

55984

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAOTİK DAVRANIŞ KRİTERİ OLARAK FRAKTAL BOYUT DEĞİŞİMİ
VE DİNAMİK SİSTEMLERE UYGULANMASI

DOKTORA TEZİ
Yük. Müh. Kasım KOÇAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Aralık 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Nisan 1996

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zekâi ŞEN

Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Ersin YURTSEVER

: Doç. Dr. Ayşe ERZAN

: Doç. Dr. Ali Rana ATILGAN

: Doç. Dr. Cevdet CERİT

İ. T. K. K.
DOKÜ

NİSAN 1996

ÖNSÖZ

“Kaotik Davranış Kriteri olarak Fraktal Boyut Değişimi ve Dinamik Sistemlere Uygulanması” adlı doktora tezinin sonuçlanmasında, bilimde çok yönlülüğe ve öğrenci yetiştirmeye büyük önem veren, hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Zekâî ŞEN’e; Kaos Teorisine yönelmemi sağlayan ve bu konuda beni cesaretlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Eren OMAY’a; ve bu çalışmaya yapmış olduğu önemli katkılarından dolayı Sayın Doç. Dr. Ayşe ERZAN’a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince büyük bir sabır ve özveri ile bana yardımcı olan eşim Dilek ve oğlum S. Arda’ya ayrıca teşekkür ederim.

AĞUSTOS 1996

Kasım KOÇAK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
NOTASYON LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	x
SUMMARY	xi
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: DİNAMİK SİSTEMLERİN KARAKTERİZE EDİLMESİ.....	5
2.1. Lyapunov Üstelleri	6
2.2. Boyutlar	8
2.2.1. Kapasite Boyutu	10
2.2.2. Bilgi (information) Boyutu	13
2.2.3. Korelasyon Boyutu	14
2.2.4. Genelleştirilmiş Boyutlar	18
2.3. Boyut Algoritmaları	21
2.3.1. Kapasite Boyutu İçin Algoritmalar	21
2.3.2. Korelasyon Boyutu İçin Algoritmalar	22
2.4. Algoritmaların Uygulanması Aşamasında Karşılaşılan Problemler	24
2.4.1. Uzaklık Hesaplamaları	24
2.4.2. Eğim Hesaplamaları	25
2.4.3. Verilerin Gürültü İçermesi	26
2.4.4. Boyut Hesaplamalarında Karşılaşılan Diğer Problemler	27

BÖLÜM 3: ZAMAN SERİLERİNDEN DETERMİNİZMİN BELİRLENMESİ.....	29
3.1. Faz Uzayının Yeniden Kurulması	29
3.2. τ 'nın Seçimi	32
3.2.1. Otokorelasyon Fonksiyonu	32
3.2.2. Karşılıklı Bilgi Fonksiyonu	33
BÖLÜM 4: KORELASYON BOYUTUNUN ARDIŞIK YAKLAŞTIRIMLARLA HESAPLANMASI VE DİNAMİK SİSTEMLERE UYGULANMASI	36
4.1. Satır ve Band Tarama Yaklaşımı.....	37
4.2. Korelasyon Boyutuna Yakınsama-Değişiklik İlişkisi.....	40
4.3. 3B Dinamik Sistemler	47
4.4. 2B Dinamik Sistemler	54
4.5. 1B Dinamik Sistemler	57
4.6. Determinist Fraktaller	64
4.7. ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) (1,0,1).....	67
BÖLÜM 5: YÖNTEMİN MAKSİMUM VE MİNİMUM SICAKLIK VERİLERİNE UYGULANMASI.....	70
5.1. Verilerden Mevsimlik Salınımların Giderilmesi	70
5.2. Yöntemin Yeniden Kurulmuş Faz Uzaylarına Uygulanması.....	75
5.3. Yöntemin Maksimum ve Minimum Sıcaklık Verilerine Uygulanması	76
BÖLÜM 6: SONUÇLAR VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	87

NOTASYON LİSTESİ

λ_i	: i .inci Lyapunov üsteli
$d_C; D$	: kapasite boyutu
$d_G; \nu$	: korelasyon boyutu
$d_I; \sigma$	: bilgi boyutu
$C(\epsilon)$	: korelasyon integrali
$\theta(y)$	: Heaviside adım fonksiyonu
N	: eleman sayısı
m	: embedding boyutu
l_1	: maksimum norm
τ	: gecikme zamanı
$I(S, Q)$	: karşılıklı bilgi fonksiyonu
GPA	: Grassberger-Procaccia Algoritması
$\Phi(\epsilon)$	: kümenin laküneritesini yansıtan fonksiyon
STY	: Satır Tarama Yaklaşımı
BTY	: Band Tarama Yaklaşımı
ΔN	: çizim yoğunluğu faktörü
$\mathcal{N}$	: normalizasyon faktörü
ϵ_a	: ölçekleme bölgesinin alt sınırı
ϵ_u	: ölçekleme bölgesinin üst sınırı
$C_i(\epsilon, N)$	: i .inci satır/bant için korelasyon integrali
$v_N(i)$	: korelasyon boyutunun değişimi (STY/BTY)
$e_N(i)$	: standart hatanın değişimi
x^*	: sabit nokta

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Açıklama</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1.	Üç boyutlu faz uzayı durumunda değişik çekici tipleri ile Lyapunov üstellerinin işareti arasındaki ilişki. (a) nokta, (b) periyodik, (c) toroidal, (d) kaotik çekici (Schuster, 1989).....	8
Şekil 2.2.	Cantor kümesinin oluşturulması.	9
Şekil 2.3.	Kapasite boyutunun hesaplanması için kutu ile kaplama yönteminin iki boyutlu bir şekle uygulanması.	11
Şekil 2.4.	Kapasite boyutunun hesaplanması için bir yörüngenin, kenar uzunluğu ϵ olan küblerle kaplanması, (Bergé, 1984).....	12
Şekil 2.5.	İki boyutlu bir uzaydaki noktalar kümesinden korelasyon boyutunun hesaplanması yöntemine bazı örnekler, (a) genel durum, $C(\epsilon) \sim \epsilon^{d_G}$, (b) doğru, $C(\epsilon) \sim \epsilon^1$, (c) yüzey, $C(\epsilon) \sim \epsilon^2$, (d) Cantor kümesi, $C(\epsilon) \sim \epsilon^{0.63}$, (Bergé, 1984).....	16
Şekil 2.6.	Korelasyon integralinin kullanıldığı yerler. (a) korelasyon boyutunun hesaplanmasında (oklar ölçekleme bölgesini göstermektedir), (b) deterministik kaos (1 no.lu eğri) ile beyaz gürültünün (2 no.lu eğri) ayırt edilmesinde.	18
Şekil 3.1.	Tek bir durum değişkeninden ($X(t)$) hareketle faz uzayının yeniden kurulması. Yeni faz uzayının koordinatları $X(t)$, $X(t+\tau)$ ve $X(t+2\tau)$ tarafından oluşturulmaktadır.	31
Şekil 4.1.	Çeşitli fraktal kümelerin deşiklilik özelliğini yansıtan $\log\Phi(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafikleri: (a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant, (d) Hénon, (e) Zaslavskii, (f) Logistic tasviri ($a=3.5699456..$).....	41
Şekil 4.2.	Koch eğrisi (a), Cantor kümesi (b) ve Kaplan-yorke için $\log C(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafikleri.....	42

Şekil 4.3.	Korelasyon boyutuna yakınsama-değişiklik ilişkisi. Birinci sütundaki grafikler, ele alınan kümenin değişikliğini yansıtan $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonunun çift logaritmik eksen takımındaki çizimini, ikinci sütunda yer alan grafikler ise bu kümelerin korelasyon boyutuna yakınsamasını göstermektedir. (a) Koch eğrisi, (b) Cantor kümesi, (c) Kaplan-Yorke ayırık dinamik sistemi.....	43
Şekil 4.4.	(a) $a=3.5699142$ parametre değeri için elde edilen periyodik verinin çubuk diyagramı, (b) Bu verinin korelasyon boyutuna yakınsaması.....	45
Şekil 4.5.	3B dinamik sistem örnekleri. (a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant çekicileri.....	48
Şekil 4.6.	Lorenz dinamik sisteminden (a) $R=99.65$, (b) $R=132.5$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörüngeler.....	49
Şekil 4.7.	Lorenz dinamik sisteminden (a) $R=99.65$, (b) $R=132.5$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörüngelerin korelasyon boyutuna yakınsamaları.....	49
Şekil 4.8.	Lorenz çekicisi durumunda korelasyon boyutuna yakınsama, $\Delta N=163$	50
Şekil 4.9.	3B dinamik sistemlerden hesaplanan $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri. (a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant.	52
Şekil 4.10.	3B dinamik sistemler durumunda korelasyon boyutuna yakınsama. (a) Rössler, (b) Rabinovich-Fabrikant, $\Delta N=163$	53
Şekil 4.11.	Lorenz çekicisinden hesaplanan $v_i(N)$ değerlerine ait standart hatanın salınımı.....	54
Şekil 4.12.	2B dinamik sistem örnekleri. (a) Hénon, (b) Zaslavskii çekicileri.....	54
Şekil 4.13.	2B dinamik sistemlerden hesaplanan $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri. (a) Hénon, (b) Zaslavskii.....	55
Şekil 4.14.	2B dinamik sistemlerde korelasyon boyutuna yakınsama. (a) Hénon ($\Delta N=163$), (b) Zaslavskii ($\Delta N=275$).....	56

Şekil 4.15. (a) Logistic denkleminde sabit noktaların parametreye bağlı olarak değişimi, (b1) $a=a_{\infty}$, (b2) $a=4.0$ için elde edilen fraktal kümeyi, (c1) birinci parametre değeri için, (c2) ikinci parametre değeri için elde edilen zaman serilerini göstermektedir...	58
Şekil 4.16. Logistic tasvirinde $a=3.5699415$ için korelasyon boyutuna yakınsama ($T=256$).....	60
Şekil 4.17. Logistic denkleminde hesaplanan $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri. (a) $a=a_{\infty}$, (b) $a=4.0$	60
Şekil 4.18. Logistic tasvirinde $a=a_{\infty}$ için korelasyon boyutuna yakınsama, (a) $\Delta N=1$, (b) $\Delta N=41$	61
Şekil 4.19. Logistic tasvirinde $a=4.0$ için korelasyon boyutuna yakınsama ($\Delta N=41$).....	61
Şekil 4.20. (a) Çadır tasviri dallanma diyagramı, (b) $r=0.556$ parametre değeri için elde edilen verinin çubuk diyagramı.....	63
Şekil 4.21. Tent tasviri durumunda korelasyon boyutuna yakınsama, (a) $r=0.556$, (b) $r=0.95$ ($N=16384$, $\Delta N=41$).....	64
Şekil 4.22. Cantor kümesinden elde edilen iki zaman serisi, a) alt aralıklar üniform değil, b) alt aralıklar üniform olasılıklı.....	65
Şekil 4.23. Şeklin üniform olasılıklı olarak elde edilmesi durumunda korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri. a) Cantor kümesi, b) Koch eğrisi.....	67
Şekil 4.24. ARIMA(1,0,1) modelinden üretilen verilerin, (a) farklı embedding boyutları için korelasyon integralleri, (b) korelasyon boyutun embedding boyutu ile değişimi.....	68
Şekil 4.25. $[0,1]$ aralığını üniform olarak dolduran, deşiksiz (nonlacunar) bir veri kümesi için korelasyon boyutuna yakınsama, $N=16384$, $\Delta N=41$	69
Şekil 5.1. Çalışmada kullanılan zaman serileri. (a) Maksimum sıcaklık, (b) Minimum sıcaklık.	71

Şekil 5.2.	Minimum sıcaklık verisinden elde edilen birinci mevsimlerin oluşturduğu seri.	73
Şekil 5.3.	Minimum sıcaklık verisinden elde edilen ikinci mevsimlerin oluşturduğu seri.	73
Şekil 5.4.	Minimum sıcaklık serisinden mevsimlik salınımları gidermek için oluşturulan şablon.	74
Şekil 5.5.	Minimum sıcaklık verisinden hesaplanan harmoniklerin (kesikli eğri) şablon (sürekli eğri) ile karşılaştırılması	75
Şekil 5.6.	Mevsimlik salınımları giderilmiş minimum sıcaklık verisi.	75
Şekil 5.7.	Hénon dinamik sisteminin ilk durum değişkeninden hareketle oluşturulan yeni faz uzayından hesaplanan korelasyon boyutuna yakınsama grafiği, $\tau=2$, $m=3$ ve $N=30000$	76
Şekil 5.8.	Minimum sıcaklık verisinin korelasyon integralleri, (a) Rastgele veri, (b) $\tau=1$, (c) $\tau=2$ ($m=5, 10, 15, \dots$)	77
Şekil 5.9.	Maksimum sıcaklık verisinin korelasyon integralleri. (a) rastgele veri, b) $\tau=1$, (c) $\tau=2$ ($m=5, 10, 15, \dots$)	77
Şekil 5.10.	Korelasyon boyutunun embedding boyutu ile değişimi, (a) Minimum sıcaklık, (b) Maksimum sıcaklık (1: $\tau=1$, 2: $\tau=2$, 3: rastgele veri).	78
Şekil 5.11.	Minimum sıcaklık verisinden hesaplanan korelasyon boyutuna yakınsama grafiği	78

Ö Z E T

Bazı basit deterministik dinamik sistemlerin bile önceden kestirilemezlik anlamında rastgele davranışlar ortaya koyduğu bilinmektedir. Bu durum "deterministik kaos" olarak adlandırılır. Deterministik kaotik bir süreci diğerlerinden ayırabilmek için sıklıkla kullanılan kriterler; güç spektrumu, otokorelasyon fonksiyonu, Poincaré tasviri, Lyapunov üstelleri ve fraktal boyut değeridir.

Verilen bir sürecin deterministik kaotik olup olmadığını belirlemede kapasite, bilgi, korelasyon vb. boyut değerleri kullanılmaktadır. Bunlardan korelasyon boyutu hesaplanmasındaki kolaylık nedeniyle özellikle tercih edilmektedir. Grassberger - Procaccia Algoritması (GPA), korelasyon boyutunun hesaplanmasına esas teşkil eden "korelasyon integrali"nin bulunması için pratik bir yöntemdir. Korelasyon integralinin, ölçekleme bölgesinin eğimi korelasyon boyutuna karşı gelir. Ancak, uygulamada kullanılan veri sayısının yetersizliği, gürültü içermesi ve ölçekleme bölgesinin seçiminde yapılan hatalar fraktal boyut değerinin yanlış tahmin edilmesine yol açmaktadır. Tek bir durum değişkeninden hareketle oluşturulmuş faz uzayları ile çalışılması durumunda, yukarıda belirtilen hata kaynaklarına gecikme zamanı ve embedding boyutunun yanlış seçilmesi de eklenecektir. Ayrıca yalnız bir sayının, karmaşık bir dinamiği tek başına yansıtmaması beklenemez. Bu nedenle fraktal boyut değerinin, incelenen süreç hakkında daha fazla bilgi taşıyacak şekilde ele alınması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada, korelasyon integralinin hesaplanmasında kullanılan uzaklık matrisinden her satırda ve diyagonale paralel her bantta bir korelasyon integralinin ara değerleri hesaplanmıştır. Bu iki farklı yaklaşım sırasıyla, Satır Tarama Yaklaşımı (STY) ve Band Tarama Yaklaşımı (BTY) olarak adlandırılmıştır. Ölçekleme bölgesi sabit tutularak, ara korelasyon integrallerinin verdiği eğimler bulunmuştur. Elde edilen eğim değerlerinin, hesaplamada kullanılan satır/bant sayısına göre değişimi çizilmiştir. Bu şekilde elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama eğrilerinin incelenen süreç hakkında önemli bilgiler verdiği gözlenmiştir.

FRACTAL DIMENSION VARIATION AS A CHAOTIC BEHAVIOUR CRITERION AND ITS APPLICATION TO DYNAMICAL SYSTEMS

S U M M A R Y

Chaos theory has opened new horizons in science and is already considered by many as one of the most important discovery in the twentieth century after relativity and quantum mechanics.

Deterministic chaos denotes the irregular or chaotic motion that is generated by nonlinear systems whose dynamical laws uniquely determine the time evolution of the system state from previous history. In recent years, it has become clear that chaotic phenomena are abundant in nature and have far-reaching consequences in many branches of science, and especially in dynamic meteorology.

According to dynamical system theory time evolution of a phenomenon can be given by its trajectories in the phase space. Coordinates of this space are spanned by the variables which are necessary to specify the time evolution of the system. Any trajectory in this space represents the time evolution of a given set of initial conditions. In some systems, trajectories initiated from different phase space points eventually converge and stay on a distinct pattern. This kind of a pattern attracting all trajectories is called "attractor". Systems that develop deterministically have low dimensional attractors such as point, limit cycle and tour. These types of attractors can be characterised by an integer dimension. An important property of these attractors is that all trajectories converging on it stay at a constant distance from each other and this property imposes long term prediction of the system under study.

It has been shown for many dynamical systems that their attractors are not topological. These attractors are called "fractal set" and can be characterised by a noninteger dimension. In literature, these kind of attractors are referred to as "strange (or chaotic) attractors". The most important characteristic of the chaotic attractors is their exponential divergence of nearby trajectories. This implies that system is sensitive to initial conditions and consequently long term predictions become impossible.

By using a time series of a single state variable, it is possible to reconstruct

phase space. Before applying reconstruction procedure we need some information (i.e. dimension) related with the attractor. The new phase space can be formed by adding an extra independent coordinate until no more information about the process is gained.

One of the independent coordinates mentioned above is taken as the time series itself. The remaining coordinates are formed by its $(m-1)$ derivatives or, in the discrete case, the $(m-1)$ lagged time series shifted by $(m-1)$ multiples of the correlation time τ , at which correlations between coordinates become zero.

There are some criteria for chaotic motion, as follows:

- i) Time series behave erratically,
- ii) Autocorrelation function decays exponentially,
- iii) Power spectrum has broad band noise at low frequencies,
- iv) Poincaré map fills some region of space completely and irregularly,
- v) At least one of the Lyapunov exponents is positive,
- vi) Dimension of attracting set is fractal.

The first three criteria are functions of time t , delay time τ and frequency ω . Any time series gives only a simple idea about the underlying system. It is not possible to distinguish two time series sampled out from deterministic chaotic or stochastic processes.

The autocorrelation analysis is valid under two important assumptions which are that:

- the probability density function (PDF) of the given data is normal,
- the autocorrelation function is a means of measuring the linear dependence between two time series which originate from the same series with the delay time τ .

It is a well known fact that PDF of the most data encountered in applications are not normal. In such cases, autocorrelation analysis will give results different from the expected values.

Although the power spectrum is a reliable method for periodicity, it is not effective for determining whether the chaotic time series is sampled out from a deterministic system or not. Broad band noise in power spectra can arise from stochastic or deterministic processes, but the decay in the spectral power at high frequencies is different for the two cases.

Poincaré map transforms a continuous system into a discrete system. If a phase space is spanned by the m state variables, we can cut this space by an $(m-1)$ dimensional space called hyperplane. For phase space with dimension $m > 3$, it

is not possible to examine the Poincaré section at least visually. In addition, Poincaré sections of forced systems are very similar to each other. For example, Poincaré map of the chaotic and nonchaotic behaviour of quasi-periodically forced van der Pol equation can not be distinguished easily. Only the last two criteria give numerical results, so they are regarded as more objective tools than the others.

Lyapunov exponents (λ_i) measure the rate of exponential divergence or convergence of nearby trajectories in the phase space. In other words, Lyapunov exponents are used to determine whether the system is sensitive to initial conditions or not. In three dimensional phase space, the largest Lyapunov exponent is negative for a point attractor, zero for a limit cycle (periodic attractor) and n -torus as well as positive for chaotic attractor.

For system where the equations of motion are explicitly known and linearized equations exist, there are straightforward techniques for computing a complete Lyapunov spectrum. In case of experimental data, it is still difficult to measure the Lyapunov exponents.

In Euclidean space, dimension is the minimum number of coordinates needed to specify a point uniquely. In contrast, the dimension of a dynamical system is the number of state variables needed to specify the dynamics of the system. All of these dimensions are integer so they can not characterise a chaotic attractor. However, almost all chaotic attractors have fractal (noninteger) dimension. There are different dimension definitions such as capacity, information, correlation dimension etc. Two main uses of these dimensions are:

- To distinguish chaotic and nonchaotic attractors,
- To determine the minimum number of state variables that are needed to specify the dynamics of the underlying system.

If the points on the attractor are almost uniformly distributed in the phase space then the difference between dimensions are insignificant. On the other hand, some subsets of the attracting set are visited more frequently than the others, then a nonuniform distribution of points will be obtained. Although the capacity dimension is not sensitive to frequent visit of some locations by the trajectory in the phase space, it is strongly dependent on the geometry of the attractor. Contributions of the frequently and rarely visited volume elements to the capacity dimension remain the same.

On the other hand, the correlation dimension is sensitive to the relative frequency of the visit. In brief, due to this sensitivity to the dynamics of the process, it is convenient to use the correlation dimension, which is given by where p_i is the relative frequency of the typical trajectory that enters the i^{th}

$$d_G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\ln \epsilon} \quad (1)$$

volume element. To obtain correlation dimension by using eq. (1) one must estimate p_i values especially through the box counting technique. As this technique is not practical in application, a fast algorithm was proposed by Grassberger-Procaccia (GPA). Consider the set $\{X_i, i=1, \dots, N\}$ of points on the attractor, i.e. $X_i = X(t+i\tau)$ with a fixed time increment τ between the measurements. In this algorithm "correlation integral" is given by

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \theta(\epsilon - |X_i - X_j|) \right] \quad (2)$$

where $\theta(y)$ is the Heaviside step function defined as

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

In order to obtain correlation dimension from eq. (1), it is necessary to know the relationship between $\sum p_i^2$ and $C(\epsilon)$. It is easily shown that such a relationship expressed as

$$C(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2 \quad (4)$$

Finally, combination of eqs. (1) and (4) leads to

$$d_G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (5)$$

As the value of ϵ decreases, clearly the number of paired correlations will decrease as well, and hence,

$$C(\epsilon) \propto \epsilon^{d_G} \quad (6)$$

If we use sufficient number of noise free data points, plot of $\ln C(\epsilon)$ versus $\ln(\epsilon)$ will give a linear part called "scaling region". Slope of this region is the estimated value of the correlation dimension d_G (ν is also frequently used notation). A noninteger value of ν indicates chaotic behaviour; the underlying dynamics is deterministic and shows a sensitive dependence on the initial

conditions. There are some problems in calculating the correlation dimension. Noisy and limited number of data, difficulties in determining the scaling region exactly, errors arising from computer experiments etc. cause biased estimation of ν . Above all, it looks unrealistic that a single number can fully describe the complex structure of a strange attractor. This implies that the value of fractal dimension must be handled so that it carries more information about the dynamical system under study.

In applications, GPA is the most frequently used algorithm to estimate the fractal dimension. Distance matrix used to calculate the correlation integral is given by

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots & \dots & \dots & d_{1N} \\ & 0 & d_{23} & d_{24} & \dots & \dots & \dots & d_{2N} \\ & & 0 & d_{34} & \dots & \dots & \dots & d_{3N} \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0 & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & d_{(N-1)N} \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Due to the symmetry, it is sufficient to consider only upper triangle matrix so the number of pairs with distance less than ϵ , say $N(\epsilon)$, is to be normalised with $N(N-1)/2$ instead of N^2 .

It is well known in the study of lacunarity, if ϵ approaches to zero then the expected form of the correlation integral becomes

$$C(\epsilon) = \Phi(\epsilon)\epsilon^\nu \quad (8)$$

where the function $\Phi(\epsilon)$ reflects the lacunarity of the set. The structure of $\Phi(\epsilon)$ is generated by sparse or empty regions in the object. Distribution of these empty regions can be constant, periodic or aperiodic. Because sets show different lacunarity, one can expect that contribution of each row/band of the distance matrix to the correlation integral will be different. Calculation of the correlation integral at each row/band can be called "Row and Band Scanning Approach (RSA/BSA)". These two approach can be expressed by

$$C_i^{STY}(\epsilon, N) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=k+1}^N \theta(\epsilon - |X_k - X_j|) \right] \quad (9)$$

$$C_i^{BTY}(\epsilon, N) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^{N-k} \theta(\epsilon - |X_{k+j} - X_j|) \right] \quad (10)$$

where N is the normalisation factor:

$$N = i \left[N - \frac{(i+1)}{2} \right] \quad (11)$$

In this approach, the correlation integrals $c_i^{STY}(\epsilon, N)$ and $c_i^{BTY}(\epsilon, N)$, $i=1,2,\dots,N$, are calculated from the distance matrix at every row/band.

As $c_N^{STY}(\epsilon, N)$ or $c_N^{BTY}(\epsilon, N)$ is used to get the correlation dimension, it is important to determine correctly the limits of the scaling region given by the plot of $\log C_N^X(\epsilon, N)$ versus $\log(\epsilon)$, X denotes STY or BTY. The final purpose is to determine the change of the slopes within the individual scaling regions as i increases. This requires to calculate $v_N^X(i)$ values which are the slopes of $\log C_i^X(\epsilon, N) - \log(\epsilon)$. The next step is then to plot $v_N^X(i)$ versus i . Finally it gives "a convergence to correlation dimension"

In the fourth chapter, it has been shown that the convergence to correlation dimension is closely related with the lacunarity. In this chapter some well known examples of dynamical systems are examined. These are Lorenz, Rössler and Rabinovich-Fabrikant as the examples of three-dimensional continuous dynamical systems; Hénon, Kaplan-Yorke and Zaslavskii maps as the examples of two-dimensional discrete dynamical systems; Logistic and Tent maps as the examples of single dimensional discrete dynamical systems, and finally Cantor set and Koch curve as the examples of deterministic fractals. In the fifth chapter, the above method is also applied to maximum and minimum temperature data after reconstructing the phase space.

BÖLÜM 1: GİRİŞ

Dinamik sistemler teorisine göre, bir sistemin zamansal evrimi faz uzayındaki yörüngeleri ile temsil edilebilir. Faz uzayının koordinatları, sistemin evrimini tam olarak gösterebilmek için gerekli olan durum değişkenlerinden meydana gelir. Bu uzaydaki her bir yörünge, sistemin farklı başlangıç koşullarına karşı gelen evrimini temsil eder. Faz portreleri, geçici bir durumdan sonra bütün yörüngeleri kendi üzerine çeken ve çekici (attractor) olarak adlandırılan özgün paternlere sahiptir. Yörüngeleri çekici tarafından yakalanan bütün başlangıç değerleri bir çekici sahası tanımlar. Deterministik gelişim gösteren sistemler nokta, limit çevrim ve tor gibi düşük boyutlu çekicilere sahiptirler. Bu tip çekiciler tam sayı bir boyutla karakterize edilebilirler. Bu çekicilerin önemli bir özelliği, üzerlerine yakınsayan yörüngelerin birbirlerinden sabit bir mesafede kalmasıdır. Bu özellik, sistemin uzun bir süre için öngörülebilir olmasını garanti eder. Pek çok dinamik sistem için, yörüngelerin üzerinde kaldığı çekicinin topolojik olmadığı gösterilmiştir. Bu tür çekiciler "fraktal küme" olarak adlandırılır ve tam sayı olmayan bir boyutla karakterize edilirler. Bahsedilen özelliğe sahip çekiciler "garip veya kaotik çekici" olarak adlandırılır. Kaotik çekicilerin en önemli özelliği, başlangıç olarak birbirlerine yakın yörüngelerin zamanla göstermiş oldukları ıraksamadır. Bu özelliğin en önemli sonucu, öngörüye getirmiş olduğu sınırdır, bu durumda uzun süreli öngörü mümkün değildir.

Düzenli Δt zaman aralıklarında örneklenmiş tek bir durum değişkenine ait zaman serisinden hareketle faz uzayının yeniden kurulması (reconstruction)

mümkündür. Bunun için önce çekici ile ilgili bilgilerin ve topolojik özelliklerin (örneğin boyutun) zaman serisinden tahmin edilmesi gerekir. Packard vd., (1980), gözlenmiş türbülanslı ya da kaotik akıştan bir takım ölçüleri elde etmek için çekicinin, faz uzayındaki yapısının yeniden kurulmasını önermişlerdir. Bu ise dinamik sürecin, artık daha fazla bilgi taşımayana kadar bağımsız bir koordinatın eklenmesiyle, ardışık olarak daha yüksek boyutlu yeni bir faz uzayına transformasyonu (embedding) ile mümkündür. Bu koordinatlardan birini zaman serisinin kendisi, diğer bağımsız koordinatları ise serinin $(m-1)$.inci mertebeye kadar olan türevleri meydana getirir. Ayrık zaman serseri durumunda koordinatlardan birini yine serinin kendisi diğer bağımsız koordinatları ise bu koordinatları lineer bağımsız yapacak şekilde seçilen gecikme zamanı τ 'nın $(m-1)$.inci katına kadar orijinal serinin kaydırılması yoluyla elde edilen $(m-1)$ adet seriden meydana gelir. Sonuç olarak dinamik sistemin zamansal evriminin faz portresi, tek bir durum değişkeni ve onun ardışık türevleri ile (veya zaman kaydırılarak elde edilen değişkenlerle) oluşturulan m boyutlu yeni bir faz uzayında temsil edilebilir.

Buraya kadar üzerinde kısaca durulan dinamik sistemlerin karakterize edilmesi ve zaman serilerinden determinizmin belirlenmesi konusu İkinci ve Üçüncü Bölümlerde ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Atmosferik bir süreçle (termal konveksiyon) ilgili ilk kaotik çekici örneği Lorenz (1963) tarafından geliştirilen bir dinamik sistemden elde edilmiştir. Deterministik olmasına rağmen sistemin dinamiği, başlangıç koşullarına hassas bağımlı olan kaotik ya da düzensiz bir davranış ortaya koyar.

Meteoroloji alanında konuyla ilgili çalışmalar sürmektedir. Nicolis ve Nicolis (1984) yukarıda bahsedilen düşünceleri ilk kez klimatolojik çalışmalara uygulamışlardır. Bu uygulamada uzun süreli oksijen izotopu kayıtları kullanılmış ve iklimik çekicinin boyutu 3.1 olarak hesaplanmıştır.

Fraedrich (1986 ve 1987) ve Essex (1987), 15-40 yıl arasında değişen periyotlara ait meteorolojik verileri kullanarak çekicinin (weather attractor) boyutunu 6-7 arasında bir değer olarak hesaplamışlardır. Tsonis ve Elsner (1988) rüzgar verilerini kullanarak yaptıkları çalışmada çekicinin boyutunu 7.3 bulmuşlardır. Diğer bir çalışmada, son derece hassas ölçümlere dayanan fırtına yağışı verileri kullanılarak çekicinin boyutu 3.78 bulunmuştur, Rodriguez ve Power (1989) ve Sharifi (1990). Pal (1991), kaos teorisini kullanarak Kuzey Hint Okyanusu üzerindeki siklon yörüngelerini öngörmeye çalışmıştır. Bu çalışmada çekicinin boyutu 5-6 arasında bulunmuştur. Siklon yörüngesinin öngörüsü için siklonun önceki altı pozisyonu tahmin ettirici olarak alınmış ve basit çok değişkenli regresyon modeli kullanılmıştır.

Uygulamada verilen bir sürecin deterministik kaotik olup olmadığını belirlemede; kapasite, bilgi, korelasyon vb. boyut değerleri sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlardan korelasyon boyutu, hesaplanmasındaki kolaylık nedeniyle özellikle tercih edilmektedir. Grassberger - Procaccia Algoritması (GPA), korelasyon boyutunun hesaplanmasına esas teşkil eden "korelasyon integrali"nin bulunması için pratik bir yöntemdir. Korelasyon integralinin çift logaritmik eksen takımında verdiği lineer bölgenin (ölçekleme bölgesinin) eğimi korelasyon boyutuna karşı gelir. Ancak, uygulamada kullanılan veri sayısının yetersizliği, gürültü içermesi ve ölçekleme bölgesinin seçiminde yapılan hatalar fraktal boyut değerinin yanlış tahmin edilmesine yol açmaktadır. Tek bir durum değişkeninden hareketle kurulmuş faz uzayları ile çalışılması durumunda, yukarıda belirtilen hata kaynaklarına gecikme zamanı ve embedding boyutunun yanlış seçilmesi de eklenecektir.

Ayrıca bir sayının, karmaşık bir dinamiği tek başına yansıtması beklenemez. Dolayısı ile fraktal boyut değerinin, incelenen süreç hakkında daha fazla bilgi taşıyacak şekilde ele alınması önerilebilir. Bu çalışmada, korelasyon integralinin hesaplanmasında kullanılan uzaklık matrisinden her

satırda ve diyagonale paralel her bantta bir korelasyon integralinin ara değerleri hesaplanmıştır. Ölçekleme bölgesi sabit tutularak, ara korelasyon integrallerinin verdiği eğimler bulunmuştur. Elde edilen eğim değerlerinin, hesaplamada kullanılan satır/band sayısına göre değişimi çizilmiştir. Bazı dinamik sistemlere ait çekiciler ve determinist fraktaller durumunda korelasyon boyutunun, asimtotik değerine yakınsama biçimleri incelenmiştir. Korelasyon boyutuna yakınsama ile değişiklik (lacunarity) arasındaki ilişki, Dördüncü Bölüm'de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bazı deteministik kaotik süreçlere, düzgün fraktallere ve deterministik kaotik olmayan süreçlere uygulanan yöntem, Beşinci Bölüm'de maksimum ve minimum sıcaklık zaman serilerine uygulanmıştır. Atmosferik süreçler, çok sayıda bağımsız değişken tarafından meydana getirilen bir faz uzayında cereyan ederler. Diğer bir deyişle, (bazı istisnalar dışında) bir dinamik sistem şeklinde ifade edilebilmeleri oldukça zordur. Daha önce de bahsedildiği gibi, bir dinamik sistemin çekicisi, asimtotik sınırları bu dinamiği tanımlayan bağımsız değişkenler tarafından oluşturulan bir faz uzayındaki yörüngeler ile temsil edilebilir. Düzenli Δt zaman aralıklarında örneklenmiş tek bir durum değişkenine ait zaman serisinden hareketle faz uzayının yeniden kurulması mümkündür. Bunun için önce çekici ile ilgili bilgilerin zaman serisinden tahmin edilmesi gerekmektedir.

Dördüncü Bölüm'de anlatılan yaklaşımın maksimum ve minimum sıcaklık verilerine uygulanabilmesi için öncelikle verilerden mevsimlik salınımların giderilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, Fourier analizi temeline dayanan bir yöntem önerilmiştir. Verilerden mevsimlik salınımlar giderildikten sonra, faz uzayı yeniden kurulmuştur. Ayrıca, yöntemin yeniden kurulmuş faz uzaylarına uygulanıp uygulanamayacağı, Hénon dinamik sistemin ilk durum değişkeni kullanılarak test edilmiştir. Altıncı Bölüm'de sonuçlara ve bazı önerilere yer verilmiştir.

BÖLÜM 2: DİNAMİK SİSTEMLERİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

Kaotik hareket için, a) zaman serisinin düzensiz bir salınım göstermesi, b) otokorelasyon fonksiyonunun eksponansiyel olarak azalması, c) güç spektrumunun küçük frekanslarda geniş bantlı gürültü yapısına sahip olması, d) kaotik davranışta Poincaré kesit düzleminin bir bölümünün tamamen ve düzensiz bir şekilde dolması, e) Lyapunov karakteristik üstellerinin en az bir tanesinin pozitif olması, f) kaotik bir kümenin boyutunun fraktal olması vb. kriterleri sıralamak mümkündür.

Sıralanan bu kriterlerin ilk üçünde $x(t)$, $\rho(\tau)$, $S(w)$ şeklinde zaman, gecikme zamanı (lag) ve frekansın fonksiyonları vardır. Bu fonksiyonları kaotik hareketi yansıtıp yansıtmamaları bir yana, grafiklerin yorumunda kişisel farklılıkların önemli rol oynadığı bilinen bir gerçektir. Bunun ötesinde otokorelasyon fonksiyonu, verilerin normal dağılı olmaması durumunda güvenilir değildir.

Benzer şekilde güç spektrumu da, bir zaman serisinin deterministik bir süreçten örneklenip örneklenmediği konusunda kesin bir kriter ortaya koymaz, Froehling (1981). Güç spektrumlarında geniş bantlı gürültü, gerek stokastik gerekse deterministik süreçlerde ortaya çıkabilmektedir. Bu iki durum arasındaki fark sadece büyük frekans değerlerinde ortaya çıkar, Brandstater ve Swinney, (1987).

Poincaré tasviri dinamik sistemlerin analizinde sıklıkla başvuru olan klasik bir

yöntemdir. Boyutu m olan bir sistemi, $(m-1)$ boyutlu ayrık bir sisteme dönüştürür. Ancak uygulamada $m>3$ için Poincaré tasviri pratikliğini yitirir.

Yukarıda verilen kriterlerin sadece son ikisinde sonuç sayısalıdır. Dolayısı ile diğer kriterlerde olduğu gibi kişisel yorum farklarına izin vermezler. Bu nedenle Lyapunov üstelleri ve fraktal boyut konusu ayrıca incelenmiştir.

2.1. Lyapunov Üstelleri

Bir fonksiyonun Lyapunov üsteli (λ), kaotik davranışa özgü olan başlangıç koşullarına hassas bağımlılığın bir ölçüsünü elde etmede kullanılır. Başlangıç olarak birbirine yakın iki nokta,

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \quad (2.1)$$

gibi kaotik davranışa neden olan ayrık bir sistem altında zamanla birbirinden ıraksayacaktır. Başlangıç koşullarını x_0 ve $x_0 + \epsilon$ olarak alırsak N iterasyon sonra bu iki noktanın eksponansiyel olarak ıraksaması, bir boyutlu ayrık sistem için

$$\epsilon(N) \approx e^{N\lambda(x_0)} \quad (2.2)$$

ifadesiyle verilir. $N \rightarrow \infty$ ve $\epsilon \rightarrow 0$ limit durumları dikkate alındığında bir boyutlu sistemler için Lyapunov üsteli,

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |\dot{f}(x_i)|$$

veya,

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} \dot{f}(x_i) \right| \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Eğer (2.3) eşitliğinden elde edilen λ değeri negatif ise, birbirine yakın başlangıç koşuluna sahip iki yörünge zamanla birleşir. Böyle

bir durumda hareket kaotik değildir. Eğer $\lambda > 0$ ise, söz konusu yörüngeler zamanla birbirlerinden ıraksarlar. Diğer bir deyişle sistem başlangıç koşullarına duyarlıdır ve dolayısı ile hareket kaotiktir.

(2.3) eşitliğini değişik şekilde yeniden yazalım.

$$e^\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \left| \frac{df}{dx_n} \right| \right)^{1/N} \quad (2.4)$$

Bir boyutlu ayrık sistem için verilen bu eşitlik, daha yüksek boyutlar için de genelleştirilebilir. Bu durumda her boyut için bir Lyapunov üsteli olacağından (2.4) eşitliği şu şekle dönüşecektir :

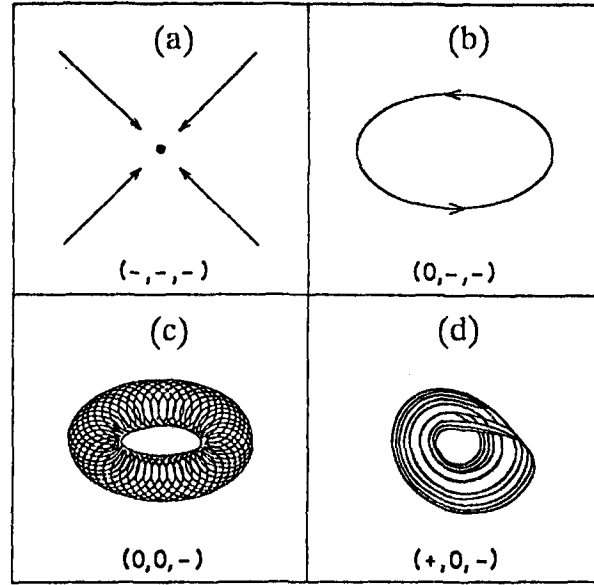
$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^{N-1} J(\vec{X}_n) \right)^{1/N} \text{ ifadesinin öz değerleri} \quad (2.5)$$

Bu eşitlikteki

$$J(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

(2.1) eşitliği ile verilen sistemin Jakobiyenidir. Sürekli sistemler durumunda Lyapunov üstellerinin hesaplanması bazı farklılıklar göstermekle beraber, temel yaklaşım ayrık sistemler durumunda olduğu gibidir, Shuster (1989). Daha yüksek boyutlu kaotik sistemlerde başlangıç koşullarına duyarlılığın var olması için Şekil 2.1’de görüldüğü gibi Lyapunov üstellerinin en az bir tanesi pozitif olmalıdır.

Ancak bir zaman serisinden hareketle Lyapunov üstellerinin hesaplanması bazı zorluklar içermektedir. Diğer taraftan Lyapunov üstelleri, çekiciyi üreten mekanizmalardan gerilme hakkında önemli bilgiler vermekle beraber, katlanma



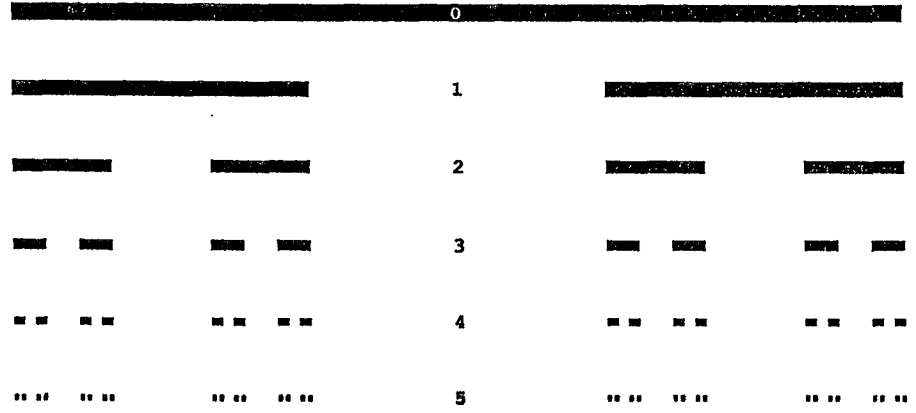
Şekil 2.1. Üç boyutlu faz uzayı durumunda değişik çekici tipleri ile Lyapunov üstellerinin işareti arasındaki ilişki. (a) nokta, (b) periyodik, (c) toroidal, (d) kaotik çekici (Schuster, 1989).

hakkında fazla bir şey söylemez, Grassberger ve Procaccia (1983b). Buradan pozitif Lyapunov üstelinin, kaotik bir dinamiğin varlığı için gerekli bir koşul olmakla beraber yeterli olmadığı anlaşılmaktadır.

2.2. Boyutlar

Euclid uzayında boyut, verilen bir noktanın konumunu tam olarak belirlemek için gereken minimum koordinat sayısıdır. Bir dinamik sistemin boyutu ise, sistemin dinamiğini tanımlamak için gereken durum değişkenlerinin sayısıdır.

Burada bahsedilen boyutlar tam sayı olup, kaotik bir çekiciyi tanımlayamazlar. Tam sayı olmayan boyuta "fraktal boyut" denir. Böyle bir boyuta sahip küme de "fraktal" olarak adlandırılır. Kaotik çekicilerin boyutu fraktaldır.



Şekil 2.2. Cantor kümesinin oluşturulması.

Fraktallere klasik bir örnek Şekil 2.2 ile verilen "Cantor kümesi"dir. Bu kümeyi oluştururken önce birim uzunlukta bir doğru parçasından yola çıkıyoruz. İlk iterasyonda bu doğru parçasının orta 1/3'lük kısmını atıyoruz, ikinci iterasyonda geriye kalan iki tane 1/3 birim uzunluğundaki parçaları tekrar 3'e bölüp onların da orta 1/3'lük kısımlarını atıyoruz ve iterasyona bu şekilde devam ediyoruz. Şekilden de görüldüğü gibi iterasyon sayısı arttıkça her bir iterasyondaki eleman sayısı sonsuza, bu elemanların uzunlukları ise sıfıra gitmektedir. Bu kümenin diğer bir özelliği "kendi kendine benzerlik (self-similarity)"dir. Dikkat edilirse (n+1).inci iterasyonda ele aldığımız bir doğru parçası ile oluşturduğumuz dizi, n.inci iterasyondan itibaren oluşturulan dizinin 1/3 oranında küçültülmüş bir benzeridir.

Cantor kümesi gibi düzgün fraktallerin boyutunu analitik olarak hesaplamak mümkündür. Canor kümesinde doğru parçasını $r=3$ eşit kısma bölüp, $s=2$ 'sini bırakıyoruz, bu durumda fraktal boyut değeri,

$$d = \log s / \log r = \log 2 / \log 3 = 0.631$$

şeklinde hesaplanır. Boyutlarla ilgili olarak aşağıdaki önemli özellikleri sıralamak mümkündür :

- i) $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$
- ii) $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$
- iii) $d(AXB) = d(A) + d(B)$
- iv) f , A kümesi üzerinde diferansiye edilebilir bir fonksiyon olsun, eğer f^{-1} var ise $d(f(A)) = d(A)$ 'dır.

2.2.1. Kapasite Boyutu

L uzunluğunda bir doğru parçasını ele alalım. Bu doğru parçası, uzunluğu ϵ olan $N(\epsilon)$ tane bir boyutlu kutularla doldurulabilir. Doğru parçasının uzunluğu L olduğuna göre,

$$N(\epsilon) = L \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \quad (2.7)$$

yazabiliriz. Benzer şekilde bir kenarının uzunluğu L olan bir kare,

$$N(\epsilon) = L^2 \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^2 \quad (2.8)$$

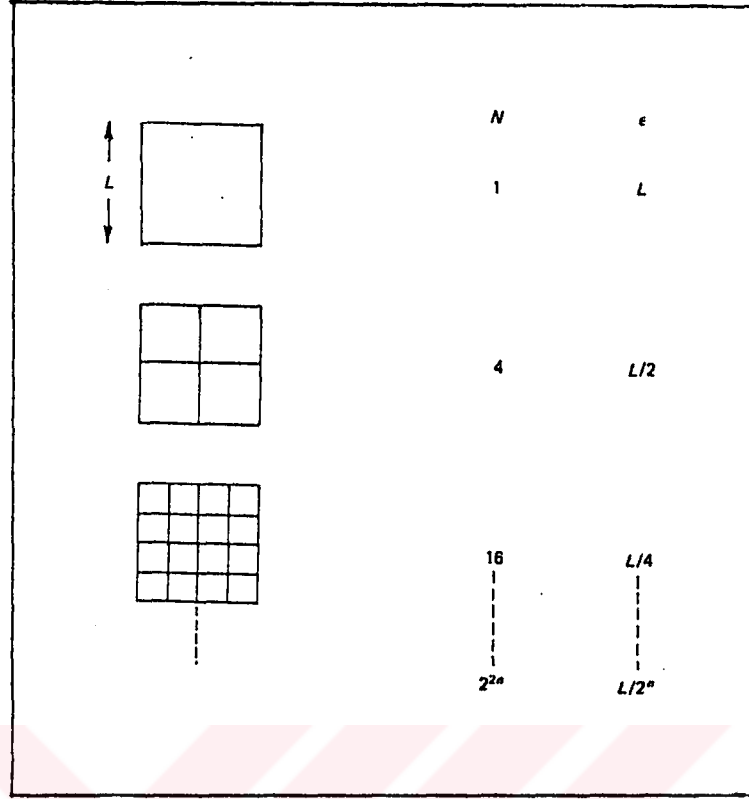
adet iki boyutlu kutularla doldurulabilecektir, (bak. Şekil 2.3). Eğer bir kenar uzunluğu L olan bir kübü dikkate alırsak, $N(\epsilon)$ ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$N(\epsilon) = L^3 \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^3 \quad (2.9)$$

Buraya kadar elde edilen $N(\epsilon)$ ifadelerini her hangi bir boyut için genellemek mümkündür:

$$N(\epsilon) = L^d \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^d \quad (2.10)$$

Son eşitlikte her iki tarafın logaritmasını alarak d 'yi çekersek,



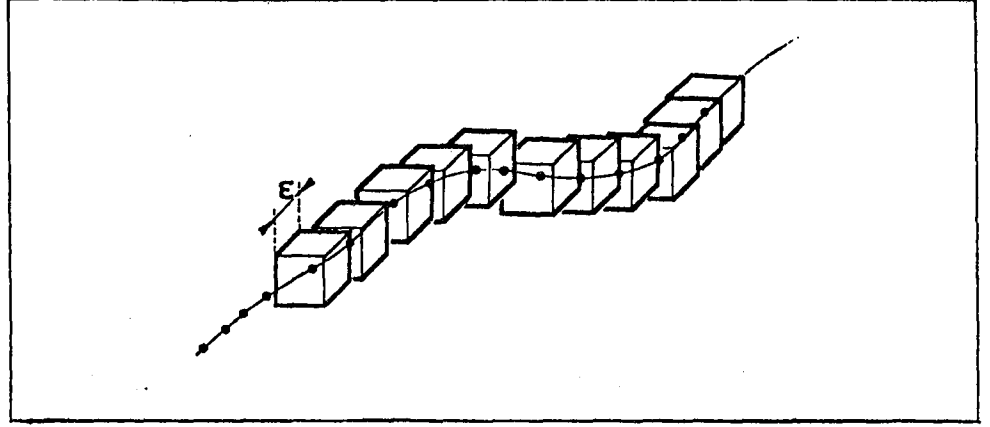
Şekil 2.3. Kapasite boyutunun hesaplanması için kutu ile kaplama yönteminin iki boyutlu bir şekle uygulanması.

$$d = \frac{\text{Ln } N(\epsilon)}{\text{Ln } L + \text{Ln}(1/\epsilon)} \quad (2.11)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin çok küçük ϵ değeri için limit durumunda L 'yi içeren terim diğerlerinin yanında ihmal edilebilir. Kapasite boyutu şu şekilde tanımlanabilir:

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Ln } N(\epsilon)}{\text{Ln}(1/\epsilon)} \quad (2.12)$$

Buna göre $\text{Ln } N(\epsilon) - \text{Ln}(1/\epsilon)$ grafiğinin ($\epsilon \rightarrow 0$ için) eğimi kapasite boyutunu verecektir. Kapasite boyutu tamamen metrik bir kavramdır. Bu nedenle dinamik sistemin zamansal evrimi hakkında herhangi bir bilgiyi içermez.



Şekil 2.4. Kapasite boyutunun hesaplanması için bir yörünge, kenar uzunluğu ϵ olan küblerle kaplanması, (Bergé, 1984).

(2.12) eşitliğinden de anlaşılacağı gibi ϵ sifıra yaklaştıkça $N(\epsilon)$ artacaktır. Bunu şu şekilde formüle etmek mümkündür :

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-d_c}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

Seçilen ϵ büyüklüğünün çok önemli bir ölçü olması nedeniyle kapasite boyutu d_c , $\mathbb{R}^m$ Euclid uzayının metrik özellikleriyle yakından ilişkilidir. Ayrıca kapasite boyutu, topolojik boyutları da içerir. Bunu göstermek için $\mathbb{R}^m$ uzayının sınırlı bir alt kümesi olan A noktalar kümesini dikkate alalım. Eğer A kümesi yalnızca bir eleman içeriyorsa, bu durumda ϵ dikkate alınmaksızın $N(\epsilon)=1$ 'dir. L uzunluğunda bir doğru için $N(\epsilon)=L/\epsilon$, ve alanı S olan bir yüzey için $N(\epsilon)=S/\epsilon^2$ 'dir. Bu üç durum için kapasite boyutu sırasıyla 0, 1 ve 2'ye eşittir.

Kapasite boyutu deneysel ya da nümerik olarak üretilmiş verilerden de hesaplanabilir. Bu amaçla kullanılan tekniklerden biri de Şekil 2.4'de verildiği gibi "kutu sayma (box counting)" yöntemidir.

2.2.2. Bilgi (information) Boyutu

Bilgi boyutu “entropi” kavramıyla yakından ilişkilidir. Bu nedenle önce entropi kavramı üzerinde kısaca duracağız. Kaotik davranışın çeşitli grafiksel ifadelerinin karmaşık görünümü doğal olarak kaos ile istatistiksel mekanik arasındaki ilişkinin ne olduğu sorusunu gündeme getirmektedir. Belirli bir ölçüm sonucunun birim aralık içinde yer almasının zorunlu olduğu bir istatistiksel sistemi dikkate alalım. Bu aralığın, uzunluğu ϵ olan N tane alt aralığa bölünmesi durumunda p_i olasılığı ile mümkün olan sonuçların belirli bir bölümünü içeren i .inci alt aralık arasında bir ilişki kurulabilir. Bu durumda sistemin entropisi şu eşitlikle verilir:

$$I(\epsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i \quad (2.14)$$

Bu nicelik, sistemdeki düzensizlik miktarının bir ölçüsü ya da sistemin durumunu tam olarak belirlemek için gerekli bilgi şeklinde yorumlanabilir. Eğer bütün alt aralıklar eşit olasılıkla gerçekleşiyorsa, bütün i 'ler için $p_i = 1/N$ ve entropi $\ln N$ 'ye eşit olur. Bu durumda entropi maksimum değerini alır, diğer bir deyişle sistemin durumunu tam olarak belirtmek için gerekli olan fazladan bilgi miktarı maksimumdur. Eğer sonucun belirli bir alt aralıkta gerçekleşeceği biliniyorsa entropi sıfırdır ve minimum değerini alır. Bu, sistemin durumunu belirlemek için fazladan bir bilgiye gereksinim olmadığını gösterir.

Bilgi boyutu, dinamik sistemin tipik bir yörüngesinin faz uzayında bir hücreyi ziyaretinin “bağlı frekansı” ile ilişkilidir. Diğer bir deyişle çekicinin, bir kenar uzunluğu ϵ olan kutucuklarla tamamen kaplandığını ve bir noktanın i .inci kutunun içinde kalma olasılığının p_i olduğunu farzediyoruz.

Yukarıda verilen denklemde $I(\epsilon)$, sistemin durumlarını ϵ mertebesinde bir

duyarlılıkla belirleyebilmek için gerekli bilgi miktarını gösterir. Bilgi boyutu d_I şu şekilde tanımlanır :

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{I(\epsilon)}{\text{Lne}} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{i=0}^{N(\epsilon)} P_i \text{Lnp}_i}{\text{Lne}} \right] \quad (2.15)$$

veya,

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \text{Lnp}_i}{\text{Ln}(1/\epsilon)} \quad (2.16)$$

Son eşitlik şu formda yazılabilir :

$$I(\epsilon) = k \epsilon^{-d_I} \quad (2.17)$$

Sistemin durumunu belirlemek için gerekli bilgi ϵ 'un d_I .inci kuvvetiyle ters orantılı olarak artar. Ayrıca bilgi boyutu d_I , entropinin ϵ ile olan değişiminin "ölçekleme üssü (scaling exponent)"dür.

2.2.3. Korelasyon Boyutu

Korelasyon (Grassberger) boyutu probabilistik tipte bir boyut olup şu eşitlikle verilir :

$$d_G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Ln} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\text{Lne}} \quad (2.18)$$

Bu ifadedeki p_i , bir yörüngenin i .inci hacim elemanını ziyaretinin bağlı frekansıdır. Bu eşitlik yardımıyla korelasyon boyutunu hesaplayabilmek için önce kutu sayma tekniğini kullanarak p_i olasılıklarının tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu tekniğin yeterince kullanışlı olmaması bir yana, daha yüksek boyutlu çekicilere uygulanması imkansızdır. Bu nedenle daha hızlı

olan bir algoritma Grassberger ve Procaccia (1983a,b) tarafından önerilmiştir. Bir zaman serisinden, sabit zaman artımı τ kullanarak $X_i \equiv X(t+i\tau)$ şeklinde elde edilen ve çekici üzerinde bulunan $\{X_i, i=1, \dots, N\}$ noktalar kümesini dikkate alalım. Bu durumda "korelasyon integrali" aşağıda tanımlandığı gibidir:

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left[\begin{array}{l} \text{Aralarındaki uzaklık } \epsilon' \text{ dan küçük} \\ \text{olan } ij \text{ nokta çiftlerinin sayısı.} \end{array} \right] \quad (2.19)$$

veya,

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \theta(\epsilon - |X_i - X_j|) \right] \quad (2.20)$$

son ifadedeki $\theta(y)$ Heaviside adım fonksiyonudur :

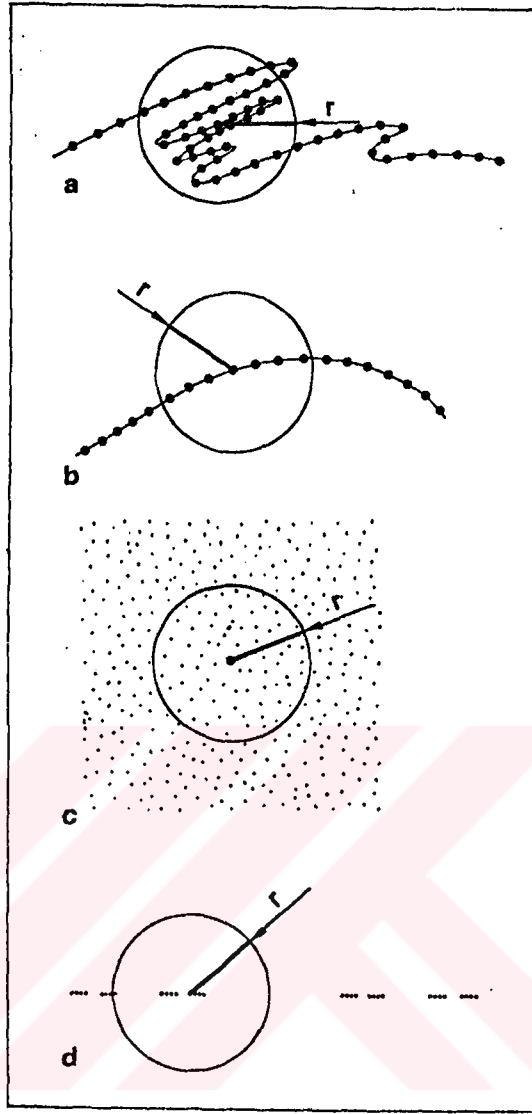
$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Korelasyon boyutunun hesaplanmasına esas olan ij nokta çiftlerinin nasıl

sayılacağı Şekil 2.5'de gösterilmiştir. (2.18) eşitliği ile verilen korelasyon boyutunun hesaplanabilmesi için $C(\epsilon)$ 'un, Σp_i^2 ile olan ilişkisinin belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için,

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} \quad (2.21)$$

ve (x_i, x_j) , $i \neq j$ nokta çiftlerinin toplam sayısının $n_i^2 - n_i$ olduğunu dikkate alırsak,



Şekil 2.5. İki boyutlu bir uzaydaki noktalar kümesinden korelasyon boyutunun hesaplanması, (a) genel durum, $C(\epsilon) \sim \epsilon^{d_G}$, (b) doğru, $C(\epsilon) \sim \epsilon^1$, (c) yüzey, $C(\epsilon) \sim \epsilon^2$, (d) Cantor kümesi, $C(\epsilon) \sim \epsilon^{0.63}$, (Bergé, 1984).

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} (n_i^2 - n_i)$$

yazabiliriz. Buradan hareketle,

$$C(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2 \quad (2.22)$$

olduğu gösterilebilir, (2.18) ve (2.22) eşitliklerinden yararlanarak,

$$d_G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (2.23)$$

yazabiliriz. ϵ küçüldükçe korelasyon halindeki nokta çiftlerinin sayısı

$$C(\epsilon) \propto \epsilon^{d_G} \quad (2.24)$$

şeklinde azalacaktır.

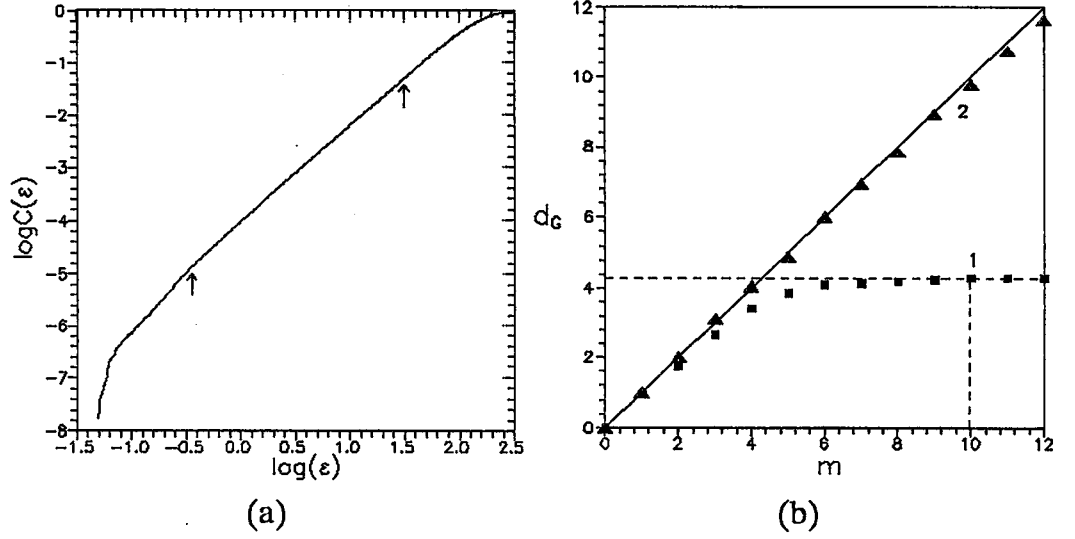
Embedding boyutunun ve kullanılan veri sayısının yeterince büyük olmasının yanında verilerin gürültü içermemesi durumunda $\ln C(\epsilon)$ ve $\ln(\epsilon)$ 'un grafiği lineer bir bölge verecektir. Bu bölge "ölçekleme bölgesi" olarak adlandırılır. Ölçekleme bölgesinin eğimi ise korelasyon boyutu d_G 'yi verir.

Korelasyon integralinin uygulamada sağladığı yararlar şu şekilde özetlenebilir:

i) Korelasyon boyutu d_G 'nin hesaplanmasında kullanılır, (2.23) ile verilen eşitlikten de anlaşıldığı gibi korelasyon boyut, $\ln C(\epsilon)$ - $\ln \epsilon$ grafiğinin eğimidir, (bak. Şekil 2.6 a).

ii) Deterministik kaotik bir süreç için, farklı embedding boyutlarına (m) karşı gelen korelasyon boyutları (d_G) Şekil 2.6 b'de 1 no.lu eğri ile gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi d_G , belli bir m değerinden doymaya ulaşmaktadır. Bu eğrinin eğiminin sıfır olduğu noktanın apsisi, çekicinin kaç boyutlu bir uzay içerisine embed edileceğini gösterir.

iii) Şekil 2.6 b'de verilen 2 no.lu eğrideki gibi, eğer d_G belli bir m değerinden itibaren doymaya ulaşmıyorsa söz konusu süreç rastgeledir.



Şekil 2.6. Korelasyon integralinin kullanıldığı yerler. (a) korelasyon boyutunun hesaplanmasında (oklar ölçekleme bölgesini göstermektedir), (b) deterministik kaos (1 no.lu eğri) ile beyaz gürültünün (2 no.lu eğri) ayırt edilmesinde.

2.2.4. Genelleştirilmiş Boyutlar

Renyii (1970), kapasite, bilgi ve korelasyon boyutunu özel durumlar olarak içeren bir boyutlar ailesi tanımlamıştır. Genelleştirilmiş entropi tanımı $q=0,1,\dots$ için şu ifadeyle verilmektedir :

$$H_q(\epsilon) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q(\epsilon) \quad , \quad q \neq 1 \quad (2.25)$$

ve

$$H_1(\epsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i(\epsilon) \ln p_i(\epsilon) \quad , \quad q=1 \quad (2.26)$$

Renyii boyutları şu eşitlikle verilmektedir :

$$d_q = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_q(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad q=0,1,\dots \quad (2.27)$$

Buna göre, $d_C=d_0$, $d_I=d_1$, $d_G=d_2$ ve $d_G \leq d_I \leq d_C$ olduğu son eşitlikten görülebilir. Genel olarak $d_q \geq d_q$ - ise $q \leq q'$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca pek çok kaynakta d_G , d_I ve d_C sırasıyla ν , σ ve D harfleriyle de gösterilmektedir (bu çalışmada da pratikliği nedeniyle en son verilen notasyonların kullanılması tercih edilecektir). Daha yüksek mertebeden boyutlar, çekici üzerindeki noktaların dağılımının üniform olmaması durumuna oldukça duyarlıdır. Eğer noktaların dağılımı hemen hemen üniform ise, daha yüksek mertebeden boyutların alacağı değerler değişmez. Daha önce bahsedilen korelasyon fonksiyonu $C(\epsilon)$, nokta çiftleri arasındaki korelasyonu verir. Daha yüksek mertebeden örneğin 3.üncü mertebeden d_3 boyutu üç nokta, d_4 boyutu dört nokta arasındaki korelasyonla ilişkilidir, (Rasband, 1990).

Buraya kadar bahsedilen boyutlar hakkında doğal olarak şu sorular aklı gelebilir: Boyutlar arasında ne gibi ilişkiler vardır? Bu boyutlar birbirleriyle özdeş midir? Bunlardan biri diğerine göre daha kullanışlı mıdır? vb. Herşeyden önce şunu belirtmekte yarar vardır. Konuyla ilgili çalışmalar son yıllarda yoğun bir şekilde sürmektedir. Bu nedenle boyutlar arasındaki ilişkiler ve farklı boyutların ne anlama geldiği tam olarak netleşmiş değildir. Bunun simülasyon veya deneysel verilerle yapılan çalışmalar için özellikle geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Bir takım belirsizliklerin ortaya çıkmasının temel nedenlerinden en önemlisi garip veya kaotik çekicinin net bir tanımının olmamasıdır. Diğer bir neden ise daha önce bahsedilen boyutlar için bir takım istatistiksel özelliklerin analizinde karşılaşılan zorluklardır. Bütün bunlara ek olarak tek bir sayının, kaotik bir çekicinin karmaşık yapısını tam olarak yansıtmaması beklenemez. Elimizde iki tane çekici olduğunu farzedelim. Sadece elde edilen boyut değerinden yola çıkarak bu iki çekiciyi birbirinden ayırt etmek mümkün müdür? Bunun için ilave bilgiye ihtiyacımız var mıdır? vb. sorular da aklı gelebilir, (Parker ve Chua, 1989).

Boyut, kaotik ve kaotik olmayan çekicilerin ayırt edilmesinde kullanılabilir.

Bilindiği gibi kaotik olmayan çekiciler tam sayı bir boyuta sahiptir. Buna karşın kaotik çekiciler fraktal bir boyuta sahiptir. Teorik bakımdan durum böyle olmakla beraber, bu sınıflandırma uygulamada oldukça yararsızdır. Herşeyden önce mevcut boyut algoritmaları düşük bir prezisyona sahiptir. Bu nedenle, elde edilen boyut değerinin gerçekten fraktal olup olmadığı tartışması gündeme gelmektedir. Boyutun temel kullanımı, çekicinin sahip olduğu karmaşıklığın niceliksel olarak belirlenmesi amacına yöneliktir. Bir çekicinin boyutu, onun dinamiğini tanımlamada kullanılacak gerekli durum değişkenlerinin sayısı için alt sınırı verir. Diğer bir deyişle boyut, çekicinin sahip olduğu serbestlik derecesinin sayısı için alt sınırdır. Örneğin, bir limit çevrim (boyut=1) üzerindeki hareket, birinci mertebeden bir diferansiyel denklemle tanımlanabilir. Böyle bir diferansiyel denklemin değişkeni, yörünge boyunca yay uzunluğunun veya dönme açısının değişimi olabilir. İkinci bir örnek olarak, boyutu 2.4 olan kaotik bir çekici üzerindeki hareketi dikkate alalım. Böyle bir hareket iki durum değişkeniyle değil üç durum değişkeniyle yani üçüncü mertebeden bir sistemle modellenenebilir. Eğer bir çekicinin boyutunu hesaplamaktaki amacımız sistemin dinamiğini tanımlamak için gereken durum değişkenleri sayısının alt sınırını tahmin etmek ise bu durumda ν , σ ve D boyutlarından herhangi birini seçmek için teorik bir neden yoktur. Çünkü bu boyutlar birbirlerine yakın değerler vereceklerdir. Bu durumda, hangi boyutun tercih edilmesi gerektiği, o boyutun hesaplanmasındaki kolaylığa ve doğruluğa bağlıdır. Diğer önemli bir nokta şudur: Korelasyon boyutu, fraktal boyut için bir alt sınır; kapasite boyutu ise üst sınırı verir.

Daha önce fraktal boyutlar arasında $\nu \leq \sigma \leq D$ şeklinde bir eşitsizliğin geçerli olduğundan bahsedilmişti. Bununla birlikte, eğer çekici üniform bir nokta kümesinden oluşuyorsa, yukarıda bahsedilen üç fraktal boyut değeri de birbirine eşit olacaktır. Ancak, çekici kümenin bazı alt kümelerinin yörünge tarafından daha sık ziyaret edilmesi durumlarında üniform olmayan bir dağılım elde edilecektir. Oysa kapasite boyutu "daha sık ziyaret edilmeye"

karşı duyarlı değildir, fakat çekicinin geometrik yapısına önemli oranda bağımlıdır. Çekicinin ender olarak ziyaret edilen bölgeleri ile sıklıkla ziyaret edilen bölgelerinin kapasite boyutuna olan katkıları aynıdır. Bunun tersine korelasyon integrali, bu duruma karşı daha duyarlıdır. Çekicinin ortaya koyduğu dinamik sürece daha duyarlı olması nedeniyle korelasyon boyutunun kullanılması daha uygundur, Grassberger ve Procaccia (1983a). Bu iki boyut arasındaki farkı, uygulamada kullanılan veri sayısının yetersiz olduğu veya yeniden kurulmuş faz uzayları durumunda, gecikme zamanının yeterince doğru seçilmediği şeklinde yorumlamak da mümkündür, Henderson ve Wells, (1988).

2.3. Boyut Algoritmaları

Yeni algoritmaların geliştirilmesi konusu halen üzerinde çalışılan önemli bir araştırma alanıdır. Çekici üzerinde seçilen $\{X_1, \dots, X_N\}$ sonlu noktalar dizisi, boyut hesaplama algoritmalarının giriş verisi olarak kullanılır. Bu noktalar, daimi hale ulaşmış olan bir ya da daha çok yörünge üzerinde eşit zaman aralıklarında örneklenir. Diğer önemli bir nokta şudur: Boyut bulma algoritmaları, çekici hakkındaki bütün bilgiler için değil, onun üzerinde yer alan sonlu sayıdaki yörüngeyle ilgili kısmi bilgi elde etmek için verilirler, (Parker 1989).

2.3.1. Kapasite Boyutu İçin Algoritmalar

Daha önce de bahsedildiği gibi, $\ln N(\epsilon)$ 'un $\ln(1/\epsilon)$ 'a karşı çizilen grafiğin eğimi kapasite boyutunu verir. $N(\epsilon)$ 'u hesaplamak için, ϵ 'un bazı minimum ϵ_0 değerleri seçilir. Daha sonra durum uzayı bir kenarı ϵ_0 olan kutularla doldurulur. Bilgisayarda bir boolean dizi oluşturulur ve bütün elemanlarına ilk değer olarak "yanlış" atanır. Bu dizinin her bir elemanı bir kutuya karşılık gelmektedir. Bir X_i veri noktası için, X_i 'nin içinde kaldığı kutunun indisi

hesaplanır ve bu indis değerine karşılık gelen dizi elemanına "doğru" değeri atanır, "doğru" değerini alan dizi elemanı sayısı $N(\epsilon_0)$ 'dır.

Kısaca özetlenen kutu sayma tekniğinin iki önemli dezavantajı vardır:

i) Boyutun 3'den büyük olması durumunda bellek gereksinimi önemli ölçüde artar. Boolean dizinin eleman sayısı $(1/\epsilon_0)^m$ ile orantılıdır. Örneğin, $\epsilon_0=0.01$ ve $m=4$ için dizinin eleman sayısı 10^8 mertebesindedir.

ii) Çekici üzerinde bir noktayı içeren ϵ_0 boyutundaki hemen her kübün yörünge tarafından ziyaret edildiğinden emin olmak için çok sayıda veriye ihtiyaç vardır. Aksi takdirde D 'nin tahmini daha küçük bir değer verecektir. Bu durum kapasiteinin, tipik bir yörünge tarafından sıklıkla ve ender olarak ziyaret edilen çekici parçalarını ayırt edememesi gerçeği ile doğrudan ilişkilidir.

2.3.2. Korelasyon Boyutu İçin Algoritmalar

Korelasyon boyutu, p_i 'nin tahmini kutu sayma algoritmasıyla elde edildikten sonra doğrudan,

$$d_G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Ln} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\text{Lne}} \quad (2.28)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Fakat daha önce de bahsedildiği gibi bu algoritma yeterince etkin değildir. Daha hızlı bir algoritma Grassberger ve Procaccia (1983a,b) tarafından ileri sürülmüştür. Buna göre korelasyon boyutu, $C(\epsilon)$ 'un ϵ ile değişiminin, çift logaritmik eksen takımında verdiği lineer bölgenin eğimidir. Verilen bir ϵ değeri için $C(\epsilon)$ 'un tahmini $r_{ij} = \|X_i - X_j\|$ şeklindeki bütün ara nokta uzaklıklarının hesaplanmasını içerir. $i, j = 1, \dots, N$ için $r_{ij} < \epsilon$ koşulunu sağlayan durumların sayısı $N(\epsilon)$ ise $C(\epsilon) = N(\epsilon)/N^2$

şeklinde hesaplanır. Çift logaritmik eksen takımının x -ekseni $\ln \epsilon$ 'dur. x -ekseni üzerinde eşit olarak dizilmiş bir noktalar kümesi elde etmek için şu yaklaşım kullanılabilir: $N(\epsilon)$ 'u hesaplamak için ϵ değerleri öyle seçilir ki bunlar arasındaki uzaklık geometrik olarak artsın. Diğer bir deyişle bazı $\epsilon_0 > 0$ ve bazı tam sayı $K > 0$ için $\epsilon_0, \epsilon_0^2, \dots, \epsilon_0^K$ dizisi elde edilmelidir. Bu işlem için bir boyutlu $N_\epsilon[]$ dizisi oluşturulur. $N_\epsilon[k], \epsilon_0^{k-1} < r_{ij} < \epsilon_0^k$ koşulunu sağlayan ara noktaların sayısıdır. Buna göre,

$$N(\epsilon_0^k) = \sum_{i=1}^k N_\epsilon[i] \quad k=1, \dots, K \quad (2.29)$$

yazabiliriz. $N_\epsilon[]$ dizisini doldurmanın bir yolu da, ϵ_0 'ı b gibi küçük bir tam sayı şeklinde seçmektir. Her bir r_{ij} değerinin $\log_b r_{ij}$ şeklinde logaritması alınarak bunun tam sayı kısmı k değişkenine atanır ve $N_\epsilon[k]$ bir arttırılır (k değeri genellikle negatiftir, bu nedenle elde edilen değere sabit bir sayı eklenir. Bundan amaç $N_\epsilon[]$ dizisinin indis değerinin pozitif kalmasını sağlamaktır.). Bu yöntemin dezavantajı logaritma fonksiyonunun hesaplanmasının fazla bilgisayar zamanı almasıdır.

Grassberger ve Procaccia (1983b), $N_\epsilon[]$ dizisinin daha etkin bir şekilde hesaplanabilmesi için, bilgisayarlarda kullanılan kayan noktalı sayı gösteriminin avantajını kullanan bir algoritma önermiştir. Kayan noktalı bir r_{ij} sayısı mantis/üst formatı kullanılarak bit dizisi şeklinde gösterilebilir.

$$r_{ij} = \pm m b^e \quad (2.30)$$

Burada e üssü, b ise tabanı gösteren tam sayılardır. Mantisi gösteren m ise $1/b \leq m < 1$ şeklinde normalize edilmiş kesir kısmını gösterir. 32-bit IEEE standartında $b=2$ 'dir. İlk bit işareti, sonraki sekiz bit üssü ve geriye kalan 23 bit ise mantis kısmına ayrılmıştır. Kayan nokta gösteriminin avantajından

yararlanabilmek için $\epsilon_0 = 2^{e_{\min}}$ şeklinde seçilmelidir, burada $e_{\min}$ kayan nokta gösteriminde mümkün olan en küçük üstür. K 'nın seçimi ise

$$K = e_{\max} - e_{\min} + 1 \quad (2.31)$$

şeklinde yapılır. Bu ifadedeki $e_{\max}$ mümkün olan en büyük üstür. Her bir r_{ij} ara nokta uzaklığı için $N_{\epsilon}[e - e_{\min} + 1]$ dizi elemanı bir arttırılır, e, r_{ij} 'nin kayan noktalı gösterimdeki üssüdür. Bu üs değerine, indisin pozitif kalması için $1 - e_{\min}$ sabit sayısı eklenmiştir.

2.4. Algoritmaların Uygulanması Aşamasında Karşılaşılan Problemler

Kapasite ve korelasyon boyutu için kısaca özetlenen algoritmaların uygulanması aşamasında bazı güçlüklerle karşılaşmaktadır. Bunların başında, kümedeki nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların hesaplanması, çift logaritmik eksen takımında eğimin doğru bir şekilde hesaplanması, algoritmaların verilerin gürültü içermesine duyarlı olmamaları, yüksek embedding boyutu durumunda algoritmaların doğruluğunun ve etkinliğinin azalması vb. sayılabilir.

2.4.1. Uzaklık Hesaplamaları

Gerek korelasyon boyutu ve gerekse kapasite boyutu için noktalar arası uzaklığın ölçülmesi gerekmektedir. Yalnızca bir uzaklık hesaplaması fazla bilgisayar zamanı gerektirmeyen bir işlemdir ancak N tane nokta için kabaca $N^2/2$ kadar mesafe hesaplaması gerekmektedir. Bu nedenle büyük N değerleri için uzaklık hesaplamaları, bu algoritmaların en fazla zaman gerektiren kısımlarıdır. Hesaplanacak uzaklık sayısını azaltmakta kullanılabilecek sadece bir kaç teknik vardır. Bir yaklaşım, rastgele referans noktalarından $(\{X_{i(\text{ref})}\} \subset \{X_i\})$ oluşan N_{ref} şeklinde küçük bir küme seçmektir. Seçilen

referans noktaları ile diğer X_i noktaları arasındaki mesafe, algoritma tarafından kullanılır. Bu algoritma uzaklık hesaplama sayısını yaklaşık

$$N_{ref}(N-N_{ref}/2) \quad (2.32)$$

kadar azaltır. Buna göre mesafe hesaplama sayısındaki azalma, $2N_{ref}/N$ faktörüyle orantılıdır.

Noktalar arası uzaklıkların hesaplanmasında kullanılan ikinci bir teknik de l_1 normudur. İki nokta arasındaki uzaklık r ise, l_1 normu,

$$r = \|u\|_1 = |u_1| + \dots + |u_n| \quad (2.33)$$

şeklinde verilir, bu ifadede $u=[u_1 \dots u_n]^T$ dir. Dikkat edilirse l_1 normu çarpma ve karekök alma işlemlerini içermemektedir. Bu özelliği ile l_1 normu, bilgisayar hesaplamalarında kayan nokta işlemlerini önemli ölçüde azaltır.

2.4.2. Eğim Hesaplamaları

Boyut hesaplamalarında karşımıza çıkan çift logaritmik grafiğin eğimi genellikle en küçük kareler yöntemiyle hesaplanmaktadır. Buna göre eğim (s) şu regresyon ifadesiyle verilir:

$$s = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

Burada x_i ve y_i sırasıyla çift logaritmik grafiğin x ve y -eksenlerinde temsil eden değişkenlerdir. Bazı durumlarda $\ln C(\epsilon) - \ln \epsilon$ grafiğinde eğimin hemen hemen sabit olduğu bölge oldukça sınırlıdır. Dolayısı ile eğimin hesaplanmasında sadece o bölgeye düşen veri kullanılabilir durumdadır. Eğim hesaplamasında kullanılabilir grafik parçasını belirleyebilecek bir teknik henüz mevcut değildir. Ayrıca çift logaritmik grafik farklı eğimlere sahip iki, ya da daha fazla bölgeden meydana gelebilir.

2.4.3. Verilerin Gürültü İçermesi

Yalnızca çekicinin yapısı değil aynı zamanda gürültülü veri de boyutun, uzunluk ölçeğine bağımlı olmasına neden olabilir. Verilerin gürültü içermesi, çekicinin genişlemesine yol açar. Diğer bir deyişle, eğer çekici, gürültü seviyesinin altında bir uzunluk ölçeği ile $\mathbb{R}^m$ uzayına embed edilmiş ise gürültülü çekicinin boyutu m olacaktır. Basit bir örnek olarak, bir limit çevrim üzerindeki noktalar kümesini dikkate alalım. Kümenin gürültü içermemesi durumunda çift logaritmik grafik tek bir eğime sahip sahiptir ve değeri 1'e eşittir. Bu kümeye gürültü eklendiğinde elde edilen veriler ince bir halka üzerinde yer alırlar ve çift logaritmik grafik iki eğime sahip olur. Özetle, gürültü seviyesinden daha büyük ϵ değerleri için eğim sayısı 1, daha küçük ϵ değerleri için ise eğim sayısı 2'dir.

Filtre edilmiş kaotik veriden hesaplanan fraktal boyutun, orijinal veriden hesaplanan boyut değerinden daha büyük olduğu gösterilmiştir, (Badii 1988). Ayrıca Chennaoui (1990) tarafından yapılan bir çalışmada kaotik bir zaman serisinin filtre edilmiş olup olmadığına karar vermek için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemle göre, eğer zaman serisi filtre edilmiş ise bilinmeyen filtrenin parametreleri seriden elde edilebilmekte dolayısı ile orijinal zaman serisi yeniden kurulabilmektedir.

Faz uzayında bir çekicinin dinamiği, zaman ya da frekans ortamı ile sınırlı tutulamayacağından Wiener ve Kalman filtreleri gibi klasik yöntemler "gürültü azaltma yöntemi" olarak kullanılamazlar, (Kostelich ve Yorke, 1988). Bu araştırmacılar tarafından önerilen yöntemde, faz uzayında pek çok komşu noktalar alarak sistemin dinamiğine lokal bir yaklaşım önerilmektedir. Bu yöntem, ölçüm presizyonunun sınırlı olduğu ve çok sayıda veri toplanması gereken durumlar için özellikle önerilmektedir.

Eğer orijinal veriler gürültü içermiyorsa $C(\epsilon)$, $C(\epsilon) \sim \epsilon^v$ şeklinde ölçeklenir. Verilerin gürültü içermesi durumunda, çekici m -boyutlu bir uzay içerisine embed edilirse, gürültü şiddetinden daha küçük uzunluk ölçeklerinde, gürültülü yörüngeyi doldurmasını bekleyebiliriz. Bu durumda $C(\epsilon)$, $C(\epsilon) \sim \epsilon^m$ şeklinde ölçeklenir. Orijinal veriler gürültü içeriyorsa $\log C(\epsilon) - \log(\epsilon)$ grafiğinin eğimi, gürültü şiddeti ile karakterize edilen uzunluk ölçeklerine kadar v 'ye, daha küçük uzunluk ölçeklerinde ise m 'ye eşit olacaktır. Özetle, belirli seviyede gürültü içeren bir kaotik çekiciden v 'yi elde etmek için şu sıra izlenmelidir: Önce farklı m değerleri için faz uzayı yeniden kurulur ve bunlara karşı gelen $\log C(\epsilon) - \log(\epsilon)$ grafikleri üst üste çizilir. Gürültü şiddetinin üzerindeki uzunluk ölçeklerinde, bütün eğriler doğrusal bir hal alır ve eğimleri v 'ye eşittir. Gürültü şiddetinin altındaki uzunluk ölçeklerinde ise eğimler o eğriyi temsil eden m değerini alacaktır. Yukarıda önerilen algoritmanın iki önemli avantajı vardır. Bunlardan birincisi, gürültülü çekicinin karakterize edilmesi için etkin bir yöntem ortaya koyması ikincisi ise $\log C(\epsilon) - \log(\epsilon)$ grafiğinin eğim değiştirdiği noktaya karşı gelen ϵ değerinin sistemdeki gürültü seviyesi hakkında bilgi vermesidir, (Ben-Mizrachi ve Procaccia, 1984).

2.4.4. Boyut Hesaplamalarında Karşılaşılan Diğer Problemler

Boyut hesaplama algoritmalarının istatistik ve doğruluğu (accuracy) henüz iyi anlaşılmış değildir. Boyutun tam bir doğrulukla tahmin edilebilmesi için kaç tane veri noktasına gereksinim vardır? Bu tahminin ortalama ve standart sapması nedir? İstatistikler, embedding uzayına nasıl bağlıdır? vb. pek çok sorunun cevaplanması gerekmektedir.

Ayrıca konuyla ilgili pek çok araştırmada boyut hesaplamalarının doğruluğuna istatistiksel açıdan yaklaşılmıştır. Ancak Nerenberg ve Essex (1990) tarafından yapılan bir çalışmada geometrinin sistematik rolüne dikkat çekilmiştir. Genellikle bir yörünge Euclid uzayında yer alır ve uygulamada bir

sınırı sahiptir. Sonlu bir veri kümesi için öyle bir ϵ değeri vardır ki bunun altında, aralarındaki uzaklık bu değerden daha küçük olan nokta çiftleri mevcut değildir. Diğer taraftan, verilen ϵ değeri kümenin çapını aştığı zaman korelasyon fonksiyonu daha fazla yükselme göstermez yani doymaya ulaşır. Özetle ölçekleme bölgesi, "depopülasyon" ve "doyma" bölgeleri arasında yer alır. Seçilen bir m değeri için, faz uzayındaki noktaların yoğunluğunu yeterince dağınık hale getirmek için N azaltılırsa ölçekleme bölgesi sıkışmaya başlar ve sonunda aynı ölçek üzerinde hem depopülasyon hem de doyma gerçekleşir. Diğer bir deyişle N 'nin daha fazla azaltılması durumunda ölçekleme bölgesi tamamen ortadan kalkar ve $C(\epsilon)$, ϵ 'un her hangi bir aralığında ölçekleme göstermez. Yukarıda anlatılanların tersine eğer N sabit tutulup m arttırılırsa aynı şekilde ölçekleme bölgesi daralacaktır.

Ancak m 'nin arttırılması, faz uzayındaki noktaların yoğunluğunun azalması yönünde etki yapar. Dolayısı ile $C(\epsilon)$, m 'nin artmasıyla daha küçük ϵ değerlerinde doymaya ulaşacaktır. Depopülasyon ve doymanın aynı bir ϵ değerinde meydana geldiği m değeri "kritik embedding boyutu (m_c)" olarak adlandırılır. Bir veri kümesi için $m \geq m_c$ olması, kullanılan veri sayısının yeterli olmadığını gösterir, (Nerenberg ve Essex, 1990).

Boyut hesaplamalarında kullanılan algoritmalar, düşük boyutlu uzaylar içine gömülmüş, düşük boyutlu çekiciler için oldukça doğru sonuçlar verirler (düşük boyutlu uzay, $1 \leq m \leq 5$ koşuluna uyan $\mathbb{R}^m$ uzayıdır). Embedding boyutu arttığı zaman, algoritmaların doğruluğu ve etkinliği de azalır. Embedding boyutunun artması, embedding uzayının çok daha fazla bir kısmının boş kalmasına neden olur. Bu nedenle istatistiksel olarak daha güvenli boyut tahminlerine ulaşabilmek için kullanılan veri sayısı arttırılmalıdır. Ayrıca, yüksek boyutlarda noktalar arası mesafeler oldukça dar bir aralık içerisinde dağılma eğilimi gösterirler.

BÖLÜM 3: ZAMAN SERİLERİNDEN DETERMİNİZMİN BELİRLENMESİ

Bilindiği gibi pek çok meteorolojik değişken, konumu sabit olan gözlem parklarında bir zaman serisi şeklinde ölçülmektedir. Atmosferik süreçler, çok sayıda bağımsız değişken tarafından meydana getirilen bir faz uzayında cereyan ederler. Diğer bir deyişle, (bazı istisnalar dışında) bir dinamik sistem şeklinde ifade edilebilmeleri oldukça zordur. Daha önce de bahsedildiği gibi, bir dinamik sistemin çekicisi, asimtotik sınırları bu dinamiği tanımlayan bağımsız değişkenler tarafından oluşturulan bir faz uzayındaki yörüngeler ile temsil edilebilir. Düzenli Δt zaman aralıklarında örneklenmiş tek bir durum değişkenine ait zaman serisinden hareketle faz uzayının yeniden kurulması mümkündür. Bunun için önce çekici ile ilgili bilgilerin zaman serisinden tahmin edilmesi gerekmektedir.

Dördüncü Bölüm'de iyi bilinen bazı dinamik sistemler için orijinal faz uzayları ile çalışılmıştır. Ancak, deneysel veriler durumunda korelasyon boyutuna yakınsamanın belirlenebilmesi için her şeyden önce faz uzayının yeniden kurulması gerekmektedir. Bu nedenle, konunun ayrı bir bölüm halinde incelenmesi uygun görülmüştür.

3.1. Faz Uzayının Yeniden Kurulması

Eğer elimizde herhangi bir süreçten örneklenmiş bir zaman serisi (veya durum değişkenlerinden birisi) varsa, İkinci Bölüm'de anlatılan boyutların hesaplanabilmesi için her şeyden önce faz uzayının yeniden kurulması

gerekmektedir. Bu nedenle önce "embedding boyutu" üzerinde duracağız.

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n) ; \quad j=1, \dots, n \quad (3.1)$$

şeklinde herhangi bir sürecin dinamiğini tanımlayan birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada faz uzayı n tane koordinat (x_j 'ler) tarafından oluşturulur. Diğer bir deyişle, dinamik sistem n tane bağımsız değişkene sahiptir. Bu nedenle sistemin zamansal gelişimi $\xi(t)$ vektörü ile verilebilir:

$$\xi(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \quad (3.2)$$

Bu vektörün bileşenleri, faz uzayında yörüngenin konumunu belirler. (3.1) ile verilen sistem, değişkenlerden birisi için (buna $x(t)$ diyelim) oldukça nonlinear olan tek bir diferansiyel denkleme indirgenebilir. Bu denklem n . mertebeden bir diferansiyel denklemdir:

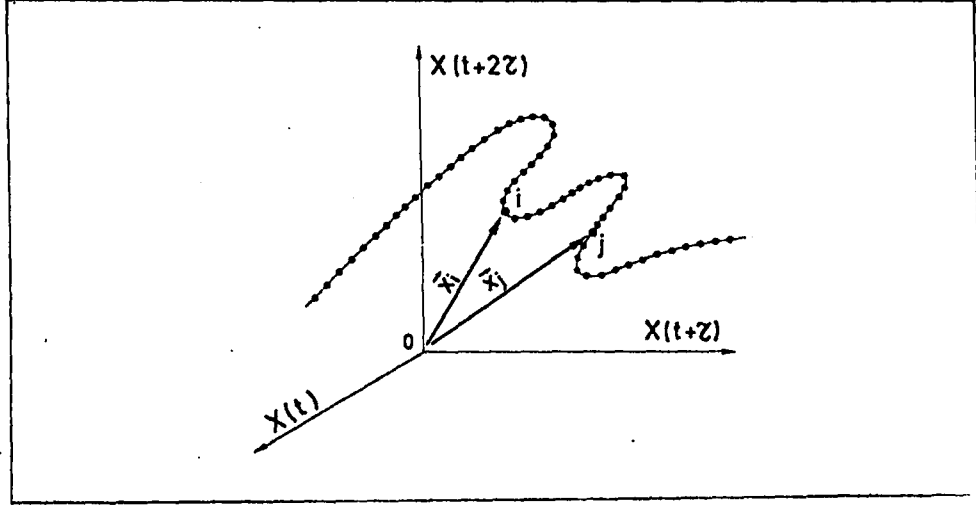
$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (3.3)$$

Bu denklem $x(t)$ ve onun $(n-1)$.inci türevinin $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ zamansal evrimini tanımlayan n tane denkleme karşılık gelir:

$$X(t) = [x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] \quad (3.4)$$

$X(t)$ vektörünün bileşenleri yörüngenin konumunun zamansal evrimini belirler. Bu vektöre daha büyük mertebeden türevlerin (örneğin $x^{(n)}(t)$ 'nin) eklenmesi gereksizdir, çünkü eklenen boyutta bağımsız bir bilgi üretimi olmayacaktır. İlk iki denklem ile verilen n -boyutlu orijinal faz uzayında, boyutu $d \ll n$ olan bir çekici ya da herhangi bir geometrik nesneyi dikkate alalım. Bu takdirde geometrik nesneyi (3.3) ve (3.4) eşitliklerinde verilen tek bir değişkenin $(x, x', x'', \dots)$ meydana getirdiği yeni bir faz uzayında tanımlamak mümkündür.

Bu şekilde oluşturulan yeni faz uzayının boyut sayısı, orijinal faz uzayının boyut sayısından daha az olabilecektir. Whitney embedding teoremi olarak bilinen bu teorem hemen hemen bütün diferansiye edilebilir dinamik sistemler



Şekil 3.1. Tek bir durum değişkeninden ($X(t)$) hareketle faz uzayının yeniden kurulması. Yeni faz uzayının koordinatları $X(t)$, $X(t+\tau)$ ve $X(t+2\tau)$ tarafından oluşturulmaktadır.

için geçerlidir. Bu teorem, orijinal faz uzayındaki d boyutlu bir geometrik nesnenin örneğin bir çekicinin

$$m = 2d+1 \quad (3.5)$$

boyutlu bir faz uzayına embed edilebileceğini ifade etmektedir. Tek bir durum değişkeninden çekici boyutunun elde edilebilmesi için m -boyutlu bir uzay içerisine (zaman serisinin kendisi ve $(m-1)$ tane türevi) embed edilmesi yeterlidir:

$$X(t)=[x(t),x'(t),\dots,x^{(m-1)}(t)] \quad (3.6)$$

Bu durumda eğer m yeterince büyük seçilirse, orijinal faz uzayının boyutunu bilmek gerekli değildir. $x(t)$ sürekli değişkeni ile onun $(m-1)$ 'e kadar olan türevlerinin yerine Şekil 3.1'de gösterildiği gibi $x(t)$ ayrık zaman serisi ile onun $(m-1)$ 'e kadar $(m-1)\tau$ şeklindeki kaydırılmış durumları dikkate alınabilir.

$$X(t)=\{x(t),x(t+\tau),\dots,x[t+(m-1)\tau]\} \quad (3.7)$$

Faz uzayının yeniden kurulmasında kullanılacak veriler teori gereğince global veriler olmalıdır. Eğer lokal veriler kullanılacaksa şu hususlar

dikkate alınmalıdır:

i) Ölçümler farklı istasyonlarda simultane olarak yapıldıktan sonra, istasyonlar arasındaki korelasyon ve her bir zaman serisinin kapasite ve korelasyon boyutuna yaptığı katkıya karşı gelen "ağırlıklar" hesaplanmalıdır.

ii) Ölçümler öyle yapılmalı ki elde edilen seriler arasında herhangi bir korelasyon mevcut olmasın. Bu durumda global çekici, lokal çekicilerin bir toplamı şeklinde düşünülebilir, (Henderson ve Wells, 1988).

3.2. τ 'nın Seçimi

3.2.1. Otokorelasyon Fonksiyonu

Faz uzayının yeniden kurulması aşamasında τ 'nın seçimi büyük önem taşımaktadır. Gecikme zamanı τ 'nın hesaplanmasında kullanılan klasik yöntem otokorelasyon fonksiyonudur. Bir zaman serisine otokorelasyon analizi uygulanırken şu varsayımlar daima gözönünde bulundurulmalıdır:

- Ele alınan verilerin dağılımı normaldir,
- Otokorelasyon fonksiyonu, aynı bir seriden τ zaman farkıyla elde edilen iki seri arasındaki lineer bağımlılığı ölçer.

Uygulamalar pek çok verinin dağılımının normal olmadığını göstermektedir. Verilerin normal dağılılı olmaması otokorelasyon katsayılarını önemli ölçüde çarpıtmaktadır, (Şen, 1978). Otokorelasyon fonksiyonu iki seri arasındaki lineer ilişkiyi ölçtüğünden, nonlinear bir ilişki ile hiç ilişki olmaması durumlarını birbirinden ayırma imkanı vermez. Otokorelasyon fonksiyonunun ilk sıfırı (fonksiyonun $\rho=0$ eksenini kestiği lag değeri) τ olarak alınır. Bundan amaç iki koordinatın

lineer bağımsız hale geldiği zamanı belirlemektir, (Shuster, 1988). Ancak diğer koordinatlar arasında var olabilecek korelasyondan dolayı, bu yöntemin yüksek boyutlu sistemlere uygulanması yanlış sonuçlara neden olabilir, (Buzug ve Pfister, 1992).

3.2.2. Karşılıklı Bilgi Fonksiyonu

Fraser ve Swinney (1986) τ 'nın seçimi için, otokorelasyondan daha iyi sonuç veren "karşılıklı bilgi (mutual information)" yöntemini önermiştir. Karşılıklı bilgi, iki değişken arasındaki genel bağımlılığı ölçer. Ölçüm sonuçları $s_1, s_2, \dots, s_n$ ve bunlara karşı gelen olasılıkların sırayla $P_s(s_1), P_s(s_2), \dots, P_s(s_n)$ olduğu bir S sistemini dikkate alalım. (1.14) eşitliğine benzer şekilde sistemin entropisini şu şekilde yazabiliriz:

$$H(S) = -\sum_i P_s(s_i) \log_2 (P_s(s_i)) \quad (3.8)$$

$H(S)$, s_i belirlemek için yapılan bir ölçümden kazanılan ortalama bilgi miktarıdır.

Şimdi S sisteminin yanında Q gibi ikinci bir sistemi dikkate alalım. Bu sistemin verdiği mesajların kümesi $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ ve bunlara karşı gelen olasılıklar $\{P_q(q_1), P_q(q_2), \dots, P_q(q_n)\}$ olsun. S ve Q sistemleri için karşılıklı bilgi şu eşitlikle verilir:

$$I(Q, S) = H(Q) + H(S) - H(S, Q) \quad (3.9)$$

Buradaki $H(S)$, (3.8) eşitliği ile verildiği gibidir. $H(Q)$ 'da benzer şekilde tanımlanır. $H(S, Q)$, S ve Q 'nun bileşik entropi fonksiyonudur ve (s, q) çiftlerinin ölçümünden kazanılan ortalama bilgi miktarını gösterir. $P_{sq}(s_i, q_j)$ bileşik olasılık dağılımını göstermek üzere $H(S, Q)$ şu

şekilde tanımlanır:

$$H(S,Q) = - \sum_i^n \sum_j^m P_{sq}(s_i, q_j) \log_2(P_{sq}(s_i, q_j)) \quad (3.10)$$

Buraya kadar verilen ifadelerden yararlanarak karşılıklı bilginin,

$$I(S,Q) = \sum_i^n \sum_j^m P_{sq}(s_i, q_j) \log_2 \left[\frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)P_q(q_j)} \right] \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilebileceği gösterilebilir. Karşılıklı bilgi, s için bir ölçüm değeri verildiğinde, q için ortalama kaç bitlik bir öngörü yapılabileceğini gösterir. $X(t)$ bir zaman serisi ise zamansal gelişim vektörü $Y(t)$ şu şekilde yazılabilir :

$$Y(t) = (X(t), X(t+\tau))$$

Bu durumda S ve Q zamansal gelişim vektörünün bileşenleri,

$$S = \{X(t)\} \quad ; \quad Q = \{X(t+\tau)\}$$

olacaktır. Karşılıklı bilgi, S 'nin ölçümlerinden Q 'nun ölçümleri hakkında öğrenilecek miktarın (bit olarak) sayısal bir ölçüsüdür.

Karşılıklı bilgi fonksiyonunu, τ 'nın çok büyük ya da çok küçük seçilmemesi amacına yönelik olarak kullanıyoruz. Diğer bir deyişle amacımız, orijinal faz uzayına bakmadan optimum gecikme zamanını belirlemektir. Karşılıklı bilgi fonksiyonunun ilk lokal minimumuna karşı gelen değerini τ olarak alıyoruz. τ 'yu bu şekilde seçilmekle, zamansal gelişim vektörünün ikinci bileşeninin, çekici hakkında, birinci bileşene göre mümkün olduğunca fazla "yeni bilgi" içerdiğinden emin oluyoruz. Özetle, τ öyle seçilmelidir ki (s,q) çiftlerinin ölçümlerinden elde edilecek yeni bilgi miktarı maksimum olsun. Bu nedenle τ , $X(t+\tau)$ mümkün olduğunca öngörülemez olacak şekilde seçilmelidir.

Maksimum öngörülemezlik, öngörülebilirliğin minimum olduğu bir zamanda yani karşılıklı bilginin minimum olduğu durumda gerçekleşir. $I(S,Q)$ daha yüksek boyutlar için şu şekilde genellenebilir:

$$I_n(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_j [H(X_j) - H(X_0, X_1, \dots, X_n)] \quad (3.12)$$

Ancak bazı çalışmalarda, embedding boyutunun dördü aşması durumunda karşılıklı bilgi yönteminin pratik olmadığı ifade edilmiştir, (Buzug ve Pfister, 1992; Martinerie, 1992). Buzug ve Pfister (1992) optimal gecikme zamanı ve embedding boyutunun hesaplanması için iki algoritma geliştirmiştir. Bunlardan birincisi "Fill-Faktör" algoritması olup, embedding uzayının optimum kullanımının gerçekleştirilmesi temel düşüncesi üzerine kurulmuştur. İkinci algoritma ise kaotik çekicinin lokal dinamik yapısını esas alan "İntegral Lokal Deformasyon" algoritmasıdır. Algoritmaların fraktal boyutu ve Lyapunov üstelleri spektrumu için çok iyi sonuçlar verdiği ancak dış gürültülere karşı duyarsız olduğu da araştırmacılar tarafından ifade edilmektedir.

Eğer τ çok küçük seçilirse, çekici yeni kurulan faz uzayının diyagonalı üzerinde sıkışacaktır. Sistem kaotik ve τ çok büyük seçilmiş ise $x(t)$, $x(t+\tau), \dots, x[t+(m-1)\tau]$ arasındaki korelasyon ortadan kalkacağından, söz konusu faz uzayındaki çekicinin yapısı bozulacaktır veya çekici ortadan kalkacaktır.

BÖLÜM 4: KORYELASYON BOYUTUNUN ARDIŞIK YAKLAŞTIRIMLARLA HESAPLANMASI VE DİNAMİK SİSTEMLERE UYGULANMASI

Uygulamada verilen bir sürecin deterministik kaotik olup olmadığını belirlemede; kapasite, bilgi, korelasyon vb. boyut değerleri kullanılmaktadır. Bunlardan korelasyon boyutu, hesaplanmasındaki kolaylık nedeniyle özellikle tercih edilmektedir. Grassberger-Procaccia Algoritması (GPA), "korelasyon integrali"nin bulunması için pratik bir yöntemdir. Korelasyon integralinin çift logaritmik eksen takımında verdiği lineer bölgenin (ölçekleme bölgesinin) eğimi korelasyon boyutuna karşı gelir. Ancak, uygulamada kullanılan veri sayısının yetersizliği, gürültü içermesi ve ölçekleme bölgesinin seçiminde yapılan hatalar fraktal boyut değerinin yanlış tahmin edilmesine yol açmaktadır. Tek bir durum değişkeninden hareketle kurulmuş faz uzayları ile çalışılması durumunda, yukarıda belirtilen hata kaynaklarına gecikme zamanı ve embedding boyutunun yanlış seçilmesi de eklenecektir. Ayrıca bir sayının, karmaşık bir dinamiği tek başına yansıtması beklenemez. Dolayısı ile fraktal boyut değerinin, incelenen süreç hakkında daha fazla bilgi taşıyacak şekilde ele alınması önerilebilir. Bu çalışmada, korelasyon integralinin hesaplanmasında kullanılan uzaklık matrisinden her satırda/bandda koelasyon integralinin ara değerleri hesaplanmıştır. Ölçekleme bölgesi sabit tutularak, ara korelasyon integrallerinin verdiği eğimler bulunmuştur. Elde edilen eğim değerlerinin, hesaplamada kullanılan satır/band sayısına göre değişimi çizilmiştir. Bazı dinamik sistemler, determinist fraktaller ve meteorolojik veri durumunda, korelasyon boyutunun asimtotik değerine yakınsama biçimleri incelenmiştir.

4.1. Satır ve Band Tarama Yaklaşımı

Bilindiği gibi korelasyon boyutun hesaplanmasında basitliği nedeniyle Grassberger-Procaccia Algoritması (GPA) sıklıkla kullanılmaktadır. Bu algoritma yardımıyla hesaplanan korelasyon integralinin ölçekleme bölgesinin eğimi korelasyon boyutu değerini vermektedir. $\{X_i, i=1,2,...,N\}$ çekici üzerinde bulunan noktalar olmak üzere, korelasyon integralinin hesaplanmasında kullanılan uzaklık matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots & \dots & \dots & d_{1N} \\ & 0 & d_{23} & d_{24} & \dots & \dots & \dots & d_{2N} \\ & & 0 & d_{34} & \dots & \dots & \dots & d_{3N} \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0 & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & d_{(N-1)N} \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde dir. Simetriden dolayı, sadece üst üçgen matrisin kullanılması yeterlidir. Bu durumda aralarındaki uzaklık ϵ 'dan küçük olan nokta çiftlerinin sayısının $N(N-1)/2$ ile normalize edilmesi gerekmektedir.

Deşiklilik (lacunarity) konusunda yapılan çalışmalardan bilindiği gibi, fraktal kümelerin elemanları arasındaki boşlukların küme içerisindeki dağılımı farklılıklar göstermektedir. Kümelerin farklı deşiklilik özelliği göstermesi nedeniyle uzaklık matrisinin ilk satırından/bandından son satırına/bandına doğru gidilirken, her bir satırın/bandın korelasyon integraline olan katkısının da farklı olması beklenebilir. Bu düşünceden hareketle, korelasyon integralinin ara değerleri, uzaklık matrisinin satırları ve birinci köşegene paralel bandlar boyunca iki farklı şekilde hesaplanmaktadır. Bundan sonra Satır ve band tarama yaklaşımı (STY ve BTY) olarak adlandırılacak bu yaklaşımlar,

$$C_i^{STY}(\epsilon, N) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=k+1}^N \theta(\epsilon - |X_k - X_j|) \right] \quad (4.2)$$

ve

$$C_i^{BTY}(\epsilon, N) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^{N-k} \theta(\epsilon - |X_{k+j} - X_j|) \right] \quad (4.3)$$

şekinde formüle edilebilir. Bu eşitliklerdeki normalizasyon faktörü N ,

$$N = i \left[N - \frac{(i+1)}{2} \right] \quad (4.4)$$

ile verilebilir. STY veya BTY üst indis ayrımının gerekmediği durumlarda, yazımda kolaylık sağlamak için,

$$C_i^{STY}(\epsilon, N) ; C_i^{BTY}(\epsilon, N) \rightarrow C_i(\epsilon, N) \quad (4.5)$$

notasyonlarının kullanılması tercih edilecektir.

Uzaklık matrisinden her adımda bir $C_i(\epsilon, N)$, ($i=1,2,...,N$), korelasyon integrallerini hesaplıyoruz. $i=N$ olması durumunda, $C_N(\epsilon, N)$ yerine, sabit N için $C(\epsilon)$ genel gösterimini kullanabiliriz. Korelasyon boyutun hesaplanmasında korelasyon integrali $C(\epsilon)$ kullanılacağı için $\log C(\epsilon) - \log(\epsilon)$ grafiğinin verdiği ölçekleme bölgesini sabit alarak, diğer korelasyon integrallerinin aynı bölgedeki eğimlerinin nasıl değiştiğini incelemek istiyoruz. Bu da her bir $\log C_i(\epsilon, N) - \log(\epsilon)$ grafiğinden eğim değerinin hesaplanmasını gerektirmektedir. Bu eğim değerlerini STY ve BTY yaklaşımı için sırasıyla $v_N^{STY}(\epsilon)$ ve $v_N^{BTY}(\epsilon)$ notasyonları ile, yazımda kolaylığı sağlamak amacıyla (4.5) ifadesinde olduğu gibi

STY/BTY ayrımının gerekmediği durumlar için,

$$v_N^{STY}(i) ; v_N^{BTY}(i) \rightarrow v_N(i) \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edelim. Sonuçta hesaplanan $v_N(i)$ değerlerini i 'nin bir fonksiyonu şeklinde grafik olarak elde edebiliriz.

Özetle, $v_N(i)$ değerlerinin i 'nin bir fonksiyonu olarak çizilmesi ile "korelasyon boyutuna bir yakınsama" elde edilmektedir.

Yukarıda açıklanan yaklaşım öncelikle kaotik bir çekiciye sahip olan dinamik sistemlere uygulanmıştır: Bunlar, üç boyutlu (3B) Lorenz, Rössler ve Rabinovich-Fabrikant, iki boyutlu (2B) Hénon, Kaplan-Yorke ve Zaslavskii ayrık dinamik sistemleri, bir boyutlu (1B) Logistic ve çadır (tent) tasvirleri ile Cantor kümesi ve Koch eğrisi gibi determinist fraktallerdir.

Uygulama kısmında ise maksimum ve minimum sıcaklık verisi için elde edilen sonuçlar, ARIMA(1,0,1) modelinin sonuçları kullanılarak test edilmiştir.

Bu bölümde ele alınan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde dördüncü mertebeden Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Sonuçların daha kolay karşılaştırılabilmesi için gerek denklemlerin integre edilmesinde, gerekse parametre ve veri sayısının seçiminde literatürde geçen çalışmalar esas alınmıştır, bu konuda özellikle Grassberger ve Procaccia (1983b)'dan yararlanılmıştır. Ayrıca bütün hesaplamalarda çift incelikli sayılar ile çalışılmış, logaritmik dönüşümlerde ise taban 10 alınmıştır. Uygulamada, ölçekleme bölgesinin eğiminin bulunmasında genellikle en küçük kareler yöntemi kullanılmaktadır. Bu çalışmada da aynı yöntem kullanılmıştır.

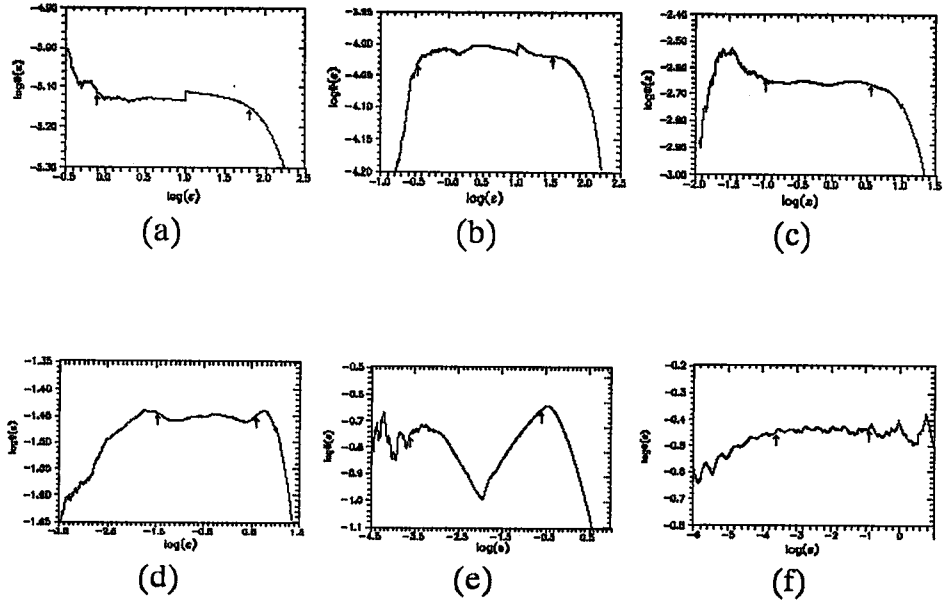
4.2. Korelasyon Boyutuna Yakınsama-Değişiklik İlişkisi

Değişiklik konusunda yapılan çalışmalardan bilindiği gibi, fraktal kümelerin elemanları arasındaki boşlukların küme içerisindeki dağılımı farklılıklar göstermektedir. Boşlukların küme içerisindeki dağılımı "sabit", "periyodik" ya da "aperiyodik" şeklinde üç grupta incelemek mümkündür. Kümelerin farklı değişiklik özelliği göstermesi nedeniyle, uzaklık matrisinin ilk satırından/bandından son satırına/bandına doğru gidilirken, her bir satırın/bandın korelasyon integraline olan katkısının da farklı olması beklenir. Bu farklılıklar, korelasyon integralinin ölçekleme bölgesine ve dolayısı ile korelasyon boyutuna yansımaktadır. Yapılan çalışmalarda anlaşılabileceği üzere ϵ sıfıra yaklaşırken, korelasyon integralinin beklenen ifadesi,

$$C(\epsilon) = \Phi(\epsilon)\epsilon^v \quad (4.7)$$

şeklinde, (Smith vd., 1986; Theiler, 1988; Smith, 1988). (4.7) denklemindeki $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonu, ele alınan kümenin değişikliğini yansıtır. Böyle bir fonksiyonun ortaya çıkmasının nedeni, söz konusu küme içindeki dağınık ya da boş bölgelerin varlığıdır. Çeşitli fraktal kümelerine ait $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonları Şekil 4.1'de toplu olarak verilmiştir. Bu grafiklerde ölçekleme bölgesine karşı gelen kısım iki ok işareti arasına alınmıştır.

$a=3.5699456$ parametre değeri için Logistic denklemi Cantor benzeri bir fraktal küme üretir. Bu durum için verilen $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonunda, ölçekleme bölgesinin başlangıcından itibaren genliği büyük ϵ değerlerine doğru artarak bozulan periyodik bir yapının varlığı dikkati çekmekle beraber, fonksiyonu periyodik değildir, (bak Şekil 4.1 f). Benzer şekilde diğer $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonlarının da periyodik olmadığı Şekil 4.1'den görülmektedir.



Şekil 4.1. Çeşitli fraktal kümelerin deşiklilik özelliğini yansıtan $\log\Phi(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri: (a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant, (d) Hénon, (e) Zaslavskii, (f) Logistic tasviri ($a=3.5699456..$).

(4.7) eşitliğinden hareketle,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log(\epsilon)} = v + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \Phi(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \quad (4.8)$$

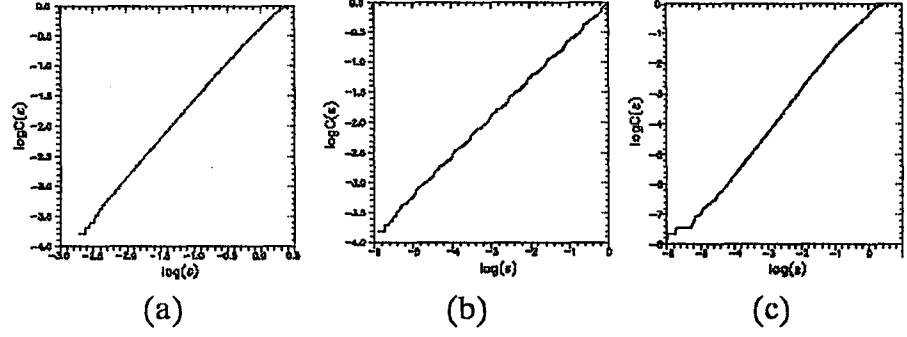
yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı korelasyon boyutuna eşit olduğuna göre,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \Phi(\epsilon)}{\log(\epsilon)} = 0 \quad (4.9)$$

olmalıdır. STY ve BTY yaklaşımları bakımından (4.8) eşitliği şu şekilde

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C_i(\epsilon, N)}{\log(\epsilon)} = v + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \Phi_i(\epsilon, N)}{\log(\epsilon)} \quad (4.10)$$

yazılabilir.



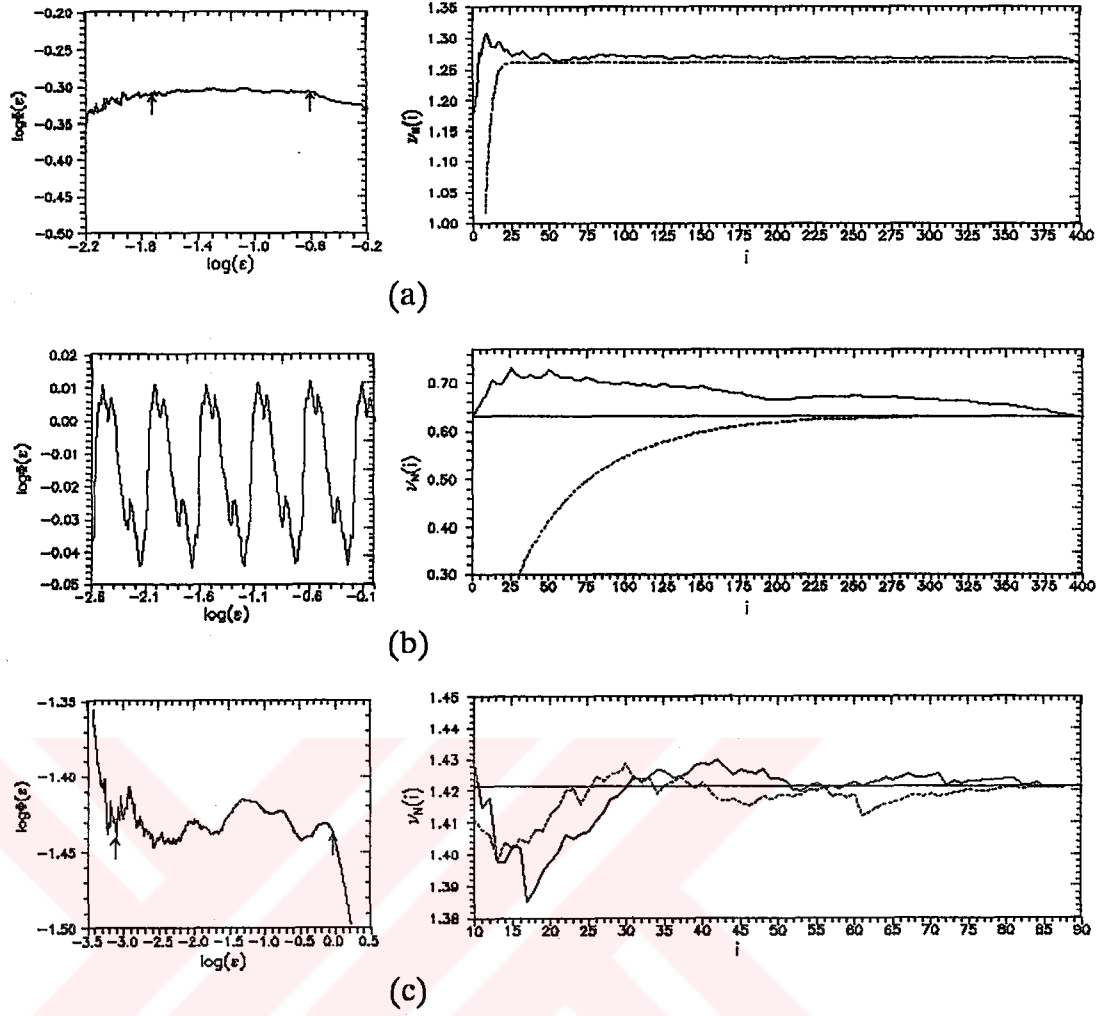
Şekil 4.2 Koch eğrisi (a), Cantor kümesi (b) ve Kaplan-yorke için $\log C(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafikleri

Uygulamada korelasyon boyutunun hesaplanması $\epsilon \rightarrow 0$ limit durumunda değil, ölçekleme bölgesine uydurulan doğrunun eğiminin bulunması şeklindedir. Ayrıca, (4.10) eşitliğindeki terimlerin sonuçlara ϵ bağımlılığı ile değil i bağımlılığı ile yansıdığı dikkate alınırsa, STY ve BTY ayrımı yapmaksızın,

$$v_N(i) = v + \frac{\log \Phi_N(i)}{\log(i)} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlikte $v_N(i)$, i . adımda hesaplanan değeri; v , uzaklık matrisinin tamamından hesaplanan korelasyon boyutunu göstermektedir. Eşitliğin sağ tarafındaki son terim ise, değişiklik nedeniyle korelasyon boyutunun değişimini temsil etmektedir. $\Phi(\epsilon)$ 'un sabit, periyodik ya da aperiodyk bir fonksiyon olması durumunda, korelasyon boyutuna yakınsamanın da farklı bir görünüm alacağı söylenebilir.

Değişiklik etkisinin korelasyon boyutuna yakınsamaya ne şekilde yansıdığını görmek için, $\log C(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafikleri Şekil 4.2 a-c'de verilen $\Phi(\epsilon)$ 'un sabit olduğu Koch eğrisi, periyodik olduğu Cantor kümesi ve aperiodyk olduğu Kaplan-Yorke ayrık dinamik sistemi seçilmiştir, Şekil 4.3 a-c. Şekildeki yatay çizgi korelasyon boyutunu, sürekli eğri STY'nı, kesikli eğri ise



Şekil 4.3. Korelasyon boyutuna yakınsama-değişiklik ilişkisi. Birinci sütundaki grafikler, ele alınan kümenin değişikliğini yansıtan $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonunun çift logaritmik eksen takımındaki çizimini, ikinci sütunda yer alan grafikler ise bu kümelerin korelasyon boyutuna yakınsamasını göstermektedir. (a) Koch eğrisi, (b) Cantor kümesi, (c) Kaplan-Yorke ayrık dinamik sistemi.

BTY'nı göstermektedir; bu gösterim, tezin ilerleyen bölümlerinde de kullanılacaktır. Korelasyon boyutu, Koch eğrisi için 1.2619, Cantor kümesi için 0.6309, Kaplan-yorke için 1.4216 olarak hesaplanmıştır.

Daha önce de belirtildiği gibi ara korelasyon integralleri $i=1,2,...,N$ değerleri için hesaplanmaktadır. Ancak korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri, $\nu_N(i)$ değerleri her ΔN satırda/bandda bir işaretlenecek şekilde çizilmiştir. ΔN çizim

yoğunluğu faktörü olarak adlandırılabilir. Şekil 4.3'de verilen korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri $N=16360$, $\Delta N=41$ (Kaplan-yorke için $N=15000$, $\Delta N=163$) alınmıştır.

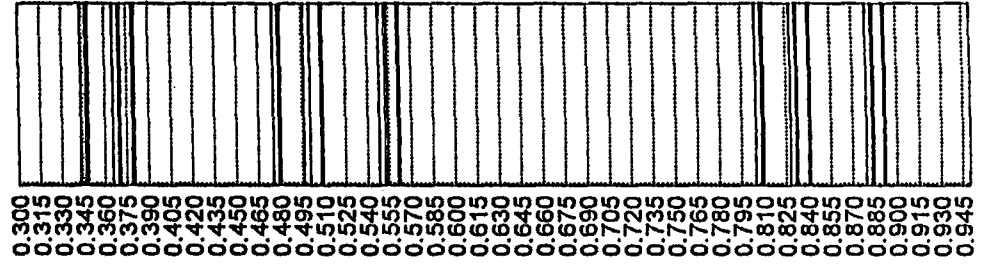
Şekil 4.3 a'daki ilk grafik, Koch eğrisine ait veriden elde edilen $\log\Phi(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiğini göstermektedir. Bu grafikte ölçekleme bölgesi oklarla işaretlenmiştir. Bu bölge içinde eğrinin hemen hemen sabit gittiği görülmektedir. Koch eğrisine ait korelasyon boyutuna yakınsama grafiğinde STY çok kısa bir salınımdan sonra, tahmin edilen boyut değerine ulaşmakta ve salınım yapmaksızın gitmektedir. BTY eğisi ise hızla artarak tahmin edilen boyut değerine ulaştıktan sonra sabit bir şekilde gitmektedir.

Cantor kümesine ait $\log\Phi(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiği Şekil 4.3 b'den de görüldüğü gibi peryodik bir davranış göstermektedir. Cantor kümesi için STY eğrisi, korelasyon boyutunun altına hiç inmezsizin tahmin edilen boyut değerine yaklaşmaktadır. Yakından incelendiğinde, bu eğri üzerinde hızla sönümlenen peryodik bir davranışın varlığı görülmektedir. Ayrıca, Cantor kümesi durumunda tahmin edilen korelasyon boyutuna yakınsama hızı, diğerlerine göre daha yavaş olmaktadır.

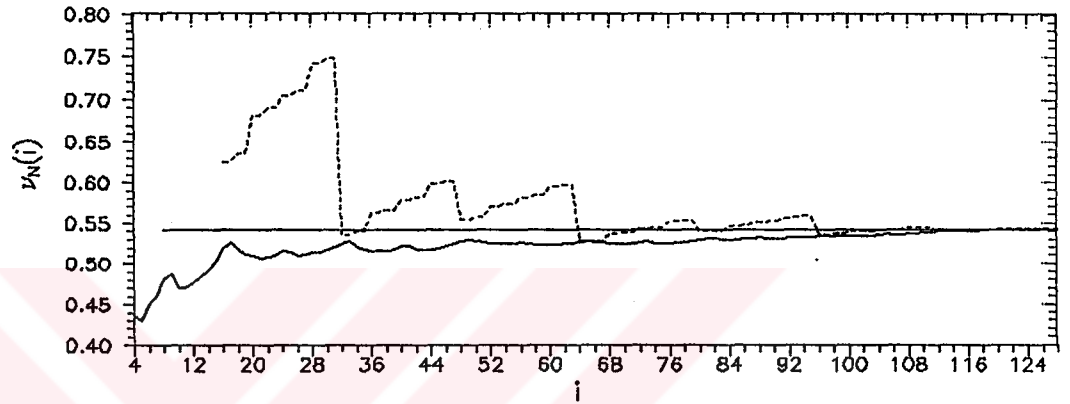
Şekil 4.3 c'de verilen Kaplan-Yorke dinamik sistemine ait $\log\Phi(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiği ise ölçekleme bölgesi içinde aperyodik bir davranış göstermektedir. STY ve BTY eğrileri de bu davranışa uygun bir şekilde tahmin edilen boyut değerine ulaşmaktadır.

Buraya kadar incelenen korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerinin, farklı değişiklik özelliklerini yansıtan, karakteristik salınımlar ortaya koyduğunu söyleyebiliriz.

Korelasyon boyutuna yakınsama-değişiklik ilişkisine biraz daha açıklık



(a)



(b)

Şekil 4.4. (a) $a=3.5699142$ parametre değeri için elde edilen periyodik verinin çubuk diyagramı, (b) Bu verinin korelasyon boyutuna yakınsaması.

getirebilmek için daha basit bir sistemi ele alalım. Logistic tasviri, $a=3.5699142$ parametre değerinde periyodun (T) 128 olduğu bir davranış ortaya koymaktadır. Bu durum için elde edilen veriye ait çubuk diyagramı Şekil 4.4 a'da, korelasyon boyutuna yakınsama davranışı ise Şekil 4.4 b'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, BTY eğrisi korelasyon boyutunun hemen hemen üzerinde, STY eğrisi ise korelasyon boyutunu altında bir salınım yaparak sonunda tahmin edilen boyut değerine yaklaştığı görülmektedir. Bu grafikte dikkat çeken ilk nokta, hem BTY hem de STY eğrisinin periyodik bir davranış göstermesidir. Özellikle BTY için belirgin olan bu davranışın periyodu $T=16$ 'dır.

Logistic denklemine ait dallanma diyagramı yakından incelendiğinde, $T=16$ 'dan

sonra, diyagramdaki detayların hızla kaybolmaya başladığı görülecektir. $T=128$ olması durumunda yörünge'nin ziyaret ettiği noktalar, $T=16$ 'nın noktalarına yakın düştüğünden, periyodun 16 gibi gözüktüğü bir durum ortaya çıkmaktadır. Diğer bir deyişle $T=128$ 'lik yörünge'nin, $T=16$ 'nın motiflerini yansıttığı söylenebilir.

$T=128$ için elde edilen periyodik verinin cubuk diyagramında $x=0.390$ 'ın solunda kalan patern, $x=0.570$ ile $x=0.795$ arasına aynen kopya edildiğinde sonuçta elde edilen STY ve BTY eğrileri, $T=128$ için elde edilenler ile aynı gidişi vermektedir. Bu durum kümenin tamamından ziyade, alt kümelerin (mikro yapıların) korelasyon boyutuna yakınsamada etkili olduğunu göstermektedir.

Değişiklik hakkında buraya kadar verilenlerden hareketle, $v_N(i)$ şu genel ifadeyle verilebilir:

$$v_N(i) = v + f(i) \psi(i) \quad (4.12)$$

Yukarıda verilen uygulamalar, $\log \Phi(\epsilon)$ 'un $\log(\epsilon)$ 'a göre periyodik davranış gösterdiği durumda, $\psi(i)$ 'nin de $\psi(i+m)=\psi(i)$ şeklinde periyodik bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri dikkate alındığında, $f(i)$ fonksiyonunun (4.12) eşitliğinde verilen limit durumlarında sıfıra gittiğini söyleyebiliriz.

Eğer sistem, λ ölçekleme faktörü ve onun kuvvetleri ile çakışma simetrisi gösteriyorsa, değişikliği yansıtan $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonu aslında $\log(\epsilon)$ 'un, $\log(\lambda)$ periyoduna sahip bir fonksiyonu şeklinde ,

$$\Phi(\epsilon) = \Phi(\lambda^m \epsilon) \quad (4.13)$$

ya da, $\log(\epsilon)$ 'un fonksiyonu olarak yazılabilir:

$$\hat{\Phi}(\log(\epsilon)) = \hat{\Phi}[m \log(\lambda) + \log(\epsilon)] \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.14)$$

veya $\log(\epsilon) = y$ dersek,

$$\hat{\Phi}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{\frac{2\pi i}{m} \left(\frac{y}{\log(\lambda)} \right)} \quad (4.15)$$

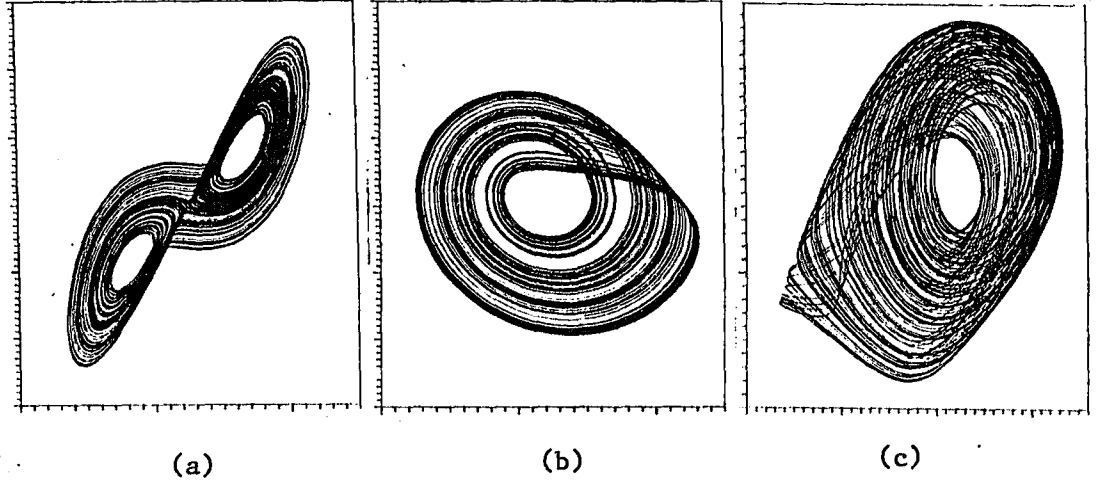
şeklinde bir Fourier serisi cinsinden ifade edilebilir. Gözlemler, (4.15) eşitliği ile verilen $\hat{\Phi}(y)$ fonksiyonunun birçok m modunda bir salınıma sahip olduğunu göstermektedir.

4.3. 3B Dinamik Sistemler

Çalışmada kullanılan 3B dinamik sistemlere ait çekiciler Şekil 4.5’de verilmiştir. Bunlardan Lorenz dinamik sisteminin Atmosfer bilimlerinde özel bir önemi olması nedeniyle, üzerinde kısaca durulacaktır.

Atmosferik bir süreçle ilgili ilk kaotik çekici örneği, E.N. Lorenz (1963) tarafından geliştirilen ve kendi adıyla anılan bir dinamik sistemden elde edilmiştir. Tamamen deterministik olmasına rağmen sistemin dinamiği, başlangıç koşullarına hassas bağımlı olan kaotik bir davranış ortaya koyar. Lorenz denklemleri, dikdörtgen bir bölgede oluşan termal konveksiyonun matematiksel modelidir. Model iki boyutludur, üçüncü boyuttaki değişimler ise üniform kabul edilmiştir. Lorenz dinamik sistemi şu eşitlik ile verilir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= -y - xz + Rx \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (4.16)$$



Şekil 4.5. 3B dinamik sistem örnekleri. (a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant çekicileri.

Bu denklemler, Navier-Stokes, ısı ve süreklilik denklemlerinden hareketle elde edilmiştir. Lorenz denklemlerinde kullanılan değişken ve parametreler aşağıda tanımlandığı gibidir:

Değişkenler:

X : Konvektif hareketin şiddetiyle orantılıdır,

Y : Yükselen ve çöken akımlar arasındaki sıcaklık farkı ile orantılıdır,

Z : Düşey sıcaklık profilinin lineer konumdan sapması ile orantılıdır.

Parametreler:

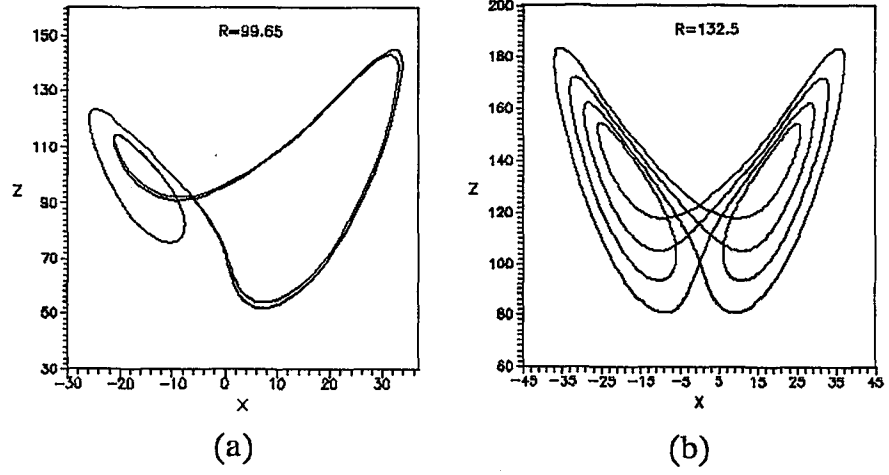
σ : Prandtl sayısı,

R : Rayleigh sayısı,

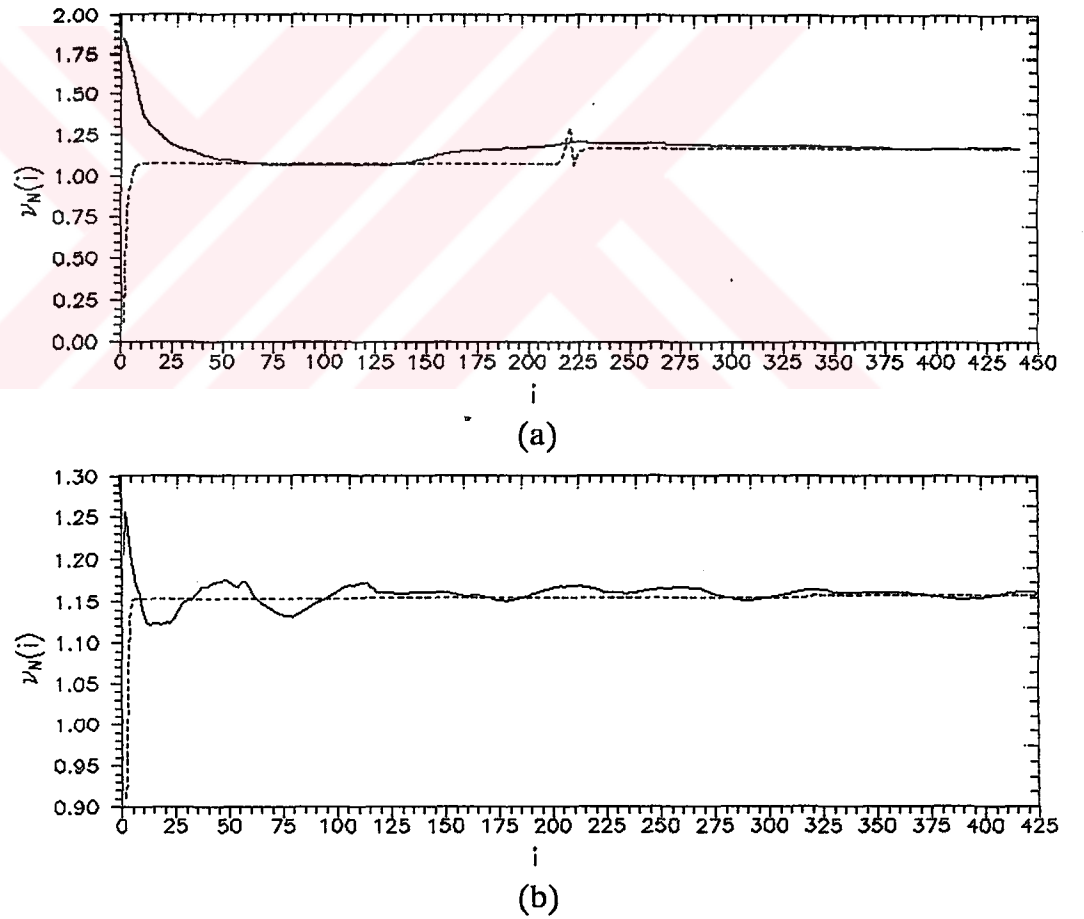
$b = 4/(1+a^2)$ (a : dikdörtgenin geometrisi ile ilgilidir).

Lorenz, $\sigma=10$, $R=28$ ve $b=8/3$ parametre değerleri için sistemin kaotik davranış ortaya koyduğu çözümleri elde etmiştir.

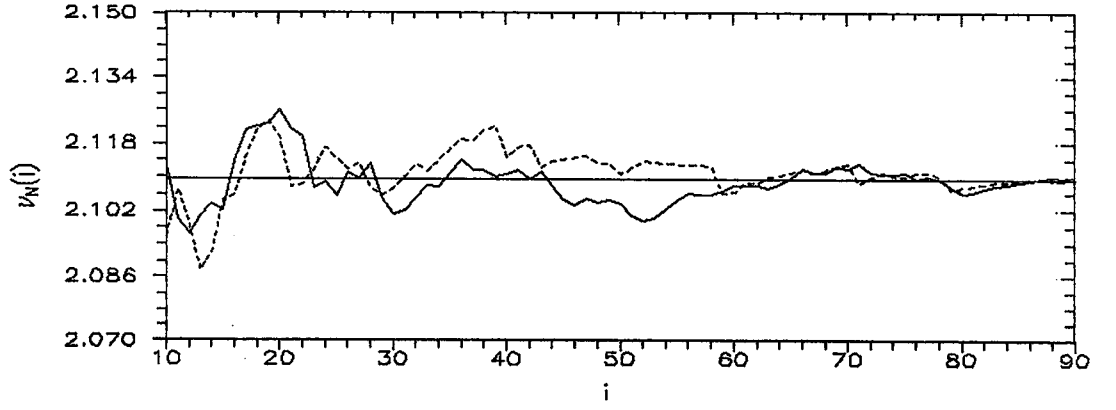
Lorenz dinamik sistemi kullanılarak yapılan ilk uygulamada, önce sistemin periyodik davranışı üzerinde durulmuştur. $R=99.65$ ve $R=132.5$ parametre değerleri için, sistemin gösterdiği periyodik davranış Şekil 4.6 a ve b'de



Şekil 4.6. Lorenz dinamik sisteminden (a) $R=99.65$, (b) $R=132.5$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörüngeler.



Şekil 4.7. Lorenz dinamik sisteminden (a) $R=99.65$, (b) $R=132.5$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörüngelerin korelasyon boyutuna yakınsamaları.



Şekil 4.8. Lorenz çekicisi durumunda korelasyon boyutuna yakınsama, $\Delta N=163$.

verildiği gibidir, (Sparrow, 1982). Bu örnekler için hesaplanan STY ve BTY eğrileri ise Şekil 4.7 a ve b'de verilmiştir. $R=99.65$ durumunda STY eğrisi hızla tahmin edilen korelasyon boyutuna inerek hemen hemen bu değerde gitmektedir. BTY eğrisi ise hızla yükselerek tahmin edilen korelasyon boyutuna yaklaşmakta ve $i=225$ 'de yaptığı pikden sonra bir önceki seviyeden daha büyük bir seviyede ve boyut değeri üzerinde gitmektedir. $R=132.5$ durumunda ise STY eğrisi yumuşak bir salınımla tahmin edilen korelasyon boyutuna ulaşırken, BTY eğrisi grafik boyunca sabit gitmektedir.

Lorenz dinamik sistemi kullanılarak yapılan ikinci uygulamada ise $\sigma=10$, $R=28$ ve $b=8/3$ parametre değerleri kullanılarak $N=15000$ adet veri üretilmiştir. Hataları minimuma indirerek noktaların çekici üzerine düşmesini sağlamak için adım büyüklüğü $\Delta t=0.001$ seçilmiş ve gecikme zamanı $\tau=0.25$ alınarak örnekleme yapılmıştır.

Lorenz çekicisine ait $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiği Şekil 4.9 a'da, bu grafikten bulunan ölçekleme bölgesinin alt ($\log(\epsilon_a)$) ve üst ($\log(\epsilon_u)$) sınırı ile korelasyon boyutu Tablo 4.1'de verilmiştir. Ölçekleme bölgesi sabit tutularak hesaplanan $v_N(i)$ boyut değerleri i 'nin bir fonksiyonu olarak Şekil 4.8'de verildiği gibidir. Örnekleme hatalarının grafiğin başlangıç kısmında daha büyük olması

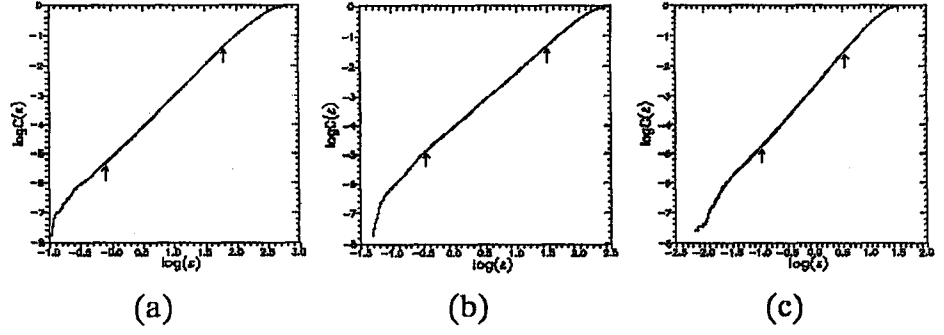
Tablo 4.1. 3B Dinamik sistemlere ait çekicilerin korelasyon integrallerinden hesaplanan ölçekleme bölgesi ve korelasyon boyutları.

3B Dinamik Sistemler	Ölçekleme Bölgesi		Korelasyon Boyutu (ν)	Veri Sayısı (N)
	$\log(\epsilon_a)$	$\log(\epsilon_u)$		
Lorenz	-0.10	1.80	2.109 ± 0.008	15000
Rössler	-0.45	1.50	1.830 ± 0.005	15000
Rabinovich-Fabrikant	-0.95	0.55	2.175 ± 0.004	15000

nedeniyle $i=10$ 'dan önceki kısım dikkate alınmamıştır. Şekil 4.8'den de görüldüğü gibi STY ve BTY eğrilerinin korelasyon boyutuna yaklaşımı, bu değer etrafındaki ardışık salınımlardan sonra gerçekleşmektedir, i 'nin küçük değerlerinde salınım daha düzensiz ve genliği daha büyüktür. Ancak i büyüdükçe salınımların genliği giderek küçülmeğe ve nihayet korelasyon boyutuna yaklaşmaktadır. Her iki eğri de grafiğin başlangıç kısmında hemen hemen paralel bir salınım gösterdikten sonra $i=29$ 'dan $i=59$ 'a kadar birbirini kesmeden gitmekte, bundan sonra ise daha küçük Δi aralıklarında çeşitli kesişme noktaları oluşturarak nihayet boyut değerine ulaşmaktadır. Yine şekilden görüldüğü gibi salınımlar boyut değeri etrafında gerçekleşmektedir.

Bu başlık altında incelenen ikinci örnek olan Rössler dinamik sistemi aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x+ay \\ \dot{z} &= b+z(x-c) \end{aligned} \quad (4.17)$$



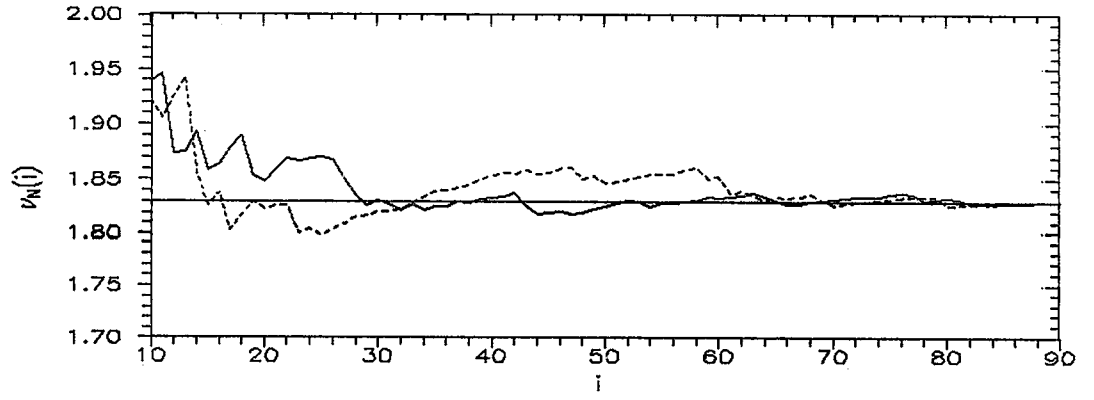
Şekil 4.9. 3B dinamik sistemlerden hesaplanan $\log C(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafikleri.
(a) Lorenz, (b) Rössler, (c) Rabinovich-Fabrikant.

Bu denklem sisteminde geçen parametreler, $a=b=0.2$ ve $c=5.7$ olarak alınmıştır. Rabinovich-Fabrikant dinamik sistemi ise,

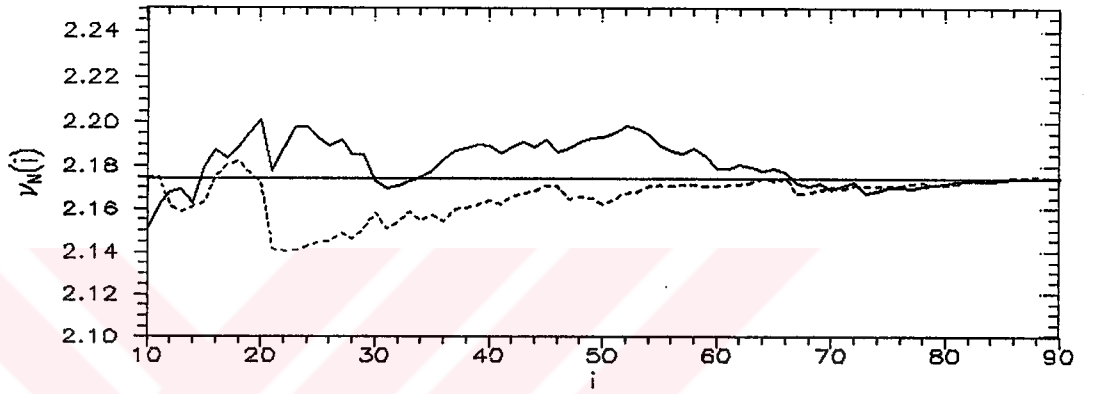
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(z-1+x^2) + \gamma x \\ \dot{y} &= x(3z+1-x^2) + \gamma y \\ \dot{z} &= -2z(\alpha + xy) \end{aligned} \quad (4.18)$$

denklem sistemi ile verilir. Burada $\gamma=0.87$ ve $\alpha=1.1$ alınmıştır. Rössler ve Rabinovich-Fabrikant çekicilerinin korelasyon boyutlarının hesaplandığı $\log C(\epsilon)$ - $\log(\epsilon)$ grafiklerini Şekil 4.9 b ve c'de verildiği gibidir. Bu grafikler, her iki dinamik sistemden $\Delta t=0.001$ ve $\tau=0.25$ alınarak üretilen $N=15000$ adet veriden hesaplanmıştır. Rössler ve Rabinovich-Fabrikant çekicisi için ölçekleme bölgesi ve korelasyon boyutu Tablo 4.1'de, korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri ise Şekil 4.10 a ve b'de verilmiştir.

Rössler çekicisine ait $v_N(i)$ - i grafiğinin, Lorenz çekicisinde olduğu gibi korelasyon boyutu etrafında genliği gittikçe azalan salınımlarla, tahmin edilen boyut değerine yaklaşmaktadır. Grafikte, başlangıç kısmındaki salınımlı bölgeden sonra belirgin iki kesişme noktası dikkati çekmektedir. Bu kesişme noktaları $i=33$ ve $i=63$ 'de gerçekleşmektedir. Eğrilerin bu şekildeki gidişi grafiğin kalan kısmında devam etmekte ve $i=84$ 'de boyut değeri üzerinde birleşmektedir. Rabinovich-Fabrikant çekicisine ait $v_N(i)$ - i grafiğinde ise eğrilerin ayrılması ve birleşmesi diğerlerine nazaran daha büyük bir Δi



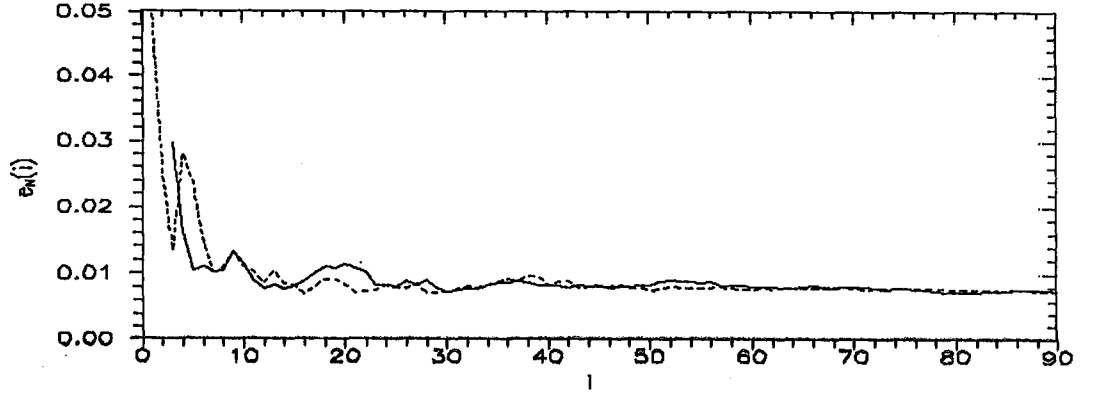
(a)



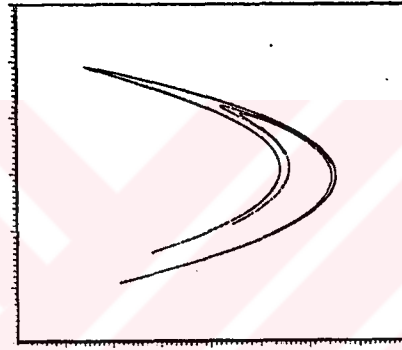
(b)

Şekil 4.10. 3B dinamik sistemler durumunda korelasyon boyutuna yakınsama. (a) Rössler, (b) Rabinovich-Fabrikant, $\Delta N=163$.

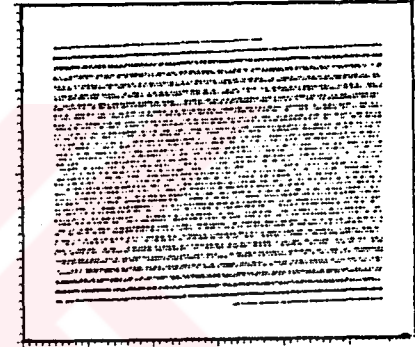
aralığında meydana gelmektedir ($i=12$; $i=70$). Tablo 4.1’de korelasyon boyutlarının yanında standart hata değerleri de verilmiştir. Özel olarak Lorenz dinamik sistemi için $v_N(i)$ boyut değerlerine karşı gelen $e_N(i)$ standart hata değerleri i ’nin bir fonksiyonu olarak Şekil 4.11’de çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi özellikle küçük i değerlerinde, yani daha az sayıda elemanın işleme katıldığı durumda, standart hatadaki sapmalar daha büyüktür. Ancak $i \approx 10$ değerinden sonra her iki eğrinin $e \approx 0.008$ değerinden olan sapmaları hızla küçülmektedir. Diğer bir deyişle her bir $v_N(i)$ değerinin tahminindeki hata hemen hemen sabit bir değerde kalmaktadır. Bu nedenle korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerinin yorumunda, grafiğin tamamından ziyade $i \geq 10$ değerlerine karşı gelen bölümünün dikkate alınması daha doğru olacaktır.



Şekil 4.11. Lorenz çekicisinden hesaplanan $v_N(i)$ değerlerine ait standart hatanın salınımı.



(a)



(b)

Şekil 4.12. 2B dinamik sistem örnekleri. (a) Hénon, (b) Zaslavskii çekicileri.

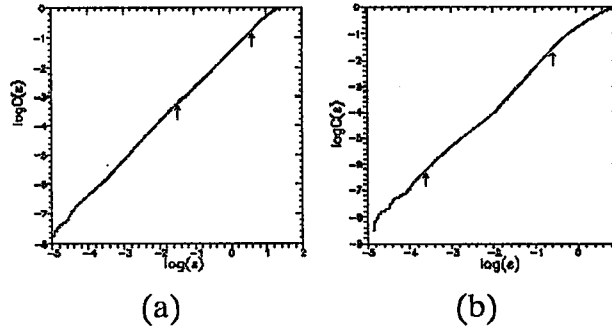
4.4. 2B Dinamik Sistemler

Bu alt başlık altında Hénon ve Zaslavskii ayrık dinamik sistemleri üzerinde durulmuştur. Önce bu dinamik sistemleri kısaca tanıtalım. Hénon tasviri aşağıdaki eşitlikler ile verilir.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hénon tasvirinden $a=1.4$ ve $b=0.3$ alınarak $N=15000$ adet veri üretilmiştir.

Şekil 4.12 a'da verilen Hénon çekicisi, yukarıda verilen parametre değerleri ve



Şekil 4.13. 2B dinamik sistemlerden hesaplanan $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri. (a) Hénon, (b) Zaslavskii.

$N=16384$ adet veri kullanılarak çizilmiştir. Zaslavskii ayrık dinamik sistemi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [x_n + v(1 + \mu y_n) + \epsilon v \mu \cos 2\pi x_n] \bmod(1) \\ y_{n+1} &= e^{-\Gamma}(y_n + \epsilon \cos 2\pi x_n) \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitlikleri ile verilir. Birinci eşitlikte geçen μ parametresi,

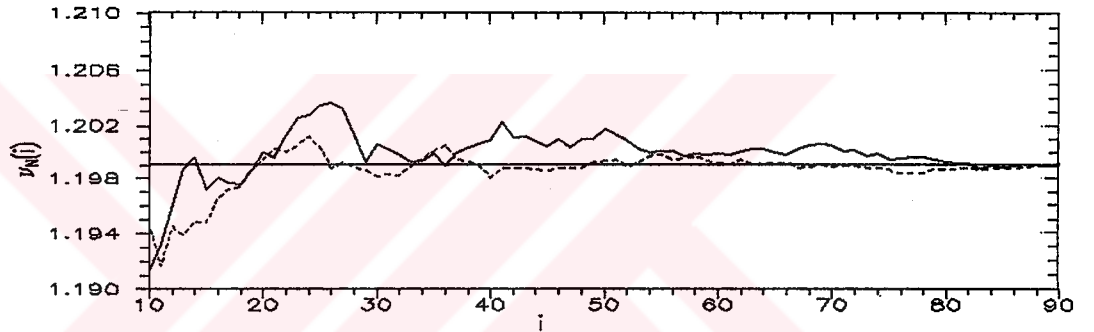
$$\mu = \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Zaslavskii tasvirinden $\Gamma=3.0$, $v=400/3$ ve $\epsilon=0.3$ alınarak $N=25000$ adet veri üretilmiştir. Şekil 4.12 b'de verilen Zaslavskii çekicisi ise aynı parametre değerleri ve eleman sayısı kullanılarak çizilmiştir. Şekil 4.13 a ve b Hénon ve Zaslavskii ayrık dinamik sistemlerine ait $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiklerini göstermektedir. Zaslavskii için verilen $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafiğinin, ölçekleme bölgesi içinde farklı iki eğime sahip olduğu görülmektedir. Bu grafikler esas alınarak bulunan ölçekleme bölgesinin sınırları ve korelasyon boyutları Tablo 4.2'de verilmiştir.

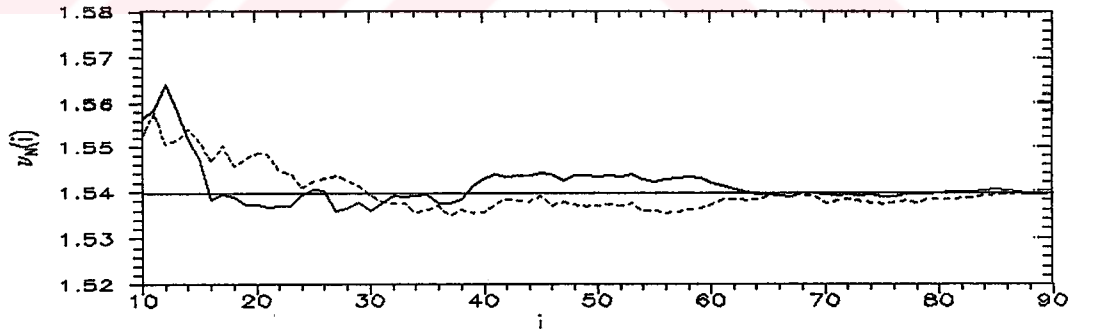
2B dinamik sistemlere ait korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri Şekil 4.14'de verilmiştir. Bu grafiklerde, STY ve BTY eğrilerinin boyut değeri etrafındaki salınımları, daha önce 3B dinamik sistemler için verilen grafiklerle önemli bir benzerlik göstermektedir.

Tablo 4.2. 2B Dinamik sistemlere ait çekicilerin korelasyon integrallerinden hesaplanan ölçekleme bölgesi ve korelasyon boyutları.

2B Dinamik Sistemler	Ölçekleme Bölgesi		Korelasyon Boyutu (ν)	Veri Sayısı (N)
	$\log(\epsilon_a)$	$\log(\epsilon_{ii})$		
Hénon	-2.15	0.80	1.198 ± 0.006	15000
Zaslavskii	-3.60	-0.60	1.540 ± 0.092	25000



(a)



(b)

Şekil 4.14. 2B dinamik sistemlerde korelasyon boyutuna yakınsama.
(a) Hénon ($\Delta N=163$), (b) Zaslavskii ($\Delta N=275$).

4.5. 1B Dinamik Sistemler

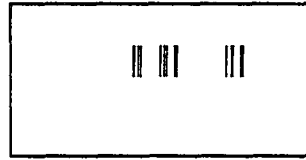
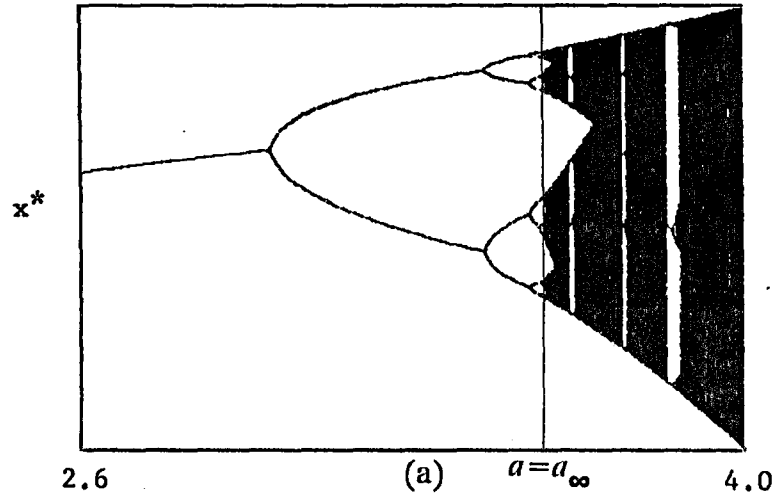
Logistic tasviri, bir boyutlu ayrık dinamik sistemin en çok bilinen örneklerindendir. Logistic tasviri,

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad (4.22)$$

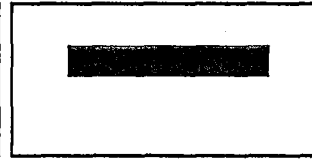
şeklinde verilir. Bu tasvir, çok basit bir sistemin dahi, oldukça kaotik davranış gösterebileceğinin çarpıcı bir örneğidir. Logistic tasviri, nüfus dinamiği çalışmalarında yaygın olarak kullanılan tamamen deterministik bir sistemdir. Parametre (a) değerine bağlı olarak sistem son derece zengin bir davranış çeşitliliği ortaya koyar, (May, 1976).

Örneğin, $a < 1$ parametre değerlerinde, nüfus daima sifıra ($x_n^* = 0$; x^* : sabit nokta) gider. Parametrenin 1 ve 3 arasındaki değerlerinde, başlangıç nüfuslar $x_n^* = a-1/a$ sabit noktasına gider. Parametrenin değeri arttırılmaya devam edilirse, sistemin davranışı önemli ölçüde değişir. Örneğin, $a = 3.2$ parametre değerinde, periyodun 2 olduğu bir çevrim ortaya çıkar. Periyot, daha sonraki belirli parametre değerlerinde 4, 8, 16,..., 2^k şeklinde ikiye katlanarak gider ve $a = a_\infty = 3.5699456...$ 'da sonsuz periyotlu bir çevrime ulaşır. Bu durum Şekil 4.15 a'da düşey çizgi ile gösterilmiştir. a_∞ parametre değeri için sistemin ürettiği Cantor benzeri küme Şekil 4.15 b1'de, zaman serisi ise Şekil 4.15 c1'de verildiği gibidir.

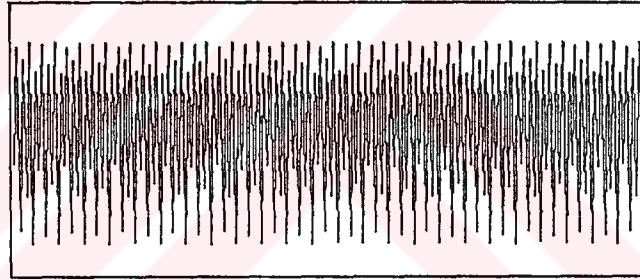
Sistemin a_∞ 'dan daha küçük ya da daha büyük parametre değerlerindeki davranışı arasında önemli bir fark vardır. Sistem, $a < a_\infty$ durumlarında, sonuçta daimi bir duruma ulaşan periyodik davranış gösterirken, $a > a_\infty$ parametre değerlerinde kendini tekrarlayan bir yapı ortaya koymaz. Nihayet $a = 4.0$ 'de, çekici $[0,1]$ aralığını Şekil 4.15 b2'de görüldüğü gibi tamamen doldurur. Bu parametre değeri için elde edile zaman serisi Şekil 4.15 c2'de verilmiştir.



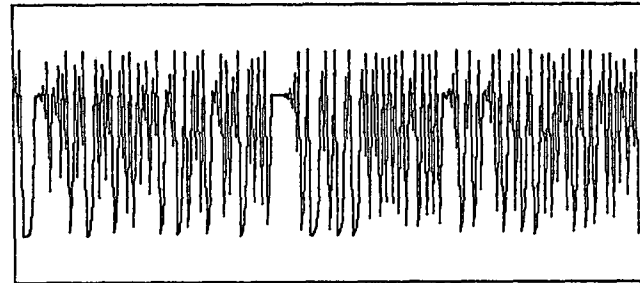
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Şekil 4.15. (a) Logistic denkleminde sabit noktaların parametreye bağlı olarak değişimi, (b1) $a=a_{\infty}$, (b2) $a=4.0$ için elde edilen fraktal kümeyi, (c1) birinci parametre değeri için, (c2) ikinci parametre değeri için elde edilen zaman serilerini göstermektedir.

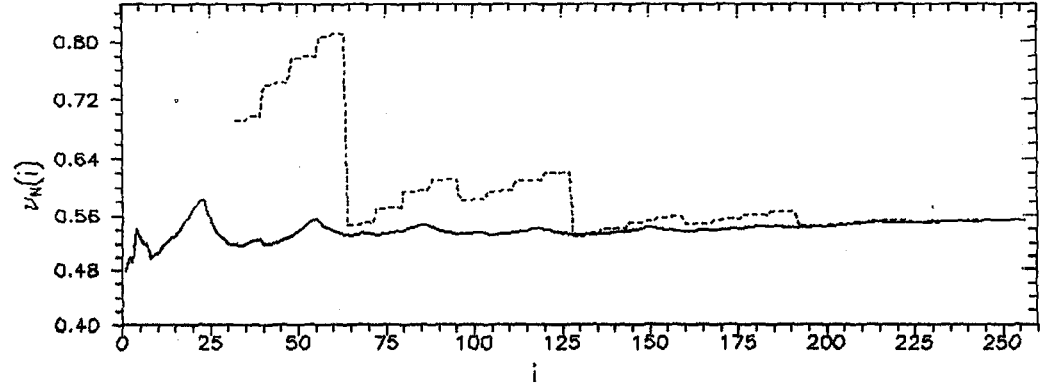
Bu alt başlık altında parametrenin sırasıyla $a < a_{\infty}$, $a = a_{\infty}$ ve $a > a_{\infty}$ durumlarında korelasyon boyutuna yakınsama ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Öncelikle, Şekil 4.15 a ile verilen dallanma diyagramı dikkate alınarak Logistic denkleminin periyodik çözümleri üzerinde durulmuştur. Daha önce Korelasyon Boyutuna Yakınsama-Değişiklik İlişkisi başlığı altında $a = 3.5699142$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörünge ($T=128$) durumunda korelasyon boyutuna yakınsama üzerinde durulmuştu. Burada ise $T=256$ olduğu $a = 3.5699415$ parametre değeri için elde edilen periyodik yörünge durumunda korelasyon boyutuna yakınsama incelenmiştir. $T=256$ için elde edilen STY ve BTY eğrileri Şekil 4.16'da verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi gerek STY gerekse BTY periyodu 32 olan bir salınım göstermektedir. Bu durumu, $T=256$ 'lık yörünge, $T=32$ 'nin motiflerini yansıttığı şeklinde yorumlayabiliriz.

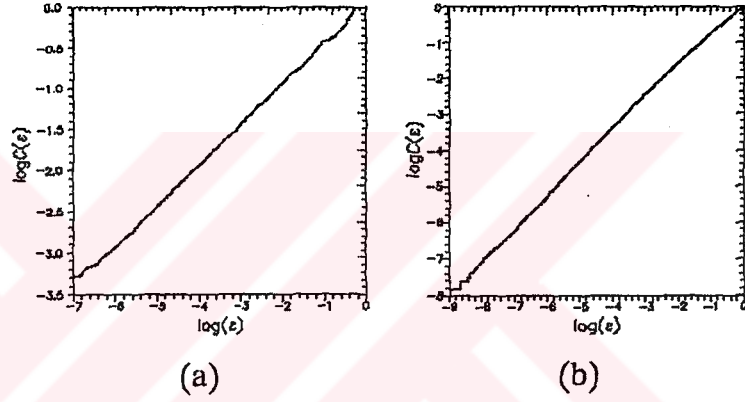
Logistic denklemi kullanılarak yapılan ikinci uygulamada $a = a_{\infty}$ parametre değeri ve $N=16384$ adet veri kullanılmıştır. STY ve BTY eğrilerinin davranışını daha yakından görebilmek için önce $\Delta N=1$ alınarak ilk 1600 satır/bant için, eğrilerin genel gidişini görebilmek için de $\Delta N=41$ alınarak hesaplama yapılmıştır.

Logistic denklemi kullanılarak yapılan son uygulamada ise STY ve BTY eğrileri, sistemin kaotik davranış gösterdiği $a=4.0$ parametre değeri için hesaplanmıştır. Logistic tasvirinden bu parametre değerleri için hesaplanan korelasyon integralleri Şekil 4.17 a ve b'de, ölçekleme bölgesinin sınırları ve korelasyon boyutları Tablo 4.3'de verilmiştir.

Logistic denkleminin sonsuz periyotlu bir salınım verdiği $a = a_{\infty}$ parametre değerinde STY ve BTY eğrileri $T=128$ olan bir salınımla korelasyon boyutuna yakınsadığı Şekil 4.18'den görülmektedir.



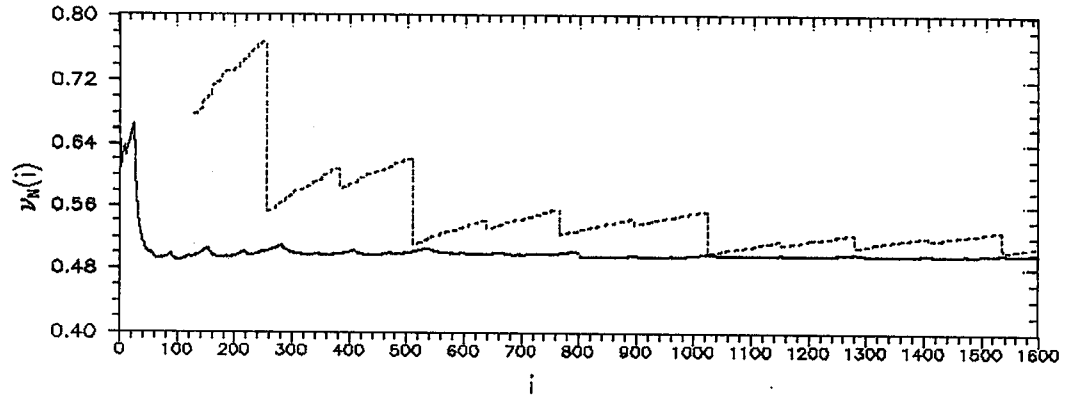
Şekil 4.16. Logistic tasvirinde $a=3.5699415$ için korelasyon boyutuna yakınsama ($T=256$).



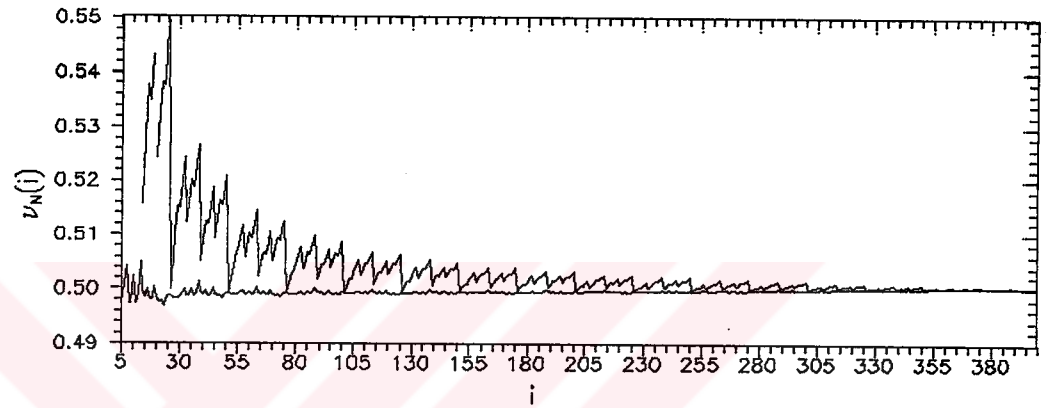
Şekil 4.17. Logistic denkleminde hesaplanan $\log C(\epsilon)-\log(\epsilon)$ grafikleri. (a) $a=a_\infty$, (b) $a=4.0$.

Bununla birlikte $P=128$ 'lik salınımın, daha büyük i değerlerinde değişip değişmediğini kontrol etmek için $i=8000-8800$ arasında BTY eğrisinin detaylı salınımı çizilmiş ve aynı periyotla devam ettiği gözlenmiştir.

Özetle, buraya kadar incelenen $a \leq a_\infty$ parametre değerleri için elde edilen STY ve BTY eğrileri periyodik bir davranış göstermektedir. Şekil 4.19'de verilen kaotik davranışa ait STY ve BTY eğrileri ise korelasyon boyutunun etrafında aperiodyk bir salınım vermektedir.

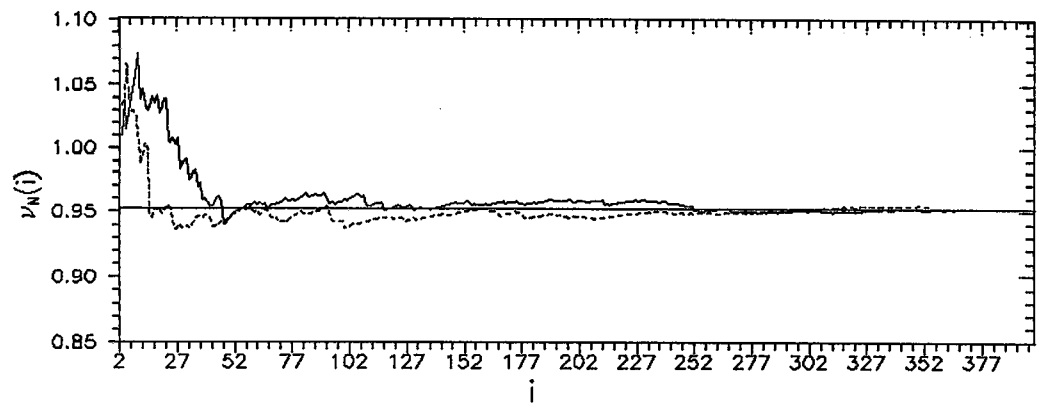


(a)



(b)

Şekil 4.18. Logistic tasvirinde $a=a_{\infty}$ için korelasyon boyutuna yakınsama, (a) $\Delta N=1$, (b) $\Delta N=41$.



Şekil 4.19. Logistic tasvirinde $a=4.0$ için korelasyon boyutuna yakınsama ($\Delta N=41$).

Tablo 4.3. 1B dinamik sistemlerden hesaplanan ölçekleme bölgesi ve korelasyon boyutları.

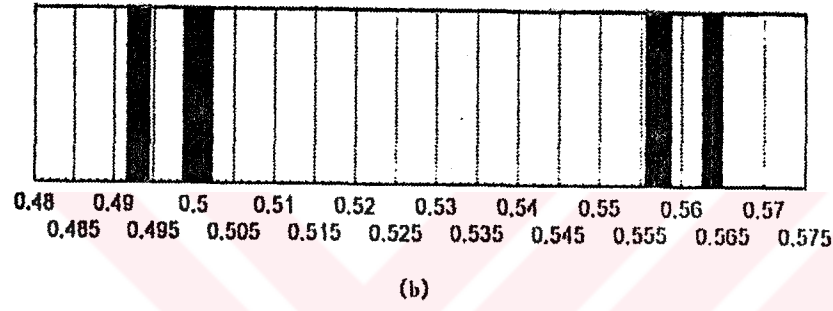
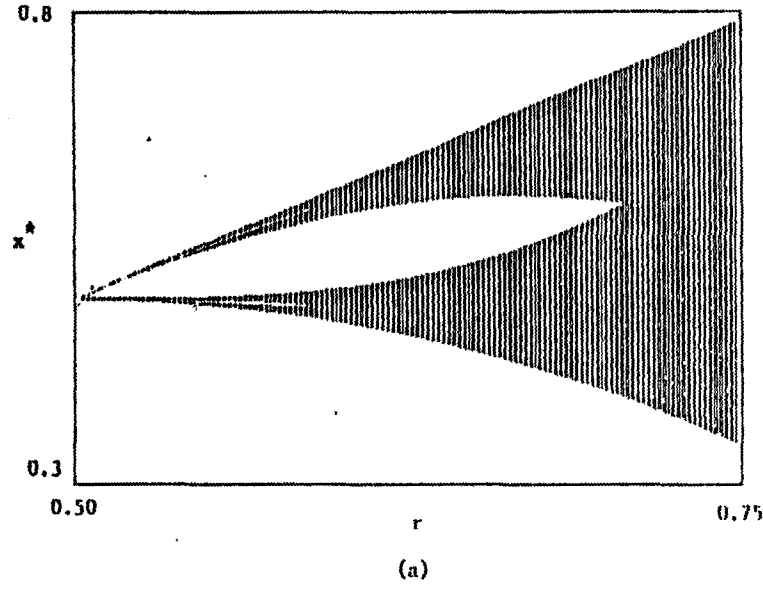
1B Dinamik Sistemler	Ölçekleme Bölgesi		Korelasyon Boyutu (ν)	Veri Sayısı (N)
	$\log(\epsilon_a)$	$\log(\epsilon_b)$		
Logistic $a=a_\infty$	-5.6	-1.8	0.5 ± 0.006	16384
Logistic $a=4.0$	-6.6	-2.7	0.952 ± 0.01	16384

Buraya kadar Logistic tasvirinden parametrenin farklı değerleri için elde edilen kümelerin boyut değişimleri üzerinde duruldu. Bu kümelerden $a \geq a_\infty$ parametre değeri için elde edilenlerin dışındakiler fraktal değildir. Bilindiği gibi Logistic tasviri $a=a_\infty$ parametre değeri için bir çekiciye sahiptir, ancak bu çekici kaotik değildir. Diğer bir deyişle, aynı parametre değeri, fakat farklı başlangıç koşullarından hareket edilirse, yörüngeler birbirinden sabit bir uzaklıkta kalır. Oysa kaotik çekicilerde yörüngeler birbirlerinden zamanla üstel olarak ıraksarlar, dolayısı ile başlangıç koşullarına hassas duyarlılık söz konusudur. Sistemin tamamen kaotik davrandığı $a=4.0$ için elde edilen STY ve BTY eğrilerinin korelasyon boyutuna yakınsamaları periyodik durumdan tamamen farklıdır. Dolayısı ile, Logistic tasvirine ait korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerinin çekicinin özellikleri hakkında önemli bilgiler verdiğini söyleyebiliriz.

Bir boyutlu ayrık dinamik sistemlerin sık kullanılan diğer bir örneği de aşağıdaki eşitlikle verilen çadır tasviridir.

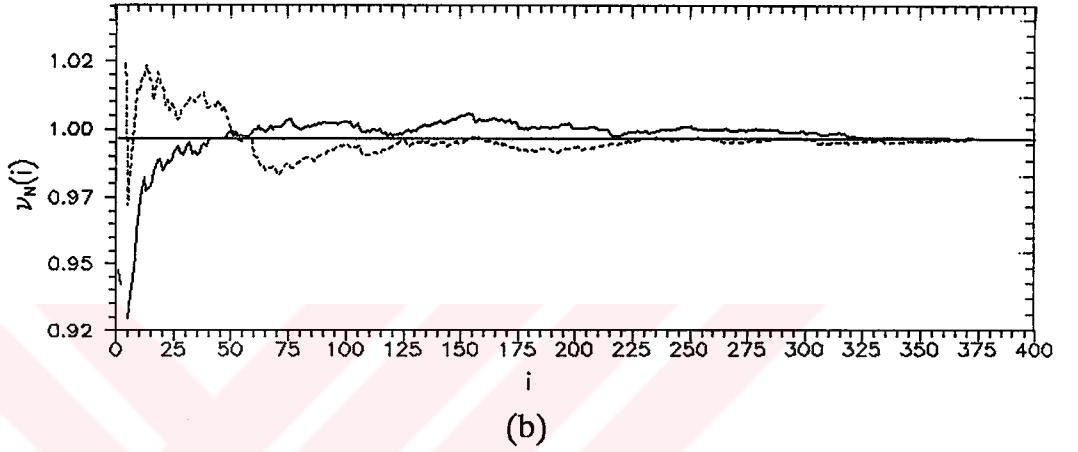
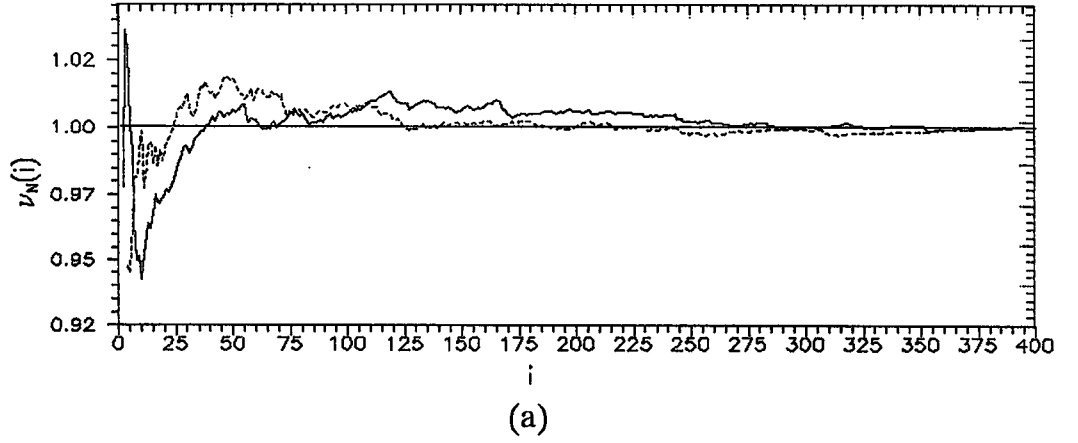
$$\Delta_r(x) = r(1 - 2|x - 1/2|) = 2r \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

Dallanma diyagramı Şekil 4.20 a'da verilen çadır denklemi $r > 0.50$ parametre



Şekil 4.20. (a) Çadır tasviri dallanma diyagramı, (b) $r=0.556$ parametre değeri için elde edilen verinin çubuk diyagramı.

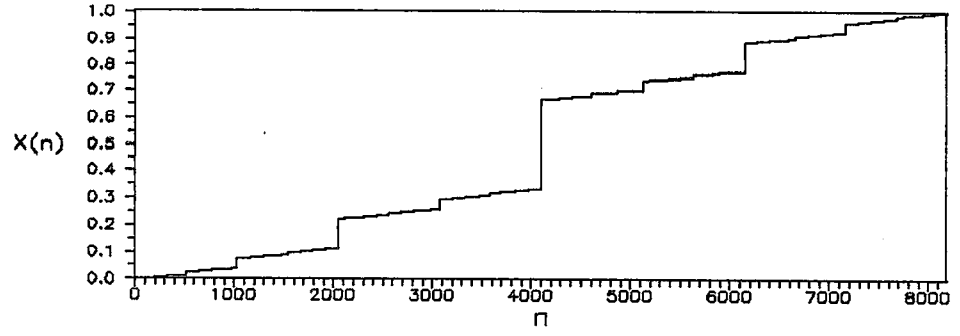
değerlerinde pozitif Lyapunov üsteline sahiptir ($\lambda=2r>0$). Diğer bir deyişle, bu parametre değerlerinde sistemin davranışı kaotiktir. Çadır denklemi için STY ve BTY eğrileri, parametrenin iki ayrı değeri için hesaplanmıştır. $r=0.556$ için elde edilen verilere ait çubuk diyagramı Şekil 4.20 b'de verildiği gibidir. $r=0.95$ parametre değerinde ise $[0,1]$ aralığı hemen hemen dolmaktadır. Çadır tasvirinden korelasyon boyutu $r=0.556$ için 0.995 ± 0.004 , $r=0.95$ için 0.991 ± 0.008 olarak hesaplanmıştır. Bu parametre değerleri için elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri Şekil 4.21 a ve b'de verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi her iki parametre değeri için elde edilen grafikler, daha önce diğer sistemlerin kaotik çözümleri için hesaplanan korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerine benzerlikler göstermektedir.



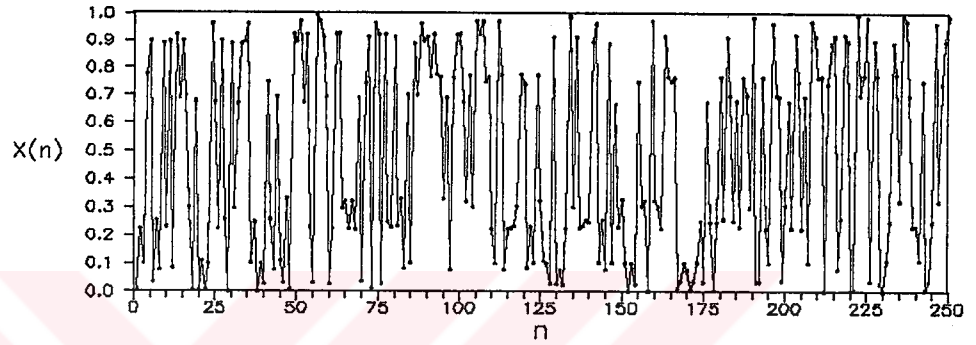
Şekil 4.21. Tent tasviri durumunda korelasyon boyutuna yakınsama, (a) $r=0.556$, (b) $r=0.95$ ($N=16384$, $\Delta N=41$).

4.6. Determinist Fraktaller

Ayrık veya sürekli dinamik sistemler durumunda korelasyon integralini hesaplanmasında m embedding boyutunu göstermek üzere, $\{(X_j)_i, j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,N\}$ şeklinde zaman serileri kullanıldı. Ancak determinist fraktaller durumunda böyle bir seri sonsuz farklı şekilde oluşturulabilir. Diğer bir deyişle, fraktal şekli kenar uzunluğu ϵ olan m -boyutlu küblerle örttüğümüzü düşünelim. Bu durumda her kübe farklı bir p_i olasılığı atayabilir ve şekli bu olasılıklara göre yeniden oluşturabiliriz. Bu yaklaşıma, İteratif Fonksiyon Sistemleri (IFS) yöntemi denmektedir, Barnsley, (1985). Peitgen vd. (1992), Sierpinski contası ve Barnsley eğreltiotunu örnek alarak yaptıkları tartışmada,



(a)



(b)

Şekil 4.22. Cantor kümesinden elde edilen iki zaman serisi, a) alt aralıklar üniform değil, b) alt aralıklar üniform olasılıklı.

Sierpinski contası için üniform, Barnsley eğreltiotu için ise üniform olmayan bir olasılık dağılımı seçmenin daha uygun olduğunu belirtilmektedir.

Cantor kümesinin oluşturulmasında aşağıda verilen dönüşüm çifti kullanılmıştır, Liebovitch ve Toth (1989).

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{3} \quad x_{i+1} = \frac{2}{3} + \frac{x_i}{3} \quad (4.24)$$

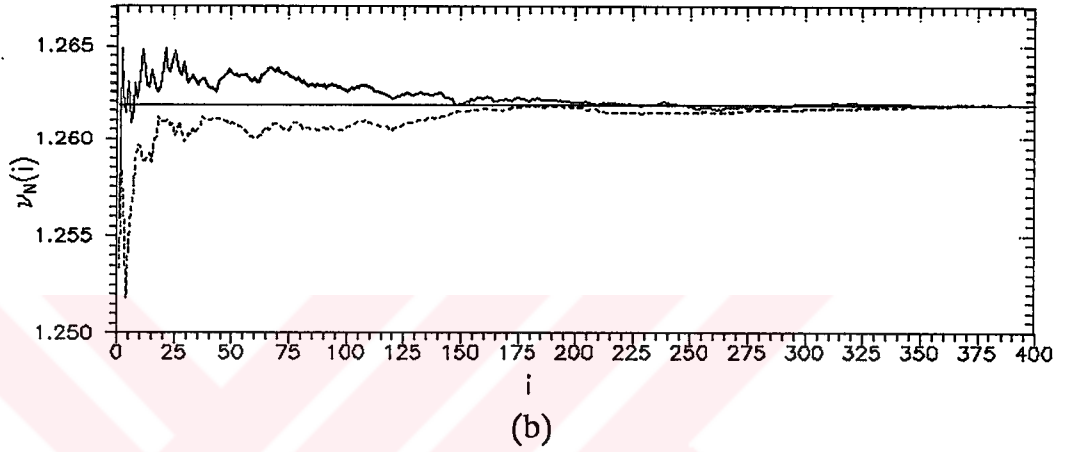
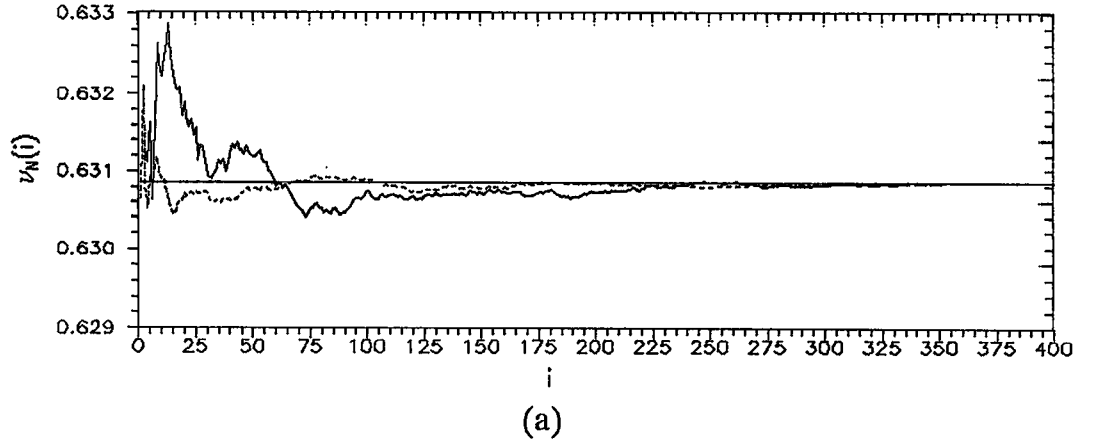
(4.24) ile verilen dönüşüm çiftinin üretmiş olduğu Cantor kümesinin elemanları önce küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Diğer bir deyişle Şekil 4.22 a'da görüldüğü gibi Cantor kümesi, birim aralığı başından sonuna doğru, adım adım dolduracak şekilde yeniden düzenlenmiştir.

Bu seriye, çekicisi Cantor kümesi olan bir dinamik sistemin ürettiği zaman serisi gözüyle bakabiliriz. Koch eğrisi de aynı şekilde üretilmiştir, bu şekilde elde edilen seriler, Şekil 4.3'de Cantor kümesi ve Koch eğrisi için verilen STY ve BTY eğrilerinin elde edilmesinde kullanılmıştır.

Cantor kümesinin bu şekilde üretilmesinin doğal sonucu olarak seri, pozitif bir gidiş (trend) üzerinde zaman zaman sıçramalar (jump) yapan bir salınım verecektir. Böyle bir salınımda seri, kuvvetli iç bağımlılığa sahip olacaktır. Determinist fraktallere ait verinin bu şekilde üretilmesi durumunda elde edilen fraktal boyut değişiminin, $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonunun salınımı ile uygunluk gösterdiği yine Şekil 4.3'den görülmektedir.

Şekil 4.22 b, yukarıda değinilen sıralı veriden hareketle, alt aralıkların üniform olasılıklı olacak şekilde seçilmesi durumunda elde edilen zaman serisini göstermektedir. Elde edilen seriler farklı olmakla birlikte, her iki durumda da noktalar aynı çekiciyi (Cantor kümesini) temsil etmektedirler.

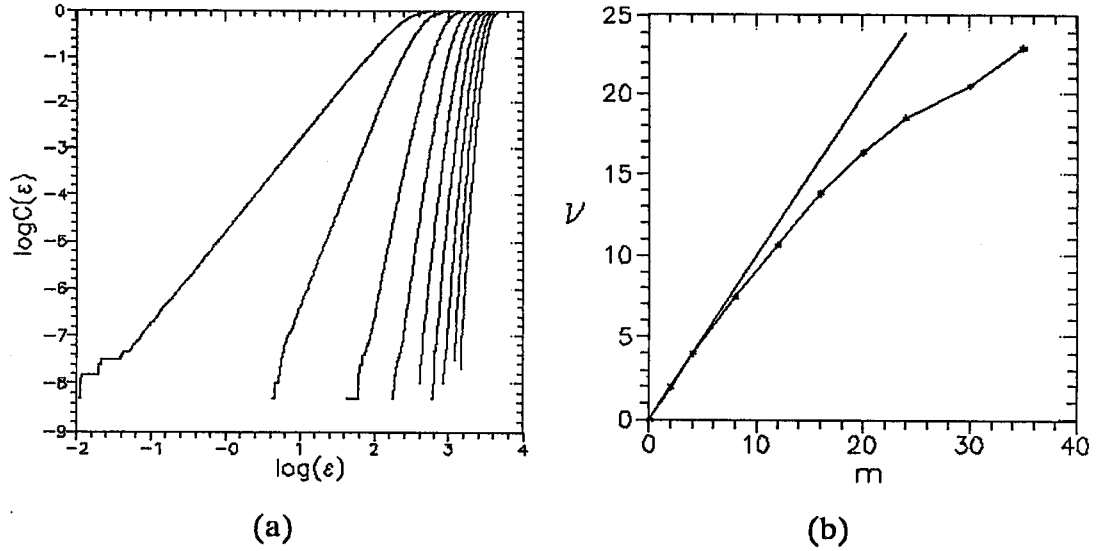
Çekicisi Cantor kümesi, Koch eğrisi vb. olan, doğal bir süreçte ait herhangi bir dinamik sistemin ürettiği zaman serisinin Şekil 4.22 a'dan ziyade Şekil 4.22 b'deki gibi olmasını beklemek daha gerçekçi gözükmemektedir. Şekil 4.23 a ve b sırasıyla, Cantor kümesi ve Koch eğrisi için olasılıkların üniform olarak seçilmesi durumunda elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerini göstermektedir. Bu grafiklerde, gerek STY gerekse BTY'nin salınımı ile deterministik kaotik süreçler için verilen korelasyon boyutuna yakınsama arasında, olasılıkların üniform olarak seçilmediği duruma göre, daha yakın bir ilişkinin olduğu söylenebilir.



Şekil 4.23. Şeklin üniform olasılıklı olarak elde edilmesi durumunda korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri. a) Cantor kümesi, b) Koch eğrisi.

4.7. ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) (1,0,1)

Düşük boyutlu dinamik sistemlerde gerek periyodik gerekse kaotik çözümler durumunda STY ve BTY eğrilerinin korelasyon boyutuna ne şekilde yakınsadıklarını gördük. Ancak aynı uygulamanın yüksek boyutlu (stokastik) sistemlere uygulanması aynı derecede kolay olmayacaktır. Çünkü bu sistemlerde embedding boyutu arttıkça fraktal boyut değeri de artacaktır. Bu durumu ortaya koymak için ARIMA(1,0,1) modelinden üretilen $N=20000$ adet veri için $\tau=1$ alınarak farklı embedding boyutlarına karşı gelen korelasyon integralleri hesaplanmıştır, Şekil 4.24 a. Bu korelasyon integrallerinden



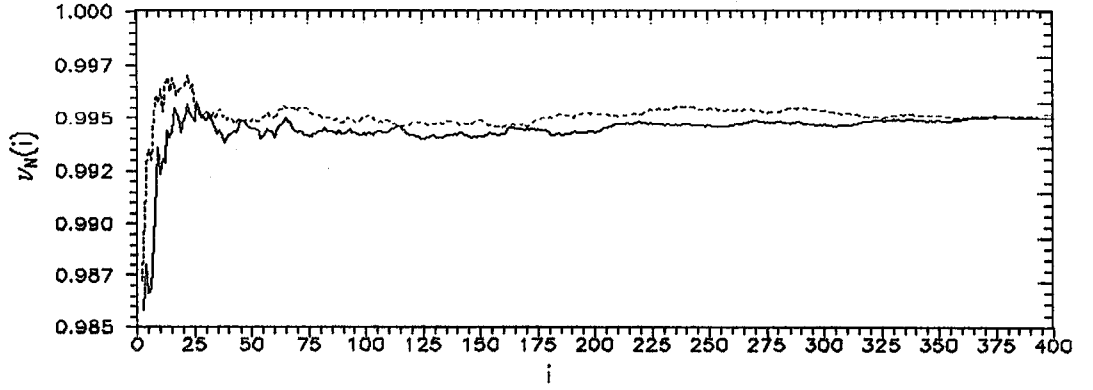
Şekil 4.24. ARIMA(1,0,1) modelinden üretilen verilerin, (a) farklı embedding boyutları için korelasyon integralleri, (b) korelasyon boyutunun embedding boyutu ile değişimi.

hesaplanan fraktal boyut değerleri embedding boyutunun fonksiyonu olarak Şekil 4.24 b'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi embedding boyutu arttıkça, buna karşı gelen fraktal boyut değeri de artmaktadır.

ARIMA(1,0,1) modelinde olduğu gibi yüksek boyutlu sistemlerde fraktal boyut değeri tam olarak belirlenemez. Bu tip süreçlerde fraktal boyut değerinin tam olarak belirlenebilmesi, gerçekçi olmayan uzunlukta bir zaman serisi gerektirmektedir. Bu nedenle STY ve BTY eğrilerinin hangi boyut değerine ve bu boyut değerine ne şekilde yakınsadığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Ancak içinde bulunduğu uzayı tamamen dolduran dolayısı ile bütün uzayın çekici olduğu bir sistem durumunda fraktal boyut değişiminin incelenmesi düşünülebilir. Bu durumda korelasyon integrali m -boyutlu küb durumunda,

$$c(\epsilon) = [\epsilon(2-\epsilon)]^m \quad (4.25)$$

ifadesiyle verilebilir, Smith, (1988). $m=1$ alınması durumunda $[0,1]$ aralığını uniform olarak dolduran bir veri kümesi elde edilir. Bu küme değişimsizdir dolayısı ile fraktal değildir. Kümenin deşikliliğini yansıtan $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonun $m=1$ için



Şekil 4.25. $[0,1]$ aralığını üniform olarak dolduran, değişsiz (nonlacunar) bir veri kümesi için korelasyon boyutuna yakınsama, $N=16384$, $\Delta N=41$.

$$\Phi(\epsilon)=2-\epsilon \quad (4.26)$$

ile verilebileceği (4.25) eşitliğinden görülebilir. $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonu sabit olmamakla birlikte $\epsilon \rightarrow 0$ limit durumunda pozitif bir sabite yakınsamaktadır. Bu yönüyle $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonu, daha önce bahsedilenlerden farklı bir deşiklilik tipi ortaya koymaktadır. Bu küme için elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama grafiği Şekil 4.25’de verildiği gibidir. Bu grafikteki STY ve BTY eğrilerinin davranışı ile $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonun sabit olduğu Koch eğrisi örneği arasındaki benzerlik dikkat çekicidir. Koch eğrisi durumunda STY, sürekli olarak tahmin edilen boyut değerinin üzerinde, BTY ise altında fakat salınım yapmadan gitmektedir. Son örnekte ise eğrilerin yer değiştirmiş olmasının dışında, salınımların daha düzensiz olduğu görülmektedir.

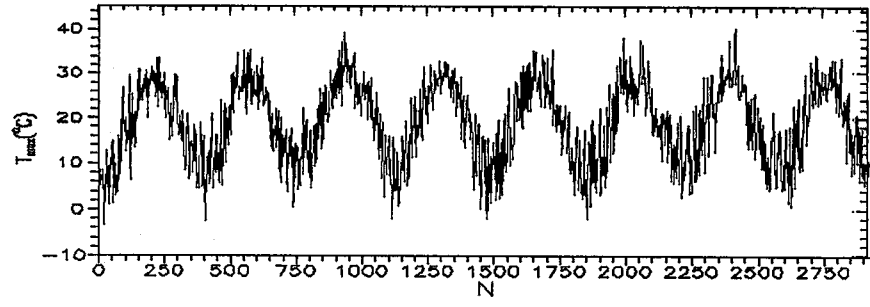
Bilgisayar yardımıyla korelasyon boyutuna yakınsama hesaplamalarının fazla zaman alması nedeniyle, ara korelasyon integrallerinden hesaplanan eğim değerlerinin grafik üzerinde kaç satırda/bandda bir işaretleneceğini gösteren ΔN değeri genellikle büyük alınmıştır. Bu durum, korelasyon boyutuna yakınsama grafiklerinin detayındaki bilgileri gizlemektedir. Korelasyon boyutuna yakınsamadan hareketle gerek deşiklilik gerekse deterministik kaotik süreçlere özgü karakteristikleri yakalayabilmek için daha büyük veri sayısı ve daha küçük ΔN kullanılması gerekmektedir.

BÖLÜM 5 : YÖNTEMİN MAKSİMUM VE MİNİMUM SICAKLIK VERİLERİNE UYGULANMASI

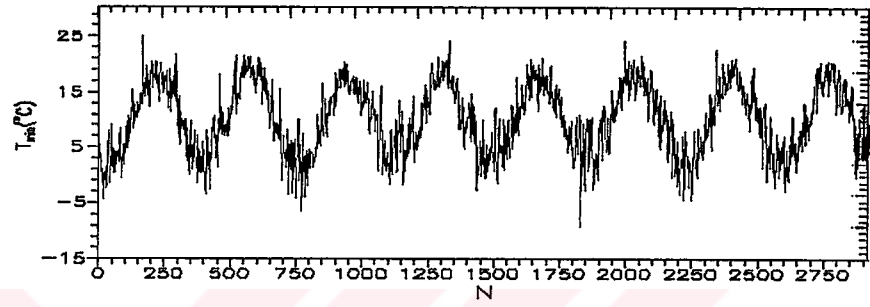
Bazı deterministik kaotik süreçlere, düzgün fraktallere ve deterministik kaotik olmayan süreçlere uygulanan yöntem, bu bölümde gerçek zaman serilerine uygulanmıştır. Bilindiği gibi pek çok meteorolojik parametre, bir zaman serisi şeklinde örneklenmektedir. Atmosferde oluşan bir sürecin, çok sayıda bağımsız değişken tarafından etkilenmesi, düzensiz (kaotik) bir davranışa neden olmaktadır. Bu nedenle, kaos teorisinin sıklıkla uygulandığı disiplinlerin başında "atmosfer bilimleri" gelmektedir. Bu bölümde, maksimum ve minimum sıcaklık verileri durumunda korelasyon boyutuna yakınsama üzerinde durulmuştur. Dolayısı ile önce verilerden mevsimlik salınımlar giderilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, Fourier analizi temeline dayanan bir yöntem önerilmiştir. Verilerden mevsimlik salınımlar giderildikten sonra, faz uzayı yeniden kurulmuştur. Ayrıca, yöntemin yeniden kurulmuş faz uzaylarına uygulanıp uygulanamayacağı, Hénon dinamik sistemin ilk durum değişkeni kullanılarak test edilmiştir.

5.1. Verilerden Mevsimlik Salınımların Giderilmesi

Çalışmada, İstanbul Kandilli Rasathanesinde ölçülen 1964-1983 yıllarına ait 20 yıllık günlük maksimum ve minimum sıcaklık verileri kullanılmıştır, (Şekil 5.1 a, b). Bu şekillerde de görüldüğü gibi verilerin hakim periyodu 365 gündür.



(a)



(b)

Şekil 5.1. Çalışmada kullanılan zaman serileri. (a) Maksimum sıcaklık, (b) Minimum sıcaklık.

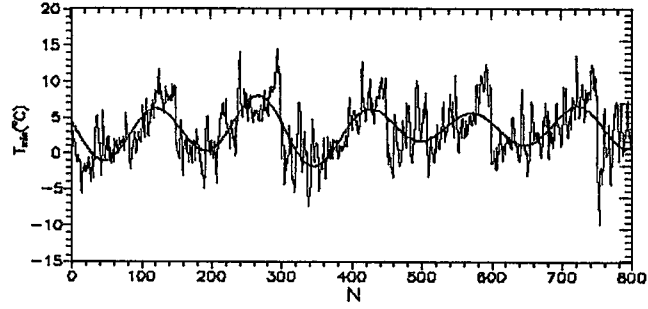
Ancak uygulamaya geçmeden önce incelenen zaman serilerinin stasyoner hale getirilmesi gerekmektedir, (Henderson ve Wells, 1988). Uygulamada 2.inci mertebeden stasyonerlik yeterli görülmektedir. Bunun için de ortalama ve standart sapmadaki periyodikliğin giderilmesi gerekmektedir. Ancak Lorenz ve Rabinovich-Fabrikant dinamik sistemlerinden üretilen zaman serilerinin incelenmesi sonucu, bu dinamik sistemlerin ortalamada stasyoner olmakla birlikte, standart sapmada stasyoner olmadıkları görülmüştür. Bu durumda serinin sadece ortalamada (1.inci mertebeden) stasyoner hale getirilmesi yeterli olacaktır.

Seriye 1.inci mertebeden stasyoner hale getirmek için uygulanan klasik yöntem, örnek ortalamalarından oluşan serinin periyodik bileşeninin, orijinal seriden çıkarılması şeklindedir. Diğer bir deyişle, elimizdeki şablonu (ortalamanın

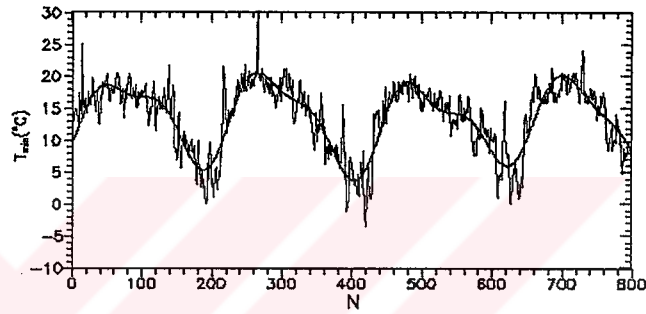
periyodik bileşeni) birinci yıl üzerine koyup, veriler ile şablon arasındaki farkı hesaplıyoruz ve bu işlemi diğer yıllar için tekrarlıyoruz. Ele alınan her hangi bir yılın bir kısmı şablonun üzerinde, diğer kısımları şablonun altında gerçekleşmiş ise bu salınım 1.inci mertebeden stasyonier seriye aynen yansıyacaktır, genel olarak mevsimlik salınımlar giderilemeyecektir. Bir seriden mevsimlik salınımları tam olarak gidermeye yönelik belirgin bir yöntem yoktur. Bu güçlük nedeniyle uygulamada, aynı mevsimler, örneğin sadece kış mevsimleri veya yaz mevsimleri birleştirilerek, mevsimlik salınımların olmadığı bir seri elde etme yoluna gidilir.

Ancak doğru yaklaşım, seriyi bir bütün olarak ele almaktır. Bu çalışmada, mevcut zaman serilerinden mevsimlik salınımlar çıkarıldıktan sonra, yöntemin uygulamasına geçilmiştir. Seriden mevsimlik salınımların çıkarılması için izlenen yol ise aşağıda özetlendiği gibidir.

Kandilli rasathanesinde ölçülen günlük maksimum ve minimum sıcaklıklar kullanılarak klimatolojik olarak belirlenen mevsimlerin, meteorolojik mevsimlerden bazı sapmalar gösterdiği ortaya konmuştur. Buna göre, 3 Ocak-6 Mart Kış, 6 Mart-30 Mayıs İlkbahar, 30 Mayıs-29 Eylül Yaz ve 29 Eylül-3 Ocak Sonbahar mevsiminin başlangıç ve bitiş tarihlerini göstermektedir, (Çağlar, 1995). Ancak bu çalışmada Kış ile İlkbahar, Yaz ile Sonbahar mevsimleri birleştirilerek, bir yıl iki mevsim şeklinde ele alınmıştır. Bu durumda birinci mevsim, 3 Ocak-30 Mayıs, ikinci mevsim ise 31 Mayıs-2 Ocak tarihlerini kapsamaktadır. Mevsimleri bu şekilde ayırmamızın iki önemli yararı vardır. Birincisi, birbirine benzeyen paternleri bir arada incelemenin sağladığı kolaylık, ikincisi ise, mevsimlerin incelenen periyot içindeki sıralarına göre tekrar birleştirilmeleri esnasında meydana gelebilecek süreksizlik durumlarını en aza indirmektir. Fourier analizi ile seriden mevsimlik salınımları gidermek mümkündür. Ancak bu durumda yeterli harmonik sayısını doğru bir şekilde belirlemek zordur.

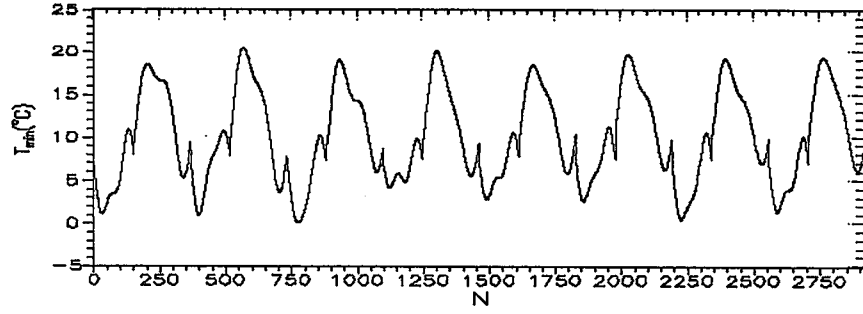


Şekil 5.2. Minimum sıcaklık verisinden elde edilen birinci mevsimlerin oluşturduğu seri.



Şekil 5.3. Minimum sıcaklık verisinden elde edilen ikinci mevsimlerin oluşturduğu seri.

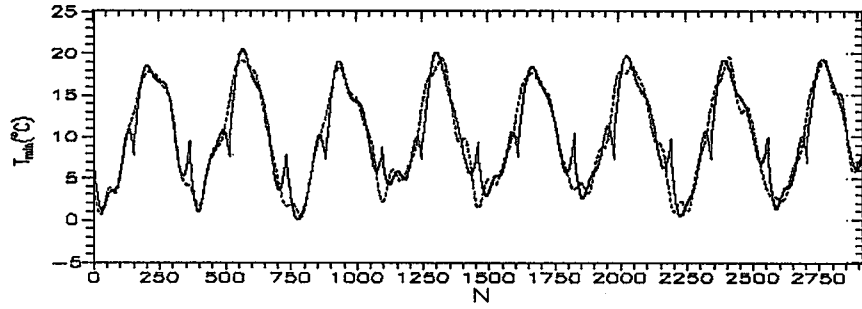
Ancak, benzer paternlerin yan yana gelmesi durumunda, yeterli harmonik sayısını daha doğru bir şekilde belirlemek mümkündür. Örneğin Şekil 5.2, minimum sıcaklık verisi içindeki birinci (Kış+İlkbahar) mevsimlerden oluşmuş bir seriyi göstermektedir. Şekilde, seriyi temsil eden toplam harmonik de çizilmiştir. Birinci mevsimlerden oluşan seri için toplam harmonikler her 10 adımda bir hesaplanmış ve sonuçta elde edilen toplam harmonikler Şekil 5.2'de verilen seri ile tek tek karşılaştırılmıştır. Harmoniklerin, mevsimlik salınımlardan daha küçük salınımları yakalamaya başladığı adımda karşılaştırma işlemine son verilmiştir. Benzer yaklaşım Şekil 5.3'de verilen ikinci mevsim (Yaz+Sonbahar) serisine de uygulanmıştır.



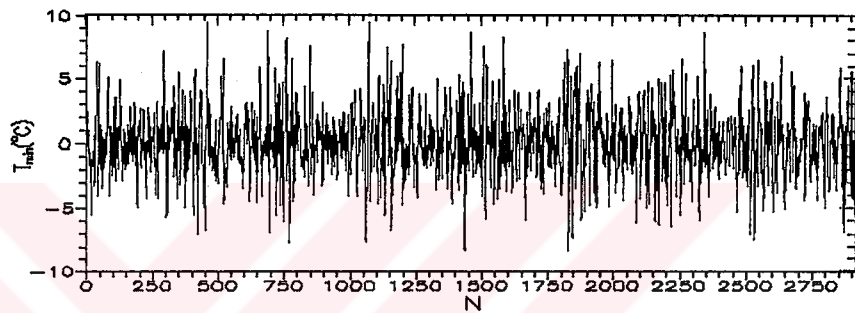
Şekil 5.4. Minimum sıcaklık serisinden mevsimlik salınımları gidermek için oluşturulan şablon.

Birinci ve ikinci mevsim serilerini en iyi temsil eden toplam harmonikler belirlendikten sonra, bu harmoniklerde her bir mevsime karşılık gelen kısım Şekil 5.4'de görüldüğü gibi minimum sıcaklık serisi içindeki sıralarına göre birleştirilmiştir. Mevsimlerin ikiye ikiye birleştirilmesi düşüncesi, yıl içindeki süreksizlik noktalarının sayısını (bu durumda bir nokta) minimuma indirmek içindir. Eğer mevsimleri ayrı ayrı ele almış olsaydık, yıl içindeki süreksizlik noktalarının sayısı üçe çıkacaktı.

Yukarıda anlatılan adımlardan sonra, minimum sıcaklık serisi (orijinal seri) için aynı şekilde her 10 adımda bir hesaplanan toplam harmonikler Şekil 5.4'de verilen şablon ile karşılaştırılmış ve şablonu en iyi temsil eden harmonikte karşılaştırma işlemine son verilmiştir, (Şekil 5.5). Şablon, karşılaştırma amacıyla kullanıldığı için süreksizlik noktaları içermesi önem taşımamaktadır. Son adımda ise, Şekil 5.6 görüldüğü gibi şablonu en iyi temsil eden harmonik, minimum sıcaklık serisinden çıkarılarak, mevsimlik salınımların giderilmiş olduğu bir seri elde edilmiştir. Bu serinin ortalaması sıfır, standart sapması ise 2.5°C 'dir. Buraya kadar minimum sıcaklık için yapılan işlemler benzer şekilde maksimum sıcaklık verisi için de yapılmıştır. Sonuçta elde edilen serinin ortalaması sıfır, standart sapması ise 3.6°C 'dir.



Şekil 5.5. Minimum sıcaklık verisinden hesaplanan harmoniklerin (kesikli eğri) şablon (sürekli eğri) ile karşılaştırılması

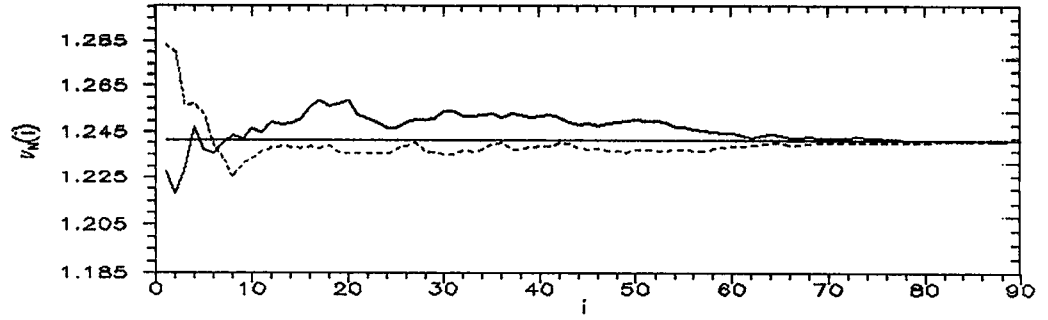


Şekil 5.6. Mevsimlik salınımları giderilmiş minimum sıcaklık verisi.

5.2. Yöntemin Yeniden Kurulmuş Faz Uzaylarına Uygulanması

Üçüncü bölümde genellikle orijinal faz uzayları üzerinde çalıştık. Ancak gerçek zaman serileri durumunda, ikinci bölümde verilen bilgiler doğrultusunda faz uzayının yeniden kurulması gerekmektedir. Bu amaçla Hénon dinamik sistemi, yöntemin, yeniden kurulmuş faz uzaylarına uygulanabilirliğini araştırmada test amacıyla kullanılmıştır.

Hénon dinamik sisteminin ilk durum değişkenine ait 30000 adet veriden, $\tau=2$ ve $m=3$ alınarak faz uzayı yeniden kurulmuştur. Çekicinin boyutu 1.24 ± 0.02 olarak hesaplanmıştır. Bu durum için korelasyon boyutuna yakınsama grafiği Şekil 5.7'de verildiği gibidir. Bu şekil, orijinal faz uzayından elde edilen grafik



Şekil 5.7. Hénon dinamik sisteminin ilk durum değişkeninden hareketle oluşturulan yeni faz uzayından hesaplanan korelasyon boyutuna yakınsama grafiği, $\tau=2$, $m=3$ ve $N=30000$ için

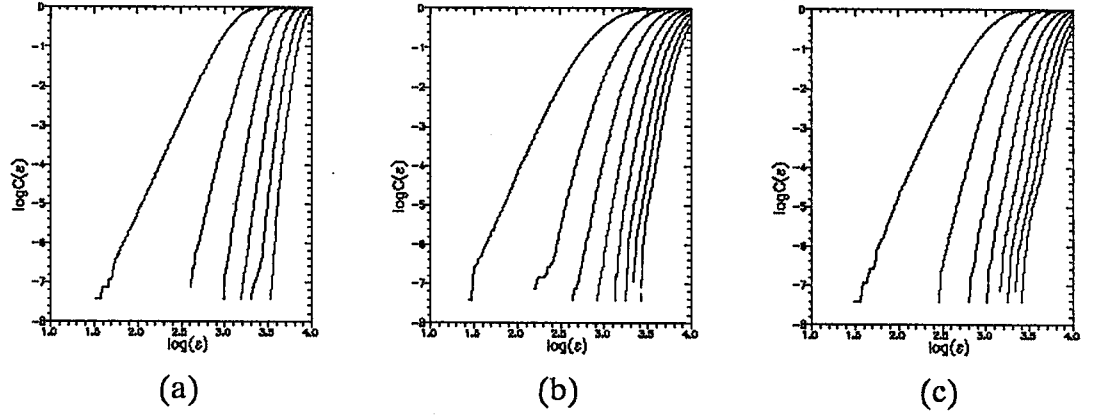
ile (bak. Şekil 4.14 a) karşılaştırıldığında detayda bazı farklar olmakla birlikte genel gidişin aynı kaldığı görülür.

5.3. Yöntemin Maksimum ve Minimum Sıcaklık Verilerine Uygulanması

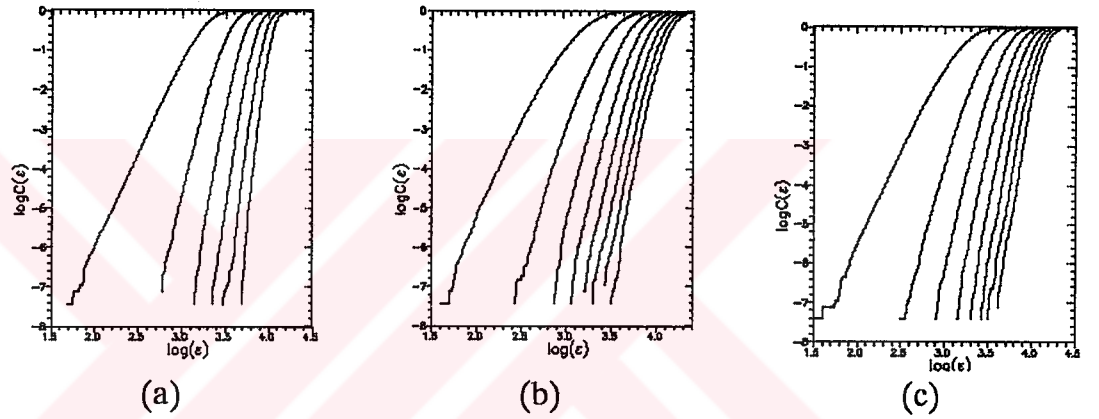
Çalışmada kullanılan verilerden, daha önce anlatılan yöntemle mevsimlik salınımlar giderildikten sonra, faz uzayı yeniden kurulmaya çalışılmıştır.

Çünkü yöntemin uygulanabilmesi için, faz uzayının ve bu uzay içindeki çekicinin

boyutunun hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $\tau=1, 2$ ve $m=5, 10, 15, \dots$ alınarak, korelasyon integralleri hesaplanmıştır. Ayrıca test amacıyla kullanmak için, verilerle aynı ortalama, standart sapma ve veri sayısına sahip rastgele veri için de korelasyon integralleri hesaplanmıştır. Sonuçlar, minimum sıcaklık için Şekil 5.8 a-c, maksimum sıcaklık için Şekil 5.9 a-c'de verilmiştir. Bu şekillerde verilen her korelasyon integralinden hesaplanan boyut değerlerinin değişimi m 'ye bağlı olarak çizilmiştir, (Şekil 5.10 a, b). Bu şekillerde, 1 no.lu eğri $\tau=1$; 2 no.lu eğri $\tau=2$ durumunu, 3 no.lu eğri ise verilerle aynı ortalama, standart sapma ve eleman sayısına sahip rastgele veriyi temsil etmektedir.



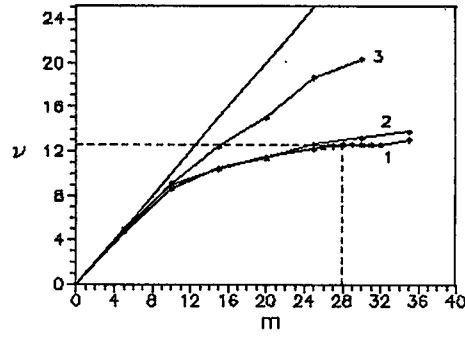
Şekil 5.8. Minimum sıcaklık verisinin korelasyon integralleri, (a) Rastgele veri, (b) $\tau=1$, (c) $\tau=2$ ($m=5, 10, 15, \dots$).



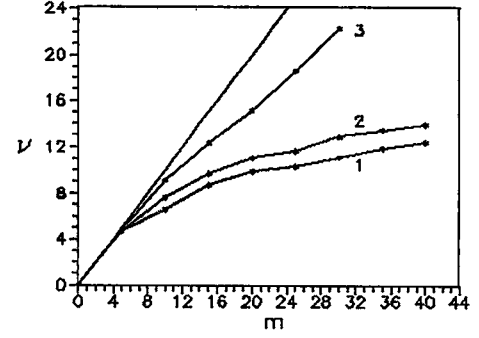
Şekil 5.9. Maksimum sıcaklık verisinin korelasyon integralleri. (a) Rastgele veri, (b) $\tau=1$, (c) $\tau=2$ ($m=5, 10, 15, \dots$).

Minimum sıcaklık durumunda, $\tau=2$ 'ye karşılık gelen eğri, 3 no.lu eğriden önemli oranda sapma göstermekle beraber her hangi bir m değerinde doymaya ulaşmamaktadır. Buna karşılık, $\tau=1$ için verilen eğri $m \approx 28$ değerinde hemen hemen sabit gitmektedir. Bu m değerine karşı gelen korelasyon boyutu 12.6'dır. Ancak büyük m değerlerinde 1 no.lu eğrinin tekrar yükselmeye başladığı da görülmektedir. $\tau=1$ durumunda, m ve buna karşı gelen ν değerini doğru olarak belirleyebilmek için, $m \approx 28$ civarında daha sık noktada hesaplama yapılmıştır.

Maksimum sıcaklık için verilen ν - m grafiğinde ise, gerek $\tau=1$ ve gerekse $\tau=2$

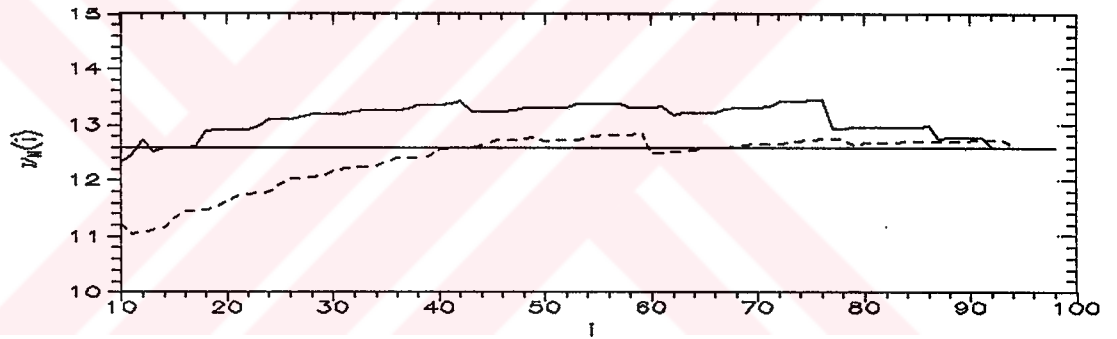


(a)



(b)

Şekil 5.10. Korelasyon boyutunun embedding boyutu ile değişimi, (a) Minimum sıcaklık, (b) Maksimum sıcaklık (1: $\tau=1$, 2: $\tau=2$, 3: rastgele veri).



Şekil 5.11. Minimum sıcaklık verisinden hesaplanan korelasyon boyutuna yakınsama grafiği.

durumu için m arttıkça ν de artmaktadır. Maksimum sıcaklık verisi durumunda boyut değerinin elde edilememesi nedeniyle korelasyon boyutuna yakınsama grafiğisadece minimum sıcaklık için hesaplanabilmektedir, (Şekil 5.11). STY ve BTY eğrileri düzenli bir artışla boyut değerinin üzerine çıktıktan sonra, grafiğin sonuna kadar bu şekilde devam etmekte ve ani bir inişle boyut değerine yaklaşmaktadır.

BÖLÜM 6: SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bir boyutlu zaman serilerinden korelasyon boyutunun sayısal olarak hesaplanması için yöntemler üzerinde durulmuş ve bu yöntemler düşük boyutlu determinist sistemlerden elde edilen zaman serilerine, gerçek meteorolojik veriye, ayrıca kontrol amacı ile kullanılmak üzere de ARIMA modelinden elde edilen gelişigüzel bir seriye uygulanmışlardır.

Çalışmada, Satır Tarama Yöntemi (STY) ve Band Tarama Yöntemi (BTY) olarak adlandırılan hesaplama yöntemleri ile korelasyon boyutunun ardışık yaklaşıtımlarla asimtotik değerine yakınsaması incelenmiştir. Giderek daha büyük sayıda eleman üzerinde toplamalar içeren bu ardışık yaklaşıtımların yöntemleri için incelenen sistemlerin periyodik ve aperiodyik oluşlarına göre bazı farklılıklar gözlenmiştir. Ayrıca, incelenen serilerin çekicilerinin ayrık ölçekleme (dilatasyon) simetrisine sahip oldukları durumda, bu çekicilerin deşikliliklerinde gözlenen periyodik davranışın, korelasyon boyutuna yakınsama eğrilerine de yansıdığı gözlenmiştir.

Yukarıda bahsedilen yöntem öncelikle, Logistic ve çadır tasviri gibi 1B ayrık dinamik sistemlere; Hénon, Kaplan-Yorke ve Zaslavskii gibi 2B ayrık dinamik sistemlere; Lorenz, Rössler ve Rabinovich-Fabrikant gibi 3B sürekli dinamik sistemlere ayrıca Cantor kümesi ve Koch eğrisi gibi determinist fraktallere uygulanmıştır.

Meteorolojik verinin, gerek düşük boyutlu determinist sistemlerden elde edilen kaotik sinyallerle, gerekse sentetik olarak üretilen çok yüksek boyutlu bir seri

ile karşılaştırılmasını yapabilmek için, ARIMA modelinden elde edilen seriler incelenmiştir. Varılan sonuçları ana hatları ile şu şekilde özetleyebiliriz:

- i) Deterministik kaotik süreçler durumunda, STY ve BTY genelde yakınsama hızı açısından önemli bir fark göstermezken; determinist fraktaller durumunda BTY'nın daha çabuk yakınsadığı gözlenmiştir.
- ii) Ayrık dinamik sistemlerde periyodik davranış durumunda STY ve BTY eğrileri de periyodik bir davranış göstermektedir.
- iii) Lorenz örneğinde olduğu gibi, sürekli dinamik sistemlerin verdiği periyodik davranışta STY ve BTY eğrileri periyodik bir salınım ortaya koymamaktadır.
- iv) Düşük boyutlu sistemlerden elde edilen kaotik davranışta ise hemen bütün örneklerde, korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri, korelasyon boyutunu temsil eden yatay çizgi etrafında, genel olarak düzensiz bir salınım vermektedir.
- v) Determinist fraktallerde, İteratif Fonksiyon Sistemleri ile şeklin oluşturulmasında alt aralıklara farklı olasılıkların atanması durumunda, korelasyon boyutuna yaklaşım da farklı olmaktadır. Şeklin, tanımlı olduğu aralığın/bölgenin başından sonuna doğru tamamlanacak şekilde üretilmesi halinde elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama, kümenin deşikliliğini yansıtan $\Phi(\epsilon)$ fonksiyonunun salınımı ile uygunluk göstermektedir. Buna karşılık olasılıkların üniform olarak seçilmesi durumu ile deterministik kaotik süreçler için elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama grafikleri arasında benzerlik olduğu gözlenmiştir.
- vi) Gerçek meteorolojik veri olarak, maksimum ve minimum sıcaklık zaman serileri üzerine yapılan uygulamada, maksimum sıcaklık için elde edilen $v-m$ grafiği herhangi bir m değerinde doymaya ulaşmazken, minimum sıcaklık verisi $\tau=1$ için $m=28$ 'de hemen hemen bir doymaya yaklaşmaktadır. Bu durum gözlemlerle de uyushmaktadır: Yeryüzüne ulaşan güneş radyas-

yonunda, başta bulutluluk etkisinin yolaştığı salınımlar, maksimum sıcaklığın daha düzensiz bir davranış göstermesine neden olmaktadır. Bunun tersine, direkt radyasyon etkisinin olmadığı gece koşullarında, atmosferin ulaştığı kararlılık minimum sıcaklığa da bu karakteri yansıtmaktadır. $m=28$ değerine karşı gelen korelasyon boyutu 12.6 olarak hesaplanmıştır. Çekicinin boyutu, korelasyon boyutundan büyük ya da eşit olduğuna ve sürecin modellenebilmesi için gerekli bağımsız değişken sayısının bir alt sınırını verdiği dikkate alınır; minimum sıcaklığın en az 13 bağımsız değişkenle modellenebileceği görülmektedir. Yine, günlük olarak ölçülen minimum sıcaklık verisi ve zaman içindeki davranışı dikkate alındığında, $\tau=1$ değerinin olayın bir karakteristik zaman ölçeğini yansıttığı söylenebilir. Minimum sıcaklık için elde edilen korelasyon boyutuna yakınsama grafiği ana hatları bakımından, deterministik kaotik süreçler durumunda elde edilenler ile benzer niteliksel davranışı göstermektedir.

- vii) Çok yüksek boyutlu bir seri örneği olarak ARIMA(1,0,1) modelinden üretilen ve mertebe olarak meteorolojik veri ile aynı uzunluktaki bir seriden hesaplanan korelasyon boyutunun, faz uzayının yeniden kurulması için varsayılan embedding boyutu (m) ile sürekli büyüdüğü; $m=35$ değerinde dahi bu büyümenin yavaşlamadığı gözlenmiştir. Böylece, bu serinin nisbeten düşük boyutlu bir determinist sistemle modellenemeyeceği doğrulanmıştır. Bu durumda, faz uzayının yeniden oluşturulması mümkün olmadığından, STY ve BTY ile v 'nun hesaplanması ve diğer serilerle kıyaslanması da doğal olarak mümkün değildir.

Bir boyutlu sistemlerden sayısal yöntemlerle genelleştirilmiş boyut hesaplamalarının güvenilir olabilmesi için, genelde gerçekçi olmayacak kadar uzun zaman serilerine ihtiyaç vardır. Kullanılan sayısal yöntemlerin yakınsamaları, doğru sayıya yakınsadıklarının her zaman işareti de olmayabilirler. Bu nedenle, karmaşık serilerin modellenmesinde, elde edilen bu sayılar, ancak bir ilk

yaklaştırım olarak değerlendirilmeli, verinin hangi özellikleri modellenmek isteniyorsa, bunlara özgü yöntemlerle ek çalışmalar yapılmalıdır.



KAYNAKLAR

- Badii, R., Broggi, G., Derghetti, B., Ravani, M., 1988: Dimension increase in filtered chaotic signals, *Physical Review Lett.*, 60(11): 979-982.
- Baker, G.L., Gollup, J.P., 1990: *Chaotic Dynamics (an introduction)*, Cambridge University Press.
- Barnsley, M.F., Demko, S., 1985: Iterated function systems and the global construction of fractals, *The Proceedings of the Royal Society of London*, A399: 243-273
- Ben-Mizrachi, A., Procaccia, I., 1984: Characterization of experimental (noisy) strange attractors, *Physical Review A*, 29(2): 975-977.
- Bergé, p., Pomeau, Y., Vidal, C., 1984: *Order Within Chaos*, John Wiley & Sons.
- Brandstater, A., Swinney, H.L., 1987: Strange attractor in weakly turbulent Couette-Taylor flow, *Physical Review A*, 33(5): 2207-2220.
- Buzug, T., Pfister, G., 1992: Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors, *Physical Review A*, 45(10): 7073-7084.
- Chennaoui, A., Pawelzig, K., Liebert, W., 1990: Attractor reconstruction from filtered chaotic time series, *Physical Review A*, 41(8): 4151-4159.

- Çağlar, Z.N., 1995: İstanbul için klimatolojik mevsimlerin belirlenmesi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- Essex, C., Lookman, T., Nerenberg, M.A.H., 1987: The climate attractor over short timescales, *Nature*, 326: 64-66.
- Fraedrich, K., 1986: Estimating the dimensions of weather and climate attractors, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43(5): 419-432.
- Fraedrich, K., 1987: Estimating weather and climate predictability on attractors, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 44(4): 722-728.
- Fraser, A.M., Swinney, H.L., 1986: Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Physical Review A*, 33(2): 1134-1140.
- Froehling, H., Crutchfield, J.P., Farmer, D., Packard, N.H., and Shaw, R., 1981: On determining the dimension of chaotic flows, *Physica*, 3D: 605-617.
- Grassberger, P., Procaccia, I., 1983(a): Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica*, 9D: 189-208.
- Grassberger, P., Procaccia, I., 1983(b): Characterization of strange attractors, *Physical Review Lett.*, 50(5): 448-451.
- Henderson, H.W., Wells, R., 1988: Obtaining attractor dimensions from meteorological time series, *Advances in Geophysics*, 30: 205-237.
- Kostelich, E.J., Yorke, J.A., 1988: Noise reduction in dynamical systems, *Physical Review A*, 38(3): 1649-1652.
- Liebovitch, L.S., and Toth, T., 1989: A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting, *Physics Letters A*, 141(8,9): 386-390.

- Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow, *Journal of The Atmospheric Sciences*, 20: 130-141.
- Mandelbrot, B.B., 1982: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.
- Martinerie, J.M., Albano, A.M., Mees, A.I., Rapp, P.E., 1992: Mutual Information, Strange attractor, and the optimal estimation of dimension, *Physical Review A*, 45(10): 7058-7064.
- May, R.M., 1976: Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 261: 459-467.
- Nerenberg, M.A.H., Essex, L., 1990: Correlation dimension and systematic geometric effects, *Physical Review A*, 42(12): 7065-7074.
- Nicolis, C., Nicolis, G., 1984: Is there a climatic attractor? *Nature*, 311: 529-532.
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Shaw, R.S., 1980: Geometry from a time series, *Physical Review Lett.*, 45(9): 712-716.
- Pal, P.K., 1991: Cyclone track prediction over the North Indian Ocean, *Monthly Weather Review*, 119: 3095-3098.
- Parker, T.S., Chua, L.O., 1989: *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag.
- Peitgen, H-O., Jürgens, H., Saupe, D. 1992: *Chaos and Fractals, new frontiers of science*. Springer-Verlag.
- Rasband, S.N., 1990: *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons.
- Renyii, A., 1970: *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam.

- Rodriguez-Iturbe, I., De Power, B.F., 1989: Chaos in rainfall, *Water Resources Research*, 25(7): 1667-1675.
- Sharifi, M.B., Georgakakos, K.P., Rodriguez-Iturbe, I., 1990: Evidence of deterministic chaos in the pulse of storm rainfall, *J. Atmos. Sci.*, 47(7): 88-893
- Shuster, H.G., 1989: *Deterministic Chaos, An Introduction*, Second Ed., VCH.
- Smith, L.A., Fournier, J.D., and Spiegel, E.A., 1986: Lacunarity and intermittency in fluid turbulence, *Physics Letters A*, 114(8,9): 465-468.
- Smith, L.A., 1988: Intrinsic limits on dimension calculations, *Physics Letters A*, 133(6): 283-288.
- Sparrow, C., 1982: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, New Yorke.
- Şen, Z., 1978: Autorun analysis of hydrologic time series, *Journal of Hydrology*, Vol. 36: 75-85.
- Theiler, J., 1988: Lacunarity in a estimator of fractal dimension, *Physics Letters A*, 133(4,5): 195-200.
- Tsonis, A.A., Elsner, J.B., 1988: The weather attractor over very short timescales, *Nature*, 333: 545-547.

Ö Z G E Ç M İ Ş

Kasım KOÇAK 1959 yılında Sivas'da doğdu. 1978 yılında Sivas Öğretmen Lisesinden mezun oldu. Askerlik hizmetinden sonra 1983 yılında girdiği İ.T.Ü. Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Meteoroloji Mühendisliği Bölümü 1987 yılında tamamlayarak, 1988 yılında aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. "Yağış Verilerinin Autorun Analizi" adlı Yüksek Lisans tezini 1992 yılında veren Kasım KOÇAK, evli ve bir çocuk babasıdır.