechanics I", Int.Journ.Engng.Sci.,7,(1969),269.
"On Nonlocal Variational Mechanics II", Int.Journ.Engn.Sci.,7,(1969),287.
"On Nonlocal Variational Mechanics III", Int.Journ.Engng.Sci.7,(1969),373.
"On Nonlocal Variational Mechanics IV", Int.Journ.Engn.Sci.,7,(1969),391.
"On Nonlocal Variational Mechanics V", Int.Journ.Engn.Sci.,7(1969),401.
"On Nonlocal Variational Mechanics VI", Int.Journ.Engn.Sci.,7,(1969),677.
"On Nonlocal Variational Mechanics VII", Int.Journ.Engn.Sci.,7(1969),843.

"On Nonlocal Variational Mechanics VIII", *Int. Journ. Engn. Sci.*, 8, (1979), 517.

- [6] EDELEN, D.G.B., "Nonlocal Variations and Local Invariance of Fields", *Modern Analytic and Computation Methods in Science and Mathematics*, Nr:19, New York, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1969.
- [7] GURTIN, M.E., "Thermodynamics and Possibility of Spatial Interactions in Elastic Materials", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 19, (1965), 339.
- [8] ERİNGEN, A.C., "Nonlocal Polar Elastic Continua", *Int. Journ. Engn. Sci.* 10, (1972), 1.
- [9] ERİNGEN, A.C., D.G.B., EDELEN, "On Nonlocal Elasticity", *Int. Journ. Engn. Sci.*, 10, (1972), 233.
- [10] DEMİRAY, H., "On the Nonlocal Theory of Quazi-Static Dielectrics", *Int. Journ. Engn. Sci.* 10, (1972), 285.
- [11] ERİNGEN, A.C., "On Nonlocal Fluid Mechanics", *Int. Journ. Engn. Sci.*, 10, (1972), 561.
- [12] ERİNGEN, A.C., "On Nonlocal Microfluid Mechanics", *Int. Journ. Engn. Sci.* 11, (1973), 291.
- [13] ERİNGEN, A.C., "On Nonlocal Thermoelasticity", *Int. Engn. Sci.*, 12, (1974), 1063.
- [14] BALTA, F.A., E.S. ŞUHUBİ, "Theory of Nonlocal Generalized Thermoelasticity", *Int. Journ. Engn. Sci.*, 15, (1977), 579.
- [15] ERİNGEN, A.C., "Memory Dependent Nonlocal Elastic Solids", *Lett. Appl. Engn. Sci.*, 2(1974), 145.
- [16] ERİNGEN, A.C., "Linear Theory of Nonlocal Microelasticity and Dispersion of Plane Waves", *Lett. Appl. Engn. Sci.*, 1, (1973), 129.

- [17] ERİNGEN, A.C., "Linear Theory of Nonlocal Elasticity and Dispersion of Plane Waves", Int.Journ.Engn.Sci. 10,(1972),425.
- [18] ERİNGEN, A.C., "Nonlocal Elasticity and Waves", Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics, (ed.Thoft-Christensen), Dordrecht-Holland, D.Reidel Publishing Company, 1974.
- [19] ARI, C.N., "High Field Gradient Phenomena in Nonlocal Media", Dissertation , Princeton University, Princeton-New Jersey, (1981).
- [20] LARDNER, R.W., "Mathematical Theory of Dislocations and Fracture", Toronto, University of Toronto Press, (1974).
- [21] ERİNGEN, A.C., "Edge Dislocation in Nonlocal Elasticity", Technical Report Nr:42, Princeton University, Princeton-New Jersey, (1976).
- [22] ERİNGEN, A.C., "Screw Dislocation in Nonlocal Elasticity", Technical Report Nr:41, Princeton University, Princeton-New Jersey, (1976).
- [23] ERİNGEN, A.C., F.BALTA, "Yerel Olmayan Hekzagonal Kristallerde Kenar Dislokasyonu", 1.Ulusal Mekanik Kongresi-İstanbul, Sh:144, (1979).
- [24] ERİNGEN, A.C., F.BALTA, "Screw Dislocation in Nonlocal Hexagonal Crystals", Crystal Lattice Defects, (1978), 183.
- [25] ERİNGEN, A.C., C.G.SPEZIALE, B.S.KIM, "Crack Tip Problems in Nonlocal Elasticity", J.Mech.Phys.Solids, 25, (1977), 339.

- [26] ERİNGEN, A.C., "Line Crack Subject to Shear", Int. Journ. of Fracture, 14, (1978), 367.
- [27] ERİNGEN, A.C., (ed), "Continuum Physics", Vol:4, Part II-III, London, Academic Press Inc. (1976).
- [28] ERİNGEN, A.C., (ed), "Continuum Physics", Vol:2, Part II, London, Academic Press Inc., (1975).
- [29] SIH, G.C., "Mechanics of Fracture, Vol:1, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems", Leyden-Netherland, Nordhoff International Publishing, (1973).
- [30] SNEDDON, I.N., M. LOWENGROUB, "Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity", New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley and Sons, Inc. (1969).
- [31] WASHIZU, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Oxford-New York-Toronto-Sydney-Braunschweig, Pergamon Press, (1975).
- [32] ODEN, J.J., J.N. REDDY, "Variational Methods in Theoretical Mechanics", Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, (1976).
- [33] CHRISTENSEN, R.M., "Theory of Viscoelasticity", New York-San Francisco-London, Academic Press, (1971).
- [34] GURTIN, M.E., E. STERNBERG, "On the Linear Theory of Viscoelasticity", Arch. Rat. Mech. Anal., 11, (1962), 291.
- [35] GURTIN, M.E., "Variational Principles in the Linear Theory of Viscoelasticity", Arch. Rat. Mech. Anal., 13, (1963), 179
- [36] LEITMAN, M.J., G.M.C. FISHER, "The Linear Theory of Viscoelasticity", Encyclopedia of Physics, Vol:VI. a/3 (ed. C. Truesdell), Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag, (1973)

- [37] GURTIN, M.E., "Variational Principles for Linear Elastodynamics", Arch.Rat.Mech.Anal., 16, (1964), 34.
- [38] LEITMAN, M.J., "Variational Principles in the Linear Dynamic Theory of Viscoelasticity", Quart.Appl.Math. 24, (1966), 37.
- [39] IEŞAN, D., "Reciprocal Theorems and Variational Theorems in Nonlocal Elastodynamics", Int.Journ. Engn.Sci., 15, (1977), 693.
- [40] IEŞAN, D., "On Reciprocity Theorems and Variational Theorem in Linear Elastodynamics", Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, 22, (1974), 273.
- [41] MORRO, A., "Symmetry and Reversibility in Materials with Hidden Variables", Int.Journ.Engn.Sci., 18, (1980), 913.
- [42] KNOPS, R.J., L.E.PAYNE, "Uniqueness Theorems in Linear Elasticity", Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, (1971).
- [43] ERİNGEN, A.C., E.S.ŞUHUBİ, "Elastodynamics", Vol:II, New York, -San Francisco-London, Academic Press, (1975), Sh:360.
- [44] YOSIDA, K., "Lectures on Differential and Integral Equations", New York-London-Sydney, Interscience Publishers, (1969), Sh:132.
- [45] POGORZELSKI, W., "Integral Equations and their Applications", Vol:1, Part 1, Oxford-London-v.s., Pergamon Press, (1966).
- [46] SNEDDON, I.N., "Fourier Transforms", New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1951).

- [47] GRADSHTEYN, I.S., I.W.RYZHIK, "Table of Integrals, Series and Products", New York-San Francisco-London, Academic Press,(1965).
- [48] SNEDDON, I.N., "Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory", Amsterdam-New York,North-Holland Publishing Company, John-Wiley and Sons,Inc.(1966).
- [49] EDELEN,D.G.B., "On Compatibility Conditions and Stress Boundary Value Problems in Linear Nonlocal Elasticity",Int.Journ.Engng.Sci.,13,(1975),971.

ÖZGEÇMİŞ

Şemsi Burhanettin ALTAN 1950 yılında İstanbul'da doğmuştur. İlk öğrenimine Rami İlkokulu'nda başlamış, Muhsine Zeynep İlkokulu'nda devam etmiş ve Küçükyalı İlkokulu'nda bitirmiştir. Orta öğrenimine Kartal Ortaokulu'nda başlamış ve Pendik Lisesi'nde bitirmiştir. 1968 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesi'ne girmiş ve 1973 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl İ.T.Ü. Makina Fakültesi Otomatik Kontrol Kürsüsü'nde teknisyen olarak göreve başlamıştır. Askerlik görevini 1975 yılında kısa dönem yedeksubay olarak yaptıktan sonra İ.T.Ü..İnşaat Fakültesi Teknik Mekanik ve Genel Mukavemet Kürsüsü'ne asistan olarak atanmıştır. Aynı isimli koordinatörlükte araştırma görevlisi olarak görev yapan aday bekârdır.

I. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi