

66369

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AKÜSTİK FİBERLERDE DALGA
YAYILIMI**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Mürvet (KIRCI) ÜÇER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Şubat 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 16 Temmuz 1997

Tez Danışmanı

: Prof. Dr. Ergül AKÇAKAYA

Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Ahmet Dervişoğlu

Prof. Dr. Ercan Topuz

Prof. Dr. Selim Şeker

Prof. Dr. Gökhan Uzgören

TEMMUZ 1997

ÖNSÖZ

Bu tezin tüm çalışmaları süresince yardımlarını ve çeşitli konulardaki önerilerini benden esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Ergül Akçakaya'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bana tüm yaşantım boyunca maddi ve manevi destek olan sevgili annem ve babama, daima, sonunda başaracağıma inanan eşime, kardeşlerime ve arkadaşlarıma da çok teşekkür ederim.

Son üç senedir hayatıma giren hem karıştırıp hem de güzelleştiren kızıma, bana verdiği moral için, ve ona bakanlara da ayrıca teşekkür ederim.

12 Şubat 1997

Mürvet Kırcı Üçer

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER	
2.1 Giriş	9
2.2 Temel Bağıntılar	
2.3 Dalga Denklemleri	12
2.4 Dağılma Bağıntısı	21
2.5 Mod Analizi	30
2.6 Çeşitli Mod Yaklaşıklıkları	32
2.7 Sayısal Hesaplamalar	36
2.8 Sonuçlar	37
BÖLÜM 3 HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER İÇİN DURUM DEĞİŞKENİ YAKLAŞIMI	
3.1 Giriş	44
3.2 Formülasyon	45
3.3 Mod Analizi	50
3.4 Genel Çözümlerin Bulunması	51
3.5 Sayısal Hesaplamalar	59
BÖLÜM 4 PİEZOELEKTRİK HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER İÇİN DURUM DEĞİŞKENİ YAKLAŞIMI	
4.1 Giriş	74
4.2 Formülasyon	75
4.3 Mod Analizi	81
4.4 Genel Çözümlerin Bulunması	83
4.5 Sayısal Hesaplamalar	91
BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER	100
KAYNAKLAR	102

EK A	105
EK B	106
ÖZGEÇMİŞ	134



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Akustik fibere ilişkin geometrik yapı	13
Şekil 2.2 2.Bölümdeki yönteme göre torsiyonel mod dağılma eğrileri (ZnO)	39
Şekil 2.3 2.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(ZnO)	40
Şekil 2.4 2.Bölümdeki yönteme göre Fleksural tek mod dağılma eğrileri(ZnO)	41
Şekil 2.5 2.Bölümdeki yönteme göre Fleksural çift mod dağılma eğrileri (ZnO)	42
Şekil 2.6 Kompleks dğişkenli Torsiyonel mod dağılma eğrileri (ZnO)	43
Şekil 3.1 3.Bölümdeki yönteme göre torsiyonel mod dağılma eğrileri(ZnO)	61
Şekil 3.2 3.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(ZnO)	62
Şekil 3.3 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural tek mod dağılma eğrileri(ZnO)	63
Şekil 3.4 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural çift mod dağılma eğrileri(ZnO)	64
Şekil 3.5 3.Bölümdeki yönteme göre torsiyonel mod dağılma eğrileri(CdS)	65
Şekil 3.6 3.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(CdS)	66
Şekil 3.7 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural tek mod dağılma eğrileri(CdS)	67
Şekil 3.8 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural çift mod dağılma eğrileri(CdS)	68
Şekil 3.9 3.Bölümdeki yönteme göre torsiyonel mod dağılma eğrileri(CdSe)	69
Şekil 3.10 3.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(CdSe)	70
Şekil 3.11 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural tek mod dağılma eğrileri(CdSe)	71
Şekil 3.12 3.Bölümdeki yönteme göre fleksural çift mod dağılma eğrileri(CdSe)	72
Şekil 3.13 T_{01} ve R_{01} modlarındaki gerilmelerin radyal doğrultudaki değişimleri(ZnO)	73
Şekil 4.1 4.Bölümdeki yönteme göre torsiyonel mod dağılma eğrileri(ZnS)	93
Şekil 4.2 4.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(ZnS)	94
Şekil 4.3 4.Bölümdeki yönteme göre fleksural tek mod dağılma eğrileri(ZnS)	95

Şekil 4.4	4.Bölümdeki yönteme göre radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(CdS)	96
Şekil 4.5	4.Bölümdeki yönteme göre fleksural tek mod dağılma eğrileri(CdS)	97
Şekil 4.6	3.ve 4. Bölümlerdeki yöntemlere göre elde edilen radyal-eksenel mod dağılma eğrileri(CdS)	98
Şekil 4.7	3.ve 4. Bölümlerdeki yöntemlere göre elde edilen fleksural tek mod dağılma eğrileri(CdS)	99



ÖZET

Bu çalışmada, haberleşme ve radar sistemlerinde yaygın olarak kullanılan ultrasonik elemanlardan heksagonal anizotropiye sahip akustik kılıflı fiber ayrıntılarıyla incelenmiştir. Akustik kılıf kalınlığı sonsuz geniş, boyunun da sonsuz uzun olduğu kabul edilmiştir. Heksagonal anizotropiye sahip kılıflı fiberin akustik dalga yayılımı için şimdiye kadar kullanılan geleneksel yöntem karmaşık sayılarla analiz yapılacak şekilde yeniden ele alınmış ve dağılma bağıntıları verilmiştir. Elde edilen dağılma bağıntılarından faydalanılarak torsiyonel, radyal-eksenel ve fleksural modlara ilişkin dağılma eğrileri çizdirilmiştir. Ayrıca izotropik durum için ve kılıfsız fiber yapısı için dalga yayılımı gözden geçirilmiştir.

Bu tezde anlatılan yeni yöntem, sınır koşullarında görünen gerilme, mekanik yer değiştirme gibi büyüklüklerin durum değişkeni olarak tanımlanmasına dayanmaktadır. Bu yöntem bir bakıma lineer sistemlerdeki durum değişkenleri yöntemine benzemektedir. Dağılma bağıntıları durumdenkellerine benzer yapıdaki denklemlerden faydalanılarak elde edilmektedir. Bu tezde verilen yeni yöntemden faydalanılarak yine fleksural, torsiyonel ve radyal-eksenel modlar için dağılma eğrileri elde edilmiştir. Bu eğrilerin elde edilmesinde ZnS, CdS ve CdSe gibi heksagonal simetriye sahip kristallerin malzeme değerleri kullanılmıştır.

Kılıflı fiber için piezoelektrik etki de gözönüne alınarak yeni yöntemle dalga yayılımı incelenmiştir. Fleksural, radyal-eksenel ve torsiyonel modlar için dağılma bağıntıları elde edilmiştir. Bu elde edilen dağılma bağıntılarından faydalanılarak sayısal hesaplamalar yapılmıştır. Bu bölümde ZnS ve CdS'e ilişkin malzeme değerleri kullanılarak dağılma eğrileri elde edilmiştir.

SUMMARY

WAVE PROPAGATION IN ACOUSTIC FIBERS

Recently ultrasonic devices which we can see in various application areas have been improved very much. Although the existence of the acoustic wave was known since 19th century, the improvement on devices has been done recently. This improvement is due to developement in fabrication technique and researches on the analysis methods. These devices are various filters (as band pass filter, matched filter), delay lines, convolvers imaging probes etc. The developement in design and theoretical analysis methods has provided wide usage of devices in the telecommunication and radar systems. One can observe the difference in the geometrical structure which can be either rectangular prism or cylindric due to the application area concerned. The first of these different geometrical structures is used in making various filters, correlators and convolvers. There are many papers related with the rectangular prism structure on which interdigital transducer is placed. The methods which have been improved for this structure, is used later also for the cylindrical geometry.

In this thesis, acoustic fibers, which is the one of the second group mentioned above has been investigated. Acoustic fibers are versatile compenents as imaging probe and delay lines because of their advantages. These advantages are low loss in high frequency, advanced imaging resolution, smaller wave length than fiber diameter and mechanical flexibility. One of the application areas of acoustic fibers is delay line since electromagnetic velocity is faster than acoustic velocity.

Besides the long delay line, many ultrasonic applications using cladded fibers are also of interest for instance, ultrasonic imaging probes were developed using cladded fibers and these probes could be arranged in to an imaging array. Because of the low acoustic loss the probes using cladded fibers can operated at a higher frequency than probes with the silica fibers(1GHz.). Another important and interesting characteristic of the single cristal cladded fibers is that several crystals as LiNbO_3 are both transparent for optical and acoustical waves. One could utilize one

cladded fibers or an array of cladded fibers to provide some of optical and ultrasonic functions.

These above applications require a comprehensive understanding of the acoustic wave propagation characteristics in cladded fibers. Most single crystals are anisotropic in acoustic properties. So one of the main questions concerning whether a cladded fiber is suitable for practical applications is how the wave dispersion is affected by the material anisotropy. The acoustic wave propagation characteristics are well understood, but the knowledge of acoustic wave propagation in anisotropic fiber waveguides is in its initial stages.

For acoustics, even without the consideration of piezoelectricity, the material stiffness constants which need to be considered can be up to 21 in number in a triclinic crystal. In this thesis only the cladded fibers of hexagonal crystal symmetries are investigated. Although stiffness constant matrix is fourth order tensor, it is represented as a 6x6 matrix because of the crystal symmetries. Stiffness constant matrix has many different coefficients other than zero, which changes from 2 till 21 due to the class of crystal. The most complex stiffness matrix belongs to triclinic class crystals which have 21 different stiffness constants. Monoclinic class crystals follow this in complexity, which have 13 stiffness constants. The structures belonging to these class crystals are too difficult to investigate. In the literature isotropic, hexagonal, cubic and trigonal class crystals are investigated because their analysis is easier than the above mentioned ones.

In the investigation of the dispersion characteristics of the acoustic fibers, the first works are related with the cylindrical acoustic waveguides. The analysis which investigates torsional mode for circular cylindrical fiber was improved by Thurston. In the work which has been done by Waldron the thickness of the clad is chosen infinity large. This work has been further studied in details by Thurston. Choosing the thickness of the clad large enough makes it possible to ignore the acoustic field in far field. This approximation is a need in investigating the guided mode analysis. Therefore this analysis has given only for the torsional mode investigation. Mirsky has investigated other modes (radial-axial modes) besides torsional for the hollow circular cylindrical fibers. For the hexagonal anisotropic and nonpiezoelectric crystal fibers has been further carried by Dai. He has completed this analysis for various modes in the weakly guided acoustic waveguides. In all these works, the

theory is a complicated one where the equations that has to be solved are partial differential equations.

There are two main difficulties in the analysis of the anisotropic fiber waveguides. The first one is the material anisotropy which differs due to class, crystal belongs. These classes are mentioned above. The second one is the geometrical structure of the waveguide. The classical methods used in analyzing the problem of the wave propagation are the finite difference method or the finite element method in the circular cylindrical acoustic anisotropic fibers. Considering the regular geometry of the cylindrical fiber, finite difference method seems to be preferable. However, because of the existence of the material anisotropy and due to the cylindrical structure, even the formulation of the numerical solution is very complex. Therefore numerical methods are assisted by analytical perturbation methods. Because many material constants are involved, acoustic wave propagation is very complicated. Nevertheless several researchers have used numerical methods to analyze isotropic acoustic fiber waveguides and the vibration of anisotropic acoustic rods.

Analytical solutions usually provide a better physical insight to a problem than numerical methods. They often serve as guidelines for numerical approaches to investigate more complicated problems. Thus it is desirable to obtain such an analytical result if it exists. But here, it is only possible to obtain for unisotropic cladded fibers in the implicit form. The first step in searching for the solutions of the anisotropic cladded fibers is to formulate the problem using the physical magnitudes. In all these works, these physical magnitudes such as stress, strain and displacements, which show up in the acoustic wave equations, are expressed by scalar potential functions. As a result helmholtz differential equations are obtained, where the variables are displacements which are represented by scalar potentials. After expressing the solution in implicit form, the boundary conditions of the stresses and displacements have been used. This analysis is based on expressing displacements and stresses as scalar potential functions.

In this thesis the displacements and stresses which are used in the boundary conditions, are taken as state variables. A new method based on this fundamental concept is presented. This method converts the second order partial differential equations (with respect to space) to the first order ordinary differential equations for the case of acoustic wave. Because the physical magnitudes have been expressed directly as state variables, there is no need for the scalar potential functions which was used before. The dispersion equation which gives the dispersion

characteristic is obtained from the solutions of the equations by using the boundary conditions. This method is an improved version of the one which has been given for the multilayer structures. In this case first order vector matrix differential equations related to acoustic wave propagation is similar to the ones governing the wave equations in time varying linear systems.

The cladded fibers are assumed to be infinity long while the claddings are also of infinite thickness. The axes due to the material of the core and cladding is same. The axes due to the material is named crystallines, the fiber axes is the crystalline $Z(0,0,1)$ axis. Figure 1.1 shows the coordinate system used in this thesis. Then cartesian coordinate system (x,y,z) is chosen such that the coordinates x,y and z coincide with the crystalline X,Y and Z axis, respectively. The cylindrical coordinate system (r,θ,z) is designated with the z axis being the same as the cartesian z -axis and the angle θ is in x - y plane and measured counterclockwise from the x -axis. In order to follow the customs in the literature, in the cylindrical coordinate system, the angular coordinate θ is used for acoustic propagation investigations. The core and cladding regions will be designated by the subscript (i) $i=1$ and 2 , respectively. The time dependence of the acoustic waves is assumed to be $\exp(j\omega t)$, where ω is the angular frequency and t is time. β will be used to represent the propagation constant of acoustic waves and phase velocity is $V=\omega/\beta$. Other symbols are defined in each chapter.

In order to investigate the acoustic wave propagation of the cladded fiber, Newton's second law, quasistatic field equations, constitutive equations and strain displacement relations will be used. Constitutive equations shows the relation between the stress, strain and electric field. In this thesis these equations are for the hexagonal situation. In the second and third chapters, the stress- strain equation will be used as the constitutive equations. this is the property of nonpiezoelectric situation, where T_{ij} denotes stress, c_{ijkl} denotes stiffness, S_{kl} denotes strain tensors. Stress T_{ij} and strain S_{kl} are represented with the matrix notation insted of tensor because of the crystal symmetries. Similarly the forth order stiffness tensor is represented by a stiffness matrix. These crystal symmetries gives the following equalities $c_{ijkl}=c_{klij}=c_{jiik}=c_{ikji}$. Therefore in this thesis, the matrix and the vector notation will be used instead of tensor notation. Thus S_{ij} , T_{ij} and c_{ijkl} becomes S_I , T_I and c_{JI} respectively.

In the second chapter an analysis method is given which is based on expressing the displacement compenents with the scalar potential functions. As the acoustic cladded fiber is investigated in the cylindrical coordinates (r,θ,z) , Newton's second law will be written in the

cylindrical coordinate system. The stresses expressed in this equation are due to displacements and stiffness constants by using constitutive relations and strain displacement relations. Displacements are expressed with the scalar potential functions as convenient with the fundamental concept of the method. If this method is followed, equations will be third order differential equations with respect to space (radial component). The solutions of these equations end in Bessel differential equations. Therefore the general solution of the stresses and the displacements will be the combination of the Bessel functions. In this case boundary conditions will be as follows:

- a) In the boundary for both regions, the radial components of stress are continuous.
- b) In the boundary for both regions, displacement components are continuous.

Applying to the boundary conditions to the general solution of the stresses and displacements, equations are arranged and the dispersion equation is obtained. Since the determinant of the a_{ij} matrix vanishes which has been written from these equations, the dispersion equation has been obtained as a result. The components of a_{ij} matrix are the Bessel functions. Therefore for situations $n=0$ and $n \geq 1$ mode analysis has been done. For $n=0$ a_{ij} has been separated into two different matrices which are 2×2 and 4×4 . Torsional modes have been obtained from the 2×2 matrix and radial-axial modes have been obtained from the 4×4 matrix. For $n \geq 1$, a_{ij} has been used completely, and in this case general flexural modes are analysed. Here mode analysis has been revised under the various approaches.

In the third chapter, a new method has been given where the stresses and displacements are the state variables. In the boundary conditions only these state variables are seen. Since this method directly expresses the mechanical magnitudes related with space as the state variables in the equations, the scalar potential functions are no use. As the structure is acoustic clad fiber in cylindrical geometry. The general solutions related with these equations are combination of Bessel functions. If in the new obtained equations, these general solutions are substituted, the coefficients of the general solution will be found carrying out linear algebraic equations. Thus the stresses and displacements which were seen as the state variables, have been obtained as the Bessel functions. Applying boundary conditions in these solutions and arranging the equations one can obtain a_{ij} . Determinant of a_{ij} gives the dispersion relation. Then for $n=0$ and $n \geq 1$ mode analysis have been done. The aim is to show torsional, radial-axial and general flexural modes. These result

are shown with the dispersion curves(V - fa) where V is phase velocity , fa is the product of frequency and radius of the cladded fiber. These curves are same as the ones in the second chapter.

In the fourth chapter acoustic wave propagation of the cladded fiber has been investigated where the piesoelectric effect is also concerned.In this chapter the same geometric structure and properties have been considered. The dispersion relation has been obtained by using the state variable method. The result are very convenient as shown in figures.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Çeşitli uygulama alanları ile karşılaşılan ultrasonik elemanlar, son yıllarda büyük bir gelişme göstermiştir. Akustik yüzey dalganın varlığı 19. yüzyıldan beri bilinmesine rağmen; ultrasonik elemanların geliştirilmesi, ancak analiz yöntemlerinde yapılan çalışmalar ve fabrikasyon tekniklerinin geliştirilmesi ile olmuştur. Bu elemanlar arasında örnek olarak çeşitli filtreler, geciktirme hatları, bant geçiren filtreler, konvolverler ve görüntü problemleri sayılabilir. Tasarım ve teorik analiz yöntemlerindeki gelişmeler özellikle haberleşme ve radar sistemlerinde yaygın olarak kullanılmalarını sağlamıştır. Bu elemanlarda yararlanılacak alana bağlı olarak, geometrik biçimin dikdörtgen prizma ya da silindirik yapı şeklinde farklılaştığı gözlenmektedir. Bu iki ayrı yapı tipinden birincisinde çeşitli filtreler , geciktirme hatları, konvolver ve korelatörler yapılmıştır. Bir dikdörtgen prizma şeklindeki alt yapı malzemesinin üzerine geçmeli tarak yapı şeklinde metal elektrodların yerleştirilmesiyle oluşturulan elemanlarla ilgili birçok çalışma vardır [1-10]. Bu yapı için yapılan çalışmalar ve geliştirilen yöntemler daha sonra silindirik yapı için de kullanılmıştır.

Bu tezde yukarıda belirtilen yapılardan ikinci gruba giren akustik fiberler incelenmiştir. Akustik fiberler sağladıkları avantajlarla özellikle görüntü problemleri ve geciktirme hatları olarak aranan elemanlar olmuşlardır. Bu avantajlar, boyunun uzun olabilmesi, fiber çapının küçük olması, ağırlığının az olması ve iyi bir mekanik esnekliğe sahip olmasıdır. Ayrıca bu amaçla kullanılan malzemelerin yüksek frekanslarda düşük akustik

kayıpları vardır. Akustik fiberlerin en önemli kullanım alanlarında biri, geciktirme hatları olarak kullanılmalarıdır. Çünkü elektromagnetik hız ($\sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/sn}$) ile karşılaştırıldığında akustik hızın (tipik hızlar; enine dalga için 2000 m/sn -boyuna dalga için 5000 m/sn civarında) çok daha küçük olduğu görülmektedir. Kısa bir fiberle, oldukça büyük bir gecikme elde edilebilmektedir. Gecikmeyi daha da büyötmek için, hattın boyunun uzun olması gerekir. Karşılaşılan akustik fiberler, on cm.ler civarında veya daha büyük olabilmektedir. Bell laboratuvarları tarafından izotropik malzeme kullanılarak yapılan bir fiberin boyu, 1.07 m .'yi bulmaktadır [11].

Bütün bu yukarda sayılan özelliklere sahip olan akustik fiberlerin teorik olarak incelenmesi, akustik dalga dağılım karakteristiklerinin elde edilmesini gerektirir. Birçok araştırmacı, izotropik ve anizotropik yapıdaki kılıflı ve kılıfsız akustik fiberlerin dağılım karakteristiklerini elde etme yolunda çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda, izotropik durum inceleme açısından en kolay olanıdır. Çünkü izotropik durumda elastisite katsayıları sadece iki tanedir. Anizotropik yapıdaki fiberlerde kristalin hangi sınıftan olduğuna bağlı olarak, problemin zorluk derecesi artmaktadır. Elastisite katsayıları dördüncü dereceden bir tensör olup 6×6 boyutunda bir matris ile gösterilebilmektedir [12]. Elastisite matrisi, kristalin sınıfına bağlı olarak 2'den 21'kadar farklı sayıda elastisite sabitlerine sahiptirler. En karmaşık elastisite matrisi, 21 farklı elastisite sabitiyle triklinik sınıfından olan kristal grubuna aittir. Bunu 13 farklı elastisite sabitiyle monoklinik sınıf kristaller izler. Bu gruptaki kristaller incelenmesi çok zor olan yapılardır. Literatürde incelenmesi yukardakilere göre nispeten daha kolay olan izotropik, heksagonal, kübik ve son zamanlarda da trigonal sınıfından kristallerin incelendiği görülmektedir[13-20].

Akustik fiberlerin dağılım karakteristiklerinin incelenmesinde ilk yapılan çalışmalar, silindirik akustik dalga kılavuzları ile ilgilidir [13]. Dairesel silindirik fiber için torsiyonel modları inceleyen bir analiz Thurston tarafından geliştirilmiştir [15]. Kılıf kalınlığı çekirdek yarıçapından çok büyük seçilen bir araştırmada, yine Waldron tarafından yapılmış [16] ve bu Thurston tarafından ayrıntılı hale getirilmiştir [17]. Kılıf kalınlığının çok büyük seçilmesi, kılıfın dış bölgesindeki akustik alanın ihmal edilebilmesini sağladığından, kılavuzlanmış mod analizlerinin incelenmesini kolaylaştırmak için gerekli bir yaklaşımdır. Bu analizler, sadece torsiyonel modların incelenmesini sağlamaktaydı. Mirsky ise, torsiyonel modların yanısıra diğer modları da (radyal-eksenel ve fleksural modlar) delikli dairese silindirik yapı için incelemiştir [23]. Zayıf olarak kılavuzlanmış akustik fiber dalga kılavuzlarında izotropik durum için tüm mod analizleri ayrıca incelenmiştir. Son olarak da, heksagonal piezoelektrik olan ve olmayan durumlarda zayıf olarak kılavuzlanmış akustik fiber dalga kılavuzları için çeşitli mod analizleri yapılmıştır [24]. Bu çalışmalarda oldukça karmaşık bir teori ile karşılaşmaktadır. Bu teori, bir kısmi diferansiyel denklem takımının çözümünü gerektirmektedir. Bu çalışmalarda hem malzeme üzerine getirilen kısıtlamalar, hem de yöntemde yapılan yaklaşıklıklarla problem, nispeten basitleştirilmiş, geometrik yapıya uygun olan Bessel diferansiyel denklemlerine varılmış ve bunun çözümü kullanılmıştır. Böylece daha basit nümerik hesaplamaya uygun çözümlere ulaşılabilmektedir.

Akustik fiberlerin tam analizlerinin yapılmasında bu kadar büyük zorluklarla karşılaşılmasının iki ayrı nedeni vardır. Bunlardan birincisi, kristal sınıflarına bağlı olarak değişen malzeme anizotropisi; ikincisi ise, fiberin geometrik yapısıdır. Dairesel silindirik anizotropik akustik fiberler

için dalga yayılımı probleminin nümerik çözümünde sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yönteminin uygulanması çok karmaşık olmaktadır. Eğer bulunabiliyorsa problemlere nümerik çözümler üretmek yerine analitik çözümler üretmek, istenen bir yoldur. Çünkü daha iyi bir fiziksel görüş sağlar. Burada incelenen problemlerin çözümleri, kapalı form çözümler olarak elde edilmektedir. Bu çözümlerin elde edilmesinde yöntemin [20-24] başlangıç adımı fiziksel büyüklüklerin tanımlanmasıdır. Yapılan tüm çalışmalarda akustik dalga denklemlerinde yer alan gerilme, uzama ve yer değiştirme gibi büyüklükler skaler potansiyel fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmişlerdir. Böylece problem, değişkenleri skaler potansiyel fonksiyonları olan Helmholtz diferansiyel denklemlerine dönüştürülmektedir. Daha sonra, bu denklemler çözülerek, skaler potansiyel fonksiyonları bulunmakta ve dolayısıyla gerilme ve yer değiştirme büyüklükleri elde edilmektedir. Gerilme ve yer değiştirme büyüklüklerine sınır koşulları uygulanarak çözüme ulaşılmaktadır [20-24].

Bu tezde ise, sınır koşullarında görülen yer değiştirme ve gerilmeler durum değişkeni olarak alınmış ve bu temele dayanan yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Burada izlenen yol, heksagonal simetriye sahip dairesel silindirik kılıflı yapıdaki fiberlerin akustik dalga yayılımı problemine ilişkin ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin yerine birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemi getirmektedir. Ayrıca sınır koşullarında görünen fiziksel büyüklükler, doğrudan durum değişkeni olarak tanımlandığından, daha önceki yöntemlerde kullanılan skaler potansiyel fonksiyonlarının da ortadan kalkmasını sağlamaktadır. Böylece dağılma karakteristiğini verecek olan dağılma bağıntısı, denklemlerin doğrudan çözümlerinin sınır koşullarında kullanılması ile elde edilmektedir. Piezoelektrik olmayan heksagonal simetriye sahip kristaller için geliştirilen yöntem daha sonra kristalin piezoelektrik özellikte olması haline genişletilmiştir. Bu yöntem çok tabakalı ultrasonik

yapılar için verilen bir yöntemin geliştirilmiş halidir [25,26]. Burada silindirik yapıdaki akustik dalga propagasyonu için geliştirilen diferansiyel denklemler sistemi, yapı olarak, zamanla değişen lineer sistemlerdeki durum denklemlerinin benzeridir.

Bu tezde geliştirilen yöntem, çok sayıda içiçe silindirden oluşan yapıların incelenmesine kolaylık getirmektedir. Her bir silindir tabakanın dış bölgesindeki sınır koşulları, iç bölgesindeki sınır koşulları cinsinden durum geçiş matrisi yardımıyla ifade edildiğinden, içiçe silindir yapının tümünün durum geçiş matrisi, her bir tabakanın durum geçiş matrislerinin çarpımı ile bulunabilecektir. Geliştirilen yöntemin bu özelliği, sözkonusu kolaylığı sağlamaktadır. Yöntem, her bir tabakayı, kaskat parametreleri ile tanımlanmış bir çok kapılı devre elemanı gibi değerlendirme imkanı vermektedir. Bu özellik içiçe silindir yapılarının analizinde yeni yorum yapmaya imkan vermektedir.

Bu yöntemi kullanmak, aynı zamanda tüm çözümler yazılmadan denklemlerin ayrıştırılması ile mod analizi yapabilmeyi sağlamaktadır. Böylece sadece torsiyonel yada radyal-eksenel modların analizleri elde edilmek isteniyorsa, bu yöntem yardımıyla, dairesel simetri ($n=0$) varsayımı altında, bu modlara ilişkin iki farklı diferansiyel denklem sistemi, genel durumdaki diferansiyel denklem sistemden çekilebilir. Ayrıca dördüncü bölümde verilen yöntemdeki denklemlerde, piezoelektrik katsayılar sıfır alınırsa, bu denklemlerden, piezoelektrik etkinin hesaba katılmadığı üçüncü bölümdeki denklemlere geçmek mümkündür. Bu olanak Winkel ve arkadaşlarının [32] yönteminde görülmemekte, 0/0 belirsizliği ile karşılaşmaktadır.

Akustik kılıflı fiberdeki dalga yayılımını incelemek için elastik ortamlarda geçerli bünye denklemleri, Newton'un hareket eşitliği, Kuazistatik alan

denklemleri ve uzama-yerdeğiştirme bağıntıları yazılmıştır. Bünye denklemleri elastik ortamlarda gerilme ,uzama ve elektrik alanı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu tezde heksagonal kristal fiberler incelenmiştir. Geliştirilen yöntem izotropik hale kolaylıkla uygulanabilir. Bu tez boyunca bünye denklemleri tensör notasyonu değil matris -vektör notasyonu kullanılacaktır.

Bu tez boyunca incelenecek olan geometrik yapı sonsuz uzun içiçe geçmiş aynı merkezli çift tabakalı bir silindir şeklinde olacaktır. Silindirin iç yarıçapı a , dış yarıçapı ise sonsuz büyük olarak gözönüne alınacaktır. Üzerinde çalışılan geometrik yapı nedeniyle, koordinat sistemi olarak silindirik koordinat sistemi (r, θ, z) ile çalışılmıştır. θ açısı x - y düzleminde x ekseninden saat yönüne ters olarak ölçülmektedir. Koordinat sisteminin z -ekseni kristalin Z -ekseni $(0,0,1)$ ile çakışık durumdadır. İç tarafta kalan silindir çekirdek olarak , dış silindir ise kılıf olarak adlandırılmaktadır. Hesaplamalarda çekirdek ve kılıf bölgesi i alt indisi ile belirtilmektedir. $i=1$ ve 2 sırasıyla çekirdek ve kılıf bölgelerini göstermektedir. Denklemlerde ω açısal frekans , β dalga sayısı olmak üzere faz hızı $V=\omega/\beta$ olarak gösterilir. Akustik dalgalar için zamana bağıllık üstel olarak $\exp(j\omega t)$ ile gösterilmektedir. Kullanılan diğer semboller bölüm içinde tanıtılacaktır.

İkinci bölümde, temeli yerdeğiştirme bileşenlerini, skaler potansiyel fonksiyonları ile ifade etmeye dayanan bir analiz yöntemi anlatılmaktadır [23]. Akustik kılıflı fiberin dalga yayılımı silindirik koordinatlarda (r, θ, z) inceleneceğinden Newton'un hareket denklemi silindirik koordinat sisteminde yazılmıştır. Bu denklemde görülen gerilmeler bünye denklemleri ile uzama ve yerdeğiştirme büyüklükleri arasındaki bağıntının da yardımıyla tamamen yerdeğiştirme bileşenleri ve elastisite katsayılarına bağılı hale getirilmiştir. Bu denklemde görülen yer değıştirme bileşenleri

de, yöntemin temeline uygun olarak skaler potansiyel fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmişlerdir. Bu yol izlenecek olursa karşılaşılan denklemler 3. dereceden uzaya bağlı (r 'ye bağlı) diferansiyel denklemler olacaktır. Bu denklemlerin çözümü ise, Bessel diferansiyel denklemlerine götürecektir. Bundan dolayı gerilmelere ve yerdeğiştirme bileşenlerine ilişkin genel çözümler, Bessel fonksiyonlarının bileşiminden oluşacaktır.

Gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerine ilişkin genel çözümler, sınır koşullarında yerine konularak denklemler düzenlenmiş ve dağılma bağıntısı elde edilmiştir. Dağılma bağıntısında dairesel simetri varsayımı altında $n=0$ ve genel halde $n \geq 1$ durumları için mod analizi yapılmıştır. $n=0$ için dağılma bağıntısı ayrışarak iki ayrı dağılma bağıntısı elde edilir. Bu dağılma bağıntıları torsiyonel ve Radyal-eksenel modlara ilişkindir. $n \geq 1$ için elde edilen modlara da genel fleksural modlar denmektedir. Bu mod analizi için geçerli olan, çeşitli yaklaşıklıklar tanıtarak, bu yaklaşıklıkların yapılması durumunda elde edilen sonuçlar anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde sınır koşullarında yer alan yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin diferansiyel denklemlerde değişken olarak görüldüğü yeni bir yöntem anlatılmıştır. Bu yöntem bir bakıma lineer sistemlerdeki durum değişkenleri yöntemine benzemektedir. Bu denklemlere ilişkin genel çözümler, akustik kılıflı fiber silindirik yapıda olduğundan, yine Bessel fonksiyonlarının bileşiminden oluşmaktadır. Bu genel çözümler yeni elde edilen denklemlerde yerine konularak genel çözümlere ilişkin katsayılar lineer cebirsel denklemlerin çözümü yoluyla elde edilmektedir. Böylece durum değişkeni olarak görülen gerilme ve yerdeğiştirmelerin Bessel fonksiyonları cinsinden çözümleri elde edilmiş olur. Dağılma bağıntısı elde edildikten sonra, yine $n=0$ ve $n \geq 1$ için mod analizi yapılarak

torsiyonel, radyal-eksenel ve genel fleksural modlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar V faz hızı, fa frekans ve kılıflı fiberin çekirdeğinin yarıçapının çarpımı olmak üzere (V-fa) dağılma eğrileri çizilmiştir. Bu tezde geliştirilen yöntemle elde edilen eğrilerin ikinci bölümdeki eğrilerle aynı olduğu görülmektedir.

Dördüncü bölümde ise pizoelektrik etki de katılmış durum için kılıflı fiberin akustik dalga yayılımı incelenmiştir. Bu bölümde de aynı geometrik yapı ve özellikler gözönüne alınmıştır. Üçüncü bölümde geliştirilen yöntem kullanılarak dağılma bağıntısı elde edilmiştir. Karşılaştırma kolaylığı olsun diye ref. [31] deki veriler kullanılarak sayısal hesaplama yapılmıştır. Sonuçların, literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlara çok yakın olduğu görülmüştür.

Beşinci bölümde tezde elde edilen sonuçlar yer almış ve daha sonra yapılabilecek çalışmalar için öneriler verilmiştir.

BÖLÜM 2

HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER

2.1 GİRİŞ

İzotropik çubuk ve kılıflı fiberlerdeki akustik dalga yayılımı literatürde ayrıntılı olarak araştırılmıştır[11,15,21]. İzotropik durumdan sonraki en basit anizotropik durum, 5 farklı elastisite sabitine sahip olan heksagonal kristal yapısıdır. Silindirin eksen doğrultusu ile kristalin Z-ekseni çakıştığı zaman, bu durum sağlanmaktadır. Bu yapıdaki fibere enine izotropik fiber de denir. Bu bölümde temel bilgilerin yanısıra, kılıflı heksagonal fiberin akustik dalga yayılımı incelenmiş ve 3. bölümde anlatılacak olan yöntemle karşılaştırma yapma olanağı sağlanmıştır. Sayısal hesaplama kısmında, ayrıca karmaşık değişkenlerle kök arama programı geliştirilmiş ve ref.[24]'den farklı olarak kılıflı fiber için torsiyonel moda ilişkin dağılma eğrileri elde edilmiştir. Burada belirtilen özelliklere sahip kılıflı fiber için verilen karmaşık değişkenlere bağlı sayısal hesaplama yeni bir çalışmadır. Bu bölümde anlatılan hesaplama yöntemiyle elde edilen dağılma bağıntısından faydalanılarak ve reel sayılarla çalışılarak dağılma eğrileri de ayrıca elde edilmiştir.

Geçmişte yapılan birçok çalışmada, heksagonal simetriye sahip kılıfsız fiberin akustik dalga karakteristikleri incelenmiştir. Mirsky [23] ortası boş delikli yapıdaki silindir için akustik dalga yayılımını incelemiştir. Daha sonra Mirsky'nin yönteminin geliştirilmesi ile heksagonal kılıflı fiber için bu bölümde anlatılacak olan hesaplama yöntemi verilmiştir[24]. Bu bölümde,

piezoelektrik olmayan heksagonal çekirdek ve sonsuz kalınlıktaki kılıflı fiberin akustik dalga yayılımı karmaşık değişkenler için incelenmiştir. Böylece sayısal hesaplama kısmında karmaşık kökleri arayan programların yazılması mümkün olmaktadır. Bu analiz yöntemi karmaşık değişkenler için yazıldığından, buradan reel hesaplama yapılmasını sağlayan ref.[24]'deki dağılma bağıntısı elde edilmiştir. Dairesel simetri varsayımı altında $n=0$, ve genel halde $n \geq 1$ durumlarında ortaya çıkan dağılma bağıntıları ve modlar tanımlanmıştır. Bu dağılma bağıntıları zayıf kılavuzlama koşulu altında kılıflı fiberlerin tam analizini vermektedir.

Zayıf kılavuzlama koşulu , izotropik durumda V_1 ve V_s hızlarının çekirdekteki değerlerinin kılavuzdaki değerlerinden bir miktar az olmasıdır. Buradaki V_1 ve V_s fiber malzemesinin boyuna ve enine hızlarıdır. Dalga kılavuzu uygulamalarında, zayıf kılavuzlamalı fiberler düşük dağılma avantajı gösterirler. Fakat aynı zamanda çok kalın bir kılıf gerektirirler. İstenen düşük dağılmalı bir dalga kılavuzu ise zayıf kılavuzlama koşulu zorunludur. Bu koşul, pratikte yeterli olan yaklaşık analiz için uygun bir zemin ve dalga kılavuzu özelliklerinin de daha iyi anlaşılmasını sağlar. Pratikte zayıf kılavuzlama koşulu tek bir kılıfı olan fiberler için elde edilebilen bir koşuldur. Burada da bu koşul silindirin içindeki iki ortamdaki elastisite sabitlerinin matematiksel bir oranı ile sağlanmıştır. Malzemenin yoğunluğu her iki ortamda da aynı tutulmuştur. Hem tüm modlar için tam dağılma bağıntıları hem de bazı yaklaşıklıkların kullanıldığı dağılma bağıntıları verilmiştir.

2.2 TEMEL BAĞINTILAR

Elastik ortamlar için geçerli olan denklemler; ortamdaki gerilme ,uzama ve elektrik alanı arasındaki bağıntıları veren bünye denklemleri ,

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{ijk} E_k \quad ; i,j,k,l=1,2,3 \quad (2.1.a)$$

$$D_i = e_{ijk} S_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j \quad ; i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.1.b)$$

Newton'un hareket denklemi,

$$T_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \quad (2.2)$$

Kuasistatik alan denklemi,

$$D_{i,i} = 0 \quad (2.3)$$

ayrıca

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.4)$$

Uzama-yerdeğiştirme bağıntısı

$$S_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.5)$$

olarak sıralanabilir. Bu denklemlerde görülen büyüklüklerden ; T_{ij} gerilmeyi (stress), S_{ij} uzamayı (strain), u_i yerdeğiştirmeyi gösteren mekanik büyüklüklerdir. E_k elektrik alan vektörü bileşenini, D_i deplasman akım yoğunluğu vektörünün bileşenini, φ ise elektriksel potansiyel fonksiyonunu göstermektedir. Bünye denklemlerinde yer alan c_{ijkl} , e_{ijk} ve ε_{ij} 'ler sırasıyla elastisite, piezoelektrik ve dielektrik tensörleridir. Virgülden sonraki indis, o indisli koordinata göre türevi göstermektedir. Değişken üstündeki iki nokta da, zamana göre ikinci türevi belirtmektedir. 2. ve 3. Bölümlerde piezoelektrik etkinin ihmal edildiği durumda akustik dalga yayılımı inceleneceği için e_{ijk} tensörü sıfır olarak alınmıştır Katsayı tensörleri

matris biçiminde yazılabilir. Heksagonal kristal malzemeye ilişkin elastisite matrisi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada ayrıca $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ eşitliği de geçerlidir. Bu nedenle toplam elastisite sabiti beştir. $c_{13}=c_{12}$, $c_{33}=c_{11}$ ve $c_{66}=c_{44}$ olarak alınırsa yukardaki $\mathbf{C}$ elastisite matrisi izotropik durum için elde edilmiş olur. ρ malzemeye ait yoğunluğu göstermektedir. Bu denklemler temel denklemler olup teori bu denklemler üzerine kurulmuştur.

2.3 DALGA DENKLEMLERİ

Tezde geometrik yapısı Şekil (2.1)'de gösterilen heksagonal simetriye sahip kılıflı fiber gözönüne alınmıştır. Kılıflı fiberin geometrik yapısına uygun silindirik koordinat sistemi (r, θ, z) seçilmektedir. Koordinat sisteminin z -ekseni ile kristalin Z -ekseni çakışık durumdadır. Bu koşullar altında Newton'un hareket denklemi dairesel silindirik koordinat sisteminde

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (2.7.a)$$

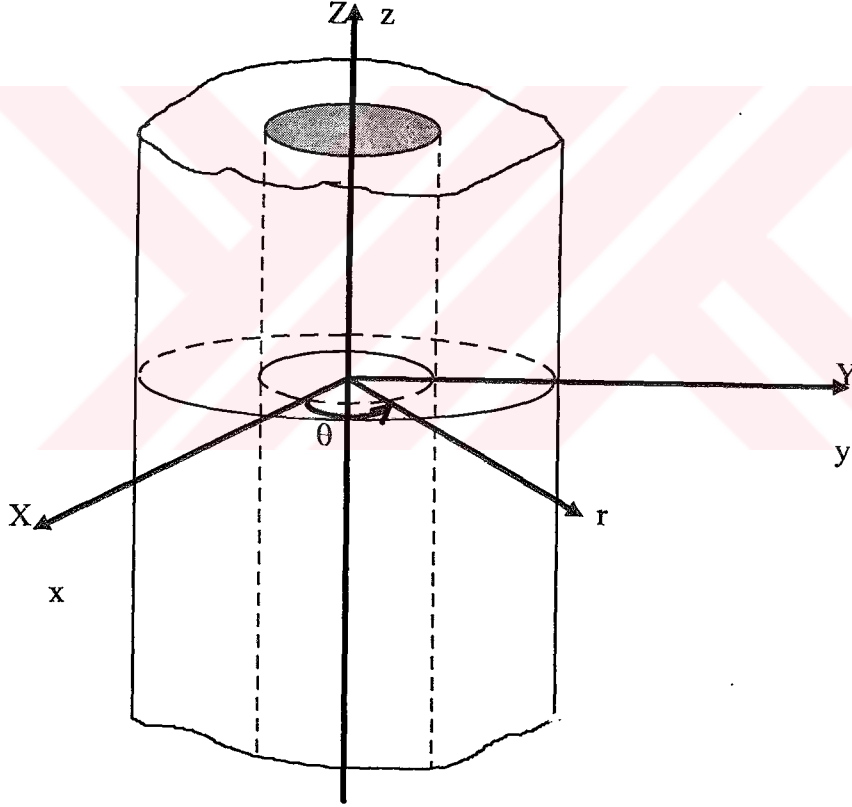
$$\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T_{r\theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2.7.b)$$

$$\frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{rz} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (2.7.c)$$

biçiminde yazılır[27]. Tensör gösteriliminden matris gösterilimine geçebilmek için, iki indisli gerilme büyüklüklerinin literatürde bilinen kurala göre [2,12] tek indisli olarak düzenlenmesi gerekir:

$$T_{rr}=T_1, \quad T_{\theta\theta}=T_2, \quad T_{zz}=T_3, \quad T_{\theta z}=T_4, \quad T_{rz}=T_5, \quad T_{r\theta}=T_6$$

Bu bölümde sadece piezoelektrik olmayan durum incelendiği için Bünye denklemlerinde sadece mekanik büyüklükler görülecektir.



Şekil 2.1. Heksagonal dairesel silindirik akustik fibere ilişkin geometrik yapı. (X,Y,Z) Kristal eksenlerini,(x,y,z) kartezyen koordinat sistemini ve (r,θ,z)silindirik koordinat sistemini göstermektedir.

(2.7) denklemlerinde piezoelektrik olmayan bünye denklemleri, uzama ve yer değiştirme arasındaki bağıntıyı veren (2.5) denklemi yerine konursa Newton'un hareket denklemi

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c_{11} + n^2 c_{66} & jn(c_{11} + c_{66}) & 0 \\ -jn(c_{11} + c_{66}) & c_{66} + n^2 c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & n^2 c_{44} \end{bmatrix} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j\beta(c_{13} + c_{44}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -j\beta(c_{13} + c_{44}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\beta(c_{13} + c_{44}) \\ -j\beta(c_{13} + c_{44}) & n\beta(c_{13} + c_{44}) & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \omega^2 \rho - \beta^2 c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \rho - \beta^2 c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \rho - \beta^2 c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu denkelmlerde ω açısal frekans, β dalga sayısı olmak üzere faz hızı $V = \omega/\beta$ olarak tanımlanır. Akustik dalgalar için zamana bağıllık üstel olarak ($j\omega t$) ile gösterilmektedir. Burada,

$$T_i(r, \theta, z, t) = T_i(r) e^{-j\beta z} e^{jn\theta} e^{j\omega t} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.9)$$

$$u_j(r, \theta, z, t) = u_j(r) e^{-j\beta z} e^{jn\theta} e^{j\omega t} \quad j = r, \theta, z \quad (2.10)$$

biçimindedir. u_j yer değiştirme bileşenleri skaler potansiyel fonksiyonlarına bağlı olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$u_r = \frac{d}{dr} \phi + j \frac{n}{r} \psi \quad (2.11.a)$$

$$u_\theta = -\frac{d}{dr} \psi + j \frac{n}{r} \phi \quad (2.11.b)$$

$$u_z = \lambda \phi \quad (2.11.c)$$

ϕ ve ψ fonksiyonları da,

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r) e^{-j\beta z} e^{jn\theta} e^{j\omega t} \quad (2.12.a)$$

$$\psi(r, \theta, z, t) = \psi(r) e^{-j\beta z} e^{jn\theta} e^{j\omega t} \quad (2.12.b)$$

biçimindedir. Bu bağıntılar (2.8) denkleminde yerine konursa ilk iki denklem,

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & -c_{66} \end{bmatrix} \frac{d^3}{dr^3} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & jnc_{66} \\ jnc_{11} & -c_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(n^2 + 1)c_{11} & jnc_{66} \\ jnc_{11} & (n^2 + 1)c_{66} \end{bmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (\omega^2 \rho - \beta^2 c_{44}) - j\beta\lambda(c_{13} + c_{44}) & 0 \\ 0 & -(\omega^2 \rho - \beta^2 c_{44}) \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & jn(\omega^2 \rho - \beta^2 c_{44}) \\ jn((\omega^2 \rho - \beta^2 c_{44}) - j\beta\lambda(c_{13} + c_{44})) & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

haline gelir.(2.8) deki 3. denklem ise

$$[\lambda c_{44} - j\beta(c_{13} + c_{44})] \left\{ \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \phi \right\} + \lambda(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{33})\phi = 0 \quad (2.14)$$

biçimindedir. Bu bağıntılarda

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$$

notasyonu kullanılarak (2.13) ve (2.14) denklemleri, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d}{dr} [c_{11} \nabla^2 \phi + \{\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44} + j\lambda\beta(c_{13} + c_{44})\} \phi] + j \frac{n}{r} [c_{66} \nabla^2 \psi + (\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44}) \psi] = 0 \quad (2.15)$$

$$-j \frac{n}{r} [c_{11} \nabla^2 \phi + \{\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44} + j\lambda\beta(c_{13} + c_{44})\} \phi] - \frac{d}{dr} [c_{66} \nabla^2 \psi + (\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44}) \psi] = 0 \quad (2.16)$$

$$[\lambda c_{44} - \beta(c_{13} + c_{44})] \nabla^2 \phi + (\rho\omega^2 - \beta^2 c_{33}) \lambda \phi = 0 \quad (2.17)$$

Bu denklemlerin ilk ikisinden

$$c_{11} \nabla^2 \phi + [(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44}) - j\beta\lambda(c_{13} + c_{44})] \phi = 0 \quad (2.18)$$

$$c_{66} \nabla^2 \psi + (\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44}) \psi = 0 \quad (2.19)$$

denklemleri yazılabilir. (2.15), (2.16) ve (2.17) denklemlerinde görülen λ

$$\frac{\lambda(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{33})}{\lambda c_{44} - j\beta(c_{13} + c_{44})} = \frac{\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44} - j\beta\lambda(c_{13} + c_{44})}{c_{11}} = -p^2 \quad (2.20)$$

ilişkisi sağlanacak biçimde seçilirse ve

$$q^2 = \frac{\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44}}{c_{66}} \quad (2.21)$$

olmak üzere, (2.18) ve (2.19) denklemleri,

$$\nabla^2 \phi - p^2 \phi = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \psi + q^2 \psi = 0 \quad (2.23)$$

biçiminde yazılabilir. (2.20) denkleminden

$$p^4 c_{11} c_{44} + p^2 [(c_{11} + c_{44}) \rho\omega^2 + \beta^2 (c_{13}^2 + 2c_{44} c_{13} - c_{11} c_{33})] + (\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44})(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{33}) = 0 \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu denklemin p_1^2 ve p_2^2 kökleri için (2.22) denklemi yeniden yazılırsa,

$$\nabla^2 \phi_1 - p_1^2 \phi_1 = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla^2 \phi_2 - p_2^2 \phi_2 = 0 \quad (2.26)$$

şeklinde olacaktır. Yukardaki denklem p^4 'ün katsayısı 1 olacak şekilde düzenlenirse

$$p^4 + p^2 \frac{1}{c_{11} c_{44}} [(c_{11} + c_{44}) \rho\omega^2 + \beta^2 (c_{13}^2 + 2c_{44} c_{13} - c_{11} c_{33})] + \frac{(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{33})(\rho\omega^2 - \beta^2 c_{44})}{c_{11} c_{44}} = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir; diğer bir deyişle

$$p^4 + \beta^2 B p^2 + \beta^4 C = 0 \quad (2.28)$$

bulunur. Boyuna dalga hızı $V_l = (c_{33}/\rho)^{1/2}$, enine dalga hızı $V_s = (c_{44}/\rho)^{1/2}$ ve faz hızı V olmak üzere

$$B = \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{11}} \right) \left(\frac{V^2}{V_s^2} + \frac{c_{13}^2 + 2c_{44}c_{13} - c_{11}c_{13}}{(c_{11} + c_{44})c_{44}} \right) \quad (2.29)$$

$$C = \frac{c_{33}}{c_{11}} \left(\frac{V^2}{V_l^2} - 1 \right) \left(\frac{V^2}{V_s^2} - 1 \right) \quad (2.30)$$

olarak yazılır. (2.28) eşitliğinin kökleri

$$p_{1,2}^2 = \beta^2 \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (2.31)$$

olacaktır. (2.22) denklemi p'nin iki tane kökü olduğu düşünülerek

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \phi_k + r \frac{d}{dr} \phi_k - (p_k^2 r^2 + n^2) \phi_k = 0 \quad , k=1,2 \quad (2.32)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme ilişkin genel çözüm

$$\gamma_k = \{p_k^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ olmak üzere}$$

$$\phi = A Z_n(\gamma r) + B W_n(\gamma r)$$

biçiminde yazılabilir. Bu çözümde $Z_n (J_n, Y_n)$ Bessel fonksiyonlarını, W_n de (I_n, K_n) Değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. Y_n fonksiyonlarının $r=0$ da tekil noktası olduğundan sonlu kalmaz. Bu nedenle çekirdek bölgesindeki çözümde gözönüne alınmaz. J_n her yerde sonlu olduğundan çözüm J_n ve I_n cinsinden yazılır. Kılıf bölgesinde ise, kılıf bölgesi sonsuz kalın olduğu için, çözüm $H_n^{(2)}$ ve K_n fonksiyonları ile ifade edilir.

$p_1^2 > 0$ için

$$g_1^{(i)} = A_i Z_{ni}(\gamma_1^{(i)} r) \quad \begin{cases} Z_{n1} = J_n & \text{çekirdek} & i = 1 \\ Z_{n2} = H_n^{(2)} & \text{kılıf} & i = 2 \end{cases} \quad (2.33)$$

$p_1^2 < 0$ için

$$g_1^{(i)} = A_i Z_{ni}(\gamma_1^{(i)} r) \quad \begin{cases} Z_{n1} = I_n & \text{çekirdek} & i = 1 \\ Z_{n2} = K_n & \text{kılıf} & i = 2 \end{cases} \quad (2.34)$$

ve

$p_2^2 > 0$ için

$$g_2^{(i)} = B_i Z_{ni}(\gamma_2^{(i)} r) \quad \begin{cases} Z_{n1} = J_n & \text{çekirdek} & i = 1 \\ Z_{n2} = H_n^{(2)} & \text{kılıf} & i = 2 \end{cases} \quad (2.35)$$

$p_2^2 < 0$ için

$$g_2^{(i)} = B_i Z_{ni}(\gamma_2^{(i)} r) \begin{cases} Z_{n1} = I_n & \text{çekirdek} \quad i = 1 \\ Z_{n2} = K_n & \text{kılıf} \quad i = 2 \end{cases} \quad (2.36)$$

biçimindedir. Burada A_i ve B_i keyfi sabitleri göstermektedir. ϕ 'nin çözümü $\phi = g_1 + g_2$ dir. (2.23) denklemi daha açık olarak şöyle yazılabilir:

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi - \left(\frac{n^2}{r^2} - q^2 \right) \psi = 0 \quad (2.37)$$

biçiminde yazılıp, düzenlenirse,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \psi + r \frac{d}{dr} \psi + (q^2 r^2 - n^2) \psi = 0 \quad (2.38)$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü gibi (2.23) denklemi Bessel dif. denklemdir. Bu denklemin çözümleri q^2 'nin işaretine bağlı olarak değişir.

Genel çözüm için $\alpha = \{q^2\}^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$\psi(r) = CZ_n(\alpha r) + DW_n(\alpha r) \quad (2.39)$$

ifadesi yazılabilir. Yukardaki ϕ_k 'nin çözümleri için yapılan ayrıştırma burada da yapılırsa

$q^2 > 0$ için çözüm

$$f^{(i)} = C_i Z_{ni} (\alpha^{(i)} r) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Z_{n1} = J_n & \text{çekirdek} \quad i = 1 \\ Z_{n2} = H_n^{(2)} & \text{kılıf} \quad i = 2 \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

$q^2 < 0$ için çözüm

$$f^{(i)} = C_i Z_{ni} (\alpha^{(i)} r) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Z_{n1} = I_n & \text{çekirdek} \quad i = 1 \\ Z_{n2} = K_n & \text{kılıf} \quad i = 2 \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

olur. $p_k^{(i)}$ ve $q^{(i)}$ 'nin işaretleri malzemeye bağlı olarak değişecektir.

Çalışılan duruma uygun olan çözüm kullanılır. Daha önce yer değiştirme potansiyel fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanmıştı. Burada genel çözümleri verilen potansiyel fonksiyonları yerine konularak, $i=1$ çekirdek, $i=2$ kılıf bölgesindeki yerdeğiştirmeleri göstermek üzere,

$$u_r^{(i)} = \frac{d}{dr} g_1^{(i)} + \frac{d}{dr} g_2^{(i)} + \frac{n}{r} f^{(i)} \quad (2.41)$$

$$u_\theta^{(i)} = - \left[\frac{n}{r} (g_1^{(i)} + g_2^{(i)}) + \frac{d}{dr} f^{(i)} \right] \quad (2.42)$$

$$u_z^{(i)} = \lambda_1 g_1^{(i)} + \lambda_2 g_2^{(i)} \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.43)'de görülen $\lambda_k^{(i)}$ aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\lambda_k^{(i)} = -j \frac{(\rho \omega^2 - \beta^2 c_{44}) + p_k^2 c_{11}}{\beta(c_{13} + c_{44})} \quad k=1,2 \quad (2.44)$$

Böylece her bölgedeki yer değiştirmeler, Bessel fonksiyonları, her bölgeye ilişkin γ_k , α , β ve ω cinsinden elde edilmiş olur. Burada Bessel fonksiyonları malzemenin karakteristik büyüklüklerine ve frekansa bağlıdır.

2.4. DAĞILMA BAĞINTISI

2.4.1 Kılıflı Fiber için Dağılma Bağıntısı

Yukarda elde edilen (2.41-2.43) denklemlerindeki yerdeğiştirme ifadeleri sınır koşullarında kullanılır. Burada ele alınan silindirik yapı kılıflı olduğundan yazılabilecek altı adet sınır koşulu vardır. Çekirdek ve kılıf arasındaki $r=a$ daki sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$T_1 \cdot \hat{a}_r = T_2 \cdot \hat{a}_r \quad T_{1,1} = T_{1,2} \quad , \quad T_{6,1} = T_{6,2} \quad , \quad T_{5,1} = T_{5,2} \quad (2.45)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad u_{r,1} = u_{r,2} \quad , \quad u_{\theta,1} = u_{\theta,2} \quad , \quad u_{z,1} = u_{z,2} \quad (2.46)$$

Buradaki $\hat{a}_r$ fiberin radyal doğrultusundaki birim vektördür ve alt indislerdeki virgülden sonraki 1 ve 2 değerleri sırasıyla çekirdek ve kılıf bölgelerine ait olduklarını göstermektedir. $r=a$ 'daki gerilmelerin sürekliliğinden üç denklem yazılabilir. İlk iki denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & c_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12}^{(1)} & 2jnc_{66}^{(1)} \\ 2jnc_{66}^{(1)} & c_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n^2 c_{12}^{(1)} & -2jnc_{66}^{(1)} \\ -2jnc_{66}^{(1)} & -n^2 c_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -j\lambda\beta c_{13}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & c_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12}^{(2)} & 2jnc_{66}^{(2)} \\ 2jnc_{66}^{(2)} & c_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -n^2 c_{12}^{(2)} & -2jnc_{66}^{(2)} \\ -2jnc_{66}^{(2)} & -n^2 c_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j\lambda\beta c_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Üçüncü denklem ise,

$$\begin{aligned} & \left[\lambda c_{44}^{(1)} - j\beta c_{44}^{(1)} \quad 0 \right] \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} + \left[0 \quad \beta n c_{44}^{(1)} \right] \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} = \\ & \left[\lambda c_{44}^{(2)} - j\beta c_{44}^{(2)} \quad 0 \right] \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \left[0 \quad \beta n c_{44}^{(2)} \right] \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

biçimindedir. $r=a$ 'daki yer değiştirmelerin sürekliliğinden de aşağıdaki üç denklem yazılır.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j\frac{n}{r} \\ j\frac{n}{r} & 0 \\ \lambda^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \psi^{(1)} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j\frac{n}{r} \\ j\frac{n}{r} & 0 \\ \lambda^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Böylece toplam altı denklem elde edilmiş olur. Bu denklemlerdeki $\phi^{(i)}$ ve $\psi^{(i)}$ için (2.33-2.36,2.40-2.41) ifadeleri yerine konursa yukardaki (2.47), (2.48) ve (2.49) denklemleri Bessel fonksiyonları ve onların türevleri cinsinden yazılabilir. Fiberin çapı a olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(i)} &= \alpha^{(i)} a, \quad \hat{\gamma}_1^{(i)} = \gamma_1^{(i)} a, \quad \hat{\gamma}_2^{(i)} = \gamma_2^{(i)} a \\ \hat{\beta} &= \beta a, \quad \hat{\lambda}_1^{(i)} = \lambda_1^{(i)} a, \quad \hat{\lambda}_2^{(i)} = \lambda_2^{(i)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

alınırsa ve sınır koşullarından elde edilen denklemler A_i , B_i ve C_i ($i=1,2$) katsayıları dışarda kalacak şekilde düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.51)$$

yazılır. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için a_{ij} matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu koşul da dağılma eşitliğini vermektedir. Buradan dağılma bağıntısı

$$|a_{ij}| = 0 \quad i,j=1,6 \quad (2.52)$$

olarak yazılır. Dağılma bağıntısının değişkenleri V , β veya ω büyüklükleridir.

a_{ij} matrisinin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_{11} = 2c_{66}^{(1)} \left(-\hat{\gamma}_1^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(1)}) + n^2 Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) \right) - ((\hat{\gamma}_1^{(1)})^2 c_{11}^{(1)} + j\hat{\lambda}_1^{(1)} \hat{\beta} c_{13}^{(1)}) Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)})$$

$$a_{12} = 2c_{66}^{(1)} \left(-\hat{\gamma}_2^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(1)}) + n^2 Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) \right) - ((\hat{\gamma}_2^{(1)})^2 c_{11}^{(1)} + j\hat{\lambda}_2^{(1)} \hat{\beta} c_{13}^{(1)}) Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)})$$

$$a_{13} = -2jnc_{66}^{(1)} \left(-\hat{\alpha}^{(1)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(1)}) + Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}) \right)$$

$$a_{14} = -2c_{66}^{(2)} \left(-\hat{\gamma}_1^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) \right) - ((\hat{\gamma}_1^{(2)})^2 c_{11}^{(2)} + j\hat{\lambda}_1^{(2)} \hat{\beta} c_{13}^{(2)}) Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)})$$

$$a_{15} = -2c_{66}^{(2)} \left(-\hat{\gamma}_2^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) \right) - ((\hat{\gamma}_2^{(2)})^2 c_{11}^{(2)} + j\hat{\lambda}_2^{(2)} \hat{\beta} c_{13}^{(2)}) Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)})$$

$$a_{16} = -2jnc_{66}^{(2)} \left(-\hat{\alpha}^{(2)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(2)}) + Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}) \right)$$

$$a_{21} = -2jnc_{66}^{(1)} \left(-\hat{\gamma}_1^{(1)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) + Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) \right)$$

$$a_{22} = -2jnc_{66}^{(1)} \left(-(\hat{\gamma}_2^{(1)}) Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) + Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) \right)$$

$$a_{23} = -2c_{66}^{(1)} \left(-\hat{\alpha}^{(1)} Z'_n(\hat{\alpha}^{(1)}) + \left(\frac{(\hat{\alpha}^{(1)})^2}{2} - n^2 \right) Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}) \right)$$

$$a_{24} = 2jnc_{66}^{(2)} \left(-\hat{\gamma}_1^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) \right)$$

$$a_{25} = 2jnc_{66}^{(2)} \left(-\hat{\gamma}_2^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) \right)$$

$$a_{26} = 2c_{66}^{(2)} \left(-\hat{\alpha}^{(2)} Z'_n(\hat{\alpha}^{(2)}) + \left(\frac{(\hat{\alpha}^{(2)})^2}{2} - n^2 \right) Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}) \right)$$

$$a_{31} = -(\hat{\lambda}_1^{(1)} c_{44}^{(1)} - j\hat{\beta} c_{44}^{(1)}) \hat{\gamma}_1^{(1)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(1)})$$

$$a_{32} = -(\hat{\lambda}_2^{(1)} c_{44}^{(1)} - j\hat{\beta} c_{44}^{(1)}) \hat{\gamma}_2^{(1)} Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(1)})$$

$$a_{33} = \hat{\beta} n c_{44}^{(1)} Z_n(\hat{\alpha}^{(1)})$$

$$a_{34} = (\hat{\lambda}_1^{(2)} c_{44}^{(2)} - j\hat{\beta} c_{44}^{(2)}) \hat{\gamma}_1^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(2)})$$

$$a_{35} = (\hat{\lambda}_2^{(2)} c_{44}^{(2)} - j\hat{\beta} c_{44}^{(2)}) \hat{\gamma}_2^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(2)})$$

$$a_{36} = -\hat{\beta} n c_{44}^{(2)} Z_n(\hat{\alpha}^{(2)})$$

$$a_{41} = \hat{\gamma}_1^{(1)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) , \quad a_{42} = \hat{\gamma}_2^{(1)} Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) , \quad a_{43} = jn Z_n(\hat{\alpha}^{(1)})$$

$$a_{44} = -\hat{\gamma}_1^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) , \quad a_{45} = -\hat{\gamma}_2^{(2)} Z'_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) , \quad a_{46} = -jn Z_n(\hat{\alpha}^{(2)})$$

$$a_{51} = jn Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) , \quad a_{52} = jn Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) , \quad a_{53} = -\hat{\alpha}^{(1)} Z'_n(\hat{\alpha}^{(1)})$$

$$a_{54} = -jn Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) , \quad a_{55} = -jn Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) , \quad a_{56} = \hat{\alpha}^{(2)} Z'_n(\hat{\alpha}^{(2)})$$

$$a_{61} = \hat{\lambda}_1^{(1)} Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) , \quad a_{62} = \hat{\lambda}_2^{(1)} Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) , \quad a_{63} = 0$$

$$a_{64} = \hat{\lambda}_1^{(2)} Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) , \quad a_{65} = \hat{\lambda}_2^{(2)} Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) , \quad a_{66} = 0$$

a_{ij} matrisinde gerekli basitleştirmeler yapılır ve yer değiştirmelere ait denklemlerle gerilmelere ait denklemler yer değiştirerek yazılırsa a_{ij} matrisinde alt üç satır ile üst üç satır yer değiştirir ve bu durumda katsayılar matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(1)}) & \hat{\gamma}_2^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(1)}) & j n Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}) & -\hat{\gamma}_1^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(2)}) & -\hat{\gamma}_2^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(2)}) & -j n Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}) \\ n Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) & n Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) & j \hat{\alpha}^{(1)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(1)}) & -n Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) & -n Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) & -j \hat{\alpha}^{(1)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(2)}) \\ \hat{\lambda}_1^{(1)} Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) & \hat{\lambda}_2^{(1)} Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) & 0 & -\hat{\lambda}_1^{(2)} Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) & -\hat{\lambda}_2^{(2)} Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & j n Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}) & a_{64} & a_{65} & -j \hat{\mu} n Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}) \end{bmatrix}$$

Burada,

$$a_{41} = \hat{\gamma}_1^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(1)}) - n^2 Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}) + \frac{c_{11}^{(1)}}{2c_{66}^{(1)}} \left((\hat{\gamma}_1^{(1)})^2 + \frac{c_{13}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} j \hat{\lambda}_1^{(1)} \hat{\beta} \right) Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)})$$

$$a_{42} = \hat{\gamma}_2^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(1)}) - n^2 Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}) + \frac{c_{11}^{(1)}}{2c_{66}^{(1)}} \left((\hat{\gamma}_2^{(1)})^2 + \frac{c_{13}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} j \hat{\lambda}_2^{(1)} \hat{\beta} \right) Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)})$$

$$a_{43} = -j n (Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}) - \hat{\alpha}^{(1)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(1)}))$$

$$a_{44} = -\hat{\gamma}_1^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(2)}) + n^2 Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}) - \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left((\hat{\gamma}_1^{(2)})^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} j \hat{\lambda}_1^{(2)} \hat{\beta} \right) Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)})$$

$$a_{45} = -\hat{\gamma}_2^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(2)}) + n^2 Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}) - \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left((\hat{\gamma}_2^{(2)})^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} j \hat{\lambda}_2^{(2)} \hat{\beta} \right) Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)})$$

$$a_{46} = j n (Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}) - \hat{\alpha}^{(2)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(2)}))$$

$$a_{51} = n (-\hat{\gamma}_1^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(1)}) + Z_n(\hat{\gamma}_1^{(1)}))$$

$$a_{52} = n(-\hat{\gamma}_2^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(1)}) + Z_n(\hat{\gamma}_2^{(1)}))$$

$$a_{53} = j(-\hat{\alpha}^{(1)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(1)}) + \left(\frac{(\hat{\alpha}^{(1)})^2}{2} - n^2 \right) Z_n(\hat{\alpha}^{(1)}))$$

$$a_{54} = -n(-\hat{\gamma}_1^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_1^{(2)}))$$

$$a_{55} = -n(-\hat{\gamma}_2^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(2)}) + Z_n(\hat{\gamma}_2^{(2)}))$$

$$a_{56} = -j(-\hat{\alpha}^{(2)} Z_n'(\hat{\alpha}^{(2)}) + \left(\frac{(\hat{\alpha}^{(2)})^2}{2} - n^2 \right) Z_n(\hat{\alpha}^{(2)}))$$

$$a_{61} = (j \frac{\hat{\lambda}_1^{(1)}}{\hat{\beta}} + 1) \hat{\gamma}_1^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(1)})$$

$$a_{62} = (j \frac{\hat{\lambda}_2^{(1)}}{\hat{\beta}} + 1) \hat{\gamma}_2^{(1)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(1)})$$

$$a_{64} = (j \frac{\hat{\lambda}_1^{(2)}}{\hat{\beta}} + 1) \hat{\gamma}_1^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_1^{(2)})$$

$$a_{65} = (j \frac{\hat{\lambda}_2^{(2)}}{\hat{\beta}} + 1) \hat{\gamma}_2^{(2)} Z_n'(\hat{\gamma}_2^{(2)})$$

biçimindedir. Daha basit bir yazılım için,

$$\hat{\gamma}_1^{(i)} = X_i \quad (2.53)$$

$$\hat{\gamma}_2^{(i)} = U_i \quad (2.54)$$

$$\hat{\alpha}^{(i)} = W_i \quad (2.55)$$

olarak alınır ve A_i , B_i ve C_i katsayıları da

$$\bar{A}_i = A_i Z_{ni}(X_i)/a \quad \bar{B}_i = B_i Z_{ni}(U_i)/a \quad \bar{C}_i = jC_i Z_{ni}(W_i)/a$$

olarak düzenlenirse a_{ij} matrisi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & n & -\eta_4 & -\eta_5 & -n \\ n & n & \eta_3 & -n & -n & -\eta_6 \\ \varsigma_1 & \tau_1 & 0 & -\varsigma_2 & -\tau_2 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & n(1-\eta_3) & a_{44} & a_{45} & -\mu n(1-\eta_6) \\ n(\eta_1-1) & n(\eta_2-1) & a_{53} & -\mu n(\eta_4-1) & -\mu n(\eta_5-1) & -\mu a_{56} \\ \left(1+\frac{\varsigma_1}{\hat{\beta}}\right)\eta_1 & \left(1+\frac{\tau_1}{\hat{\beta}}\right)\eta_2 & n & -\hat{\mu}\left(1+\frac{\varsigma_2}{\hat{\beta}}\right)\eta_4 & -\hat{\mu}\left(1+\frac{\tau_2}{\hat{\beta}}\right)\eta_5 & -\hat{\mu}n \end{bmatrix}$$

Bu matriste

$$a_{41} = \eta_1 - n^2 + \frac{c_{11}^{(1)}}{2c_{66}^{(1)}} \left[X_1^2 + \frac{c_{13}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} \hat{\beta} \varsigma_1 \right]$$

$$a_{42} = \eta_2 - n^2 + \frac{c_{11}^{(1)}}{2c_{66}^{(1)}} \left[U_1^2 + \frac{c_{13}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} \hat{\beta} \tau_1 \right]$$

$$a_{44} = -\mu \left[\eta_4 - n^2 + \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left[X_2^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} \hat{\beta} \varsigma_2 \right] \right]$$

$$a_{45} = -\mu \left[\eta_5 - n^2 + \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left[U_2^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} \hat{\beta} \tau_2 \right] \right]$$

$$a_{53} = n^2 - \frac{1}{2} W_1^2 - \eta_3$$

$$a_{56} = n^2 - \frac{1}{2} W_2^2 - \eta_6$$

ve

$$\eta_1 = X_1 Z'_{n1}(X_1)/Z_{n1}(X_1), \quad \eta_2 = U_1 Z'_{n1}(U_1)/Z_{n1}(U_1),$$

$$\eta_3 = W_1 Z'_{n1}(W_1)/Z_{n1}(W_1)$$

$$\eta_4 = X_2 Z'_{n2}(X_2)/Z_{n2}(X_2), \quad \eta_5 = U_2 Z'_{n2}(U_2)/Z_{n2}(U_2),$$

$$\eta_6 = W_2 Z'_{n2}(W_2)/Z_{n2}(W_2)$$

$$\varsigma_i = j\hat{\lambda}_1^{(i)}, \quad \tau_i = j\hat{\lambda}_2^{(i)}$$

$$\mu = \frac{c_{11}^{(2)} - c_{12}^{(2)}}{c_{11}^{(1)} - c_{12}^{(1)}} = \frac{c_{66}^{(2)}}{c_{66}^{(1)}}$$

$$\hat{\mu} = \frac{c_{44}^{(2)}}{c_{44}^{(1)}}$$

biçimindedir. Bu denklemlerde $c_{13}=c_{12}$, $c_{33}=c_{11}$ ve $c_{44}=c_{66}$ olarak alınırsa izotropik durum için denklemler elde edilecektir.

2.4.2 Kılıfsız Fiber için Dağılma Bağıntısı

Kılıfsız fiber için sınır koşulları $r=a$ 'da radyal gerilme bileşenlerinin sıfır olmasıdır;

$$T_1=0, \quad T_6=0, \quad T_5=0, \quad r=a.$$

Bu durumda (2.47) ve (2.48) eşitliklerinin sağ tarafları sıfıra eşit olacaktır. Buradan yazılacak üç denklemde yine $\phi^{(i)}$ ve $\psi^{(i)}$ için (2.33-2.36, 2.40-2.41) ifadeleri yerine konursa ve burada da A,B,C katsayıları dışarda kalacak şekilde düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.56)$$

yazılır. Dağılma bağıntısı bu durum için,

$$|b_{ij}| = 0 \quad i,j=1,2,3 \quad (2.57)$$

olarak elde edilir. Buradaki b_{ij} matrisinin elemanları;

$$b_{11} = -2jnc_{66}(\hat{q}Z_{n+1}(\hat{q}) + (1-n)Z_n(\hat{q}))$$

$$b_{12} = 2c_{66}[\hat{p}_1 Z_{n+1}(\hat{p}_1) - n(1-n)Z_n(\hat{p}_1)] - [\hat{p}_1^2 c_{11} + j\hat{\lambda}\hat{\beta}c_{13}]Z_n(\hat{p}_1)$$

$$\begin{aligned}
b_{13} &= 2c_{66}[\hat{p}_2 Z_{n+1}(\hat{p}_2) - n(1-n)Z_n(\hat{p}_2)] - [\hat{p}_2^2 c_{11} + j\hat{\lambda}_2 \hat{\beta} c_{13}]Z_n(\hat{p}_2) \\
b_{21} &= -c_{66}[2\hat{q}Z_{n+1}(\hat{q}) - (\hat{q}^2 + 2n - 2n^2)Z_n(\hat{q})] \\
b_{22} &= -2jnc_{66}[\hat{p}_1 Z_{n+1}(\hat{p}_1) + (1-n)Z_n(\hat{p}_1)] \\
b_{23} &= -2jnc_{66}[\hat{p}_2 Z_{n+1}(\hat{p}_2) + (1-n)Z_n(\hat{p}_2)] \\
b_{31} &= \hat{\beta}c_{44}nZ_n(\hat{q}) \\
b_{32} &= -(\hat{\lambda}_1 - j\hat{\beta})c_{44}[\hat{p}_1 Z_{n+1}(\hat{p}_1) - nZ_n(\hat{p}_1)] \\
b_{33} &= -(\hat{\lambda}_2 - j\hat{\beta})c_{44}[\hat{p}_2 Z_{n+1}(\hat{p}_2) - nZ_n(\hat{p}_2)]
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Bu ifadelerde $c_{66}=c_{44}$, $c_{13}=c_{12}$, $c_{33}=c_{11}$ konularak izotropik kılıfsız fiber için dağılma bağıntısı elde edilir.

2.5. MOD ANALİZİ

(2.51) denkleminde görüldüğü gibi kılıflı fiberler için tüm modlar tanımlanabilmektedir. Bu denklem sisteminin dairesel simetri varsayımı altında, $n=0$ için bağımsız ve basitleşmiş iki denklem grubuna ayrıldığı görülmektedir. 2×2 boyutunda bir katsayı matrisinin bulunduğu birinci bölüm aşağıdadır:

$$\begin{bmatrix} \eta_3 & -\eta_6 \\ -\frac{1}{2}W_1^2 - \eta_3 & \mu\left(\frac{1}{2}W_2^2 + \eta_6\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_1 \\ \overline{C}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

Bu denklemler $n=0$ için $\overline{A}_1 = \overline{B}_1 = \overline{A}_2 = \overline{B}_2 = 0$ $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \neq 0$ $u_r=u_z=0$ ve $u_\theta \neq 0$ koşulu altında elde edilmiştir. Açısal yer değiştirme bileşeni sıfır

olmadığından ve diğer bileşenler sıfır olduğundan yer değiştirme hareketi torsiyonel olacaktır. Bu nedenle bu modlara torsiyonel modlar denir ve T_{0m} ile gösterilir. Bu T_{0m} sadece torsiyonel modu göstermektedir; gerilme ile bir ilişkisi yoktur.

4x4 boyutunda katsayı matrisinin bulunduğu ikinci bölümden elde edilen denklemler ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & -\eta_4 & -\eta_5 \\ \varsigma_1 & \tau_1 & \varsigma_2 & \tau_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ \left(1 + \frac{\varsigma_1}{\beta}\right)\eta_1 & \left(1 + \frac{\tau_1}{\beta}\right)\eta_2 & -\hat{\mu}\left(1 + \frac{\varsigma_2}{\beta}\right)\eta_4 & -\hat{\mu}\left(1 + \frac{\tau_2}{\beta}\right)\eta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_1 \\ \overline{B}_1 \\ \overline{A}_2 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.59)$$

Bu durum $n=0$ için, $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, $\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{A}_2, \overline{B}_2 \neq 0$, $u_0=0$, $u_r \neq 0$ ve $u_z \neq 0$ koşulu altında elde edilir. Radyal ve eksenel doğrultudaki yerdeğiştirme bileşenleri sıfırdan farklı olduğundan hareket, radyal ve eksenel doğrultuda olacaktır. Bu nedenle bu grup modlara radyal eksenel modlar denir ve R_{0m} ile gösterilir.

$n \geq 1$ için tüm yerdeğiştirme bileşenleri sıfırdan farklı olduğundan bu modlara da fleksural modlar denir ve F_{nm} ile gösterilir.

Torsiyonel, radyal-eksenel ve fleksural modlar fiberin çekirdek ve kılıfını oluşturan malzemenin oluşumuna ve hız aralığına bağlı olarak zayıflayan ya da saf olarak kılavuzlanmış olabilirler. Malzemenin faz hızı V $V_{s1} < V < V_{s2}$ hız aralığında yer alıyorsa torsiyonel, radyal-eksenel ve fleksural modların hepsi saf olarak kılavuzlanmış modlardır. Burada yayılma sabiti β gerçel değer almaktadır. Faz hızı

bu bölgenin dışında yer alıyorsa β karmaşık değer aldığından zayıflayan bir dalga yayılır, sanal olması durumunda ise dalga yayılmaz.

2.6. ÇEŞİTLİ MOD YAKLAŞIKLIKLARI

Literatürde zayıf olarak kılavuzlanmış heksagonal kılıflı fiberlerin basitleştirilmiş dağılma bağıntılarını çıkarmak için çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Bu yaklaşımlar saf olarak kılavuzlanmış (β gerçel) modlar için geçerlidir ve sayısal hesaplamaları kolaylaştırmaktadır[24]. Ek A'da gösterilen Tablo 1.de tek kristalden yapılmış akustik fiberlerin malzeme bilgileri verilmiştir. Bu tabloda yer alan malzemelerin hepsi için faz hızı $V_{s1} < V < V_{s2}$ bölgesinde yer almaktadır ve dalga saf olarak kılavuzlanmış bir dalgadır. Ayrıca tablodaki tüm malzemeler için $V_l = (c_{11}/\rho)^{1/2}$, $V_t = (c_{33}/\rho)^{1/2}$, ve $V_s = (c_{44}/\rho)^{1/2}$ tanımlandığına göre $V_{s1} < V_{s2} < V_{l1} < V_{l2} < V_{t1} < V_{t2}$ koşulu da sağlanır. Bu malzemelerde $c_{33} > c_{11} > c_{44}$ tür.

1. Zayıf Kılavuzlama Yaklaşıklığı

Zayıf kılavuzlama durumunda çekirdeğe ilişkin tüm V_x 'ler ($x=t,l,s$), kılıfinkilerden daha küçüktür. Bu özellik çekirdeğin elastisite sabitlerinin kılıfın elastisite sabitlerinden biraz daha küçük olması durumunda vardır. İzotropik durum için izlenen yol [29] aynı şekilde izlenerek burada da çekirdek ve kılıfın yoğunlukları birbirine eşit alınmıştır. Elastisite katsayıları ise, kılıftan çekirdeğe geçince bir miktar küçülmektedir.

2. Genel Yarı-izotropik Yaklaşıklığı

İzotropik durumda $\lambda_1 p_1^2 \rightarrow \beta$, $\mu p_2^2 \rightarrow -k^2/\beta$ ve $p_2 \rightarrow k$ yaklaşıklığı yapılırken, heksagonal durumda bazı adımlarda $\lambda_1 p_1^2 = \beta$, ve $\lambda_1 p_1^2 = \beta$ kabul edilmiştir [29].

3. $V_{s1} < V < V_{s2}$ Bölgesinde Yarı İzotropik Yaklaşıklığı

İzotropik durumda $p_2 \rightarrow k$ ve $k \ll \beta$ kabul edilirken heksagonal durumda bu bölgede $p_2 \ll \beta$ ve $U_i \ll \beta a$ olarak kabul edilmiştir.

Bu yaklaşıklıkların yapılabildiği durumlarda, sayısal hesaplamalar kolaylaşmaktadır.

Zayıf kılavuzlama için $\mu = \hat{\mu} = 1$ yaklaşıklığının kullanılmasıyla (2.51) denklemleri aşağıdaki biçimde basitleşir.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & n & -\eta_4 & -\eta_5 & -n \\ n & n & \eta_3 & -n & -n & -\eta_6 \\ \varsigma_1 & \tau_1 & 0 & -\varsigma_2 & -\tau_2 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & n(1-\eta_3) & a_{44} & a_{45} & -n(1-\eta_6) \\ n(\eta_1-1) & n(\eta_2-1) & n^2 - \frac{1}{2}W_1^2 - \eta_3 & -n(\eta_4-1) & -n(\eta_5-1) & -(n^2 - \frac{1}{2}W_2^2 - \eta_6) \\ \left(1 + \frac{\varsigma_1}{\beta}\right)\eta_1 & \left(1 + \frac{\tau_1}{\beta}\right)\eta_2 & n & -\left(1 + \frac{\varsigma_2}{\beta}\right)\eta_4 & -\left(1 + \frac{\tau_2}{\beta}\right)\eta_5 & -n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_1 \\ \overline{B}_1 \\ \overline{C}_1 \\ \overline{A}_2 \\ \overline{B}_2 \\ \overline{C}_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.60)$$

Burada

$$a_{44} = \eta_4 - n^2 + \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left[X_2^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} \hat{\beta}_{\zeta_2} \right]$$

$$a_{45} = \eta_5 - n^2 + \frac{c_{11}^{(2)}}{2c_{66}^{(2)}} \left[U_2^2 + \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} \hat{\beta}_{\tau_2} \right]$$

olur. (2.60) deki basitleştirilmiş denklemler yardımıyla mod analizi yapılacak olursa, aşağıdaki sonuçlara varılır.

a) Torsiyonel modlar

$n=0$ için (2.60) denklemleri, iki bağımsız denklem takımına ayrılır. İki denklemden oluşan bölümü, torsiyonel modlar için dağılma bağıntısını vermektedir. Bu dağılma bağıntısı (2.58)'nin basitleştirilmesi ile de, elde edilebilir. Bu denklemler için sadece ($\mu = \hat{\mu} = 1$) yaklaşıklığı kullanılmıştır.

$$\eta_3 - \eta_6 \frac{W_1^2}{W_2^2} = 0 \quad (2.61)$$

$V_{s1} < V < V_{s2}$ bölgesinde dağılma bağıntısı

$$\frac{J_1(W_1)}{W_1 J_0(W_1)} + \frac{K_1(W_2)}{W_2 K_0(W_2)} = 0. \quad (2.62)$$

dır. Bu bölgede (2.62) gerçel köklere sahiptir ve tam olarak kılavuzlanmış dalgaları göstermektedir.

b) Radyal-eksenel modlar

$n=0$ için (2.60) denkleminde ayrılan dört denklemden elde edilen dağılma bağıntısı şöyledir:

$$\eta_2 - \eta_5 \frac{\tau_1}{\tau_5} = 0. \quad (2.63)$$

Bu radyal-eksenel modlar için dağılma bağıntısıdır. Bu bağıntı, (2.59) denkleminde de, (1) ve (2) de belirtilen yaklaşıklıklar kullanılarak, elde edilebilir..

$V_{s1} < V < V_{s2}$ bölgesinde dağılma bağıntısı,

$$\frac{J_1(U_1)}{U_1 J_0(U_1)} + \frac{K_1(U_2)}{U_2 K_0(U_2)} = 0. \quad (2.64)$$

olarak elde edilir. Dağılma bağıntısı bu bölgede gerçel köklere sahiptir ve tam olarak kılavuzlanmış radyal-eksenel modları göstermektedir.

Yaklaşıklıklar olmadan tam analiz yapıldığında $V_{s1} < V < V_{s2}$ bölgesinde $n=0$ için tam olarak kılavuzlanmış hem torsiyonel modlar hem de radyal-eksenel modlar vardır. Torsiyonel modlar (2.61)'den de görüldüğü gibi W_i parametresiyle kontrol edilmektedir. Radyal-eksenel modlar, zayıf kılavuzlama koşulları altında, (2.64)'den de görüldüğü gibi, U_i parametresi tarafından kontrol edilmektedir. Zayıf kılavuzlama yaklaşıklığı kullanılması halinde, torsiyonel ve radyal-eksenel modlar farklı etkin parametrelere sahiptirler. İzotropik durumda ise $U_i = W_i$ olduğundan [29] torsiyonel ve radyal-eksenel modlar aynı etkin parametreye sahiptirler.

c) Fleksural modlar

$n \geq 1$ için (2.60) denkleminde yazılan dağılma bağıntısı fleksural modlar için geçerli olacaktır. Bu dağılma bağıntısı (2) yaklaşıklığı kullanılarak $V_{s1} < V < V_{s2}$ bölgesinde,

$$n^2 \left[\frac{1}{U_1^2} + \frac{1}{U_2^2} \right] \left[\frac{1}{W_1^2} + \frac{1}{W_2^2} \right] = \left[\frac{J'_n(U_1)}{U_1 J_n(U_1)} + \frac{K'_n(U_2)}{U_2 K_n(U_2)} \right] \left[\frac{J'_n(W_1)}{W_1 J_n(W_1)} + \frac{K'_n(W_2)}{W_2 K_n(W_2)} \right] \quad (2.65)$$

biçiminde bulunur. (2.65) eşitliği bu bölgede gerçel köklere sahiptir ve tam olarak kılavuzlanmış modları göstermektedir.

Zayıf kılavuzlama yaklaşıklığı altında bu modlar W_i ve U_i parametreleri ile kontrol edilmektedir. (2.65) eşitliğine, iki ayrı dağılma bağıntısının çarpımı gibi bakılabilir. X_i parametresi, zayıf kılavuzlama yaklaşıklığı altında ne torsiyonel, ne radyal-eksenel, ne de fleksural modlarda gözükmemektedir. Bu yaklaşıklıkla bulunan dağılma bağıntılarında X_i 'nin hiçbir etkisi yoktur.

2.7. SAYISAL HESAPLAMALAR

Kılıflı akustik fiberin dağılma eğrisini çizmek için gerekli sayısal bilgi, dağılma bağıntıları kullanılarak elde edilmiştir. Kılıflı akustik fiber malzemesi olarak, Ek A.daki Tablo .1.de gösterilen malzemelerden ZnO seçilmiştir. Bu tabloda belirtilen değerler akustik fiberin çekirdeğine aittir. Kılıfa ilişkin elastisite katsayıları ise çekirdeğin katsayıları 1.08 ile çarpılarak elde bulunmuştur. Diğer bir deyişle kılıf malzemesinin elastisite katsayıları ZnO'nunkilerin 1.08 katı olarak kabul edilmiştir. Yoğunluklar

her iki bölgede de aynıdır. Yani akustik fiber zayıf kılavuzlama durumundadır. Yazılan programın çalışmasının doğruluğunu test etmek için, ref.[24] de verilen değerler kullanılmıştır.

Şekil 2.2-2.6 de görülen dağılma eğrileri faz hızına karşı frekans ve çekirdek yarıçapı çarpımı olarak (yani V-fa) çizilmiştir. Torsiyonel T_{0m} , radyal-eksenel R_{0m} , fleksural F_{1m} ve F_{2m} modları elde etmek için kullanılan katsayılar (çekirdek) $c_{11}=20.97 \times 10^{10}$ N/m², $c_{33}=21.09 \times 10^{10}$ N/m², $c_{44}=4.247 \times 10^{10}$ N/m², $c_{12}=12.11 \times 10^{10}$ N/m², $c_{13}=10.51 \times 10^{10}$ N/m² ve $\rho=5680$ kg/m³tür. Eğrilerde görülen sürekli kalın çizgi (2.51) denkleminin çözümleri , kesikli çizgiler ise yapılan yaklaşıklıklardan sonra elde edilen eğrileri göstermektedir. Düz çizilmiş çizgiler ise çekirdek ve kılıfa ait enine dalga hızı V_{si} leri göstermektedir. $V_{s1}<V<V_{s2}$ bölgesinde sadece saf olarak kılavuzlanmış modlar vardır. Torsiyonel modlarda W_i prametresi etkin parametredir. Radyal-eksenel modlarda U_i parametresi etkin parametredir. Fleksural modlarda ise hem W_i hem de U_i etkin parametrelerdir. Şekil2.2-2.5 de görülen eğriler beklenildiği gibi ref.[24]deki lerle aynı biçimde elde edilmiştir. Şekil 2.6.'da heksagonal kılıflı fiber için karmaşık sayılarla çalışılarak elde edilen torsiyonel mod dağılma eğrileri görülmektedir.

Tablo 1. de verilmiş bütün heksagonal kristallerin hepsi için hesaplama aralığı olarak $f_a=0-30000$ MHz.µm seçilmiştir. Bu değer F_{11} modunun $f_a=30000$ Mhz.µm deki faz hızıyla titanyum heksagonal kristalinin enine dalga hızı V_{s1} arasındaki farkın %0.17 den daha küçük olduğu değerdir.

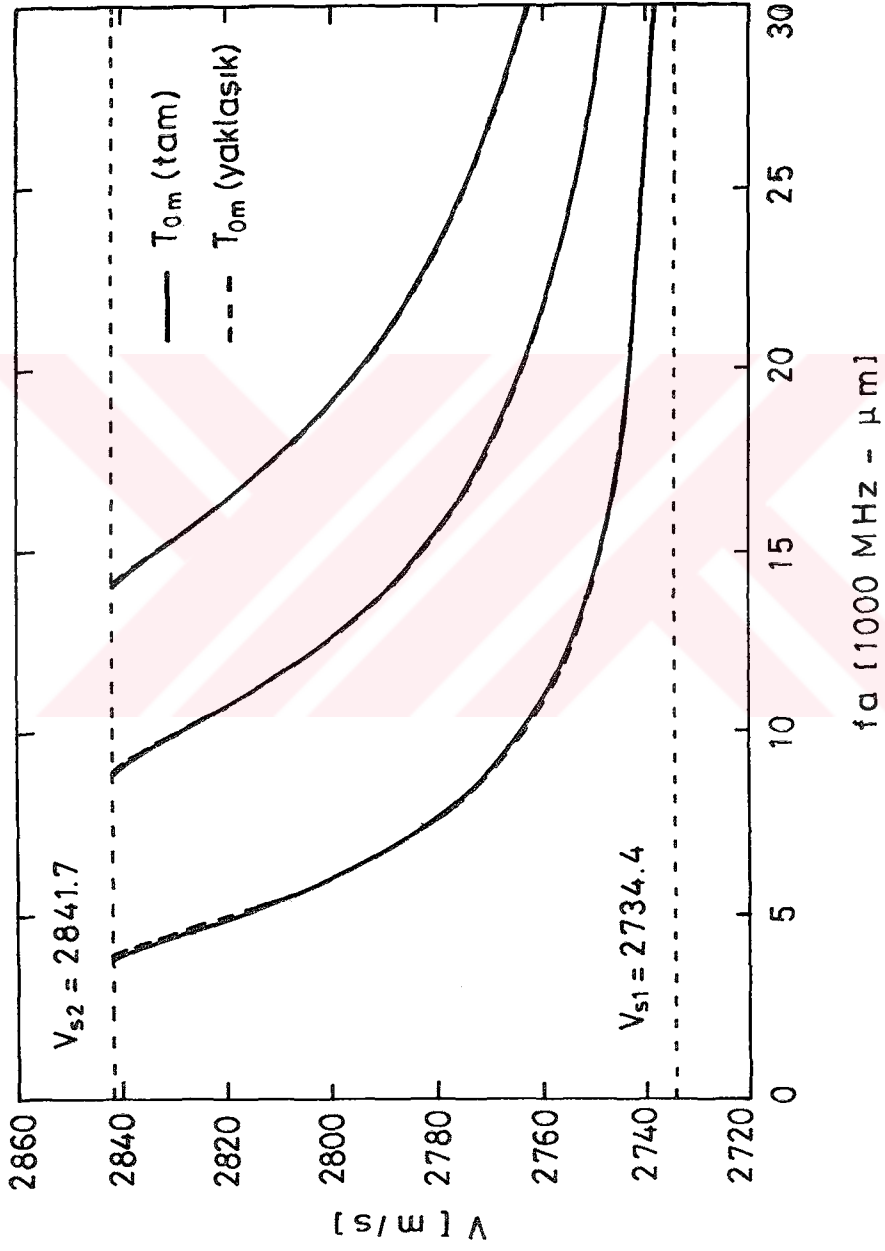
2.8. SONUÇLAR

Bu bölümde akustik fiberlerin dalga yayılma analizi için gerekli olan ve literatürde mevcut temel bağıntılar verilmiştir. Kılıfsız tek fiber için skaler potansiyel fonksiyonu yaklaşımı ile dağılma bağıntısı çıkarılmıştır.

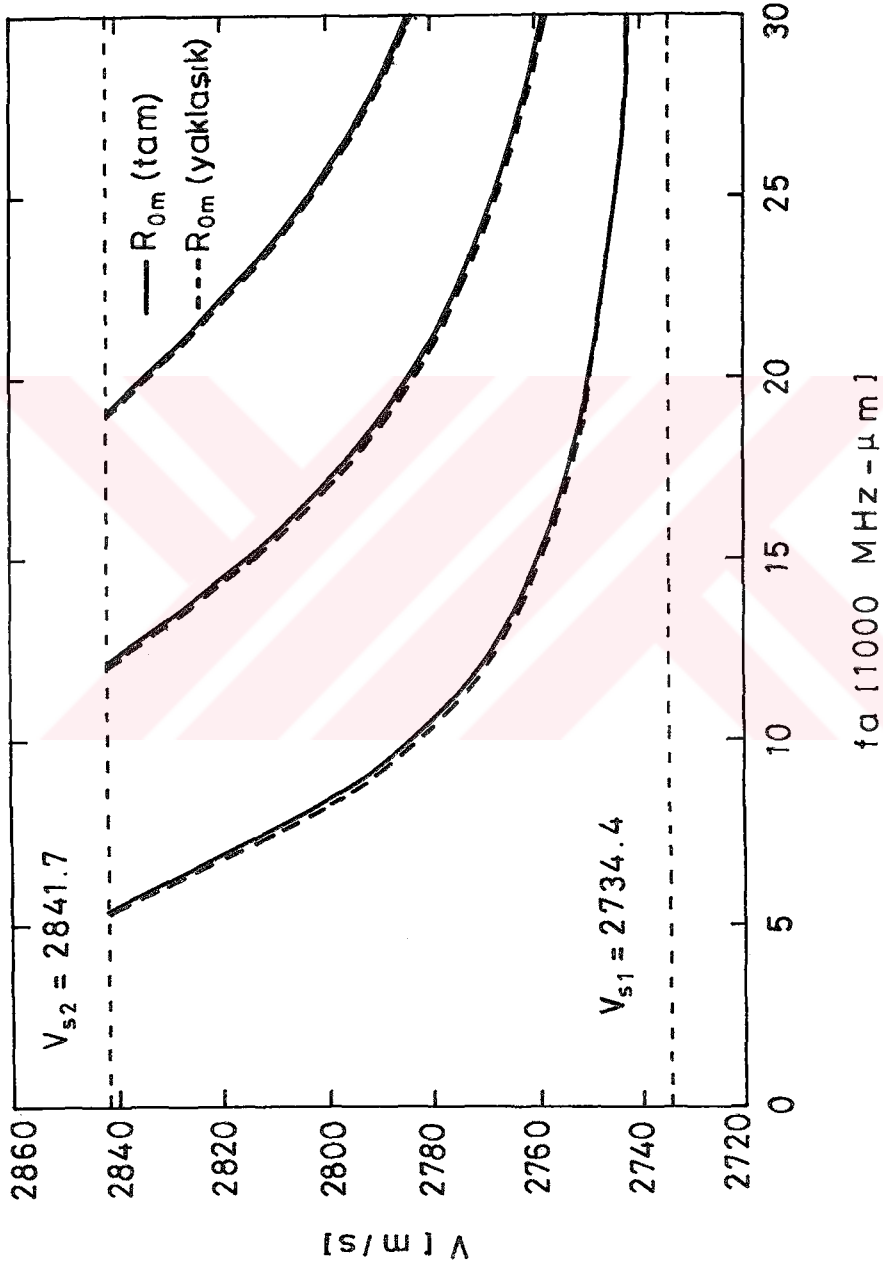
Kılıfsız fiber için yapılan çalışma kılıflı fiber için de sürdürülmüştür. Bu çalışma genel bilgi vermek ve daha sonra 3. bölümdeki yöntemle karşılaştırma yapılabilsin diye skaler potansiyel yöntemi adıyla verilmiştir. Bu yöntemde kılıflı Akustik fiberin tam bir analizi verilmiştir. Burada kılıf kalınlığı sonsuz seçilmiştir. $n=0$ durumunda elde edilen torsiyonel (2×2 lik bölüm) ve radyal-eksenel (4×4 lük bölüm) modlar için ve $n \geq 1$ durumunda elde edilen genel fleksural modlar için dağılma bağıntıları verilmiştir.

2.6 bölümünde mod analizi için yapılan genel yaklaşıklıklar anlatılmıştır. Bu yaklaşıklıklar sayısal hesaplamayı kolaylaştırırken elde edilen dağılma eğrilerinden de görüldüğü gibi sonuçlar oldukça yakındır.

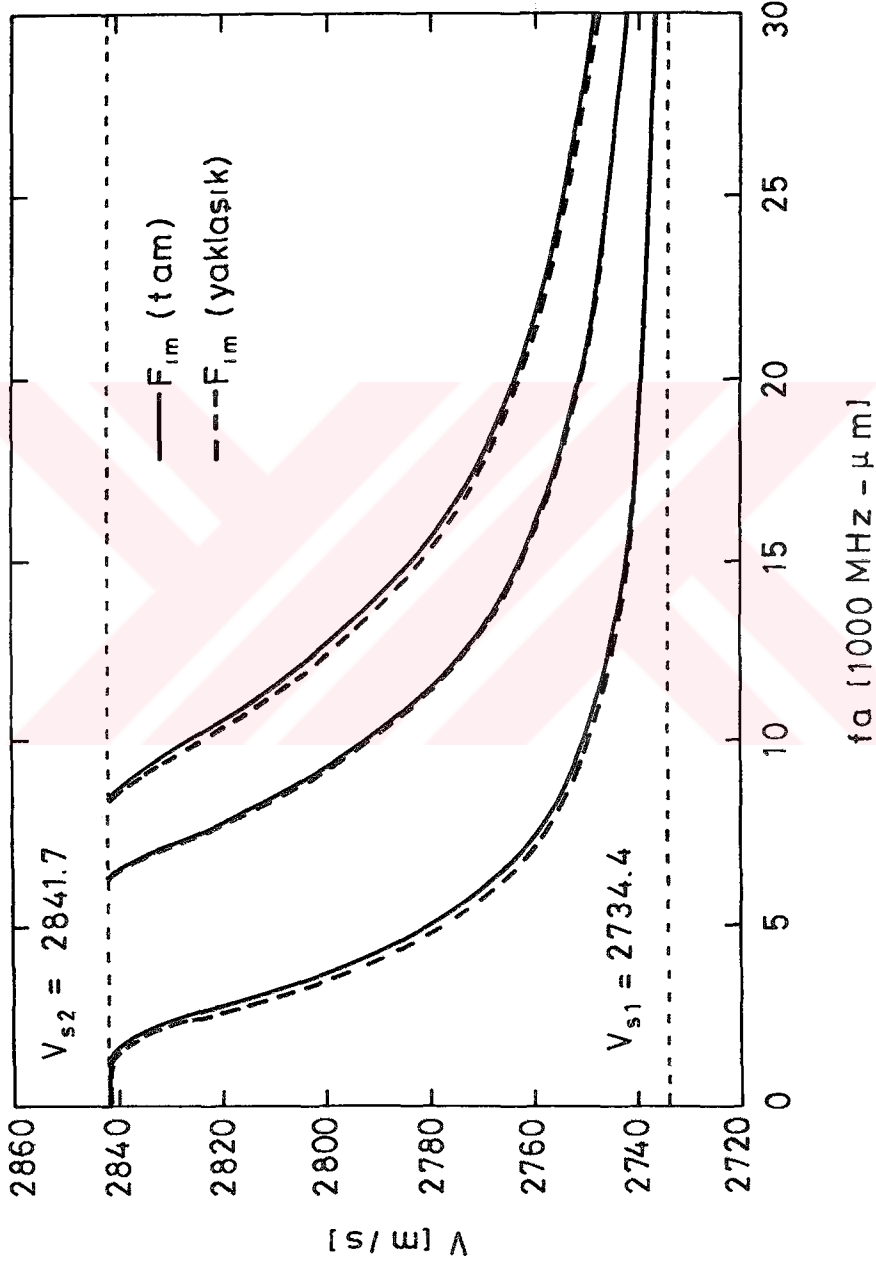
Sayısal hesaplama kısmında tüm hesaplamalar, zayıf kılavuzlama durumundaki kılıflı akustik fiberler için yapılmıştır. Torsiyonel, radyal-eksenel ve genel fleksural modlar için şimdiye kadar sadece gerçel değerler ile sayısal hesaplama yapılmıştır. Bu bölümde bu hesaplamalara ek olarak torsiyonel modlar için karmaşık sayılı değişkenlerle de çalışılmıştır. Bu sonuçların da gerçel değerli torsiyonel mod için elde edilenlerle aynı olduğu görülmüştür.



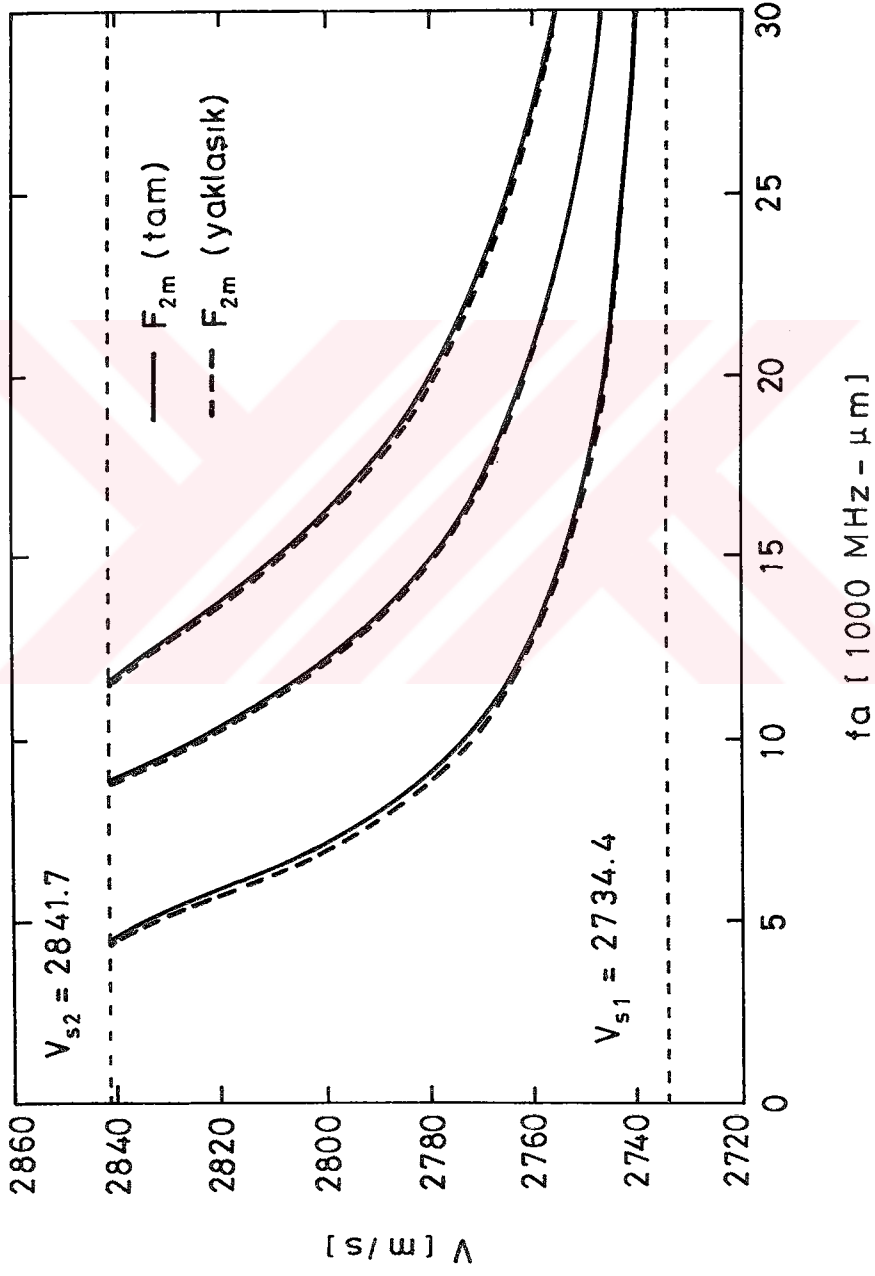
Şekil 2.2. Heksagonal kılıflı fiber için gerçel sayılarla çalışılarak elde edilen T_{0m} Torsiyonel mod dağılıma eğrileri (ZnO).



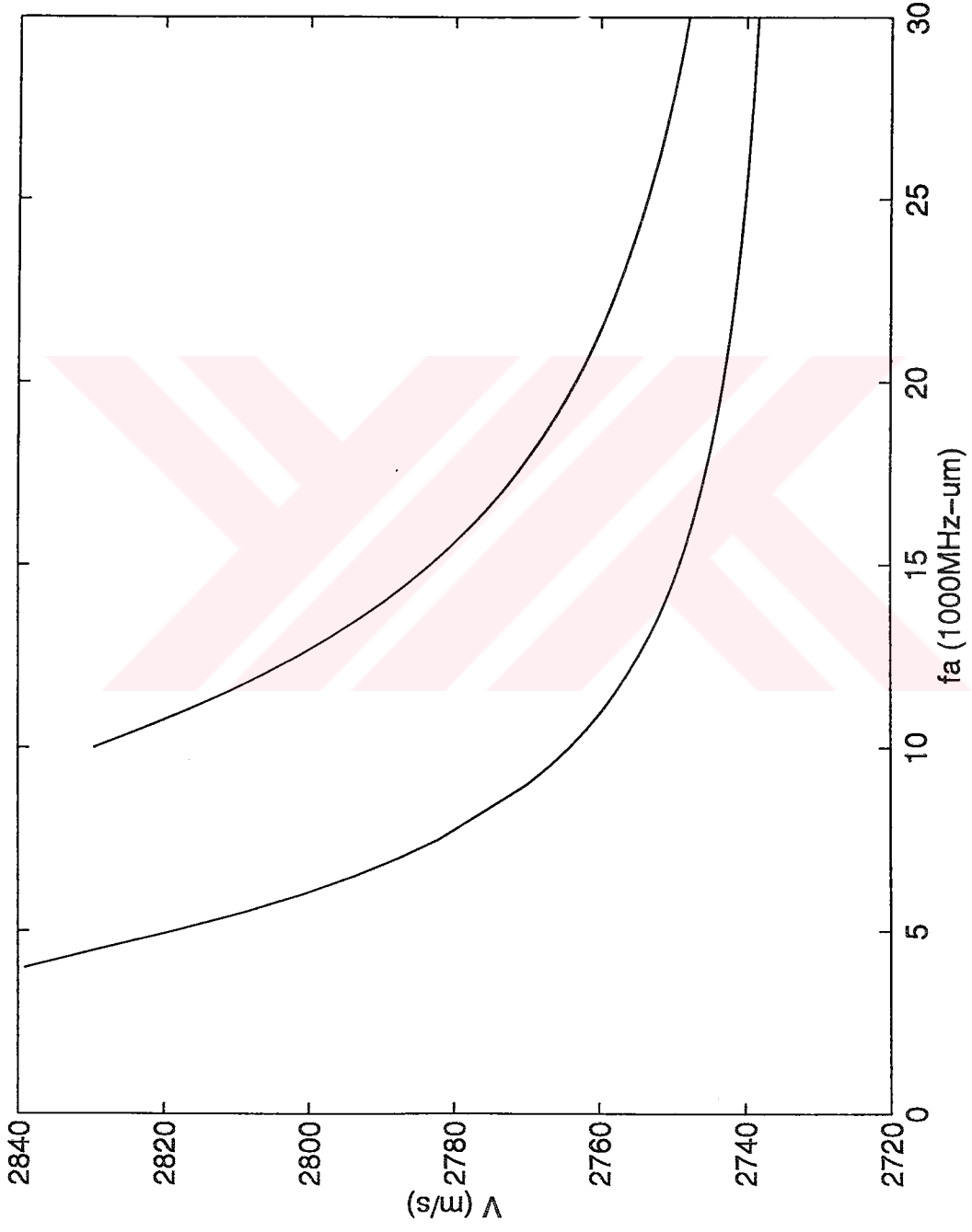
Şekil 2.3. Heksagonal kılıflı fiber için gerçel sayılarla çalışılarak elde edilen R_{0m} Radyal eksenel mod dağılım eğrileri (ZnO).



Şekil 2.4. Heksagonal kılıflı fiber için gerçel sayılarla çalışılarak elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (ZnO).



Şekil 2.5. Heksagonal kılıflı fiber için gerçel sayılarla çalışılarak elde edilen F_{2m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (ZnO).



Şekil 2.6. Heksagonal kılıflı fiber için karmaşık sayılarla çalışılarak elde edilen torsiyonel mod dağılıma eğrileri (ZnO).

BÖLÜM 3

HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER İÇİN DURUM DEĞİŞKENİ YAKLAŞIMI

3. 1 GİRİŞ

Akustik fiberlerin çeşitli uygulama alanı bulunmaktadır. Kılıflı ya da kılıfsız tek çubuk izotropik fiberler için akustik dalga yayılımı literatürde incelenmiştir [21]. Kristal anizotropisi açısından daha karmaşık bir durum olan heksagonal fiberlerde tek çubuk, boşluklu tek tabaka silindir ve kılıflı yapı için incelenmiştir[22-24].

Bütün bu çalışmalarda dağılma eğrileri ve ilgilenilen büyüklükler, Helmholtz denklemlerinin çözümünden elde edilmektedir. Çözümü yapılan bu denklemler, ortama ilişkin bünye denklemleri ile Newton'un hareket denklemlerinden yararlanılarak yazılmaktadır. Bu bölümde, sınır koşullarında yer alan yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin diferansiyel denklemlerde değişken olarak görüldüğü yeni bir yöntem sunulmaktadır. Söz konusu yöntem, çok katlı yapılar için geliştirilmiş bir yöntemin [26] aynı merkezli iki tabakalı silindir için genişletilmiş halidir; bu yöntem problemi, ikinci dereceden diferansiyel denklem çözüp daha sonra da sınır koşullarını uygulama zorluğundan kurtarmaktadır. Bu yapı için yazılacak olan birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi, Lineer Sistem teorisinde çok iyi bilinen durum denklemleri yapısındadır; ancak lineer Sistem Teorisinde değişken zaman iken, burada uzay koordinatıdır. Dağılma bağıntısı, durum denklemleri ile büyük benzerlik gösteren bu denklemlerden elde edilmektedir. Buradan istenilen diğer büyüklükler de hesaplanabilir. Açıkça görülebilir ki; literatürde varolan yöntemle elde edilen ikinci dereceden diferansiyel denklem sistemi yardımıyla inceleme yapmak yerine,

dereceden diferansiyel denklem sistemi yardımıyla inceleme yapmak yerine, birinci dereceden diferansiyel denklem sistemi ile inceleme yapmak önemli kolaylık getirmektedir. Bu yöntem aynı zamanda diğer yöntemlerde kullanılan skaler potansiyel fonksiyonlarına gerek kalmadan, gerilme ve yerdeğiştirme bileşenlerini doğrudan denklemlere katmaktadır.

Bu yöntem ile elde edilen temel matris, lineer sistem teorisindeki temel matris ve bir durum geçiş matrisi gibi de değerlendirilebilir. Burada ayrıca $n=0$ ve $n \geq 1$ için yapılan mod analizi, tüm değişkenler için çözümler elde edilmeden yapılabilir. Bu nedenle istenilen mod için gerekli denklem takımının çekilerek çözümünün yapılması ve bu çözümde sınır koşullarının uygulanması yeterlidir. Böyle bir olanak önceki yöntemlerde yoktur. Literatürde mevcut yöntemlerde denklemlerin tümünün çözülerek dağılma bağıntısının bulunması gerekir.

Sınır koşullarının, durum değişkenleri için yazılan çözümlere uygulanmasıyla genel dağılma bağıntısı elde edilir. Bu bölümde bu yöntem ayrıntılar ile anlatılarak dağılma bağıntısı elde edilmiştir. Sonuçları karşılaştırmak amacıyla ref.[24]'deki veriler kullanılarak sayısal hesaplama yapılmıştır

3.2. FORMÜLASYON

Sonsuz kalınlıkta kılıflı fiberin akustik dalga yayılımını incelemek için Şekil. 2.1'de çizilen geometrik yapı bu bölümde de gözönüne alınacaktır. Silindirik geometriden dolayı yine koordinat sistemi (r, θ, z) seçilmiştir. Koordinat ekseninin z-ekseni ile kristalin Z-ekseni çakışık durumdadır. Kristal heksagonal anizotropiye sahiptir. Bu bölümde de ikinci bölümde olduğu gibi piezoelektrik etki ihmal edilmiştir.

Akustik fiberler için yapılan tüm analizlerde olduğu gibi bu analiz yönteminin de başlangıç noktası gerilme -yerdeğiştirme bağıntısına ilişkin Newton'un hareket denklemidir. Gerilme-yerdeğiştirme bağıntısı (2.1.a) denkleminde (2.5) denkleminin yerine konmasıyla elde edilir:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{u} \quad (3.1)$$

Burada ∇_s ,

$$\nabla_s^t = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 1/r & 0 & 0 & \partial/\partial z & 1/r \partial/\partial \theta \\ 0 & \partial/\partial \theta & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial r - 1/r \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 1/r \partial/\partial \theta & \partial/\partial r & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup ref.[27]'de belirtilen bir diferansiyel operatörü, $\mathbf{C}$ de elastisite matrisi olup, açık ifadesi ikinci bölümde verilmiştir. Gerilme ve uzamalar için ikinci bölümde (2.9) ve (2.10) daki ifadeler kullanılmıştır. Bu yöntemde sınır koşullarında görünen gerilme ve yerdeğiştirmeler durum değişkeni olarak gözönüne alınmıştır. İkinci bölümde de ele alındığı gibi radyal doğrultudaki gerilme bileşenleri ve yerdeğiştirmeler, hep birlikte, altı elemanlı bir durum vektörünü oluştururlar:

$$\boldsymbol{\tau} = [T_{rr} \quad T_{r\theta} \quad T_{rz} \quad u_r \quad u_\theta \quad u_z]^t \quad (3.2)$$

Gösterimde basitlik olsun diye yine $T_{rr} \rightarrow T_1$, $T_{r\theta} \rightarrow T_6$, $T_{rz} \rightarrow T_5$ ile ifade edilmiştir. Durum değişkeni olarak görülen gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri iki silindirin ortak sınırında süreklidirler. Burada, (3.2)'de gösterilen durum vektörünün,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dr} = \mathbf{A}(r)\boldsymbol{\tau}(r) \quad (3.3)$$

biçiminde birinci dereceden bir diferansiyel denklem sistemini sağladığı gösterilmek istenmektedir. Sistemin dinamiği r -doğrultusundadır. Bu amaçla bünye denklemleri ve Newton'un hareket denklemi yeniden ele alınacaktır. Bünye denklemleri, piezoelektrik etki ihmal edildiği için, mekanik büyüklüklerden oluşan kısmı ile görünecektir.

(3.1) denkleminde olduğu gibi gerilmeler yerdeğiştirmeler cinsinden açık olarak ifade edilirse

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \\ c_{12} & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & jnc_{12} & 0 \\ jnc_{66} & -c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & jnc_{11} & 0 \\ c_{13} & jnc_{13} & 0 \\ 0 & 0 & jnc_{44} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j\beta c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -j\beta c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\beta c_{13} \\ 0 & 0 & -j\beta c_{33} \\ 0 & j\beta c_{44} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

elde edilir. İlk üç denklem, radyal gerilme bileşenlerinin yerdeğiştirmelere bağlı ifadesidir. Newton'un hareket denkleminde radyal gerilme bileşenleri (T_1 , T_6 , T_5) yerine, (3.4) eşitliğinin ikinci grubundaki ifadeler kullanılacak olursa; Newton'un hareket denklemi, sadece radyal gerilme bileşenleri ve yer değıştirmeler cinsinden belirlenmiş olur.

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} c_{12} & 0 & 0 \\ -j \frac{n}{r} c_{12} & 0 & 0 \\ j \beta c_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} c_{11} & j n \frac{1}{r} c_{11} & 0 \\ -j n \frac{1}{r} c_{11} & \frac{n^2}{r} c_{11} & -n \beta c_{13} \\ j \beta c_{13} & -n \beta c_{13} & \frac{n^2}{r} c_{44} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -j \beta \frac{1}{r} c_{13} \\ 0 & \beta^2 c_{44} & -\frac{n}{r} \beta c_{13} \\ 0 & -\frac{n}{r} \beta c_{44} & \beta^2 c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} - \omega^2 \rho \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & j \frac{n}{r} & 0 \\ 0 & \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Bu denklemde r 'ye bağlı türevler birinci derecedendir. Böyle denklemlerinin radyal gerilme bileşenleri için yazılmış (3.4) denklemlerindeki birinci grup ifadeler alınır ve ikinci grup denklem olarak düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{1}{r} & -j \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{n}{r} & j \beta \frac{c_{13}}{c_{11}} \\ 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & -j \frac{n}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_{44}} & j \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada da r 'ye göre türevler birinci derecedendir. (3.5) ve (3.6) denklemleri birarada yazılırsa,

$$G_1 \frac{d\tau}{dr} = G_2 \tau$$

elde edilir. G_1 matrisi tersi alınabilir bir matristir. G_1 matrisinin tersi ile eşitliğin her iki tarafı da çarpılırsa,

$$\frac{d\tau}{dr} = A\tau \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada $A=G_1^{-1}G_2$ dir. Bu yapı lineer sistemlerden bilinen durum modeli yapısının benzeridir. Elde edilen 6x6 boyutunda $A(r)$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_{11} = -\frac{2}{r} \frac{c_{66}}{c_{11}}$$

$$a_{12} = -j \frac{n}{r}$$

$$a_{13} = j\beta$$

$$a_{14} = \frac{4}{r^2} b - \rho \omega^2$$

$$a_{15} = j \frac{4n}{r^2} b$$

$$a_{16} = -2j \frac{\beta}{r} c_{13} \frac{c_{66}}{c_{11}}$$

$$a_{21} = -j \frac{n}{r} \frac{c_{12}}{c_{11}}$$

$$a_{22} = -\frac{2}{r}$$

$$a_{23} = 0,$$

$$a_{24} = -j \frac{4n}{r^2} b$$

$$a_{25} = \frac{4n}{r^2} b + \beta^2 c_{44} - \rho \omega^2$$

$$a_{26} = -\frac{n\beta}{r} \left(c_{44} + c_{13} \frac{c_{66}}{c_{11}} \right)$$

$$a_{31} = j\beta \frac{c_{13}}{c_{11}},$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = -\frac{1}{r},$$

$$a_{34} = -a_{16}$$

$$a_{35} = a_{26}$$

$$a_{36} = \frac{n^2}{r^2} c_{44} + \beta^2 \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} - \rho \omega^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= \frac{1}{c_{11}} & a_{42} &= 0 & a_{43} &= 0 & a_{44} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{1}{r} & a_{45} &= a_{21} & a_{46} &= a_{31} \\
a_{51} &= 0 & a_{52} &= \frac{1}{c_{66}} & a_{53} &= 0 & a_{54} &= a_{12} & a_{55} &= -a_{33} & a_{56} &= 0 \\
a_{61} &= a_{62} = a_{65} = a_{66} = 0 & a_{63} &= \frac{1}{c_{44}} & a_{64} &= j\beta
\end{aligned}$$

ve

$$b = \frac{c_{66}}{c_{11}}(c_{66} + c_{12})$$

Böylece akustik fiberin dalga yayılımına ilişkin denklemler daha basit bir yapı olan durum denklemleri yapısına indirgenmiş olmaktadır.

3.3 MOD ANALİZİ

Bu yöntemi kullanmak aynı zamanda tüm çözümler yazılmadan denklemlerin ayrıştırılması ile mod analizi yapabilmeyi sağlamaktadır. Böylece sadece torsiyonel ya da radyal-eksenel modların analizleri elde edilmek isteniyorsa bu yöntem yardımıyla tüm denklemleri çözmeye gerek kalmadan $n=0$ için $A(r)$ matrisini ayrıştırmak yeterli olacaktır. Buradan torsiyonel ya da radyal-eksenel modlara ilişkin denklemler çekilebilir. Gerçekten de $A(r)$ matrisi $n=0$ için iki ayrı matrisin bileşiminden oluşmaktadır. Bu durumda (3.3) denklemleri açıkça

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \tau_1(r) \\ \tau_2(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(r) & 0 \\ 0 & A_2(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1(r) \\ \tau_2(r) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

biçiminde yazılır. Burada τ_1 torsiyonel modları veren bileşenlerin oluşturduğu vektör,

$$\tau_1 = [T_6 \quad u_\theta]^T \quad (3.10)$$

τ_2 radyal-eksenel modları veren bileşenlerin oluşturduğu vektör,

$$\tau_2 = [T_1 \quad T_5 \quad u_r \quad u_\theta]^T \quad (3.11)$$

olup; torsiyonel modlar için denklemler de , aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_6 \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r} q c_{66} & q^2 c_{66} \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_6 \\ u_\theta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Radyal aksenal modlara ilişkin denklemler ise,

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_5 \\ u_r \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r} \frac{c_{66}}{c_{11}} & j\beta & \frac{4}{r^2} \frac{c_{66}}{c_{11}} (c_{66} + c_{12}) - \rho \omega^2 & -j \frac{2\beta}{r} c_{13} \frac{c_{66}}{c_{11}} \\ j\beta \frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{1}{r} & j \frac{2\beta}{r} c_{13} \frac{c_{66}}{c_{11}} & \beta^2 (c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}) - \rho \omega^2 \\ \frac{1}{c_{11}} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{c_{12}}{c_{11}} & j\beta \frac{c_{13}}{c_{11}} \\ 0 & \frac{1}{c_{44}} & j\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_5 \\ u_r \\ u_z \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

dir. Bu denklemlerdeki A_1 ve A_2 matrisleri A matrisinden, $n=0$ konularak elde edilmişlerdir.

3.4. GENEL ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI

Genel halde mod analizi yapmak için, (3.3) denklem sistemini çözmek gerekir. (3.3) denklemlerinin genel çözümü olarak ,

$$\tau(r) = X(r)P \quad (3.14)$$

göz önüne alınmıştır. Burada P keyfi, sıfırdan farklı sütun vektörü göstermektedir. $X(r)$ de 6×6 boyutunda temel matris de denilen matrisi göstermektedir. Temel matris $X(r)$ 'yi hesaplamak için

$$\tau(r) = W(r)C_n = (W_1 \frac{1}{r^2} + W_2 \frac{1}{r} + W_3)C_n \quad (3.15)$$

ifadesi kullanılır. Bu ifadedeki W_1 , W_2 ve W_3 'ler, 6×2 boyutunda katsayı matrisleridir. C_n de, 2×1 'lik Bessel fonksiyonlarından oluşmuş bir sütun vektör olarak tanımlanmıştır.

$$C_n = \begin{bmatrix} Z_{n-1}(pr) \\ Z_n(pr) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$\tau(r)$ 'nin (3.15)deki ifadesi (3.3)de yerine konursa denklemler,

$$\begin{aligned} & (-2W_1 \frac{1}{r^3} - W_2 \frac{1}{r^2} + W_1 K \frac{1}{r^2} + W_2 K \frac{1}{r} + W_3 K - \frac{1}{r^2} A W_1 \\ & - \frac{1}{r} A W_2 - A W_3) C_n = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

haline gelir. Buradaki W_1 , W_2 , W_3 ve K ,

$$K = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{r} & -p \\ p & \frac{n}{r} \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \\ w_{41} & w_{42} \\ w_{51} & w_{52} \\ w_{61} & w_{62} \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} w'_{11} & w'_{12} \\ w'_{21} & w'_{22} \\ w'_{31} & w'_{32} \\ w'_{41} & w'_{42} \\ w'_{51} & w'_{52} \\ w'_{61} & w'_{62} \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} w''_{11} & w''_{12} \\ w''_{21} & w''_{22} \\ w''_{31} & w''_{32} \\ w''_{41} & w''_{42} \\ w''_{51} & w''_{52} \\ w''_{61} & w''_{62} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklindeir. (3.17) denklemleri $\frac{1}{r^4}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$ ve sadece katsayılardan oluşacak biçimde düzenlendiğinde

$$\left(D_0 \frac{1}{r^4} + D_1 \frac{1}{r^3} + D_2 \frac{1}{r^2} + D_3 \frac{1}{r} + D_4 \right) P = 0 \quad (3.19)$$

haline gelir. Burada D_i matrisleri ,

$$D_0 = -A'_1 W_1,$$

$$D_1 = -2W_1 - A'_2 W_1 - A'_1 W_2 + W_1 K_1,$$

$$D_2 = -W_2 + W_1 K_2 - A'_3 W_1 + W_2 K_1 - A'_2 W_2 - A'_1 W_3,$$

$$D_3 = W_2 K_2 - A'_3 W_2 + W_3 K_1 - A'_2 W_3,$$

$$D_4 = W_3 K_2 - A'_3 W_3.$$

olarak tanımlanmıştır. Burada görülen A'_i 'ler $A(r)$ matrisinin,

$$A(r) = \frac{1}{r^2} A'_1 + \frac{1}{r} A'_2 + A'_3$$

şeklinde ayrıştırılması ile elde edilmişlerdir. Benzer biçimde K matrisi de,

$$K = \frac{1}{r}K_1 + K_2$$

biçiminde ayrıştırılmıştır. Böylece D_i matrisleri r 'den bağımsız katsayı matrislerine dönüşmüştür. Bu denklemlerin sağlanabilmesi için her bir D_i matrisinin elemanlarının sıfır olması gerekmektedir. Bu koşulun uygulanmasıyla, lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının çözümünden temel matris aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$X(r) = \begin{bmatrix} x_1(p_1r) & y_1(p_1r) & x_2(p_2r) & y_2(p_2r) & z_1(qr) & z_2(qr) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Burada

$$x_i(p_i r) = W_{p_i} \begin{bmatrix} J_{n-1}(p_i r) \\ J_n(p_i r) \end{bmatrix} \quad (3.21.a)$$

$$y_i(p_i r) = W_{p_i} \begin{bmatrix} Y_{n-1}(p_i r) \\ Y_n(p_i r) \end{bmatrix} \quad (3.21.b)$$

$$z_1(qr) = W_q \begin{bmatrix} J_{n-1}(qr) \\ J_n(qr) \end{bmatrix} \quad (3.21.c)$$

$$z_2(qr) = W_q \begin{bmatrix} Y_{n-1}(qr) \\ Y_n(qr) \end{bmatrix} \quad (3.21.d)$$

olup, bu bağıntılarda görünen katsayı matrisleri

$$W_{p_i} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r} p_i c_{66} & \frac{2}{r^2} n(n+1) c_{66} - (p_i^2 c_{11} + j\beta \lambda_i c_{13}) \\ j\frac{2}{r} p_i n c_{66} & -j\frac{2}{r} n(n+1) c_{66} \\ p_i c_{44} (\lambda_i - j\beta) & -\frac{n}{r} c_{44} (\lambda_i - j\beta) \\ p_i & -\frac{n}{r} \\ 0 & j\frac{n}{r} \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$W_q = \begin{bmatrix} j\frac{2}{r} q n c_{66} & -j\frac{2}{r^2} n(n+1) c_{66} \\ \frac{2}{r} q c_{66} & -\frac{2}{r^2} n(n+1) c_{66} + q^2 c_{66} \\ 0 & \frac{n}{r} \beta c_{44} \\ 0 & j\frac{n}{r} \\ -q & \frac{n}{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

olarak elde edilmişlerdir. Burada

$$p_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (3.24)$$

$$q^2 = \frac{\rho \omega^2 - \beta^2 c_{44}}{c_{66}} \quad (3.25)$$

$$\lambda_i = j \frac{p_i^2 c_{11} - (\rho \omega^2 - \beta^2 c_{44})}{\beta(c_{44} + c_{13})} \quad ; \quad i=1,2 \quad (3.26)$$

ve

$$B = \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{11}}\right) \left(\frac{\rho \omega^2}{c_{44} \beta^2} + \frac{c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{33}c_{11}}{(c_{11} + c_{44})c_{44}} \right) \beta^2 \quad (3.27)$$

$$C = \beta^4 \left(\frac{\rho \omega^2}{c_{11} \beta^2} - 1 \right) \left(\frac{\rho \omega^2}{c_{44} \beta^2} - 1 \right) \frac{c_{33}}{c_{11}} \quad (3.28)$$

olarak ifade edilmektedir. (3.21) de görülen J_k birinci tür, Y_k da ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların olduğu temel matris, çekirdeğe ilişkin çözümler için yazılmıştır. J_k ve Y_k yerine sırasıyla $H_k^{(2)}$ ve $H_k^{(1)}$ Hankel fonksiyonları konulacak olursa kılıf bölgesi için geçerli olan temel matris $X_2(r)$ elde edilir. Ancak kılıf bölgesinde kılıf kalınlığı sonsuz olduğundan kılıf bölgesindeki çözümlerde $H_k^{(1)}$ ve $r \rightarrow 0$ giderken Y_k fonksiyonu sonsuza gittiği için çekirdek bölgesindeki çözümlerde bu fonksiyon göz önüne alınmamıştır. Çözümler sadece, argümanların kompleks değerli olduğu düşünülerek, J_k ve $H_k^{(2)}$ 'ye bağlı olarak yazılmıştır.

$X_i(r)$ matrislerinde $n=0$ konularak, daha önce torsiyonel ve radyal-eksenel modlar için elde edilen $A_1(r)$ ve $A_2(r)$ matrisleri için elde edilecek olan temel matrisler kolaylıkla yazılabilir.

Çözüm ifadesinin bulunmasından sonra, fibere ilişkin dağılma bağıntısı elde edilebilir. Sonsuz uzun kılıflı fiberin, Şekil.(2.1)'de gösterildiği gibi, çekirdek kısmının yarıçapı a olarak kabul edilmiştir. Yine kılıf bölgesinin radyal doğrultuda uzandığı varsayılmıştır. Buna göre, 3.3'de de söylendiği gibi çekirdek bölgesine ait temel matriste sadece birinci tür Bessel

fonksiyonları bulunacaktır. Enerji sakınımı nedeniyle Y_k fonksiyonları kullanılamazlar. Bundan dolayı (3.14) eşitliğinde P vektörünün ikinci, dördüncü ve altıncı satırları sıfır olmalıdır:

$$\tau_{\text{çekirdek}}(r) = \begin{bmatrix} x_1'(r) & x_2'(r) & z_1'(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_3' \\ P_5' \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

(3.29)'daki çözüm ifadesinde görülen x_i ve z_1 'in üst indislerindeki tek çizgi çekirdek bölgesine ait olduklarını göstermektedir.

Kılıf bölgesinde ise benzer şekilde sadece giden dalga durumu göz önüne alındığından $H_k^{(2)}$ fonksiyonları kullanılacaktır. Yine $X_2(r)$ matrisinin ikinci, dördüncü ve altıncı sütunları sıfır olmalıdır. Bu durumda,

$$\tau_{\text{kılıf}}(r) = \begin{bmatrix} x_1''(r) & x_2''(r) & z_1''(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1'' \\ P_3'' \\ P_5'' \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

kılıf bölgesindeki çözümdür. Burada da x_i ve z_1 'in üst indislerindeki çift çizgi kılıf bölgesine bağlılığı göstermektedir.

2.3 bölümünde söylenen sınır koşulları burada

$$\tau_{\text{çekirdek}}(a) = \tau_{\text{kılıf}}(a) \quad (3.31)$$

olarak yazılabilir. Bu sınır koşulları kullanılacak olursa dağılma bağıntısı

$$\det[M(\omega, \beta, a)] = 0 \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. Dağılma bağıntısının yazıldığı M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} x'_1(r) & x'_2(r) & z'_1(r) & | & -x''_1(r) & -x''_2(r) & -z''_1(r) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

biçiminde elde edilir. M matrisinin m_{ij} 'leri aşağıda verilmiştir. Bu ifadelerdeki q'nun alt indisi p ve λ 'nın alt indislerindeki ilk rakam çekirdek 1, kılıf ise 2 olmak üzere incelenen bölgeyi, p ve λ 'nın alt indislerindeki ikinci rakam ise farklı kökleri göstermektedir.

$$p_{11}a = \hat{p}_{11}, \quad p_{12}a = \hat{p}_{12}, \quad p_{21}a = \hat{p}_{21}, \quad p_{22}a = \hat{p}_{22}, \quad q_1a = \hat{q}_1, \quad q_2a = \hat{q}_2$$

$$\lambda_{11}a = \hat{\lambda}_{11}, \quad \lambda_{12}a = \hat{\lambda}_{12}, \quad \lambda_{21}a = \hat{\lambda}_{21}, \quad \lambda_{22}a = \hat{\lambda}_{22}, \quad \beta a = \hat{\beta}$$

$$m_{11} = (-2\hat{p}_{11}c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{p}_{11}) / Z_n(\hat{p}_{11})) + (4c_{66}^1 - (\hat{p}_{11}^2 c_{11}^1 + j\hat{\beta}\hat{\lambda}_{11}c_{13}^1))$$

$$m_{12} = (-2\hat{p}_{12}c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{p}_{12}) / Z_n(\hat{p}_{12})) + (4c_{66}^1 - (\hat{p}_{12}^2 c_{11}^1 + j\hat{\beta}\hat{\lambda}_{12}c_{13}^1))$$

$$m_{13} = j2\hat{q}_1c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{q}_1) / Z_n(\hat{q}_1) - 4c_{66}^1$$

$$m_{14} = (2\hat{p}_{21}c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{p}_{21}) / Z_n(\hat{p}_{21})) - (4c_{66}^2 - (\hat{p}_{21}^2 c_{11}^2 + j\hat{\beta}\hat{\lambda}_{21}c_{13}^2))$$

$$m_{15} = (2\hat{p}_{22}c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{p}_{22}) / Z_n(\hat{p}_{22})) - (4c_{66}^2 - (\hat{p}_{22}^2 c_{11}^2 + j\hat{\beta}\hat{\lambda}_{22}c_{13}^2))$$

$$m_{16} = -j2\hat{q}_2c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{q}_2) / Z_n(\hat{q}_2) + 4c_{66}^2$$

$$m_{21} = j2\hat{p}_{11}c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{p}_{11}) / Z_n(\hat{p}_{11}) - j4c_{66}^1$$

$$m_{22} = j2\hat{p}_{12}c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{p}_{12}) / Z_n(\hat{p}_{12}) - j4c_{66}^1$$

$$m_{23} = 2\hat{q}_1c_{66}^1 Z_{n-1}(\hat{q}_1) / Z_n(\hat{q}_1) - 4c_{66}^1 + \hat{q}_1c_{66}^1$$

$$m_{24} = -j2\hat{p}_{21}c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{p}_{21}) / Z_n(\hat{p}_{21}) + j4c_{66}^2$$

$$m_{25} = -j2\hat{p}_{22}c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{p}_{22}) / Z_n(\hat{p}_{22}) + j4c_{66}^2$$

$$m_{26} = -2\hat{q}_2c_{66}^2 Z_{n-1}(\hat{q}_2) / Z_n(\hat{q}_2) + 4c_{66}^2 - \hat{q}_2c_{66}^2$$

$$m_{31} = (\hat{p}_{11}Z_{n-1}(\hat{p}_{11}) / Z_n(\hat{p}_{11})c_{44}^1 - c_{44}^1)(\hat{\lambda}_{11} - j\hat{\beta})$$

$$m_{32} = (\hat{p}_{12}Z_{n-1}(\hat{p}_{12}) / Z_n(\hat{p}_{12})c_{44}^1 - c_{44}^1)(\hat{\lambda}_{12} - j\hat{\beta})$$

$$m_{33} = \hat{\beta}c_{44}^1$$

$$m_{34} = -(\hat{p}_{21}Z_{n-1}(\hat{p}_{21}) / Z_n(\hat{p}_{21})c_{44}^2 - c_{44}^2)(\hat{\lambda}_{21} - j\hat{\beta})$$

$$m_{35} = -(\hat{p}_{22}Z_{n-1}(\hat{p}_{22}) / Z_n(\hat{p}_{22})c_{44}^2 - c_{44}^2)(\hat{\lambda}_{22} - j\hat{\beta})$$

$$m_{36} = -\hat{\beta}c_{44}^2$$

$$m_{41} = \hat{p}_{11}Z_{n-1}(\hat{p}_{11}) / Z_n(\hat{p}_{11}) - 1$$

$$m_{42} = \hat{p}_{12}Z_{n-1}(\hat{p}_{12}) / Z_n(\hat{p}_{12}) - 1$$

$$m_{44} = -\hat{p}_{21}Z_{n-1}(\hat{p}_{21}) / Z_n(\hat{p}_{21}) + 1$$

$$m_{46} = -\hat{p}_{22}Z_{n-1}(\hat{p}_{22}) / Z_n(\hat{p}_{22}) + 1$$

$$m_{46} = -j$$

$$m_{51} = m_{52} = jn, \quad m_{53} = -\hat{q}_1Z_{n-1}(\hat{q}_1) / Z_n(\hat{q}_1) + 1,$$

$$m_{54} = m_{55} = -jn, \quad m_{56} = \hat{q}_2Z_{n-1}(\hat{q}_2) / Z_n(\hat{q}_2) - 1,$$

$$m_{61} = \hat{\lambda}_{11}, \quad m_{62} = \hat{\lambda}_{12}, \quad m_{63} = 0,$$

$$m_{64} = -\hat{\lambda}_{21}, \quad m_{65} = -\hat{\lambda}_{22}, \quad m_{66} = 0.$$

3.4 SAYISAL HESAPLAMALAR

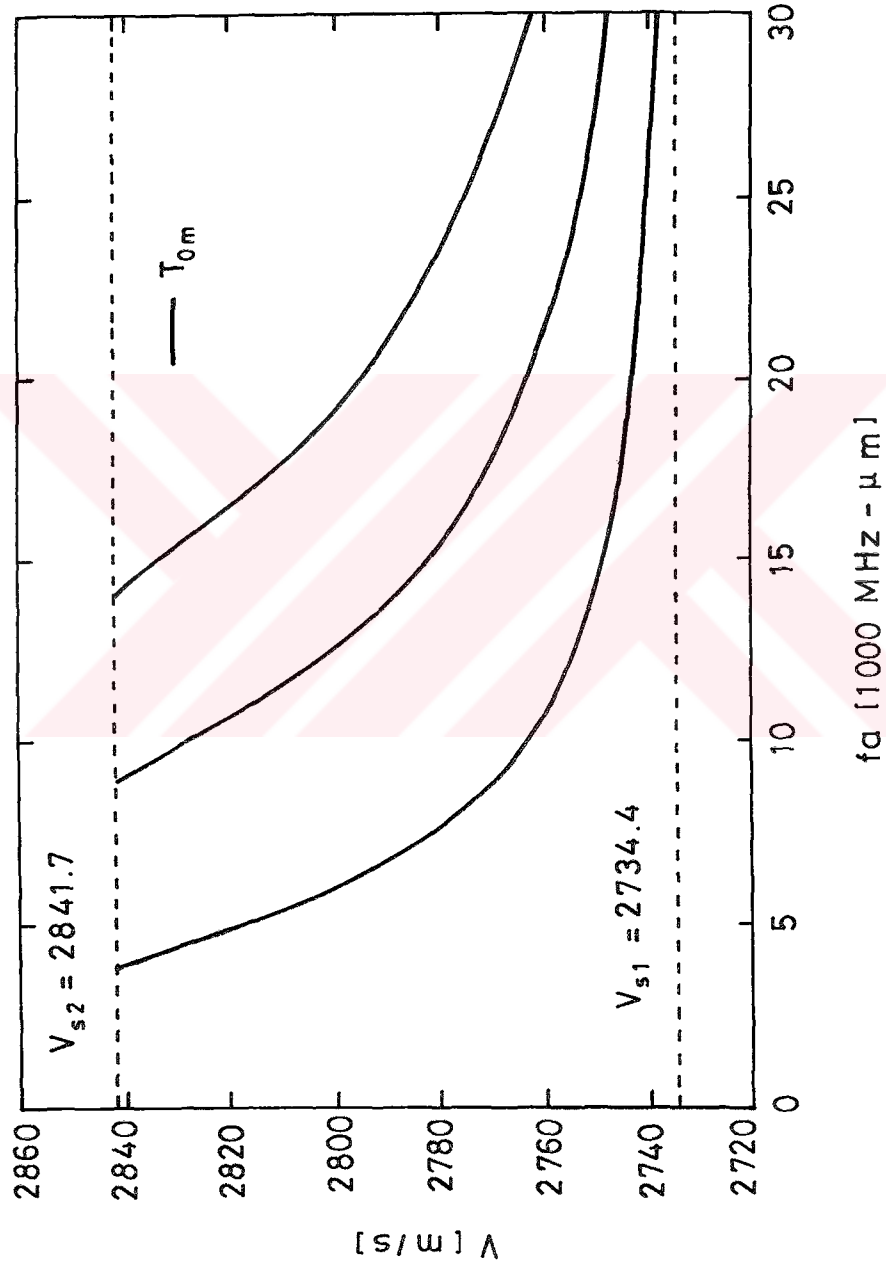
Bu bölümde sayısal hesaplamalar için, ilk olarak ikinci bölümde kullanılan ZnO'ye ilişkin malzeme katsayıları kullanılmıştır. Burada (3.33) denkleminde $n=0$ konulacak olursa yine M matrisi ikiye ayrılır. 2×2 'lik kısmından yazılan dağılma bağıntısından faydalanarak torsiyonel modlar için dağılma eğrileri elde edilir. Bu eğriler, Şekil 3.1'de gösterilmiştir.

M matrisinin ayrışmasından sonra elde edilen 4x4'lük kısmından da yazılan dağılma bağıntısından faydalanılarak radyal eksenel modlara ilişkin dağılma eğrileri çizilmiştir. Bu eğriler de, Şekil.3.2'de görülmektedir.

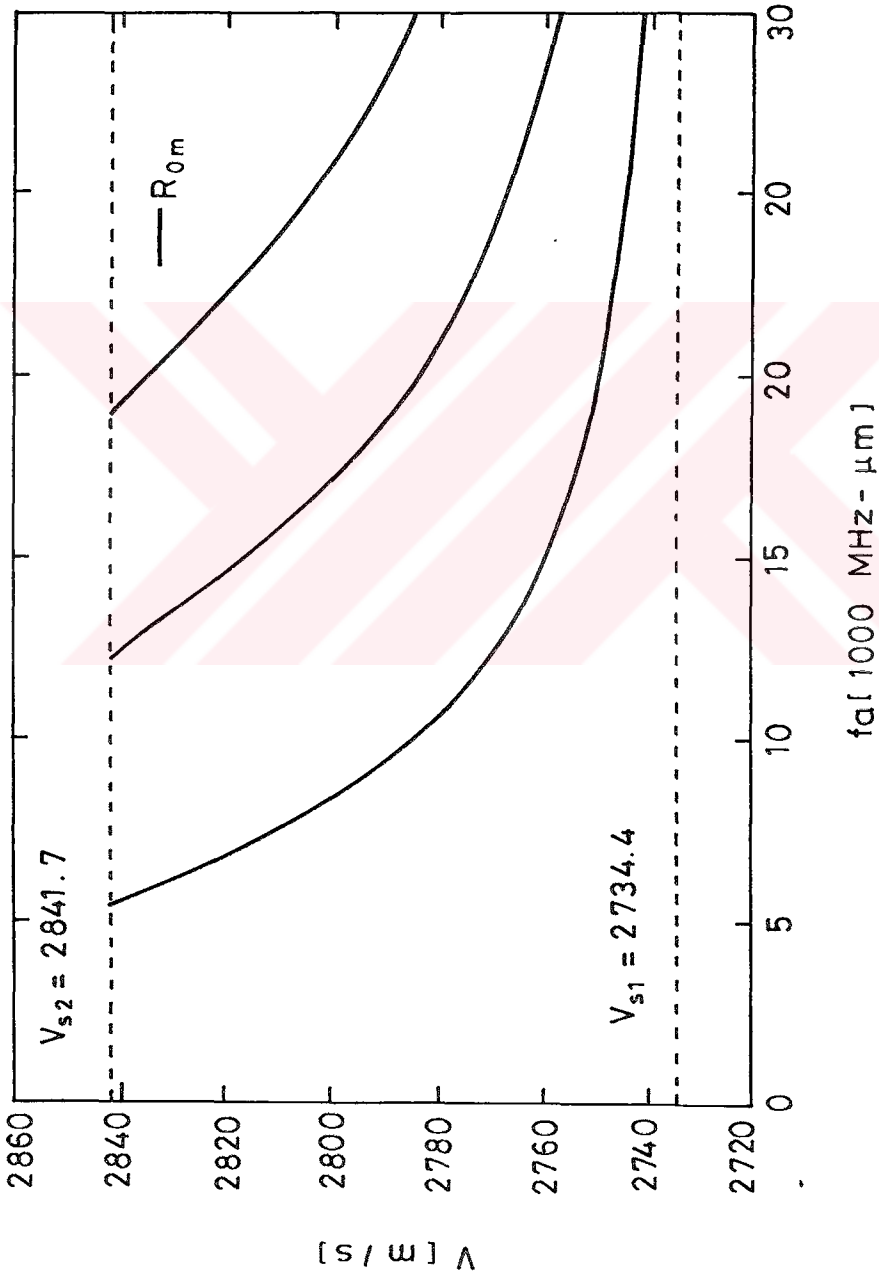
Genel fleksural modlar ise doğrudan $n \geq 1$ için M matrisinden yazılan dağılma bağıntısından elde edilmektedir. F_{nm} n'nin çift veya tek değerli olmasına bağlı olarak ayrıışan modlara ilişkin dağılma eğrileri de Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 'de görülmektedir. Elde edilen sonuçlar, daha önceki yöntemle elde edilenlerle, beklenildiği gibi aynıdır.

Sayısal hesaplamalarda ayrıca CdS (Kadmiyum sulfid) ve CdSe (Kadmiyum selenit) malzemeleri için, elde edilen dağılma bağıntılarından faydalanılarak çeşitli modlar için dağılma eğrileri elde edilmiştir. Şekil 3.5'de CdS için torsiyonel mod, Şekil 3.6'da radyal eksenel mod dağılma eğrileri görülmektedir. CdS için elde edilen fleksural mod eğrileri de Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de görülmektedir. Şekil 3.9'dan Şekil 3.12'ye kadar olan eğriler ise, CdSe için elde edilen, sırasıyla torsiyonel mod, radyal-eksenel mod ve fleksural tek ve çift mod dağılma eğrileridir.

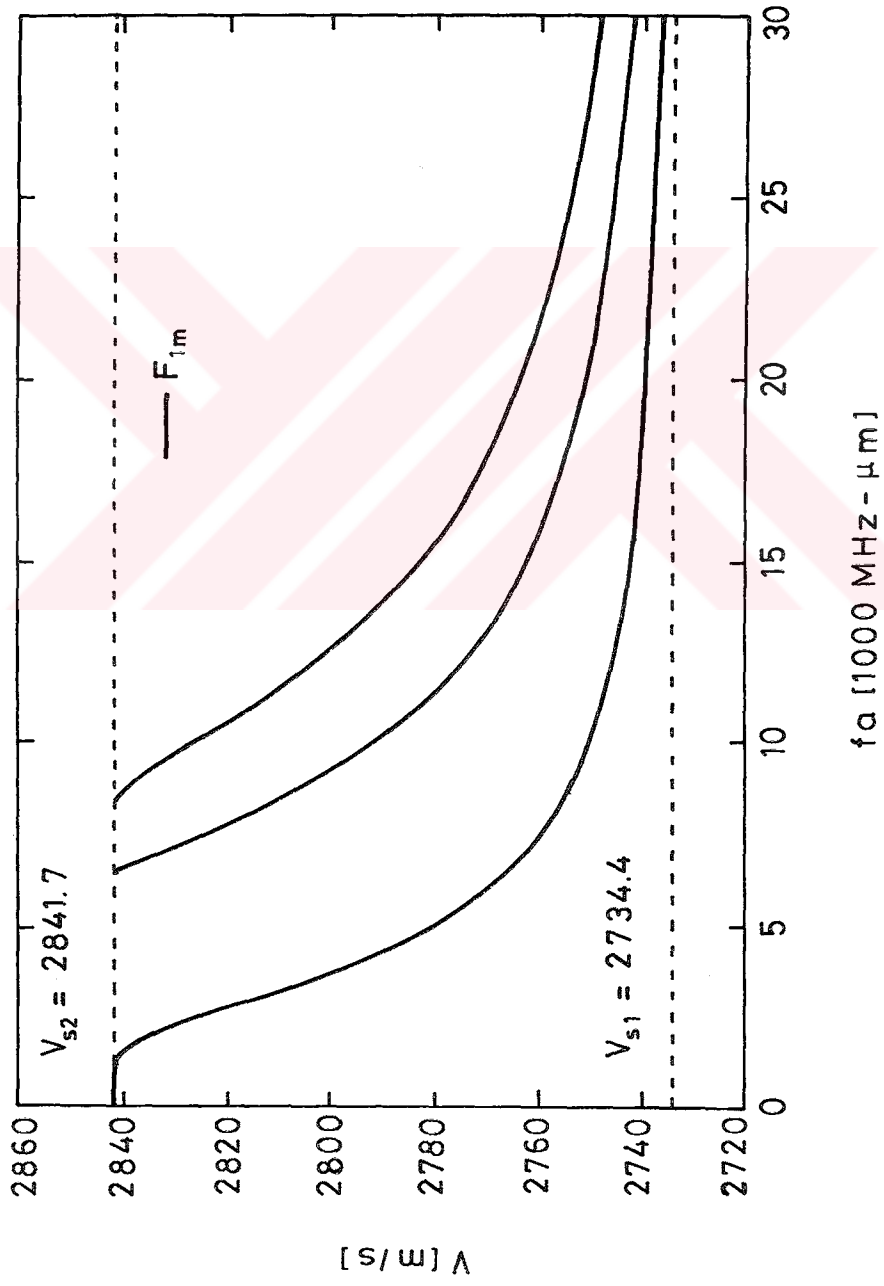
Şekil 3.13'de torsiyonel modda T_θ , radyal-eksenel modda da T_r ve T_z gerilmelerinin genliklerinin, b kılıf kalınlığı olmak üzere b/a 'ya göre değişimi, (3.30) denkleminde faydalanarak hesaplanmıştır. Buradaki gerilme değerleri T_z gerilmesinin çekirdek ile kılıf arasındaki sınır değerine göre normalize edilmiştir. Şekil 3.13'den de görüldüğü gibi gerilmeler en fazla 2.4a kadar sonra sınır değerinin 10^{-3} 'üne düşmektedir. Bu değere uygun seçilen kılıf kalınlıkları için , hesaplamalar açısından kılıf kalınlığının sonsuz alınmasının iyi bir yaklaşıklık olduğu görülmektedir.



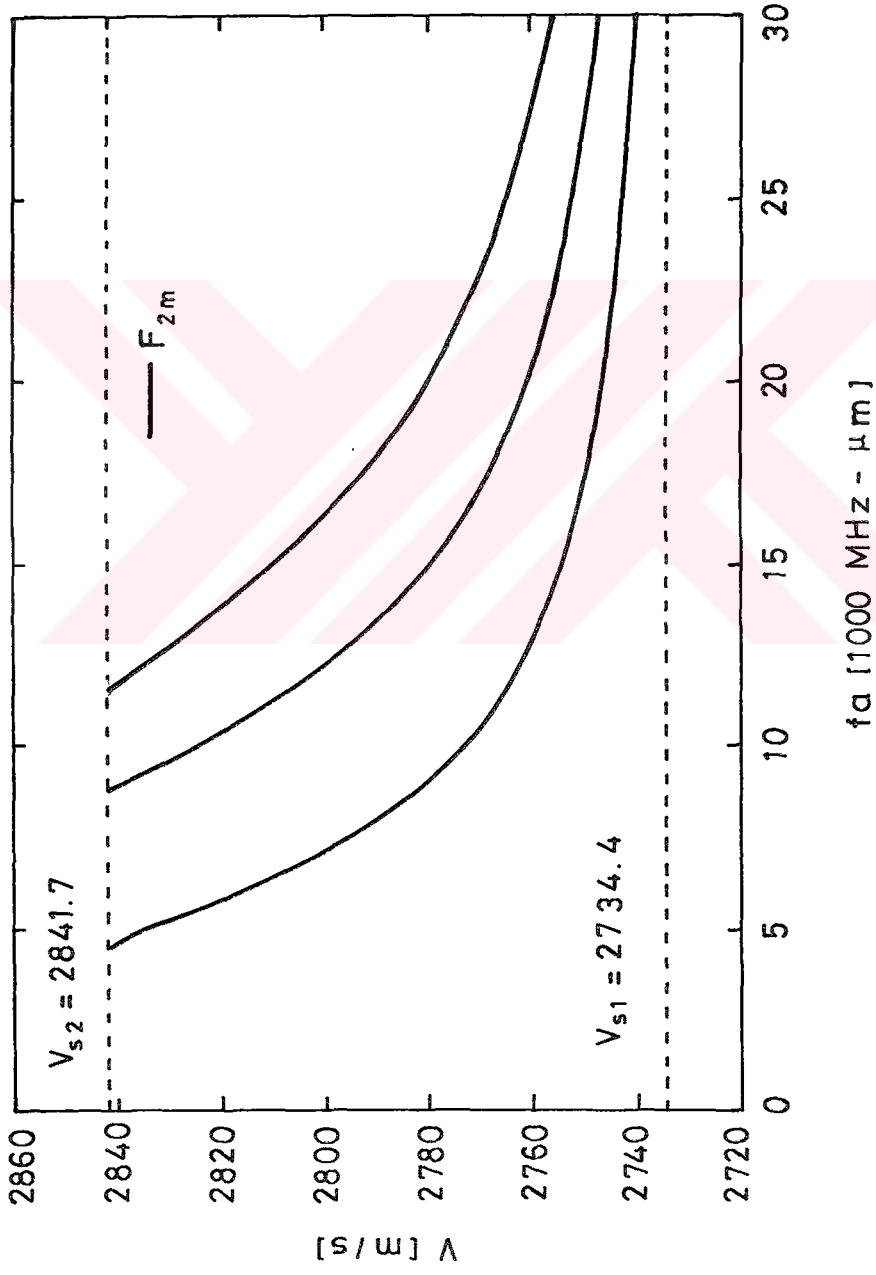
Şekil 3.1 Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanılarak elde edilen T_{0m} Torsiyonel mod dağılıma eğrileri (ZnO).



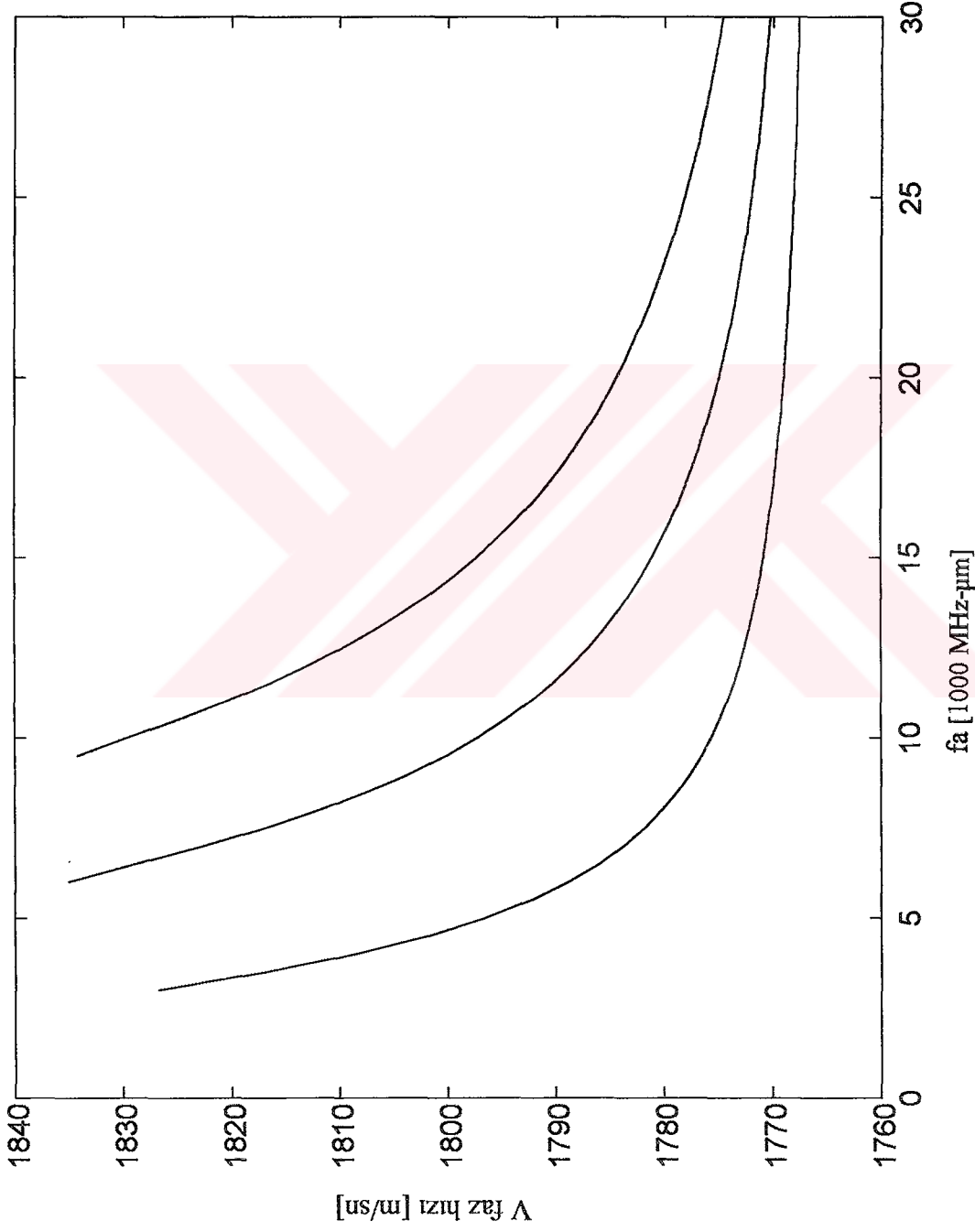
Şekil 3.2. Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanarak elde edilen R_{0m} Radyal eksenel mod dağılıma eğrileri (ZnO).



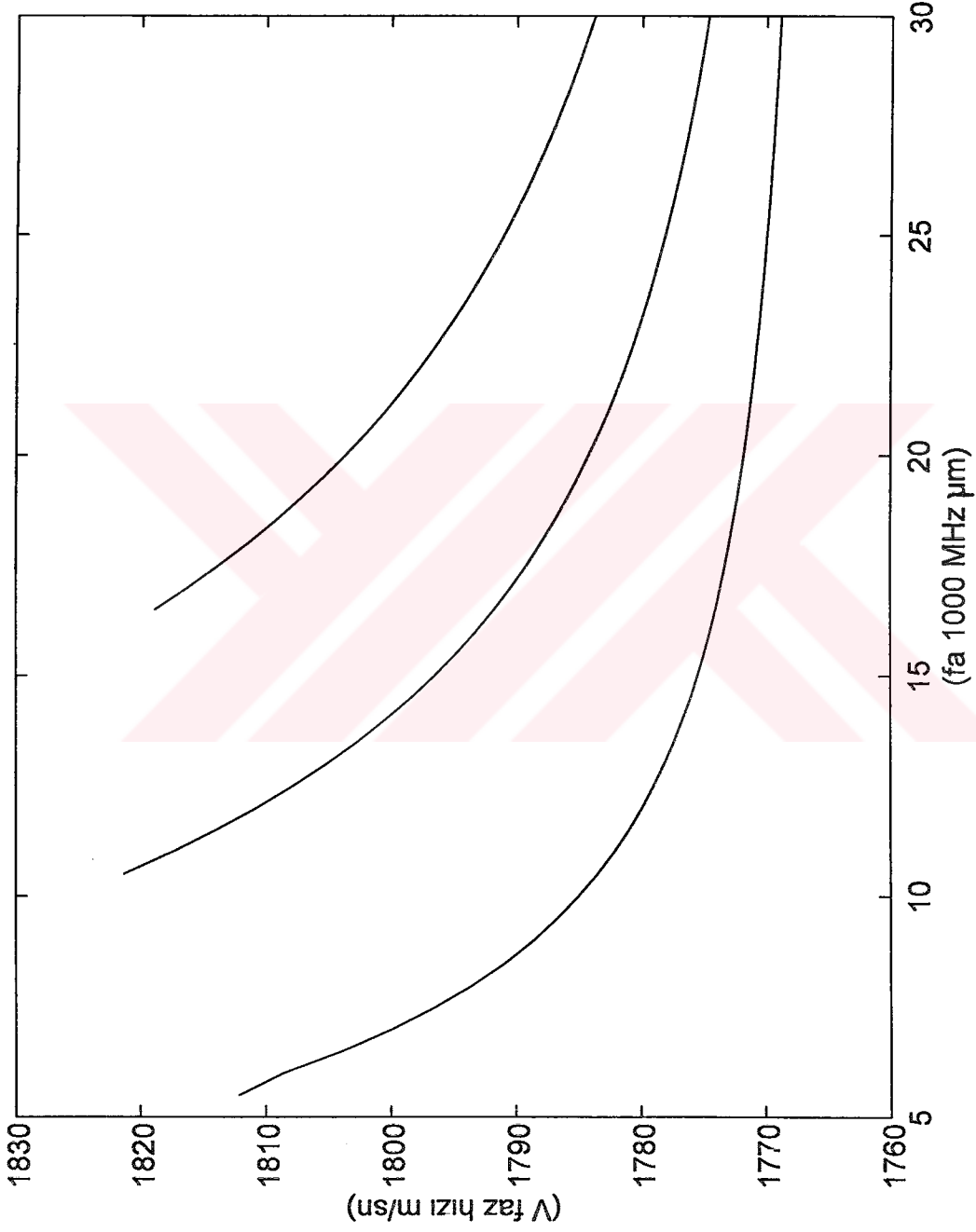
Şekil 3.3 Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanılarak elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (ZnO).



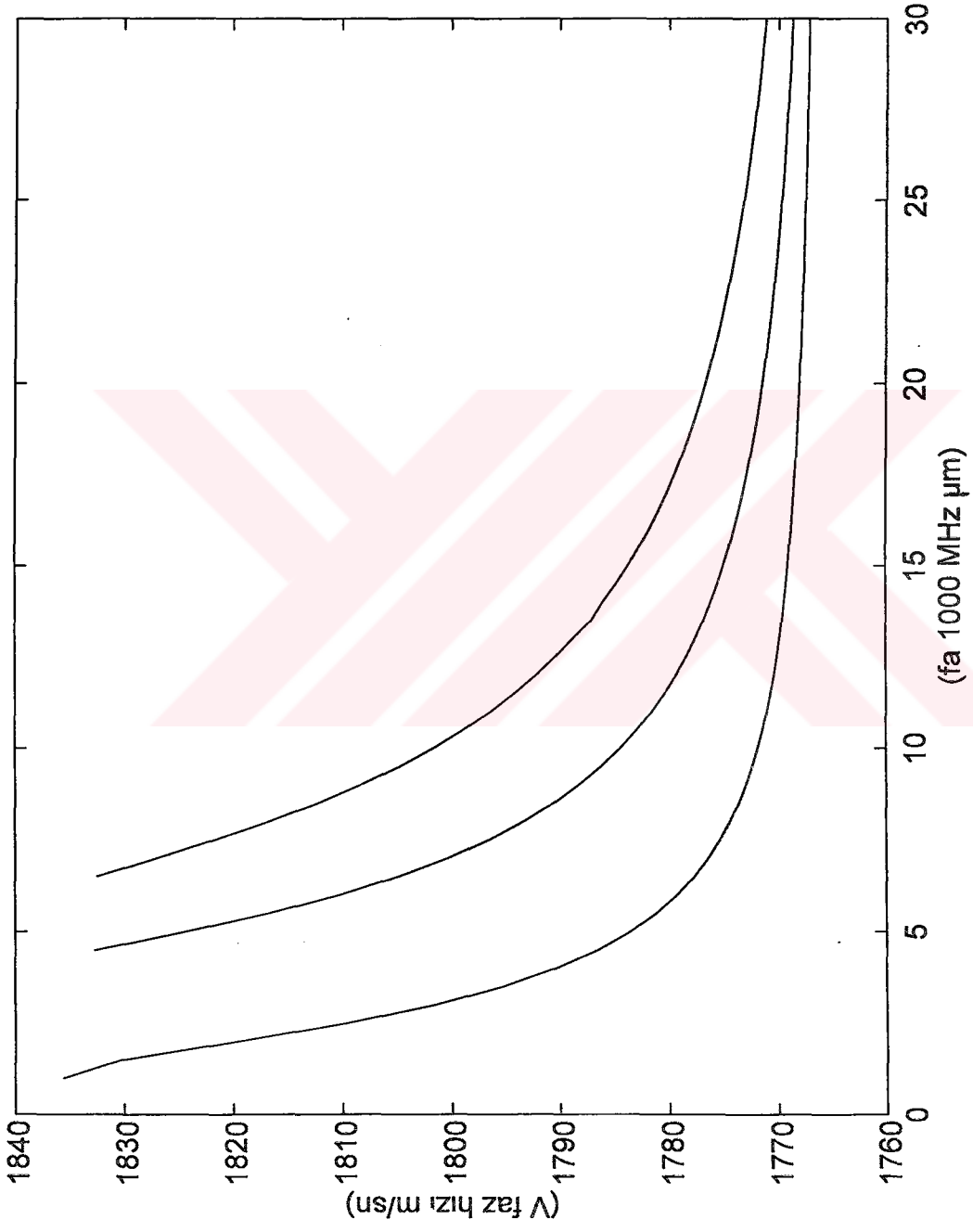
Şekil 3.4. Bu bölümde anlatılan yöntemle elde edilen F_{2m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (ZnO).



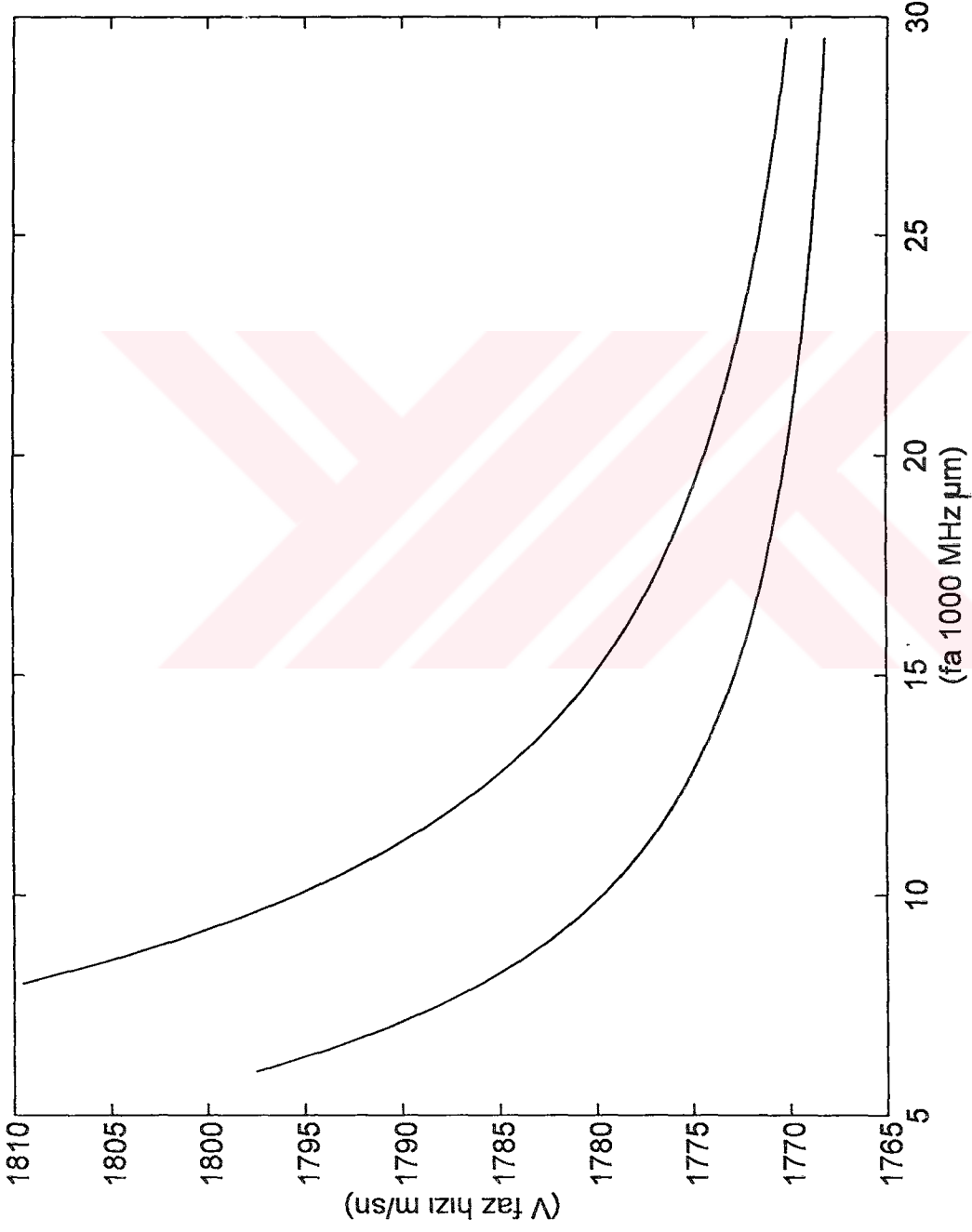
Şekil 3.5. Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanarak elde edilen T_{om} Torsiyonel mod dağılma eğrileri (CdS).



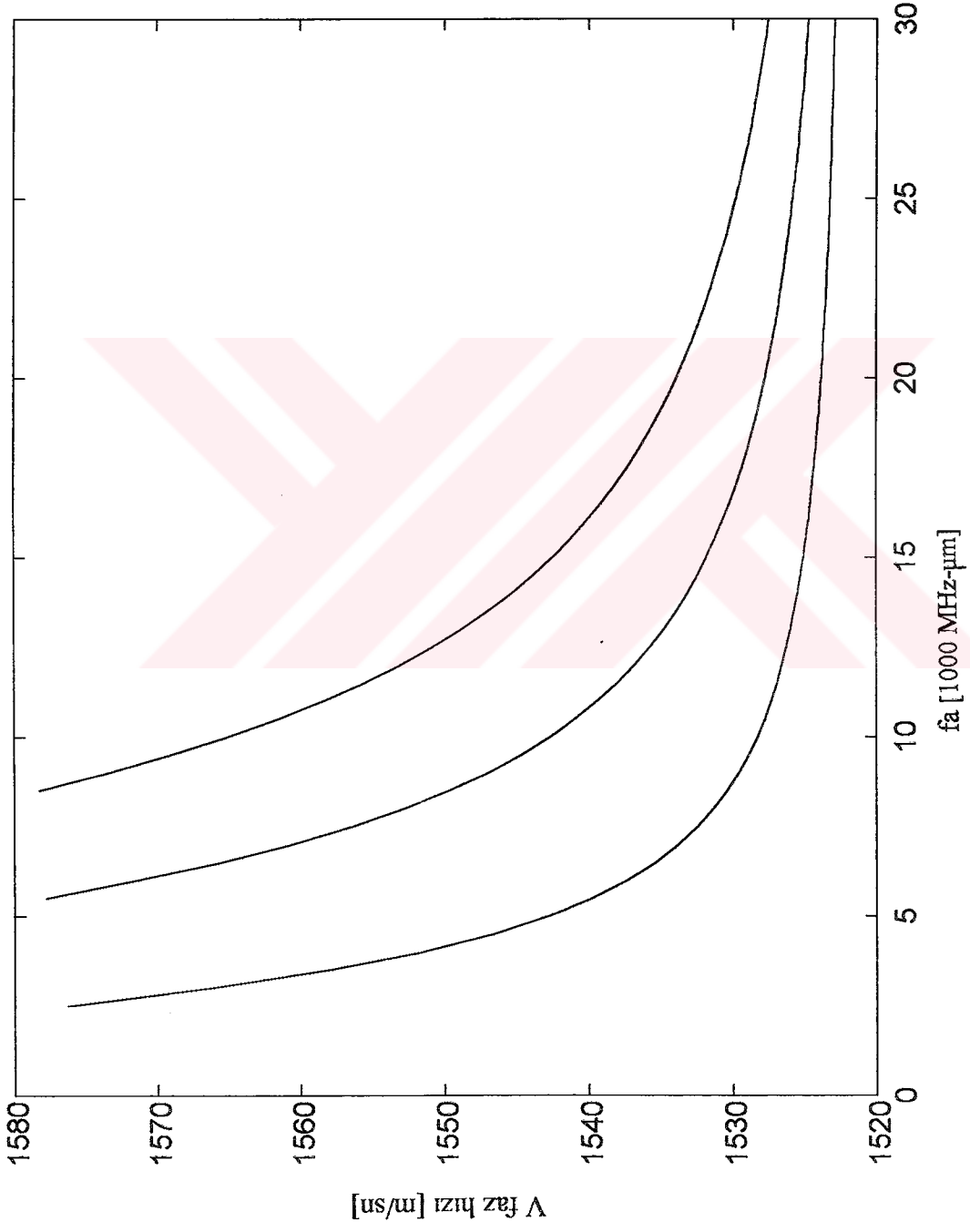
Şekil 3.6. Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanarak elde edilen R_{om} Radyal eksenel mod dağılıma eğrileri (CdS).



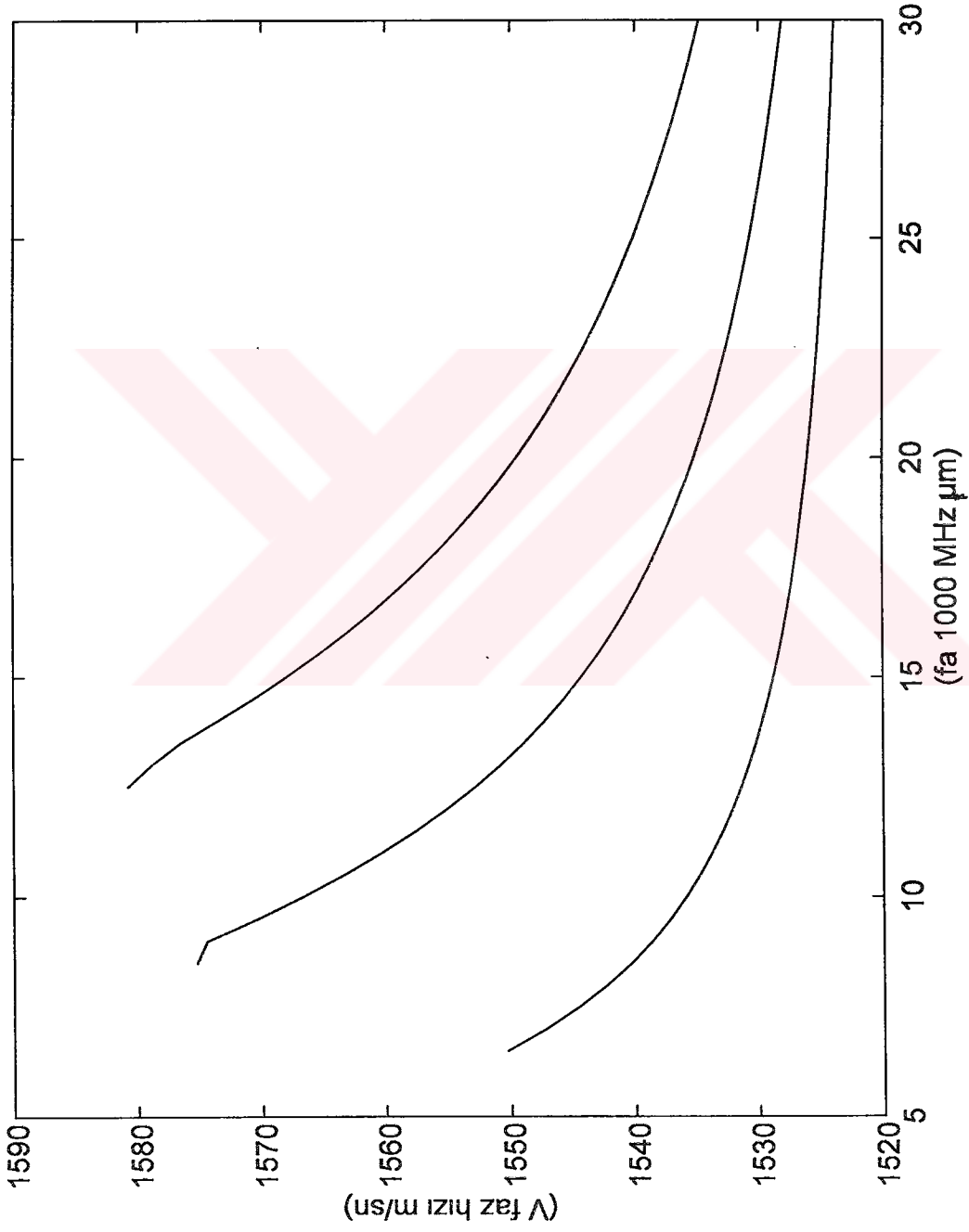
Şekil 3.7 Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanılarak elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılma eğrileri (CdS).



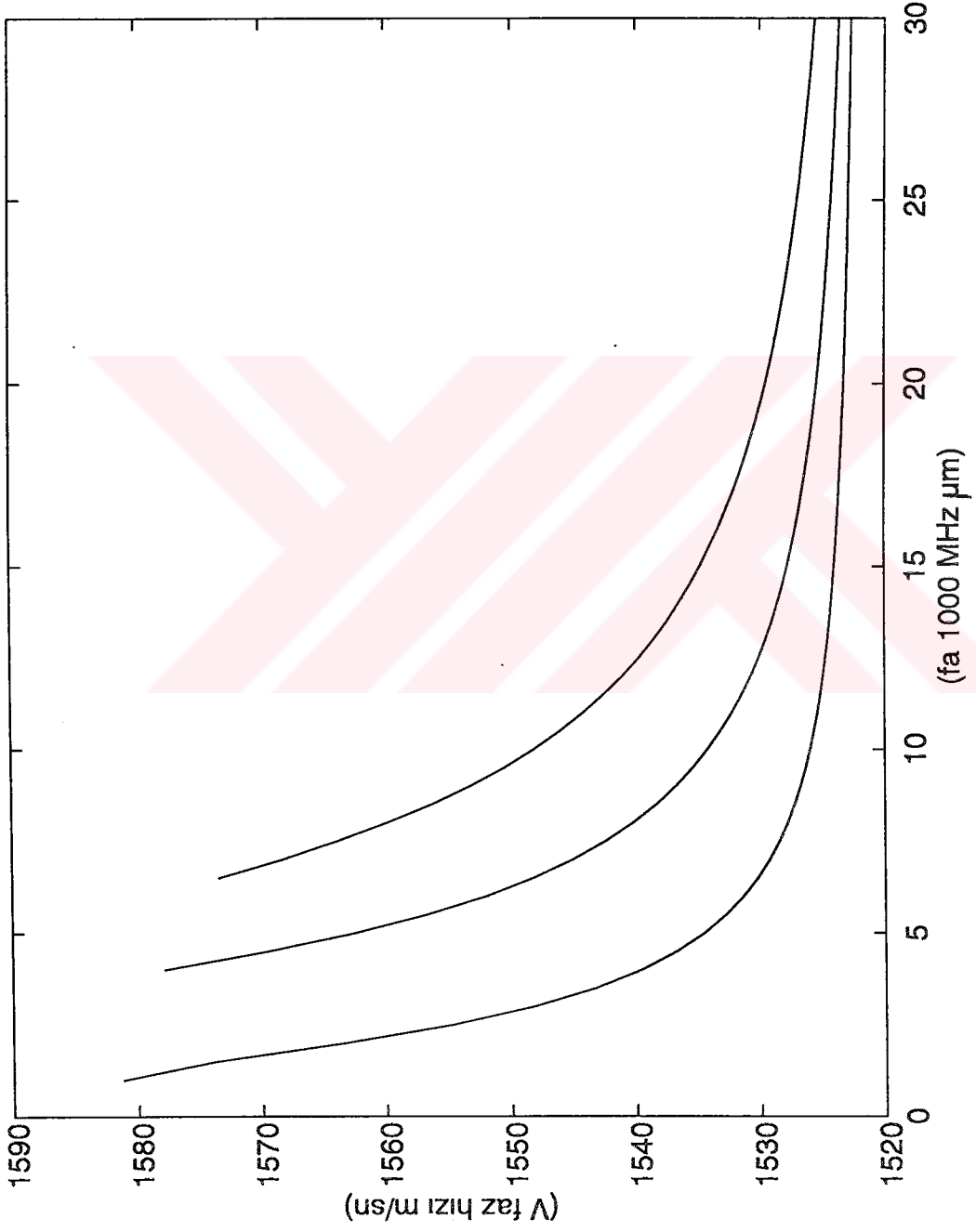
Şekil 3.8. Bu bölümde anlatılan yöntemle elde edilen F_{2m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (CdS).



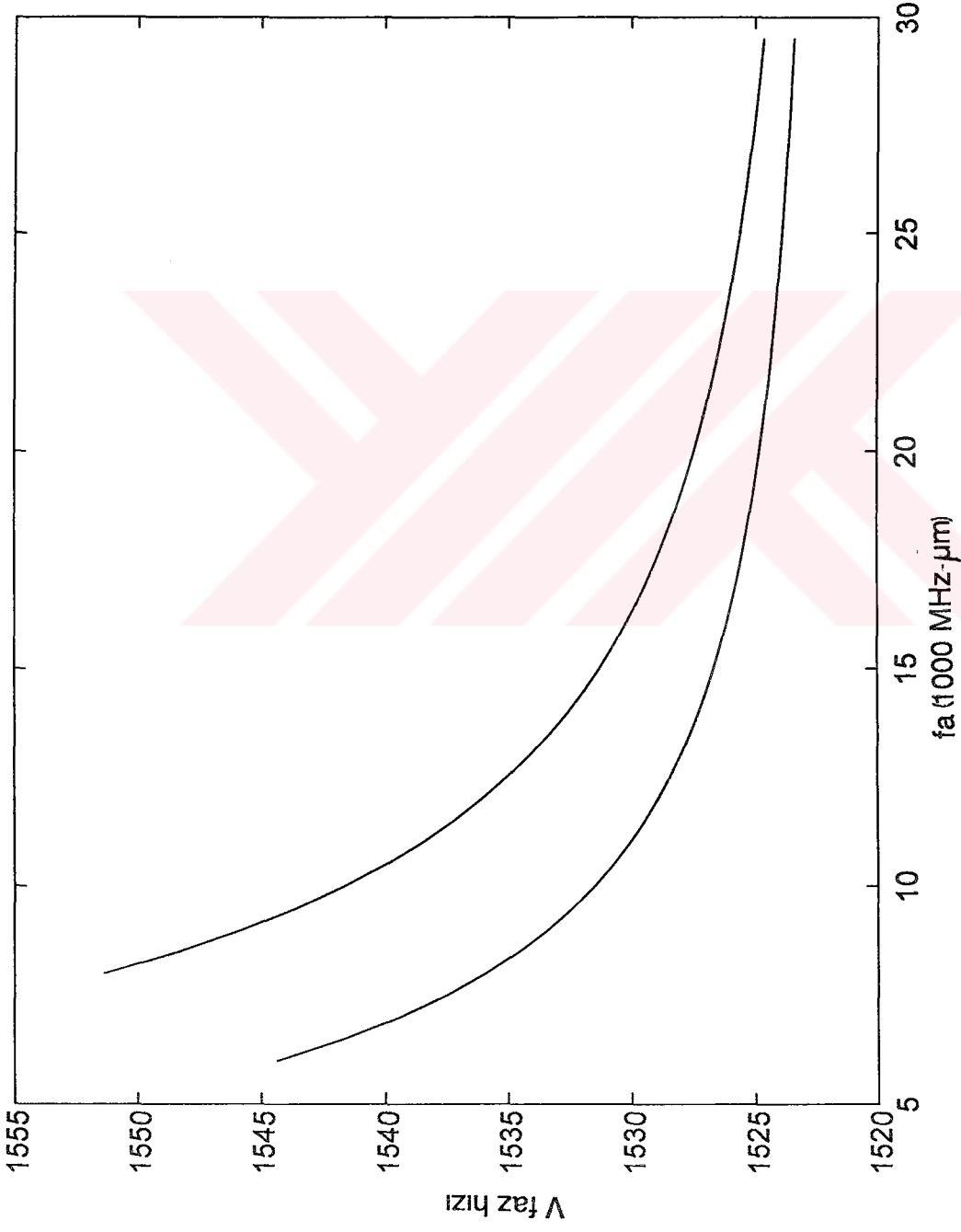
Şekil 3.9. Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanarak elde edilen T_{0m} Torsiyonel mod dağılıma eğrileri (CdSe)



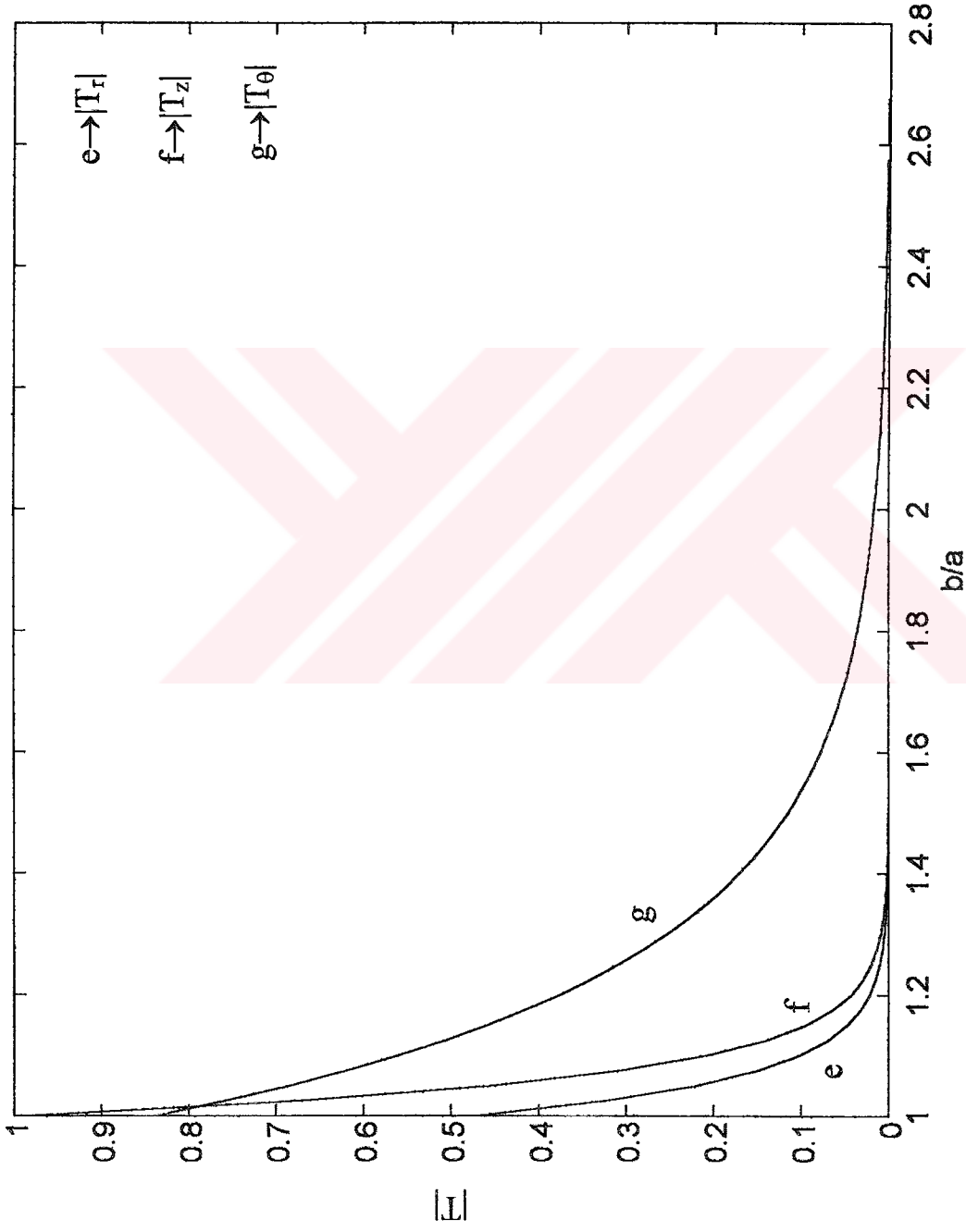
Şekil 3.10. Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanarak elde edilen R_{0m} Radyal eksenel mod dağılıma eğrileri (CdSe)



Şekil 3.11 Bu bölümde anlatılan yöntemden faydalanılarak elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılma eğrileri (CdSe)



Şekil 3.12. Bu bölümde anlatılan yöntemle elde edilen F_{2m} Fleksural mod dağılıma eğrileri (CdSe)



Şekil 3.13. R_{01} Radyal eksenel mod ve T_{01} mod için T_r , T_z ve T_θ gerilmelerinin radyal doğrultudaki değişimleri ($f=20\ 000\text{MHz}$)

BÖLÜM 4

PIEZOELEKTRİK HEKSAGONAL KILIFLI FİBERLER İÇİN DURUM DEĞİŞKENİ YAKLAŞIMI

4. 1 GİRİŞ

İzotropik kılıflı ya da kılıfsız yapıdaki akustik fiberlerin dalga yayılımı probleminin incelenmesi anizotropik yapıdaki fiberlerin incelenmesine öncülük etmiştir. Heksagonal anizotropiye sahip akustik fiberler, kılıflı ve kılıfsız olduğu durumlarda ayrıntılarıyla literatürde incelenmiştir [21-24]. Bu çalışmalar, fiber malzemesinin piezoelektrik etkisinin gözönüne alınmadığı çalışmalardır. Bu tezde de ikinci ve üçüncü bölümlerde piezoelektrik etki hesaba katılmamıştır. Ancak incelenen malzemeler (ZnO, ZnS) aynı zamanda piezoelektrik özellik göstermektedir. Ek A'da görülen Tablo 1' de verilen malzemelerden sadece titanyum, piezoelektrik özelliğe sahip değildir. ZnO, ZnS, CdS gibi malzemelerde ise piezoelektrik etkiyi de hesaba katarak yapılan analiz önemli olmaktadır.

Heksagonal anizotropiye sahip akustik kılıflı fiberin piezoelektrik etkinin de katılmış olması durumunda akustik dalga yayılımı probleminin incelenmesi konusunda Wilson[30], Paul[31] ve Winkel ve arkadaşlarının[32] çalışmaları görülmektedir. Bu çalışmalar, daha önce ikinci bölümde anlatılan çalışmalara dayanmaktadır. Wilson'un ve Paul'ün çalışmalarında sayısal hesaplama yapılmamış sadece Winkel tarafından sayısal hesaplama yapılmıştır. Bu bölümde verilen yöntemdeki denklemlerde görülen piezoelektrik katsayılar sıfır alınırsa, bu denklemlerden piezoelektrik etkinin hesaba katılmadığı üçüncü bölümdeki denklemlere geçmek mümkün olmaktadır. Bu olanak Winkel ve arkadaşlarının geliştirdiği yöntemde yoktur. Eğer ref.[32]'de piezoelektrik katsayılar sıfır alınırsa 0/0 belirsizliği ile karşılaşmaktadır.

Limit alarak belirsizliğin giderilmeye çalışılması durumunda ise matematiksel açıdan zorluklarla karşılaşmaktadır.

Bu bölümde ise, üçüncü bölümde anlatılan yöntem geliştirilerek piezoelektrik etkinin gözönüne alındığı durum için yeniden elde edilmiştir. Bu durumda üçüncü bölümde verilen durum vektörünün elemanları arasına elektriksel bileşenler de katılmıştır. Piezoelektrik heksagonal akustik fiberin durum değişkeni yaklaşımıyla akustik dalga yayılımı problemi için tam bir çözüm elde edilmiştir. Sayısal hesaplamalar bölümünde ise ZnS ve CdS için teorik olarak elde edilen dağılma bağıntıları kullanılarak çeşitli modlar için dağılma eğrileri elde edilmiştir. Bu bölümdeki anlatılan yöntemde piezoelektrik katsayılar sıfır alındığında kolaylıkla piezoelektrik olmayan denklemlere geçiş yapılabilmektedir.

Bütün tezde olduğu gibi bu bölümde de sonsuz kalınlıkta kılıfa sahip dairesel silindirik, sonsuz uzun bir geometrik yapı gözönüne alınmıştır. Koordinat sistemi için ele alınan geometrik yapıdan dolayı bu bölümde de silindirik koordinat sistemi (r, θ, z) seçilmiştir. Koordinat ekseninin z -ekseni ile kristalin Z -ekseni çakışık durumdadır. Kristal heksagonal anizotropiye sahiptir. Bu bölümde diğer bölümlerde yapılan varsayımlar geçerlidir. Farklı olarak diğer bölümlerde gözönüne alınmayan piezoelektrik etki de, hesaba katılmıştır. Bu nedenle elektrik alanı E , elektriksel deplasman vektörü D ve elektriksel potansiyel fonksiyonu ϕ denklemlere katılmıştır.

4.2 FORMÜLASYON

Piezoelektrik etkinin katılmasıyla (2.1.a) ve (2.1.b) eşitlikleri kullanılacaktır[27]. Bu eşitlikler hem elektriksel hem de mekanik

büyüklikleri içermektedir. (2.1) eşitliklerinde (2.5) denkleminin yerine konmasıyla,

$$\mathbf{T} = -\mathbf{e}^T \mathbf{E} + \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{u} \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{e} \nabla_s \mathbf{u} \quad (4.1b)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\mathbf{e}$ piezoelektrik, $\boldsymbol{\varepsilon}$ dielektrik katsayı matrisini göstermektedir. Gerilme ve uzamalar için ikinci bölümde (2.9) ve (2.10) daki tanımlar kullanılmıştır. Elektrik alan vektörünün bileşenleri E_r radyal doğrultudaki, E_θ teğetsel doğrultudaki ve E_z de eksenel doğrultudaki bileşenleri göstermektedir. Elektrik alanı, elektriksel deplasman ve elektriksel potansiyel fonksiyonu için de,

$$E_i(r, \theta, z, t) = E_i(r) \cdot e^{jn\theta} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

$$D_i(r, \theta, z, t) = D_i(r) \cdot e^{jn\theta} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

$$\varphi_i(r, \theta, z, t) = \varphi_i(r) \cdot e^{jn\theta} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

bağıntıları kullanılmıştır. Denklem (3.2) de verilen vektöre, piezoelektrik etkinin gözönüne alınmasıyla, iki yeni değişken daha eklenerek değişken sayısı sekize çıkmıştır. Bu durumdaki vektör

$$\boldsymbol{\tau}_p = [T_1 \quad T_5 \quad T_6 \quad D_r \quad u_r \quad u_\theta \quad u_z \quad \varphi]^t \quad (4.5)$$

olacaktır. Bu vektörde görünen elektriksel büyüklükler sınır koşullarında görülen büyüklüklerdir. Burada da, (4.5)de gösterilen durum vektörünün,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_p}{dr} = \mathbf{A}_p(r) \boldsymbol{\tau}_p(r) \quad (4.6)$$

biçiminde birinci dereceden bir diferansiyel denklem sistemini sağladığı gösterilmek istenmektedir. (4.1) denklemleri ile verilen bünye denklemleri ve Newton'un hareket denklemi, dördüncü denklem olarak (2.5) denklemi ele alınacaktır. (3.4) denkleminde radyal gerilme bileşenleri de yerdeğştirmeler cinsinden ifade edilmektedir; ancak elektriksel büyüklükler görülmemektedir. Yeni durumda (3.4) denklemleri

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \\ c_{12} & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & jnc_{12} & 0 \\ jnc_{66} & -c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & jnc_{11} & 0 \\ c_{13} & jnc_{13} & 0 \\ 0 & 0 & jnc_{44} \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -j\beta c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -j\beta c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\beta c_{13} \\ 0 & 0 & -j\beta c_{33} \\ 0 & j\beta c_{44} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilir. (4.1.b) denkleminin açık ifadesi

$$\begin{bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} E_r \\ \epsilon_{11} E_\theta \\ \epsilon_{33} E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jne_{15} \\ e_{31} & jne_{31} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -j\beta e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & -j\beta e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -j\beta e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

biçiminde yazılabilir. Newton'un hareket denklemi ve (2.5) denklemi bir arada birinci grup denklemleri oluşturur ve bu denklemler,

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ \frac{D_r}{D_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & j\frac{n}{r} & -j\beta & 0 \\ 0 & \frac{2}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ \frac{D_r}{D_r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 \rho u_r \\ \omega^2 \rho u_\theta \\ \omega^2 \rho u_z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -j\frac{n}{r} & 0 & j\beta & 0 & 0 \\ 0 & j\beta & -j\frac{n}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\frac{n}{r} & j\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ D_\theta \\ D_z \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerde görülen T_2 , T_3 , T_4 , D_θ , D_z büyüklükleri yerine (4.1.a) ve (4.8) deki değerleri kullanılabilir. Böylece Newton'un hareket denklemi sadece radyal gerilme bileşenleri, yer değiştirmeler, eksenel doğrultudaki elektrik alan bileşeni ve radyal doğrultudaki elektriksel deplasman vektörü bileşeni cinsinden belirlenmiş olur. Elektrik alan bileşeni de, elektriksel potansiyel fonksiyonu ile ifade edilebilir:

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ \frac{D_r}{D_r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -j\frac{n}{r} c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ j\beta c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j\beta e_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & -j\frac{n}{r} & j\beta & 0 \\ 0 & -\frac{2}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ \frac{D_r}{D_r} \end{bmatrix} +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{r}c_{11} & j\frac{n}{r}c_{11} & 0 & 0 \\ -j\frac{n}{r}c_{11} & \frac{n^2}{r}c_{11} & -n\beta c_{13} & -n\beta e_{15} \\ j\beta c_{13} & -n\beta c_{13} & \frac{n^2}{r}c_{44} & \frac{n^2}{r}e_{15} \\ j\beta e_{31} & -n\beta e_{31} & \frac{n^2}{r}e_{15} & -\frac{n^2}{r}\epsilon_{11} \end{array} \right] \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \phi \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \omega^2 \rho & 0 & j\frac{\beta}{r}c_{13} & j\frac{\beta}{r}e_{31} \\ 0 & \omega^2 \rho - \beta^2 c_{44} & \frac{n\beta}{r}c_{13} & \frac{n\beta}{r}e_{31} \\ 0 & \frac{n\beta}{r}c_{44} & \omega^2 \rho - \beta^2 c_{33} & \beta^2 e_{33} \\ 0 & \frac{n\beta}{r}e_{15} & \beta^2 e_{33} & -\beta^2 \epsilon_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \phi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

İkinci grup denklemler de, (4.7) ve (4.8) denklemlerinden çekilir ve düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_6 \\ T_5 \\ D_r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & e_{15} \\ 0 & 0 & e_{15} & -\epsilon_{11} \end{array} \right] \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} u_r \\ u_r \\ u_r \\ \phi \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|c} c_{12} & jnc_{12} & 0 & 0 \\ jnc_{66} & -c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \frac{1}{r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_r \\ u_r \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -j\beta c_{13} & -j\beta e_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -j\beta c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ -j\beta e_{15} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \phi \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Durum vektörünü oluşturan büyüklükler tek bir sütun vektör oluşturacak şekilde iki grup denklem birarada yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} U & Y_1 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_y \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ U_y \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

denklemleri elde edilir. Burada U birim matrisi, 0 da tüm elemanları sıfır olan matrisi göstermektedir. (4.9) denklemleri düzenlenirse

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_y \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & Y_1 Y_2 \\ 0 & Y_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ U_y \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

denklemleri elde edilir. Burada da r'ye göre türevler birinci derecedendir.

T_y ve U_y vektörleri

$$T_y = [T_1 \ T_6 \ T_3 \ D_r]^t$$

$$U_y = [u_r \ u_\theta \ u_z \ \varphi]^t$$

biçimindedir. Gerekli matematiksel işlemler yapılırsa

$$\frac{d\tau_p}{dr} = A_p(r) \tau_p \quad (4.14)$$

denklem sistemi elde edilir.. Bu yapı lineer sistemlerden bilinen durum denklemleri yapısının benzeridir. Elde edilen 8x8 boyutunda $A_p(r)$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{2}{r} \frac{c_{66}}{c_{11}} & a_{12} &= -j \frac{n}{r} & a_{13} &= j\beta \\ a_{14} &= 0 & a_{15} &= \frac{1}{r^2} b - \rho \omega^2 & a_{16} &= j \frac{n}{r^2} b \\ a_{17} &= -2j \frac{\beta}{r} c_{13} \frac{c_{66}}{c_{11}} & a_{18} &= -2j \frac{\beta}{r} e_{31} \frac{c_{66}}{c_{11}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -j \frac{n}{r} \frac{c_{12}}{c_{11}} & a_{22} &= -\frac{2}{r} & a_{23} &= a_{24} = 0 \\
a_{25} &= -j \frac{n}{r^2} b & a_{26} &= \frac{n^2}{r^2} b + \beta^2 c_{44} - \rho \omega^2 & a_{27} &= -\frac{n\beta}{r} \left(c_{44} + c_{13} \frac{2c_{66}}{c_{11}} \right) \\
a_{28} &= -\frac{n\beta}{r} \left(e_{15} + e_{31} \frac{2c_{66}}{c_{11}} \right), \\
a_{31} &= j\beta \frac{c_{13}}{c_{11}} & a_{32} &= a_{34} = 0 & a_{33} &= -\frac{1}{r} & a_{35} &= -a_{17} & a_{36} &= a_{27} \\
a_{37} &= \frac{n^2}{r^2} c_{44} + \beta^2 \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - \rho \omega^2 & a_{38} &= \beta^2 \left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right), \\
a_{41} &= j\beta \frac{e_{31}}{c_{11}} & a_{42} &= a_{43} = 0 & a_{44} &= -\frac{1}{r} & a_{45} &= j \frac{\beta}{r} \frac{2c_{66}e_{32}}{c_{11}} \\
a_{47} &= \frac{n^2}{r^2} e_{15} + a_{38} & a_{48} &= -\frac{n^2}{r^2} \epsilon_{11} - \beta^2 \left(\epsilon_{33} + \frac{e_{31}^2}{c_{11}} \right), \\
a_{51} &= \frac{1}{c_{11}} & a_{52} &= 0 & a_{53} &= a_{54} = 0 & a_{55} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{1}{r} & a_{56} &= a_{21} \\
a_{57} &= a_{31} & a_{58} &= a_{41}, \\
a_{61} &= 0 & a_{62} &= \frac{1}{c_{66}} & a_{63} &= a_{64} = 0 & a_{65} &= a_{12} & a_{66} &= -a_{33} \\
a_{67} &= a_{68} = 0, \\
a_{71} &= a_{72} = a_{76} = a_{77} = a_{78} = 0 & a_{73} &= \frac{\epsilon_{11}}{\bar{a}} & a_{74} &= \frac{e_{15}}{\bar{a}} & a_{74} &= j\beta \\
a_{81} &= a_{82} = a_{85} = a_{86} = a_{87} = a_{88} = 0 & a_{83} &= a_{74} & a_{84} &= -\frac{c_{44}}{\bar{a}},
\end{aligned}$$

ve

$$b = \frac{2c_{66}}{c_{11}}(c_{11} + c_{12}), \quad \bar{a} = e_{15}^2 + \epsilon_{11}c_{44}$$

Böylece piezoelektrik etkinin de gözönüne alındığı heksagonal akustik fiberin dalga yayılımına ilişkin denklemler birinci dereceden diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilmektedir.

4.3 MOD ANALİZİ

Bu yöntem kullanılarak elde edilen (4.14) denklemleri $n=0$ için iki ayrı denklem sistemine ayrılmaktadır. Böylece bu yöntemin sağladığı olanakla sadece torsiyonel ya da radyal-eksenel modların analizleri elde edilmek isteniyorsa tüm denklemleri çözmeye gerek kalmadan $n=0$ için $A_p(r)$ matrisini ayırtırmak yeterli olacaktır. Buradan torsiyonel ya da radyal-eksenel modlara ilişkin denklemler çekilebilir. Gerçekten de $A_p(r)$ matrisi $n=0$ için iki ayrı matrisin bileşiminden oluşmaktadır. (4.14) denklemleri,

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} \tau_{p1}(r) \\ \tau_{p2}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{p1}(r) & 0 \\ 0 & A_{p2}(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{p1}(r) \\ \tau_{p2}(r) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

haline gelir. Burada torsiyonel modları veren bileşenlerin oluşturduğu vektör,

$$\tau_{p1} = [T_6 \quad u_0]^t$$

radyal-eksenel modları veren bileşenlerin oluşturduğu vektör,

$$\tau_{p2} = [T_1 \quad T_5 \quad D_r \quad u_r \quad u_z \quad \phi]^t$$

biçimindedir. Bu vektörlerden de görüldüğü gibi torsiyonel modlar için denklemler piezoelektrik olmayan durum ile aynıdır:

$$\frac{d}{dr} \begin{bmatrix} T_6 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r}qc_{66} & q^2c_{66} \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_6 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Piezoelektrik etki $n=0$ için sadece radyal aksenal modları etkilemektedir. Radyal aksenal modlara ilişkin denklemler ,

$$\frac{d\tau_{p2}}{dr} = A_{p2} \tau_{p2} \quad (4.17)$$

$$A_{p2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{17} & a_{18} \\ a_{31} & a_{33} & 0 & a_{35} & \beta^2(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}) - \rho\omega^2 & \beta^2(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}}e_{31}) \\ a_{41} & 0 & a_{44} & a_{45} & \beta^2(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}}e_{31}) & \beta^2(e_{33} + \frac{e_{31}^2}{c_{11}}) \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{57} & a_{58} \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

biçimindedir. Burada, A_{p2} matrisinde görülen a_{ij} 'ler, A_p matrisinin elemanlarıdır.

4.4 GENEL ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI

Piezoelektrik etkinin gözönüne alındığı durumda genel halde mod analizi yapmak için (4.14) denklem sistemini çözmek gerekir. Bu denklem sisteminin genel çözümü olarak ,

$$\tau_p(r) = X_p(r)C_p \quad (4.19)$$

alınmıştır. Burada C_p keyfi, sıfırdan farklı sabit sütun vektörünü göstermektedir. $X_p(r)$ de 8×8 boyutunda temel matrisi göstermektedir. Bu temel matris $X_p(r)$ 'yi elde etmek için üçüncü bölümdekine benzer biçimde

$$\tau_p(r) = W_p(r)C_n = (\bar{W}_1 \frac{1}{r^2} + \bar{W}_2 \frac{1}{r} + \bar{W}_3)C_n \quad (4.20)$$

ifadesi kullanılır. Bu ifadedeki $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ ve $\bar{W}_3$ 'ler 8×2 boyutunda katsayı matrisleridir. C_n de (3.16)'da verildiği gibi Bessel fonksiyonlarından oluşmuş sütun vektördür. Burada $\tau_p(r)$ 'nin (4.20) daki ifadesi (4.14)'de yerine konulursa denklemler,

$$\begin{aligned} & (-2\bar{W}_1 \frac{1}{r^3} - \bar{W}_2 \frac{1}{r^2} + \bar{W}_1 K \frac{1}{r^2} + \bar{W}_2 K \frac{1}{r} + \bar{W}_3 K - \frac{1}{r^2} A_p \bar{W}_1 \\ & - \frac{1}{r} A_p \bar{W}_2 - A_p \bar{W}_3)C_n = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

haline gelir. Buradaki W_1, W_2, W_3

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{21} & \bar{W}_{22} \\ \bar{W}_{31} & \bar{W}_{32} \\ \bar{W}_{41} & \bar{W}_{42} \\ \bar{W}_{51} & \bar{W}_{52} \\ \bar{W}_{61} & \bar{W}_{62} \\ \bar{W}_{71} & \bar{W}_{72} \\ \bar{W}_{81} & \bar{W}_{82} \end{bmatrix}, \bar{W}_2 = \begin{bmatrix} \bar{W}'_{11} & \bar{W}'_{12} \\ \bar{W}'_{21} & \bar{W}'_{22} \\ \bar{W}'_{31} & \bar{W}'_{32} \\ \bar{W}'_{41} & \bar{W}'_{42} \\ \bar{W}'_{51} & \bar{W}'_{52} \\ \bar{W}'_{61} & \bar{W}'_{62} \\ \bar{W}'_{71} & \bar{W}'_{72} \\ \bar{W}'_{81} & \bar{W}'_{82} \end{bmatrix}, \bar{W}_3 = \begin{bmatrix} \bar{W}''_{11} & \bar{W}''_{12} \\ \bar{W}''_{21} & \bar{W}''_{22} \\ \bar{W}''_{31} & \bar{W}''_{32} \\ \bar{W}''_{41} & \bar{W}''_{42} \\ \bar{W}''_{51} & \bar{W}''_{52} \\ \bar{W}''_{61} & \bar{W}''_{62} \\ \bar{W}''_{71} & \bar{W}''_{72} \\ \bar{W}''_{81} & \bar{W}''_{82} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

şeklinde dir. K matrisi ise, (3.18)'de verildiği gibidir. (4.21) denklemi

$\frac{1}{r^4}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$ ve sadece katsayılardan oluşacak biçimde düzenlenirse

$$\left(D_{p0} \frac{1}{r^4} + D_{p1} \frac{1}{r^3} + D_{p2} \frac{1}{r^2} + D_{p3} \frac{1}{r} + D_{p4} \right) C = 0 \quad (4.23)$$

haline gelir. Burada D_{pi} matrisleri,

$$D_{p0} = -A'_{p1} \bar{W}_1,$$

$$D_{p1} = -2\bar{W}_1 - A'_{p2} \bar{W}_1 - A'_{p1} \bar{W}_2 + \bar{W}_1 K_1,$$

$$D_{p2} = -\bar{W}_2 + \bar{W}_1 K_2 - A'_{p3} \bar{W}_1 + \bar{W}_2 K_1 - A'_{p2} \bar{W}_2 - A'_{p1} \bar{W}_3,$$

$$D_{p3} = \bar{W}_3 K_2 - A'_{p3} \bar{W}_2 + \bar{W}_3 K_1 - A'_{p2} \bar{W}_3,$$

$$D_{p4} = \bar{W}_3 K_2 - A'_{p3} \bar{W}_3$$

biçimindedir. Burada görülen A'_{pi} 'ler $A_p(r)$ matrisinin

$$A_p(r) = \frac{1}{r^2} A'_{p1} + \frac{1}{r} A'_{p2} + A'_{p3}$$

şeklinde ayrıştırılması ile elde edilmişlerdir. Benzer biçimde K matrisi de ,

$$K = \frac{1}{r} K_1 + K_2$$

biçiminde ayrıştırılmıştır. Böylece D_{pi} matrisleri r 'den bağımsız katsayı matrislerine dönüşmüştür. Bu denklemlerin sağlanabilmesi için her bir D_{pi} matrisinin elemanlarının sıfır olması gerekmektedir. Bu koşulun uygulanmasıyla lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının çözümünden temel matris ,

$$X_p(r) = \begin{bmatrix} x_1(p_1 r) & y_1(p_1 r) & x_2(p_2 r) & y_2(p_2 r) & x_3(p_3 r) & y_3(p_3 r) & z_1(qr) & z_2(qr) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

olarak hesaplanmıştır. Burada

$$x_i(p_i r) = W_{p_i} \begin{bmatrix} J_{n-1}(p_i r) \\ J_n(p_i r) \end{bmatrix} \quad (4.25.a)$$

$$y_i(p_i r) = W_{p_i} \begin{bmatrix} Y_{n-1}(p_i r) \\ Y_n(p_i r) \end{bmatrix} \quad (4.25.b)$$

$$z_1(qr) = W_q \begin{bmatrix} J_{n-1}(qr) \\ J_n(qr) \end{bmatrix} \quad (4.25.c)$$

$$z_2(qr) = W_q \begin{bmatrix} Y_{n-1}(qr) \\ Y_n(qr) \end{bmatrix} \quad (4.25.d)$$

olup, bu bağıntılarda görünen katsayı matrisleri

$$W_{p_i} = \begin{bmatrix} -2c_{66} \frac{p_i}{r} & 2 \frac{n}{r^2} c_{66} (n+1) + \overline{w}_{12}'' \\ -2jnc_{66} \frac{p_i}{r} & -2j \frac{n}{r^2} c_{66} (n+1) \\ p_i c_{44} (\lambda_i - jn\beta) + p_i e_{15} v_i & \frac{1}{r} [c_{44} (jn\beta - n\lambda_i) - ne_{15} v_i] \\ p_i e_{15} (\lambda_i - jn\beta) + p_i \varepsilon_{11} v_i & \frac{1}{r} [c_{15} (jn\beta - n\lambda_i) - n\varepsilon_{11} v_i] \\ p_i & -\frac{n}{r} \\ 0 & j \frac{n}{r} \\ 0 & \lambda_i \\ 0 & v_i \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$W_q = \begin{bmatrix} 2jn\frac{q}{r}c_{66} & -\frac{2}{r^2}jn(n+1)c_{66} \\ 2\frac{q}{r}c_{66} & -\frac{2}{r^2}n(n+1)c_{66} + q^2c_{66} \\ 0 & \frac{\beta n}{r}c_{44} \\ 0 & \frac{\beta n}{r}e_{15} \\ 0 & j\frac{n}{r} \\ -q & \frac{n}{r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

biçiminde elde edilmişlerdir. Burada

$$q^2 = \frac{\rho\omega^2 - \beta^2c_{44}}{c_{66}} \quad (4.28)$$

olup, p_i 'ler ise $p_i^2 = \alpha$ olmak üzere

$$\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha + b_3 = 0 \quad (4.29)$$

denklemini sağlayan köklerden elde edilmektedir. Burada görülen b_i katsayıları

$$b_1 = -(d_{11} + d_{22} + d_{33})$$

$$b_2 = d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32} + d_{11}d_{33} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} - d_{13}d_{31}$$

$$b_3 = d_{11}d_{23}d_{32} - d_{11}d_{22}d_{33} + d_{21}d_{12}d_{33} - d_{21}d_{13}d_{32} - d_{31}d_{12}d_{23} + d_{31}d_{22}d_{13}$$

d_{ij} 'ler ise,

$$d_{11} = \beta^2 \frac{c_{13}}{c_{11}} + \frac{\rho \omega^2}{c_{11}}$$

$$d_{12} = -j\beta^3 \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) + j\beta \rho \omega^2 \left(1 + \frac{c_{13}}{c_{11}} \right)$$

$$d_{13} = -j\beta^3 \left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right) + j\beta \rho \omega^2 \frac{e_{31}}{c_{11}}$$

$$d_{21} = -j\beta \left(\frac{\epsilon_{11} c_{13}}{\bar{a} c_{11}} + \frac{e_{15} e_{31}}{\bar{a} c_{11}} + \frac{1}{c_{11}} \right)$$

$$d_{22} = \beta^2 \left(\frac{c_{13}}{c_{11}} - \frac{e_{15}}{\bar{a}} \left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right) - \frac{\epsilon_{11}}{\bar{a}} \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) \right) + \rho \omega^2 \frac{\epsilon_{11}}{\bar{a}}$$

$$d_{23} = \beta^2 \left(\frac{e_{31}}{c_{11}} + \frac{e_{15}}{\bar{a}} \left(e_{33} + \frac{e_{31}^2}{c_{11}} \right) - \frac{\epsilon_{11}}{\bar{a}} \left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right) \right)$$

$$d_{31} = j\beta \left(\frac{e_{31} c_{44}}{c_{11} \bar{a}} - \frac{e_{15} c_{13}}{c_{11} \bar{a}} \right)$$

$$d_{32} = \beta^2 \left(\left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right) \frac{c_{44}}{\bar{a}} - \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) \frac{e_{15}}{\bar{a}} \right) + \rho \omega^2 \frac{e_{15}}{\bar{a}}$$

$$d_{33} = -\beta^2 \left(\left(e_{33} - \frac{c_{13}}{c_{11}} e_{31} \right) \frac{e_{15}}{\bar{a}} + \left(e_{33} - \frac{e_{13}^2}{c_{11}} \right) \frac{c_{44}}{\bar{a}} \right)$$

olarak elde edilmektedir. Buradan elde edilen $p_i^2 = \alpha$ aynı zamanda

$$p_i^2 = -j \frac{\beta \lambda_i (c_{13} + c_{44}) + \beta v_i (e_{15} + e_{31}) + j(\rho \omega^2 - \beta^2 c_{44})}{c_{11}} \quad i=1,2,3 \quad (4.30)$$

bağıntısını da sağlamaktadır. Burada görülen λ_i ve v_i arasında

$$v_i = \frac{d_{31} d_{12} + d_{32} (p_i^2 - d_{11})}{(p_i^2 - d_{11})(p_i^2 - d_{33}) - d_{13} d_{31}} \lambda_i = \frac{d_{31} (p_i^2 - d_{22}) + d_{21} d_{32}}{(p_i^2 - d_{33}) d_{21} + d_{31} d_{23}} \lambda_i; \quad i=1,2,3 \quad (4.31)$$

biçiminde bir ilişki vardır. W_{pi} 'de görülen

$$\bar{w}_{12}'' = \rho\omega^2 - \beta^2 c_{44} - j\beta c_{44}\lambda_i - j\beta e_{15}v_i \quad (4.32)$$

olarak bulunmaktadır.Çözümlere ilişkin ifadelerde görülen Bessel fonksiyonlarının olduğu temel matris, çekirdeğe ilişkin çözümler için yazılmıştır. J_k ve Y_k yerine sırasıyla $H_k^{(2)}$ ve $H_k^{(1)}$ Hankel fonksiyonları konulacak olursa kılıf bölgesi için geçerli olan temel matris $X_{p2}(r)$ elde edilir. Ancak kılıf bölgesinde kılıf kalınlığı sonsuz olduğundan kılıf bölgesindeki çözümlerde $H_k^{(1)}$ ve $r \rightarrow 0$ giderken Y_k fonksiyonu sonsuza gittiğinden çekirdek bölgesindeki çözümler için bu fonksiyon göz önüne alınmamıştır. Çözümler sadece, argümanların kompleks değerli olduğu düşünülerek J_k ve $H_k^{(2)}$ 'ye bağlı olarak yazılmıştır.

$X_{pi}(r)$ matrislerinde $n=0$ konularak, daha önce torsiyonel ve radyal-eksenel modlar için elde edilen $A_{p1}(r)$ ve $A_{p2}(r)$ matrisleri için elde edilecek olan temel matrisler kolaylıkla yazılabilir.

Çözüm ifadesinin bulunmasından sonra, fibere ilişkin dağılma bağıntısı elde edilebilir. Sonsuz uzun kılıflı fiberin,Şekil 2.1'de gösterildiği gibi, çekirdek kısmının yarıçapı a olarak kabul edilmiştir.Yine kılıf bölgesinin radyal doğrultuda sonsuza uzandığı varsayılınsın. Buna göre, çekirdek bölgesine ait temel matriste sadece birinci tür Bessel fonksiyonları bulunacaktır. Enerji sakınımı nedeniyle Y_k fonksiyonları kullanılamazlar. Bundan dolayı (4.24) eşitliğinde C_p vektörünün ikinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci satırları sıfır olmalıdır.

$$\tau_{p_{\text{çekirdek}}}(r) = \begin{bmatrix} x'_1(r) & x'_2(r) & x'_3(r) & z'_1(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_3 \\ C'_5 \\ C'_7 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

(4.33) çözüm ifadesinde görülen x_i ve z_1 'in üst indislerindeki tek çizgi çekirdek bölgesine ait olduklarını göstermektedir.

Kılıf bölgesinde ise benzer şekilde sadece giden dalga durumu göz önüne alındığından $H_k^{(2)}$ fonksiyonları kullanılacaktır. Yine $X_2(r)$ matrisinin ikinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci sütunları sıfır olmalıdır. Bu durumda

$$\tau_{p_{\text{kılıf}}}(r) = \begin{bmatrix} x_1''(r) & x_2''(r) & x_3''(r) & z_1''(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'' \\ C_3'' \\ C_5'' \\ C_7'' \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

kılıf bölgesindeki çözümdür. Burada da x_i ve z_1 'in üst indislerindeki çift çizgi, çözümün kılıf bölgesine ait olduğunu göstermektedir.

2.3 bölümünde söylenen sınır koşulları burada

$$\tau_{p_{\text{çekirdek}}}(a) = \tau_{p_{\text{kılıf}}}(a) \quad (4.35)$$

olarak yazılabilir. Bu sınır koşulları kullanılacak olursa dağılma bağıntısı

$$\det[M_p(\omega, \beta, a)] = 0 \quad (4.36)$$

olarak elde edilir. Dağılma bağıntısının yazıldığı M matrisi

$$M_p = \begin{bmatrix} x_1'(r) & x_1'(r) & x_2'(r) & z_1'(r) & -x_1''(r) & -x_2''(r) & -x_3''(r) & -z_1''(r) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

biçiminde bulunur.

4.4 SAYISAL HESAPLAMALAR

Piezoelektrik heksagonal akustik fibereilişkin hesaplamaları yapmak için malzeme olarak ZnS seçilmiştir. Malzemeye ilişkin katsayılar ref.[27]'dan alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Bu bölümde çeşitli modlara ilişkin dağılma eğrileri (4.36) eşitliği ile verilen dağılma bağıntısından faydalananarak elde edilmiştir. (4.36) bağıntısında gerçel sayılarla hesaplama yapmak için gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra elde edilen sayısal veriler, eğriler halinde çizdirilmiştir.

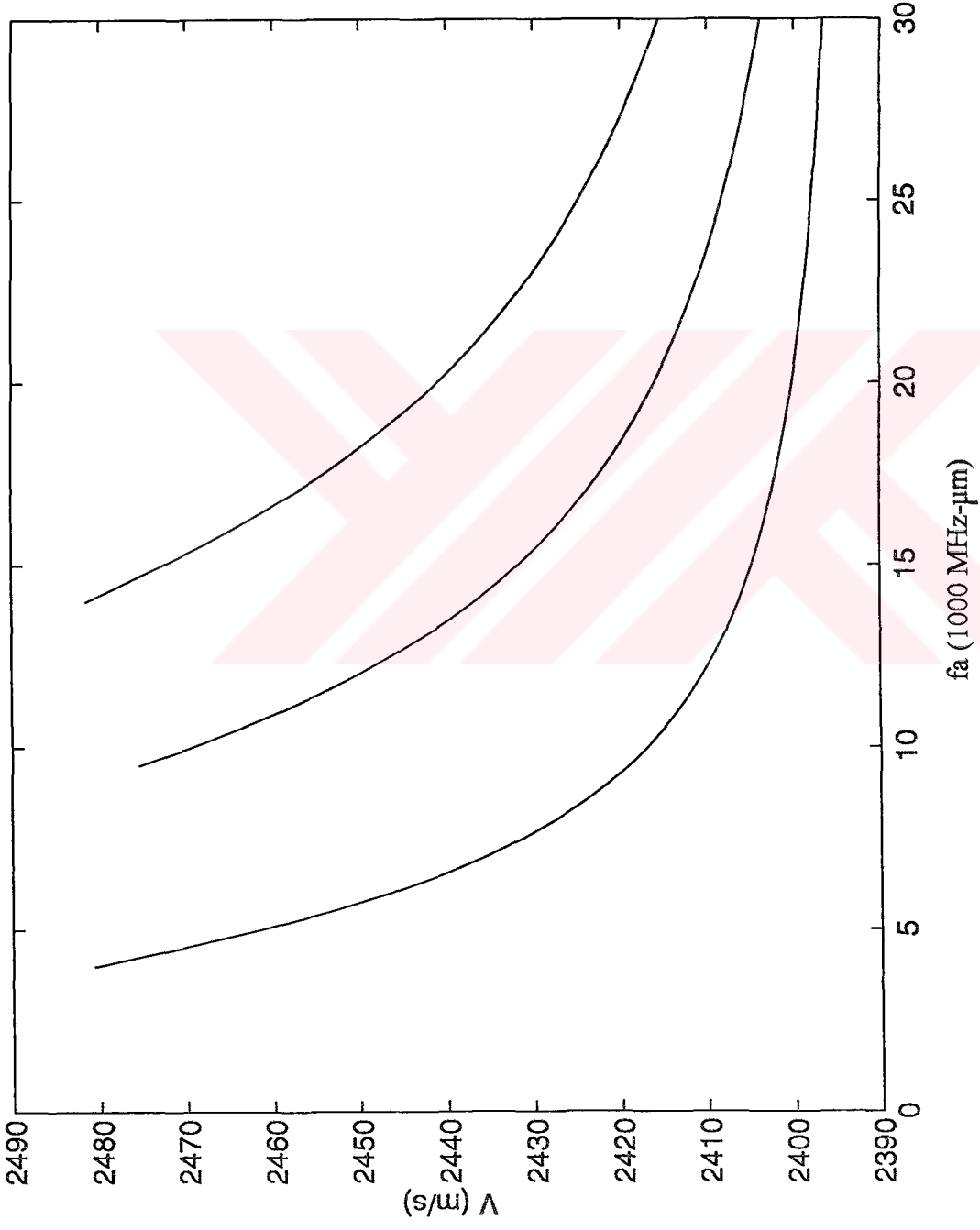
Şekil 4.1 de bu bölümde verilen yöntemle elde edilmiş torsiyonel moda ilişkin dağılma eğrisi görülmektedir. Bu eğri piezoelektrik etki gözönüne alınmadığı durumdaki eğri ile aynıdır. Çünkü torsiyonel mod dağılım bağıntısı piezoelektrik etkiden bağımsızdır.

Şekil 4.2 de bu bölümde verilen yöntemle elde edilmiş Radyal-eksenel moda ilişkin dağılma eğrisi görülmektedir. Bütün bu eğrilerden de görüldüğü gibi yeni verilen yöntemle ile elde edilen eğrilerle ikinci bölümde verilen yöntemle elde edilen eğriler arasında sadece %0.1lik bir fark vardır. Bu bölümde anlatılan yöntem aynı zamanda teorik yönden bir basitlik sağlarken Mod ayrıştırması işini teorik hesaplamaların hepsini yapmaya gerek kalmadan vermektedir.

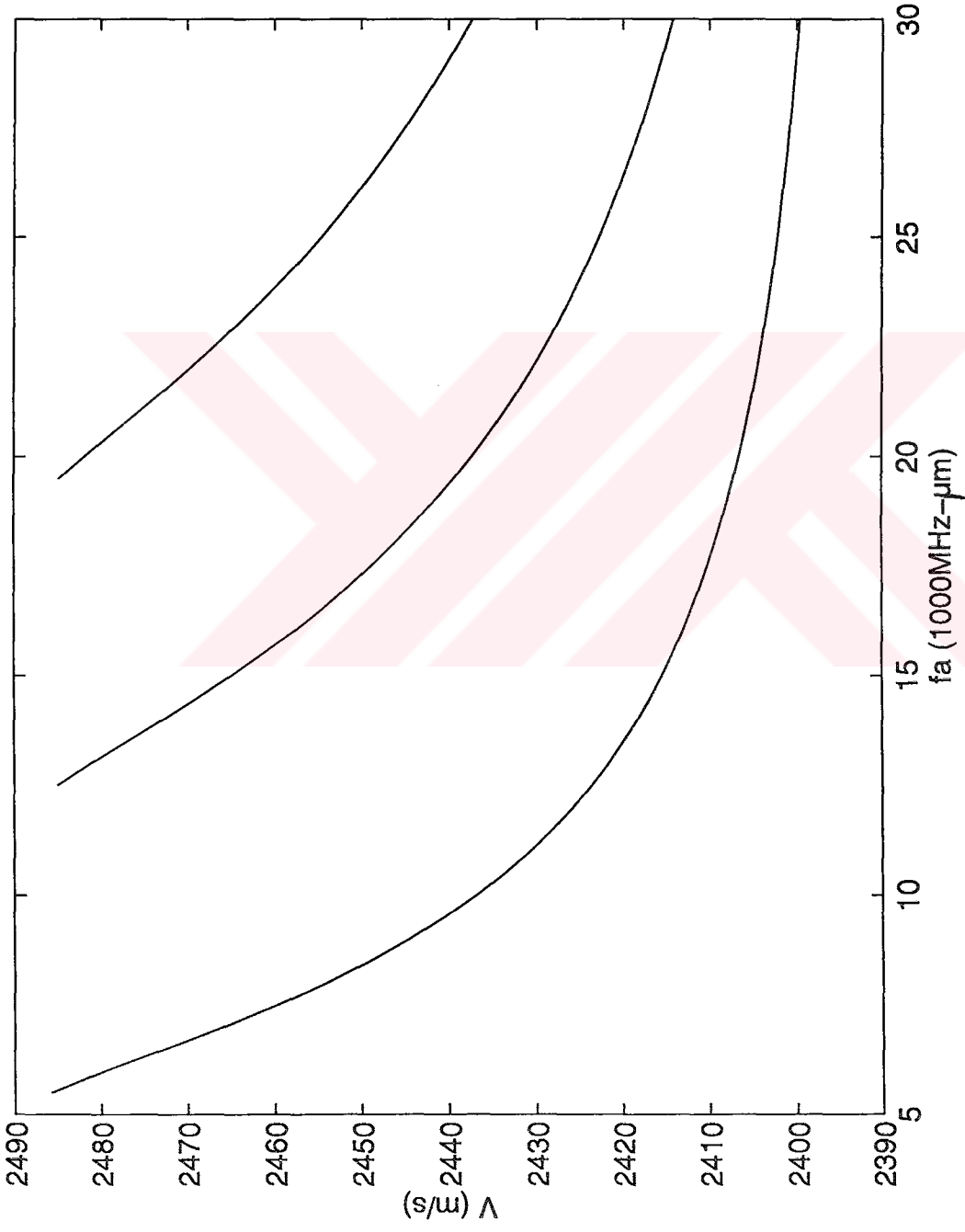
Bu bölümde CdS malzemesi için de sayısal hesaplamalar yapılarak dağılma eğrileri hesaplanmıştır. CdS'in torsiyonel mod dağılma eğrisi, piezoelektrik etki bu modda görülmediğinden bu bölümde çizdirilmemiştir. Çünkü bu eğri zaten Şekil 3.5'te verilmektedir. CdS için radyal eksenel mod dağılma eğrileri Şekil 4.4'te, fleksural tek mod dağılma eğrileri Şekil 4.5'te görülmektedir. Ayrıca Cds için piezoelektrik olan ve olmayan durumlar

için elde edilen eğriler aynı şekil içinde gösterilerek, karşılaştırma olanağı sağlanmıştır. Şekil 4.6'da CdS için piezoelektrik olan ve olmayan durumlardaki radyal aksenal mod dağılma eğrileri , Şekil 4.7'de de fleksural tek mod dağılma eğrileri görülmektedir. Şekil 4.7'de de görüldüğü gibi, bu modda, CdS için alçak frekans değerlerinde faz hızları arasındaki fark açılmaktadır. Bu nedenle CdS için fleksural tek modda faz hızı hesaplanırken piezoelektrik etki hesaba katılmalıdır.

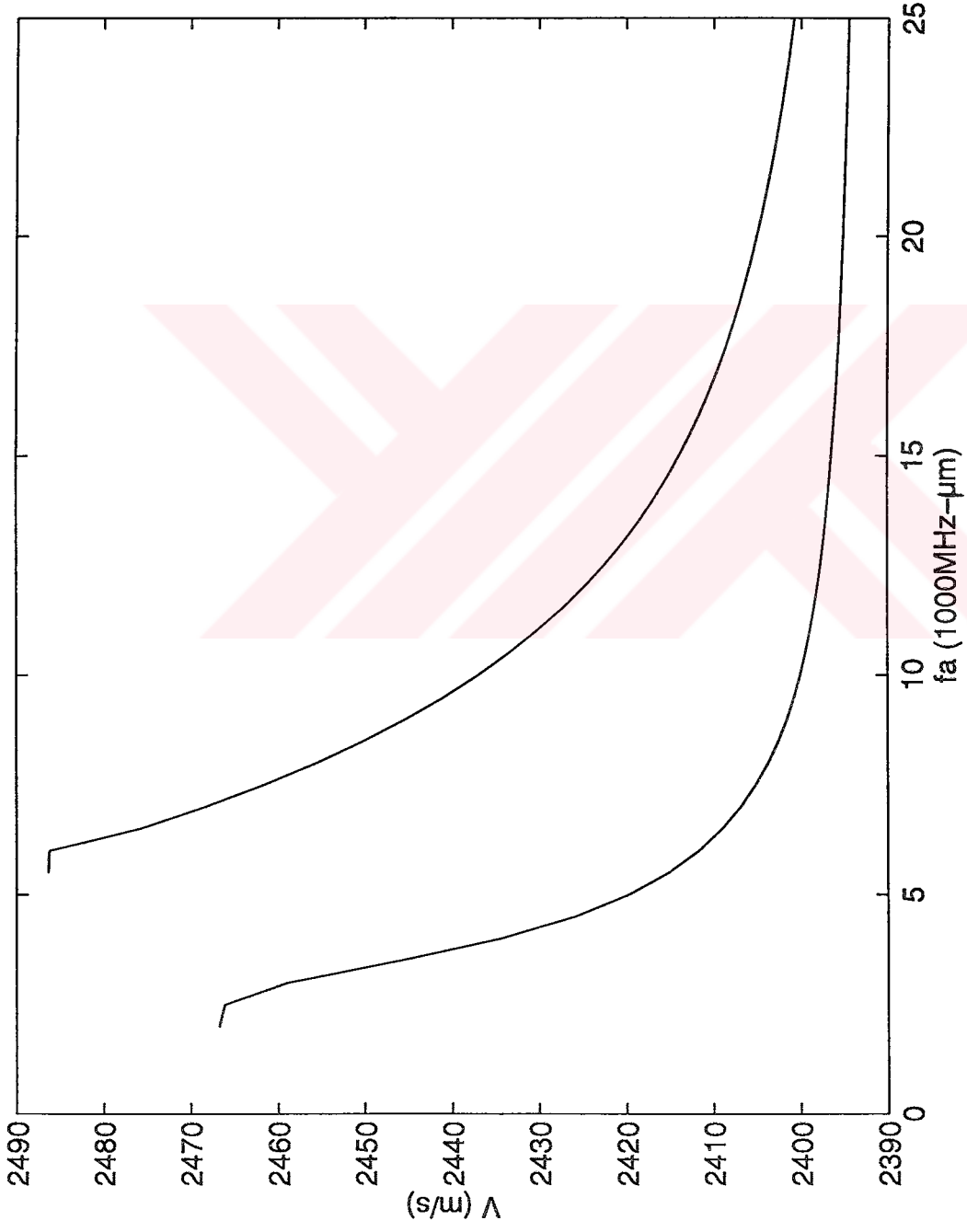




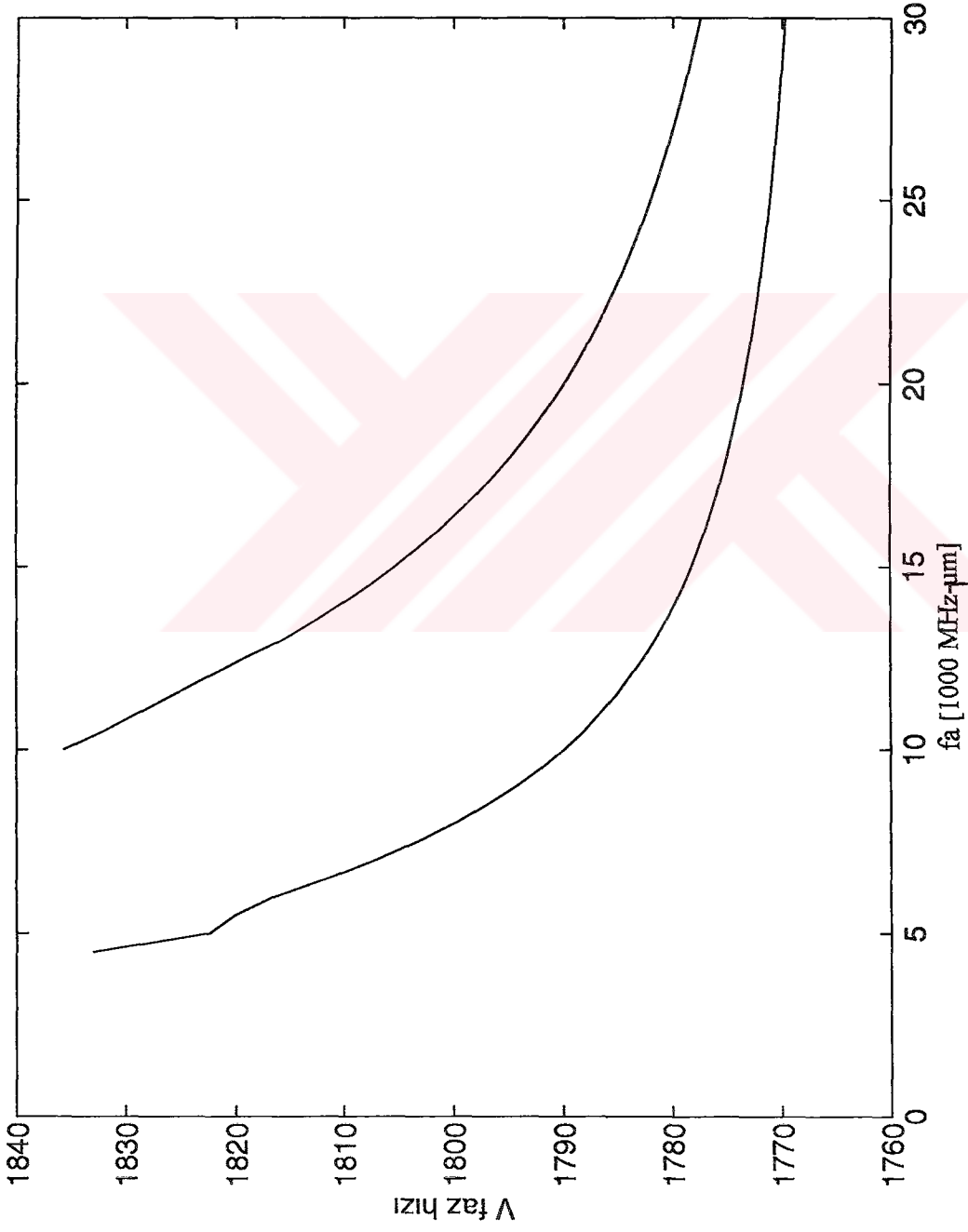
Şekil 4.1 Piezoelektrik kılıflı fiber için elde edilen Torsiyonel mod dağılma eğrileri(ZnS).



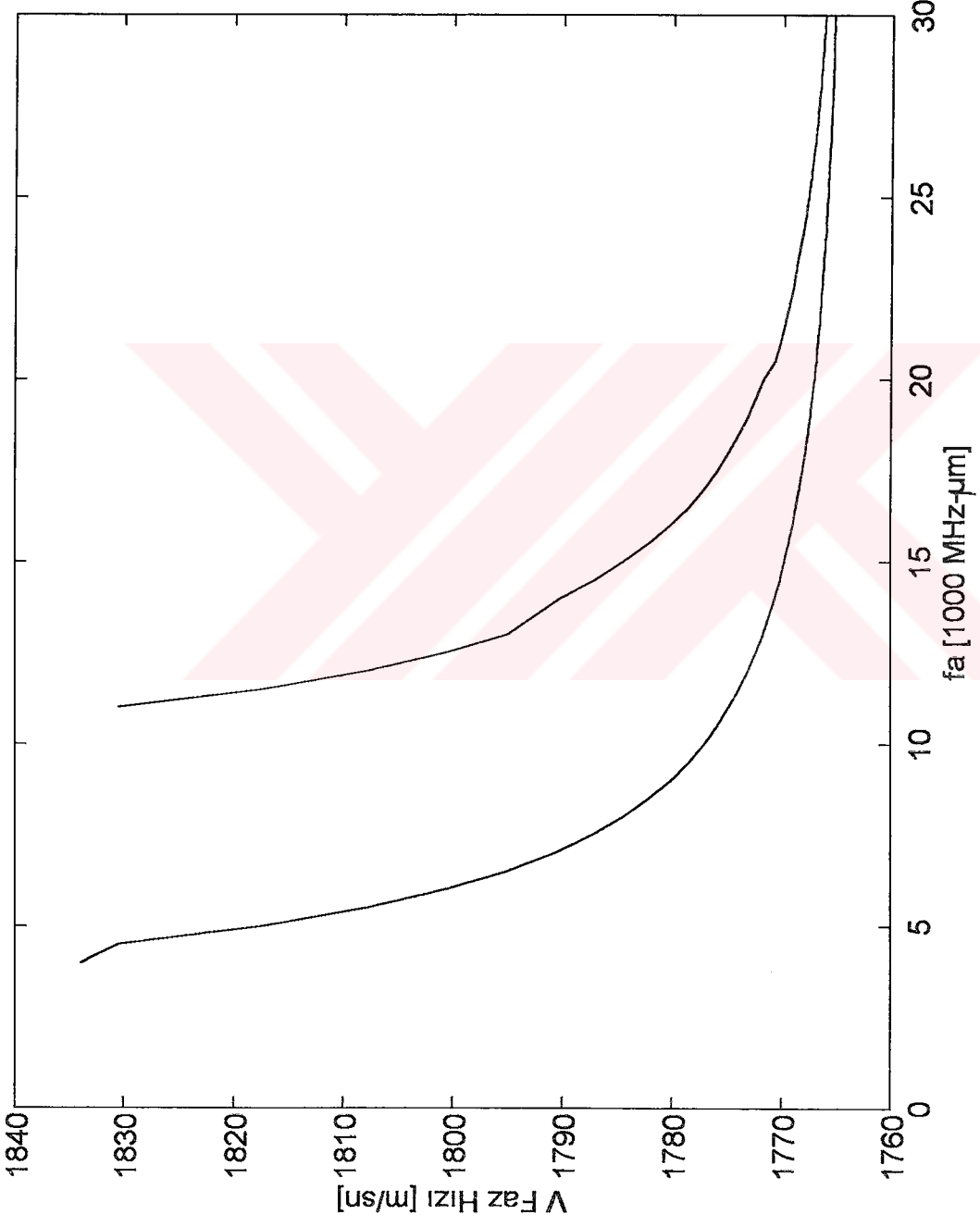
Şekil 4.2 Piezoelektrik heksagonal kılıflı fiber için elde edilen Radyal eksenel mod dağılıma eğrileri (ZnS).



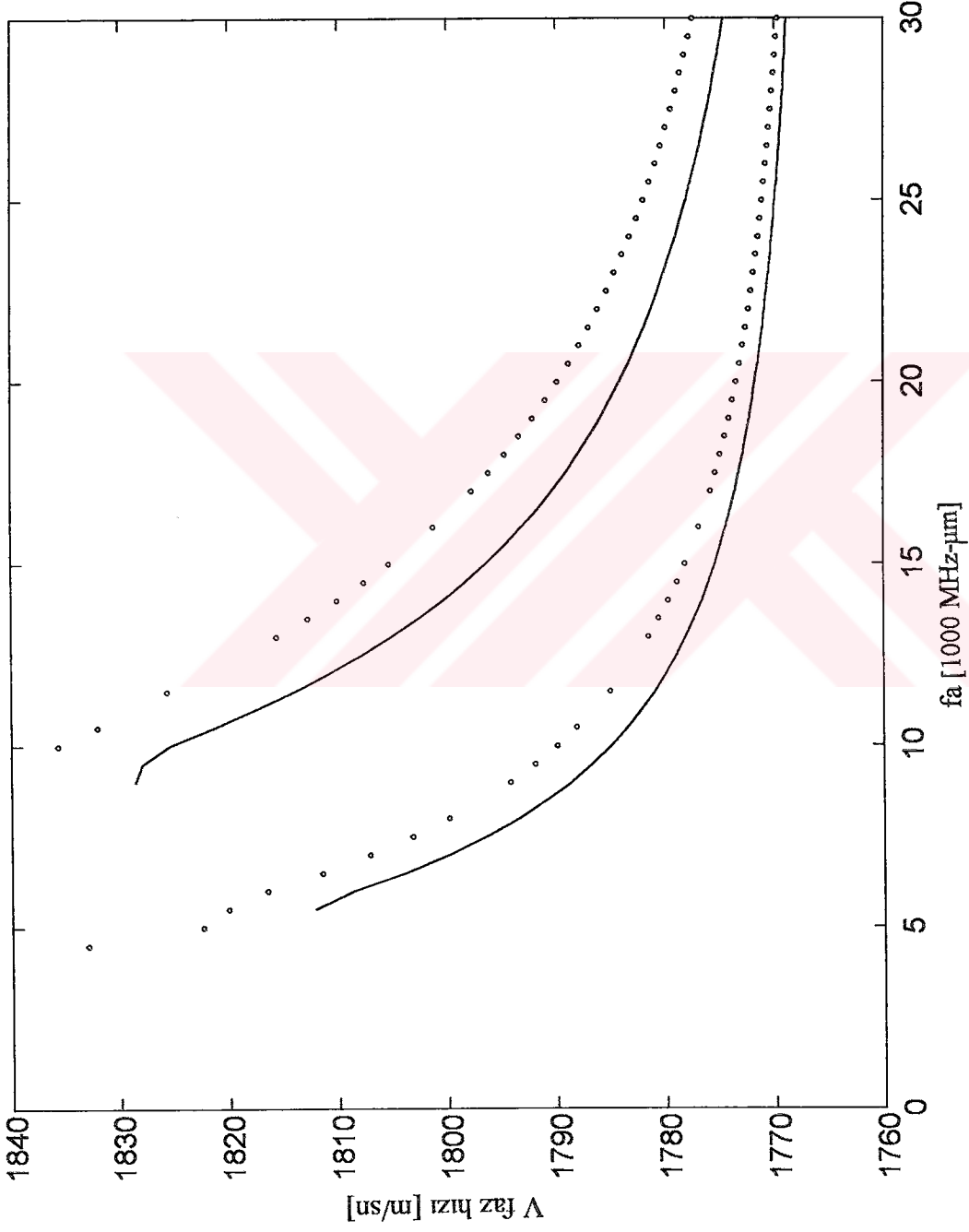
Şekil 4.3. Piezoelektrik heksagonal kılıflı fiber için elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılma eğrileri (ZnS).



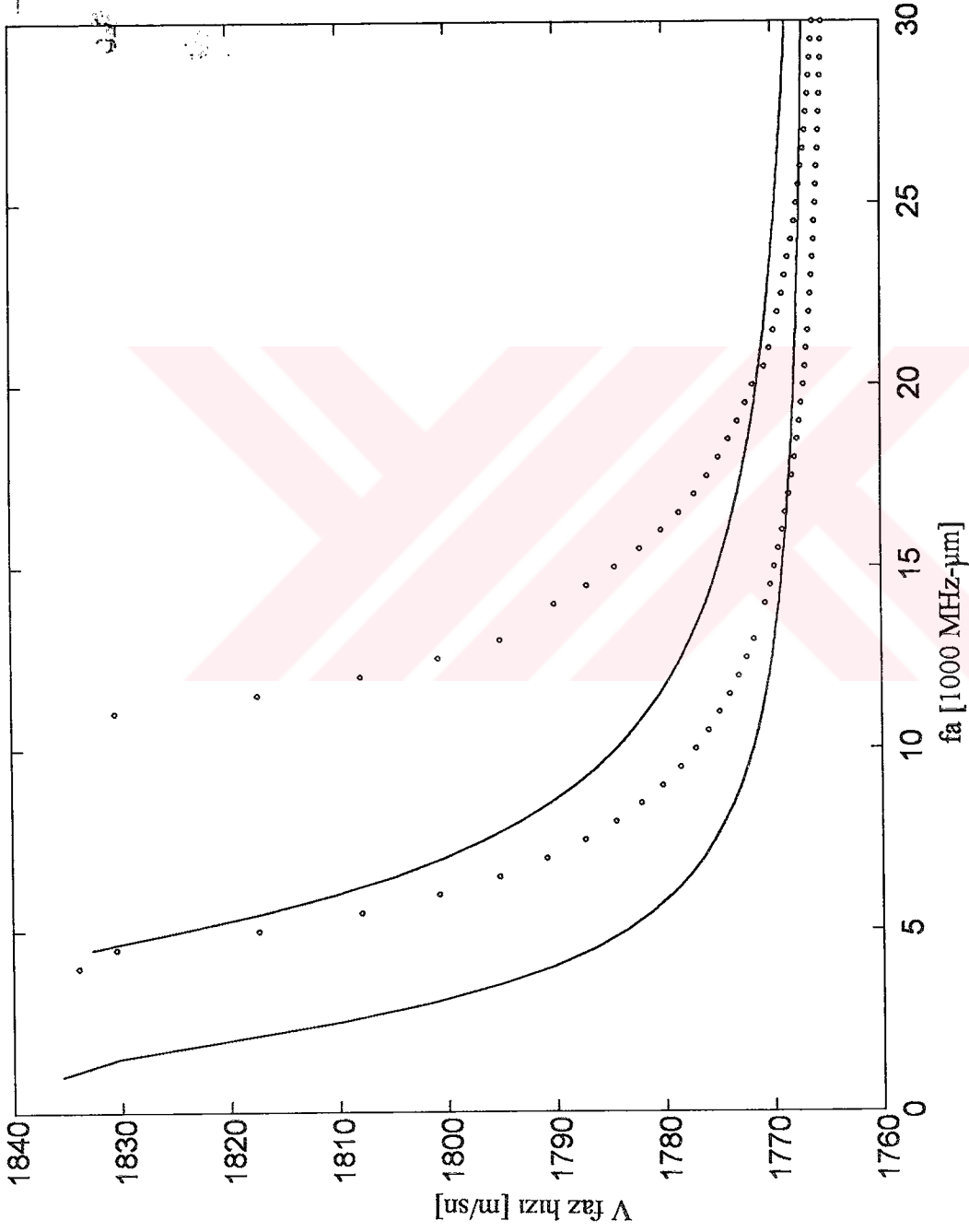
Şekil 4 4 Piezoelektrik heksagonal kılıflı fiber için elde edilen Radyal eksenel mod dağılıma eğrileri (CdS).



Şekil 4.5 Piezoelektrik heksagonal kılıflı fiber için elde edilen F_{1m} Fleksural mod dağılma eğrileri (CdS).



Şekil 4.6 CdS için elde edilen Radyal eksenel R_{0m} mod dağılıma eğrileri . Piezoelektrik etkinin hesaba katılmadığı durumu — ile çizdirilen eğriler, piezoelektrik etkinin hesaba katıldığı durumu ise $\circ \circ \circ \circ$ ile çizdirilen eğriler göstermektedir.



Şekil 4.7 CdS için elde edilen Fleksural F_{1m} mod dağılma eğrileri . Piezoelektrik etkinin hesaba katılmadığı durumu — ile çizdirilen eğriler, piezoelektrik etkinin hesaba katıldığı durumu ise $\circ \circ \circ \circ$ ile çizdirilen eğriler göstermektedir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, heksagonal anizotropiye sahip kılıflı yapıdaki fiberlerin akustik dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Daha önce yapılan çalışmalar karmaşık sayılarla analiz yapmak amacıyla gözden geçirildikten sonra, heksagonal kılıflı yapıdaki akustik fiberin dalga yayılımını incelemek için yeni bir yöntem verilmiştir. Bu incelemeler ayrıca piezoelektrik etkinin de katıldığı durumu içerecek biçimde genişletilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde genel olarak uygulanan ve temeli yer değiştirme bileşenlerini skaler potansiyel fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlamaya dayanan yöntem karmaşık sayılarla hesaplama yapılabilecek şekilde yeniden gözden geçirilmiştir. Çeşitli modlar için dağılma bağıntıları ve çeşitli yaklaşımlar anlatılmıştır. Bu bölümde ayrıca izotropik durumda kılıfsız fiber yapısı için dağılma bağıntıları verilmiştir. Bu bölümün sayısal hesaplama kısmında karmaşık sayılarla analiz yapılarak kılıflı heksagonal anizotropik fiber için torsiyonel mod dağılma eğrileri elde edilmiştir. Kılıflı yapıda heksagonal akustik fiber için gerçel sayılarla çalışılarak çeşitli modlar için literatürde varolan dağılma eğrileri bu tezde yazılan programla yeniden elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde sınır koşullarında görülen büyüklükler olan yer değiştirme ve gerilmelerin diferansiyel denklemlerde değişken olarak görüldüğü yeni bir yöntem verilmiştir. Bu yöntem heksagonal anizotropiye sahip kılıflı fiberlerin dalga yayılımı problemine yeni bir görüş kazandırmıştır. Yöntem problemin çözümünü kolaylaştırmaktadır.

Ayrıca bu yöntem mod ayrışmasını genel dağılma bağıntısının elde edilmesine gerek kalmadan verdiği için $n=0$ durumunda ortaya çıkan torsiyonel ve radyal eksenel modlar diferansiyel denklem aşamasında elde edilmektedir. Sayısal hesaplama bölümünde ikinci bölümde kılıflı heksagonal akustik fiber için elde edilen dağılma eğrileri bu bölümde verilen dağılma bağıntısından faydalanılarak yeniden elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen dağılma eğrileri bir önceki bölümde elde edilen dağılma eğrileri ile beklenildiği gibi aynı biçimde bulunmuştur.

Dördüncü bölümde ise heksagonal anizotropiye sahip kılıflı yapıdaki fiberin akustik dalga yayılımı piezoelektrik etki gözönüne alınarak incelenmiştir. Bu inceleme de yine üçüncü bölümde verilen yöntem kullanılarak yapılmıştır. Belirtilen özelliklere sahip akustik fiber için dağılma bağıntıları ve mod analizleri elde edilmiştir. Sayısal hesaplama bölümünde bu bölümde verilen dağılma bağıntılarına ilişkin dağılma eğrileri elde edilmiştir. Bu dağılma eğrileri de, ikinci bölümde verilen yöntem kullanılarak elde edilen ref. [32]'deki dağılma eğrileri ile %0.1'lik bir farkla, aynı biçimde bulunmuştur.

Bu tezden sonra yapılacak çalışmalar için burada teorisi verilen ve torsiyonel modlar için yapılabilen karmaşık sayılı sayısal hesaplama diğer modlar için elde edilebilir. Üçüncü bölümde geliştirilen yöntem diğer anizotropiler için (kübik, trigonal, vs.) incelenebilir. Bu tez çerçevesinde incelenmemiş olan zayıflayan boyuna modların hem karmaşık sayılarla hem de gerçel sayılarla analizleri yapılabilir. Bu tezde geliştirilen yöntem, çok sayıda içiçe silindirden oluşan yapıların incelemesine kolaylık getirdiğinden, üç ve daha fazla sayıda içiçe geçmiş silindirden oluşan yapılar incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] MORGAN,D.P. Surface-Wave Devices for Signal Processing, Elsevier, (1985)
- [2] KINO,G.S. Acoustic Waves: Devices, Imaging and Signal Processing, Prentice-Hall, (1987)
- [3] MASON,I.M.,ASH,E.E. Acoustic Surface Wave Beam Diffraction on Anisotropic Substrates, Journal Appl. Phys., Vol.42, No.13, pp. 5343-535, (1971)
- [4] GREEN,J.B.,KINO,G.S.,KHURI-YAKUP,B.T. Focused Surface Wave Transducers on Anisotropic Substrates: A Theory Developed for the Waveguided Storage Correlator, Ultrasonic Symposium-69 pp.69-73, (1980)
- [5] WAGERS,R.S.,GOLL,J.E. Dispersion and Multimoding in Monolithic Elastic Convolvers, Ultrasonic Symposium-48, pp.48-52, (1980)
- [6] SCHMIDTH,R.V.,COLDREN,L.A. Thin Film Acoustic Surface Wave guides on Anisotropic Media, IEEE Trans. Sonics Ultra. Vol. SU-22, No.32, pp.115-122, (1975)
- [7] SZABO,T.L.,SLOBODNIK,A.J. The Effect of Acoustic Surface Wave Devices, IEEE Trans. Sonics Ultra. Vol. SU-20, No.3, pp.240-250, (1973)
- [8] GREEN,J.B.,KINO,G.S. SAW Convolvers Using Focused Interdigital T Transducers, IEEE Trans.Sonics Ultra. Vol. 30, No.1, pp. 43-50, (1983)
- [9] ÜÇER,M.,AKÇAKAYA,E. An Analysis of Focused Surface Wave Transducers, IEE Proc.,Vol.137, Pt.6, No.6, pp. 467-469, (1990)
- [10] ÜÇER,M.K.,AKÇAKAYA,E. An Analysis Technique for the Waveguide on the SAW Convolvers, Acta Phsy. Slov. 42, No.33, pp.147-152, (1992)

- [11] BOYD,G.D.,COLDREN,L.A.,THURSTON,R.N., Acoustic Cladded Fiber Delay Lines, IEEE Trans. Sonics. Ultra. Vol. Su-24, pp.246-252, (1977)
- [12] CADY,W.G. Piesoelectricity, McGraw-Hill, (1964)
- [13] MORSE,R.W. Compressional Waves along an Anisotropic Circular Cylinder Having Hexagonal Symmetry, Journal Acous. Soc. Am., Vol. 26, No. 6, pp.1018-1021, (1954)
- [14] EINSRUCH,N.G.,TRUELL,R. Propagation of travelling in a Circular Cylinder Having Hexagonal Elastic Symmetry, Journal Acous. Soc. Am., Vol. 31, No. 6, pp. 691-693, (1959)
- [15] THURSTON,R.N. Torsional Acoustic Modes in a Clad Rod, IEEE Tran.Sonics and Ultra. Vol. SU-23, pp.154-161, (1976)
- [16] WALDRON,R.A. Some Problems in the Theory of Guided Microsonic Waves, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., Vol. MTT-17, pp. 893-904 (1969)
- [17] THURSTON,R.N.,WILSON,L.O. Torsional Waves in a Sapphire Rod at Low Frequencies, IEEE Tran.Sonics and Ultr., Vol SU-24, No.5, pp. 305-312, (1977)
- [18] WILSON,L.O. Wave propagation along a Sapphire rod, Journal Acou. Soc. Am. Vol.61, No. 4, pp. 995-1003, (1977)
- [19] WILSON,L.O.,GATTO,M.A. Torsional Vibrations of a Sapphire rod: A Numerical Description, Journal Acou. Soc. Am.,Vol.61, No.4, pp.1004-1009, (1977)
- [20] WILSON,L.O. Vibrations of a Lithium Niobate Fiber, The Bell System Tech. Journal , Vol.56, No. 8, pp. 1387-1404, (1977)
- [21] THURSTON,R.N Elastic Waves in Rod and Clad Rods, Journal Acou. Soc. Am., Vol. 64, No. 1, pp. 1-37, (1978)
- [22] ELIOT,F.C.,MOTT,G. Elastic Waves Propagation in Circular Cylinder Having Hexagonal Crystal Symmetry, Journal Acou. Soc. Am., Vol. 44,No. 2, pp 423-430, (1968)

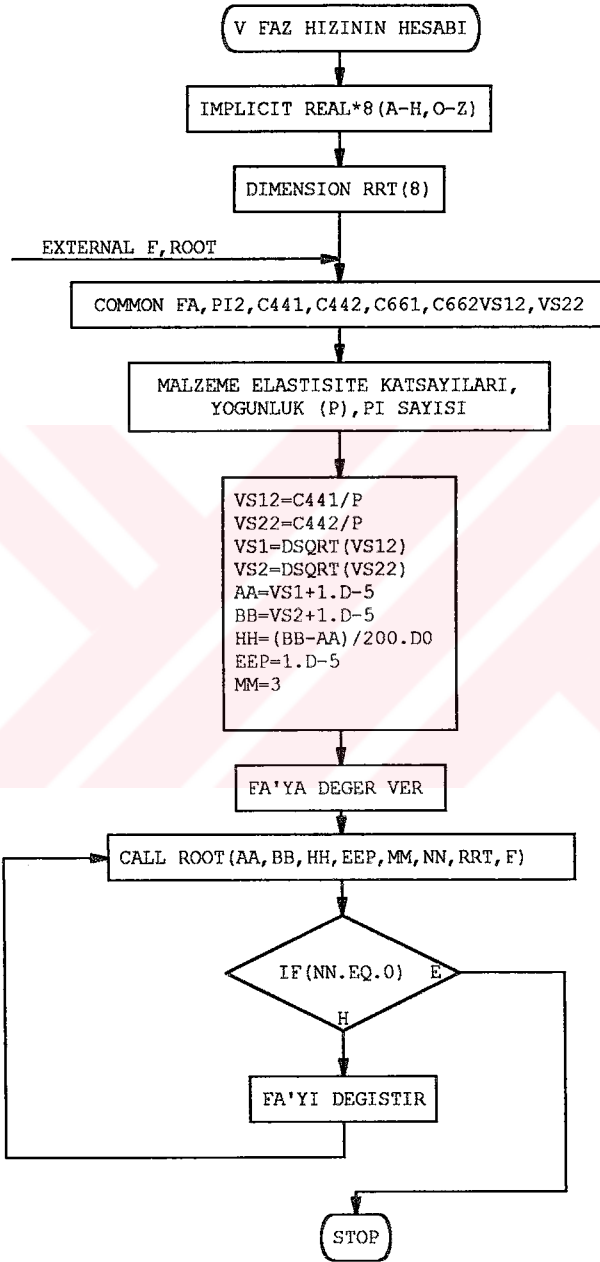
- [23] MIRSKY, I. Wave Propagation in Transversely Isotropic Circular Cylinders Part I: Theory, Journal Acou. Soc. Am., Vol. 37, No.6, pp 1016-1021, (1965)
- [24] DAI, J.D., WINKEL, V., OLIVEIRA, J.E.B., JEN, C.K. Analysis of Weakly Guiding Cladded Acoustic Fibers of Hexagonal Crystal Symmetry, IEEE Tran. Ultr. Ferro. Freq. Cont., Vol. 39, No.6, pp. 722-729, (1992)
- [25] AKÇAKAYA, E., FARNELL, G.W., ADLER, E.L. Dynamic Approach for Finding Effective Elastic and Piezoelectric Constants of Superlattice, Journal Appl. Phys., Vol. 63, No.3, pp. 1009-1012, (1990)
- [26] FAHMY, A.H., ADLER, E.L. Acousto electric Surface-Waves in Multilayers, A Matrix Approach, Proceeding IEE, Vol 122, 470, pp. 271-274, (1974)
- [27] AULD, B.A. Acoustic Fields and Waves in Solids, R.E.Krieger, Florida, (1990)
- [28] ÜÇER, M., AKÇAKAYA, E. State Variable Approach for the Cladded Acoustic Fibers, ECCTD Eropean Conference on Circuit Theory and Design, İstanbul, Türkiye, (1995)
- [29] SAFAAİ-JAZİ, A., JEN, C.K., FARNELL, G.W. Analysis of weakly guiding Fiber acoustic waveguide, IEEE Trans. Ultra. Ferroelect. Freq. Control, Vol. UFFC-33, pp. 59-68, (1986)
- [30] WILSON, L.O., MORRISON, J.A. Wave propagation in piezoelectric rod of hexagonal crystal symmetry, Q.J.Mech.Appl. Math., Vol. 30, pp.387-395, (1977)
- [31] PAUL, H.S. Vibrations of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystal, J.Acou. Soc.Am., Vol. 40, pp.1077-1080, (1966)
- [32] WINKEL, V., OLIVEIRA, J.E.B., DAI, J.D., JEN, C.K., Acoustic wave propagation in piezoelectric fibers of hexagonal crystal symmetry, IEEE Trans.Ultrason. Ferroelec. Frequen. Contr., Vol. 42, pp. 949-955, (1995)

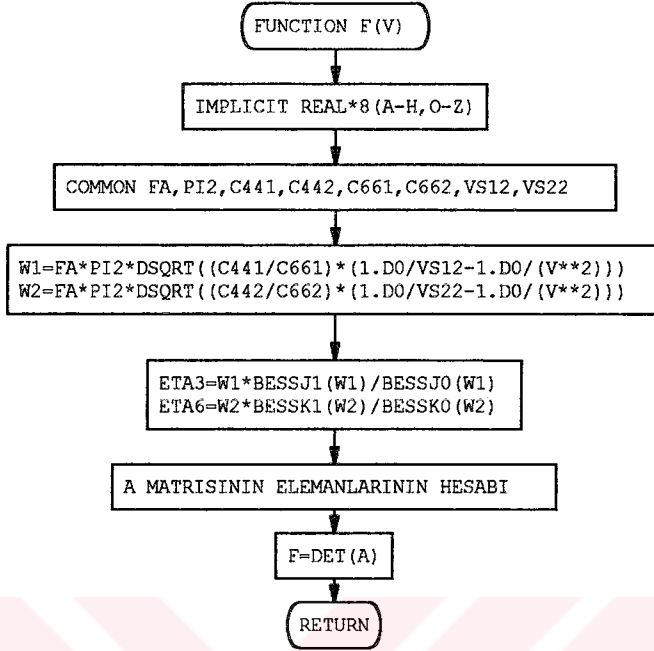
Tablo 1. Heksagonal Malzemelere İlişkin Sabitler

	ρ kg/m ³	c_{11} 10 ¹⁰ N/m ²	c_{33} 10 ¹⁰ N/m ²	c_{44} 10 ¹⁰ N/m ²	c_{12} 10 ¹⁰ N/m ²	c_{13} 10 ¹⁰ N/m ²
Çinko Oksit	5680	20.97	21.09	4.247	12.11	10.51
Çinko Sülfür	3980	12.04	12.76	2.28	6.92	6.20
Titanyum	4500	16.2	18.1	4.67	9.2	6.9
Kadmiyum Sülfür	4820	9.07	9.38	1.504	5.81	5.1
Kadmiyum Selenit	5684	7.41	8.36	1.317	4.52	3.93
Berilyum Oksit	3009	46.06	49.16	14.77	12.65	8.848

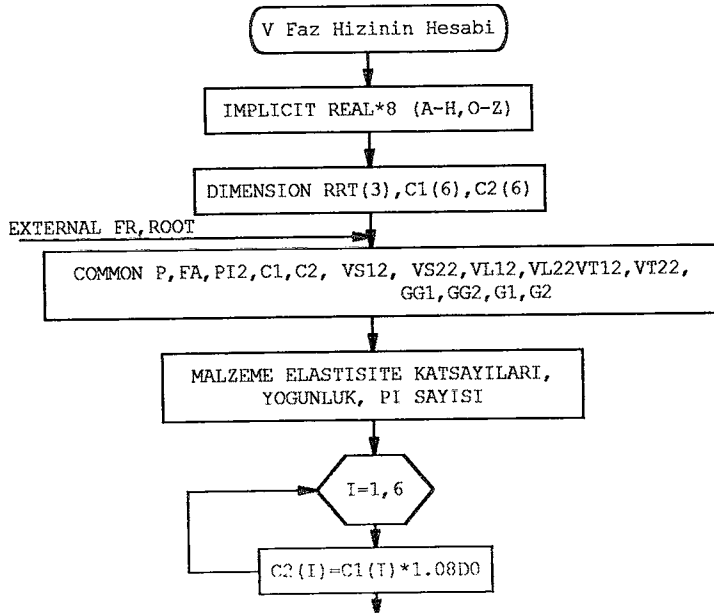
PROGRAM AKIŞ DIAGRAMLARI

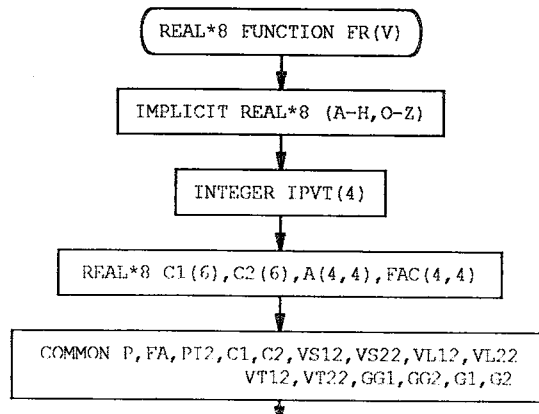
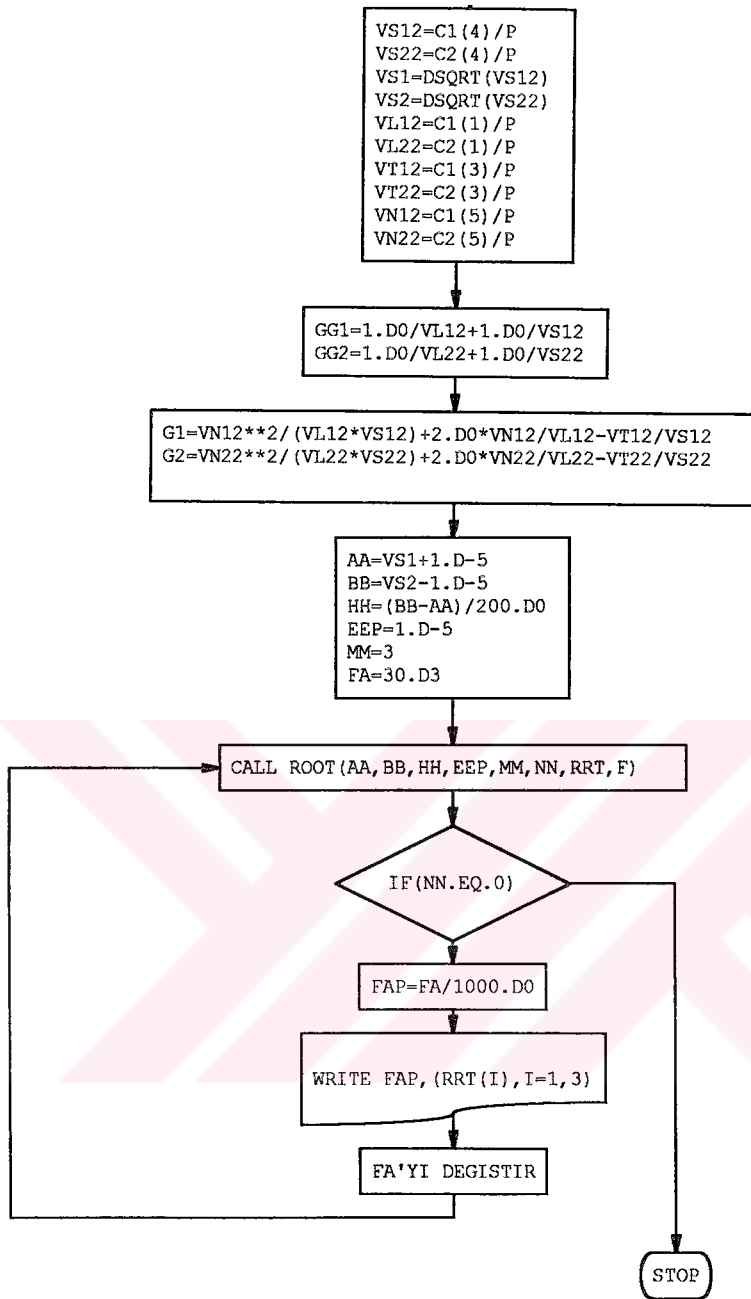
1. Torsiyonel mod için yazılan programın akış diagramı (2. Bölüm)





2. Radyal eksenel mod için yazılan programın akış diagramı (2. Bölüm)





```

E1=GG1+G1/(V*V)
E2=GG2+G2/(V*V)
F1=(1.D0/VS12-1.D0/V**2)*(1.D0-VT12/V**2)/VL12
F2=(1.D0/VS22-1.D0/V**2)*(1.D0-VT22/V**2)/VL22

```

```

U1=FA*PI2*DSQRT(0.5D0*(E1+DSQRT(E1*E1-4.D0*F1)))
U1=FA*PI2*DSQRT(-0.5D0*(E2+DSQRT(E2*E2-4.D0*F2)))
X1=FA*PI2*DSQRT(-0.5D0*(E1-DSQRT(E1*E1-4.D0*F1)))
X2=FA*PI2*DSQRT(-0.5D0*(E2-DSQRT(E2*E2-4.D0*F2)))

```

```

ETA1=X1*BESSI1(X1)/BESSIO(X1)
ETA2=-U1*BESSJ1(U1)/BESSJO(U1)
ETA4=-X2*BESSK1(X2)/BESSKO(X2)
ETA5=-U2*BESSK1(U2)/BESSKO(U2)

```

```

R1=((PI2*FA)**2*(P*V-C1(4)/V)+C1(1)*X1*X1*V)/PI2*FA*(C1(4)+C1(5))
R2=((PI2*FA)**2*(P*V-C2(4)/V)+C2(1)*X2*X2*V)/PI2*FA*(C2(4)+C2(5))
T1=((PI2*FA)**2*(P*V-C1(4)/V)-C1(1)*U1*U1*V)/PI2*FA*(C1(4)+C1(5))
T2=((PI2*FA)**2*(P*V-C2(4)/V)-C2(1)*U2*U2*V)/PI2*FA*(C2(4)+C2(5))

```

A MATRISININ ELEMENLARININ HESABI

```

DEL=0.0
ISW=1
ZZ=1.

```

J=1,4

K=1,4

L=1,4

M=1,4

IF (K.EQ.J.OR.L.EQ.J.OR.K.EQ.L) E

H

IF (K.EQ.M.OR.L.EQ.M.OR.J.EQ.M) E

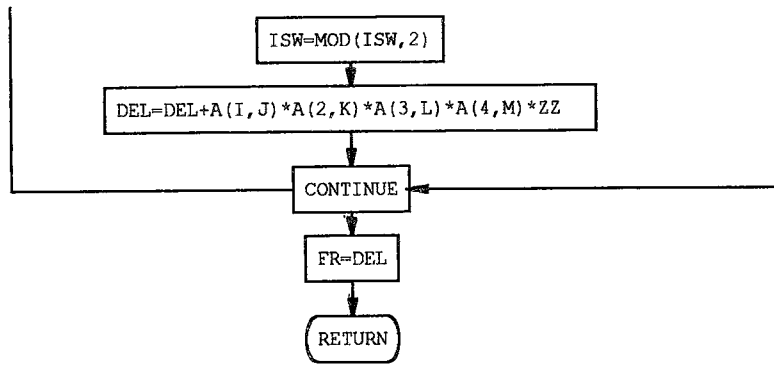
H

IF (ISW.EQ.0) E

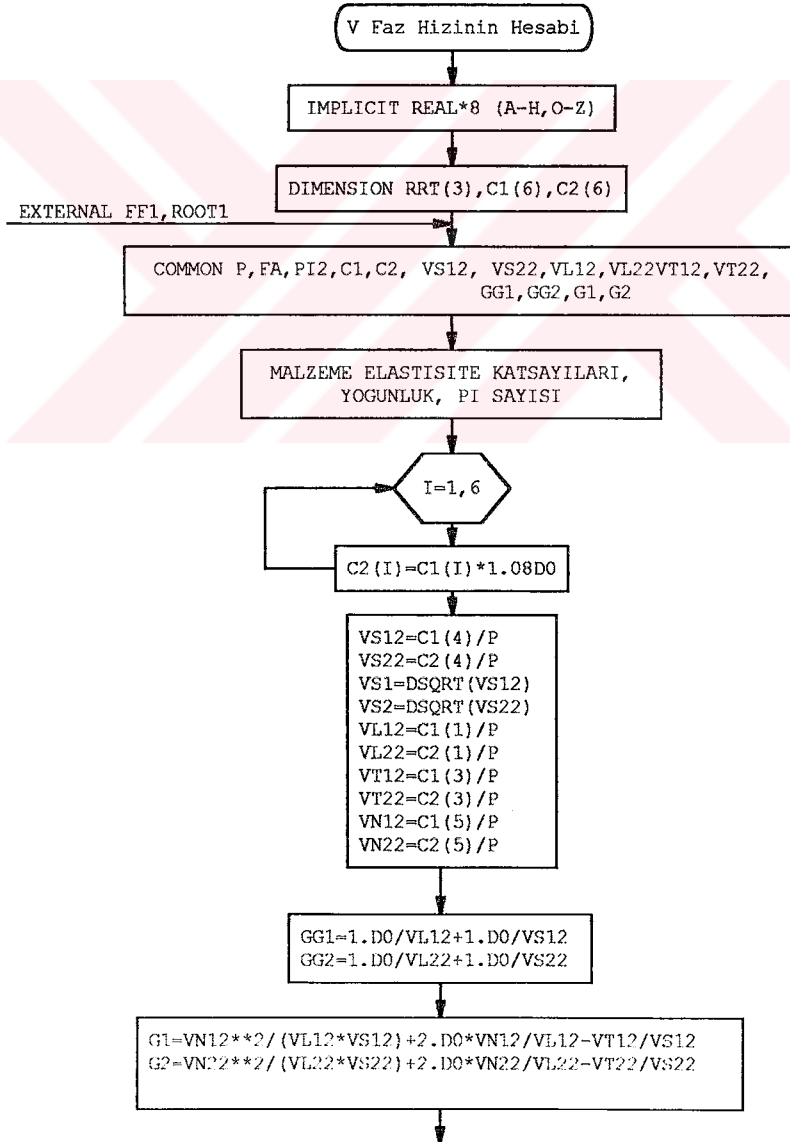
H

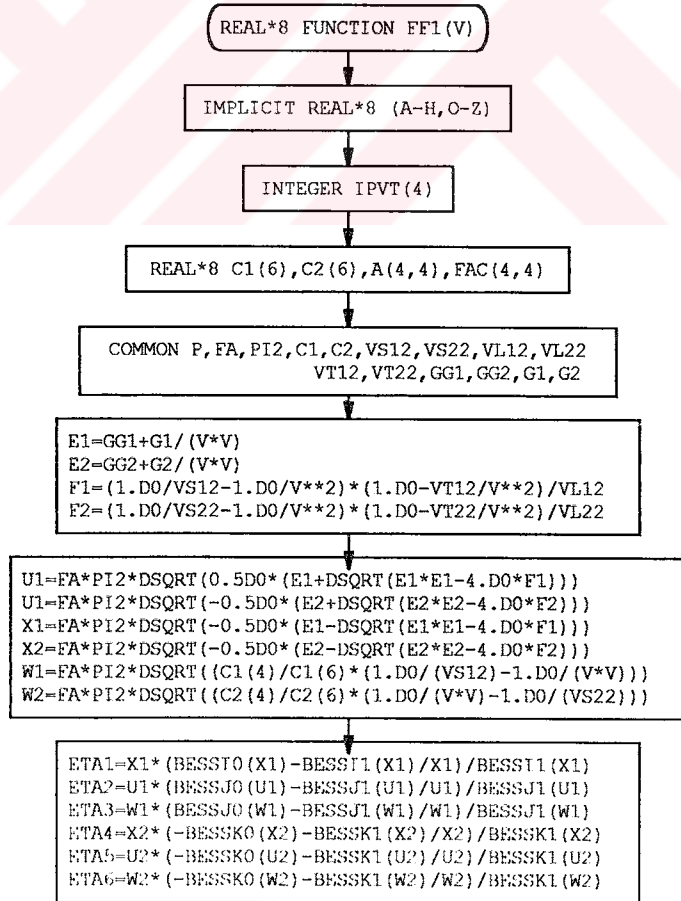
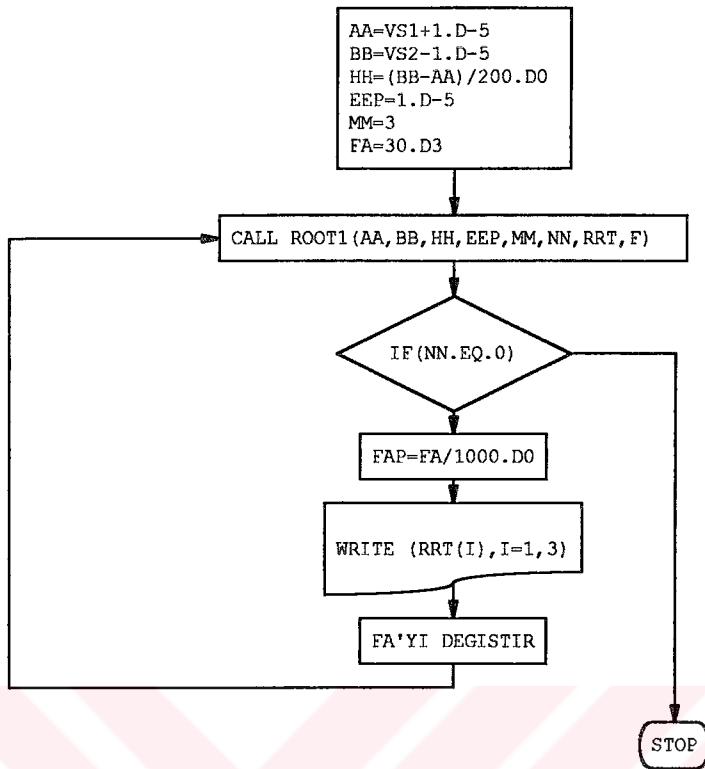
ZZ=-1.*ZZ

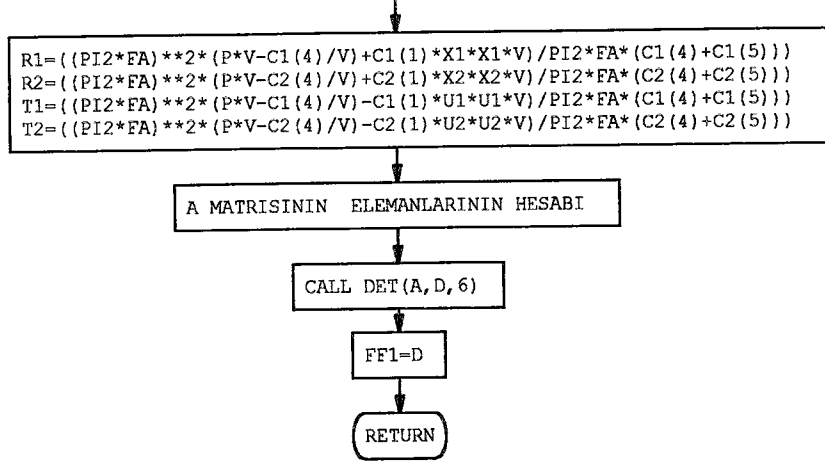
ISW=ISW+1



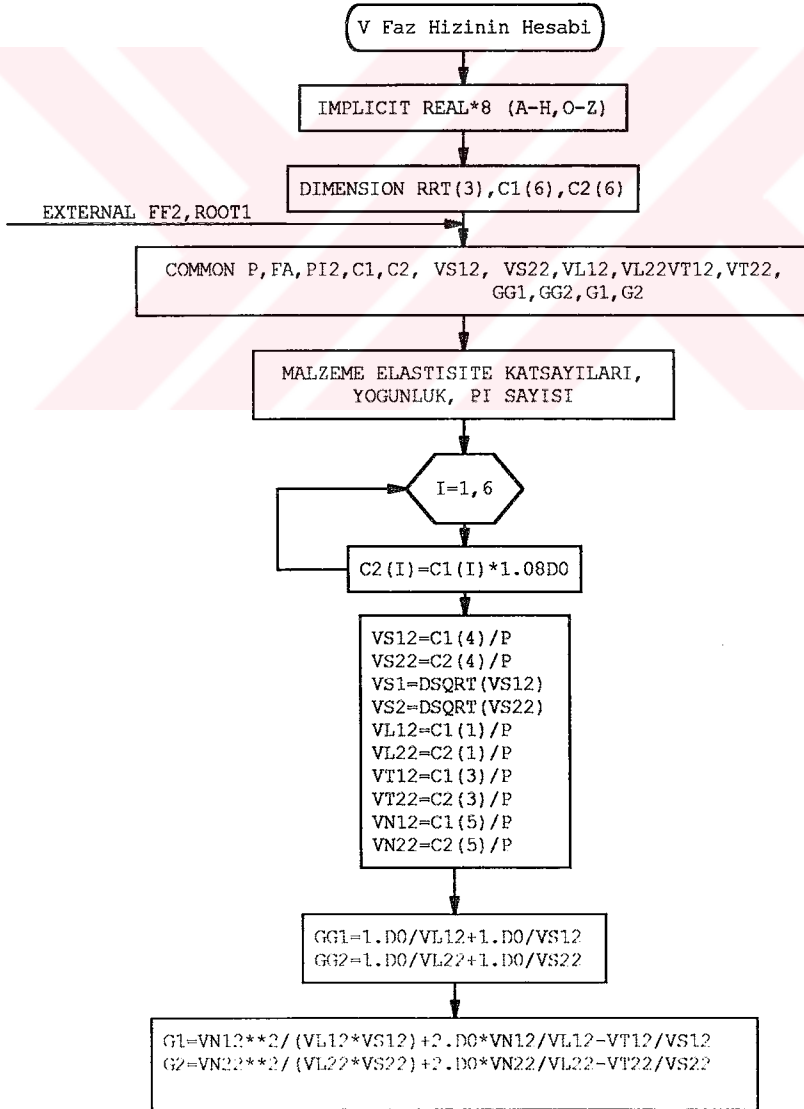
3. Fleksural F_{1m} mod için yazılan programın akış diagramı (2. Bölüm)

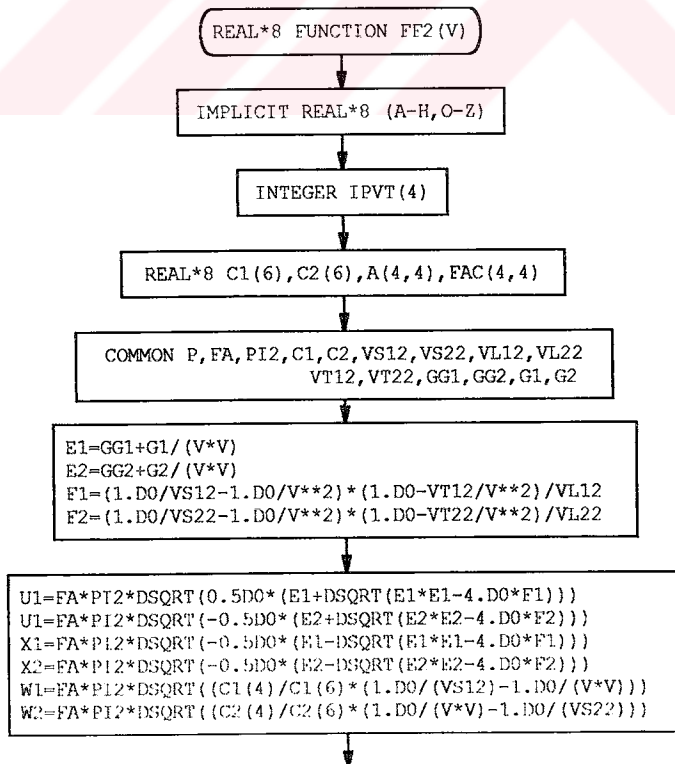
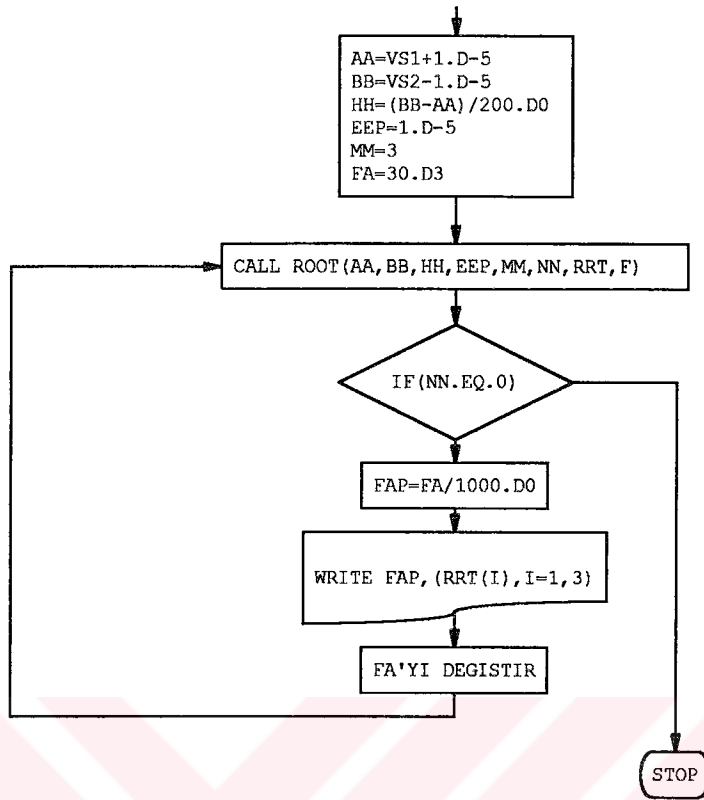


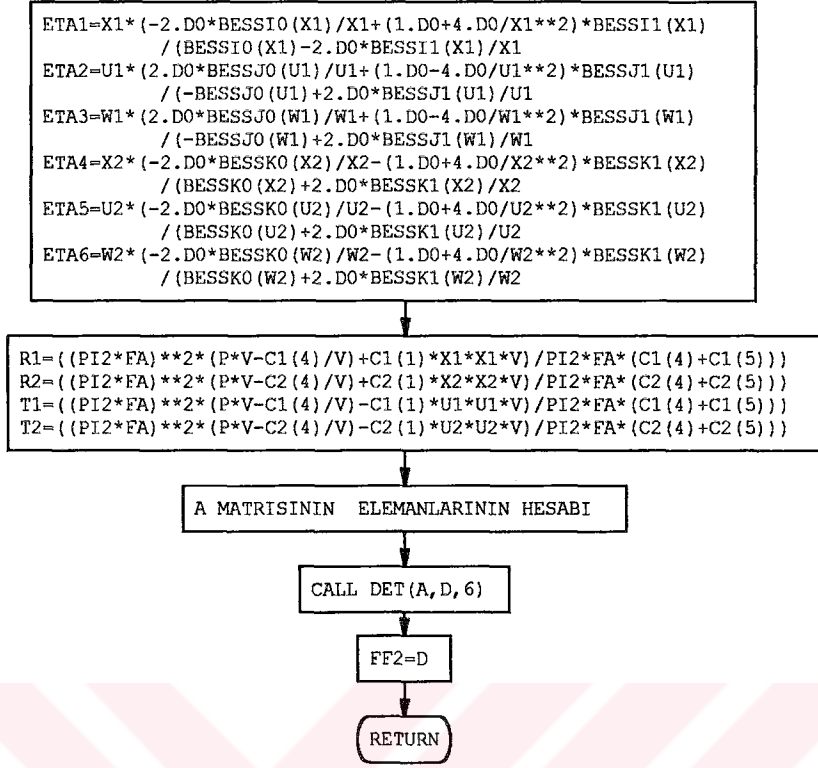




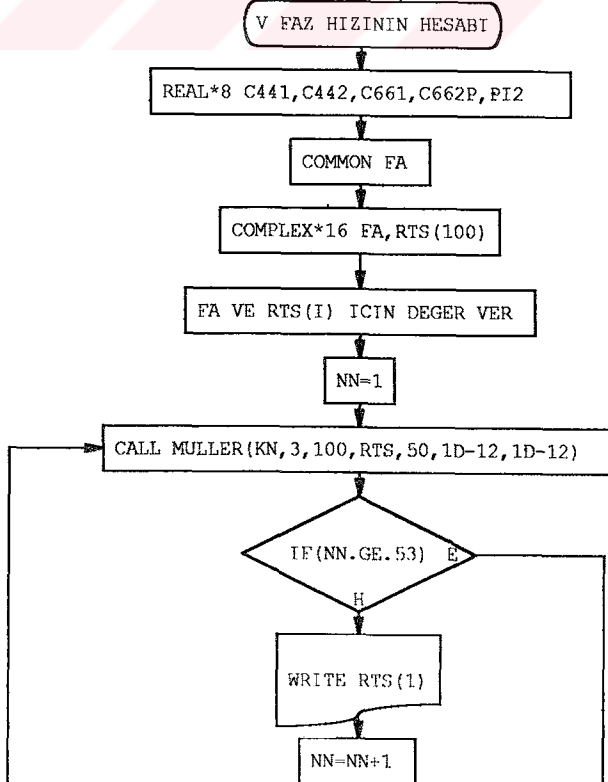
4. Fleksural F_{2m} mod için yazılan programın akış diagramı (2. Bölüm)

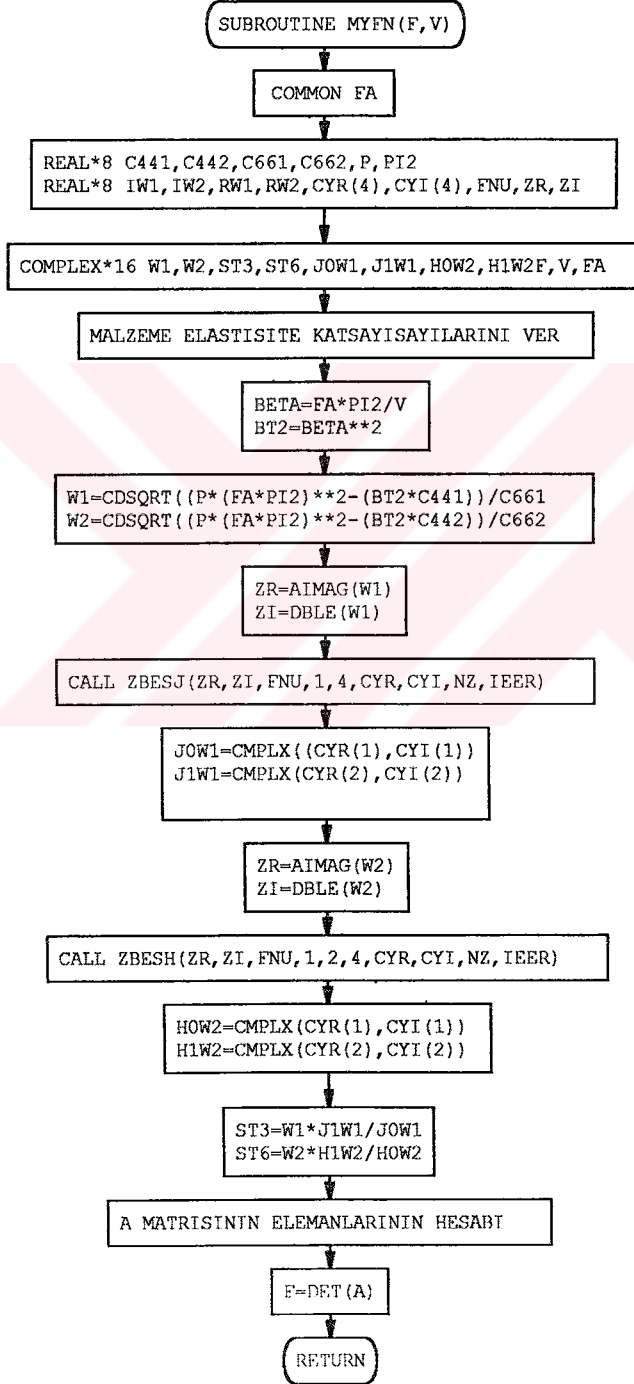
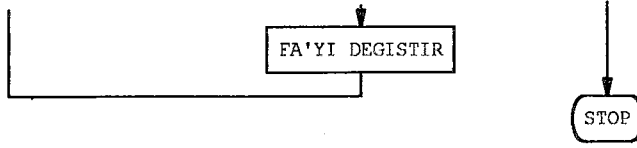




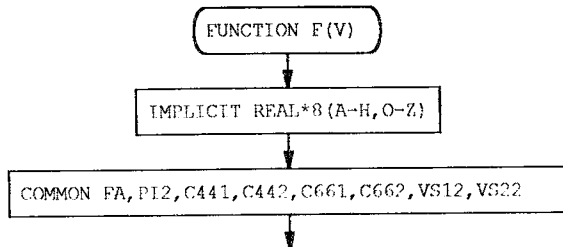
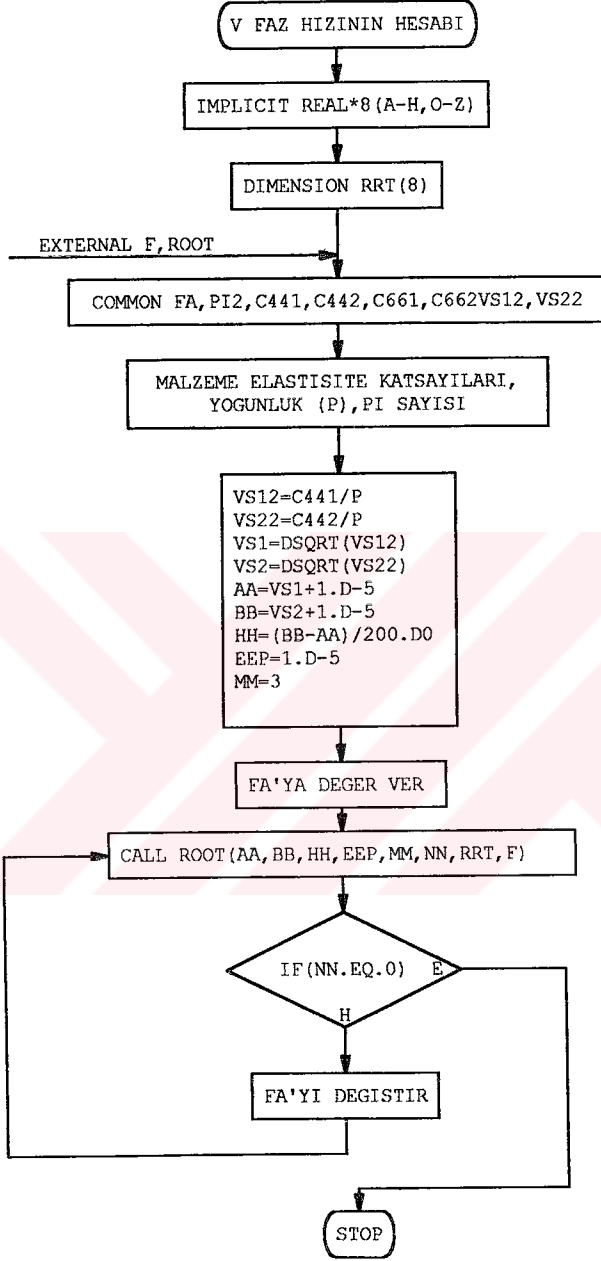


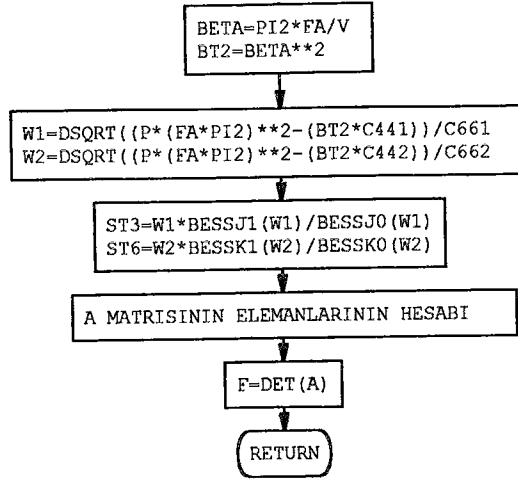
5. Torsiyonel mod için yazılan programın akış diagramı (kompleks değişkenler için)



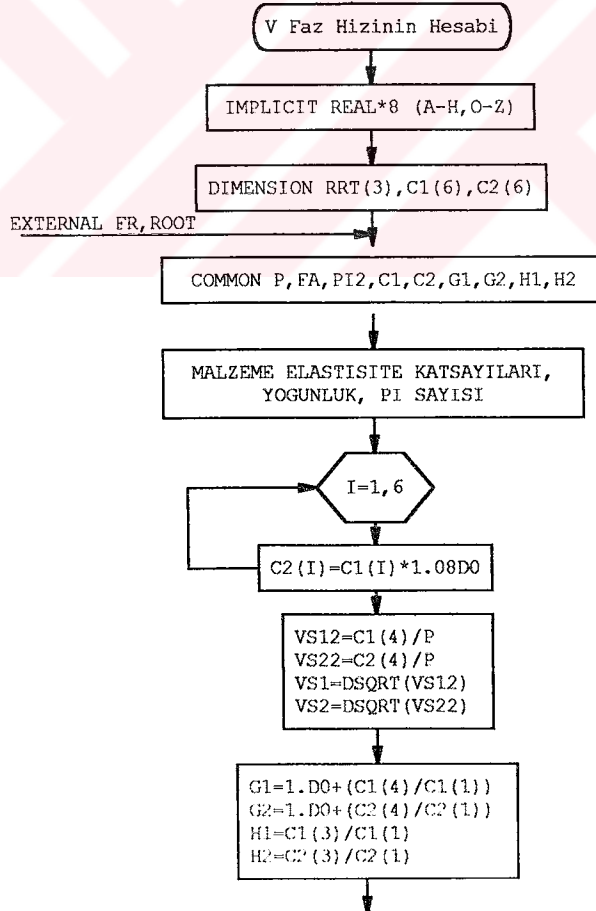


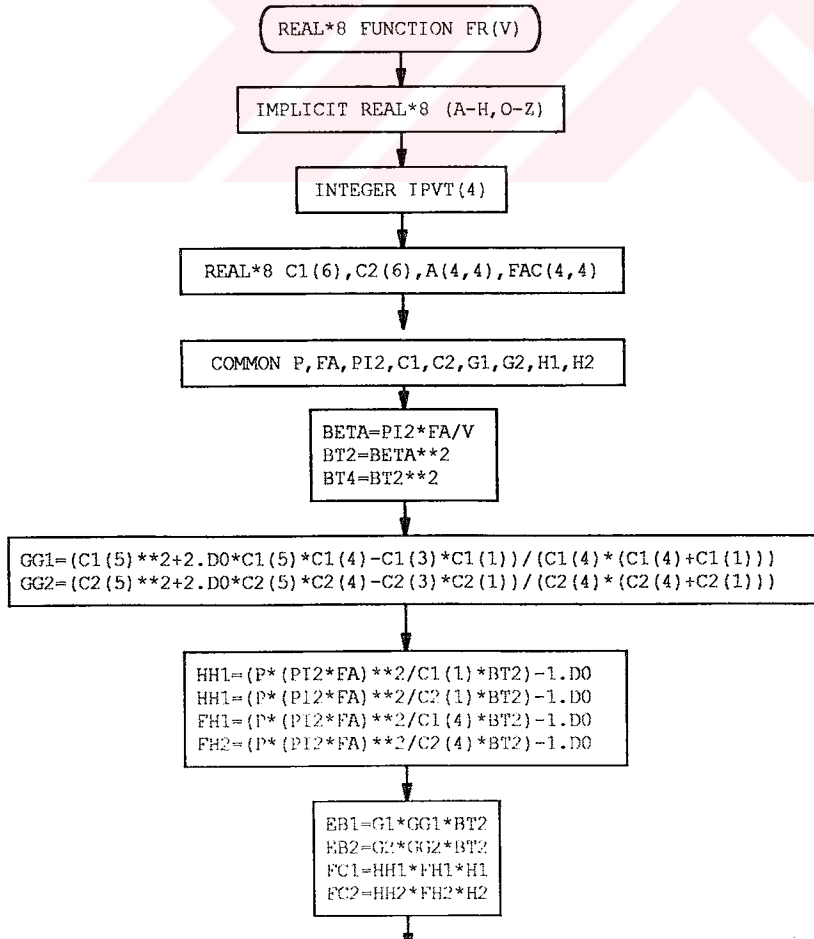
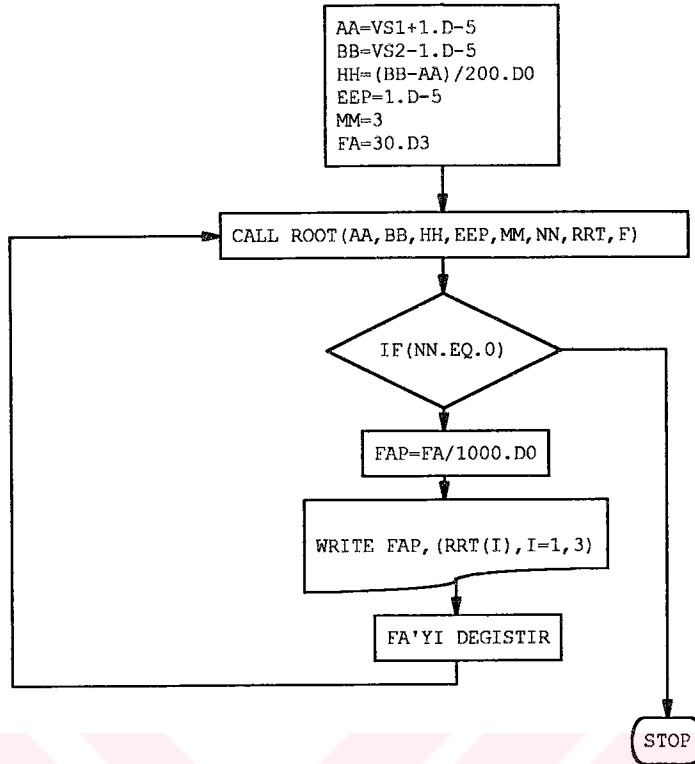
6. Torsiyonel mod için yazılan programın akış diagramı (3. Bölüm)

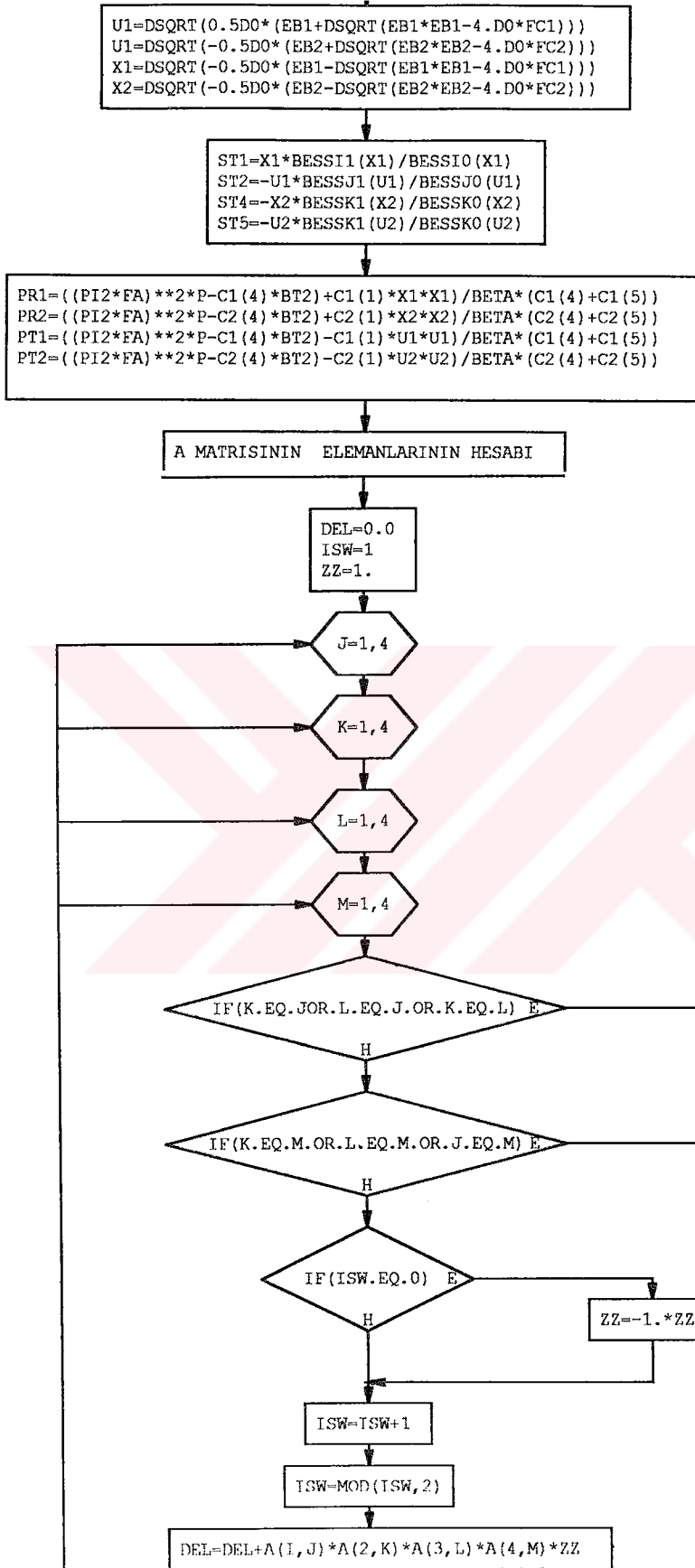


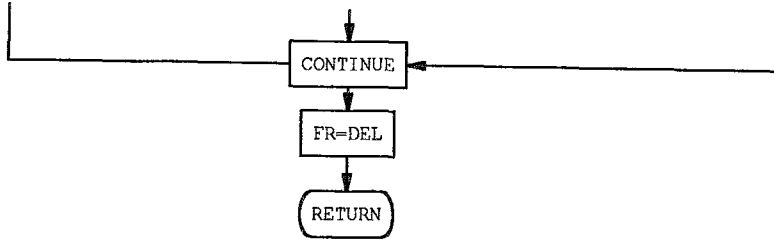


7. Radyal eksenel mod için yazılan programın akış diagramı (3. Bölüm)

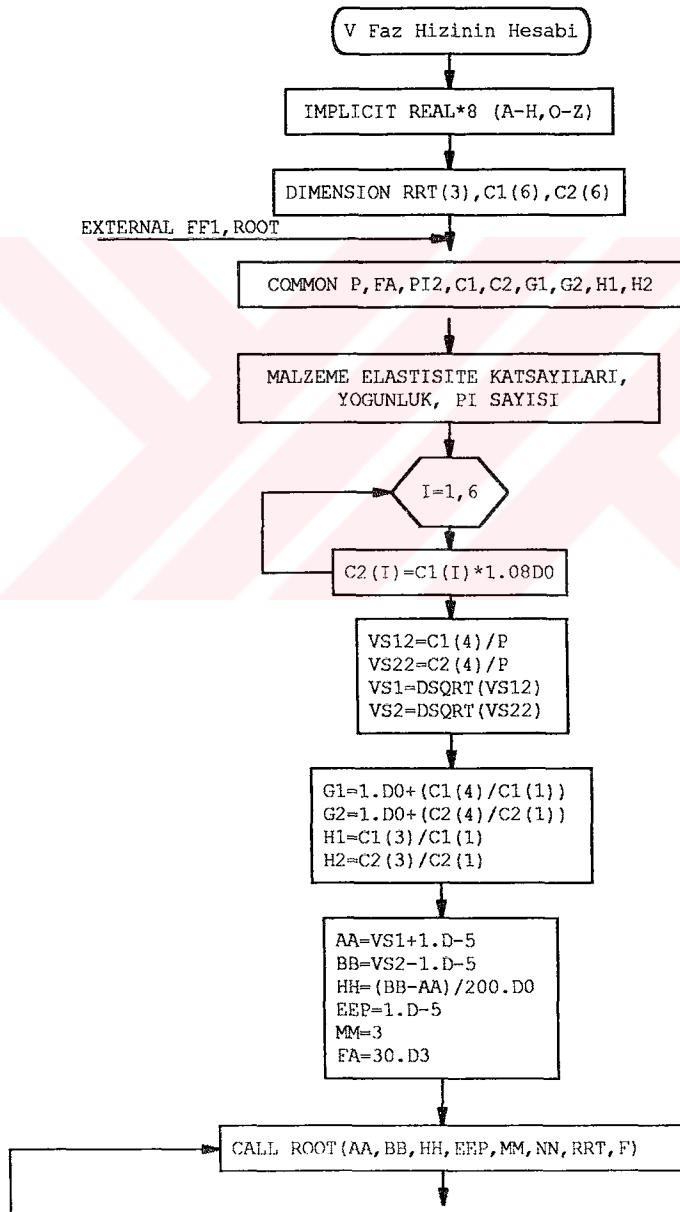


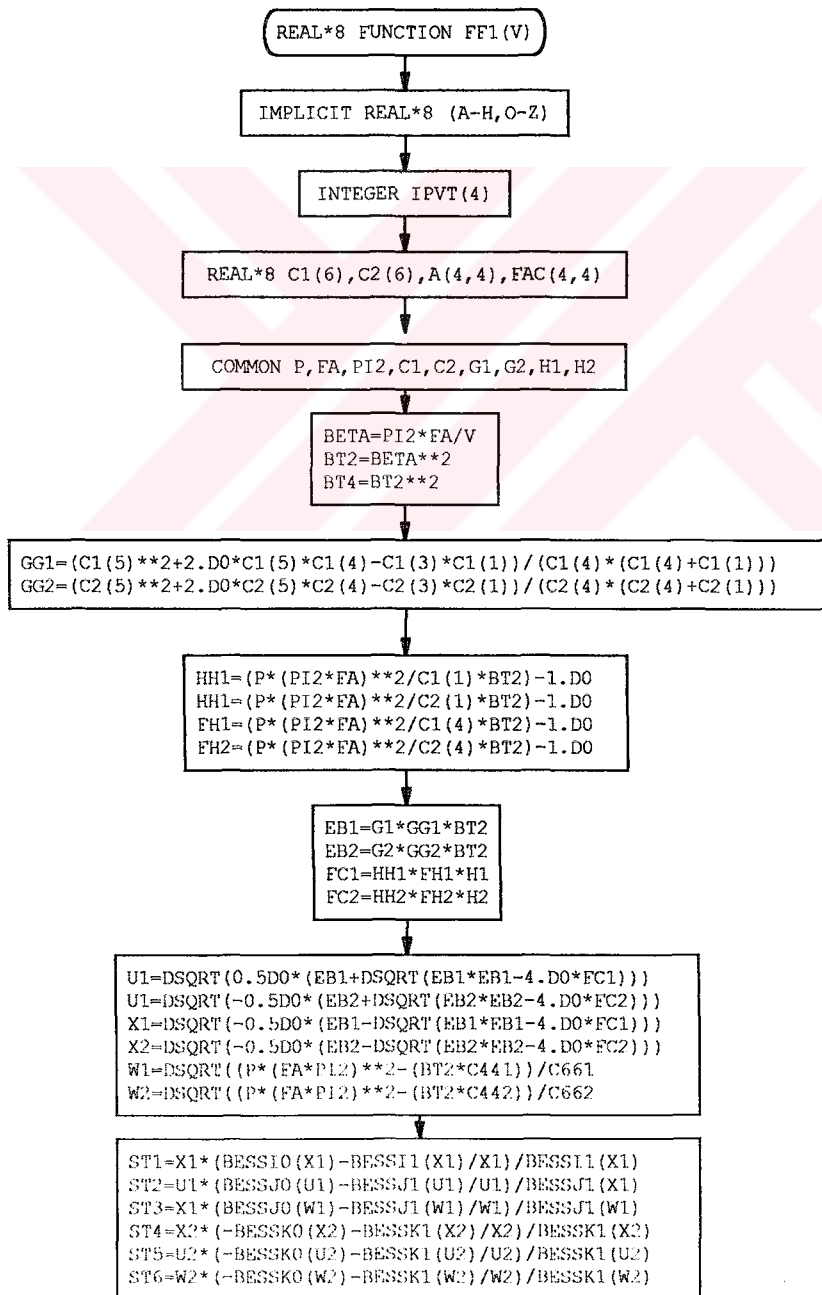
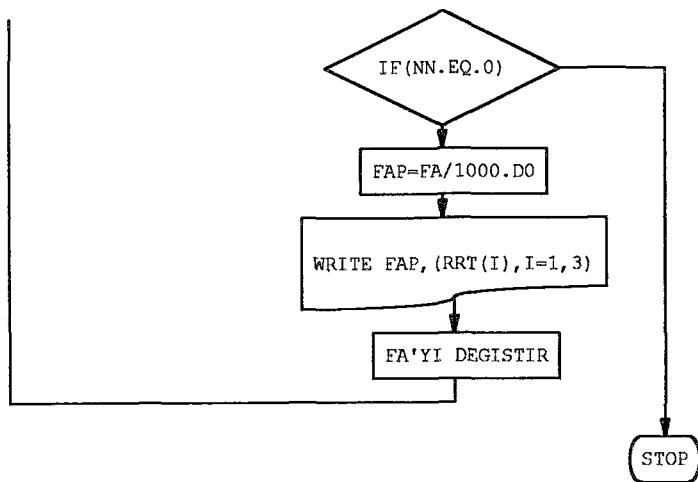


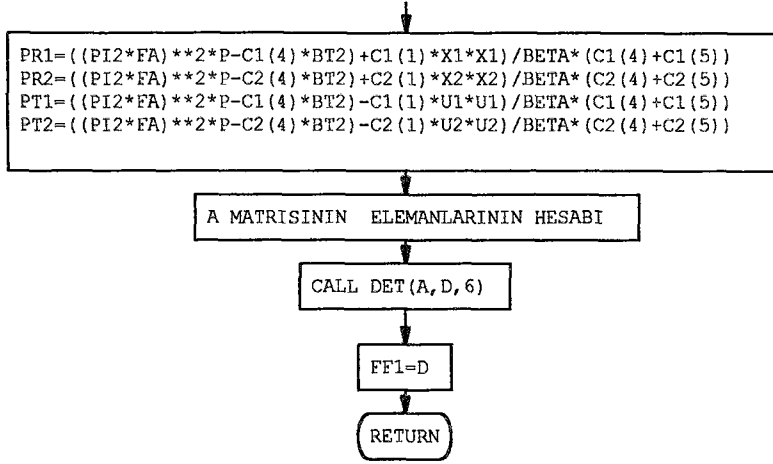




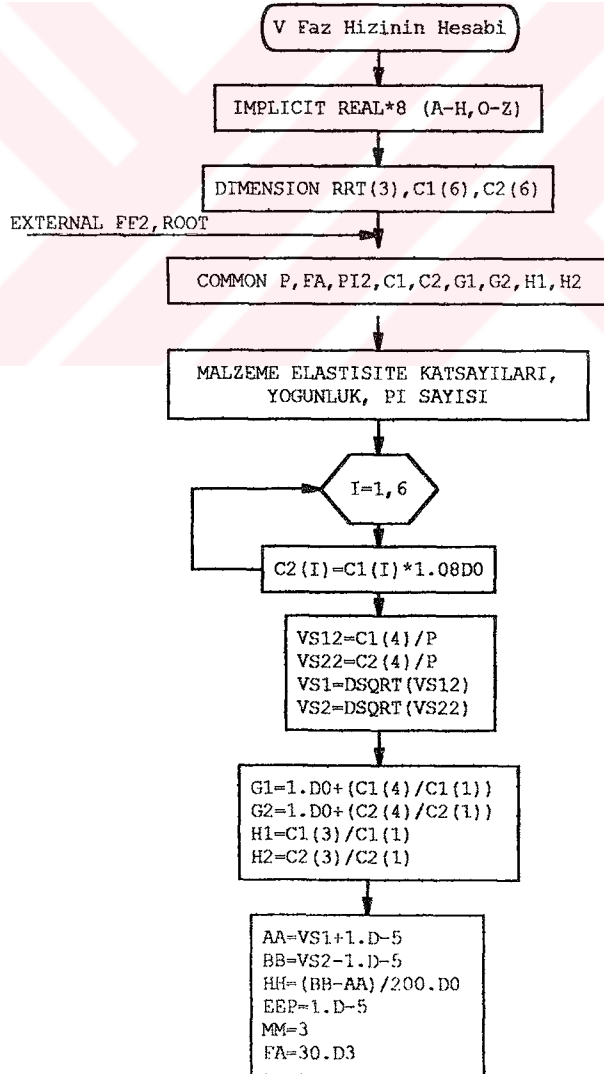
8. Fleksural F_{Im} mod için yazılan programın akış diagramı (3. Bölüm)

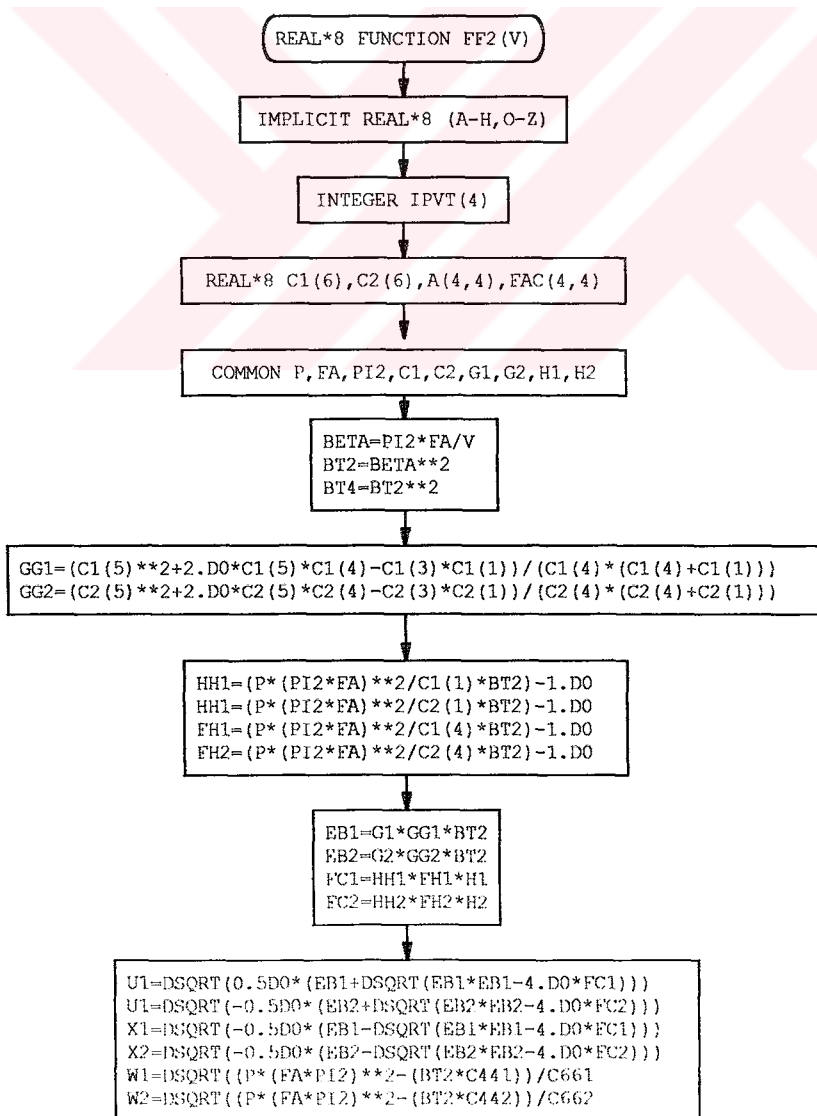
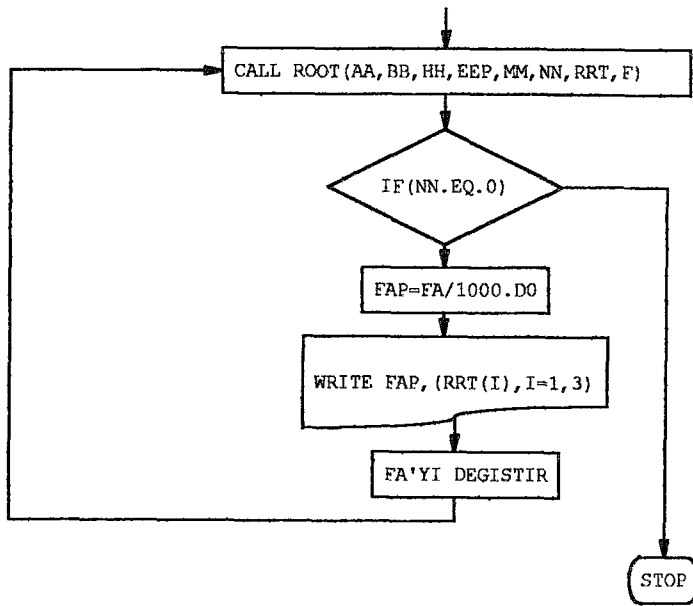


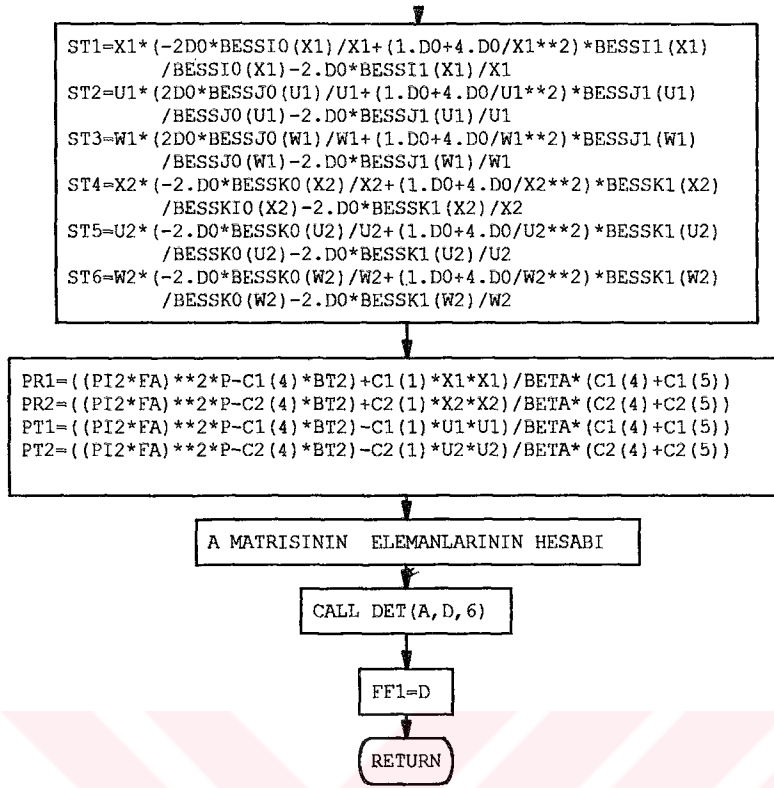




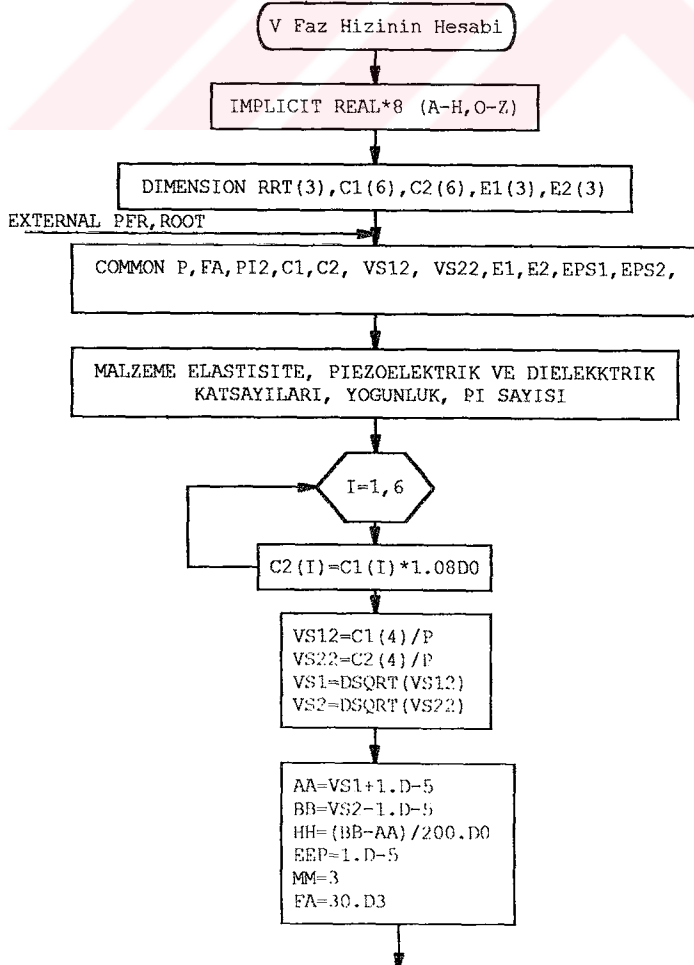
9. Fleksural F_{2m} mod için yazılan programın akış diagramı (3. Bölüm)

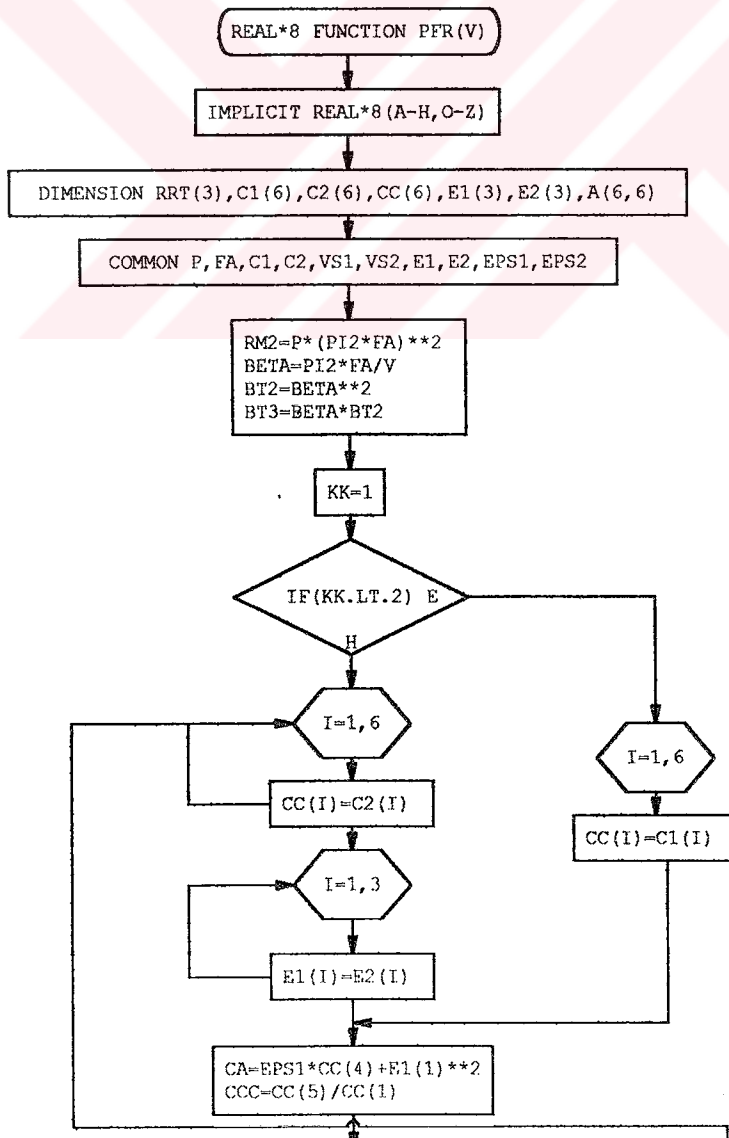
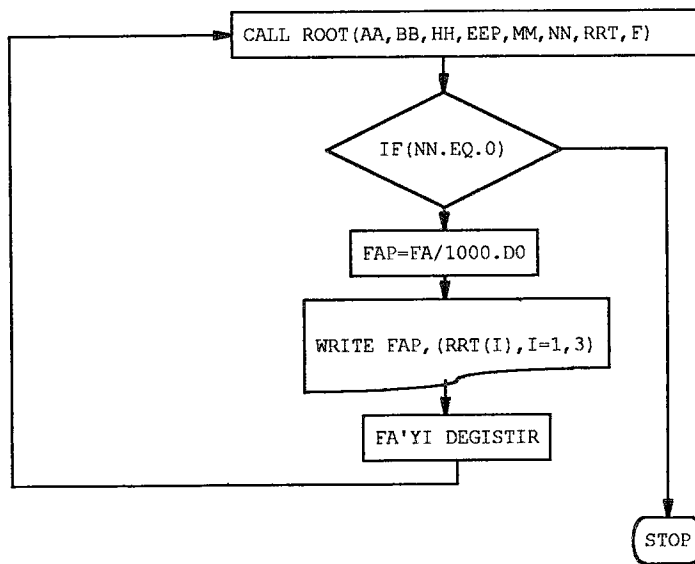


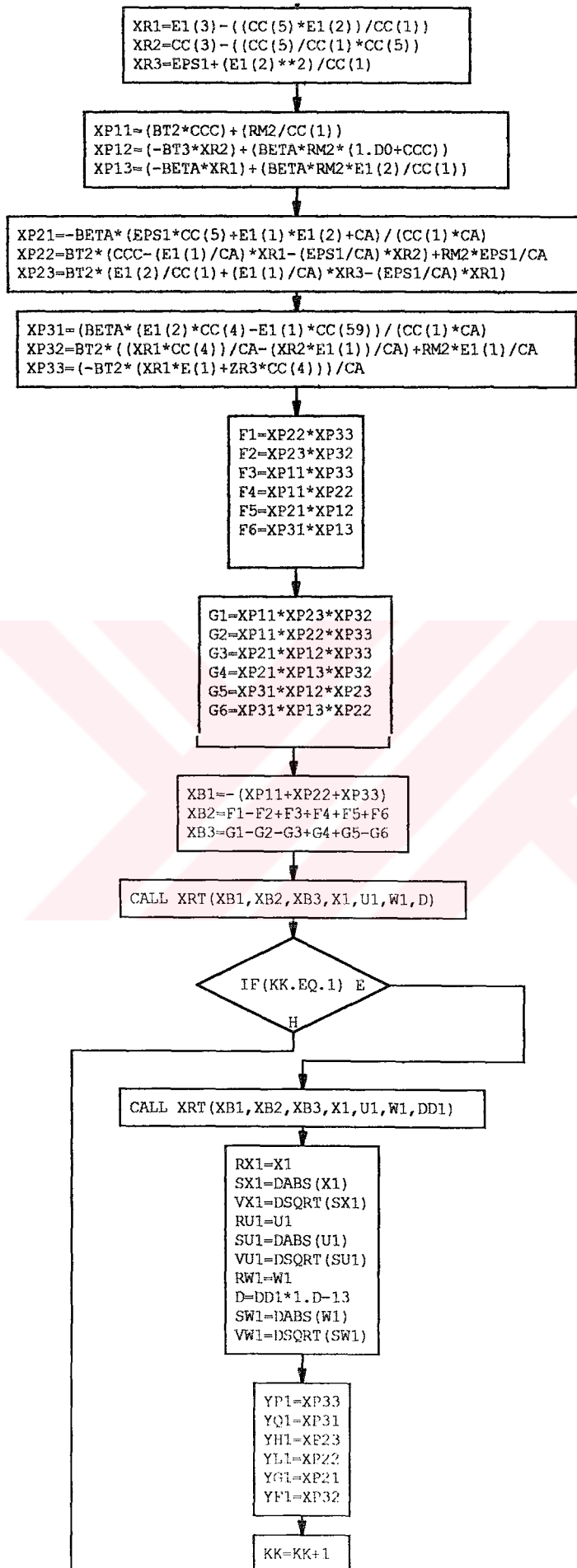


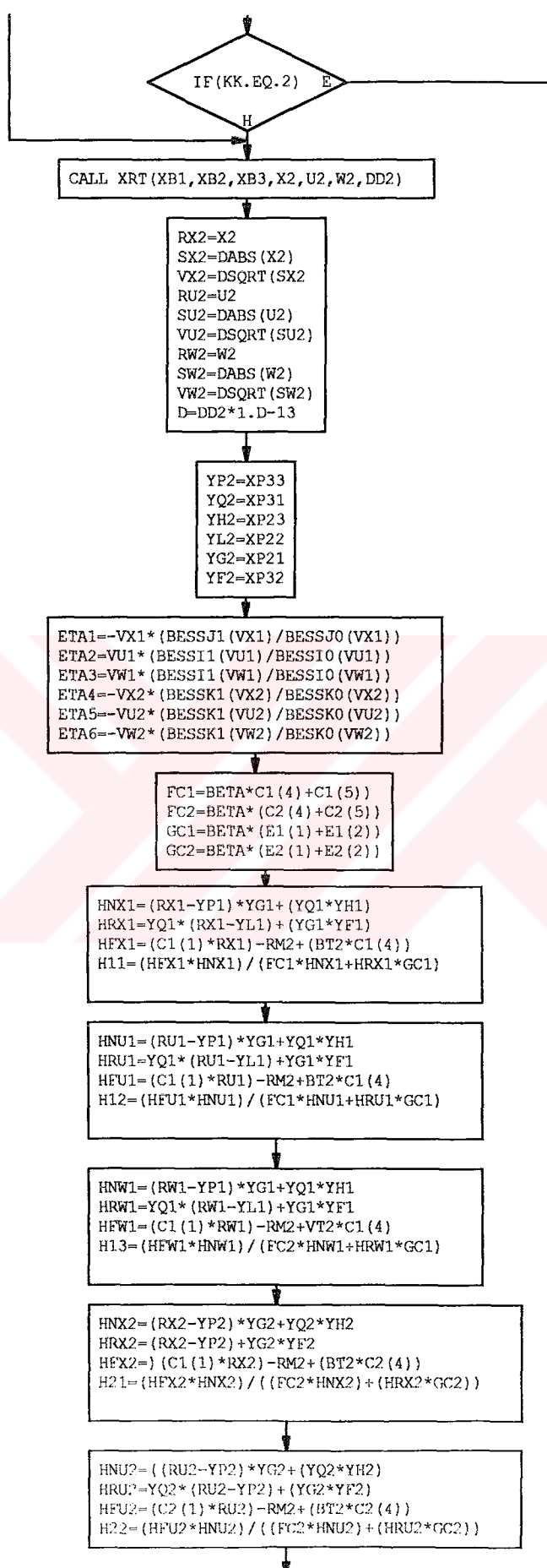


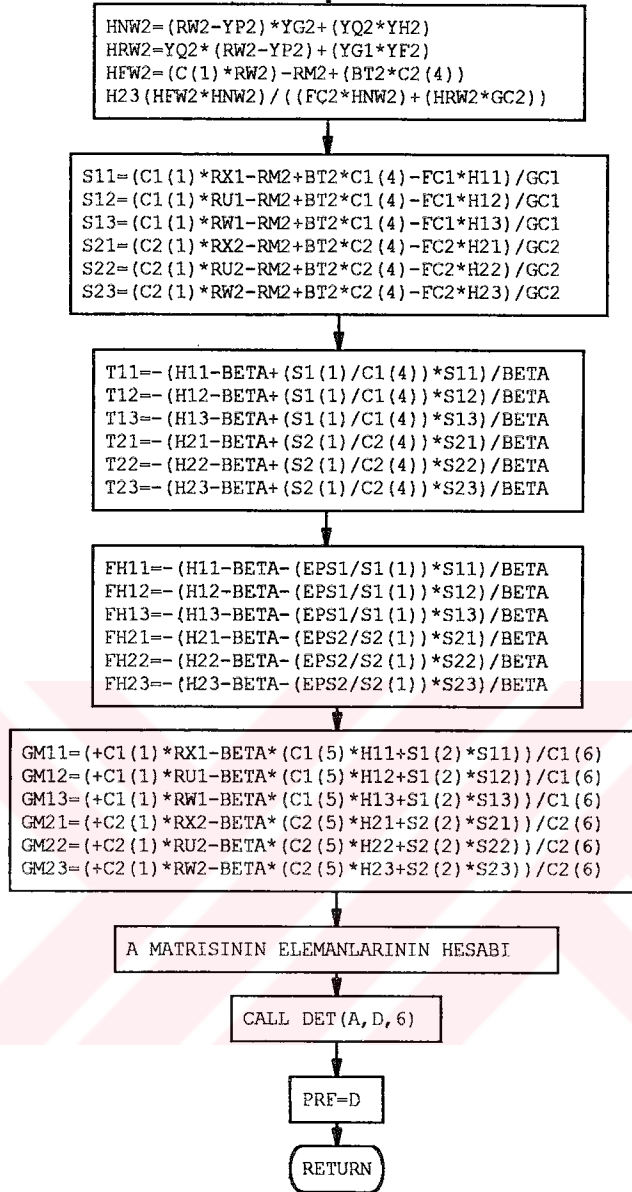
10. Radyal aksenel mod için yazılan programın akış diagramı (4. Bölüm)



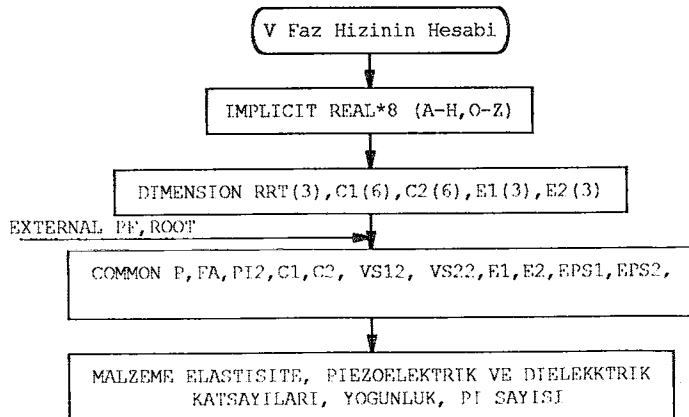


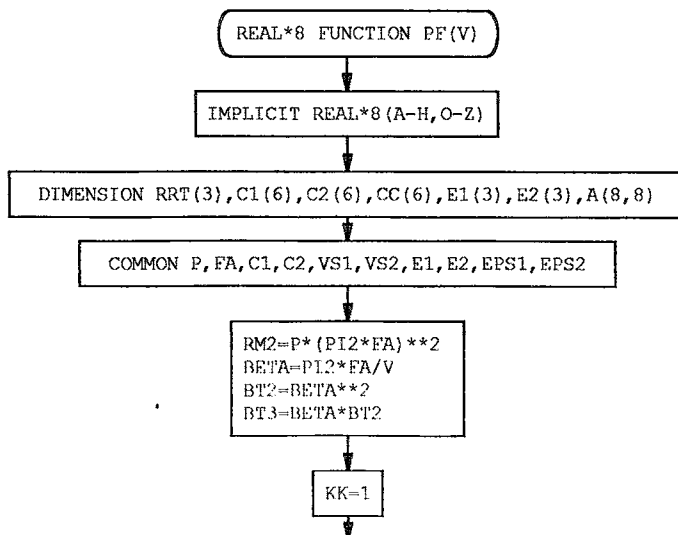
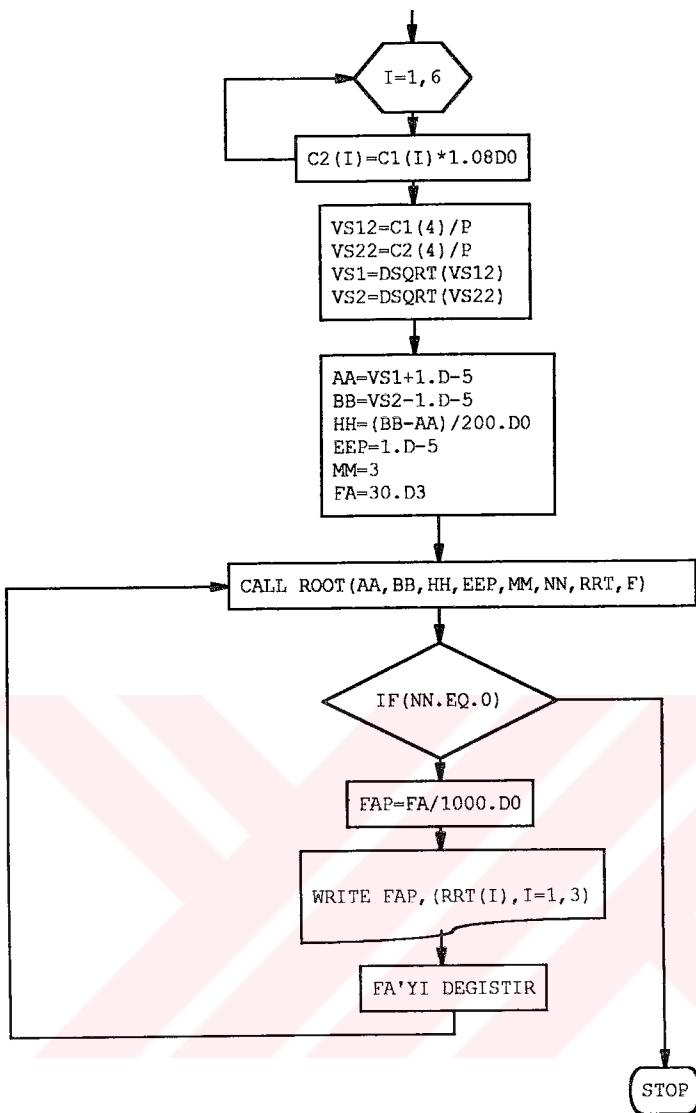


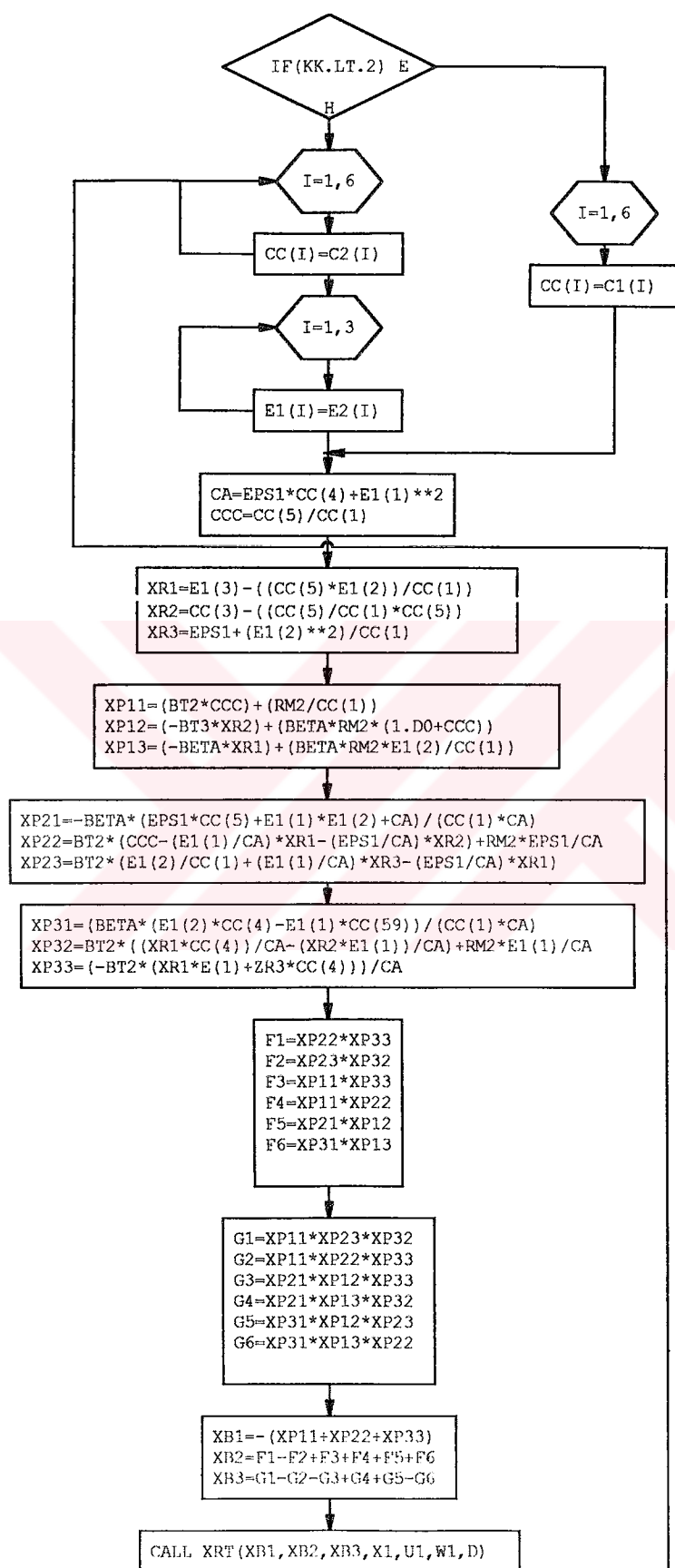


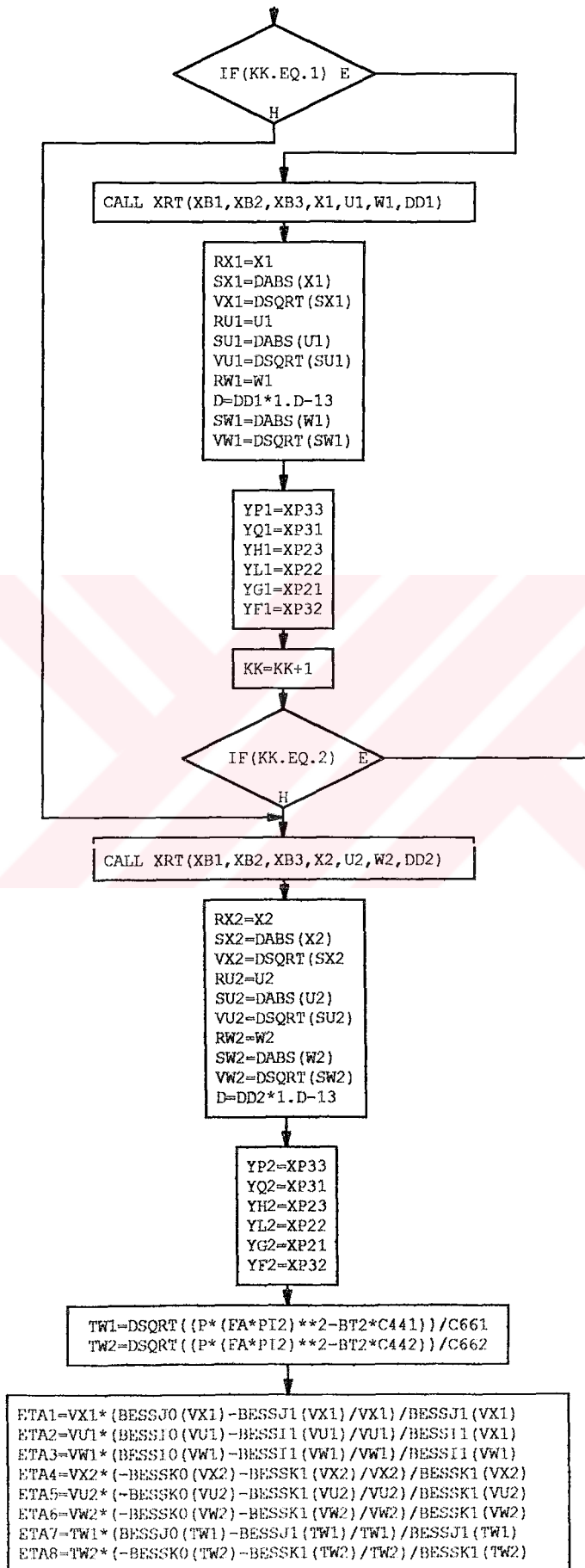


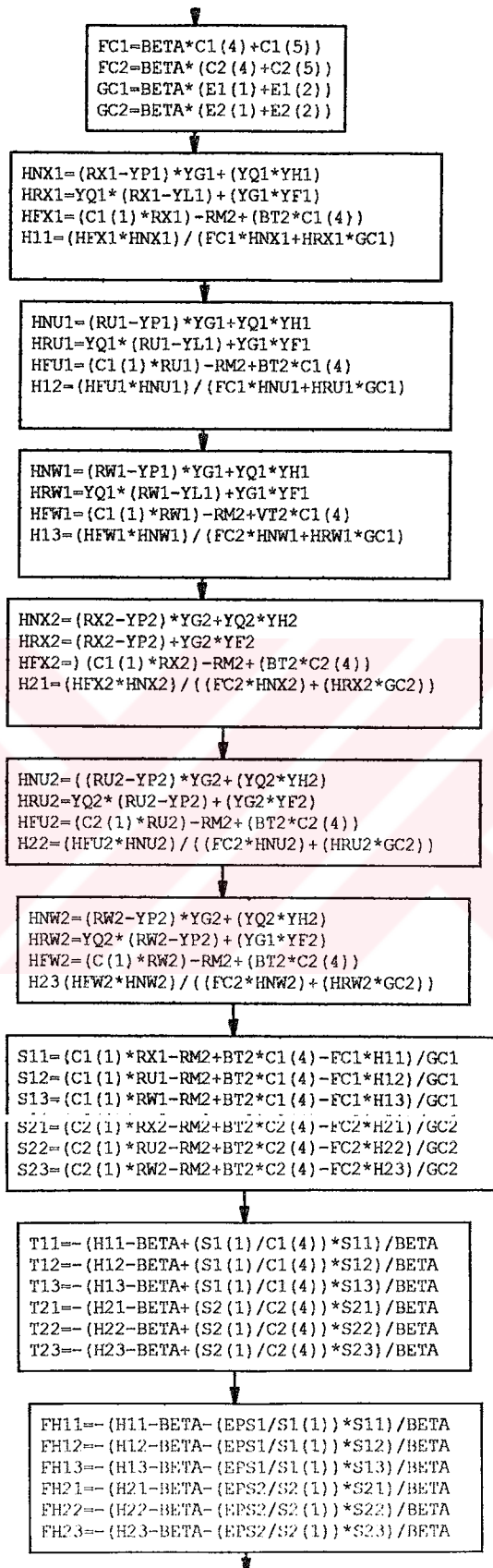
11. Fleksural F_{1m} mod için yazılan programın akış diagramı (4. Bölüm)

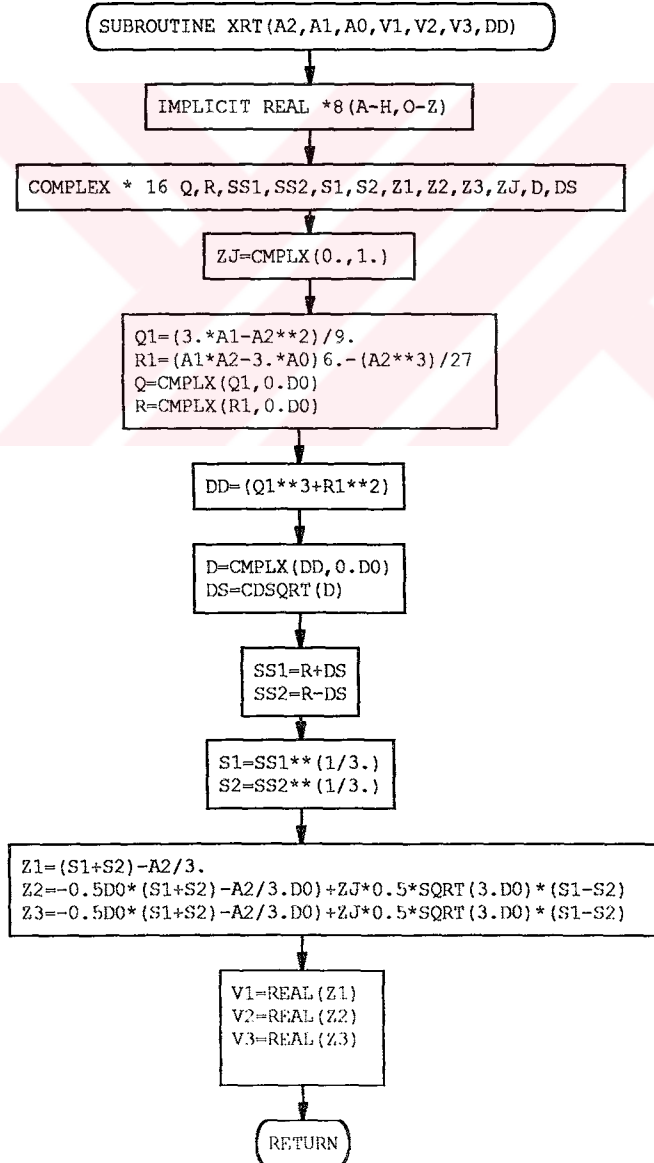
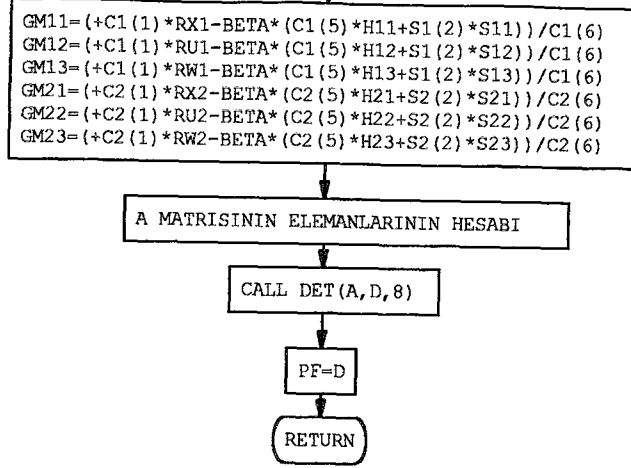












ÖZGEÇMİŞ

Mürvet (Kırcı) Üçer 1962 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini İstanbul Çemberlitaş Kız Lisesi'nde tamamladı. İ.T.Ü. Elektrik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Bölümünü 1983 yılında bitirdi. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme programına kabul edildi. 1987 yılında "Odaklayıcı Transdüktörlerle Konvülsiyon İşleminin Gerçekleştirilmesi" isimli tezi vererek Yüksek mühendis ünvanı aldı.

1986 yılından beri İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi Devreler ve Sistemler Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.